T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GAMMA OPERATÖRLERİNİN YENİ MODİFİKASYONLARININ İNCELENMESİ

ÖMÜR BETUS

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. FUAT USTA

DÜZCE, 2021

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GAMMA OPERATÖRLERİNİN YENİ MODİFİKASYONLARININ İNCELENMESİ

Ömür BETUS tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. FUAT USTA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. FUAT USTA
Düzce Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. Emrah Evren Kara
Düzce Üniversitesi ____________________

Doç. Dr. Serkan DEMİRİZ
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi ____________________

Tez Savunma Tarihi: 24 Haziran 2021

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

24 Haziran 2021

Ömür BETUS

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Fuat USTA en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

24 Haziran 2021 **Ömür BETUS**

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

SİMGELER

$B_\phi(R^+)$	$C(R^+)$ uzayının ağırlıklı uzayı
$C[a,b]$	[a,b] aralığıda sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_b[0,\infty)$	$[0,\infty)$ aralığında reel değerli , sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı
$C(R^+)$	$R^+ \to R$ olan tüm sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_\phi(R^+)$	$B_\phi(R^+)$ uzayının ağırlıklı uzayı
$C_\phi^K(R^+)$	$C_\phi(R^+)$ uzayının başka bir alt uzayı
$G_n(f,x)$	Lupas ve Müller tipi operatör
$G_n^*(f,x)$	Zeng tipi operatör
$\mathcal{G}_n(f,x)$	Modifiye Gamma operatörü
$\mathcal{G}_n^*(f,x)$	Modifiye Gamma operatörü
$(L_n)_n$	Lineer operatörler dizisi
$Lip_{M_f}(s)$	Lipschitz sınıfı fonksiyonlar uzayı
$Lip_M^{\alpha,\beta}(s)$	İki parametreli Lipschitz tipi fonksiyonlar uzayı
$\omega(f,\delta)$	süreklilik modülü
$\omega_{x_0}(f,\delta)$	f fonksiyonunun standart süreklilik modülü
$\tilde{\omega}_s(f,x)$	Lipschitz tipi maksimal fonksiyon
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu

ÖZET

GAMMA OPERATÖRLERİNİN YENİ MODİFİKASYONLARININ İNCELENMESİ

Ömür BETUS
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. FUAT USTA
Haziran 2021, 37 sayfa

Bu tezde, Bohman-Korovkin anlamında polinomları koruyan Gama operatörlerinin yeni modifikasyonu ele alınmakta ve yaklaşım özellikleri incelenmektedir: Voronovskaya tipi teoremler, ağırlıklı yaklaşım ve yakınsama hızı yakalanmaktadır. Yeni modifiye edilen operatörlerin klasik olanlara göre etkinliği de bazı açılardan sunulmaktadır. Gamma operatörlerinin yeni yapılarının performansını tek boyutlu bir yaklaşım bağlamında vurgulayan görsel örnekler de sunulmaktadır.

Anahtar sözcükler: Gamma operatörü, Voronovskaya teoremi, Ağırlıklı yaklaşım.

ABSTRACT

A NEW MODIFICATION OF GAMMA OPERATORS

Ömür BETUS
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master's Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Fuat USTA
June 2021, 37 pages

In this thesis, the new modification of Gamma operators that protect polynomials in the sense of Bohman-Korovkin is discussed and their approach properties are examined: Voronovskaya type theorems, weighted approach and convergence rate are captured. The efficiency of the newly modified operators over the conventional ones is also presented in some respects. Visual examples highlighting the performance of new structures of Gamma operators in the context of a one-dimensional approach are also presented.

Keywords: Gamma operators, Voronovskaya type theorem,Weighted approximation.

1. GİRİŞ

Matematiksel analizde önemli bir yer tutan yaklaşım teorisi 19. yüzyıldan bu yana matematikçilerin ilgisini çekmiştir. Sadece matematikçilerin değil mühendislik bilimlerinden, bilgisayar destekli geometrik tasarım ve modellemeye kadar bir çok alandaki bilim insanının çalışmalarına ışık tutmuştur. Bu alanda yapılan çalışmaları bir de bilgisayar hesaplamaları destekleyince, popüleritesini günümüze kadar korumuştur. Bu yüzden yaklaşım teorisi analizin bir çok alt dalıyla ilişkilidir. Buna ek olarak sinyal işleme ve veri gösterimi gibi fizik ve mühendislik konularında da kullanılmaktadır.

Yaklaşım teorisinin temel amacı, daha işlevsel ve özelliklerine hakim olunan fonksiyonlar yardımıyla anlamlandırılmaya çalışılan fonksiyona ulaşmaktır. Bu yolla hem ifade edilmek istenen fonksiyon daha iyi anlaşılacak hem de zor ve anlaşılması güç işlemler ve hesaplamalardan kaçınılmış olacaktır. Yaklaşım teorisi, hakkında daha önceleri bir çok araştırma ve geliştirme yapılsada ilk olarak 1885 yılında Weierstrass tarafından ana fikri sürekli fonksiyonlara yaklaşım olan ve kendi ismi ile anılan teoremi tanıtıp ispatlamısıyla büyük bir gelişme kaydetmiştir. Weierstrass [1], bu teoremde $[a,b]$ kompakt aralığındaki düzgün sürekli her fonksiyona $[a,b]$ aralığında düzgün olarak yakınsayan bir polinomlar dizisinin varlığından bahsetmiştir.

Günümüze yaklaşıldıkca bu konu hakkında litaratüre bir çok içerik kazandırılmıştır. Özellikle de geçtiğimiz 70 yılda bir çok gelişme kaydedilmiştir. Bizimde ilgimizi çeken ve yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahip olan bu gelişmelerden biride lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleridir. Özellikle 1950'li yılların başında lineer pozitif operatör dizilerinin, sınırlı ve kapalı bir aralık üzerinde sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsadığını veren teoremin ispatlanmasıyla daha da büyük bir önem kazanmıştır. 1950'lerde H. Bohman ve P. P. Korovkin birbirlerinden bağımsız olarak tanıttıkları teorem litaratürde Bohman-Korovkin teoremi [2] olarak yer almıştır. Bu teorem, $(L_n)_{n\geq 1}$ lineer pozitif operatörler dizisinin belli koşulları gerçeklemesi durumunda $C[a,b]$ uzayında olan ve tüm reel eksende sınırlı olan bir fonksiyona düzgün olarak yakınsamasını ifade eder. Dolayısıyla bu teorem lineer pozitif opratörler hakkında fikir sahibi olmamızı sağlar.

Bu gelişmeler ışığında yaklaşım teorisinde yıllarca yaklaşım özellikleri incelenen ve hedef fonksiyona daha iyi bir yaklaşıma ulaşmak için her geçen gün yenileri tanımlanan bir lineer pozitif operatörde Gamma operatörleridir. Yaklaşım teorisinde en yaygın olarak kullanılan Gamma operatörlerinden biri Lupas ve Müller [3] tarafından sunulan Gamma operatörüdür ve hedef fonksiyona daha iyi bir yaklaşım bulmak için yaygın olarak kullanılmaktadır. Lupas ve Müller'e ait Gamma operatörü şu şekildedir,

$$G_n(f,x) = \int_0^\infty K_n(x,u) f\left(\frac{n}{u}\right) du \tag{1.1}$$

$$K_n(x,u) = \frac{x^{n+1}}{\Gamma(n+1)} e^{-xu} u^n \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ := (0,\infty) \quad , \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Daha sonra, litaratürde bir kaç Gamma operatörü daha tanıtıldı. Bu yeni operatörlerin geleneksel olan operatörlere benzer yaklaşım özellikleri olduğu gösterilmiştir. Örneğin, bu operatörlerden biri de Zeng [4] tarafından şu şekilde tanıtıldı,

$$G_n^*(f,x) = \int_0^\infty K_n^*(x,u) f\left(\frac{u}{n}\right) du \tag{1.3}$$

$$K_n^*(x,u) = \frac{1}{x^n \Gamma(n)} e^{-\frac{u}{x}} u^{n-1} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ := (0,\infty) \quad , \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

Bu operatörlerin yardımıyla, hedef fonksiyona daha iyi bir yakınsama sağlayan modifiye edilmiş Gamma operatörü inşa edeceğiz. Geleneksel Gamma operatörlerinden hareketle modifiye ettiğimiz Gamma operatörlerimizden ilki [5] şu şekildedir,

$$\mathcal{G}_n(f,x) = \int_0^\infty K_n(x,u) f(nu) du \tag{1.5}$$

$$K_n(x,u) = \frac{x^{n+3}}{\Gamma(n+3)} e^{-x/u} u^{-n-4} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ := (0,\infty) \quad , \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.6}$$

ikincisi [6] aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\mathcal{G}_n^*(f,x) = \int_0^\infty K_n^*(x,u) f\left(\frac{\sqrt{(n-1)(n-2)}}{u^{1/n}}\right) du \tag{1.7}$$

$$K_n^*(x,u) = \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} e^{-xu^{1/n}} \quad , \ \forall x \in \mathbb{R}^+ := (0,\infty) \ , \ n \in \mathbb{N} \tag{1.8}$$

Yukarıda sözü edilen bildirilerin yardımıyla ele alınan bu tezin amacı, sabit fonksiyonları yeniden üreten Gamma operatörlerinin modifikasyonuna dayanan kavramsal bir teorik çerçeve sağlamak ve modifiye edilmiş klasik Gamma operatörlerinin yeni yapılarının performasını tek boyutlu bir yaklaşım bağlamında vurgulayan görsel örnekler sunmaktır. Bu çalışmanın geri kalanı aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

Şu ana kadar üzerinde durulan yaklaşım teorisinin ortaya çıkışı, lineer pozitif operatör olan Gamma operatörünün gelişimi tezin giriş kısmını oluşturmaktadır.

Tezin ikinci bölümünde tez için gerekli olan bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümü tamamen orjinal olup , modifiye edilmiş Gamma operatörünün yaklaşım özellikleri incelenmiş ve bazı teoremlerin sağlandığı gösterilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde tezden elde edilen sonuçlar ifade edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. (Lineer Uzay) N boş olmayan bir cümle ve R , reel sayılar cismi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa N 'ye R üzerinde lineer uzay veya vektör uzayı denir.

1. N , + işlemine göre değişmeli gruptur . Yani ,

(a) $\forall x, y \in N$ için $x+y \in N$ dir .

(b) $\forall x, y, z, \in N$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir .

(c) $\forall x \in N$ için $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde $\theta \in N$ vardır .

(d) $\forall x \in N$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde $-x \in N$ vardır.

(e) $\forall x, y \in N$ için $x+y=y+x$ dir.

2. $x, y \in N$ ve $\alpha, \beta \in R$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

(a) $\alpha x \in N$ dir.

(b) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ dir.

(c) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ dir.

(d) $1x=x$ dir. Burada 1, R'nin birim elemanıdır.

Tanım 2.2. (Fonksiyon Uzayı) Elemanları fonksiyonlardan oluşan bir X kümesi için Lineer uzay olma şartlarını sağlaması durumunda X kümesine fonksiyon uzayı denir.

Tanım 2.3. (C[a,b] Uzayı) [a,b] aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olan fonksiyonlardan oluşan uzayı C[a,b] ile gösterilmektedir.

Tanım 2.4. (Norm) N , bir Lineer uzay olsun, $\| \,.\, \| : N \to R$ fonksiyonun x'deki değeri $\| x \|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\| \,.\, \|$ 'ye N de (veya N üzerinde) norm denir.

N1) $\| x \| \geq 0$

N2) $\| x \| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$

N3) $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$

N4) $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$

Eğer bir Lineer uzay üzerinde norm tanımlanmışsa bu uzaya normlu uzay denir.

