

68899

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖN GERİLMELİ ELASTİK TÜP İÇERİSİNDE
PULSATİF AKIMIN İNCELENMESİ

68899

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat. Müh. İlkay BAKIRTAŞ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30 Mayıs 1997

Tezin Savunulduğu Tarih : 6 Haziran 1997

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hilmi DEMİRAY

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Esin İNAN

Prof. Dr. Erdoğan ŞUHUBİ

[Handwritten signatures of Hilmi Demiray, Esin İnan, and Erdoğan Şuhubi]

HAZİRAN 1997

ÖNSÖZ

Bu tezin oluşum süresince, kısıtlı zamanına rağmen her aşamada bana yardımcı olan Sayın Hocam Prof. Dr. Hilmi Demiray'a içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarına destek olan Sayın Ali Ercengiz , Nalan Antar, Güler Akgün ve Saadet Özer'e tüm yardımları için teşekkür ederim.

İlkay Bakırtaş

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	ii
SEMBOL LİSTESİ.....	iv
ŞEKİL LİSTESİ.....	v
ÖZET.....	vi
SUMMARY.....	vii
BÖLÜM 1. GİRİŞ VE KISA TARİHSEL GELİŞİM.....	1
BÖLÜM 2. TEMEL DENKLEMLER.....	9
BÖLÜM 3. ARTIMSAL HAREKET DENKLEMLERİ.....	23
3.1 Artımsal Mambran Denklemleri.....	24
3.2 Artımsal Bünye Denklemleri.....	28
3.3 Akışkanın Artımsal Denklemleri.....	32
BÖLÜM 4. UYGULAMALAR.....	40
4.1 Sabit Yarıçaplı Elastik Tüp Problemi.....	40
4.2 Yarıçapı Yavaş Genişleyen Elastik Tüp Problemi.....	54
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	76
KAYNAKLAR.....	85
ÖZGEÇMİŞ.....	89

SEMBOL LİSTESİ

ρ_0	: Mambranın kütle yoğunluğu
ρ	: Akışkanın yoğunluğu
h	: Sonlu statik şekil değiştirmeden sonraki mambran kalınlığı
h'	: Şekil değiştirmiş mambranın nihai kalınlığı
σ_{kl}	: Akışkana ait toplam gerilme tansörü
μ_v	: Viskozite
c_{kl}^{-1}	: Finger deformasyon tansörü
Σ	: İncelenen elastik cisme ait şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu
ω	: Dalganın açısal frekansı
k	: Dalga sayısı
A, B	: Katıya ait kompleks dalga genlik sabitleri
α_0	: Womersley parametresi
c	: Boyutsuz dalga faz hızı
ξ	: Boyutsuz dalga sayısı
E	: Young modülü
μ	: Malzemenin kayma modülü
v	: Dalga yayılma hızı
χ	: Aktarma katsayısı
Q	: Debi
T	: Kalbin uyguladığı sistolik ve diastolik basınçlar arasındaki farkın genliği

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>sayfa no</u>
Şekil 2.1 Tüp elemanının çeşitli kademelerdeki şekil değiştirmiş durumu	9
Şekil 2.2 Mambran elemanına etkiyen kuvvetler	11
Şekil 4.1 Birincil dalga hızının iç basınç ve Womersley parametresi ile değişimi	77
Şekil 4.2 İkincil dalga hızının iç basınç ve Womersley parametresi ile değişimi	78
Şekil 4.3 Birincil dalganın aktarma katsayısının iç basınç ve Womersley parametresi ile değişimi	79
Şekil 4.4 İkincil dalganın aktarma katsayısının iç basınç ve Womersley parametresi ile değişimi	80
Şekil 4.5 Yarıçapı sabit tüp için iç basınç fonksiyonunun eksenel doğrultudaki değişimi	81
Şekil 4.6 Yarıçapı azalan tüp için iç basınç fonksiyonunun eksenel doğrultudaki değişimi (i)	82
Şekil 4.7 Yarıçapı azalan tüp için iç basınç fonksiyonunun eksenel doğrultudaki değişimi (ii)	83
Şekil 4.8 Yarıçapı artan tüp için iç basınç fonksiyonunun eksenel doğrultudaki değişimi	84

ÖZET

Bu çalışmada, özellikle biyomühendislikte uygulama alanı bulan, içi sıkışmaz bir viskoz akışkan ile dolu ön gerilmeli elastik bir tüp içerisinde harmonik dalga yayılımı problemi incelenmiştir.

Birinci bölümde kısaca konunun tarihsel gelişiminden söz edilmiş, bu konuda yapılmış deneysel ve teorik çalışmalar anlatılmıştır. Damar malzemesinin sıkışmaz, elastik ve izotrop olduğu ve bir ön statik şekil değiştirmeye maruz kaldığı kabul edilmiş ve bununla ilgili temel denklemler Bölüm 2' de verilmiştir. Pulsatif kan akımı sırasında, bu statik ön şekil değiştirmeler üzerine küçük dinamik yer değiştirmelerin süperpoze edildiği hareket denklemleri Bölüm 3' de verilmiştir. Bu matematiksel türetimin uygulaması olarak Bölüm 4' de ön gerilmeye maruz ve içerisinde viskoz akışkan bulunan ince tüplerde pulsatif akım problemi incelenmiştir. Önce Bölüm 4.1' de sabit yarıçaplı silindirik bir tüp içerisinde harmonik dalga yayılımı problemine yer verilmiştir. Biyolojik uygulamalarda, damar yarıçapının dalga boyuna göre çok küçük olduğu gözönünde bulundurularak dispersiyon bağıntısı mümkün olan yerlerde analitik diğer hallerde de nümerik olarak incelenmiş ve sonuçlar bir kısım grafikler üzerinde gösterilmiştir. Daha sonra Bölüm 4.2' de eksen boyunca yarıçapı yavaş değişen tüplerde pulsatif akım problemi incelenmiş ve uzun dalga boyu için alan denklemlerine bir pertürbasyon serisi çözümü sunulmuştur.

Sayısal incelemeden sonra, sonuç ve öneriler kısmında, elde edilen sonuçlar maddeler halinde sıralanmış, bu konuda yapılan diğer çalışmalar ile karşılaştırılmıştır.

SUMMARY

AN INVESTIGATION OF PULSATILE FLOW IN A PRESTRESSED THIN ELASTIC TUBE

Propagation of harmonic waves in initially stressed (or unstressed) cylindrical elastic (or viscoelastic) tubes filled with a viscous (or inviscid) fluid is a problem of interest since the time of Thomas YOUNG [1] who first studied the pulse speed in human arteries. Treating the artery as an elastic thin tube and the blood as an incompressible inviscid fluid, Moens - Korteweg (1809) studied the wave propagation in such a medium and obtained the wave mode, known in the current literature as Moens-Korteweg wave speed. Witzig is the first one who took the viscosity into account but ignored the effects of Poisson's ratio and viscoelasticity. In 1954, Morgan and Kiely studied the same problem by assuming that the artery as a linear elastic tube and the blood as a Navier-Stokes fluid and obtained the dispersion relation. In 1966, Anliker and Maxwell studied the non-symmetrical wave motion by treating the artery as a thin walled elastic tube and the blood as a viscous fluid and obtained the cut-off frequency. In these works either the effects of initial stress are neglected or taken into account in ad-hoc manner.

Physiological studies indicate that for a healthy human being the systolic pressure is about 120 mm Hg and the diastolic pressure is around 80 mm Hg. Furthermore, the arteries are subjected to an axial stretch ratio, which is about 1.5. Thus, large blood vessels are subjected to a static mean pressure which is about 100mm Hg and the axial stretch ratio. In the course of blood flow a pressure increment ± 20 mm Hg is added by the left ventricle on this large initial static deformation. The initial stress of arterial wall material had been taken into account first by Atabek and Lew, in 1966. Since, in those years, nonlinear constitutive relations for arteries were not known in functional form, these initial stresses were not incorporated into the initial static and into the incremental dynamical deformations. As a result of this, they treated the coefficients of incremental stress-strain relations as some constants, although they depend on the initial deformations. The effect of initial deformation was properly taken into consideration by Rachev in 1980, but he treated the artery as a purely cylindrical thin membrane. In essence, the arterial geometry is not cylindrical, it is rather a conical shell.

Having observed some of the drawbacks of the previous works on this subject, in the present work, we have presented a theoretical analysis of wave propagation in a prestressed thin elastic conical tube filled with a viscous fluid and studied some special cases.

Basic Equations:

1. Equation of Membranes

Let us consider a thin conical tube subjected to axially symmetric external forces exerted by the flow of a viscous fluid inside of the tube. Denoting the membrane forces along the meridional curve by T_1 and the circumferential curve by T_2 (see Figures 1 and 2), the equation of motion of the tube in cylindrical polar coordinates may be given by

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{T_1 \left(r_0' + \frac{\partial u}{\partial z} \right) (r_0 + u)}{\Lambda} \right] - \Lambda T_2 + \Lambda (r_0 + u) P_r = \rho_0 h r_0 \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right) a_r \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{T_1 (r_0 + u)}{\Lambda} \right] + \Lambda (r_0 + u) P_z = \rho_0 h r_0 \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right) a_z \quad (2)$$

where ρ_0 is the mass density, h is the thickness of the tube after finite static deformation, r_0 is the radius of the tube after finite static deformation, u and w are the radial and axial displacements superimposed on initial static deformation, P_r and P_z are the external forces exerted by the fluid, a_r and a_z are the components of acceleration vector in the cylindrical polar coordinates, and they are given by

$$a_r = \frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} + a_z \frac{\partial u}{\partial z^*} + 2 v_z \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t^*} + v_z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$a_z = \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^{*2}} + 2 \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t^*} + \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^{*2}} \right] \quad (3)$$

Other quantities are defined by :

$$\Lambda = \left[1 + \left(r_0' + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$v_z = \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \frac{\partial w}{\partial t^*} \quad (4)$$

Here prime denotes the differentiation with respect to axial coordinate z . The external forces applied by the fluid are given by

$$\Delta P_r = \left[P - 2\mu_v \frac{\partial v_r}{\partial r} + \mu_v \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \left(r'_0 + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]_{r=r_0+u} + \Delta Y_r \quad (5)$$

$$\Delta P_z = \left[-P \left(r'_0 + \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \mu_v \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + 2\mu_v \frac{\partial v_z}{\partial z} \left(r'_0 + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]_{r=r_0+u} + \Delta Y_z$$

where P is the fluid pressure, μ_v is the viscosity, v_r and v_z are the velocity components of the fluid body.

The membrane forces T_1 and T_2 may be given, constitutionally as,

$$T_1 = \frac{H}{\lambda_2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1}, \quad T_2 = \frac{H}{\lambda_2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} \quad (6)$$

where Σ is the strain energy density function λ_1 and λ_2 are the stretch ratios along the meridional and the circumferential curves.

2. Equation of Fluids

Treating the blood as an incompressible Newtonian fluid, the governing equations in the cylindrical coordinates may be given as follows:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t^*} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu_v \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^{*2}} \right) \quad (7)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t^*} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu_v \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^{*2}} \right) \quad (8)$$

and the incompressibility condition

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

where ρ is the mass density and P is the pressure function of the fluid.

The boundary conditions to be satisfied by the field quantities are stated as

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t^*} + v_z \Big|_{r=r_0+u} \frac{\partial u}{\partial z} &= v_r \Big|_{r=r_0+u} \\ \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \frac{\partial w}{\partial t^*} &= v_z \Big|_{r=r_0+u} \end{aligned} \quad (10)$$

Equations of Incremental Motions

Assuming that the incremental deformation superimposed on the initial static deformation is small, from (1)- (10), the incremental equations and the associated boundary conditions are given as follows

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[\Sigma_1 R_0 \sin \phi_0 + T_1^0 R_0 \cos^3 \phi_0 \frac{\partial u}{\partial z} + T_1^0 \sin \phi_0 u - T_1^0 R_0 \sin \phi_0 \cos^2 \phi_0 \frac{\partial w}{\partial z} \right. \\ \left. + \left(\frac{R_0 P_r^0 - T_2^0}{\cos \phi_0} \right) w \right] + T_2^0 \sin \phi_0 \left(R_0' \frac{\partial w}{\partial z} + R_0'' w - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\cos \phi_0} \frac{dT_2^0}{dz} w \\ - \frac{\Sigma_2}{\cos \phi_0} + \bar{S}_r = \rho_0 h R_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[\Sigma_1 R_0 \cos \phi_0 + T_1^0 R_0 \sin^2 \phi_0 \cos^2 \phi_0 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{R_0 P_z^0}{\cos \phi_0} w \right. \\ \left. + T_1^0 R_0 \sin \phi_0 \cos^2 \phi_0 \frac{\partial u}{\partial z} + T_1^0 \cos \phi_0 u \right] + \bar{S}_z = \rho_0 h R_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^{*2}} \end{aligned} \quad (12)$$

where the quantities with zero subscripts denote the initial field Σ_1 and Σ_2 are the incremental membrane forces, $\bar{S}_r$ and $\bar{S}_z$ are the incremental forces applied by the fluid body; the expressions of them are given in the main text.

The incremental membrane forces may be given as

$$\Sigma_1 = \beta_{11}^* e_{11} + \beta_{12}^* e_{22}, \quad \Sigma_2 = \beta_{21}^* e_{11} + \beta_{22}^* e_{22} \quad (13)$$

with the definitions β_{ij}^* as

$$\begin{aligned} \beta_{11}^* &= H \frac{\lambda_1^0}{\lambda_2^0} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_1^0 \partial \lambda_1^0} & \beta_{12}^* &= H \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_1^0 \partial \lambda_2^0} - T_1^0 \\ \beta_{21}^* &= H \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_1^0 \partial \lambda_2^0} - T_2^0 & \beta_{22}^* &= H \frac{\lambda_2^0}{\lambda_1^0} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_2^0 \partial \lambda_2^0} \end{aligned} \quad (14)$$

If (13) is introduced into equations (11) and (12) one obtains the incremental equations in terms of the displacement components.

The incremental equations of fluid motion are given as follows

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t^*} + v_r^0 \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \bar{v}_r \frac{\partial v_r^0}{\partial r} + v_z^0 \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} + \bar{v}_z \frac{\partial v_r^0}{\partial z} \right) \\ = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} + \mu_v \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} - \frac{\bar{v}_r}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t^*} + v_r^0 \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \bar{v}_r \frac{\partial v_z^0}{\partial r} + v_z^0 \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + \bar{v}_z \frac{\partial v_z^0}{\partial z} \right) \\ = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \mu_v \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

and the boundary conditions

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t^*} &= \bar{v}_r \Big|_{r=R_0} + u \frac{\partial v_r^0}{\partial r} \Big|_{r=R_0} \\
\frac{\partial w}{\partial t^*} &= \bar{v}_z \Big|_{r=R_0} + u \frac{\partial v_z^0}{\partial r} \Big|_{r=R_0}
\end{aligned} \tag{18}$$

Propagation of harmonic waves

As one of the applications of the present theoretical analysis, in this part we shall study the propagation of harmonic waves in a prestressed fluid filled cylindrical tube filled with a viscous fluid. For this particular case, the tube will be assumed to be cylindrical. Seeking a harmonic wave type of solution to the field equations we obtain the following dispersion relation

$$(A_1 \xi^2 + A_2) \Omega^4 + (A_3 \xi^2 + A_4 \xi^4) \Omega^2 + (A_5 \xi^4 + A_6 \xi^6) = 0 \tag{19}$$

where Ω is the nondimensionalized angular frequency, ξ is the wave number and the coefficients, $A_1, \dots, A_6$ are functions of initial deformations, viscosity, frequency and the wave number, whose expressions are given in the main text.

In general it is very difficult to analyse the dispersion relation by analytical means; a numerical approach is rather to be used. Before we study the general case numerically, some special cases are examined analytically and results are compared with previous works on the same subject. Then the dispersion relation is studied by numerical means for various stretch ratios and the inner pressure and the results are depicted on some figures. The numerical results reveal that: (i) The speed of primary wave increases with Womersley parameter, inner pressure and the axial stretch ratio, (ii) the speed of the secondary wave increases with Womersley parameter and inner pressure but decreases with axial stretch ratio; (iii) the transmission coefficient of the secondary wave first decreases with Womersley parameter, then starts to increase with it. Moreover, this coefficient decreases with inner pressure but increases with axial stretch; (iv) the transmission coefficient of the secondary wave increases with Womersley parameter and inner pressure but decreases with stretch ratio. These results are consistent with the findings of the previous works on the same subject.

Pulsatile flow in a slowly tapered tube:

As a second application of the present analysis, in this part of the work we shall study pulsatile flow in a slowly tapered tube. Assuming that the tapering angle is

small we expended the field quantities into the power series of this small angle parameter. Substituting this expansion into the field equations and the boundary conditions and setting the coefficient of like powers of this parameter equal to zero we obtained a set of differential equations and boundary condititons governing the field variables. Then we sought a solution, which is harmonic in time, to the field equation and obtained the analytical result for the zeroth and the first order equations. The variation of the pressure with axial coordinate and wave number is also evaluated numerically and the results are depicted in some figures. The result found here is found to be consistent with previous results existing in the literature.



BÖLÜM 1

GİRİŞ VE KISA TARİHSEL GELİŞİM

İçinde viskoz veya viskoz olmayan akışkan bulunan öngerilmeli veya öngerilmesiz elastik veya viskoelastik tüp içerisindeki pülsatif akım problemi uygulama açısından büyük öneme sahiptir. Bu problemin biyomühendislik açısından önemi, damarlardaki kan akımının pülsatif bir akım olarak modellenenebilmesidir. Ayrıca böyle bir kompozit ortamda harmonik dalga yayılımı problemi incelendiğinde dalga hızının ve aktarma katsayısının çeşitli parametrelere göre değişimini, damar malzemesinin yapısında ne gibi değişimlerin olduğunu gözlemlemek mümkündür. Bu nedenle, kan ve damar ikilisi modellenirken, hem tüp malzemesinin hem de kanın mekanik özellikleri dikkate alınmalıdır.

İçerisinde viskoz veya viskoz olmayan akışkan bulunan öngerilmeli veya öngerilmesiz silindirik tüpler içerisinde harmonik dalga yayılımı problemi Thomas Young [1] zamanından beri üzerinde çalışılan ve güncelliğini koruyan bir konudur. Bilindiği kadarıyla Thomas Young , 1808'de insan atardamarlarında (arterilerde) pals dalgalarının hızını hesaplayan ilk bilim adamı olup bugün bu hız kendi adıyla anılan dalga modu olarak bilinir. Daha sonra Weber kardeşlerin bu konular üzerine çalıştığı görülüyor. Genç olan kardeş Wilhelm Eduard (1804-1896) fizikçi olup daha yaşlı ve anatomist olan Ernest Heinrick (1795-1878) ile birlikte çalışarak dalgaların arterilerdeki dallanma noktalarındaki yansıma ve dalganın aktarılması konuları üzerindeki bulguları ile biyofiziğin ilk uygulamalarını vermişlerdir. Weberler'in çalışmalarını Moens'in deneysel ve Korteweg'in teorik çalışmaları izlemiştir. Moens ve Korteweg, içi viskoz olmayan akışkan ile dolu ince elastik tüplerde dalga yayılımı problemini incelemişlerdir. Uzun dalga boyuna karşı gelen faz hızı günümüz literatüründe Moens-Korteweg hızı, ilgili dalga da Moens-Korteweg modu olarak anılır.

Bunun için, Korteweg basit bir modelden hareket etmiş ve tüp içerisindeki akışkana ait kütle korunumu ve eksenel yöndeki hareket denklemlerini aşağıdaki şekilde vermiştir

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (Aw) = 0 \quad (\text{Kütle korunumu}) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial z} + \rho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.2)$$

Burada A elastik tüpün dikkesit alanı, w akışkanın eksenel doğrultudaki hız bileşeni, ρ_0 kütle yoğunluğu ve $P_i(z, t)$ de akışkanın basınç fonksiyonudur.

Şekil değiştirebilen tüplerde iç basınç ile dikkesit alanı arasında $P_i = P_i(A)$ şeklinde fonksiyonel bir bağıntı mevcuttur. Denge konumundan itibaren oluşan dalgalanmaların küçük olduğu kabul edilirse (1.1) ve (1.2) denklemleri aşağıdaki şekli alırlar

$$c_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad c_0^2 = \frac{A_0}{\rho_0} \frac{dP_i}{dA_0} \quad (1.3)$$

Burada A_0 denge halindeki tüp dikkesit alanını göstermektedir. Bu denklem normalize edilmiş basit bir dalga denklemi olup yayılma hızı c_0 ile verilir.

Şekil değiştirmelerin küçük olması halinde P_i iç basıncına maruz tüpün a şekil değiştirmiş yarıçapı

$$a = a_0 + \frac{a_0^2 P_i}{E h} \quad (1.4)$$

ile verilebilir. Burada a_0 şekil değiştirmeden önceki tüp yarıçapı, h tüp kalınlığı ve E de tüpün elastisite modülüdür. $A = \pi a^2$ bağıntısı dikkate alınırsa

$$\frac{dP_i}{dA_0} = \frac{E h}{2 A_0 a_0} \quad (1.5)$$

elde edilir. Bu bağıntı dalga hızı ifadesinde yerine konacak olursa

$$c_0 = \sqrt{\frac{E h}{2 \rho_0 a_0}} \quad (1.6)$$

bulunur ve literatürde Moens-Korteweg dalga hızı olarak bilinir.

Viskozitenin dalga hızına olan etkisini inceleyen ilk bilim adamı Witzig [2] olup k dalga sayısı ile ω açısal frekansı arasında, uzun dalga boyu için, aşağıdaki bağıntıyı vermiştir

$$k^2 = \frac{\omega^2 (1 - \sigma^2)}{c_0^2 (1 - F_{10})} \quad (1.7)$$

Burada c_0 Moens-Korteweg hızını, σ Poisson oranını göstermekte olup F_{10} aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır

$$F_{10} = \frac{2 J_1(\xi)}{\xi J_0(\xi)} \quad ; \quad \xi = a i^{3/2} \left(\frac{\omega}{v} \right)^{1/2} \quad (1.8)$$

Burada $J(\xi)$ birinci tipten Bessel fonksiyonunu, a tüp iç yarıçapını ve v de kinematik viskoziteyi göstermektedir. Literatürde 1950 yılına kadar bu konuda yayınlanmış çalışmaların bir dökümünü Lambossy [3] de bulmak mümkündür.

1950'li yıllarda özellikle Amerika Birleşik Devletlerinde uzay programlarına ağırlık verilmesiyle biyomühendislik konusundaki çalışmalar hız kazanmıştır.

Ibrall[4] elastik tüplerde dalga yayılımı problemi üzerinde etraflı bir çalışma yapmış ve sonucu

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2 (1 - F_{10})} \quad (1.9)$$

şeklinde ifade etmiştir. Witzig'in formülünde $\sigma=0$ yazılırsa bu sonuç ile tamamen uyumaktadır. Iberall bu sonuca ulaşırken sadece radyal doğrultudaki hareketi dikkate almış, eksenel doğrultudaki hareketi ihmal etmiştir. Elastik tüplerde dalga yayılımı ile ilgili önemli diğer iki inceleme de , eş zamanlı olarak ele alınan Morgan ve Kiely [5] ve Womersley [6,7]'in çalışmalarıdır. Morgan ve Kiely[5] , lineerleştirilmiş tüp denklemlerini ve akışkan için de Navier-Stokes denklemlerini kullanarak aşağıdaki kuvadratik ifadeyi elde etmişlerdir:

$$4(1 - F_{10}) \left(\frac{k c_0}{\omega} \right)^4 + [F_{10} (4\sigma - 1) - 4] \left(\frac{k c_0}{\omega} \right)^2 + F_{10} (1 - \sigma^2) = 0 \quad (1.10)$$

Bu denklemin iki kökü olup daha küçük olanı akışkan içerisindeki basınç dalgasını karakterize eder ve Young modu olarak bilinir. Daha yüksek olanı ise Lamb modu olarak bilinir ve tüp içerisindeki dalgayı karakterize eder.

Womersley [6], hemen hemen aynı tip modelden hareketle aşağıdaki dispersiyon bağıntısını elde etmiştir:

$$4(1 - F_{10}) \left(\frac{k c_0}{\omega} \right)^4 + [-2m(1 - F_{10}) + F_{10} (4\sigma - 1) - 4] \left(\frac{k c_0}{\omega} \right)^2 + (2m + F_{10}) (1 - \sigma^2) = 0 \quad (1.11)$$

Burada $m = \frac{\rho h}{\rho_0 a}$ olup, (ρ :tüpün kütle yoğunluğu) tüpün atalet etkisini göstermektedir.

(1.11) denkleminde $m=0$ yazılacak olursa (1.10) denklemini elde edilir.

Daha sonra Womersley [7], damarın içerisinde bulunduğu ortamın yataklama etkisini de hesaba katarak (1.11) deki sonucu formel olarak elde etmiştir. Tek fark, tüpün ataletini karakterize eden $\bar{m}$ parametresidir

$$\bar{m} = m \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \quad (1.12)$$

Burada ω_0 dış ortamın frekansı olup $\omega_0 \rightarrow 0$ olurken sonuç bir öncekinin aynı olmaktadır. $\omega_0 \gg \omega$ halinde, yani dış ortamın çok rijit olması halinde $\bar{m} \rightarrow -\infty$ olacağından (1.11) ifadesi Witzig'in sonucuna dönüşecektir.

Bu ana kadar yapılan çalışmalarda atardamarların maruz kaldığı ön gerilme pek dikkate alınmamıştır. 1966 yılında Atabek ve Lew [8] aksenal ve radyal doğrultuda bir öngermeye maruz ince elastik tüp halinde, statik ön gerilme üzerine küçük dinamik yerdeğiştirmeler süperpoze ederek tüpün ve viskoz akışkanın hareket denklemlerini elde etmişler ve bu denklemlere harmonik dalga tipi çözümler arayarak dispersiyon bağıntısını elde etmişlerdir. Öngerilme dışında bu model Womersley modelinden başka birşey değildir. Daha sonra Atabek [9] , aynı yaklaşımı kullanarak ortotropik ve viskoelastik bir tüp içerisinde hareket eden viskoz akışkanın içindeki harmonik dalga hareketini ve öngerilmenin dalga karakteristiklerine olan etkilerini incelemiştir. Çalışmada söz ettikleri malzemenin genel bünye bağıntısı bilinmediğinden Atabek ve Lew [8] ve Atabek [9]'in çalışmalarında artımsal gerilmede elastik katsayılar sabit olarak alınmıştır. Aslında bu katsayılar teğetsel malzeme sabitlerine karşı geldiğinden bunlar birer sabit olmayıp önşekildeğiştirmeye bağlı birtakım katsayılardır, dolayısıyla şekil değiştirme ile birlikte değişirler. Mirsky [10] , benzer bir çalışmada, büyük ön şekil değiştirmenin dalga hızına olan etkisini sayısal olarak incelemiştir. Bütün bu çalışmalarda tüpün ince olduğu kabul edilmiş ve ilgili membran denklemleri kullanılmıştır.

Cox [11,12] , tüp malzemesi için sıkışmaz viskoelastik katı, akışkan için de lineerleştirilmiş Navier-Stokes denklemlerini kullanıp kalın tüp halinde harmonik dalga yayılma problemini incelemiş ve dispersiyon bağıntısını elde etmiştir. Daha

sonra Klip, Von Loon ve Klip [13] viskoelastik kalın bir tüp içerisindeki boyuna dalgaları incelemişler ve dispersiyon bağıntısı için aşağıdaki yaklaşık ifadeleri elde etmişlerdir:

$$(1 - F_{10}) k^4 - \left(\frac{\bar{\rho} \omega^2}{E} p \right) k^2 + \left(\frac{\bar{\rho} \omega^2}{E} \right)^2 q = 0 \quad (1.13)$$

Burada

$$p = (1 - F_{10}) \frac{\rho}{\bar{\rho}} + 2(1 + \sigma + 2\tau) + F_{10}(1 - 4\sigma) \frac{\tau}{2} \quad (1.14)$$

$$q = (1 + \sigma) \left[1 + \tau (1 - \sigma) \right] \left[\tau F_{10} + 2 \frac{\rho}{\bar{\rho}} \right]$$

ve $\tau = 2a^2 / (b^2 - a^2)$ şeklinde tanımlanmıştır. Bu denklemin çözümünden hemen Lamb ve Young modlarını elde etmek mümkündür.

Rubinov ve Keller [14], içerisinde sıkışabilen Newton akışkanı bulunan ve dış yüzeyinden aksel doğrultuda harekete engel olunmuş bir viskoelastik kalın tüp içerisindeki aksel simetrik dalga hareketini incelemişler ve dispersiyon bağıntısını elde etmişlerdir. Bu durumda, genellikle dispersiyon bağıntısının incelenmesi oldukça karmaşık olduğundan viskoz etkilerin ihmal edildiği durum incelenmiş ve sonsuz sayıda dalga modu elde etmişlerdir. Aynı bilim adamları daha sonraki bir çalışmalarında [15] viskozitenin etkisini de dikkate almışlar, dalga sayısının frekans cinsinden asimptotik değerlerini elde etmişlerdir.

Atabek ve Lew [8]'nin çalışması dışında atardamarlardaki ön gerilmeyi dikkate alan pek olmamıştır. Rachev [16] içinde sıkışmaz ve viskoz akışkan bulunan ön gerilmeli ince tüp içerisinde aksel simetrik dalga yayılması problemini incelemiş ve dispersiyon bağıntısını elde etmiştir. Damarı saran kas aktivitesinin dalga hareketine olan etkisini uygun bir şekilde hesaba katmış ve dalga faz hızının ve aktarma katsayısının iç basınç, aksel germe ve yaşlılık ile değişimi verilmiştir.

Moodie ve çalışma arkadaşları [17], içerisinde viskoz olmayan bir akışkan bulunan yarı sonsuz viskoelastik bir tüp için sınır değer problemini incelemiş ve basınç dalgalarının nasıl oluştuğu ve yayıldığı tartışılmış ve elastik analiz ile karşılaştırılması yapılmıştır. Sawatzky ve Moodie [18] aynı problemi viskoz akışkan hali için ele almışlar, dispersiyon bağıntısını uzun dalga boyu ve yüksek frekans halleri için elde edip viskoz olmayan hal ile karşılaştırmışlardır. Bu konuda daha fazla bilgi Rudinger [19], Skalak [20], Attinger [21] tarafından yapılmış derleme makalelerde ve McDonald [22] ve Fung [23] tarafından hazırlanmış kaynak kitaplardan temin edilebilir.

Yukarıda sözü edilen çalışmaların büyük bir bölümünde atardamarların ön şekil değiştirmesi pek dikkate alınmamış, ön gerilmeyi dikkate alan birkaç çalışmada da malzemenin nonlineer bünye denklemi bilinmediğinden artımsal elastik katsayıların ön şekil değiştirmeye olan ilişkisi sağlıklı bir şekilde incelenememiştir. Örneğin, ön şekil değiştirmenin özelliğine bakmaksızın artımsal gerilmeler için klasik Hooke yasası kabul edilmiş ve elastik katsayıların sabit olduğu düşünülmüştür. Gerçekte bu katsayılar sabit olmayıp ön şekil değiştirmeye bağlıdır. Bu konu ilk defa etraflı bir şekilde Demiray ve çalışma arkadaşları[24] tarafından, "büyük statik ön deformasyon üzerine küçük yer değiştirmelerin süperpozisyonu teorisi" kullanılarak incelenmiş ve literatürdeki mevcut çalışmalar ile karşılaştırılması yapılmıştır.

Sağlıklı bir insanda minimal basınç 80 mm Hg ve maksimal basınç ise 120mm Hg civarında olup atardamarlar ortalama 100 mmHg basıncına maruzdur. Yapılan deneysel çalışmalar, büyük damarların ayrıca eksenel yönde 1.5-1.7 mertebesinde bir eksenel germeye maruz kaldığını göstermektedir. Kalbin periyodik olarak uyguladığı basınç sonucu oluşan kan akımı sırasında bu ön gerilme üzerine ± 20 mm Hg civarında bir basınç eklenmektedir. Bu olgu bize, damarlarda kan akımı probleminin incelenmesi sırasında "büyük ön şekil değiştirmeler üzerine küçük yer değiştirmelerin süperpozisyonu teorisi" ni kullanmayı mümkün kılar.

İşte bu çalışmada, yukarıda özet olarak sunulan fizyolojik koşullar dikkate alınarak, içerisinde viskoz akışkan bulunan ince elastik tüplerde pulsatif akım problemi incelenmiştir. Bunun için, büyük şekil değiştirmeye maruz ince elastik tüp denklemleri ve viskoz akışkana ait temel denklemler Bölüm 2 de verilmiştir.

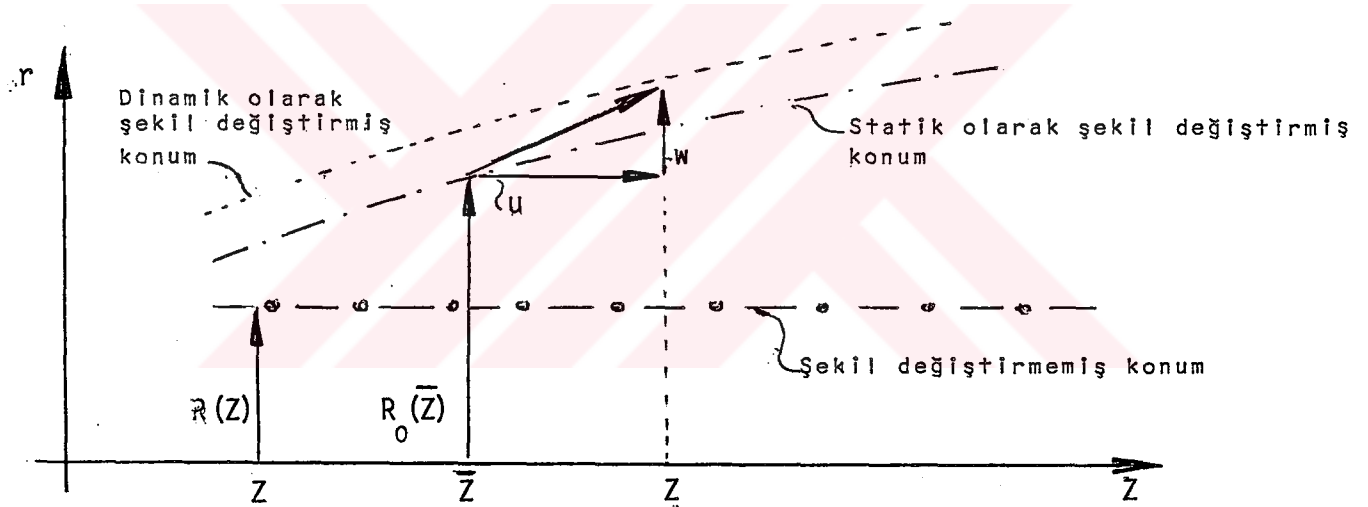
Atardamarın maruz kaldığı fizyolojik koşullar dikkate alınarak büyük ön şekil değiştirmeler üzerine küçük dinamik yer değiştirmelerin süperpozisyonundan elde edilen alan denklemleri, Bölüm 3 de verilmiştir. Bu türetimlerin bir uygulaması olarak, sabit yarıçaplı veya yarıçapı eksen boyunca yavaş değişen ve içerisinde viskoz akışkan bulunan tüplerde harmonik dalga yayılımı problemi Bölüm 4 de incelenmiş ve çeşitli özel durumlar incelenerek sonuçlar bir kısım grafikler üzerinde gösterilmiştir.



BÖLÜM 2

TEMEL DENKLEMLER

Bu bölümde, ön gerilmeye maruz, içerisinde viskoz akışkan bulunan ince bir tüp üzerine dinamik yer değiştirmelerin süperpoze edilmesi halinde tüpün hareketini yöneten diferansiyel denklemler elde edilecektir. Bunun için , Şekil 2.1 de gösterildiği gibi, doğal konumunda dairesel silindirik bir mambran gözönüne alalım. Şekil değiştirmeden önce mambranın orta yüzeyindeki tipik bir noktanın silindirik koordinatlarını (R, θ, Z) ile gösterelim. Mambrana uygulanacak eksenel simetrik



Şekil 2.1 Tüp elemanının çeşitli kademelerdeki şekil değiştirmiş durumu

statik yükler altında şekil değiştirmiş konumunda aynı noktanın koordinatları $(R_0(\bar{z}), \bar{z}, \theta)$ ile gösterilsin; burada $\bar{z} = \bar{z}(Z)$ şeklindedir. Nihayet, bu statik yer değiştirme üzerine eksenel simetrik hareketi temsilen radyal doğrultuda $u(\bar{z}, t^*)$ ve eksenel doğrultuda da $w(\bar{z}, t^*)$ sonlu ve zamana bağlı yer değiştirmelerinin süperpoze edildiğini varsayalım. Bu durumda, incelenmekte olan noktanın konum vektörü

$$\mathbf{r}(\bar{z}, t^*) = \left[R_0(\bar{z}) + u(\bar{z}, t^*) \right] \mathbf{e}_r + \left[\bar{z} + w(\bar{z}, t^*) \right] \mathbf{e}_z \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ silindirik koordinatlardaki birim baz vektörlerini göstermektedir. Şekil değiştirmiş mambrana meridiyen boyunca teğet vektörü aşağıdaki biçimde tanımlamak mümkündür:

$$\mathbf{T}_z = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{z}} = \left(R'_0 + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) \mathbf{e}_r + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) \mathbf{e}_z, \quad (2.2)$$

Burada $R'_0(\bar{z}) = \frac{dR_0(\bar{z})}{d\bar{z}}$ şeklinde tanımlanmıştır. (2.2) ifadesi kullanılarak bu vektörün uzunluğu

$$\bar{\Lambda}^2 = \mathbf{T}_z \cdot \mathbf{T}_z = \left(R'_0 + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right)^2, \quad (2.3)$$

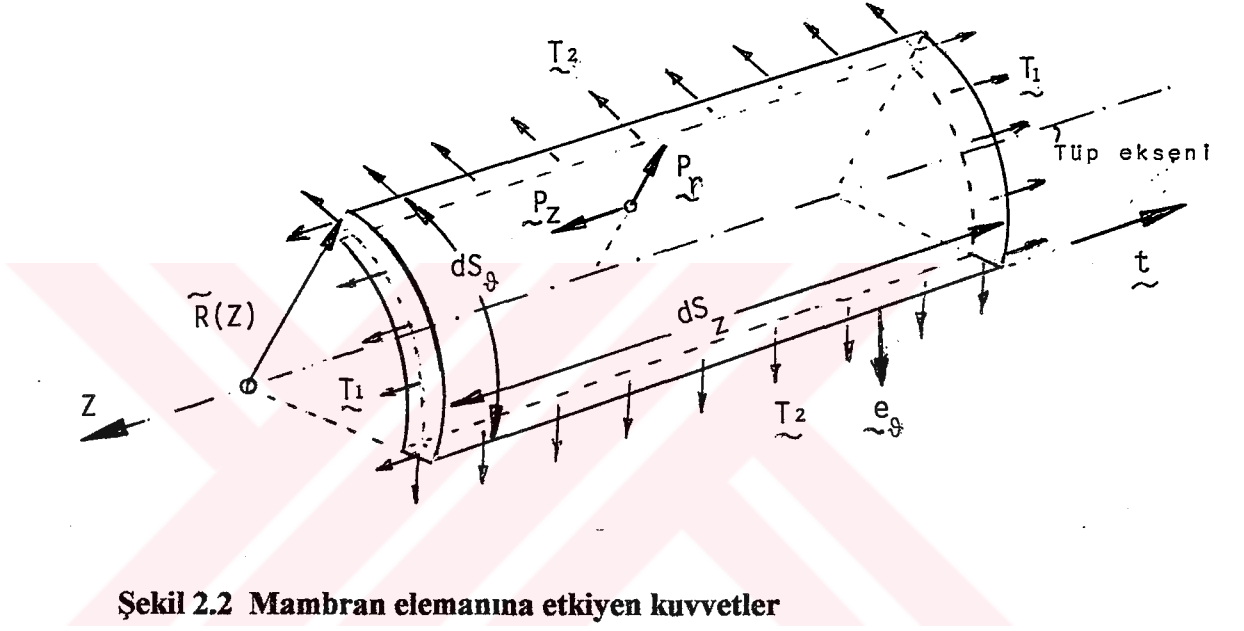
olarak tanımlanabilir. O halde şekil değiştirmiş meridiyene teğet birim $\mathbf{t}$ vektörü aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{T}_z}{\bar{\Lambda}} = \left(\frac{R'_0 + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}}{\bar{\Lambda}} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{1 + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}}{\bar{\Lambda}} \right) \mathbf{e}_z. \quad (2.4)$$

Buna göre şekil değiştirmiş mambranın birim dış normali aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{t} = \left(\frac{1 + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}}{\bar{\Lambda}} \right) \mathbf{e}_r - \left(\frac{R'_0 + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}}{\bar{\Lambda}} \right) \mathbf{e}_z \quad (2.5)$$

Şimdi de membran elemanını yöneten diferansiyel denklemleri elde etmeye çalışalım. Bunun için, sonlu statik şekil değiştirmeden sonra $\bar{z} = s_{\bar{t}}$, $\bar{z} + d\bar{z} = s_{\bar{t} + d\bar{t}}$ ve θ ve $\theta + d\theta = s_{\bar{t}}$ düzlemleri arasında kalan membran elemanının hareket denklemlerini yazmak gerekecektir. Bilindiği gibi membranlarda eğilme rijitlikleri ihmal edildiğinden membran kuvvetleri membran yüzeyine teğet olarak alınabilir. Buna göre, şekil değiştirmiş membran elemanına etkiyen iç ve dış kuvvetler Şekil 2.2 de gösterilmiştir:



Şekil 2.2 Mambran elemanına etkiyen kuvvetler

O halde membran elemanına etkiyen toplam kuvvet

$$\mathbf{F} = -\left(\mathbf{t} T_1 d s_\theta\right)\Big|_{\bar{z}} + \left(\mathbf{t} T_1 d s_\theta\right)\Big|_{\bar{z}+d\bar{z}} - \left(T_2 \mathbf{e}_\theta d s_z\right)\Big|_\theta + \left(T_2 \mathbf{e}_\theta d s_z\right)\Big|_{\theta+d\theta} + \left(P_r \mathbf{e}_r + P_z \mathbf{e}_z\right) d s_\theta d s_z \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada P_r ve P_z şekil değiştirmiş membranın birim alanına etkiyen dış kuvvetleri, ds_θ ve ds_z ise şekil değiştirmiş elemanın kenar uzunlukları olup aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

$$ds_\theta = (R_0 + u)d\theta \quad , \quad ds_z = \bar{\Lambda}d\bar{z} \quad (2.7)$$

T_1 ve T_2 membran kuvvetleri sadece zamana ve $\bar{z}$ eksenel koordinatına bağlıdır. Buna göre , (2.6) da görülen diferansiyel ifadeler $d\bar{z}$ ve $d\theta$ büyüklüklerinin serisine açılır ve yalnız birinci mertebe terimler tutulacak olursa F kuvveti aşağıdaki şekli alır:

$$F = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[T_1 t (R_0 + u) \right] d\theta d\bar{z} - T_2 \mathbf{e}_r \bar{\Lambda} d\theta d\bar{z} + (P_r \mathbf{e}_r + P_z \mathbf{e}_z) \bar{\Lambda} (R_0 + u) d\theta d\bar{z} \quad (2.8)$$

Burada $\mathbf{e}_\theta \Big|_{\theta+d\theta} = \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_r d\theta$ ilişkisi kullanılmıştır.

Newton hareket yasasına göre (2.8) ile verilen kuvvet ifadesi, elemanın kütlesi ile ivme vektörünün çarpımına eşit olmalıdır. Yer değiştirme bileşenleri sonlu statik şekil değiştirmeden sonraki uzaysal koordinatlar cinsinden ifade edildiğinden ivme vektörü $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} \mathbf{e}_r + \frac{\partial^2 w}{\partial t^{*2}} \mathbf{e}_z \quad (2.9)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca gözönüne alınacak tüp malzemesi sıkışmaz kabul edileceğinden membran elemanının kütlesi

$$\rho_0 h' \bar{\Lambda} (R_0 + u) d\bar{z} d\theta \quad (2.10)$$

şeklinde olup hareket denklemi vektörel formda aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[T_1 t (R_0 + u) \right] - T_2 \bar{\Lambda} \mathbf{e}_r + \bar{\Lambda} (R_0 + u) (P_r \mathbf{e}_r + P_z \mathbf{e}_z) = \rho_0 h' \bar{\Lambda} (R_0 + u) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} \mathbf{e}_r + \frac{\partial^2 w}{\partial t^{*2}} \mathbf{e}_z \right) \quad (2.11)$$

Burada ρ_0 membranin kütle yoğunluğunu, h' ise şekil değiştirmiş membranin nihai kalınlığını göstermektedir. Malzemenin sıkışmaz olduğu hatırlanırsa sıkışmazlık koşulu

$$h' \bar{\Lambda}(R_0 + u) = h R_0 \quad (2.12)$$

olarak ifade edilebilir. Burada h , sonlu statik şekil değiştirmeden sonraki membran kalınlığıdır. (2.4) denklemindeki t ifadesi ve (2.12) sıkışmazlık koşulu (2.11) de yerine konur ise bileşenler cinsinden hareket denklemleri

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{T_1 \left(R_0' + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) (R_0 + u)}{\bar{\Lambda}} \right] - \bar{\Lambda} T_2 + \bar{\Lambda} (R_0 + u) P_r = \rho_0 R_0 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{T_1 \left(1 + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) (R_0 + u)}{\bar{\Lambda}} \right] + \bar{\Lambda} (R_0 + u) P_z = \rho_0 R_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^{*2}} \quad (2.14)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu çalışmada incelenecek problemlerde katı malzeme ile akışkanın etkileşimi sözkonusu olacağından sınır koşullarının uygun bir şekilde ifade edilebilmesi amacıyla her iki ortam için seçilen koordinatın aynı olması gerekir. Bilindiği gibi katı cisimler için belirli bir maddesel konum tanımlanabildiği halde, akışkanlar için aynı şey söylenemez; bu nedenle akışkan denklemleri Eulerian formda ifade edilir. O halde katı ve akışkanın ortak sınır koşullarının ifade edilebilmesi için membran denklemlerinin de uzaysal formda yazılması uygun olacaktır. Maddesel parçacığın şekil değiştirmeden sonraki nihai eksenel koordinatı z ile gösterilecek olursa, aşağıdaki bağıntılar geçerlidir

$$\bar{z} = z - w(\bar{z}, t^*) \quad , \quad R_0(\bar{z}) = R_0[z - w(\bar{z}, t^*)] = r_0(z) \quad (2.15)$$

$u = u(z, t^*)$ ve $w = w(z, t^*)$ olarak alınabileceği gözönünde bulundurulursa

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.16)$$

$$\bar{\Lambda} = \Lambda \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \quad , \quad \Lambda = \left[1 + \left(r_0' + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}$$

ilişkileri yazılabilir. Burada $r_0'(z), r_0(z)$ nin argümanına göre türevini göstermektedir. Buna göre (2.13) ve (2.14) hareket denklemleri aşağıdaki şekli alırlar:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{T_1 \left(r_0' + \frac{\partial u}{\partial z} \right) (r_0 + u)}{\Lambda} \right] - \Lambda T_2 + \Lambda (r_0 + u) P_r = \rho_0 h r_0 \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right) a_r \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{T_1 (r_0 + u)}{\Lambda} \right] + \Lambda (r_0 + u) P_z = \rho_0 h r_0 \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right) a_z \quad (2.18)$$

Burada uzaysal koordinatlar cinsinden ifade edilmiş a_r ve a_z ivme bileşenleri aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır:

$$a_r = \frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} + a_z \frac{\partial u}{\partial z} + 2 v_z \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t^*} + v_z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$a_z = \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^{*2}} + 2 \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t^*} \frac{\partial w}{\partial t^*} + \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^{*2}} \right] \quad (2.19)$$

Yukarıdaki ifadede geçen v_z hız bileşeni

$$v_z = \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \frac{\partial w}{\partial t^*} \quad (2.20)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Bu çalışmada elastik tüp içerisindeki viskoz akışkan problemi inceleneceğinden mambrana gelen dış kuvvet, akışkan tarafından uygulanan reaksiyon kuvveti ve damarlardaki aktif kasların kasılması sonucu uyguladığı kas kuvveti ve yataklama kuvvetlerinden teşekkül eder. Akışkana ait toplam gerilme tansörü σ_{kl} ile gösterilecek olursa damardaki aktif kasların kasılma sonucu uyguladığı kuvvet ve yataklama kuvvetlerinden oluşan toplam reaksiyon kuvveti bileşenleri

$$P_r = - \left[\sigma_{kr} n_k \right]_{r=r_0+u} + Y_r, \quad P_z = - \left[\sigma_{kz} n_k \right]_{r=r_0+u} + Y_z \quad (2.21)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada Y_r ve Y_z yataklama ve kas kuvvetlerini temsil etmektedir.