Tanım 2.5. (Düzgün Yakınsaklık) Eğer her $\varepsilon > 0$ için , her $n > N$ ve her $x \in X$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağladığı bir N sayısı varsa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir . Düzgün yakınsaklıkta $(f_n(x))_n$ dizileri $f(x)$ fonksiyonuna aynı hızla yakınsar.

Tanım 2.6. (Noktasal Süreklilik) $A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun . f fonksiyonu a noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $| x-a |< \delta \Rightarrow | f(x) - f(a) |< \varepsilon$ dur.

Tanım 2.7. (Düzgün Süreklilik) $A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu A üzerinde düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki $| x-t |< \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x, t \in A$ için $| f(x) - f(t) |< \varepsilon$ dur.

Tanım 2.8. (Lineer Operatör) X ve Y aynı bir F cismi üzerinde lineer normlu fonksiyon uzayları olsunlar. $L : X \to Y$ operatörü $\forall f, g \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in R$ için

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g) \tag{2.1}$$

eşitliği sağlanıyorsa, L operatörüne X'den Y ' ye bir lineer operatör denir.

Tanım 2.9. (Lineer Pozitif Operatör) $L : X \to Y$ lineer operatör ve

$$X^+ = \{f \in X : f(t) \geq 0\} \quad , \quad Y^+ = \{g \in Y : g(t) \geq 0\}$$

olmak üzere, L lineer operatörü X^+ kümesindeki her bir f fonksiyonunu Y^+ kümesinde bir fonksiyona dönüştürüyorsa, L operatörüne lineer pozitif operatör denir.

Lemma 2.1. $L : X \to Y$ lineer pozitif operatör olsun . $f, g \in X$ olmak üzere $\forall t$ için $f(t) \leq g(t)$ ise $L(f(t); x) \leq L(g(t); x)$ dir ve buna L lineer operatörünün monotonluk özelliği denir.

Ayrıca L'nin monotonluk özelliğinden $| L(f; x) | \leq L(| f |; x)$ eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.10. (Lineer Pozitif Operatörlerde Sınırlılık) $(X, \|.\|_1)$ ve $(Y, \|.\|_2)$ normlu uzaylar $D(L) \subset X$ olmak üzere $L: D(L) \to Y$ lineer bir operatör olsun. $\forall x \in D(L)$ için

$$\|L_x\|_2 \leq c\|x\|_1 \tag{2.2}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı mevcutsa L operatörüne sınırlı lineer operatör denir. **Teorem 2.1.(Lineer Pozitif Operatörlerde Süreklilik)** X ve Y normlu uzaylar, $D(L) \subset X$ olmak üzere $L: D(L) \to Y$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda L'nin sürekli olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır.

2.2. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIK KOŞULLARI

Teorem 2.2. (Weierstrass Yaklaşım Teoremi) f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayından alınan bir eleman olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $| f(x) - P_n(x) | < \varepsilon$ olacak şekilde derecesi n olan bir (P_n) polinom dizisi vardır . Başka bir ifadeyle, $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsayan bir (P_n) polinom dizisi vardır ($Weierstrass$1885).

Teorem 2.3. (Bohman-Korovkin Teoremi) f , $[a,b]$ aralığında sürekli, reel değerli ve tüm reel eksende sınırlı bir fonksiyon, $(L_n)_{n\geq 1}$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. u_m , v_m ve w_m $[a,b]$ aralığı üzerinde düzgün olarak sıfıra yakınsayan fonksiyon dizileri olmak üzere, $\forall\, x \in [a,b]$ için;

$$L_n(1;x) = 1 + u_m(x) \tag{2.3}$$

$$L_n(t;x) = x + v_m(x) \tag{2.4}$$

$$L_n(t^2;x) = x^2 + w_m(x) \tag{2.5}$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $(L_n)_{n\geq 1}$ lineer pozitif operatörler dizisi $[a,b]$ aralığı üzerinde f sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar.

Bohman-Korovkin teoremi yaklaşım teorisinde büyük bir öneme sahiptir. Çünkü ele alınan operatörün $1,t,t^2$ deki görüntülerinin sırasıyla $1,x,x^2$ ye düzgün yakınsadığını göstermek demek bundan sonra bu operatörün sonlu aralıktaki bütün sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsadığını göstermek demektir.

Korovkin teoreminde $e_i(t) = t^i, i = 0,1,2$ fonksiyonları Korovkin test fonksiyonları olarak adlandırılır.

2.3. SÜREKLİLİK MODÜLÜ VE ÖZELLİKLERİ

Yaklaşım teorisinde, lineer pozitif operatörün sürekli bir fonksiyona yakınsaması kadar önemli olan bir diğer durumsa yakınsama hızıdır. Yakınsama hızını belirlemek için kullanılan önemli bir metotsa süreklilik modülüdür.

Tanım 2.11. (Süreklilik Modülü) f $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı, sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. $x,y \in [a,b]$ olmak üzere $|x-y| \leq \delta$ şartını sağlayan keyfi bir $\delta > 0$ için $|f(x)-f(y)|$ değerlerinin en küçük üst sınırına f fonksiyonun $[a,b]$ aralığında süreklilik modülü denir.

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x)-f(y)|$$

ve ya

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|h|\leq\delta} |f(x+h)-f(x)| \tag{2.6}$$

şeklide ifade edilebilir.

Lemma 2.2 Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar,

i) $\delta > 0$ için $\omega(f;\delta)$ negatif olmayan bir fonksiyondur.

ii) ω fonksiyonu artan bir fonksiyondur. Yani $\delta_1 \leq \delta_2$ şartını sağlayan tüm δ_1 ve δ_2 sayıları için $\omega(f;\delta_1) \leq \omega(f;\delta_2)$ ifadesi sağlanır.

iii) m doğal sayı olmak üzere,
$\omega(f;m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$ şeklindedir.

iv) $\lambda > 0$ reel sayısı için ,
$\omega(f;\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(f;\delta)$ dır.

v) $|f(t)-f(x)| \leq \omega(f;|\,t-x\,|)$ eşitsizliği sağlanır.

vi) $|f(t)-f(x)| \leq \left(1+\dfrac{|\,t-x\,|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$

vii) $\lim_{\delta\to 0}\omega(f;\delta) = 0$ şeklindedir.

Tanım 2.12. (Hölder Eşitsizliği) p *ile* q , $1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan iki reel sayı olsun . $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.7}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir.

Tanım 2.13. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.8}$$

eşitsizliğine de Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir.

Tanım 2.14. (Taylor Formülü) f fonksiyonu a noktasına ihtiva eden bir aralıkta $n+1$'inci mertebeden sürekli olsun. Bu aralıkta her x için Taylor formülü,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{2.9}$$

olur.

Tanım 2.15. (Gamma Foksiyonu) $\Gamma(x)$ ila gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \tag{2.10}$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır .

Gamma fonksiyonunun bazı sonuçları şöyledir,

1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

2) $\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$

3. MODİFİYE GAMMA OPERATÖRÜ

3.1. GAMMA OPERATÖRLERİNİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, yaklaşım özelliklerini inceleyeceğimiz lineer pozitif operatör olan Gamma operatörlerini ele alacağız. Günümüze kadar gelmiş, hedef fonksiyona daha iyi bir yakınsama sağlayan klasik Gamma operatörlerini modifiye ederek, kendi Gamma operatörlerimizi tanımlayacağız. Modifiye ettiğimiz Gamma operatörlerimizin genel yaklaşım özelliklerinin yanında yaklaşım oranı ve yaklaşım hızını klasik Gamma operatörleri ile karşılaştıracağız. Daha iyi bir yakınsama sonucu beklediğimiz operatörlerimizi tanımlarken ve yakınsaklık özelliklerini incelerken $e_k(t) = t^k$ ve $\varphi_{x,k}(t) = (t-x)^k$, $x \in R^+$, $k \in N$ olmak üzere polinom fonksiyonlarını ve $[0,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonlardan oluşan $C_b[0,\infty)$ fonksiyon uzayından ve buna bağlı olarak $\|f\| = \sup\{|f|; x \in [0,\infty)\}$ normundan yararlanacağız. Modifiye Gamma operatörlerimizi tanımlamamızda bize yardımcı olacak olan ve $\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \ , \ x > 0 \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır. Bu fonksiyon doğrultusunda ve $M > 0$, $t \to \infty$ için $\beta \geq 0$ ve $f \in C_b[0,\infty)$ fonksiyonu $|\ f(t)\ | \leq Me^{\beta t}$ şartlarını sağlamak üzere ve $\forall x \in \mathbb{R}^+ := (0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\mathcal{G}_n(f,x) = \int_0^\infty \frac{x^{n+3}}{\Gamma(n+3)} e^{-x/u} u^{-n-4} f(nu)du \tag{3.2}$$

$$\mathcal{G}_n^*(f,x) = \int_0^\infty \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} e^{-xu^{1/n}} f\Big(\frac{\sqrt{(n-1)(n-2)}}{u^{1/n}}\Big)du \tag{3.3}$$

olacak şekilde iki farklı operatör olarak tanımlarız.

Klasiklerinin de yardımıyla (3.2) ve (3.3) ile tanımlanan modifiye Gamma operatörlerimizin lineer ve pozitif olduğu aşikardır.

Lineer pozitif operatörlerin yakınsaklığı hakkında bir şey söylemeden önce genel olarak fonksiyon dizilerinin düzgün yakınsaklığından bahsedelim.

$f \in C[a,b]$ ve (f_n) , $C[a,b]$ uzayındaki fonksiyonların dizisi olsun. (f_n) fonksyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için $\forall x \in [a,b]$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = 0 \tag{3.4}$$

olmasıdır. Düzgün yakınsaklık $f_n \rightrightarrows f$ şeklinde gösterilir.[15]

Lineer pozitif operatörler dizisinin düzgün yakınsaklığını göstermek içinse bu tanımdan daha kullanışlı bir teorem kullanacağız. Daha önce de ifade ettiğimiz gibi bu teorem genel olarak, kompakt bir aralık üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaklığı veren, litaratürde Bohman-Korovkin teoremi olarak bilinen teoremdir. Teoremin ifadesinde yer alan şartları sağlaması durumunda lineer pozitif operatörümüz düzgün yakınsak olduğunu söyleyebileceğiz. Bizim araştırmamıza da konu olan ve lineer pozitif operatör olduğunu bildiğimiz modifiye Gamma operatörümüz için yakınsaklık özelliklerini incelerken ilk olarak bu teoremi sağlayıp sağlamadığına bakacağız. Bu teoremin şartlarının sağladığını Korovkin test fonksiyonları yardımıyla inceleyelim .

Korovkin test fonksiyonları, $e_k(t) = t^k$ olup $k = 0,1,2,3$ olmak üzere, operatörlemizin Korovkin test fonksiyonlarını koruduğunu hesaplamalar yardımıyla gösterelim.