Akışkanın Newtonien ve sıkışmaz olduğu kabul edilirse gerilme tansörü

$$\sigma_{kl} = -P\delta_{kl} + 2\mu_v d_{kl} \quad (2.22)$$

şeklinde verilebilir. Burada P toplam akışkan basıncını, δ_{kl} Kronecker deltasını, μ_v viskoziteyi ve d_{kl} de şekil değiştirme hızı tansörünü temsil etmekte olup

$$d_{kl} \equiv \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}) \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada v_k akışkanın hız vektörü bileşenini, virgülden sonraki indis ise ilgili büyüklüğün x_l 'ye göre kısmi türevini göstermektedir.

Eksenel simetrik bir akım durumunda gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P + 2\mu_v \frac{\partial v_r}{\partial r} & , & \quad \sigma_{\theta\theta} = -P + 2\mu_v \frac{v_r}{r} \\ \sigma_{zz} &= -P + 2\mu_v \frac{\partial v_z}{\partial z} & , & \quad \sigma_{rz} = \mu_v \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Buna göre P_r , P_z dış kuvvet bileşenleri

$$\begin{aligned} P_r &= \left[P n_r - 2\mu_v \frac{\partial v_r}{\partial r} n_r - \mu_v \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) n_z \right]_{r=r_0+u} + Y_r \\ P_z &= \left[P n_z - \mu_v \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) n_r - 2\mu_v \frac{\partial v_z}{\partial z} n_z \right]_{r=r_0+u} + Y_z \end{aligned} \quad (2.25)$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.5) denkleminde normalin bileşenleri yukarıda yerine konursa

$$\begin{aligned} \Lambda P_r &= \left[P - 2\mu_v \frac{\partial v_r}{\partial r} + \mu_v \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \left(r'_0 + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]_{r=r_0+u} + \Lambda Y_r \\ \Lambda P_z &= \left[-P \left(r'_0 + \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \mu_v \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + 2\mu_v \frac{\partial v_z}{\partial z} \left(r'_0 + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]_{r=r_0+u} + \Lambda Y_z \end{aligned} \quad (2.26)$$

elde edilir. Eğer akışkana ait büyüklükler bir şekilde tayin edilmiş ise (2.26) ifadeleri yardımıyla tüpe gelecek akışkan reaksiyon kuvvetleri hesaplanabilir.

2.1. Bünye Denklemleri

Daha önce (2.17) ve (2.18) ile ifade edilen tüp hareket denklemlerinin tamamlanabilmesi için T_1 , T_2 membran kuvvetlerinin yer değiştirmelere olan fonksiyonel bağıntısının, yani bünye denklemlerinin bilinmesi gerekir. Biz bu çalışmada membran malzemesinin sıkışmaz ve ideal elastik olduğunu kabul edeceğiz. Böyle bir malzemeye ait bünye bağıntısı

$$t_{kl} = \bar{P} \delta_{kl} + \Phi c_{kl}^{-1} + \Psi B_{kl} \quad (2.27)$$

şeklinde verilebilir (Eringen [25]). Burada $\bar{P}$ hidrostatik basıncı, c_{kl}^{-1} Finger deformasyon tansörünü göstermekte olup

$$c_{kl}^{-1} = F_{kK} F_{lK} \quad ; \quad F_{kK} \equiv \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \quad (2.28)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (2.27) ifadesinde yer alan diğer büyüklükler

$$B_{kl} = I_1 c_{kl}^{-1} - c_{km}^{-1} c_{ml}^{-1} \quad ; \quad \Phi = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \quad ; \quad \Psi = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} \quad (2.29)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada I_1, I_2 ve $I_3 = 1$, c_{kl}^{-1} 'nin temel invariantlarını

$\Sigma = \Sigma(I_1, I_2)$ ise incelenen elastik cisme ait şekil değiştirme enerjisi yoğunluğunu göstermektedir.

λ_1, λ_2 membran teğet düzlemi içerisindeki asal germeleri λ_3 de membran teğet düzlemine dik doğrultudaki germeyi gösterebilir. Buna göre asal eksenlere göre ifade edilmiş c_{k1}^{-1} ve B_{k1} bileşenleri aşağıdaki biçimde verilebilir:

$$c_{11}^{-1} = \lambda_1^2, \quad c_{22}^{-1} = \lambda_2^2, \quad c_{33}^{-1} = \lambda_3^2 = 1 / \lambda_1^2 \lambda_2^2$$

$$B_{11} = \frac{1}{\lambda_2^2} + \lambda_1^2 \lambda_2^2, \quad B_{22} = \frac{1}{\lambda_1^2} + \lambda_1^2 \lambda_2^2, \quad B_{33} = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \quad (2.30)$$

Burada $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ sıkışmazlık koşulu kullanılmıştır. O halde (2.27) denklemin-den asal gerilme bileşenleri

$$t_{11} = \bar{P} + \Phi \lambda_1^2 + \Psi (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + 1 / \lambda_2^2)$$

$$t_{22} = \bar{P} + \Phi \lambda_2^2 + \Psi (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + 1 / \lambda_1^2) \quad (2.31)$$

$$t_{33} = \bar{P} + \Phi / (\lambda_1^2 \lambda_2^2) + \Psi (1 / \lambda_1^2 + 1 / \lambda_2^2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Membranın çok ince kabul edilmesi nedeniyle kalınlığı doğrultusundaki gerilme bileşeni, yaklaşık sıfır kabul edilebilir. Buna göre

$$t_{33} = \bar{P} + \Phi / (\lambda_1^2 \lambda_2^2) + \Psi (1 / \lambda_1^2 + 1 / \lambda_2^2) \cong 0$$

veya $\bar{P}$ hidrostatik basıncı

$$\bar{P} = -\Phi / (\lambda_1^2 \lambda_2^2) - \Psi (1 / \lambda_1^2 + 1 / \lambda_2^2) \quad (2.32)$$

bulunur. O halde (2.32) ifadesi (2.31) de yerine konursa t_{11}, t_{22} asal gerilme ifadeleri

$$\begin{aligned}
t_{11} &= \Phi(\lambda_1^2 - 1/\lambda_1^2 \lambda_2^2) + \Psi(\lambda_1^2 \lambda_2^2 - 1/\lambda_1^2) \\
t_{22} &= \Phi(\lambda_2^2 - 1/\lambda_1^2 \lambda_2^2) + \Psi(\lambda_1^2 \lambda_2^2 + 1/\lambda_2^2)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

olarak verilir.

I_1, I_2 temel invaryantların asal germeler cinsinden ifadelerinin

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1/\lambda_1^2 \lambda_2^2, I_2 = 1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \tag{2.34}$$

şeklinde oldukları hatırlanacak olursa aşağıdaki ilişkiler yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} &= \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_1} \\
\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} &= \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_2}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Φ ve Ψ nin tanımları dikkate alınır ve gerekli türetmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} &= \Phi\left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^2}\right) + \Psi\left(\lambda_1 \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^3}\right) \\
\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} &= \Phi\left(\lambda_2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^3}\right) + \Psi\left(\lambda_1^2 \lambda_2 - \frac{1}{\lambda_2^3}\right)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

ilişkileri elde edilir. (2.33) ve (2.36) denklemlerinin karşılaştırılmasından

$$t_{11} = \lambda_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1}, \quad t_{22} = \lambda_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} \tag{2.37}$$

bünye bağıntıları elde edilir.

Bilindiği gibi meridiyen ve çevresel eğri boyunca birim uzunluğa etkiyen membran kuvvetleri

$$T_1 = h' t_{11} \quad , \quad T_2 = h' t_{22} \quad (2.38)$$

şeklinde tanımlanmışlardır. Burada h' şekil değiştirmiş kalınlık olup sıkışmazlık koşulu nedeniyle, şekil değiştirmeden önceki H membran kalınlığına

$$h' \lambda_1 \lambda_2 = H \quad \text{veya} \quad h' = \frac{H}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (2.39)$$

şeklinde bağlanmıştır. Buna göre T_1, T_2 membran kuvvetleri Σ şekil değiştirme enerjisi cinsinden

$$T_1 = \frac{H}{\lambda_2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} \quad , \quad T_2 = \frac{H}{\lambda_1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} \quad (2.40)$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.40) ifadesi (2.17) , (2.18) denklemlerinde yerine konursa yerdeğiştirmeler cinsinden yönetici diferansiyel denklemler elde edilebilir.

2.2. Akışkan Denklemleri

Bu çalışmada, kanın mekanik davranışı için bir model olarak kullanılacak akışkanın Newtonien tipte, sıkıştırılamaz bir akışkan olduğu kabul edilecektir. Daha önce de ifade edildiği gibi böyle bir akışkana ait bünye denklemleri

$$\sigma_{kl} = -P \delta_{kl} + 2 \mu_v d_{kl} \quad (2.41)$$

biçiminde verilebilir. Akımın aksenal simetrik olması halinde hareketi yöneten diferansiyel denklemler, silindirik koordinatlarda, aşağıdaki biçimde verilebilir:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t^*} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu_v \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^{*2}} \right) \quad (2.42)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t^*} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu_v \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^{*2}} \right) \quad (2.43)$$

Sıkışmazlık koşulu ise

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (2.44)$$

şeklinde verilebilir. Burada ρ akışkanın yoğunluğunu, v_r radyal doğrultudaki, v_z de aksenal doğrultudaki akışkan hız bileşenlerini göstermektedir. Mambran yüzeyinde tüp ve akışkan hızları aynı olacağından

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t^*} + v_z \Big|_{r=r_0+u} \frac{\partial u}{\partial z} &= v_r \Big|_{r=r_0+u} \\ \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \frac{\partial w}{\partial t^*} &= v_z \Big|_{r=r_0+u} \end{aligned} \quad (2.45)$$

sınır koşullarının sağlanması gerekir.

Bu şekilde elde edilen (2.17), (2.18), (2.26), (2.40), (2.42)-(2.44) denklemleriyle (2.45) sınır koşulu u , w , v_r , v_z , P alan büyüklüklerini tayin etmek için

yeterli sayıda denklem ve sınır koşulu vermektedir . Ancak denklemlerin yüksek mertebeden nonlinear olmaları nedeniyle bu denklemleri analitik olarak çözmek oldukça güçtür. Bu nedenle, incelenecek problemin fizik özelliği de dikkate alınarak bundan sonraki bölümde artımsal hareket denklemleri elde edilecektir.



BÖLÜM 3

ARTIMSAL HAREKET DENKLEMLERİ

Sağlıklı bir insanda minimal kan basıncı 80 mm Hg, maksimal kan basıncı 120 mm Hg ve ortalama basınç ise 100 mm Hg civarındadır. Ayrıca büyük damarlar (arterler) fizyolojik koşullarda eksenel yönde $\lambda_z = 1.6$ mertebesinde bir eksenel germeye maruzdur. Kalbin pompalama hareketi sırasında bu ortalama statik basınç üzerine ± 20 mm Hg lik bir basınç değişimi uygulanır. Normal koşullarda bu basınç değişimi ortalama basınca göre pek küçük olmamakla birlikte, biyolojik dokuların yüksek gerilme düzeyinde oldukça rijit bir hal almaları nedeniyle bu basınç değişiminin neden olduğu yerdeğiştirmeler küçük olabilir. Bunun bir sonucu olarak da nonlinear hareket denklemlerini lineerize etmek mümkün olabilmektedir. Bunun için elastik tüpün ön statik germelerini $\lambda_1^0(\bar{z})$ ve $\lambda_2^0(\bar{z})$, membran kuvvetlerini de $T_1^0(\bar{z})$ ve $T_2^0(\bar{z})$, akışkanın daimi akımda hız bileşenlerini $v_r^0(z)$, $v_z^0(z)$, basınç fonksiyonunu da $P_0(r, z)$ şeklinde kabul edeceğiz. Buna göre alan büyüklükleri aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_1^0 + \bar{\lambda}_1, \quad \lambda_2 = \lambda_2^0 + \bar{\lambda}_2, \quad T_1 = T_1^0 + \Sigma_1, \quad T_2 = T_2^0 + \Sigma_2 \\ v_r &= v_r^0 + \bar{v}_r, \quad v_z = v_z^0 + \bar{v}_z \\ P &= P_0 + \bar{P}, \quad P_r = P_r^0 + \bar{P}_r + Y_r^0 + \bar{Y}_r, \quad P_z = P_z^0 + \bar{P}_z + Y_z^0 + \bar{Y}_z\end{aligned}\quad (3.1)$$

Burada Σ_1, Σ_2 ve diğer üzeri çizgili semboller, ilgili büyüklüklerin artımsal miktarlarını göstermektedir. Artımsal büyüklüklerin yeterince küçük olduğu ve çarpım terimlerinin ihmal edilebileceği kabul edilecektir.

3.1 Artımsal Mambran Denklemleri

(3.1) de tanımlanan elastik tüp ile ilgili büyüklükler (2.17) ve (2.18) denklemlerinde yerine konur ve artımsal büyüklükler cinsinden yalnız lineer terimler tutulacak olursa aşağıdaki denklemler elde edilir:

Denge Denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(T_1^0 R_0 \sin \phi_0 \right) - \frac{T_2^0}{\cos \phi_0} + R_0 \Lambda_0 P_r^0 &= 0 \\ \frac{d}{dz} \left(T_1^0 R_0 \cos \phi_0 \right) + R_0 \Lambda_0 P_z^0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Burada $\Lambda_0 P_r^0$, $\Lambda_0 P_z^0$ ve Λ_0 büyüklükleri aşağıdaki biçimde tanımlanmışlardır:

$$\begin{aligned} \Lambda_0 P_r^0 &= \left[P_0(r) - 2\mu_v \frac{\partial v_r^0}{\partial r} + \mu_v \left(\frac{\partial v_r^0}{\partial z} + \frac{\partial v_z^0}{\partial r} \right) \tan \phi_0 \right]_{r=r_0} + \Lambda_0 Y_r^0 \\ \Lambda_0 P_z^0 &= \left[-P_0(r) \tan \phi_0 - \mu_v \left(\frac{\partial v_r^0}{\partial z} + \frac{\partial v_z^0}{\partial r} \right) + 2\mu_v \frac{\partial v_r^0}{\partial z} \tan \phi_0 \right]_{r=r_0} + \Lambda_0 Y_z^0 \\ \Lambda_0 &= \left[1 + R_0'^2 \right]^{1/2} = 1 / \cos \phi_0(z) \quad , \quad r_0'(z) = \tan \phi_0(z) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Artımsal Denklemler

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\Sigma_1 R_0 \sin \phi_0 + T_1^0 R_0 \cos^3 \phi_0 \frac{\partial u}{\partial z} + T_1^0 \sin \phi_0 u - T_1^0 R_0 \sin \phi_0 \cos^2 \phi_0 \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{R_0 P_r^0 - T_2^0}{\cos \phi_0} w \right] + T_2^0 \sin \phi_0 \left(R_0' \frac{\partial w}{\partial z} + R_0'' w - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\cos \phi_0} \frac{d T_2^0}{d z} w \\
& - \frac{\Sigma_2}{\cos \phi_0} + \bar{S}_r = \rho_0 h R_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} \quad (3.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} \left[\Sigma_1 R_0 \cos \phi_0 + T_1^0 R_0 \sin^2 \phi_0 \cos^2 \phi_0 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{R_0 P_z^0}{\cos \phi_0} w \right. \\
& \left. + T_1^0 R_0 \sin \phi_0 \cos^2 \phi_0 \frac{\partial u}{\partial z} + T_1^0 \cos \phi_0 u \right] + \bar{S}_z = \rho_0 h R_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^{*2}} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Burada $\bar{S}_r$ ve $\bar{S}_z$ artımsal reaksiyon kuvvetleri aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}
\bar{S}_r = & R_0 \left[\bar{p}(r) - 2 \mu_v \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \mu_v \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} \right) R_0' \right]_{r=R_0} + u \left[R_0 \frac{\partial P_0}{\partial r} + P_0 \right. \\
& - 2 \mu_v R_0 \frac{\partial^2 v_r^0}{\partial r^2} + \mu_v R_0 R_0' \left(\frac{\partial^2 v_z^0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r^0}{\partial r \partial z} \right) - 2 \mu_v \frac{\partial v_r^0}{\partial r} \\
& \left. + \mu_v R_0' \left(\frac{\partial v_r^0}{\partial z} + \frac{\partial v_z^0}{\partial r} \right) \right]_{r=R_0} + \mu_v R_0 \left(\frac{\partial v_z^0}{\partial r} + \frac{\partial v_r^0}{\partial z} \right) \bigg|_{x=\eta} \frac{\partial u}{\partial z} \\
& + w \left[-P_0 R_0' - R_0 R_0' \frac{\partial P_0}{\partial r} + 2 \mu_v R_0 R_0' \frac{\partial^2 v_r^0}{\partial r^2} - \mu_v (R_0 R_0'' + R_0'^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{\partial v_z^0}{\partial r} + \frac{\partial v_r^0}{\partial z} \right) + 2 \mu_v R_0' \frac{\partial v_r^0}{\partial r} - \mu_v R_0 R_0'^2 \left(\frac{\partial^2 v_r^0}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 v_z^0}{\partial r^2} \right) \right]_{r=R_0} \\
& - \mu_v R_0 R_0' \left(\frac{\partial v_z^0}{\partial r} + \frac{\partial v_r^0}{\partial z} \right) \bigg|_{r=R_0} \frac{\partial w}{\partial z} + \Lambda_0 R_0 \bar{Y}_r \\
& + \left[\Lambda_0 (u - R_0' w) + R_0 R_0' \left(\frac{u' - R_0'' w - R_0' w'}{\Lambda_0} \right) \right] Y_r^0 \\
& \bar{S}_z = \left[-\bar{p}(r) R_0 R_0' - \mu_v R_0 \left(\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right) + 2 \mu_v \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} R_0 R_0' \right]_{r=R_0} \\
& + u \left[-\frac{\partial P_0}{\partial r} R_0 R_0' - P_r(r) R_0' - \mu_v R_0 \left(\frac{\partial^2 v_z^0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r^0}{\partial r \partial z} \right) + 2 \mu_v R_0' \frac{\partial^2 v_z^0}{\partial r \partial z} \right. \\
& \left. - \mu_v \left(\frac{\partial v_z^0}{\partial r} + \frac{\partial v_r^0}{\partial z} \right) + 2 \mu_v \frac{\partial v_z^0}{\partial z} R_0' \right]_{r=R_0} + \frac{\partial u}{\partial z} \left[-P_0(r) R_0 + 2 \mu_v R_0 \frac{\partial v_z^0}{\partial z} \right]_{r=R_0} \\
& + w \left[P_0(r) (R_0 R_0'' + R_0'^2) + \frac{\partial P_0}{\partial r} R_0 R_0'^2 - 2 \mu_v R_0 R_0'^2 \frac{\partial^2 v_z^0}{\partial r \partial z} \right. \\
& \left. - 2 \mu_v (R_0 R_0'' + R_0'^2) \frac{\partial v_z^0}{\partial z} + \mu_v R_0' \left(\frac{\partial v_z^0}{\partial r} + \frac{\partial v_r^0}{\partial z} \right) + \mu_v R_0 R_0' \left(\frac{\partial^2 v_r^0}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 v_z^0}{\partial r^2} \right) \right]_{r=R_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial w}{\partial z} \left[P_0(r) R_0 R_0' - 2\mu_v R_0 R_0' \frac{\partial v_z^0}{\partial z} \right]_{r=R_0} + \Lambda R_0 \bar{Y}_z \\
& + \left[\Lambda_0 (u - R_0' w) + R_0 R_0' \left(\frac{u' - R_0'' w - R_0' w'}{\Lambda_0} \right) \right] Y_z^0
\end{aligned} \quad (3.6)$$

Bu denklemler elde edilirken aşağıdaki yaklaşıklıklar kullanılmıştır:

$$R_0(\bar{z}) = R_0(z - w) = R_0(z) - R_0' w$$

$$\Lambda = \frac{1}{\cos \phi_0(z)} - \sin \phi_0(z) \left[R_0' \frac{\partial w}{\partial z} + R_0'' w - \frac{\partial u}{\partial z} \right]$$

$$\frac{1}{\Lambda} = \cos \phi_0(z) + \sin \phi_0(z) \cos^2 \phi_0(z) \left[R_0' \frac{\partial w}{\partial z} + R_0'' w - \frac{\partial u}{\partial z} \right]$$

$$T_1^0(\bar{z}) = T_1^0(z - w) = T_1^0(z) - \frac{dT_1^0}{dz} w$$

$$T_2^0(\bar{z}) = T_2^0(z - w) = T_2^0(z) - \frac{dT_2^0}{dz} w$$

$$a_r = \frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}}, \quad a_z = \frac{\partial^2 w}{\partial t^{*2}}$$

$$v_r = \frac{\partial u}{\partial t^*}, \quad v_z = \frac{\partial w}{\partial t^*}, \quad \tan \phi_0(z) = \frac{dR_0(z)}{dz} \quad (3.7)$$

(3.4) ve (3.5) denklemlerini yer değiştirmeler cinsinden ifade edebilmek için artımsal mambran kuvvetlerinin bilinmesi gerekir.

3.2. Artımsal Bünye Denklemleri

(2.40) denklemiyle verilen mambran kuvvet ifadelerinden artımsal mambran kuvvetlerinin yer değiştirmelere olan ilişkisini bulabilmek için $\bar{\lambda}_\alpha$ ($\alpha = 1,2$) artımsal germelerinin yer değiştirme bileşenlerine olan bağlantısının bilinmesi gerekir. Asal eksenler doğrultusunda uzanan elemanter liflerinin başlangıç ve nihai uzunlukları ds_α^0 ve ds_α ($\alpha = 1,2$) ile gösterilirse germe ifadeleri

$$\lambda_\alpha = \frac{ds_\alpha}{ds_\alpha^0} \quad (\alpha = 1,2) \quad (3.8)$$

şeklinde yazılabilir. Aynı liflerin statik şekil değiştirme sonucundaki lif uzunlukları ds_α^0 ile gösterilirse (3.8) ifadesi aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\lambda_\alpha = \frac{ds_\alpha}{ds_\alpha^0} \cdot \frac{ds_\alpha^0}{ds_\alpha^0} = \lambda_\alpha^0 \frac{ds_\alpha}{ds_\alpha^0} \quad (3.9)$$

Nihai konuma göre ifade edildiklerinde bu lif uzunlukları

$$ds_1^0 = \left[\left(1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_0}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} dz, \quad ds_2^0 = r_0 d\theta$$

$$ds_1 = \left[1 + \left(\frac{\partial r_0}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} dz, \quad ds_2 = (r_0 + u) d\theta$$

şeklinde verilebilir. O halde germe ifadeleri

$$\lambda_1 = \lambda_1^0 \left[\frac{1 + \left(\frac{\partial r_0}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2}{\left(1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_0}{\partial z} \right)^2} \right]^{1/2}, \quad \lambda_2 = \lambda_2^0 \left(1 + u / r_0 \right) \quad (3.10)$$

olarak verilebilir. $r_0 = R_0(z) - R_0' w$ bağıntısı dikkate alınırsa yer değiştirmelerin küçük olması halinde (3.10) ifadesi aşağıdaki şekli alır:

$$\lambda_1 = \lambda_1^0 \left(1 + \frac{R_0'}{1 + R_0'^2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{1 + R_0'^2} \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

veya

$$\lambda_1 = \lambda_1^0 \left(1 + \sin \phi_0 \cos \phi_0 \frac{\partial u}{\partial z} + \cos^2 \phi_0 \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (3.11)$$

Buna göre artımsal germeler

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \lambda_1^0 \left(\sin \phi_0 \cos \phi_0 \frac{\partial u}{\partial z} + \cos^2 \phi_0 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \bar{\lambda}_2 &= \lambda_2^0 \frac{u}{R_0} \end{aligned} \quad (3.12)$$

olarak verilir. Burada λ_1^0 ve λ_2^0 germelerinin $\bar{z}$ konumunda değerlendirildiklerine dikkat edelim. O halde artımsal şekil değiştirme tansörü bileşenleri

$$e_{11} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1^0} - 1 = \sin \phi_0 \cos \phi_0 \frac{\partial u}{\partial z} + \cos^2 \phi_0 \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$e_{22} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2^0} - 1 = u / R_0(z) \quad (3.13)$$

olarak verilir.