$k = 0$ için $e_0(t) = t^0 = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_n(e_0(t),x) &= \frac{x^{n+3}}{\Gamma(n+3)} \int_0^\infty e^{-x/u}\, u^{-n-4}\, e_0(nu)du \\
&= \frac{x^{n+3}}{(n+2)!} \int_0^\infty e^{-x/u}\, u^{-n-4}\, 1du \\
\frac{x}{u} = z \qquad u = \frac{x}{z} \qquad & du = -\frac{x}{z^2}dz \\
&= \frac{x^{n+3}}{(n+2)!} \int_\infty^0 e^{-z}\left(\frac{x}{z}\right)^{-n-4} -\frac{x}{z^2}dz \\
&= \frac{x^{n+3}}{(n+2)!} \int_0^\infty e^{-z}\frac{x^{-n-3}}{z^{-n-2}}dz
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n+2)!}{(n+2)!} \\
\mathcal{G}_n(e_0(t),x) &= 1
\end{aligned}
$$

olur . $k=1$ için $e_1(t)=t^1=t$ olmak üzere ,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_n(e_1(t),x) &= \frac{x^{n+3}}{\Gamma(n+3)} \int_0^\infty e^{-x/u}\, u^{-n-4}\, e_1(nu)du \\
&= \frac{x^{n+3}}{(n+2)!} \int_0^\infty e^{-x/u}\, u^{-n-4}\, nudu \\
\frac{x}{u} = z \qquad u &= \frac{x}{z} \qquad du = -\frac{x}{z^2}dz \\
&= \frac{x^{n+3}n}{(n+2)!} \int_\infty^0 e^{-z}\left(\frac{x}{z}\right)^{-n-3} - \frac{x}{z^2}dz \\
&= \frac{x^{n+3}n}{(n+2)!} \int_0^\infty e^{-z}\frac{x^{-n-2}}{z^{-n-1}}dz \\
&= \frac{x^{n+3}x^{-n-2}n}{(n+2)!} \int_0^\infty e^{-z}z^{n+1}dz \\
&= \frac{xn}{(n+2)!}(n+1)! \\
\mathcal{G}_n(e_1(t),x) &= \frac{n}{n+2}x
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

olur . $k=2$ için $e_2(t)=t^2$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_n(e_2(t),x) &= \frac{x^{n+3}}{\Gamma(n+3)} \int_0^\infty e^{-x/u}\, u^{-n-4}\, e_2(nu)du \\
&= \frac{x^{n+3}}{(n+2)!} \int_0^\infty e^{-x/u}\, u^{-n-4}\, (nu)^2du \\
\frac{x}{u} = z \qquad u &= \frac{x}{z} \qquad du = -\frac{x}{z^2}dz \\
&= \frac{x^{n+3}n^2}{(n+2)!} \int_\infty^0 e^{-z}\left(\frac{x}{z}\right)^{-n-2} - \frac{x}{z^2}dz \\
&= \frac{x^{n+3}n}{(n+2)!} \int_0^\infty e^{-z}\frac{x^{-n-1}}{z^{-n}}dz
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x^{n+3}n}{(n+2)!}\int_0^\infty e^{-z}\frac{x^{-n-1}}{z^{-n}}dz \\
&= \frac{x^{n+3}x^{-n-2}n}{(n+2)!}\int_0^\infty e^{-z}z^{n}dz \\
&= \frac{x^2n^2}{(n+2)!}n! \\
\mathcal{G}_n(e_2(t),x) &= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}x^2
\end{aligned}
$$

olur . $k=3$ için $e_3(t)=t^3$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_n(e_3(t),x) &= \frac{x^{n+3}}{\Gamma(n+3)}\int_0^\infty e^{-x/u}\,u^{-n-4}\,e_3(nu)du \\
&= \frac{x^{n+3}}{(n+2)!}\int_0^\infty e^{-x/u}\,u^{-n-4}\,(nu)^3du \\
\frac{x}{u} = z \qquad & u=\frac{x}{z} \qquad du=-\frac{x}{z^2}dz \\
&= \frac{x^{n+3}n^3}{(n+2)!}\int_\infty^0 e^{-z}\left(\frac{x}{z}\right)^{-n-1}-\frac{x}{z^2}dz \\
&= \frac{x^{n+3}n^3}{(n+2)!}\int_0^\infty e^{-z}\frac{x^{-n}}{z^{-n+1}}dz \\
&= \frac{x^{n+3}x^{-n}n^3}{(n+2)!}\int_0^\infty e^{-z}z^{n-1}dz \\
&= \frac{x^3n^3}{(n+2)!}(n-1)! \\
\mathcal{G}_n(e_3(t),x) &= \frac{n^3}{n(n+1)(n+2)}x^3
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Gerekli hesaplamaları yaptıktan sonra sonuçları değerlendirmek için tekrar ifade edecek olursak aşağıdaki moment değerlerini elde ettiğimizi görürüz,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{G}_n(e_0(t),x) = e_0(x) \\
&\mathcal{G}_n(e_1(t),x) = \frac{n}{n+2}e_1(x) \to e_1(x) \\
&\mathcal{G}_n(e_2(t),x) = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}e_2(x) \to e_2(x) \\
&\mathcal{G}_n(e_3(t),x) = \frac{n^3}{n(n+1)(n+2)}e_3(x) \to e_3(x)
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Hesaplamalar sonucunda $\mathcal{G}_n$ operatörümüzün Korovkin test fonksiyonlarınından sadece sabit fonksiyonu direk koruduğunu, diğer fonksiyonları limit durumunda koruduğunu görüyoruz. Bu da demek oluyor ki operatörümüzün $1,t,t^2,t^3$ deki görüntüleri sırasıyla $1,x,x^2,x^3$ dür. Bohman-Korovkin teoremine göre $\mathcal{G}_n$ operatörümüzün Korovkin test fonksiyonlarını koruması demek, $\mathcal{G}_n$ operatörümüzün herhangi bir kompakt $M \subset R^+$ kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsak demektir. Bu da bir yaklaşım sürecine sahip olduğu anlamına gelir.

Yaptığımız hesaplamalar sonucunda ifade edebileceğimiz bir diğer eşitlikte, Korovkin test fonksiyonları doğrultusunda (3.2) ile tanımlanan $\mathcal{G}_n$ operatörünün vereceği sonucun genel moment değeri de şu şekildedir. $k \in N_0 = N \cup 0$ olmak üzere $e_k(t) = t^k$

$$\mathcal{G}_n(e_k(t),x) = \frac{n^k\,\Gamma(n-k+3)}{\Gamma(n+3)} e_k(x) \quad , \quad x > 0, n \geq 1 \tag{3.10}$$

Bu eşitliğin varlığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_n(e_k(t),x) &= \frac{x^{n+3}}{\Gamma(n+3)} \int_0^\infty e^{-x/u} u^{-n-4} e_k(nu)\,du \\
&= \frac{x^{n+3}}{(n+2)!} \int_0^\infty e^{-x/u} u^{-n-4} (nu)^k du \\
&= \frac{x^{n+3} n^k}{(n+2)!} \int_0^\infty e^{-x/u} u^{k-n-4} du \\
\frac{x}{u} = z \qquad u &= \frac{x}{z} \qquad du = -\frac{x}{z^2} dz \\
&= \frac{x^{n+3} n^k}{(n+2)!} \int_\infty^0 e^{-z} \left(\frac{x}{z}\right)^{k-n-4} - \frac{x}{z^2} dz \\
&= \frac{x^{n+3} n^k}{(n+2)!} \int_0^\infty e^{-z} \frac{x^{k-n-3}}{z^{k-n-2}} dz \\
&= \frac{x^{n+3} n^k}{(n+2)!} x^{k-n-3} \int_0^\infty e^{-z} z^{n-k+2} \\
\mathcal{G}_n(e_k(t),x) &= \frac{x^k n^k}{(n+2)!} (n-k+2)!
\end{aligned} \tag{3.11}$$

bu ifade de Gamma fonksiyonu tanımından

$$\mathcal{G}_n(e_k(t),x) = \frac{n^k\,\Gamma(n-k+3)}{\Gamma(n+3)}e_k(x)$$
olur.

Böylelikle eşitliğin varlığını göstermiş olduk ve herhangi bir k değeri için bu eşitliğin sağlandığı hesaplamalar sonucunda rahatlıkla görülebilir.

Şimdiye kadarki değerlendirlerimizi (3.3) ile tanımlanmış bir diğer modifiye Gamma operatörümüz olan $\mathcal{G}_n^*$ operatörüz içinde yapalım . Bu modifiye Gamma operatörümüzde gerekli hesaplamalar yapılacak olursa, Bohman-Korovkin teoreminin şartlarını sağladığı görülür. Bohman-Korovkin teoreminin şartları gereği hesaplamalarımız sonuçunda

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_n^*(e_0(t),x) &= e_0(x) \\
\mathcal{G}_n^*(e_1(t),x) &= \sqrt{\frac{n-2}{n-1}}e_1(x) \to e_1(x) \\
\mathcal{G}_n^*(e_2(t),x) &= e_2(x) \\
\mathcal{G}_n^*(e_3(t),x) &= \frac{\sqrt{(n-1)(n-2)}}{n-3}e_3(x) \to e_3(x)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

moment değerlerini elde ederiz.

Görüldüğü üzere Korovkin test fonksiyonlarından $e_0(t)$ ve $e_2(t)$'yi direk korur ve diğer ikisi limit durumunda korunur. $\mathcal{G}_n^*$ operatörüde Korovkin test fonksiyonlarını koruduğu için herhangi bir kompakt $M \subset R^+$ kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli bir f fonsiyonuna düzgün yakınsaktır. Bu da $\mathcal{G}_n^*$ operatörünün bir yaklaşım sürecine sahip olduğu anlamına gelir. $\mathcal{G}_n^*$ operatörü için de Korovkin test fonksiyonları doğrultusundaki vereceği sonucun genel moment değeri şu şekildedir. $k \in N_0 = N \cup 0$ olmak üzere $e_k(t) = t^k$,

$$\mathcal{G}_n^*(e_k(t),x) = \frac{\sqrt{[(n-1)(n-2)]^k}}{\prod_{j=1}^{k}(n-j)}e_k(x) \quad , \quad x > 0, n \geq 1 \tag{3.13}$$

olur ve bu operatörümüz için de k hangi değeri alacak olursa eşitlik sağlanır.

Şimdi de lineer operatörlerde geçerli olduğunu bildiğimiz ve modifiye Gamma operatörlerimiz için de geçerli olduğunu göstereceğimiz iki eşitsizlik verebiliriz. Bu eşitsizlikler lineer operatörlerde ki sınırlılık tanımından yararlanarak rahatlıkla ifade edilebilir. Modifiye Gamma operatörlerimiz için de şu eşitsizlikleri ifade edecek olursak $f, g \in C_b[0,\infty)$ olmak üzere

$$\|\mathcal{G}_n(f)\| \leq \|f\| \tag{3.14}$$

$$\|\mathcal{G}_n^*(g)\| \leq \|g\| \tag{3.15}$$

Daha önce verdiğimiz sonuçları ve lineer operatörlerin bazı özelliklerini kullanarak bu iki eşitsizliğin varlığını gösterebiliriz .

(3.14) eşitsizliği için $\mathcal{G}_n(f)$ 'in normunu alalım

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_n(f)\| &\leq \frac{x^{n+3}}{\Gamma(n+3)} \int_0^\infty e^{-x/u} u^{-n-4} \mid f(nu) \mid du \\ &\leq \|f\| \frac{x^{n+3}}{\Gamma(n+3)} \int_0^\infty e^{-x/u} u^{-n-4} du \\ &= \|f\| \mathcal{G}_n(e_0(t), x) \\ \|\mathcal{G}_n(f)\| &\leq \|f\| \end{aligned} \tag{3.16}$$

olur . (3.4) eşitsizlği için de $\mathcal{G}_n^*(g)$ 'nin normunu alalım

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_n^*(g)\| &\leq \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \left| g\left(\frac{\sqrt{(n-1)(n-2)}}{u^{1/n}} \right) \right| du \\ &\leq \|g\| \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} du \\ &= \|g\| \mathcal{G}_n^*(e_0(t), x) \\ \|\mathcal{G}_n^*(g)\| &\leq \|g\| \end{aligned} \tag{3.17}$$

olur. Böylelikle (3.14) ve (3.15) eşitsizliklerinin varlığını göstermiş olduk. Bunlara ek olarak $\mathcal{G}_n^*$ ve $\mathcal{G}_n$ operatörlerinin operatör normlarının 1'e eşit olduğuda görülür.

Şimdi de bu sonuçlardan yararlanarak daha sonra kullanacağımız yine bir polinom fonksiyon olan ve merkezi moment değerlerini veren $\varphi_{x,k}(t) = (t-x)^k$ fonksiyonunun, Gamma operatörü altında nasıl sonuç verdiğine bakalım.

$\varphi_{x,k}(t) = (t-x)^k$, $k = 0,1,2,3$ olsun.

$k = 0$ için $\varphi_{x,0}(t) = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_n(\varphi_{x,0}(t),x) &= \frac{x^n}{\Gamma(n+1)}\int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} 1du \\
&= 1 \quad \mathcal{G}_n(e_0(t),x) \\
\mathcal{G}_n(\varphi_{x,0}(t),x) &= 1
\end{aligned} \tag{3.18}$$

olur ve ilk merkezi moment değerini direk koruduğu görülür.

$k=1$ için $\varphi_{x,1}(t)=(t-x)$ olmak üzere, $\mathcal{G}_n(\varphi_{x,1}(t),x) = \mathcal{G}_n((t-x),x)$

$\mathcal{G}_n$ operatörünün lineerlik özelliğinden dolayı eşitliğin sağ tarafındaki ifadeyi parçalayabiliriz.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_n(\varphi_{x,1}(t),x) &= \mathcal{G}_n(t,x)-\mathcal{G}_n(x,x) \\
&= \mathcal{G}_n(t,x)-x\,\mathcal{G}_n(1,x) \\
&= \mathcal{G}_n(e_1(t),x)-x\,\mathcal{G}_n(e_0(t),x) \\
&= \left(\frac{n}{n+2}\right)x-x.1 \\
&= \left(\frac{n}{n+2}-1\right)x \\
\mathcal{G}_n(\varphi_{x,1}(t),x) &= \left(\frac{-2}{n+2}\right)x
\end{aligned} \tag{3.19}$$

olur. $k=2$ için $\varphi_{x,2}(t)=(t-x)^2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_n(\varphi_{x,2}(t),x) &= \mathcal{G}_n((t-x)^2,x) \\
&= \mathcal{G}_n((t^2-2tx+x^2),x) \\
&= \mathcal{G}_n(t^2,x)-2x\mathcal{G}_n(t,x)+x^2\mathcal{G}_n(1,x) \\
&= \mathcal{G}_n(e_2(t),x)-2x\mathcal{G}_n(e_1(t),x)+x^2\mathcal{G}_n(e_0(t),x) \\
&= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}x^2-2x\frac{n}{n+2}x+x^2 \\
&= \frac{(n^2-2n(n+1)+(n+1)(n+2))x^2}{(n+1)(n+2)} \\
\mathcal{G}_n(\varphi_{x,2}(t),x) &= \left(\frac{1}{n+1}\right)x^2
\end{aligned} \tag{3.20}$$

olur. $k=3$ için $\varphi_{x,3}(t)=(t-x)^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_n(\varphi_{x,3}(t),x) &= \mathcal{G}_n((t-x)^3,x) \\
&= \mathcal{G}_n((t^3-3xt^2+3x^2t-x^3,x) \\
&= \mathcal{G}_n((t^3,x)-3x\mathcal{G}_n((t^2,x)+3x^2\mathcal{G}_n((t,x)-x^3\mathcal{G}_n(1,x) \\
&= \mathcal{G}_n(e_3(t),x)-3x\mathcal{G}_n(e_2(t),x)+3x^2\mathcal{G}_n(e(t),x)-x^3\mathcal{G}_n(e_0(t),x) \\
&= \frac{n^3}{n(n+1)(n+2)}x^3-3x\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}x^2+3x^2\frac{n}{n+2}x-x^3 \\
&= \frac{(n^3-3n^2(n)+3n(n(n+1))-n(n+1)(n+2))x^3}{n(n+1)(n+2)} \\
\mathcal{G}_n(\varphi_{x,3}(t),x) &= \Big(\frac{-2}{(n+1)(n+2)}\Big)x^3
\end{aligned} \tag{3.21}$$

olur.Böylelikle $\mathcal{G}_n$ modifiye Gamma operatörüzün merkezi moment değerlerini elde etmiş oluruz.

$\varphi_{x,k}(t)=(t-x)^k$ polinom fonksiyonunun bir diğer modifiye Gamma operatörümüz olan $\mathcal{G}_n^*$ ile nasıl sonuçlar verdiğini kısaca ifade edelim.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_n^*(\varphi_{x,0}(t),x) &= 1 \\
\mathcal{G}_n^*(\varphi_{x,1}(t),x) &= \Big(\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}-1\Big)e_1(x) \\
\mathcal{G}_n^*(\varphi_{x,2}(t),x) &= \Big(2-2\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}\Big)e_2(x) \\
\mathcal{G}_n^*(\varphi_{x,3}(t),x) &= \Big(\sqrt{(n-1)(n-2)}\frac{4n-10}{(n-1)(n-3)}-4\Big)e_3(x)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$\mathcal{G}_n^*$ operatörümüzün merkezi moment değerleride bu şekildedir.

Şimdiye kadar modifiye Gamma operatörlerimizin Korovkin test fonksiyonları ile moment ve merkezi moment değerlerine olan yakınsama süreçlerini inceledik. Bu bölümde de modifiye Gamma operatörlerimizin $f\in C_b[0,\infty)$ fonksiyonuna yakınsaması sürecine değinelim. Daha önce verdiğimiz sonuçlarda da görüldüğü üzere modifiye Gamma operatörlerimiz Korovkin test fonksiyonlarını limit durumunda korur. Yani $k=0,1,2,3$

için $[0,\infty)$ aralığının herhangi bir kompakt alt kümesinde $n\to\infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}_n(e_k(t),x) = e_k(x) \tag{3.23}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}_n^*(e_k(t),x) = e_k(x) \tag{3.24}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler yardımıyla varlığında söz edebileceğimiz iki eşitlikte şu şekildedir. $[0,\infty)$ aralığının her kompakt alt kümesi için $f\in C_b[0,\infty)$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}_n(f,x) = f(x) \tag{3.25}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}_n^*(f,x) = f(x) \tag{3.26}$$

olur. Buradan da görüldüğü üzere limit durumunda modifiye Gamma operatörlerimiz f fonksiyonunu da korur. f fonksiyonunu koruması üzerine burada ki eşitlikleri elde edebileceğimiz bir diğer yer ise fonksiyon dizilerinin noktasal yakınsaklığıdır.

$(f_n)_n$ fonksiyon dizisi verilmiş olsun. Eğer $\forall x\in[a,b]$ için $(f_n(x))_n$ sayı dizisinin bir limiti var ise, o zaman $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin, $\forall x\in[a,b]$ için $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ olarak tanımlanan f fonksiyonuna noktasal yakınsadığı ve f'nin $(f_n)_n$ dizisinin noktasal limiti olduğu söylenir.

Şimdiye kadar kompakt aralıklarda hedef fonksiyona yakınsama konusunda incelediğimiz modifiye Gamma operatörlerimizin, yaklaşım teorisinin bir diğer önemli problemi olan yakınsama hızı ile alakalı konuda nasıl sonuç verdiğine bakalım. Yaklaşım hızını incelerken ilk ifade etmemiz gereken bir şeyde dizilerin yaklaşım hızıdır.

(a_n) ve (b_n) sonsuz küçülen diziler olsun. ($n\to\infty$ için $(a_n)\to\infty$ ve $(b_n)\to\infty$)
$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ limitinin sonucuna göre dizilerin sıfıra yaklaşım hızı ifade edilir. Eğer sonuç 0 ise (a_n) dizisinin sıfıra yaklaşım hızı, eğer sonuç ∞ ise de (b_n) dizisinin sıfıra yaklaşım hızı diğer diziye göre daha hızlıdır. Sonuç 1 olduğu taktirde her iki dizinin sıfıra yaklaşım hızı aynıdır denir. Bir diğer ve bizim için önemli durum ise limitin sonucunun c gibi bir değer olmasıdır. Limitin sonucu c gibi bir değer olursa c' ye asimtotik değer, (b_n) dizisine de (a_n) dizisinin asimtotik hızı denir.

Bu hususla alakalı , $(L_n)_{n\geq 1}$ lineer operatör dizisi olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} n(L_n(f;x)-f(x)) \tag{3.27}$$

limiti bize yardımcı olmaktadır . Bu formül Voronovskaja [16] formülü olarak bilinir ve lineer pozitif operatörlerinin asimptotik davranışı hakkında bilgi verir . Şimdi biz bu formülü modifiye Gamma operatörümüze uygulayıp nasıl sonuç verdiğini inceleyeceğiz . f , $x\in[0,\infty)$ ' da integrallenebilir ve sınırlı bir fonksiyon olsun . f 'nin birinci ve ikinci türevi sabit bir $x\in(0,\infty)$ noktasında mevcut olmak üzere modifiye Gamma operatörümüz için

$$\lim_{n\to\infty} n(\mathcal{G}_n(f,x)-f(x)) = -2xf'(x)+\frac{1}{2}x^2f''(x)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğin varlığını göstermek için ilk olarak f fonksiyonunun $t=x$ noktasında kalan terimli Taylor förmülünü yazalım.

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2+\psi(t,x)(t-x)^2 \tag{3.28}$$

Burada

$$\psi(t,x)=\frac{f''(\xi)-f''(x)}{2}$$

olup ξ , x ve t arasında ve $\lim_{t\to x}\psi(t,x)=0$ dır. Buna kalan terimin peano formu denir.

Daha sonra (3.5) eşitliğine $\mathcal{G}_n$ operatörünü uygularsak

$$\mathcal{G}_n(f,x)=f(x)+f'(x)\mathcal{G}_n((t-x),x)+\frac{1}{2}f''(x)\mathcal{G}_n((t-x)^2,x)+\mathcal{G}_n(\psi(t,x)(t-x)^2,x)$$

olur. Burada her iki tarafınıda n ile çarptıktan sonra eşitliği şu şekilde ifade edebiliriz.

$$n[\mathcal{G}_n(f,x)-f(x)]=f'(x)n\mathcal{G}_n((t-x),x)+\frac{1}{2}f''(x)n\mathcal{G}_n((t-x)^2,x)+n\mathcal{G}_n(\psi(t,x)(t-x)^2,x)$$

$$n[\mathcal{G}_n(f,x)-f(x)]=f'(x)n\mathcal{G}_n(\varphi_{x,1}(t),x)+\frac{1}{2}f''(x)n\mathcal{G}_n(\varphi_{x,2}(t),x)+n\mathcal{G}_n(\psi(t,x)\varphi_{x,2}(t),x)$$

Burada eşitliğin $n \to \infty$ için limitini alıcak olursak

$$\lim_{n\to\infty} n[\mathcal{G}_n(f,x) - f(x)] = f'(x) \lim_{n\to\infty} n\mathcal{G}_n(\varphi_{x,1}(t),x) + \frac{1}{2}f''(x) \lim_{n\to\infty} n\mathcal{G}_n(\varphi_{x,2}(t),x) + \lim_{n\to\infty} n\mathcal{G}_n(\psi(t,x)\varphi_{x,2}(t),x)$$

Buradaki ifadelerden bazılarının sonucu şu şekildedir,

$$\lim_{n\to\infty} n\mathcal{G}_n(\varphi_{x,1}(t),x) = \lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{-2}{n+2}\Big)x = -2x$$

$$\lim_{n\to\infty} n\mathcal{G}_n(\varphi_{x,2}(t),x) = \lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{1}{n+1}\Big)x^2 = x^2$$

Bu sonuçlar doğrultusunda eşitliğimiz,

$$\lim_{n\to\infty} n[\mathcal{G}_n(f,x) - f(x)] = -2xf'(x) + \frac{1}{2}x^2 f''(x) + \lim_{n\to\infty} n\mathcal{G}_n(\psi(t,x)\varphi_{x,2}(t),x)$$

şeklide sonuçlanır . İspatı tamamlamak için $\lim_{n\to\infty} n\mathcal{G}_n(\psi(t,x)\varphi_{x,2}(t),x) = 0$ olduğunu göstermek yetecektir . $n\mathcal{G}_n(\psi(t,x)\varphi_{x,2}(t),x)$ ifadesininde Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanacak olursak,

$$n\mathcal{G}_n(\psi(t,x)\varphi_{x,2}(t),x) \leq \sqrt{n^2\mathcal{G}_n(\psi^2(t,x),x)}\sqrt{\mathcal{G}_n(\varphi_{x,4}(t),x)}$$

olur ve Korovkin teoremi yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}_n(\psi^2(t,x),x) = \psi^2(x,x) = 0$$

olduğu görülür . $t \in (0,\infty)$ için $\psi^2(t,x)$ ve $\psi^2(x,x) = 0$ sürekli olup $t \to \infty$ için sınırlıdır ve aslında $\mathcal{G}_n(\varphi_{x,4}(t),x) = O(n^{-2})$'dır. Sonuç olarak ispat tamamlanmış olur.