Bu bilgiler elde olduğuna göre (2.40) denklemindeki mambran kuvvet ifadeleri artımsal şekil değiştirme bileşenlerinin serisine açılırsa

$$\begin{aligned} T_1^0 + \Sigma_1 &= \frac{H}{\lambda_2^0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1^0} + H \frac{\lambda_1^0}{\lambda_2^0} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_1^{02}} e_{11} + H \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_1^0 \partial \lambda_2^0} - \frac{1}{\lambda_2^0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1^0} \right) e_{22} \\ T_2^0 + \Sigma_2 &= \frac{H}{\lambda_1^0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2^0} + H \frac{\lambda_2^0}{\lambda_1^0} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_2^{02}} e_{22} + H \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_2^0 \partial \lambda_1^0} - \frac{1}{\lambda_1^0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2^0} \right) e_{11} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Buradan artımsal mambran kuvvetleri

$$\Sigma_1 = \beta_{11}^* e_{11} + \beta_{12}^* e_{22}, \quad \Sigma_2 = \beta_{21}^* e_{11} + \beta_{22}^* e_{22} \quad (3.15)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\beta_{\alpha\delta}^* (\alpha, \delta = 1,2)$ katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} \beta_{11}^* &= H \frac{\lambda_1^0}{\lambda_2^0} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_1^{02}} & \beta_{12}^* &= H \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_1^0 \partial \lambda_2^0} - T_1^0 \\ \beta_{21}^* &= H \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_1^0 \partial \lambda_2^0} - T_2^0 & \beta_{22}^* &= H \frac{\lambda_2^0}{\lambda_1^0} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_2^{02}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

(3.16) denkleminden hemen görüleceği gibi bu katsayılar arasında

$$\beta_{12}^* + T_1^0 = \beta_{21}^* + T_2^0 \quad (3.17)$$

ilişkisi geçerlidir.

(3.15) artımsal mambran kuvvetleri ifadesi (3.4) ve (3.5) denklemlerinde yerine konup gerekli türetmeler yapılacak olursa aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned}
 & R_0 \cos \phi_0 \left(\beta_{11}^* \sin^2 \phi_0 + T_1^0 \cos^2 \phi_0 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left\{ \frac{d}{dz} \left[R_0 \cos \phi_0 \left(\beta_{11}^* \sin^2 \phi_0 + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. T_1^0 \cos^2 \phi_0 \right) \right] \frac{\partial u}{\partial z} + \left\{ \frac{d}{dz} \left[\left(\beta_{12}^* + T_1^0 \right) \sin \phi_0 \right] - \frac{\beta_{22}^*}{R_0 \cos \phi_0} \right\} u + \\
 & R_0 \cos^2 \phi_0 \sin \phi_0 \left(\beta_{11}^* - T_2^0 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left\{ \frac{d}{dz} \left[R_0 \cos^2 \phi_0 \sin \phi_0 \left(\beta_{11}^* - T_1^0 \right) \right] \right. \\
 & \left. \frac{R_0 P_r^0}{\cos \phi_0} - \left(\beta_{21}^* + T_2^0 \right) \cos \phi_0 \right\} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{d}{dz} \left(\frac{R_0 P_r^0}{\cos \phi_0} \right) w + \bar{S}_r = \rho_0 h R_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
 & R_0 \sin \phi_0 \cos^2 \phi_0 \left(\beta_{11}^* - T_1^0 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left\{ \frac{d}{dz} \left[R_0 \sin \phi_0 \cos^2 \phi_0 \left(\beta_{11}^* - T_1^0 \right) \right] \right. \\
 & \left. + \left(\beta_{12}^* + T_1^0 \right) \cos \phi_0 \right\} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{d}{dz} \left[\left(\beta_{12}^* + T_1^0 \right) \cos \phi_0 \right] u \\
 & + R_0 \cos \phi_0 \left(\beta_{11}^* \cos^2 \phi_0 + T_1^0 \sin^2 \phi_0 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
 & \left\{ \frac{d}{dz} \left[R_0 \cos \phi_0 \left(\beta_{11}^* \cos^2 \phi_0 + T_1^0 \sin^2 \phi_0 \right) \right] + \frac{R_0 P_z^0}{\cos \phi_0} \right\} \frac{\partial w}{\partial z} \\
 & \frac{d}{dz} \left(\frac{R_0 P_z^0}{\cos \phi_0} \right) w + \bar{S}_z = \rho_0 h R_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^{*2}}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Böylece tüpe ait küçük yerdeğiştirmeleri yöneten lineer hareket denklemleri elde edilmiş oldu. şimdi de akışkana ait artımsal hareket denklemlerini elde etmeye çalışalım.

3.3. Akışkanın Artımsal Denklemleri

Akışkan ile tüpün ortak yüzey boyunca temas halinde bulunmaları nedeniyle birisinde oluşturulan hareket diğerini de harekete zorlar. Tüpün maruz kaldığı ön statik şekil değiştirme sırasında viskoz akışkan da daimi bir akıma maruz kalabilir. Buna göre (2.42)- (2.44) denklemlerinden daimi akımı yöneten hareket denklemleri

$$\rho_0 \left(v_r^0 \frac{\partial v_r^0}{\partial r} + v_z^0 \frac{\partial v_r^0}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P_0}{\partial r} + \mu_v \left(\frac{\partial^2 v_r^0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r^0}{\partial r} - \frac{v_r^0}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r^0}{\partial z^2} \right) \quad (3.20)$$

$$\rho_0 \left(v_r^0 \frac{\partial v_z^0}{\partial r} + v_z^0 \frac{\partial v_z^0}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P_0}{\partial z} + \mu_v \left(\frac{\partial^2 v_z^0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z^0}{\partial r} - \frac{v_z^0}{r^2} + \frac{\partial^2 v_z^0}{\partial z^2} \right) \quad (3.21)$$

ve sıkışmazlık koşulu

$$\frac{\partial v_r^0}{\partial r} + \frac{v_r^0}{r} + \frac{\partial v_z^0}{\partial z} = 0 \quad (3.22)$$

biçiminde verilebilir. Bu durumda tüpte hiçbir hareket olmadığından hızlar cinsinden sınır koşulları

$$v_r^0 \Big|_{r=R_0} = 0 \quad , \quad v_z^0 \Big|_{r=R_0} = 0 \quad (3.23)$$

şeklinde verilebilir. Diğer bir sınır koşulu ise (3.2) ve (3.3) denklemlerinde görülen P_0 basınç teriminin akışkan basınç fonksiyonunun $r = R_0$ daki değeridir.

Artımsal Hareket Denklemleri:

Akışkanın artımsal hareket denklemleri (3.1) açılımını (2.42)-(2.44) denklemlerinde yerine koyup artımsal alan büyüklükleri cinsinden yalnız lineer terimleri tutarak elde edilebilir. Gerekli işlemler yapılacak olursa artımsal akışkan denklemleri aşağıdaki biçimde verilebilir:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t^*} + v_r^0 \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \bar{v}_r \frac{\partial v_r^0}{\partial r} + v_z^0 \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} + \bar{v}_z \frac{\partial v_r^0}{\partial z} \right) \\ = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} + \mu_v \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} - \frac{\bar{v}_r}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t^*} + v_r^0 \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \bar{v}_r \frac{\partial v_r^0}{\partial r} + v_z^0 \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + \bar{v}_z \frac{\partial v_z^0}{\partial z} \right) \\ = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \mu_v \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

ve sıkışmazlık koşulu

$$\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_r}{r} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (3.26)$$

biçimindedir. Hızlar cinsinden sınır koşulları (2.45) denklemlerinin lineerleştirilmesinden, aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \bar{v}_r \Big|_{r=R_0} + u \frac{\partial v_r^0}{\partial r} \Big|_{r=R_0}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t^*} = \bar{v}_z \Big|_{r=R_0} + u \frac{\partial v_z^0}{\partial r} \Big|_{r=R_0} . \quad (3.27)$$

Böylece hem tüpün hem de akışkanın hareketini yöneten denklemler elde edilmiş oldu. Bundan sonraki bölümde bu denklemler kullanılarak bazı problemlerin çözümü yapılacaktır.

Boyutsuzlaştırılmış Alan Denklemleri:

Alan denklemlerinin çözümüne geçmeden önce bu denklemleri ve ilgili sınır koşullarını boyutsuzlaştırmakta yarar vardır. Bu amaçla aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{b}{c_0} t , & r &= bx , & z &= by , & R_0 &= b\eta \\ \beta_{ij}^* &= \mu H \beta_{ij} , & T_\alpha &= \mu H N_\alpha \\ u &= bU , & w &= bW , & v_r &= c_0 V_r , & v_z &= c_0 V_z \\ P &= \rho c_0^2 S , & c_0^2 &= \frac{\mu}{\rho_0} , & m &= \frac{\rho_0 H}{\rho} \\ \mu_v &= \rho c_0 b v , & \bar{S}_r &= \rho c_0^2 b F_r \end{aligned} \quad (3.28)$$

Burada b tüpün uç noktasının şekil değiştirmeden önceki değeri, μ ise küçük şekil değiştirme halinde kayma modülüdür. (3.28) de tanımlanan boyutsuz büyüklükler (3.2)-(3.3) denklemlerinde yerine konacak olursa denge denklemleri aşağıdaki boyutsuz şekli alırlar:

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dy} \left(N_1^0 \eta \sin \phi_0 \right) - \frac{m N_2^0}{\cos \phi_0} + \eta \Lambda_0 S_r^0 &= 0 \\ m \frac{d}{dy} \left(N_1^0 \eta \cos \phi_0 \right) + \eta \Lambda_0 S_z^0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Burada

$$\begin{aligned}\Lambda_0 S_r^0 &= \left[S_0(x) - 2v \frac{\partial V_r^0}{\partial x} + v \left(\frac{\partial V_r^0}{\partial y} + \frac{\partial V_z^0}{\partial x} \right) \tan \phi_0 \right]_{x=x_0} \\ \Lambda_0 S_z^0 &= \left[-S_0(x) \tan \phi_0 + 2v \frac{\partial V_z^0}{\partial y} \tan \phi_0 - v \left(\frac{\partial V_r^0}{\partial y} + \frac{\partial V_z^0}{\partial x} \right) \right]_{x=x_0} \\ \Lambda_0 &= \left(1 + \eta'^2 \right)^{1/2} = 1 / \cos \phi_0(y) \quad , \quad \eta' = \tan \phi_0(y)\end{aligned}\quad (3.30)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Artımsal Denklemler:

Keza (3.28) de verilen boyutsuz alan ifadeleri (3.18) ve (3.19) da kullanılacak olursa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned}& m\eta \cos \phi_0 (\beta_{11} \sin^2 \phi_0 + N_1^0 \cos^2 \phi_0) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + m \left\{ \frac{d}{dy} \left[\eta \cos \phi_0 (\beta_{11} \sin^2 \phi_0 \right. \right. \\ & \left. \left. + N_1^0 \cos^2 \phi_0) \right] \right\} \frac{\partial U}{\partial y} + m \left\{ \frac{d}{dy} \left[(\beta_{12} + N_1^0) \sin \phi_0 \right] - \frac{\beta_{22}}{\eta \cos \phi_0} \right\} U + \\ & m\eta \cos^2 \phi_0 \sin \phi_0 (\beta_{11} - N_1^0) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \left\{ m \frac{d}{dy} \left[\eta \cos^2 \phi_0 \sin \phi_0 (\beta_{11} - N_1^0) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\eta S_r^0}{\cos \phi_0} - m(\beta_{21} + N_2^0) \cos \phi_0 \right\} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{d}{dy} \left(\frac{\eta S_r^0}{\cos \phi_0} \right) W + F_r = m \left(\frac{h}{H} \right) \eta \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
& m\eta \sin \phi_0 \cos^2 \phi_0 (\beta_{11} - N_1^0) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \left\{ m \frac{d}{dy} \left[\eta \sin \phi_0 \cos^2 \phi_0 (\beta_{11} - N_1^0) \right] + \right. \\
& m(\beta_{12} + N_1^0) \cos \phi_0 \left. \right\} \frac{\partial U}{\partial y} + m \frac{d}{dy} \left[(\beta_{12} + N_1^0) \cos \phi_0 \right] U \\
& + m\eta \cos \phi_0 (\beta_{11} \cos^2 \phi_0 + N_1^0 \sin^2 \phi_0) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \left\{ m \frac{d}{dy} \left[\eta \cos \phi_0 (\beta_{11} \cos^2 \phi_0 \right. \right. \\
& \left. \left. + N_1^0 \sin^2 \phi_0) \right] + \frac{\eta S_z^0}{\cos \phi_0} \right\} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{d}{dy} \left(\frac{\eta S_z^0}{\cos \phi_0} \right) W + F_z = m \left(\frac{h}{H} \right) \eta \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Burada F_r ve F_z artımsal reaksiyon kuvvetleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}
F_r = & \eta \left[\bar{S}(x) - 2v \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial x} + v \left(\frac{\partial \bar{V}_z}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial y} \right) \eta' \right]_{x=\eta} + u \left[\eta \frac{\partial S_0}{\partial x} + S_0 - 2v \eta \frac{\partial^2 V_r^0}{\partial x^2} \right. \\
& + v \eta \eta' \left(\frac{\partial^2 V_z^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_r^0}{\partial x \partial y} \right) - 2v \frac{\partial V_r^0}{\partial x} + v \eta \left(\frac{\partial V_r^0}{\partial y} + \frac{\partial V_z^0}{\partial x} \right) \left. \right]_{x=\eta} \\
& + v \eta \left(\frac{\partial V_z^0}{\partial x} + \frac{\partial V_r^0}{\partial y} \right) \bigg|_{x=\eta} \frac{\partial U}{\partial y} + W \left[-S_0 \eta' - \eta \eta' \frac{\partial S_0}{\partial x} + 2v \eta \eta' \frac{\partial^2 V_r^0}{\partial x^2} - v(\eta \eta'' + \eta'^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial V_z^0}{\partial x} + \frac{\partial V_r^0}{\partial y} \right) + 2v\eta' \frac{\partial V_r^0}{\partial x} - v\eta\eta' \left(\frac{\partial^2 V_r^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_z^0}{\partial x^2} \right) \Bigg]_{x=\eta} \\
& - v\eta\eta' \left(\frac{\partial V_z^0}{\partial x} + \frac{\partial V_r^0}{\partial y} \right) \Bigg|_{x=\eta} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\eta}{\cos \phi_0} \bar{G}_r \\
& + \left[\frac{1}{\cos \phi_0} (U - \eta' W) + \eta \sin \phi_0 (U' - \eta'' W - \eta' W') \right] G_r^0 \quad (3.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_z = & \left[-\bar{S}(x)\eta\eta' - v\eta \left(\frac{\partial \bar{V}_r}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial x} \right) + 2v \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial y} \eta\eta' \right]_{x=\eta} + U \left[-\frac{\partial S_0}{\partial x} \eta\eta' - S_0 \eta' \right. \\
& \left. - v\eta \left(\frac{\partial^2 V_z^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_r^0}{\partial x \partial y} \right) + 2v\eta\eta' \frac{\partial^2 V_z^0}{\partial x \partial y} - v \left(\frac{\partial V_z^0}{\partial x} + \frac{\partial V_r^0}{\partial y} \right) + 2v \frac{\partial V_z^0}{\partial y} \eta \right]_{x=\eta} \\
& + \frac{\partial U}{\partial y} \left[-S_0 \eta + 2v\eta \frac{\partial V_z^0}{\partial y} \right]_{x=\eta} + W \left[S_0 (\eta\eta'' + \eta'^2) + \frac{\partial S_0}{\partial x} \eta\eta'^2 \frac{\partial^2 V_z^0}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. - 2v (\eta\eta'' + \eta'^2) \frac{\partial V_z^0}{\partial y} + v\eta' \left(\frac{\partial V_z^0}{\partial x} + \frac{\partial V_r^0}{\partial y} \right) + v\eta\eta' \left(\frac{\partial^2 V_r^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_z^0}{\partial x^2} \right) \right]_{x=\eta} \\
& + \frac{\partial W}{\partial y} \left[S_0 \eta\eta' - 2v\eta\eta' \frac{\partial V_z^0}{\partial y} \right]_{x=\eta} \\
& + \frac{\eta}{\cos \phi_0} \bar{G}_z + \left[\frac{1}{\cos \phi_0} (U - \eta' W) + \eta \sin \phi_0 (U' - \eta'' W - \eta' W') \right] G_z^0 \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Akışkana ait boyutsuz hareket denklemleri ise aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$V_r^0 \frac{\partial V_r^0}{\partial x} + V_z^0 \frac{\partial V_r^0}{\partial y} = -\frac{\partial S_0}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 V_r^0}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_r^0}{\partial x} - \frac{V_r^0}{x^2} + \frac{\partial^2 V_r^0}{\partial y^2} \right) \quad (3.35)$$

$$V_r^0 \frac{\partial V_z^0}{\partial x} + V_z^0 \frac{\partial V_z^0}{\partial y} = -\frac{\partial S_0}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 V_z^0}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_z^0}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_z^0}{\partial y^2} \right) \quad (3.36)$$

sıkışmazlık koşulu

$$\frac{\partial V_r^0}{\partial x} + \frac{V_r^0}{x} + \frac{\partial V_z^0}{\partial y} = 0 \quad (3.37)$$

şeklindedir. Sınır koşulları ise

$$V_r^0 \Big|_{x=\eta} = 0 \quad , \quad V_z^0 \Big|_{x=\eta} = 0 \quad (3.38)$$

biçiminde verilebilir.

Akışkanın Artımsal Hareket Denklemleri:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial t} + V_r^0 \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial x} + \bar{V}_r \frac{\partial V_r^0}{\partial x} + V_z^0 \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial y} + \bar{V}_z \frac{\partial V_r^0}{\partial y} = \\ -\frac{\partial \bar{S}}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial x} - \frac{\bar{V}_r}{x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial t} + V_r^0 \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial x} + \bar{V}_r \frac{\partial V_z^0}{\partial x} + V_z^0 \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial y} + \bar{V}_z \frac{\partial V_z^0}{\partial y} = \\ - \frac{\partial \bar{S}}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Sıkışmazlık koşulu aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\frac{\partial \bar{V}_r}{\partial x} + \frac{\bar{V}_r}{x} + \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial y} = 0 \quad (3.41)$$

Hızlar cinsinden sınır koşulları ise

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \bar{V}_r \Big|_{x=\eta} + U \frac{\partial V_r^0}{\partial x} \Big|_{x=\eta} \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= \bar{V}_z \Big|_{x=\eta} + U \frac{\partial V_z^0}{\partial x} \Big|_{x=\eta} \end{aligned} \quad (3.42)$$

şeklinde verilebilir. Bundan sonraki bölümde bu alan denklemlerinin uygun sınır koşulları altındaki çözümleri aranacaktır.

BÖLÜM 4

UYGULAMALAR

Bu bölümde, bundan önceki bölümlerde geliştirilen alan denklemleri kullanılarak pratikte önemi olan bazı problemlerin çözümü verilmeye ve sonuçları irdelenmeye çalışılacaktır. Bunun için, incelenmesinin daha basit olması nedeniyle, önce sabit yarıçaplı silindirik tüpte harmonik dalga yayılması problemi daha sonra da yarıçapı yavaş değişen ön gerilmeli elastik tüplerde pulsatif akım problemi incelenmeye çalışılacaktır.

4.1. Sabit Yarıçaplı Elastik Tüp Problemi

Bu kısımda sonlu statik şekil değiştirmeden sonra ortaya çıkan tüp geometrisinin dairesel silindir olması hali incelenecektir. Böyle bir durum akışkan içerisindeki ön basıncın üniform yani eksenel koordinattan bağımsız olması ile mümkündür. Bu durumda $R_0 = a = \text{sbt}$ olduğundan (3.2), (3.3), (3.18) ve (3.19) denklemleri aşağıdaki şekli alırlar:

$$T_2^0 = Pa \quad (4.1.1)$$

$$\begin{aligned} T_1^0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (T_2^0 - \beta_{22}^*) \frac{u}{a^2} - \frac{\beta_{21}^*}{a} \frac{\partial w}{\partial z} + \left[\bar{p}(r) - 2\mu_v \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} \right] \Big|_{r=a} \\ = \rho_0 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} (\beta_{12}^* + T_1^0 - T_2^0) \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_{11}^* \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \mu_v \left(\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right) \bigg|_{r=a} \\ = \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^{*2}} \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Bu özel durumda yataklama kuvvetlerinin sıfır olarak alındığına dikkatleri çekelim. Bu denklemler daha önce Hart and Shi [30] tarafından elde edilen denklemler ile tamamiyle çakışmaktadır.

Daimi akım halinde ön hızın sıfır olması halinde artımsal akışkan denklemleri (3.24)-(3.26) dan aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t^*} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \mu_v \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} - \frac{\bar{v}_r}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial z^2} \right) \quad (4.1.4)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t^*} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu_v \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \right) \quad (4.1.5)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_r}{r} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{sıkışmazlık koşulu}) \quad (4.1.6)$$

Aynı şekilde (3.27) denkleminde sınır koşulları ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \bar{v}_r \bigg|_{r=a}, \quad \frac{\partial w}{\partial t^*} = \bar{v}_z \bigg|_{r=a}. \quad (4.1.7)$$

Harmonik Dalga Yayılımı

Kalbin kanı damarlara pompalarken uyguladığı periyodik hareketi dikkate alarak (4.1.2) -(4.1.6) alan denklemlerine harmonik dalga tipi çözümler aranacaktır.

Bunun için u , w , $\bar{v}_r$, $\bar{v}_z$ ve $\bar{p}$ yi aşağıdaki şekilde ifade etmek uygun düşecektir:

$$(u, w) = (A, B) \exp [i(\omega t - kz)] \quad (4.1.8a)$$

$$\left(\bar{v}_r, \bar{v}_z, \bar{p} \right) = \left[\hat{V}_r(r), \hat{V}_z(r), \hat{P}(r) \right] \exp[i(\omega t - kz)]. \quad (4.1.8b)$$

Burada ω dalganın açısal frekansını, k dalga sayısını, A ve B katıya ait kompleks dalga genlik sabitlerini, $\hat{V}_r(r)$, $\hat{V}_z(r)$ ve $\hat{P}(r)$ ise akışkanın kompleks dalga genlik fonksiyonlarını göstermektedir. (4.1.8.b) denklemi (4.1.4.)-(4.1.6) denklemlerinde yerine konur ve üssel faktörler atılacak olursa aşağıdaki adi türevli diferansiyel denklem takımı elde edilir:

$$-\frac{d\hat{P}}{dr} + \mu_v \left(\frac{d^2 \hat{V}_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{V}_r}{dr} - \frac{\hat{V}_r}{r^2} - k^2 \hat{V}_r \right) - i\rho\omega \hat{V}_r = 0, \quad (4.1.9)$$

$$ik\hat{P} + \mu_v \left(\frac{d^2 \hat{V}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{V}_z}{dr} - k^2 \hat{V}_z \right) - i\rho\omega \hat{V}_z = 0, \quad (4.1.10)$$

$$\frac{d\hat{V}_r}{dr} + \frac{\hat{V}_r}{r} - ik\hat{V}_z = 0. \quad (4.1.11)$$

Bu üç denklem arasında $\hat{V}_r$ ve $\hat{V}_z$ fonksiyonlar elimine edilecek olursa

$$\frac{d^2 \hat{P}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{P}}{dr} - k^2 \hat{P} = 0 \quad (4.1.12)$$

bulunur. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$\hat{P} = i\rho\omega I_0(kr)C \quad (4.1.13)$$

şeklinde verilebilir. Burada C bir integral sabiti, $I_n(r)$ ise n.ci mertebeden modifiye Bessel fonksiyonudur. Bu çözüm (4.1.10) denkleminde yerine konursa

$$\frac{d^2 \hat{V}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{V}_z}{dr} - \left(k^2 + \frac{i\rho\omega}{\mu_v}\right) \hat{V}_z = \rho \frac{\omega k}{\mu_v} I_0(kr)C \quad (4.1.14)$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin toplam çözümü de

$$\hat{V}_z = i[kI_0(kr)C + sI_0(sr)D] \quad (4.1.15)$$

olarak bulunur. Burada D bir integral sabiti olup, s parametresi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$s^2 = k^2 + \frac{i\rho\omega}{\mu_v} \quad (4.1.16)$$

Nihayet (4.1.11) sıkışmazlık koşulu kullanılacak olursa

$$\frac{d}{dr} (r\hat{V}_r) = -r[k^2 I_0(kr)C + ksI_0(sr)D] \quad (4.1.17)$$

elde edilir. $y_n(\alpha x)$ bir Bessel fonksiyonunu göstermek üzere aşağıdaki diferansiyel bağıntı geçerlidir:

$$\frac{d}{dx} [x^n y_n(\alpha x)] = \alpha x^n y_{n-1}(\alpha x) \quad (4.1.18)$$

Buna göre (4.1.17) denklemi aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\frac{d}{dr} (r\hat{V}_r) = ik \frac{d}{dr} \{r[I_1(kr)C + I_1(sr)D]\} \quad (4.1.19)$$

Buradan, her iki taraf r ye göre integre edilirse

$$\hat{V}_r = -k[I_1(kr)C + I_1(sr)D] \quad (4.1.20)$$

bulunur.

Katı cisime ait çözümü elde edebilmek için (4.1.2) ve (4.1.3) denklemlerinde görülen akışkan reaksiyon kuvvetlerinin hesaplanması gerekmektedir. (4.1.13), (4.1.15) ve (4.1.20) ifadeleri (4.1.2) ve (4.1.3) de yerlerine konur, gerekli türetmeler yapılır ve (4.1.8a) gösterimi de kullanılacak olursa, üssel faktörlerin atılmasından sonra aşağıdaki cebrik denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} & [\rho_0 h \omega^2 - T_1^0 k^2 + \frac{(T_2^0 - \beta_{22}^*)}{a^2}]A + \frac{ik\beta_{21}^*}{a} B \\ & + [ip\omega + 2\mu_v k^2 I_0(ka) - \frac{2\mu_v k}{a} I_1(ka)]C \\ & + [2\mu_v k s I_0(sa) - \frac{2\mu_v k}{a} I_1(sa)]D = 0 \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{ik}{a} (\beta_{12}^* + T_1^0 - T_2^0)A + (\rho_0 h \omega^2 - \beta_{11}^* k^2)B \\ & - 2i\mu_v k^2 I_1(ka)C - i\mu_v (k^2 + s^2)I_1(sa)D = 0. \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

Bu denklemlere ek olarak $r = a$ da akışkan ve elastik tüp malzemesinin radyal ve eksenel doğrultudaki hız bileşenlerinin aynı olması gerekir. Buna göre

$$-i\omega A = kI_1(ka)C + kI_1(sa)D \quad (4.1.23)$$

$$i\omega B = kI_0(ka)C + sI_0(sa)D \quad (4.1.24)$$

yazılabilir. Ayrıca (4.1.21)-(4.1.24) denklemleri arasında A ve B katsayıları elimine edilecek olursa

$$\begin{aligned} & \left\{ [\rho_0 h\omega^2 - T_1^0 k^2 + \frac{T_2^0 - \beta_{22}^*}{a^2}] kI_1(ka) + \frac{k^2 \beta_{21}^*}{a} I_0(ka) \right. \\ & \left. + (\rho\omega^2 - 2i\mu_v \omega k^2) I_0(ka) + \frac{2\mu_v i k \omega}{a} I_1(ka) \right\} C \\ & + \left\{ [\rho_0 h\omega^2 - T_1^0 k^2 + \frac{T_2^0 - \beta_{22}^*}{a^2}] kI_1(sa) + \frac{ks \beta_{21}^*}{a} I_0(sa) \right. \\ & \left. + \frac{2i\mu_v k \omega}{a} I_1(sa) - 2i\mu_v ks \omega I_0(sa) \right\} D = 0 \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

$$\begin{aligned} & \{(\rho_0 h\omega^2 - \beta_{11}^* k^2) kI_0(ka) + \frac{k^2}{a} (\beta_{12}^* + T_1^0 - T_2^0) I_1(ka) \\ & - 2i\mu_v k^2 \omega I_1(ka)\} C + \{(\rho_0 h\omega^2 - \beta_{11}^* k^2) sI_0(sa) \\ & + \frac{k^2}{a} (\beta_{12}^* + T_1^0 - T_2^0) I_1(sa) + (\rho\omega^2 - 2\mu_v i \omega k^2) I_1(sa)\} D = 0 . \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

Özellikle ileride yapacağımız sayısal inceleme için aşağıdaki biçimde bir boyutsuzlaştırma yapmak uygun olacaktır:

$$\begin{aligned} \lambda_\theta &= \frac{a}{b} , \quad \xi = kb , \quad \zeta = sb , \quad T_1^0 = \mu h N_1^0 \\ T_2^0 &= \mu h N_2^0 , \quad c_0^2 = \mu / \rho_0 , \quad \beta_{ij}^* = \mu h \gamma_{ij} \\ \omega &= \frac{c_0}{b} \Omega , \quad m = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{h}{b} , \quad \mu_v = v \rho c_0 b \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

Bu boyutsuz ifadeler (4.1.25) ve (4.1.26) denklemlerinde yerine konacak olursa aşağıdaki cebrik denklem takımı elde edilir:

$$\left\{ m \left[(\Omega^2 - N_1^0 \xi^2 + \frac{N_2^0 - \gamma_{22}}{\lambda_\theta^2}) + \frac{2f\gamma_{21}}{\lambda_\theta^2} \right] \xi + \frac{2f(\xi)\Omega^2}{\lambda_\theta \xi} - \frac{4f(\xi)iv\Omega\xi}{\lambda_\theta} + \frac{2iv\xi\Omega}{\lambda_\theta} \right\} \bar{C} \\ + \left\{ m \left[(\Omega^2 - N_1^0 \xi^2 + \frac{N_2^0 - \gamma_{22}}{\lambda_\theta^2}) \xi + \frac{2g\gamma_{21}\xi}{\lambda_\theta^2} \right] + \frac{2iv\xi\Omega}{\lambda_\theta} - \frac{4iv\Omega g\xi}{\lambda_\theta} \right\} \bar{D} = 0 \quad (4.1.28)$$

$$\left\{ m \left[\frac{2(\Omega^2 - \gamma_{11}\xi^2)}{\lambda_\theta} f(\xi) + \xi^2 \frac{(\gamma_{12} + N_1^0 - N_2^0)}{\lambda_\theta} \right] \right. \\ \left. - 2iv\xi^2\Omega \right\} \bar{C} + \left\{ m \left[\frac{2(\Omega^2 - \gamma_{11}\xi^2)}{\gamma_\theta} g + \frac{\xi^2(\gamma_{12} + N_1^0 - N_2^0)}{\lambda_\theta} \right] \right. \\ \left. + (\Omega^2 - 2iv\Omega\xi^2) \right\} \bar{D} = 0 \quad (4.1.29)$$

Burada $\bar{C}$, $\bar{D}$, $f(\xi)$ ve $g(\zeta)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\bar{C} = I_1(\xi\lambda_\theta)C, \quad \bar{D} = I_1(\zeta\lambda_\theta)D \\ f(\xi) = \frac{\lambda_\theta \xi I_0(\xi\lambda_\theta)}{2I_1(\xi\lambda_\theta)}, \quad g(\zeta) = \frac{\lambda_\theta \zeta I_0(\xi\lambda_\theta)}{2I_1(\zeta\lambda_\theta)} \quad (4.1.30)$$

(4.1.28) ve (4.1.29) homojen denklem takımının sıfırdan farklı bir çözüme sahip olabilmesi için katsayılar determinantının sıfır olması gerekir. Bu işlemler yapılacak olursa aşağıdaki dispersiyon bağıntısı elde edilir:

$$(A_1 \xi^2 + A_2) \Omega^4 + (A_3 \xi^2 + A_4 \xi^4) \Omega^2 + (A_5 \xi^4 + A_6 \xi^6) = 0 . \quad (4.1.31)$$

Burada $A_1, \dots, A_6$ katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$A_1 = m \lambda_\theta^2 [2m(g - f) + \lambda_\theta]$$

$$A_2 = 2 f \lambda_\theta (2gm + \lambda_\theta)$$

$$A_3 = -2i v \Omega \lambda_\theta [2m(f - g) + \lambda_\theta (4f - 1)] + 2m^2 (N_2^0 - \gamma_{22}) \\ + m \lambda_\theta [2f(N_1^0 - N_2^0 + \gamma_{21} + \gamma_{12}) + N_2^0 - \gamma_{22}] - 4fgm \lambda_\theta \gamma_{11}$$

$$A_4 = \lambda_\theta^2 [2m^2 (N_1^0 + \gamma_{11})(f - g) - 8(f - g) - 8(f - g)v^2 - mN_1^0 \lambda_\theta]$$

$$A_5 = 2m[\Omega v \lambda_\theta (g - f)(N_1^0 - N_2^0 + \gamma_{21} + \gamma_{12} - \gamma_{11}) + m\gamma_{21}(N_2^0 - N_1^0)(g - f) \\ + m(N_2^0 \gamma_{11} - \gamma_{22} \gamma_{11} + \gamma_{21} \gamma_{12})(f - g)]$$

$$A_6 = 2m^2 N_1^0 \lambda_\theta^2 \gamma_{11} (g - f) . \quad (4.1.32)$$

(4.1.31) denklemi en genel dispersiyon bağıntısını ifade etmektedir. Ancak kan akımı problemlerinde, $\alpha_0 = (\Omega/v)^{1/2}$ şeklinde tanımlanan Womersley parametresi, Kuiken [26] ve Bauer ve arkadaşlarının [27] da ifade ettiği gibi $\left| \xi^2 \right| v / \Omega \ll 1$ ilişkisini sağlar. Dolayısıyla, dispersiyon bağıntısında görülen $v\Omega$ ve $v^2\Omega^2$ terimleri diğerleri yanında ihmal edilebilir. Bu durumda dispersiyon bağıntısı aşağıdaki şekli alır

$$(B_1 \xi^2 + B_2)\Omega^2 + (B_3 \xi^2 + B_4 \xi^4)\Omega^2 + (B_5 \xi^4 + B_6 \xi^6) = 0. \quad (4.1.33)$$

Burada $B_1, \dots, B_6$ katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$B_1 = m\lambda_\theta^2 [2m(g - f) + \lambda_\theta]$$

$$B_2 = 2f\lambda_\theta (2gm + \lambda_\theta)$$

$$B_3 = m\lambda_\theta [2f(N_1^0 - N_2^0 + \gamma_{21} + \gamma_{12}) + N_2^0 - \gamma_{22}] + 2m^2(N_2^0 - \gamma_{22})(g - f) - 4gfm \lambda_\theta \gamma_{11}$$

$$B_4 = \lambda_\theta^2 m [2m(N_1^0 - \gamma_{11})(f - g) - N_1^0 \lambda_\theta]$$

$$B_5 = 2m^2 [\gamma_{21} (N_2^0 - N_1^0)(g - f) + (N_2^0 \gamma_{11} - \gamma_{22} \gamma_{11} + \gamma_{21} \gamma_{12})(f - g)]$$

$$B_6 = 2m^2 N_1^0 \lambda_\theta^2 \gamma_{11} (g - f). \quad (4.1.34)$$

Boyutsuz dalga faz hızını $c = \Omega / \xi$ şeklinde tanımlayacak olursak (4.1.33) denklemi aşağıdaki şekli alır:

$$(B_1 \xi^2 + B_2)c^4 + (B_3 + B_4 \xi^2)c^2 + (B_5 + B_6 \xi^2) = 0 \quad (4.1.35)$$

Bessel fonksiyonlarının argumanlarının hem ξ hem de Ω 'ya bağlı olmaları nedeniyle bu kadar genellikteki bir problemi sayısal olarak bile incelemek pek kolay değildir. Ancak bu çalışmanın önemli bir uygulama alanı bulduğu atardamarlarda dalga boyu damar ortalama yarıçapına göre çok büyük olduğundan , uzun dalga yaklaşımı geçerlidir. Bu nedenle, problemin genel formülasyonu bir tarafa bırakılıp bundan sonraki kısımda uzun dalga yaklaşımı kullanılacaktır.

Uzun Dalga Yaklaşımı:

Atardamarlar içinde yayılan dalgalar için dalga boyu damar ortalama yarıçapına göre çok büyüktür. Bu nedenle boyutsuz dalga sayısı $|\xi| \ll 1$ alınabilir. Bu özel durumda $f(\xi) \rightarrow 1$ alınabilir ve (4.1.33) dispersiyon bağıntısı aşağıdaki şekli alır:

$$D_0 c^4 + D_1 c^2 + D_2 = 0 . \quad (4.1.36)$$

Burada D_0 , D_1 ve D_2 katsayıları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} D_0 &= 2\lambda_\theta (2gm + \lambda_\theta) \\ D_1 &= m\lambda_\theta [2(N_1^0 - N_2^0 + \gamma_{21} + \gamma_{12}) + (N_2^0 - \gamma_{22})] + 2m^2(N_2^0 - \gamma_{22})(g - 1) \\ &\quad - 4gm \lambda_\theta \gamma_{11} \\ D_2 &= 2m^2(g-1)[\gamma_{21}(N_2^0 - N_1^0) - (N_2^0 \gamma_{11} - \gamma_{22} \gamma_{11} + \gamma_{21} \gamma_{12})]. \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

Daha genel hali incelemeye geçmeden önce bazı özel durumları incelemek ve sonuçları literatürde mevcut çalışmalar ile karşılaştırmakta yarar vardır.

Viskoz Olmayan Akışkan Hali :

Akışkanın viskozitesinin çok küçük olması halinde $\alpha_0 = (\Omega / \nu)^{1/2} \rightarrow \infty$ alacağından $g(\zeta) \rightarrow \infty$ olacaktır ve dispersiyon bağıntısı aşağıdaki şekli alır:

$$(d_1 \xi^2 + d_2) c^4 + (d_3 + d_4 \xi^2) c^2 + (d_5 + d_6 \xi^2) = 0 \quad (4.1.38)$$

Burada

$$d_1 = 2m^2 \lambda_\theta^2$$

$$d_2 = 4mf \lambda_\theta$$

$$\begin{aligned}
d_3 &= 2m^2(N_2^0 - \gamma_{22}) - 4fm\lambda_\theta\gamma_{11} \\
d_4 &= -2m^2\lambda_\theta^2(N_1^0 - \gamma_{11}) \\
d_5 &= 2m^2[\gamma_{21}(N_2^0 - N_1^0) - N_2^0\gamma_{11} + \gamma_{22}\gamma_{11} - \gamma_{21}\gamma_{12}] \\
d_6 &= 2m^2N_1^0\lambda_\theta^2\gamma_{11}.
\end{aligned} \tag{4.1.39}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Buna ek olarak, eğer dalga sayısı da çok küçük ise, $\xi \rightarrow 0$ olurken $f(\xi) \rightarrow 1$ olacağından dispersiyon bağıntısı aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned}
2\lambda_\theta c^4 + [m(N_2^0 - \gamma_{22}) - 2\lambda_\theta\gamma_{11}]c^2 + m[\gamma_{21}(N_2^0 - N_1^0) - N_2^0\gamma_{11}] \\
+ \gamma_{22}\gamma_{11} - \gamma_{21}\gamma_{12} = 0
\end{aligned} \tag{4.1.40}$$

Ön şekil değiştirmeyi de ihmal edersek, ($\lambda_\theta = \lambda_z = 1$, $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 4$ ve $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 2$) bu durumda (4.1.40) denklemi aşağıdaki şekli alır:

$$c^4 - 2(m+2)c^2 + 6m = 0 \tag{4.1.41}$$

İnce tüp halinde $m \ll 1$ olduğundan bu kuvadratik denklemin kökleri

$$c_1^2 = 4 + 0(m) \quad , \quad c_2^2 = \frac{3}{2}m + 0(m^2) \tag{4.1.42}$$

olarak verilebilir. Gerçek fiziksel büyüklükler cinsinden ifade edilecek olursa boyutlu faz hızları

$$v_1^2 = \frac{4E}{3\rho_0} \quad , \quad v_2^2 = \frac{Eh}{2\rho R_0} \tag{4.1.43}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada sıkışmayan elastik malzemeler için μ katsayısı E young modülü cinsinden $\mu = E/3$ olarak alınmıştır. Bu hızlardan birincisi Lamb moduna, ikincisi ise Young moduna (Moens - Korteweg dalga hızına) karşı gelmektedir. Bu sonuçlar daha önce literatürde bulunan sonuçlar ile aynıdır.

Sayısal Analiz ve Tartışma

Bazı özel hallerin analitik olarak incelenmesinden sonra, genel dispersiyon bağıntısının sayısal olarak incelenmesine geçilebilir. Bunu gerçekleştirebilmek için N_1 , N_2 , γ_{ij} , m ve α büyüklüklerinin sayısal değerlerine gereksinim vardır. Deneysel çalışmalar damar malzemesinin kütle yoğunluğunun kanın kütle yoğunluğuna yakın olduğunu göstermektedir. Bu nedenle $m \cong h/b = H/b \lambda_\theta \lambda_z$ alınabilir. Burada H tübün şekil değiştirmeden önceki kalınlığını, b de şekil değiştirmeden önceki tüpün ortalama yarıçapını göstermektedir. Damar malzemesi olarak Demiray [28] tarafından ortaya atılan bir elastik model kullanılacaktır. Bu modele göre şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\Sigma = \frac{\mu}{2} \left\{ \exp \left[\gamma (I_1 - 3) \right] - 1 \right\}. \quad (4.1.44)$$

Burada μ malzemenin kayma modülünü, γ ise diğer bir maddesel sabiti karakterize etmektedir.

Sayısal işlemlerin yürütülebilmesi için γ sabitinin de bilinmesi gerekir. Demiray [29] daha önce yaptığı bir çalışmada Simon ve çalışma arkadaşlarının [30] bir tavşanın karın atardamarı üzerinde yaptığı deneysel çalışma sonuçlarını kullanarak ortaya atılan modelin maddesel sabitlerinden $\gamma = 1.948$ olarak bulmuştur. Bu çalışmada γ 'nın sayısal değeri de 1.948 olarak alınacaktır. Dispersiyon bağıntısı için gerekli N_1 ve N_2 fonksiyonlarına gelince T_1^0 ve T_2^0 nin tanımından

$$N_1 = F \left(\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} \right) , \quad N_2 = F \left(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} \right)$$

$$F = \exp \left[\gamma (\lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 + \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} - 3) \right] \quad (4.1.45)$$

verilebilir. Nihayet γ_{ij} katsayıları

$$\gamma_{11} = F \left\{ \left(\lambda_z^2 + \frac{3}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} \right) + 2\gamma \left(\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} \right)^2 \right\}$$

$$\gamma_{22} = F \left\{ \left(\lambda_\theta^2 + \frac{3}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} \right) + 2\gamma \left(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} \right)^2 \right\}$$

$$\gamma_{12} = F \left\{ \left(\frac{3}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} - \lambda_z^2 \right) + 2\gamma \left(\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} \right) \left(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} \right) \right\}$$

$$\gamma_{21} = F \left\{ \left(\frac{3}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} - \lambda_\theta^2 \right) + 2\gamma \left(\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} \right) \left(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} \right) \right\} \quad (4.1.46)$$

şeklinde verilebilir.

Genel olarak , verilen reel bir faz hızı için, viskoz etkiler nedeniyle , dalga sayısı kompleks olacaktır. O halde c faz hızı reel ve imajiner kısımlara ayrılacak olursa

$$c = X + i Y \quad (4.1.47)$$

şeklinde yazılabilir. v dalga yayılma hızı ve χ aktarma katsayısı

$$v = \frac{\Omega}{\text{Re}(\xi)} = \frac{X^2 + Y^2}{X}$$

$$\chi = \exp\left[-2\pi \frac{\text{Im}(\xi)}{\text{Re}(\xi)}\right] = \exp\left[-2\pi \frac{Y}{X}\right] \quad (4.1.48)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Yukarıda belirtilen sabitlerin sayısal değerleri ve N_α ve γ_{ij} katsayılarının açık ifadeleri (4.1.35) ve (4.1.36) da yerine konmuş ve v yayılma hızı ile χ aktarma katsayısı çeşitli germe α_0 Womersley parametresi için hesaplanmış ve sonuçlar grafikler üzerinde gösterilmiştir.

Birincil dalga hızının Womersley parametresi (α_0), iç basınç ve eksenel germe ile değişimi şekil 4.1'de verilmiştir. Şeklin incelenmesinden görüleceği gibi birincil dalga hızı Womersley parametresi iç basınç ve eksenel germe ile artmaktadır. Aynı problem Atabek ve Lew[8] tarafından tüp malzemesi olarak mühendislik malzemesi alınarak incelenmiştir. Adı geçen çalışmada elde edilen sonuçlar bizim biyolojik dokular için bulduğumuz sonuçlardan farklı olmuştur. Bunun sebebi mühendislik ve biyolojik dokuların iç yapı farklılığıdır. Örneğin, mühendislik malzemesinde dalga hızı iç basınç ile azalırken biyolojik malzemelerde hız artmaktadır. Bunun sebebi, teğet modülün biyolojik dokularda şekil değiştirme ile birlikte artarken , mühendislik malzemelerinde azalmasıdır.

İkincil dalga hızının aynı parametreler ile değişimi Şekil 4.2'de gösterilmiştir. Şeklin incelenmesinden görüleceği gibi ikincil dalga hızı Womersley parametresi ile önce hızlı bir artış göstermekte daha sonra ise hız bu parametrenin değişiminde pek etkilenmemektedir. Yine bu dalga hızı iç basınç ile artarken eksenel germe ile azalmaktadır. Bu sonuç ta Atabek and Lew [8] deki bulunan sonuçtan farklılık göstermektedir. Birincil dalga hızının aktarma katsayısının aynı parametreler ile değişimi şekil 4.3'de gösterilmiştir. Bu katsayı Womersley parametresi ile önce hızlı bir düşüş göstermekte ve takriben $\alpha_0 = 2$ değerinden sonra, yavaş ta olsa, yeniden artmaya başlamaktadır. Diğer bir söyleyişle, bu kritik frekansta yayılan dalga çok

hızlı bir şekilde uzaklıkla birlikte sönmektedir. Keza bu aktarma katsayısı iç basınç ile azalırken eksenel germe ile artmaktadır. Başka bir ifadeyle iç basınç bu dalga'nın sönmesini arttırırken eksenel germe ise azaltmaktadır. Nihayet ikincil dalga'nın aktarma katsayısının aynı tip parametreler ile değişimi şekil 4.4'de gösterilmiştir. Bu katsayı da Womersley parametresi ile önce hızlı bir düşüş göstermekte takriben $\alpha_0 = 1.5$ değerinden sonra yeniden hızlı bir şekilde artmaya başlamaktadır. İkincil dalga da bu kritik frekans civarında hızla sönmektedir. Birincil dalga taşıma katsayısının tersine bu katsayı iç basınç ile artmakta, eksenel germe ile azalmaktadır.

4.2.Yarıçapı Yavaş Genişleyen Elastik Tüp Problemi

Bu kısımda sonlu statik şekil değiştirmeden sonra ortaya çıkan tüp geometrisinin yarıçapı yavaş artan (eksilen) bir kesik koni olması halinde denge ve artımsal hareket denklemlerinin uygun sınır koşulları altında çözümü araştırılacaktır. Bu tanımlamaya uygun $\eta(y)$ yarıçap fonksiyonunu

$$\eta(y) = \alpha + \varepsilon y \quad (4.2.1)$$

şeklinde ifade etmek mümkündür. Burada α sonlu statik şekil değiştirmeden sonra oluşan uç yarıçapının şekil değiştirmeden önceki uç yarıçapına oranını, ε ise küçük kabul edilen genişleme açısının tanjantını veya sinüsünü ifade etmektedir. Burada ε küçük kabul edildiğinden bu parametre cinsinden sadece lineer terimler tutulacaktır. O halde aşağıdaki ilişkiler geçerlidir:

$$\operatorname{tg} \phi_0(y) \cong \sin \phi_0(y) \cong \varepsilon \quad , \quad \cos \phi_0(y) \cong 1 \quad , \quad \Lambda_0 \cong 1 \quad (4.2.2)$$

Bu durumda (3.29) ve (3.30) denklemleri aşağıdaki şekli alırlar:

$$m \frac{d}{dy} \left[N_1^0 (\alpha + \varepsilon y) \varepsilon \right] - m N_2^0 + (\alpha + \varepsilon y) S_r^0 = 0 \quad (4.2.3)$$

$$m \frac{d}{dy} \left[N_1^0 (\alpha + \varepsilon y) \varepsilon \right] + (\alpha + \varepsilon y) S_z^0 = 0 \quad (4.2.4)$$

Burada S_r^0 ve S_z^0 büyüklükleri aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır:

$$\begin{aligned} S_r^0 &\equiv \left[S_0(x) - 2v \frac{\partial V_r^0}{\partial x} + v \left(\frac{\partial V_r^0}{\partial y} + \frac{\partial V_z^0}{\partial x} \right) \varepsilon \right]_{x=\alpha+\varepsilon y} + G_r^0 \\ S_z^0 &\equiv \left[-\varepsilon S_0(x) - v \left(\frac{\partial V_r^0}{\partial y} + \frac{\partial V_z^0}{\partial x} \right) + 2v\varepsilon \frac{\partial V_z^0}{\partial y} \right]_{x=\alpha+\varepsilon y} + G_z^0. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Daimi akım durumuna karşı gelen akışkan denklemlerine gelince, (3.35) -(3.38) ifadelerinden

$$V_r^0 \frac{\partial V_r^0}{\partial x} + V_z^0 \frac{\partial V_r^0}{\partial y} = -\frac{\partial S_0}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 V_r^0}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_r^0}{\partial x} - \frac{V_r^0}{x^2} + \frac{\partial^2 V_r^0}{\partial y^2} \right) \quad (4.2.6)$$

$$V_r^0 \frac{\partial V_z^0}{\partial x} + V_z^0 \frac{\partial V_z^0}{\partial y} = -\frac{\partial S_0}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 V_z^0}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_z^0}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_z^0}{\partial y^2} \right) \quad (4.2.7)$$

$$\frac{\partial V_r^0}{\partial x} + \frac{V_r^0}{x} + \frac{\partial V_z^0}{\partial y} = 0 \quad (4.2.8)$$

ve sınır koşulları

$$V_r^0 \Big|_{x=\alpha+\varepsilon y} = 0, \quad V_z^0 \Big|_{x=\alpha+\varepsilon y} = 0 \quad (4.2.9)$$

olarak elde edilir.