Voronoskaya formülünü bir diğer modifiye Gamma operatörümüze uyguladığımızda nasıl sonuç elde ettiğimize bakalım . f, $x \in [0,\infty)$ ' da integrallenebilir ve sınırlı bir fonksiyon olsun. f 'nin birinci ve ikinci türevi sabit bir $x \in (0,\infty)$ noktasında mevcut olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} n(\mathcal{G}_n^*(f,x) - f(x)) = -\frac{1}{2}xf'(x) + \frac{1}{2}x^2 f''(x)$$

eşitliğini elde ederiz . Bu eşitliği göztermek için de yine bir önceki operatörümüzde olduğu gibi aynı ispat yolu izlenirse, daha önceki sonuçlarında yardımıyla operatörümüz için bu sonucu elde ederiz.

Şimdiye kadar kompakt aralıklarda lineer pozitif operatör olan Gamma operatörlerinin düzgün yakınsaklığını incelemiştik. Bu incelemeler sonucunda kompakt aralıklarda Korovkin teoreminin gerçekleştiğini bilmekteyiz. Ancak kompakt bir aralık yerine sınırsız bir aralıkta tanımlanan lineer pozitif operatörlerin dizisi için Korovkin teoreminin geçerli olmadığı görülmüştür. Bunun üzerine A. D. Gadjiev [12] tarafından Korovkin tipli teoremler adı altında çalışmalar yayınlanmıştır. Bu teoremler genel olarak reel eksenin tamamında veya sınırsız alt aralıklarında yaklaşım koşullarını içermektedir. Bizde lineer pozitif operatör olan Gamma operatörlerimiz için bu teoremlerin bazılarında yararlanacağız. Buna geçmeden önce bazı gerekli tanımlamaları verelim.

Her $x \in R^+$ için $\phi(x) = 1 + |x^2|$ olacak şekilde bir fonksiyon tanımlayalım . Burada $\phi(x)$ fonksiyonu R 'de sürekli ve $\lim_{|x|\to\infty} \phi(x) = \infty$ ve $\phi(x) \geq 1$ dir. $\phi(x)$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu da denir .

$C(R^+)$, $R^+ \to R$ 'ye tüm sürekli fonksiyonlar uzayıdır.

M_f bir pozitif sabit olmak üzere $| f(x) | \leq M_f \phi(x)$ eşitsizliğini sağlayan reel değişkenli ve reel f fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $B_\phi(R^+)$ ile ifade edilip, ağırlıklı uzay denir.

$$B_\phi(R^+) = \{f | f : R^+ \to R \quad ve \mid f(x) \mid \leq M_f \phi(x), x \in R^+\}$$

$B_\phi(R^+)$ uzayındaki sürekli fonksiyonların uzayı olan ve $B_\phi(R^+)$ uzayının ağırlıklı alt uzayı olan uzayı $C_\phi(R^+)$ olarak ifade edelim .

$$C_\phi(R^+) = \{f | f \in B_\phi(R^+) ve f \in C(R^+)\}$$

Kısacası $C_\phi(R^+)$ ağırlıklı uzayı R'de sürekli ve $B_\phi(R^+)$ kümesine ait fonksiyonların kümesidir. $(C_\phi(R^+) = B_\phi(R^+) \cap C(R^+))$

Son olarak $f \in C_\phi(R^+)$ için $\lim_{|x|\to\infty} \dfrac{f(x)}{\phi(x)} = K_f$ olacak şekilde , K_f , f'ye bağlı bir sabit olmak üzere $C_\phi(R^+)$ 'nın da bir alt uzayı olarak $C_\phi^K(R^+)$ uzayını tanımlayabiliriz.

$$C_\phi^K(R^+) = \{f|f \in C_\phi(R^+) ve \lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{\phi(x)} = K_f \quad var \quad ve \quad sonlu\}$$

Bunlara ek olarak yukarıdaki fonksiyon uzaylarının bir diğer özelliğide

$$\|f\|_\phi = \sup_{x\in R^+} \frac{f(x)}{\phi(x)} \tag{3.29}$$

normuna göre normlu uzay olmalarıdır.

Yukarıda ifade edilen bu norm yardımıyla aşağıdaki eşitlik her iki modifiye Gamma operatörümüz için geçerlidir.

$$\|\mathcal{G}_n(f)\|_\phi \le C\|f\|_\phi \tag{3.30}$$

Bu eşitsizlik sağlanması durumunda modifiye Gamma operatörlerimizin $C_\phi(R^+)$ uzayından $C_\phi(R^+)$ uzayına bir yaklaşım sürecine sahip oldukları anlamına gelir.

Modifiye Gamma operatörlerinin tanımı ve polinom fonksiyonları koruması özellikleri dikkate alındığında bu eşitsizliğin her iki operatörümüz içinde geçerli olduğunu rahatlıkla söyleyebiliriz. Yani $\mathcal{G}_n$ ve $\mathcal{G}_n^*$ operatörlerimiz $C_\phi(R^+)$ uzayından $C_\phi(R^+)$ uzayına bir yaklaşım sürecine sahiptir.

Gadjiev'in, sınırsız aralıklar için lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı hakkında verdiği teoremi ifade etmek gerekirse, kabul edelim ki L_n, $C_\phi(R^+)$ ' dan $B_\phi(R^+)$'ya dönüşüm yapan lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Bu taktirde $n \to \infty$ iken $f \in C_\phi(R^+)$ olmak üzere $\|L_n f - f\|_\phi \to 0$ şartını sağlaması için gerek ve yeter şart $\|L_n f_i - f_i\|_\phi \to 0$, $i = 0,1,2$ olmasıdır. Burada $f_i = \dfrac{x_i}{1+x^2}\phi(x)$, $i = 0,1,2$ şeklindedir.

Bizde bu teoremi modifiye Gamma operatörlerimiz için ifade edecek olursak $f \in C_\phi^K(R^+)$ olsun . Bu teorem gereği

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{G}_n(f) - f\|_\phi = 0 \tag{3.31}$$

olup , her iki modifiye Gamma operatörümüz için de geçerlidir. Bu eşitliğin ispatı için [12] teoremi sayesinde aşağıdaki üç koşulun gerçekleştiğini göstermek yeterli olacaktır.

$e_k(t) = t^k$, $k = 0, 1, 2$ olmak üzere , bu üç k değeri için

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{G}_n(e_k) - e_k\|_\phi = 0 \tag{3.32}$$

eşitliğinin sağladığını gösterelim.

$k = 0$ için $e_0(t) = 1$ olup $\mathcal{G}_n(e_0(t)) = e_0(x)$ olduğu için $\|\mathcal{G}_n(e_0) - e_0\|_\phi = 0$ olur ve bu şartın sağlandığı aşikardır. İkinci ve üçüncü koşulların sağlandığını göstermek için daha önceki sonuçlardan yararlanacak olursak,

$k = 1$ için $e_1(t) = t$ olup $\mathcal{G}_n(e_1(t), x) = \dfrac{n}{n+2}x$ dır.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_n(e_1) - e_1\|_\phi &= \sup_{x\in R^+} \frac{|\ \mathcal{G}_n(e_1(t)) - e_1(x)\ |}{1+x^2} \\ &\leq \left|\frac{-2}{n+2}\right| \sup_{x\in R^+} \frac{x}{1+x^2} \\ &\leq \left|\frac{-2}{n+2}\right| \end{aligned} \tag{3.33}$$

olup, bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınacak olursa, $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{-2}{n+2}\right| = 0$ olur ve ikinci koşulun sağlandığını göstermiş oluruz. Benzer şekilde üçüncü koşulunda sağlandığını gösterelim.

$k = 2$ için $e_2(t) = t^2$ olup $\mathcal{G}_n(e_2(t), x) = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}x^2$ dır.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_n(e_2) - e_2\|_\phi &= \sup_{x\in R^+} \frac{|\ \mathcal{G}_n(e_2(t)) - e_2(x)\ |}{1+x^2} \\ &\leq \left|\frac{1}{n+1}\right| \sup_{x\in R^+} \frac{x^2}{1+x^2} \\ &\leq \left|\frac{1}{n+1}\right| \end{aligned} \tag{3.34}$$

Üçüncü koşulda sağlanmış olur çünkü $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{n+1}\right| = 0$ dır. Böylelikle $\mathcal{G}_n$ operatörümüz için ispat tamamlanmış olur.

$\mathcal{G}_n^*$ operatörümüz için bu üç şartın gerçekleştiğini göstermek çok daha kolay olacaktır.

$k = 0, 1, 2$ için $\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{G}_n^*(e_k) - e_k\|_\phi = 0$ olduğunu göstermek için bir kaç moment değerini hatırlayacak olursak, $k = 0$ için $\mathcal{G}_n^*(e_0(t)) = e_0(x)$ ve $k = 2$ için $\mathcal{G}_n^*(e_2(t)) = e_2(x)$ olduğunu görürüz . Bu değerlerin yardımıyla $\|\mathcal{G}_n^*(e_0(t)) - e_0(x)\|_\phi = 0$

ve $\|\mathcal{G}_n^*(e_2(t)) - e_2(x)\|_\phi = 0$ olduğunu kolaylıkla söyleyebilir ve bu ifadelerin $n \to \infty$ için limitininde 0'a eşit olduğu görülür. İspatı tamamlamak için sadece $k = 1$ için nasıl sonuç verdiğine bakmak yeterli olacaktır.
$k = 1$ için $e_1(t) = t$ olup $\mathcal{G}_n^*(e_1(t), x) = \sqrt{\frac{n-2}{n-1}}x$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}_n^*(e_1(t)) - e_1(x)\|_\phi &= \sup_{x\in R^+} \frac{|\mathcal{G}_n(e_1(t)) - e_1(x)|}{1+x^2} \\
&= \sup_{x\in R^+} \frac{\left|\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}x - x\right|}{1+x^2} \\
&\leq \left|\sqrt{\frac{n-2}{n-1}} - 1\right| \sup_{x\in R^+} \frac{x}{1+x^2} \\
&\leq \left|\sqrt{\frac{n-2}{n-1}} - 1\right|
\end{aligned} \tag{3.35}$$

olup, diğer iki şartta olduğu gibi $n \to \infty$ için $\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{\frac{n-2}{n-1}} - 1\right| = 0$ olur ve $k = 1$ için de şart sağlanmış olur. Böylelikle her iki operatörümüz için de ispat tamamlanır.