Aynı şekilde (3.31)-(3.34) ve (3.39)-(3.42) denklemlerinden artımsal hareketi yöneten diferansiyel denklemler ve ilgili sınır koşulları ise aşağıdaki biçimde ifade edilebilirler:

$$\begin{aligned}
& m(\alpha + \varepsilon y)N_1^0 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + m \frac{d}{dy} [(\alpha + \varepsilon y)N_1^0] \frac{\partial U}{\partial y} + \left\{ m \frac{d}{dy} [\varepsilon(\beta_{12} + N_1^0)] - \frac{\beta_{22}}{\alpha + \varepsilon y} \right\} U \\
& + m\alpha\varepsilon(\beta_{11} - N_1^0) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \left\{ m \frac{d}{dy} [\alpha\varepsilon(\beta_{11} - N_1^0)] + (\alpha + \varepsilon y)S_r^0 \right. \\
& \left. - m(\beta_{21} + N_2^0) \right\} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{d}{dy} [(\alpha + \varepsilon y)S_r^0] W + F_r = m\left(\frac{h}{H}\right)(\alpha + \varepsilon y) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (4.2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m\alpha\varepsilon(\beta_{11} - N_1^0) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + m \left\{ \frac{d}{dy} [\alpha\varepsilon(\beta_{11} - N_1^0)] + (\beta_{12} + N_1^0) \right\} \frac{\partial U}{\partial y} \\
& + m \frac{d}{dy} [(\beta_{12} + N_1^0)] U + m(\alpha + \varepsilon y)\beta_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \\
& \left\{ m \frac{d}{dy} [(\alpha + \varepsilon y)\beta_{11}] + (\alpha + \varepsilon y)S_z^0 \right\} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{d}{dy} [(\alpha + \varepsilon y)S_z^0] W + F_z \\
& = m\left(\frac{h}{H}\right)(\alpha + \varepsilon y) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (4.2.11)
\end{aligned}$$

Burada F_r ve F_z artımsal reaksiyon kuvvetleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}
F_r &= (\alpha + \varepsilon y) \left[\bar{S}(x) - 2v \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial x} + v \left(\frac{\partial \bar{V}_z}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial y} \right) \varepsilon \right]_{x=\alpha+\varepsilon y} + U \left[(\alpha + \varepsilon y) \frac{\partial S_0}{\partial x} \right. \\
& + S_0 - 2v(\alpha + \varepsilon y) \frac{\partial^2 V_r^0}{\partial x^2} + v\varepsilon(\alpha + \varepsilon y) \left(\frac{\partial^2 V_z^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_r^0}{\partial x \partial y} \right) \\
& \left. - 2v \frac{\partial V_r^0}{\partial x} + v\varepsilon \left(\frac{\partial V_r^0}{\partial y} + \frac{\partial V_z^0}{\partial x} \right) \right]_{x=\alpha+\varepsilon y} + v(\alpha + \varepsilon y) \left(\frac{\partial V_z^0}{\partial x} + \frac{\partial V_r^0}{\partial y} \right) \bigg|_{x=\alpha+\varepsilon y} \frac{\partial U}{\partial y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +W \left[-\varepsilon S_0(x) - \varepsilon(\alpha + \varepsilon y) \frac{\partial S_0}{\partial x} + 2v\varepsilon(\alpha + \varepsilon y) \frac{\partial^2 V_r^0}{\partial x^2} - 2v\varepsilon \frac{\partial V_r^0}{\partial x} \right. \\
& \left. - v(\alpha + \varepsilon y) \varepsilon \left(\frac{\partial^2 V_r^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_z^0}{\partial x^2} \right) \right]_{x=\alpha+\varepsilon y} - v\varepsilon(\alpha + \varepsilon y) \left(\frac{\partial V_z^0}{\partial x} + \frac{\partial V_r^0}{\partial y} \right) \bigg|_{x=\alpha+\varepsilon y} \frac{\partial W}{\partial y} \\
& +(\alpha + \varepsilon y) \bar{G}_r + G_r^0 (U - \varepsilon W + \alpha \varepsilon U') \quad (4.2.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_z = & \left[-\varepsilon(\alpha + \varepsilon y) \bar{S}(x) - v(\alpha + \varepsilon y) \left(\frac{\partial \bar{V}_r}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial x} \right) + 2v\varepsilon(\alpha + \varepsilon y) \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial y} \right]_{x=\alpha+\varepsilon y} \\
& +U \left[-\varepsilon(\alpha + \varepsilon y) \frac{\partial S_0}{\partial x} - \varepsilon S_0(x) - v(\alpha + \varepsilon y) \left(\frac{\partial^2 V_z^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_r^0}{\partial x \partial y} \right) + 2v\varepsilon(\alpha + \varepsilon y) \frac{\partial^2 V_z^0}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. - v \left(\frac{\partial V_z^0}{\partial x} + \frac{\partial V_r^0}{\partial y} \right) + 2v(\varepsilon + \alpha y) \frac{\partial V_z^0}{\partial y} \right]_{x=\alpha+\varepsilon y} \\
& + \frac{\partial U}{\partial y} \left[-(\alpha + \varepsilon y) S_0(x) + 2v(\alpha + \varepsilon y) \frac{\partial V_z^0}{\partial y} \right]_{x=\alpha+\varepsilon y} \\
& +W \left[v\varepsilon \left(\frac{\partial V_z^0}{\partial x} + \frac{\partial V_r^0}{\partial y} \right) + v\varepsilon(\alpha + \varepsilon y) \left(\frac{\partial^2 V_r^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_z^0}{\partial x^2} \right) \right]_{x=\alpha+\varepsilon y} \\
& + \frac{\partial W}{\partial y} \left[\varepsilon(\alpha + \varepsilon y) S_0(x) - 2v\varepsilon(\alpha + \varepsilon y) \frac{\partial V_z^0}{\partial y} \right]_{x=\alpha+\varepsilon y} +(\alpha + \varepsilon y) \bar{G}_z \\
& +G_z^0 (U - \varepsilon W + \alpha \varepsilon U') \quad (4.2.13)
\end{aligned}$$

Artımsal akışkan denklemleri ise (3.39) - (3.42) den

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{V}_r}{\partial t} + V_r^0 \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial x} + \bar{V}_r \frac{\partial V_r^0}{\partial x} + V_z^0 \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial y} + \bar{V}_z \frac{\partial V_r^0}{\partial y} \\
= -\frac{\partial \bar{S}}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial x} - \frac{\bar{V}_r}{x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \quad (4.2.14)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{V}_z}{\partial t} + V_r^0 \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial x} + \bar{V}_r \frac{\partial V_r^0}{\partial x} + V_z^0 \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial y} + \bar{V}_z \frac{\partial V_z^0}{\partial y} \\
= -\frac{\partial \bar{S}}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \quad (4.2.15)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_r}{\partial x} + \frac{\bar{V}_r}{x} + \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial y} = 0 \quad (4.2.16)$$

ve sınır koşulları

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} &= \bar{V}_r \Big|_{x=\alpha+\varepsilon y} + U \frac{\partial V_r^0}{\partial x} \Big|_{x=\alpha+\varepsilon y} \\
\frac{\partial W}{\partial t} &= \bar{V}_z \Big|_{x=\alpha+\varepsilon y} + U \frac{\partial V_z^0}{\partial x} \Big|_{x=\alpha+\varepsilon y}
\end{aligned} \quad (4.2.17)$$

şeklinde verilebilir.

Problemin genel tanımında da ifade edildiği gibi sonlu statik şekil değiştirmeden sonra tüp geometrisi belirlendiği için böyle bir şekil değiştirmeye neden olacak dış S_r ve S_z akışkan reaksiyon kuvvetlerinin bulunması gerekecektir. Bu ise akışkana ait alan denklemlerinin silindirik koordinatlarda çözülmesi anlamına gelir. Alan büyüklüklerinin ε parametresi cinsinden kuvvet serisi şeklinde ortaya çıkacak olan alan denklemlerinin çözümü daimi akım halinde Bessel fonksiyonları

cinsinden ifade edilebilir. Ancak (4.2.15) ve (4.2.16) denklemlerinden de görüleceği gibi, artımsal alan denklemlerinin çözümü sırasında katsayıları Bessel fonksiyonu olan diferansiyel denklemler kümesinin çözülmesi gerekir ki bu da oldukça güçtür. Bu nedenle, literatürde birçok bilimadamı tarafından da kabul edildiği gibi (Hart ve Shi[31]) ön akışkan basıncının sabit olduğu durum incelenecektir. Ancak böyle bir şekil değiştirmeyi sabit iç basınç oluşturmayaacağından yataklama kuvvetlerinin bu işte bize yardımcı olacağı kabul edilecektir.

Üniform Önbasınç Halinde Çözüm

Bu kısımda, işlerimizi büyük ölçüde kolaylaştıracığı için akışkanın ön basıncının sabit ve buna bağlı olarak da daimi akım hızının sıfır olduğu kabul edilecektir. Buna göre tüpe etkiyen dış kuvvet bileşenleri

$$S_r^0 = S_0 + G_r^0, \quad S_z^0 = -\varepsilon S_0 + G_z^0 \quad (4.2.18)$$

olarak verilir.

Ön şekil değiştirme önceden belirlendiği için (2.40) bünye bağıntısı nedeniyle N_α^0 membran kuvvetleri

$$N_1^0 = \frac{1}{\lambda_2^0 \mu} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1^0}, \quad N_2^0 = \frac{1}{\lambda_1^0 \mu} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2^0} \quad (4.2.19)$$

bağıntıları yardımıyla biliniyor demektir. O halde (4.2.4) denge denklemleri (4.2.18) ve (4.2.19) denklemleri yardımıyla, böyle bir ön şekil değiştirmenin oluşabilmesi için G_r^0 ve G_z^0 yataklama kuvvetleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$G_r^0 = -S_0 + \frac{m}{\alpha + \varepsilon y} N_2^0 - \frac{m}{\alpha + \varepsilon y} \frac{d}{dy} \left[N_1^0 (\alpha + \varepsilon y) \varepsilon \right]$$

$$G_z^0 = \varepsilon S_0 - \frac{m}{\alpha + \varepsilon y} \frac{d}{dy} \left[N_1^0 (\alpha + \varepsilon y) \varepsilon \right] \quad (4.2.20)$$

ε 'nin çok küçük seçilmesi nedeniyle biz bu çalışmada yalnız ε cinsinden lineer terimler ile yetineceğiz. Bu nedenle

$$N_1^0 = N_{10}^0 + \varepsilon y N_{11}^0, \quad N_2^0 = N_{20}^0 + \varepsilon y N_{21}^0 \quad (4.2.21)$$

yazılırsa (4.2.20) denklemini aşağıdaki şekli alır:

$$G_r^0 = -S_0 + \frac{m}{\alpha} N_{20}^0 + \varepsilon y \left(\frac{m}{\alpha} N_{21}^0 - \frac{m}{\alpha^2} N_{20}^0 \right)$$

$$G_z^0 = \varepsilon \left(S_0 - \frac{m}{\alpha} N_{10}^0 - m N_{11}^0 \right) \quad (4.2.22)$$

Burada $N_{\alpha\beta}^0$ ($\alpha = 1,2$, $\beta = 0,1$) büyüklükleri şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu cinsinden aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

$$N_{10}^0 = \frac{1}{\lambda_\theta \mu} \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \lambda_z}, \quad N_{20}^0 = \frac{1}{\lambda_z \mu} \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \lambda_\theta}$$

$$N_{11}^0 = \frac{1}{\mu \alpha} \frac{\partial^2 \Sigma_0}{\partial \lambda_\theta \partial \lambda_z} - \frac{N_{10}^0}{\alpha}, \quad N_{21}^0 = \frac{\lambda_\theta}{\mu \alpha \lambda_z} \frac{\partial^2 \Sigma_0}{\partial \lambda_\theta^2} \quad (4.2.23)$$

Bu büyüklükler (4.2.19)da verilen membran kuvvetlerinin ε cinsinden seriye açılmasından elde edilmiştir.

Artımsal Hareket Denklemleri

Ön statik şekil değiştirmeyi oluşturan koşulları inceledikten sonra, şimdi de artımsal hareket denklemlerini incelemeye çalışalım. Genel olarak artımsal hareket

denklemlerinde alan büyüklükleri birbiriyle kuple ve değişken katsayılı diferansiyel denklemler olduğundan, lineer bile olsalar bunların analitik olarak incelenmeleri oldukça güçtür. Bu nedenle, ilk yaklaşım olarak bazı basitleştirici kabullerin yapılması gerekmektedir. İncelenen problemin biyolojik uygulamaları gözönünde bulundurulduğunda aşağıdaki kabuller büyük ölçüde geçerlidir:

1. Tüp yarıçapı küçük kabul edildiğinden, akışkan basıncının kesit içerisinde üniform olduğu kabul edilebilir.
2. Fizyolojik uygulamalarda dalga boyu damar yarıçapına göre çok büyük olduğundan akışkan hızının eksenel doğrultudaki ikinci ve daha yüksek mertebeden gradyanları ihmal edilebilir.
3. Fizyolojik uygulamalarda, damar eksenel doğrultuda bir ön germeye maruz kaldıktan sonra, kan akımı sırasında, damarın yataklanma koşulları nedeniyle eksenel doğrultudaki yer değiştirmesi ihmal edilebilir. Bu kısıtlama dolayısıyla, statik haldekine ek olarak eksenel doğrultudaki $\bar{G}_z$ yatak kuvvetinin bu koşulu sağlayacak biçimde elde edilmesi gerekir.

Buna göre (4.2.10) , (4.2.11), (4.2.15) ve (4.2.16) denklemleri ve ilgili sınır koşulları aşağıdaki şekli alırlar:

$$m(\alpha + \varepsilon y)N_1^0 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + m \frac{d}{dy} \left[(\alpha + \varepsilon y)N_1^0 \right] \frac{\partial U}{\partial y} + m \left\{ \frac{d}{dy} \left[\varepsilon (\beta_{12} + N_1^0) \right] - \frac{\beta_{22}}{\alpha + \varepsilon y} \right\} U + F_r = m \left(\frac{h}{H} \right) (\alpha + \varepsilon y) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (4.2.24)$$

$$m\alpha\varepsilon(\beta_{11} - N_1^0) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + m \left\{ \frac{d}{dy} \left[\alpha\varepsilon(\beta_{11} - N_1^0) \right] + (\beta_{12} + N_1^0) \right\} \frac{\partial U}{\partial y} + m \frac{d}{dy} (\beta_{12} + N_1^0) U + F_z = 0. \quad (4.2.25)$$

Burada F_r ve F_z kuvvetleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}
 F_r &= (\alpha + \varepsilon y) \left[\bar{S}(x) - 2\nu \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial \bar{V}_z}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial y} \right) \varepsilon \right]_{x=\alpha+\varepsilon y} + US_0 + (\alpha + \varepsilon y) \bar{G}_r \\
 &\quad + G_r^0 (U - \varepsilon W + \alpha \varepsilon U') \\
 F_z &= \left[-\varepsilon(\alpha + \varepsilon y) \bar{S}(x) - \nu(\alpha + \varepsilon y) \left(\frac{\partial \bar{V}_r}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial x} \right) + 2\nu(\alpha + \varepsilon y) \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial y} \right]_{x=\alpha+\varepsilon y} \\
 &\quad - \varepsilon S_0 U - (\alpha + \varepsilon y) S_0 \frac{\partial U}{\partial y} + (\alpha + \varepsilon y) \bar{G}_z + G_z^0 (U - \varepsilon W + \alpha \varepsilon U')
 \end{aligned} \tag{4.2.26}$$

Artımsal akışkan denklemleri ise (4.2.14)-(4.2.16) dan

$$\frac{\partial \bar{V}_r}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial x} - \frac{\bar{V}_r}{x^2} \right) \tag{4.2.27}$$

$$\frac{\partial \bar{V}_z}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{S}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial x} \right) \tag{4.2.28}$$

$$\frac{\partial \bar{V}_r}{\partial x} + \frac{\bar{V}_r}{x} + \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial y} = 0 \tag{4.2.29}$$

şeklinde verilebilir. Sınır koşulları ise aşağıdaki biçimdedir:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \bar{V}_r \Big|_{x=\alpha+\varepsilon y}, \quad \bar{V}_z \Big|_{x=\alpha+\varepsilon y} = 0. \tag{4.2.30}$$

Daha ileride de görüleceği gibi, yapılan yaklaşıklıklar nedeniyle (4.2.29) denklemini noktasal olarak (her x değeri için) sağlamak mümkün değildir. Bu

nedenle, sözü edilen süreklilik denklemini yaklaşık olarak gerçekleştirme yoluna gidilecektir. Bu amaçla, (4.2.29) denklemi x ile çarpılır ve $(0, \alpha + \varepsilon y)$ arasında integre edilirse

$$(\alpha + \varepsilon y) \bar{V}_r \Big|_{x=\alpha+\varepsilon y} + L = 0 \quad ; \quad L = \int_0^{\alpha+\varepsilon y} x \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial y} dx \quad (4.2.31)$$

elde edilir. Bu denklem daha sonra yapılacak çözümlerde kullanılacaktır.

Gerek (4.2.24)-(4.2.29) denklemleri ve gerekse (4.2.30) sınır koşulları gözönünde bulundurulduğunda çözümün ε parametresine bağlı olacağını kestirmek mümkündür. Bu nedenle alan büyüklüklerinin bu parametre cinsinden bir pertürbasyon serisine açılabilceği kabul edilecektir. Ayrıca β_{ij} katsayılarının da ε 'a bağlı oldukları düşünülürse aşağıdaki açılımları yapmak mümkündür:

$$\begin{aligned} U &= U_0(y, t) + \varepsilon U_1(y, t) + \dots \\ \bar{V}_r &= \bar{V}_r^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon \bar{V}_r^{(1)}(x, y, t) + \dots \\ \bar{V}_z &= \bar{V}_z^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon \bar{V}_z^{(1)}(x, y, t) + \dots \\ S &= S^{(0)}(y, t) + \varepsilon S^{(1)}(y, t) + \dots \\ \beta_{ij} &= \beta_{ij}^{(0)} + \varepsilon y \beta_{ij}^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

Burada β_{ij} 'nin ε 'na bağıllık mertebesi ile y 'ye bağıllık mertebesinin aynı olduğuna dikkat edilmiştir. (4.2.32) açılımları (4.2.24)-(4.2.29) denklemleri ve (4.2.30)-(4.2.31) koşullarında yerine konur ve ε 'nın çeşitli kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenecek olursa aşağıdaki denklem takımı elde edilir.

Sıfırıncı Mertebeden Denklemler

$$m\alpha T_0 \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} - \frac{m\beta_{22}^{(0)}}{\alpha} U_0 + F_r^{(0)} = \frac{m}{\lambda_\theta \lambda_z} \alpha \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} \quad (4.2.33)$$

$$m(\beta_{21}^{(0)} + T_0) \frac{\partial U_0}{\partial y} + F_z^{(0)} = 0 \quad (4.2.34)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_r^{(0)}}{\partial t} = v \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_r^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{V}_r^{(0)}}{\partial x} - \frac{\bar{V}_r^{(0)}}{x^2} \right) \quad (4.2.35)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_z^{(0)}}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{S}^{(0)}}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_z^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{V}_z^{(0)}}{\partial x} \right) \quad (4.2.36)$$

Süreklilik ve sınır koşulları ise

$$\bar{V}_r^{(0)} \Big|_{x=\alpha} + L^{(0)} = 0 \quad (4.2.37)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = \bar{V}_r^{(0)} \Big|_{x=\alpha}, \quad \bar{V}_z^{(0)} \Big|_{x=\alpha} = 0 \quad (4.2.38)$$

şeklinde verilebilir. Burada $F_r^{(0)}$ ve $F_z^{(0)}$ akışkan reaksiyonu ve bağ kuvvetleri aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} F_r^{(0)} &= \alpha S^{(0)}(\alpha) - 2v\alpha \frac{\partial \bar{V}_r^{(0)}}{\partial x} \Big|_{x=\alpha} + \alpha \bar{G}_r^{(0)} + \frac{m}{\alpha} N_{20}^0 U_0 \\ F_z^{(0)} &= -v\alpha \left(\frac{\partial \bar{V}_r^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}_z^{(0)}}{\partial x} \right) \Big|_{x=\alpha} - \alpha S_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} + \alpha \bar{G}_z^{(0)} \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

Birinci Mertebeden Denklemler

$$\begin{aligned} \alpha S_0 y \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + m \alpha T_0 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \alpha S_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} - \frac{m \beta_{22}^{(0)}}{\alpha} U_1 + y m \left(\frac{\beta_{22}^{(0)}}{\alpha^2} - \frac{\beta_{22}^{(1)}}{\alpha} \right) U_0 + F_r^{(1)} \\ = \frac{m}{\lambda_\theta \lambda_z} \left(y \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

$$\begin{aligned} m \alpha \left(\beta_{11}^{(0)} - T_0 \right) \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + m \left(\beta_{12}^{(0)} + N_{10}^0 \right) \frac{\partial U_1}{\partial y} + y m \left(\beta_{12}^{(1)} + N_{11}^0 \right) \frac{\partial U_0}{\partial y} \\ + m \left(\beta_{12}^{(0)} + N_{11}^0 \right) U_0 + F_z^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_r^{(1)}}{\partial t} = v \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_r^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{V}_r^{(1)}}{\partial x} - \frac{\bar{V}_r^{(1)}}{x^2} \right) \quad (4.2.42)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_z^{(1)}}{\partial t} = - \frac{\partial S^{(1)}}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_z^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{V}_z^{(1)}}{\partial x} \right) \quad (4.2.43)$$

Süreklilik ve sınır koşullarına gelince

$$\left[y \frac{\partial \bar{V}_r^{(0)}}{\partial x} + \bar{V}_r^{(1)} \right]_{x=\alpha} + L^{(1)} = 0 \quad (4.2.44)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \left[\bar{V}_r^{(1)} + y \frac{\partial \bar{V}_r^{(0)}}{\partial x} \right]_{x=\alpha}, \quad \left[\bar{V}_z^{(1)} + y \frac{\partial \bar{V}_z^{(0)}}{\partial x} \right]_{x=\alpha} = 0 \quad (4.2.45)$$

biçiminde verilebilir.

Burada $F_r^{(1)}$ ve $F_z^{(1)}$ akışkan reaksiyon kuvvetleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$F_r^{(1)} = \alpha S^{(1)}(\alpha) + y \left[\alpha \frac{\partial S^{(0)}}{\partial x} + S^{(0)} \right] \Big|_{x=\alpha} - 2\nu\alpha \frac{\partial \bar{V}_r^{(0)}}{\partial x} \Big|_{x=\alpha} + \frac{mN_{20}^0}{\alpha} U_1 \\ + \alpha \bar{G}_r^{(1)} + y \bar{G}_r^{(0)} y \left(\frac{m}{\alpha} N_{21}^0 - \frac{m}{\alpha^2} N_{20}^0 \right) U_0 + \alpha \left(-S_0 + \frac{m}{\alpha} N_{20}^0 \right) \frac{\partial U_0}{\partial y} . \quad (4.2.46)$$

$$F_z^{(1)} = -\alpha S^{(0)}(\alpha) - \nu\alpha \left(\frac{\partial \bar{V}_r^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}_z^{(0)}}{\partial x} \right) \Big|_{x=\alpha} - S_0 \left(y \frac{\partial U_0}{\partial y} + \alpha \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) \\ + \alpha \bar{G}_z^{(1)} + y \bar{G}_z^{(0)} - \left(\frac{m}{\alpha} N_{10}^0 + mN_{11}^0 \right) U_0 . \quad (4.2.47)$$

Burada dikkat edilmesi gereken nokta, gerek (4.2.34) ve gerekse (4.2.41) denkleminin $\bar{G}_z^{(0)}$ ve $\bar{G}_z^{(1)}$ bağ kuvvetinin hesaplanmasında kullanılabileceğidir. Ancak problemin genelliğini bozmaksızın bu çalışmada $\bar{G}_r = 0$ alınabilir.

Alan Denklemlerinin Çözümü

Bu kısımda yukarıda verilen sıfırıncı ve birinci mertebeden denklemlerin çözümleri verilmeye çalışılacaktır. Bunun için, kalbin periyodik hareketine uygun olarak alan büyüklüklerinin zaman cinsinden periyodik olduğu varsayılacaktır.

Sıfırıncı Mertebeden Denklemlerin Çözümü

Bu denklem takımına çözüm verebilmek için alan denklemleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
U_0 &= U_0(y) \exp(i\omega t) \\
\bar{V}_r^{(0)} &= V_r^{(0)}(x, y) \exp(i\omega t) \\
\bar{V}_z^{(0)} &= V_z^{(0)}(x, y) \exp(i\omega t) \\
S^{(0)} &= S^{(0)} \exp(i\omega t)
\end{aligned} \tag{4.2.48}$$

Burada ω açısal frekansı, $U_0(y)$, $V_r^{(0)}$, $V_z^{(0)}$, $S^{(0)}(y)$ henüz bilinmeyen fonksiyonlar olup ilgili alan denklemleri ve sınır koşullarının çözümünden elde edilecektir. (4.2.48) ifadesi (4.2.35) ve (4.2.36) da yerine konur ve üssel kısım atılacak olursa

$$\frac{\partial^2 V_r^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_r^{(0)}}{\partial x} - \frac{V_r^{(0)}}{x^2} - \frac{i\omega}{v} V_r^{(0)} = 0 \tag{4.2.49}$$

$$\frac{\partial^2 V_z^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_z^{(0)}}{\partial x} - \frac{i\omega}{v} V_z^{(0)} = \frac{1}{v} \frac{dS_0}{dy} \tag{4.2.50}$$

elde edilir. y bir parametre olmak üzere (4.2.49) ve (4.2.50) denklemlerinin çözümü

$$\begin{aligned}
V_r^{(0)} &= A(y) J_1(\beta x) \quad ; \quad \beta \equiv i^{3/2} \left(\frac{\omega}{v} \right)^{1/2} = i^{3/2} \alpha_0 \\
V_z^{(0)} &= B(y) J_0(\beta x) + \frac{i}{\omega} \frac{dS_0}{dy}
\end{aligned} \tag{4.2.51}$$

şeklinde verilebilir. Burada $J_n(x)$ n inci mertebeden ve birinci tipten Bessel fonksiyonu, $A(y)$ ve $B(y)$ ise iki bilinmeyen fonksiyon olup sınır ve süreklilik koşulundan elde edilmesi gerekir.

Buna göre (4.2.38) sınır koşulu kullanılacak olursa $V_r^{(0)}$ ve $V_z^{(0)}$ fonksiyonları aşağıdaki şekli alırlar:

$$V_r^{(0)} = i\omega U_0(y) \frac{J_1(\beta x)}{J_1(\beta\alpha)}$$

$$V_z^{(0)} = \frac{i}{\omega} \frac{dS_0}{dy} \left[1 - \frac{J_0(\beta x)}{J_0(\beta\alpha)} \right]. \quad (4.2.52)$$

Rahatlıkla görüleceği gibi (4.2.52) çözümü (4.2.29) denkleminde yerine konduğunda özdeş olarak sağlanmaz. Bu nedenle (4.2.37) yaklaşık denkleminin sağlanması gerekir. Bunun için L büyüklüğünün tanımı hatırlanırsa

$$L = \int_0^{\alpha+\varepsilon y} x \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial y} dx = \exp(i\omega t) \int_0^{\alpha+\varepsilon y} x \frac{i}{\omega} \frac{d^2 S^{(0)}}{dy^2} \left[1 - \frac{J_0(\beta x)}{J_0(\beta\alpha)} \right] dx$$

$$+ \varepsilon \int_0^{\alpha+\varepsilon y} x \frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial y} dx \quad (4.2.53)$$

yazılabilir. Bessel fonksiyonları arasında aşağıdaki türev bağıntısının varlığı dikkate alınır

$$\frac{d}{dx} [x J_1(\beta x)] = \beta x J_0(\beta x) \quad (4.2.54)$$

(4.2.53) ifadesi aşağıdaki şekli alır:

$$L = \frac{i}{\omega} \frac{d^2 S^{(0)}}{dy^2} \left\{ \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon y)^2 - \frac{(\alpha + \varepsilon y)}{\beta J_0(\beta\alpha)} J_1[\beta(\alpha + \varepsilon y)] \right\} \exp(i\omega t)$$

$$+ \varepsilon \int_0^{\alpha+\varepsilon y} x \frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial y} dx \quad (4.2.55)$$

Bu ifadenin ε cinsinden seriye açılmasından

$$L^{(0)} = \frac{i\alpha^2}{2\omega} \frac{d^2 S^{(0)}}{dy^2} \left[1 - \frac{2J_1(\beta\alpha)}{\beta\alpha J_0(\beta\alpha)} \right] \exp(i\omega t) \quad (4.2.56)$$

elde edilir. O halde (4.2.56) ifadesi (4.2.37) de yerine konursa

$$i\omega U_0(y) + \frac{i\alpha^2}{2\omega} (1 - F_{10}) \frac{d^2 S^{(0)}}{dy^2} = 0$$

veya

$$U_0(y) = \frac{\alpha^2}{2\omega^2} (F_{10} - 1) \frac{d^2 S^{(0)}}{dy^2} \quad (4.2.57)$$

bulunur. Burada F_{10} büyüklüğü aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

$$F_{10} = \frac{2J_1(\beta\alpha)}{\beta\alpha J_0(\beta\alpha)} \quad (4.2.58)$$

Nihayet (4.2.33) denkleminin çözümünü elde edebilmek için $F_r^{(0)}$ ifadesinin bilinmesi gerektiğinden (4.2.39)₁ denklemi kullanılacak olursa

$$F_r^{(0)} = \left\{ \alpha S^{(0)}(\alpha) + \left[-\frac{2iv\omega}{\alpha} \left(\frac{2}{F_{10}} - 1 \right) + \frac{m}{\alpha} \right] \frac{\alpha^2}{2\omega^2} (F_{10} - 1) \right\} \frac{d^2 S^{(0)}}{dy^2} \exp(i\omega t) \quad (4.2.59)$$

elde edilir. Bu ifade (4.2.33) de yerine konursa $S^{(0)}(y)$ 'yi yöneten diferansiyel denklem aşağıdaki biçimde verilebilir:

$$\frac{d^4 S^{(0)}}{dy^4} + \left[\frac{m\alpha\omega^2}{\lambda_\theta \lambda_z} - \frac{m\beta_{22}^{(0)}}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} N_{20}^0 - \frac{2iv\omega}{\alpha} \left(\frac{2}{F_{10}} - 1 \right) \right] \frac{d^2 S^{(0)}}{dy^2}$$

$$+ \frac{2\omega^2}{m\alpha^2 T_0 (F_{10} - 1)} S^{(0)} = 0. \quad (4.2.60)$$

Sabit katsayılı bu diferansiyel denklemi daha da basitleştirmek mümkündür. Herşeyden önce, damarlardaki dalga hareketinde dalga boyu damar yarıçapına göre çok büyük olduğundan (4.2.60) daki y cinsinden dördüncü mertebe türevler ihmal edilebilir. Diğer yandan tüpün ince olması nedeniyle atalet kuvvetini temsil eden $m\alpha\omega^2 / \lambda_\theta \lambda_z$ terimi membran kuvvetlerine göre küçüktür. Son olarak, damarlarda kan akımı sırasında alyuvarlar damar merkezine doğru kaçarlar ve çeperde hücre konsantrasyonu (hematokrit oranı) düşüktür, dolayısıyla viskozite düşük olup, viskoz kuvvetler membran kuvvetleri yanında ihmal edilebilir. Bütün bu basitleştirmelerden sonra (4.2.60) denklemi aşağıdaki şekli alır:

$$\left(N_{20}^0 - \beta_{22}^{(0)} \right) \frac{d^2 S^{(0)}}{dy^2} + \frac{2\omega^2}{m(F_{10} - 1)} S^{(0)} = 0 \quad (4.2.61)$$

Bu denklemin çözümü

$$S^{(0)} = C_1 e^{-iky} + C_2 e^{iky} \quad (4.2.62)$$

biçiminde ifade edilebilir. C_1 ve C_2 birer integral sabiti, k ise dalga sayısını karakterize etmekte olup

$$k^2 = \frac{2\omega^2}{m(1 - F_{10})(\beta_{22}^{(0)} - N_{20}^0)} \quad (4.2.63)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Nihayet (4.2.34) ve (4.2.39)₂ denklemlerinden $G_z^{(0)}$ yataklama kuvveti, yukarıda sözü edilen yaklaşıklık çerçevesi içerisinde, aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\bar{G}_z^{(0)} = \alpha F_{10} \frac{dS^{(0)}}{dy} \quad (4.2.64)$$

Birinci Mertebeden Denklemlerin Çözümü

Birinci mertebeden denklemlerin çözümünde benzer bir yol izlenecektir. Çözüm fonksiyonları yine zaman cinsinden üssel olarak kabul edilirse

$$\begin{aligned} \bar{V}_r^{(1)} &= V_r^{(1)}(x, y) \exp(i\omega t) \\ \bar{V}_z^{(1)} &= V_z^{(1)}(x, y) \exp(i\omega t) \\ U_1 &= U_1(y) \exp(i\omega t) \\ \bar{S}^{(1)} &= S^{(1)} \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad (4.2.65)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifadeler (4.2.43) ve (4.2.44) denklemlerinde yerine konur ve sonuç diferansiyel denklemler çözülecek olursa

$$\begin{aligned} V_r^{(1)} &= D(y)J_1(\beta x) \\ V_z^{(1)} &= E(y)J_0(\beta x) + \frac{i}{\omega} \frac{dS^{(1)}}{dy} \end{aligned} \quad (4.2.66)$$

biçiminde ifade edilebilir. Bilinmeyen $D(y)$ ve $E(y)$ fonksiyonlarını bulabilmek için (4.2.45) sınır koşulları kullanılacaktır. Gerekli işlemler yapılacak olursa aşağıdaki çözüm elde edilir:

$$V_r^{(1)} = \frac{i\omega J_1(\beta x)}{J_1(\beta \alpha)} \left[U_1 + \frac{y}{\alpha} \left(1 - \frac{2}{F_{10}} \right) U_0 \right]$$

$$V_z^{(1)} = \frac{i}{\omega} \left\{ \left[1 - \frac{J_0(\beta x)}{J_0(\beta \alpha)} \right] \frac{dS^{(1)}}{dy} - \frac{\beta^2 \alpha F_{10}}{2} \frac{J_0(\beta x)}{J_0(\beta \alpha)} y \frac{dS^{(0)}}{dy} \right\} \quad (4.2.67)$$

Bu büyüklüklerin ayrıca (4.2.44) de verilen süreklilik koşulunu da sağlaması, bunun için de $L^{(1)}$ büyüklüğünün bilinmesi gerekir. L' nin (4.2.53) ile verilen tanımı hatırlanır, $V_z^{(1)}$ ifadesi bu tanımda yerine konup gerekli integraller teşkil edilirse

$$L^{(1)} = \frac{i\alpha^2}{2\omega} (1 - F_{10}) \frac{d^2 S^{(1)}}{dy^2} - i \frac{\beta^2 \alpha^3}{4\omega} F_{10}^2 \frac{d}{dy} \left(y \frac{dS^{(0)}}{dy} \right) \quad (4.2.68)$$

bulunur. Bu ifade (4.2.44) denkleminde yerine konur ise $U_1(y)$ fonksiyonu aşağıdaki biçimde verilebilir:

$$U_1(y) = \frac{\alpha^2}{2\omega^2} (F_{10} - 1) \frac{d^2 S^{(1)}}{dy^2} - \frac{\beta^2 \alpha^3 F_{10}^2}{4\omega^2} \frac{d}{dy} \left[y \frac{dS^{(0)}}{dy} \right] \quad (4.2.69)$$

Nihayet (4.2.40) ve (4.2.46) ifadeleri birleştirilir, viskoz kuvvetler ihmal edilir, $S^{(0)}$ ve $S^{(1)}$ 'in y cinsinden ikinci mertebeye kadar olan terimleri tutulur ise aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\alpha S^{(1)} + \frac{m}{\alpha} (N_{20}^0 - \beta_{22}^{(0)}) U_1 + y S^{(0)} + \frac{ym}{\alpha^2} [\beta_{22}^{(0)} - \alpha \beta_{22}^{(1)} + \alpha N_{21}^0 - N_{20}^0] U_0 = 0. \quad (4.2.70)$$

Yine burada da atalet etkileri ihmal edilmiştir. (4.2.57) ve (4.2.69) denklemlerinden U_0 ve U_1 ifadeleri (4.2.70) de yerine konacak olursa $S^{(1)}$ cinsinden aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir:

$$\frac{d^2 S^{(1)}}{dy^2} + k^2 S^{(1)} - \frac{\beta^2 \alpha F_{10}^2}{2(F_{10} - 1)} \frac{dS^{(0)}}{dy} + k^2 \left[\frac{2\beta_{22}^{(0)} - \alpha\beta_{22}^{(1)} + \alpha N_{21}^0 - 2N_{20}^0}{\alpha(\beta_{22}^{(0)} - N_{20}^0)} + \frac{\beta^2 \alpha F_{10}^2}{2(F_{10} - 1)} \right] y S^{(0)} = 0. \quad (4.2.71)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki biçimde verilebilir:

$$S^{(1)} = D_1 e^{-iky} + D_2 e^{iky} + (A_1 + A_2) y^2 \frac{dS^{(0)}}{dy} + (A_1 - A_2) y S^{(0)}. \quad (4.2.72)$$

Burada D_1, D_2 iki yeni integral sabiti olup A_1 ve A_2 katsayıları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

$$A_1 = \frac{\beta^2 \alpha F_{10}^2}{8(F_{10} - 1)}, \quad A_2 = \frac{2\beta_{22}^{(0)} - \alpha\beta_{22}^{(1)} + \alpha N_{21}^0 - 2N_{20}^0}{4\alpha(\beta_{22}^{(0)} - N_{20}^0)} \quad (4.2.73)$$

Bu sonuçları (4.2.41) ve (4.2.47) denklemlerinde kullanarak böyle bir dinamik duruma izin verecek yataklama kuvveti aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\bar{G}_z^{(1)} = -y F_{10} \frac{dS^{(0)}}{dy} + \frac{(\beta_{22}^{(0)} - N_{20}^0 + N_{10}^0 - 2\alpha N_{11}^0 - \alpha\beta_{12}^{(1)})}{(\beta_{22}^{(0)} - N_{20}^0)} S^{(0)} \quad (4.2.74)$$

Bu çözümler elde olduğuna göre tüpün herhangi bir kesitinden geçen debiyi hesaplamak mümkündür. Tanım gereği

$$Q = 2\pi \int_0^{\alpha+ey} x V_z dz = 2\pi \int_0^{\alpha+ey} x (V_z^{(0)} + \varepsilon V_z^{(1)}) dx \quad (4.2.75)$$

şeklinde yazılabilir. (4.2.52) ve (4.2.67) denklemlerinden $V_z^{(0)}$ ve $V_z^{(1)}$ ifadeleri (4.2.74) de yerine konur ve gerekli integraller teşkil edilirse debi aşağıdaki biçimde verilebilir:

$$Q^{(0)} = \frac{i\pi\alpha^2}{\omega} (1 - F_{10}) \frac{dS^{(0)}}{dy}$$

$$Q^{(1)} = \frac{i\pi\alpha^2}{\omega} \left[(1 - F_{10}) \frac{dS^{(1)}}{dy} - \frac{y\beta^2\alpha F_{10}^2}{2} \frac{dS^{(0)}}{dy} \right] \quad (4.2.76)$$

Burada $Q = Q^{(0)} + \varepsilon Q^{(1)} + \dots$ açılımı kullanılmıştır.

Uç Koşulları

Şimdiye kadar yapılan çalışmada tüpün aksenal uzunluğu ve dolayısıyla uç koşulları hakkında herhangi birşey söylenmedi. Biyolojik uygulamalarda akımı sağlayan basınç kalp tarafından uygulanır. Atardamarların kalbe bittiği yer $y=0$ noktası olarak seçilir ve kalbin uyguladığı basıncın zaman cinsinden periyodik olduğu düşünülürse $y=0$ uç noktasındaki koşul

$$S(0, t) = T \exp(i\omega t) \quad (4.2.77)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada T kalbin uyguladığı sistolik ve diastolik basınç arasındaki farkın genliğini karakterize etmektedir.

Doğal olarak bu T sabitinin ε parametresinden bağımsız olduğu söylenebilir. Dolayısıyla $\bar{S}(y)$ nin ε cinsinden seri açılımı hatırlanırsa

$$\bar{S}(y) = S^{(0)}(y) + \varepsilon S^{(1)}(y) + \dots, \quad (4.2.78)$$

$y=0$ uç noktasındaki koşul aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$S^{(0)}(0) = T \quad \text{ve} \quad S^{(1)}(0) = 0 \quad (4.2.79)$$

Fiziksel olarak başka bir koşul da kalbin birim zamanda pompaladığı kan (akışkan) miktarıdır. Dolayısıyla bu büyüklüğü de Q_0 ile gösterecek olursak uç koşulları

$$Q^{(0)}(0) = Q_0 \quad \text{ve} \quad Q^{(1)}(0) = 0 \quad (4.2.80)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu koşullar (4.2.62) , (4.2.72) ve (4.2.76) denklemlerinde kullanılırsa

$$C_1 + C_2 = T \quad , \quad \frac{k\pi\alpha^2}{\omega} (1 - F_{10})(C_1 - C_2) = Q_0 \quad (4.2.81)$$

ve

$$D_1 + D_2 = 0 \quad , \quad D_1 - D_2 = \frac{i}{k} (A_1 - A_2)(C_1 + C_2) \quad (4.2.81)$$

Bu denklemlerin çözümünden

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[T + \frac{Q_0 \omega}{k\pi\alpha^2 (1 - F_{10})} \right] \quad , \quad C_2 = \frac{1}{2} \left[T - \frac{Q_0 \omega}{k\pi\alpha^2 (1 - F_{10})} \right]$$

$$D_1 = \frac{-i(A_1 - A_2)T}{2k(1 - F_{10})} \quad , \quad D_2 = \frac{i(A_1 - A_2)T}{2k(1 - F_{10})} \quad (4.2.83)$$

elde edilir. Bu ifadeler genel çözümde yerine konulduğunda aranan sonuç uç basıncına ve debiye bağlı olarak ifade edilebilir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER:

Elde ettiğimiz sonuçlar kullanılarak oluşturulan , daralan (genişleyen) tüp için basıncın eksene göre değişimi grafikleri incelendiğinde, daha önce yapılan bazı çalışmalar ile uyumlu olduğu görülmektedir.

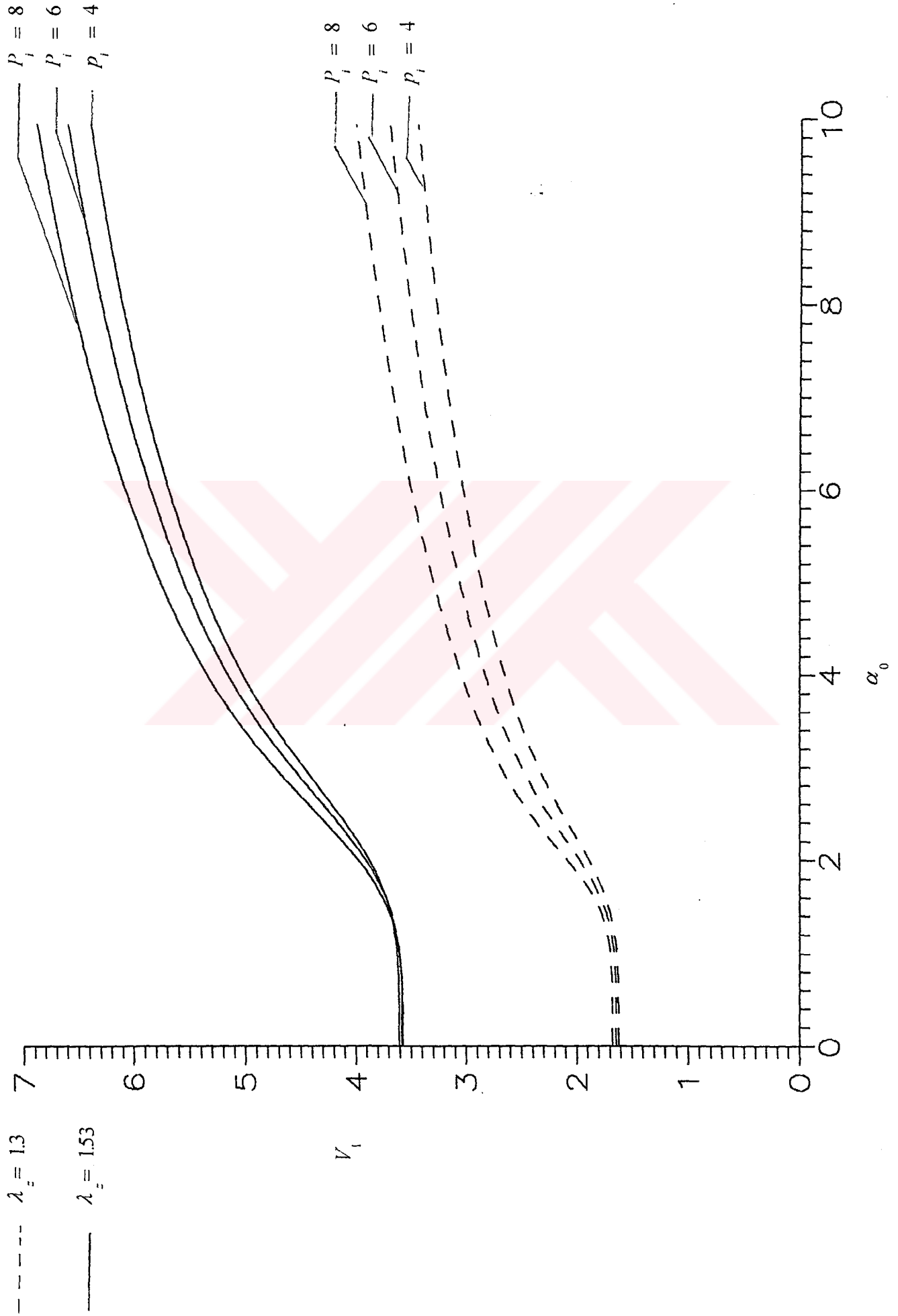
Şekil 4.5’ de içinde viskoz akışkan bulunan yarıçapı sabit tüp için basıncın eksenle değişim grafiği gösterilmiştir. Pedley [32]’ e göre de, içinde viskoz akışkan bulunan yarıçapı sabit tüp için, basıncın yayılma doğrultusu boyunca azalacağı kabul edilmektedir. Bu grafikte de basıncın belirli bir T değerinden sonra eksenle birlikte azalmaya başladığı görülmektedir.

Yarıçapı değişen tüplerde ise, basıncın eksene göre değişimi, iki etkinin hangisinin baskın olduğuna göre farklılık göstermektedir. Bu iki etki viskozitenin ve yarıçaptaki değişimin etkisidir. Yarıçapı daralan bir tüpte eğer daralmanın etkisi baskın ise, basıncın değeri eksenle birlikte artmakta , viskozitenin etkisi baskın ise bu değer eksenle birlikte azalmaktadır.