Fonksiyon dizilerinin düzgün yakınsaklığının bulunması kadar önemli bir diğer problemde yaklaşımdaki hata oranı veya başka bir deyişle yaklaşım hızının hesaplanmasıdır. Daha öncede diziler için ifade ettiğimiz yaklaşım hızında olduğu gibi şimdide (f_n) ve (g_n) gibi terimleri pozitif ve sonsuz küçülen fonksiyon dizileri ele alalım. $0 \leq (f_n) \leq (g_n)$ ise (f_n) 'in sıfıra yaklaşım hızı (g_n) 'den daha hızlıdır denir.
Bu tanımdan hareketle L_n lineer pozitif operatörlerinin herhangi bir $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşım hızını

$$|L_n(f,x) - f(x)| \leq c f_n \tag{3.36}$$

olacak şekilde f_n 'ler ile değerlendirilebilir. Burada $n \to \infty$ için $f_n \to 0$ olan f_n 'ler bulmaya çalışılır. Yani operatörün yaklaşım hızını f_n'nin sıfıra yaklaşım hızı ile kıyaslarız . Bu tanımdan yaralanarak lineer pozitif operatörler için yaklaşım hızı hakkında bize yardımcı olan ve süreklilik modülünü içeren bir eşitsizlik verebiliriz. Burada, $[0, x_0]$ kapalı aralığı için $x_0 \geq 0$ ve f 'nin standart süreklilik modülü $\omega_{x_0}(f,\delta)$ olarak ifade edilir ve şu şekilde tanımlanır.

$$\omega_{x_0}(f,\delta) = \sup_{|t-x|\leq\delta, x,t\in[0,x_0]} |f(t) - f(x)| \tag{3.37}$$

Açıktır ki $f \in C_b[0,\infty)$ için $\delta \to 0$ olacak şekilde ise $\omega_{x_0}(f,\delta) \to 0$ olur.
Bu tanımları ifade ettikten sonra $L_n(f,x)$ operatörünün $f(x)$ 'e yaklaşım hızının süreklilik modülü ile nasıl değerlendirileceğini eşitsizlik yardımıyla söyleyebiliriz. Herahgi bir x_0 noktasında

$$|L_n(f,x_o) - f(x_0)| \leq c\omega_{x_0}(f,\delta_n) \tag{3.38}$$

olur. Burada öneli olansa $n \to \infty$ için $\delta_n \to 0$ olacak şekile $\delta = (\delta_n)$ bulabilmektir. Bu da bize eşitsizliğin sağ tarafının sıfıra gitmesiyle operatörün yaklşım hızını verir. Böylelikle operatörün $f(x_0)$ fonksiyonuna yaklaşım hızını verir.
Bu tanımlamalar doğrultusunda modifiye Gamma operatörlerimizin süreklilik modülü yardımıyla yakınsama oranına odaklanabiliriz . Daha sonra bu sonucu kullanarak, modifiye Gamma operatörlerimizin klasiklerine oranla daha iyi bir hata tahminine sahip olduğunu kanıtlayacağız. Bu hedef doğrultusunda şunları ifade edebiliriz. Modifiye Gamma operatörlerimizden $\mathcal{G}_n$ için süreklilik modülünün de yardımıyla yakınsaklık hızını ile alakalı şu eşitsizliği verebiliriz.
$f \in C_b[0,\infty)$ ve $x_0 > 0$ için $[0,x_0+1] \subset [0,\infty)$ sonlu aralığı olmak üzere f fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega_{x_0+1}(f,\delta)$ olsun.

$$|\mathcal{G}_n(f,x) - f(x)| \leq 6M_f \frac{1}{n+1} x_0^2 (1+x_0)^2 + 2\omega_{x_0+1}\left(f, \sqrt{\frac{1}{n+1}x_0^2}\right) \tag{3.39}$$

Burada M_f , f'ye bağlı bir sabittir . Bu eşitsizliğin $\mathcal{G}_n$ operatörü için varlığını gösterelim .

$f \in C_b[0,\infty)$, $0 \leq x \leq x_0$ ve $t > x_0+1$ olsun . Daha sonra $t - x > 1$ için şu çıkarımda bulunabiliriz,

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(x)| &\leq |f(t)| + |f(x)| \\
&\leq M_f(\phi(t) + \phi(x)) \\
&\leq M_f(2 + t^2 + x^2) \\
&\leq M_f(t-x)^2(2 + t^2 + x^2) \\
&\leq M_f(t-x)^2(2 + t^2 + x^2 + (t-2x)^2) \\
&= M_f(t-x)^2(2 + 3x^2 + 2(t-x)^2)) \\
|f(t) - f(x)| &\leq 6M_f(t-x)^2(1+x_0)^2
\end{aligned}$$

Bu eşitsizliği elde ettikten sonra tekrar $f \in C_b[0,\infty)$ ve $0 \leq x \leq x_0$ olsun, süreklilik modülü özelliklerinde elde edeceğimiz bir diğer eşitsizlikde $t \leq x_0+1$ için

$$|f(t)-f(x)| \leq \omega_{x_0+1}(f,|t-x|) \leq \omega_{x_0+1}(f,\delta)(1+\frac{1}{\delta}|t-x|)$$

şeklinde olur.

Sonuç olarak , yukarıdaki eşitsizlikler yardımıyla $0 \leq x \leq x_0$ ve $0 \leq t \leq \infty$ için

$$|f(t)-f(x)| \leq 6M_f(t-x)^2(1+x_0)^2+\omega_{x_0+1}(f,\delta)(1+\frac{1}{\delta}|t-x|)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe $\mathcal{G}_n$ operatörümüzü uygulayıp Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlacak olursak

$$\begin{aligned}
|\mathcal{G}_n(f,x)-f(x)| &\leq 6M_f\mathcal{G}_n((t-x)^2,x)(1+x_0)^2+\omega_{x_0+1}(f,\delta)\Big(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathcal{G}_n((t-x)^2,x)}\\
&\leq 6M_f\frac{1}{n+1}x_0^2(1+x_0)^2+2\omega_{x_0+1}\Big(f,\sqrt{\frac{1}{n+1}x_0^2}\Big)
\end{aligned}$$

olur . Burada görüleceği üzere $\delta = \sqrt{\frac{1}{n+1}x_0^2}$ seçersek ispat tamamlanmış olur.

Süreklilik modülünün yardımıyla elde ettiğimiz bu eşitsizlik $\mathcal{G}_n$ operatörünün (1.1) ve (1.3) ile tanımlanan klasiklerine göre daha iyi bir yakınsamaya sahip olduğunu anlamamızda bize yardımcı olur. $\mathcal{G}_n$ operatöründe olduğu gibi $\mathcal{G}_n^*$ operatörü için de süreklilik modülü yardımıyla bir eşitsizlik verebiliriz .

$f \in C_b[0,\infty)$ ve $x_0 > 0$ için $[0,x_0+1] \subset [0,\infty)$ sonlu aralığı olmak üzere f fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega_{x_0+1}(f,\delta)$ olsun. $\mathcal{G}_n^*$ operatörü için

$$|\mathcal{G}_n^*(f,x)-f(x)| \leq 3M_f\Big(\frac{n+2}{(n-1)(n-2)}\Big)x_0^2(1+x_0)^2+2\omega_{x_0+1}\Big(f,\sqrt{\frac{n+2}{(n-1)(n-2)}x_0^2}\Big)$$

eşitsizliğini verebiliriz . Burada M_f , f'ye bağlı bir sabittir. Bu eşitsizliğin varlığını göstermek için yine $\mathcal{G}_n$ operatörüzde uyguladığımız ispata benzer yollar izlenirse varlığını gösterebiliriz. Ancak burada $\delta = \sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}\right]x_0^2}$ olarak seçilir ve böylelikle eşitsizliğin varlığı gösterilmiş olur .

Sonuç olarak, (1.1) ile tanımlanan G_n operatörü ile modifiye Gamma operatörümüz $\mathcal{G}_n$'i karşılaştırmak için G_n operatörünün süreklilik modülü yardımıyla elde edilen eşitsizliğini ifade edelim.

$f \in C_b[0,\infty)$ ve $x_0 > 0$ için $[0, x_0+1] \subset [0,\infty)$ sonlu aralığı olmak üzere f fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega_{x_0+1}(f,\delta)$ olsun. M_f , f'ye bağlı bir sabit olmak üzere ,

$$|G_n(f,x) - f(x)| \leq 6M_f \frac{1}{n-1} x_0^2 (1+x_0)^2 + 2\omega_{x_0+1}\left(f, \sqrt{\frac{1}{n-1} x_0^2}\right) \tag{3.40}$$

eşitsizliği elde edilir.

Tahminlerimeze göre modifiye Gamma operatörümüzün hata tahmini konusunda klasik Gamma operatörüne nazaran daha iyi bir sonuç vermesini bekliyoruz.

Her iki operatör içinde eşitsizliğin sağındaki süreklilik modülünden seçilen δ 'ların $n \to \infty$ için $\delta \to 0$ olduğu görülür. Hangisinin daha iyi bir hata tahminine sahip olduğunu göstermek için eşitsizliğin sağındaki süreklilik modülü haricinde ki terimlerden hareketle $x_0 > 0$ olmak üzere $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n-1}$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $n \geq 1$ için

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n^2-1} > 0$$

olacaktır . Böylelikle $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n-1}$ olur ve görülürki $\frac{1}{n+1}$ ifadesi $\frac{1}{n-1}$ ifadesinde $nto\infty$ için çok daha hızlı bir şekilde 0 ' a yakınsar. Bu da demektir ki modifiye Gamma operatörümüz daha iyi bir yaklaşım hızına sahiptir.

Süreklilik modülü ile modifiye Gamma operatörlerinin yakınsama hızlarını hesaplarken sürekli ve reel değerli fonksiyonlara olan yakınsama hızlarını hesaplamıştık. Ancak bu kısımda ise sürekli ve reel değerli olmalarının yanısıra belli şartları sağlaması durumunda operatörlerin hızlarının nasıl olacağını inceleyeceğiz. Bu şartları ifade etmek gerekirse, $f \in C_b[0,\infty)$ olup $s \in (0,1]$ ve $Q \subset [0,\infty)$ olsun . $x \in Q$ ve $t \in [0,\infty)$ olmak üzere,

$$|f(t) - f(x)| \leq M_{f,s}|t-x|^s \tag{3.41}$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonların sınıfına Lipschitz sınıfı fonksiyonlar denir.[7]
Burada $M_{f,s}$, s bir sabit olmak üzere s'ye ve f'ye bağlıdır ve $f \in Lip_{M_f}(s)$ şeklinde ifade edilir.

Bizde bu sınıfa ait fonksiyonlara olan yakınsama hızını modifiye Gamma operatörlerimiz için inceleyeceğiz .

Bu tanımlamalar yardımıyla $\mathcal{G}_n^*$ operatörümüz için bir eşitsizlik verelim.

$f \in C_b[0,\infty) \cap Lip_{M_f}(s)$ olmak üzere $s \in (0,1]$ ve $Q \subset [0,\infty)$ olsun . Buradan hareketle şu eşitsizliği verebiliriz. $x \in (0,\infty)$ olsun,

$$|\mathcal{G}_n^*(f,x) - f(x)| \leq M_{f,s}\left[\left(\left[2-2\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}\right]e_2(x)\right)^{s/2} + 2(d(x,Q))^s\right] \tag{3.42}$$

Burada $M_{f,s}$, f ve s'ye bağlı bir sabit ve $d(x,Q)$ ise x noktası ve Q kümesi arasındaki uzaklığı veren fonksiyon olup ,

$$d(x,Q) = \inf\{|t-x|, t \in Q\} \tag{3.43}$$

şeklide tanımlanır.

Eşitsizliğin varlığını göstermek için ilk önce $\overline{Q}$ kümesini Q kümesinin kapanışı olarak tanımlayalım ve $Q \subset \overline{Q}$ olduğu kapanış tanımından aşikardır .

O zaman en az bir $t_0 \in \overline{Q}$ noktası için

$$d(x,Q) = |x - t_0|$$

olduğunu söylebiliriz.

Daha sonra $(\mathcal{G}_n^*)_{n\geq 1}$ 'nin monotonluk özelliğinden ve daha önce ki tanımlamalardan dolayı şunu ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{G}_n^*(f,x) - f(x)| &\leq \mathcal{G}_n^*(|f(t) - f(t_0)|, x) + \mathcal{G}_n^*(|f(x) - f(t_0)|, x) \\
&\leq M_{f,s}[\mathcal{G}_n^*(|t-t_0|^s, x) + |x-t_0|^s] \\
&\leq M_{f,s}[\mathcal{G}_n^*(|t-x|^s, x) + 2|x-t_0|^s]
\end{aligned}$$

Ardından Hölder eşitsizliği yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{G}_n^*(f,x)-f(x)| &\leq M_{f,s}\Big[\big(\mathcal{G}_n^*\big(|t-x|^2,x\big)\big)^{s/2}+2(d(x,Q))^s\Big] \\
&= M_{f,s}\Bigg[\bigg(\Big[2-2\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}\Big]e_2(x)\bigg)^{s/2}+2(d(x,Q))^s\Bigg]
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Böylelikle eşitsizliğin varlığını göstermiş oluruz.

Aynı tanımlamalar yardımıyla bir diğer modifiye Gamma operatörümüz $\mathcal{G}_n$ için de bir eşitsizlik verebiliriz.

$f \in C_b[0,\infty) \cap Lip_{M_f}(s)$ olmak üzere $s \in (0,1]$ ve $Q \subset [0,\infty)$ olsun . Burada $M_{f,s}$, f ve s'ye bağlı bir sabit . $\overline{Q}$, Q 'nun kapanışı olmak üzere , en az öyle bir $t_0 \in \overline{Q}$ vardır ki $d(x,Q) = |x-t_0|$ dır. Eşitsizliğimizi ifade edecek olursak, $x \in (0,\infty)$ için

$$
|\mathcal{G}_n(f,x)-f(x)| \leq M_{f,s}\Big[\big((\frac{1}{n+1})e_2(x)\big)^{s/2}+2(d(x,Q))^s\Big] \tag{3.45}
$$

şeklide olur.

Şimdi operatörlerimizin yaklaşım hızını Lipschitz tipi maksimal foksiyonların yardımıyla hesaplayalım. Lipschitz tipi maksimal fonksiyonlar şu şekilde tanımlanmışlardır. $s \in (0,1]$ ve $x \in (0,\infty)$ olmak üzere

$$
\tilde{\omega}_s(f,x) = \sup_{0\leq t<\infty, t\neq x} \frac{|f(t)-f(x)|}{|t-x|^s} \tag{3.46}
$$

şeklindedir.

Bu tanımlama yardımıyla $\mathcal{G}_n^*$ operatörümüzün yaklaşım hızını hesaplayacak olursak şu eşitsizliği elde ederiz. $f \in C_b[0,\infty)$ ve $s \in (0,1]$ olsun , $x \in (0,\infty)$ için

$$
|\mathcal{G}_n^*(f,x)-f(x)| \leq \tilde{\omega}_s(f,x)\mathcal{G}_n^*\bigg(\Big[2-2\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}\Big]e_2(x)\bigg)^{s/2} \tag{3.47}
$$

olur. Bu eşitsizliğin varlığı göstermek için Hölder eşitsizliği ve Lipschitz tipi maksimal fonksiyonların eşitliği yeterli olacaktır.

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{G}_n^*(f,x)-f(x)| &\leq \mathcal{G}_n^*(|f(t)-f(x)|,x) \\
&\leq \tilde{\omega}_s(f,x)\mathcal{G}_n^*(|t-x|^s,x) \\
&\leq \tilde{\omega}_s(f,x)\mathcal{G}_n^*(|t-x|^2,x)^{s/2} \\
&\leq \tilde{\omega}_s(f,x)\mathcal{G}_n^*\Big(\Big[2-2\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}\Big]e_2(x)\Big)^{s/2}
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

böylece istenen sonuç elde edilir.

Lipschitz tipi maksimal fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı için bir eşitsizlikde $\mathcal{G}_n$ modifiye Gamma operatörümüz için verelim. $f \in C_b[0,\infty)$ ve $s \in (0,1]$ olsun, $x \in (0,\infty)$ için

$$
|\mathcal{G}_n(f,x)-f(x)| \leq \tilde{\omega}_s(f,x)\mathcal{G}_n\Big(\Big[\frac{1}{n+1}\Big]e_2(x)\Big)^{s/2} \tag{3.49}
$$

olur.

Son olarak da operatörlerimizin yaklaşım hıznı değerlendirmek adına iki parametreli Lipschitz tipi fonksiyonlar uzayını tanımlayalım. $\alpha,\beta>0$ olmak üzere

$$
Lip_M^{\alpha,\beta}(s)=\Big(f\in C[0,\infty):|f(t)-f(x)|\leq M\frac{|t-x|^s}{(ax^2+bx+t)^{s/2}}\ ,\ x,t\in(0,\infty)\Big)
$$

şeklinde tanımlanır. Burada $s \in (0,1]$ ve M pozitif bir sabittir.

Şİmdide $\mathcal{G}_n^*$ operatörümüzün bu uzaya ait fonksiyonlara yakınsama hızı için bize yardımcı olan eşitsizliği verelim. $f \in Lip_M^{\alpha,\beta}(s)$ ve $x \in (0,\infty)$ olsun . Burada $\alpha,\beta>0$ olmak üzere

$$
|\mathcal{G}_n^*(f,x)-f(x)| \leq M\left[\frac{\Big[2-2\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}\Big]e_2(x)}{ax^2+bx}\right]^{s/2} \tag{3.50}
$$

eşitsizliğine sahibiz .

Bu eşitsizliğin varlığını gösterelim. Bu eşitsizliğin varlığını iki aşamada göstereceğiz. İlk olarak $s=1$ değeri için değerlendireceğiz. $s=1$ için $f \in Lip_M^{\alpha,\beta}(1)$ ve $x \in (0,\infty)$ olsun.

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{G}_n^*(f,x)-f(x)| &\leq |\mathcal{G}_n^*(|f(t)-f(x)|,x) \\
&\leq M\mathcal{G}_n^*\Big(\frac{|t-x|}{\sqrt{ax^2+bx+t}},x\Big) \\
|\mathcal{G}_n^*(f,x)-f(x)| &\leq \frac{M}{\sqrt{ax^2+bx}}\mathcal{G}_n^*(|t-x|,x)
\end{aligned} \tag{3.51}
$$

olur. Burada Cauchy-Schwarzz eşitsizliğini uygularsak,

$$|\mathcal{G}_n^*(f,x)-f(x)| \leq \frac{M}{\sqrt{ax^2+bx}}[\mathcal{G}_n^*(|t-x|^2,x)]^{1/2} \leq M\left[\frac{\left[2-2\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}\right]e_2(x)}{ax^2+bx}\right]^{s/2} \tag{3.52}$$

eşitsizliğin varlığını $s=1$ için göstermiş oluruz. Şimdide s'nin diğer durumları için gösterelim.
$s \in (0,1)$ için $f \in Lip_M^{\alpha,\beta}(s)$ ve $x \in (0,\infty)$ olsun. $s=1$ için izlenen yol izlenirse

$$|\mathcal{G}_n^*(f,x)-f(x)| \leq \frac{M}{(ax^2+bx)^{s/2}}\mathcal{G}_n^*(|t-x|^s,x) \tag{3.53}$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$|\mathcal{G}_n^*(f,x)-f(x)| \leq \frac{M}{(ax^2+bx)^{s/2}}\mathcal{G}_n^*(|t-x|^s,x) \leq \frac{M}{(ax^2+bx)^{s/2}}(\mathcal{G}_n^*(|t-x|,x))^s$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarzz eşitsizliğini uygularsak

$$|\mathcal{G}_n^*(f,x)-f(x)| \leq \frac{M}{(ax^2+bx)^{s/2}}(\mathcal{G}_n^*(|t-x|^2,x))^{s/2} \leq M\left[\frac{\left[2-2\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}\right]e_2(x)}{ax^2+bx}\right]^{s/2}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

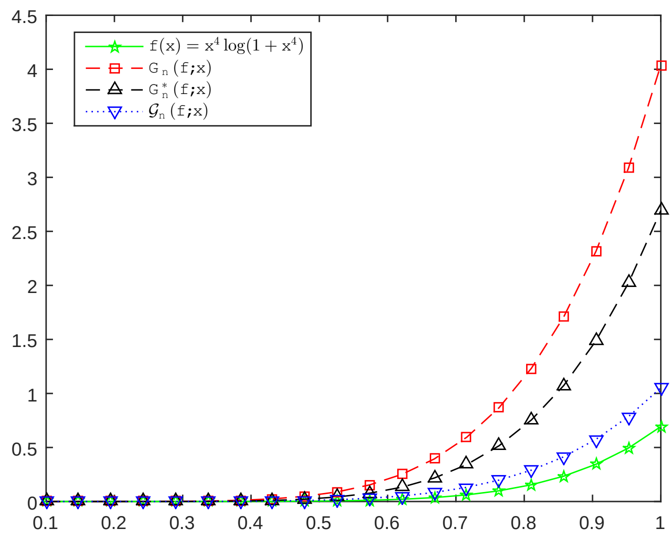
Bir diğer $\mathcal{G}_n$ modifiye Gamma operatörümüzün Lipschitz tipi fonksiyonlar uzayındaki fonksiyonlara olan yakınsama hızını değerlendirmek için de şu eşitsizliğe sahibiz. $s \in (0,1]$, $f \in Lip_M^{\alpha,\beta}(s)$ ve $x \in (0,\infty)$ olmak üzere

$$|\mathcal{G}_n(f,x)-f(x)| \leq M\left[\frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)e_2(x)}{ax^2+bx}\right]^{s/2} \tag{3.54}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğin varlığını da bir önceki operatörümüzde olduğu gibi aynı yolu izlersek gösterebiliriz.

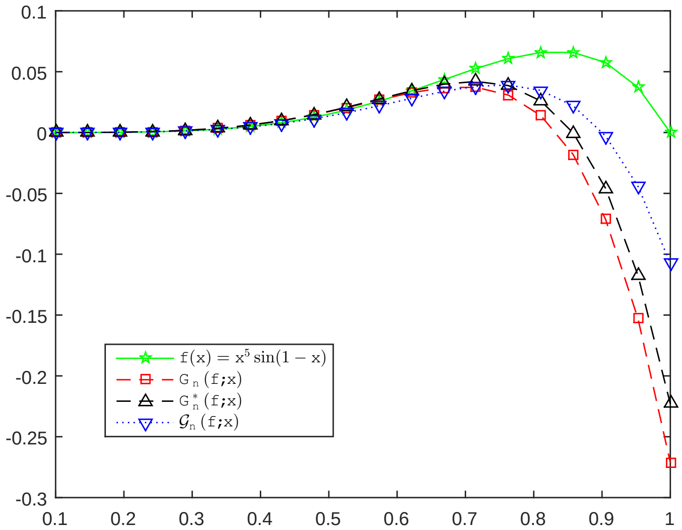
3.2. GAMMA OPERATÖRLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölüm şimdiye kadar yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızlarını değerlendirdiğimiz modifiye Gamma operatörlerimiz için bir sonuç niteliğindedir. Klasik operatörler ile modifiye ettiğimiz operatörlerimizi tek boyutlu grafikler yardımıyla karşılaştıracağız. Bu sayede hedef fonksiyona daha iyi bir yakınsama davranışı olup olmadığı hakkında fikir sahibi olacağız. Bu karşılaştırmaları (1.1) ile tanımlanan Lupas ve Müllere [3] ait operatörle ve (1.3) ile tanımlanan Zeng 'e [4] ait operatöre karşı yapacağız. Bu karşılaştırmaları yapabilmek için grafikleri MATLAB programı yardımıyla elde ettik.
Şimdi karşılaştırmalarda bulunmak için bir hedef fonksiyon belirleyelim. $f : [0.1,1] \to R$ olmak üzere $f(x) = x^4 \log(1+x^4)$ olsun .
G_n Lupas ve Müllere , G_n^* Zeng 'e ve $\mathcal{G}_n$ de modifiye Gamma operatörümüz olup, gerekli hesaplamalar yapılırsa operatörlerin $[0.1,1]$ aralığında ki grafikleri şu şekildedir.



Şekil 3.1. G_n , G_n^* , $\mathcal{G}_n$ ve f fonksiyonu grafiği.

Yeşil renk f hedef fonksiyonu, mavi modifiye Gamma operatörümüz $\mathcal{G}_n$, siyah G_n^*, kırmızı da G_n operatörüne ait graifiklerdir. Bu grafiklerden de görüleceği üzere hedef fonksiyona en iyi yakınsama davranışını modifiye Gamma operatörümüz gösteriyor.
Şimdi de hedef fonksiyonu değiştirerek operatörler arasındaki karşılaştırmaya tekrar bakalım.
$f : [0.1,1] \to R$ olmak üzere $f(x) = x^5 \sin(1-x)$ olsun. G_n, G_n^* , $\mathcal{G}_n$ operatörlerinin ve hedef fonksiyon f 'nin $[0.1,1]$ arasındaki grafikleri şu şekildedir.



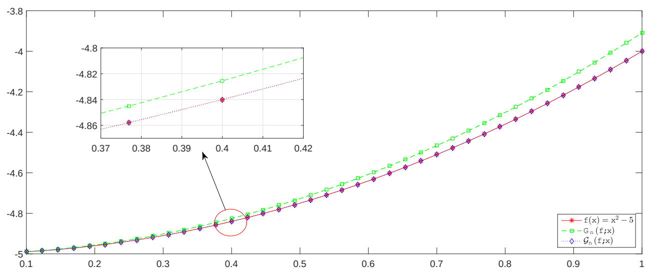
Şekil 3.2. G_n , G_n^* , $\mathcal{G}_n$ ve f fonksiyonu grafiği.

Yeşil renk f hedef fonksiyonu, mavi modifiye Gamma operatörümüz $\mathcal{G}_n$, siyah G_n^*, kırmızı da G_n operatörüne ait graifiklerdir . Bu grafiktede görüldüğü üzere en iyi yakınsama davranışını yine $\mathcal{G}_n$ modifiye Gamma operatörümüz göstermekte. Ardından G_n^* ve G_n operatörleri sırasıyla daha iyi yakınsmaya sahiptir.

Aldığımız iki hedef fonksiyonda da yakınsama konusunda daha iyi bir sonuç veren $\mathcal{G}_n$ modifiye Gamma operatörümüz oldu. Bu doğrultuda $\mathcal{G}_n$ operatörümüze hata miktarı konusunda bakacak olursak yine daha az hata miktarına sahip olan operatör olduğu görülür. Benzer değerlendiryi yakınsama hızı içinde yapacak olursak klasik operatörlere nazaran daha hızlı bir yakınsamaya sahip olduğu açıktır.

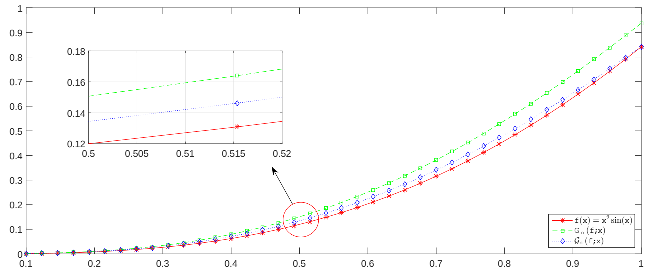
Diğer modifiye Gamma operatörümüz için de bu değerlendirmelerde bulunalım.

İlk olarak $\mathcal{G}_n^*$ ile G_n operatörlerini f hedef fonksiyonu doğrultusunda karşılaştıralım. $f : [0.1, 1] \to R$ olmak üzere $f(x) = x^2 - 5$ olsun.



Şekil 3.3. G_n , $\mathcal{G}_n^*$ ve f fonksiyonu grafiği.

Kırmızı renk hedef fonksiyon , mavi renk $\mathcal{G}_n^*$ operatörümüz ve yeşil renk ise G_n operatörüne ait grafiklerdir. Çizilen grafiklerde de görüldüğü üzere $[0.1,1]$ aralığında $\mathcal{G}_n^*$ operatörümüz hedef fonksiyona tam anlamıyla bir yakınsama davranışı göstermektedir. G_n operatörünün yakınsama davranışının daha zayıf olduğu açıktır.
Şimdide hedef fonksiyonu değiştirerek yakınsama davranışlarını değerlendirelim.
$f:[0.1,1]\to R$ olmak üzere $f(x)=x^2\sin(x)$ olsun. Kırmızı renk hedef fonksiyon, mavi



Şekil 3.4. G_n , $\mathcal{G}_n^*$ ve f fonksiyonu grafiği.

renk $\mathcal{G}_n^*$ operatörümüz ve yeşil renk ise G_n operatörüne ait grafiklerdir. Hesaplamalar doğrultusunda çizilen grafiklerden $\mathcal{G}_n^*$ operatörünün G_n operatörüne göre hedef fonksiyona daha iyi bir yakınsama davranışı olduğu görülür.

Her iki hedef fonksyona olan yakınsama durumlarına bakıldığında $\mathcal{G}_n^*$ modifiye Gamma operatörümüz G_n operatörüne göre daha iyi sonuç verdiği açıktır. Bu grafiklerden hareketle söyleyebileceğimiz bir diğer şeyse hata miktarıdır. Daha iyi bir yakınsama gösterdiği için $\mathcal{G}_n^*$ operatörümüzün hata miktarı daha azdır . Buna benzer bir diğer değerlendirme de yakınsama hızları hakkındadır ve $\mathcal{G}_n^*$ operatörümüz G_n operatöründen daha hızlı yakınsamaya sahip olduğu söylenebilir.

4. SONUÇ

Bu çalışmada yaklaşım teorisi baz alınarak lineer pozitif operatör olan Gamma operatörleri ele alınmıştır. Klasiklerinin de yardımıyla Gamma operatörleri modifiye edilerek yeni Gamma operatörleri tanımlanmıştır. Tanımlanan bu operatörlerin yaklaşım teorisinin temel teoremini sağlayıp sağlamadığı incelenmiş ve hangi dereceden fonksiyonları koruduğu görülmüştür. Bununla birlikte moment ve merkezi moment değerleri bulunmuştur. Bu sonuçlar doğrultusunda modifiye Gamma operatörlerimizin düzgün yakınsaklığından bahsedilmiş ve bunu sağladığı gösterilmiştir. Sonra modifiye Gamma operatörlerimizin asimtotik davranışı hakkında fikir sahibi olmamız adına Voronovskaja formülü verilmiş ve bu formül ile nasıl sonuç verdiği incelenmiştir. Daha sonra hedef fonksiyon için tanımlanan uzay değiştirilerek yaklaşım özellikleri incelenmiştir ve bu yeni uzaylar ağırlıklı uzaylar adını almıştır. Daha sonra yaklaşım hızını değerlendirmek adına süreklilik modülü tanımlanmış ve süreklilik modülü yardımıyla klasik Gamma operatörlerine karşı modifiye Gamma operatörlerimizin yaklaşım hızı karşılaştırılmıştır. Süreklilik modülünün yanı sıra yakınsaklık hızını değerlendirirken alınan hedef fonksiyonların Lipschitz sınıfından olması durumunda yaklaşım hızları incelenmiştir .

Son olarak da bu değerlendirmeler MATLAB programı yardımıyla grafiklere dökülmüştür. Klasik Gamma operatörleri ve modifiye Gamma operatörlerinin yanında hedef fonksiyonununda grafiği verilerek görsel bir değerlendirme sunulmuştur . Yani hedef fonksiyona nasıl bir yakınsama olduğu grafikler yardımıyla incelenmiştir.

Bu gelişmeler ışığında çalışmamızın başından sonuna kadar daima daha iyi bir sonuç veren operatörün modifiye ettiğimiz Gamma operatörlerimiz olduğunu söyleyebiliriz. Bu da daha iyi bir yakınsama davranışı sergiledği için modifiye Gamma operatörlerimizi klasiklerine karşı daha kullanışlı hale getirmekte.

5. KAYNAKLAR

[1] K. G. Weierstrass, "U die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkrlicher Funktionen einer reellen Veranderlichen," *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin,* c. 2, ss. 633–639, 1885.

[2] H. Hacısalihoğlu ve A. Hacıyev, *Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı*, Ankara, Türkiye: A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 1995, ss. 17-77.

[3] A. Lupaş ve M. Müller, "Approximations eigenschaftn der Gamma operatoren," *Mathematische Zeitschrift,* c. 98, ss. 208-226, 1967.

[4] X. M. Zeng, "Approximation properties of gamma operators," *Journal of Mathematical Analysis and Application,* c. 331, sayı 2, ss. 389-401, 2005.

[5] F. Usta ve Ö. Betus, "A new modification of Gamma operators with a better error estimation," *Linear Multilinear Algebra*, doi: 10.1080/03081087.2020.1791033., yayımlanmak üzere gönderildi, 2020.

[6] Ö. Betus ve F. Usta, "Approximation of functions by a new type of Gamma operators," *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, doi:10.1002/num.22660, yayımlanmak üzere gönderildi, 2020.

[7] B. Lenze, " On Lipschitz type maximal function and their smoothness spaces," *Indagationes Mathematicae (Proceedings). North-Holland,* c. 50, ss. 53-63, 1988.

[8] A. Artee, "Approximation by modified Gamma type operators," *International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics,* c. 5, sayı. 4, ss. 12-19, 2019.

[9] M. A. Özarslan ve H. Aktuğlu, "Local approximation for certain King type operator," *Filomat,* c.27, sayı.1, ss.173-181, 2013.

[10] L. Rempulska ve M. Skorupka, "Approximation properties of modified Gamma operators," *Integral Transforms and Special Functions,* c.18, sayı. 9, ss. 653–662, 2007.

[11] J. P. King, "Positive linear operator which preserves x^2, "*Acta Mathematica Hungarica,* c.99, ss. 203-208, 2003.

[12] A. D. Gadjev, " Theorems of the types of P. P. Korovkin's theorems," *Matematicheskie Zametki,* c.20, s.5, ss. 781-786, 1976.

[13] P. P. Korovkin, " On convergence of linear operators in the space of continuous functions (Russian), "*Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.),* c.90, ss. 961-964 , 1953 .

[14] T. Acar, M. Mursaleen ve S.N. Deveci, "Gamma operators reproducing exponential functions, "*Advances in Difference Equations*, ss. 310-423, 2020.

[15] Y. Soykan, *Metrik uzaylar ve topolojisi,* 1. baskı, Ankara, Türkiye: Nobel, 2012, ss.10-90.

[16] A. Ciupa, "A Voronoskaja type theorem for a positive linear operator," *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, ss. 1-7, 2006 .

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ömür BETUS

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	Devam Ediyor
Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2019
Lise	Elektirik Elektronik Böl.	Kar. Ana. Mes. Lisesi	2014

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

A1. F. Usta ve Ö. Betus, "A new modification of Gamma operators with a better error estimation" , *Linear Multilinear Algebra*, doi: 10.1080/03081087.2020.1791033., 2020.

A2. Ö. Betus ve F. Usta, "Approximation of functions by a new type of Gamma operators", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, doi: 10.1002/num.22660, 2020.