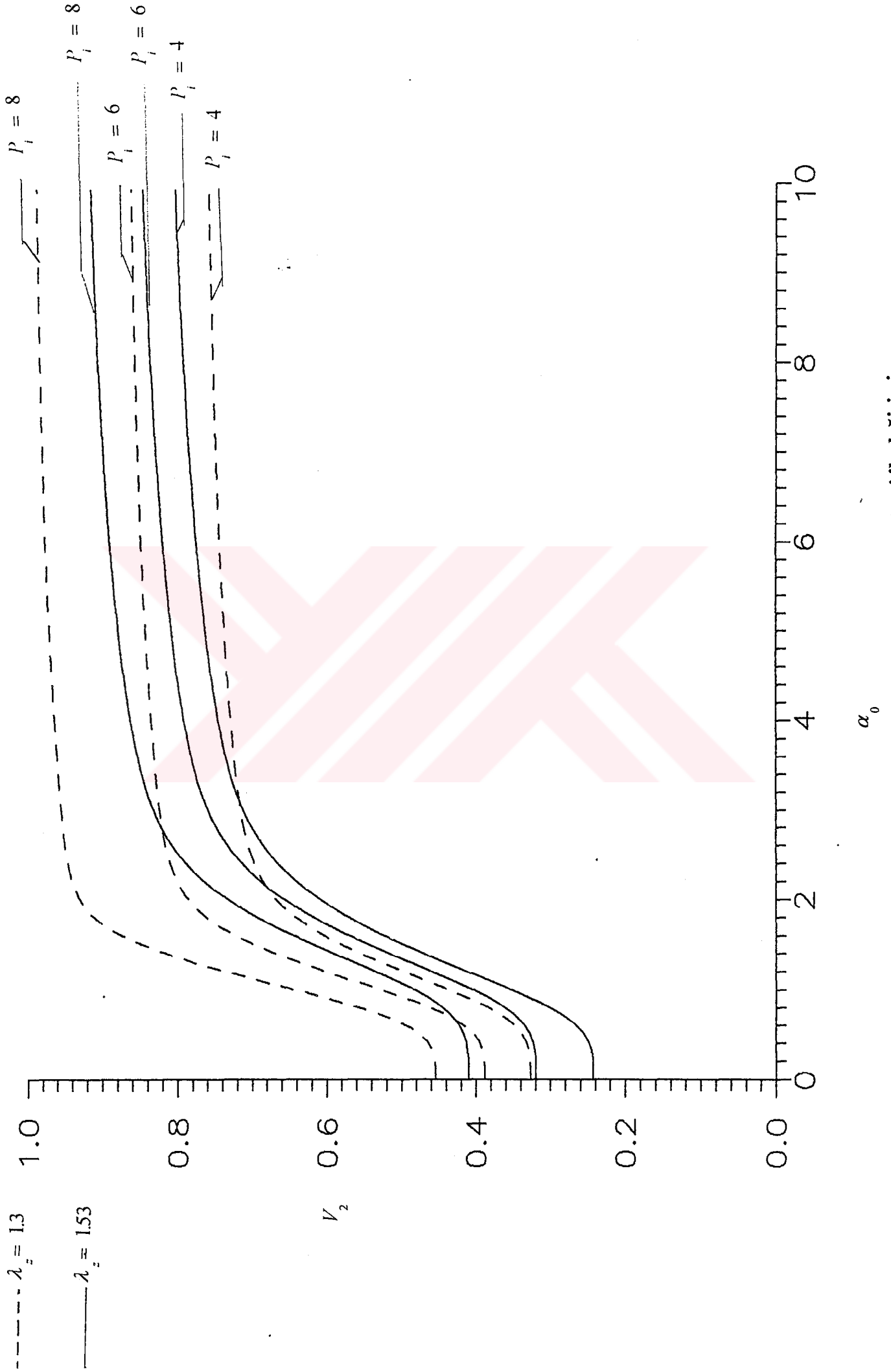
Şekil 4.6’ da daralmanın etkisinin baskın olduğu durumda, basıncın eksene göre değişim grafiği gösterilmektedir. Şekil 4.7’ de ise viskozitenin etkisinin baskın olduğu durumda aynı grafiğin değişimi izlenmektedir. Elde edilen bu veriler, Pedley[32] deki açıklamalar ve Hart ve Shi [31] nin elde ettiği sonuçlar ile uyuşmaktadır.

Şekil 4.8’ de ise genişleyen tüp için basıncın eksene göre değişim grafiği görülmektedir. Viskoz etkilerin oldukça düşük olduğu kabul edilerek oluşturulan bu grafikte izlenen basıncın eksene göre azalmakta olmasının ise elde edilen verilerle ters düşmediği anlaşılmaktadır.

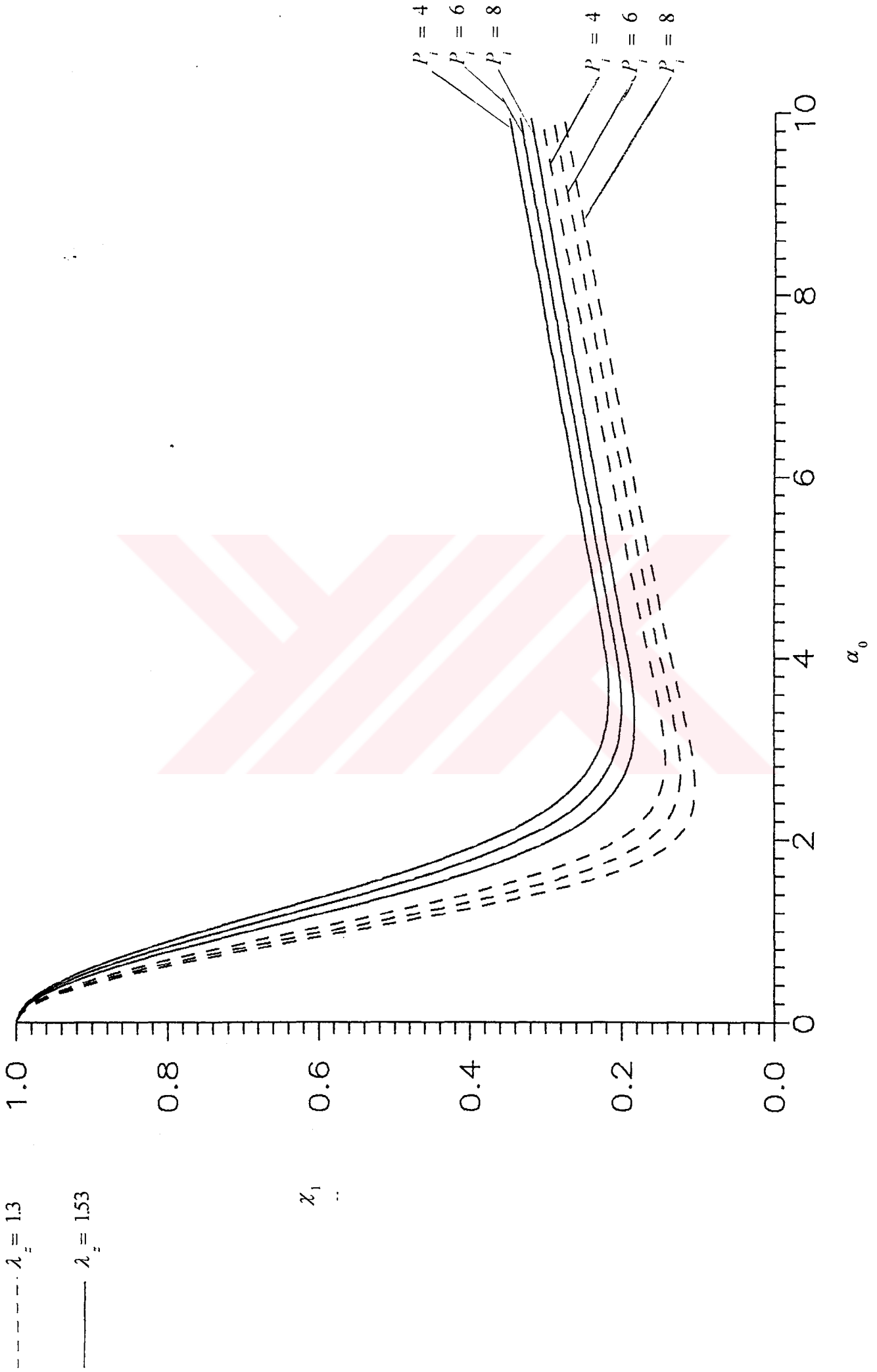
Bu sayısal inceleme için, damar malzemesi olarak yine Demiray [28] tarafından ortaya atılan elastik model kullanılmıştır. Yine basınç fonksiyonunun hesaplanmasında kullanılan Q_0 ve T değerleri de $Q_0=20$ ve $T=10$ olarak kabul edilmiştir. Womersley parametresi ise $\tau_0 = 3$ alınmıştır. Damarın genişlemesini veya daralmasını karakterize eden ϵ parametresi ise ± 0.1 veya -0.001 kabul edilmiştir.



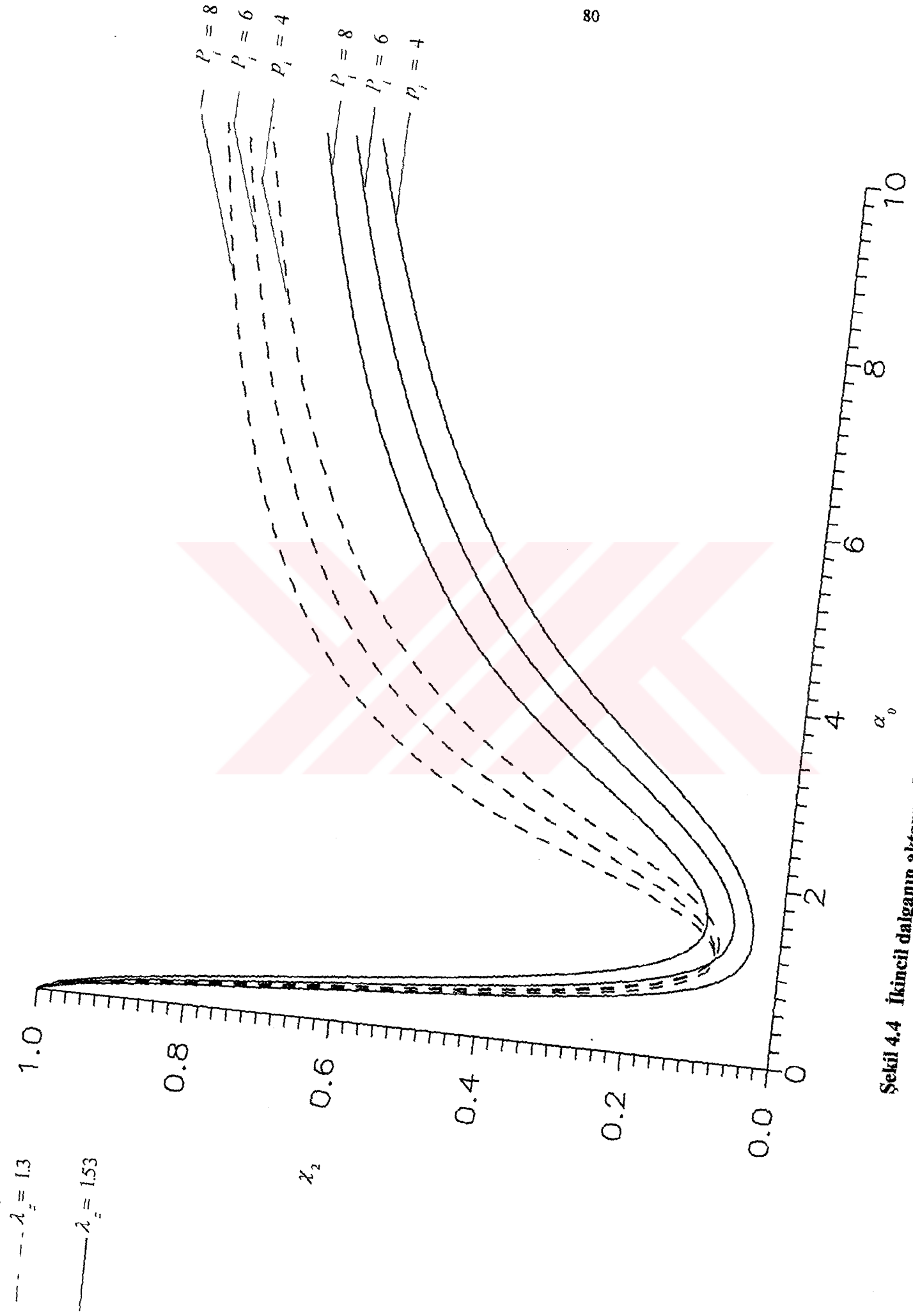
Şekil 4.1 Birincil dalga hızının iç basınç ve Womersley parametresi ile değişimi



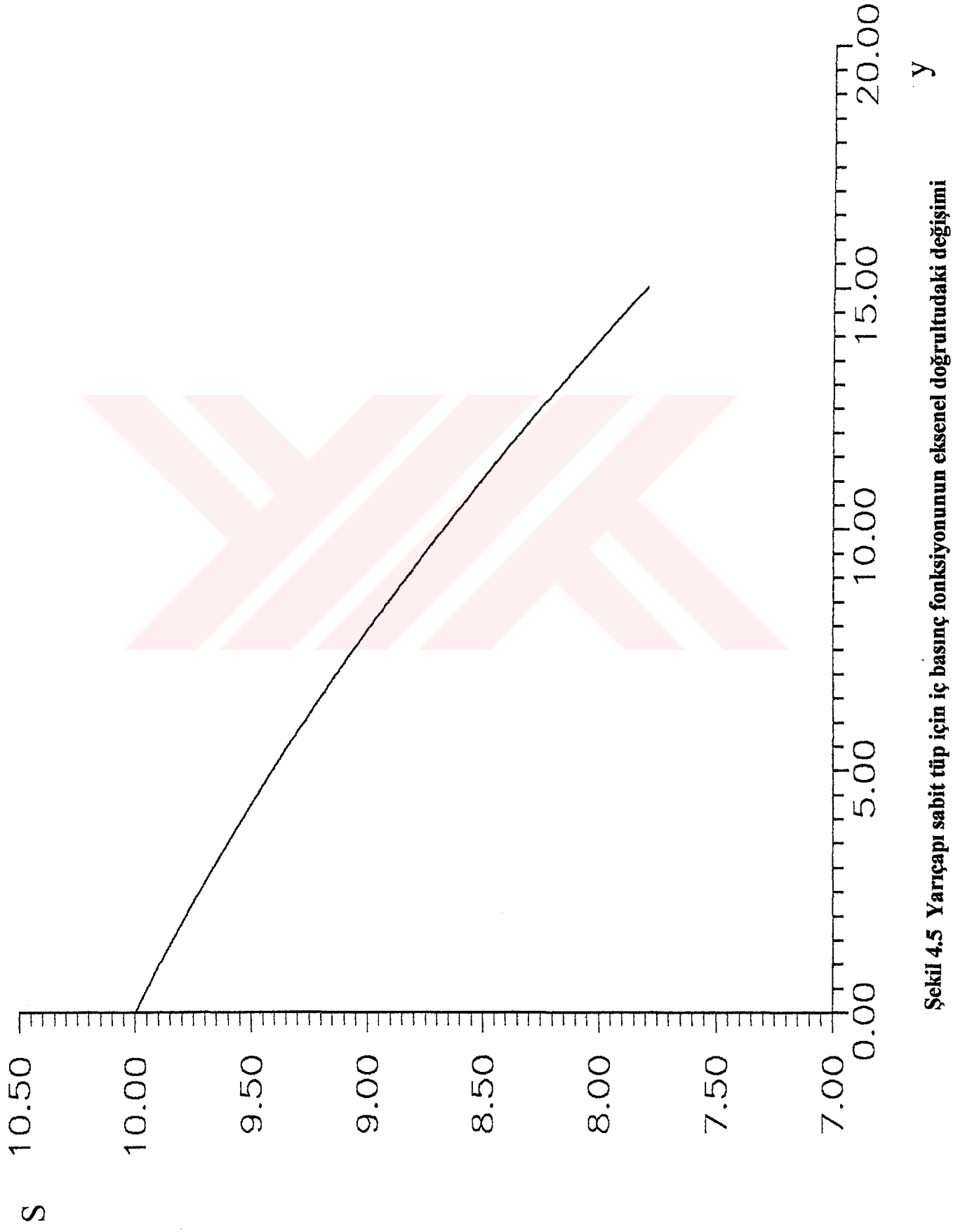
Şekil 4.2 İkincil dalga hızının iç basınç ve Womersley parametresi ile değişimi



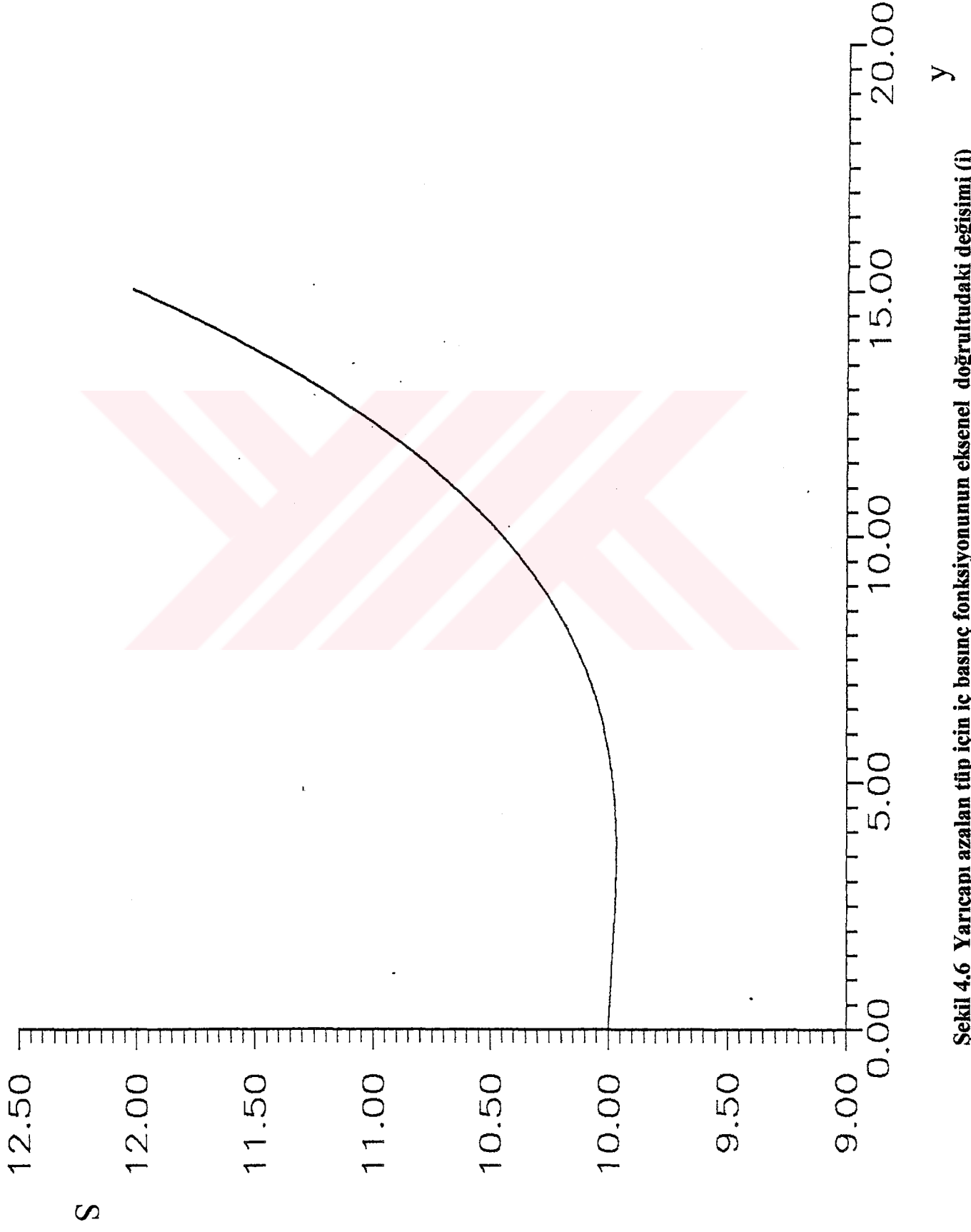
Şekil 4.3 Birincil dalganın aktarma katsayısının iç basınç ve Womersley parametresi ile değişimi



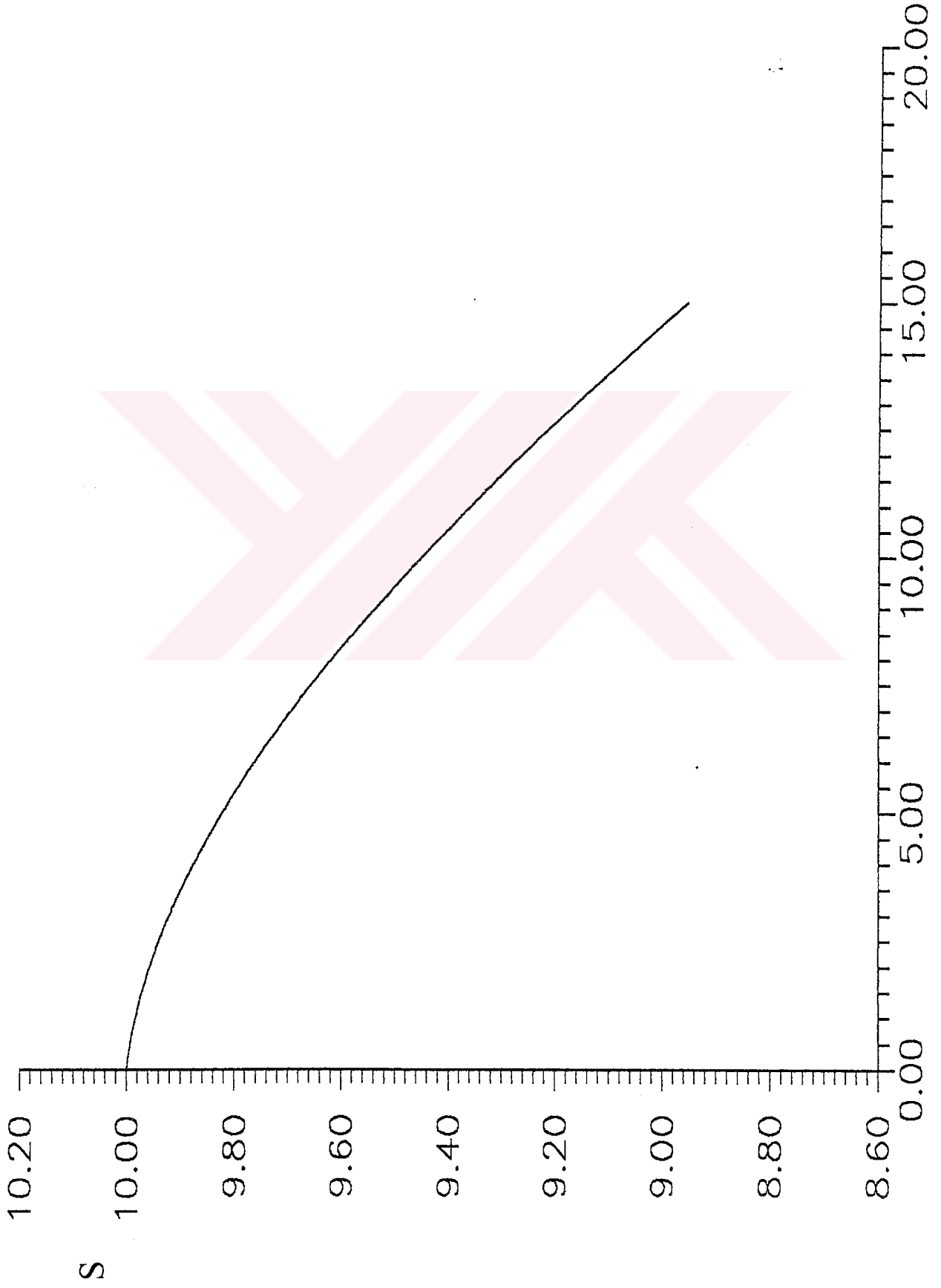
Şekil 4.4 İkincil dalganın aktarma katsayısının iç basınç ve Womersley parametresi ile değişimi



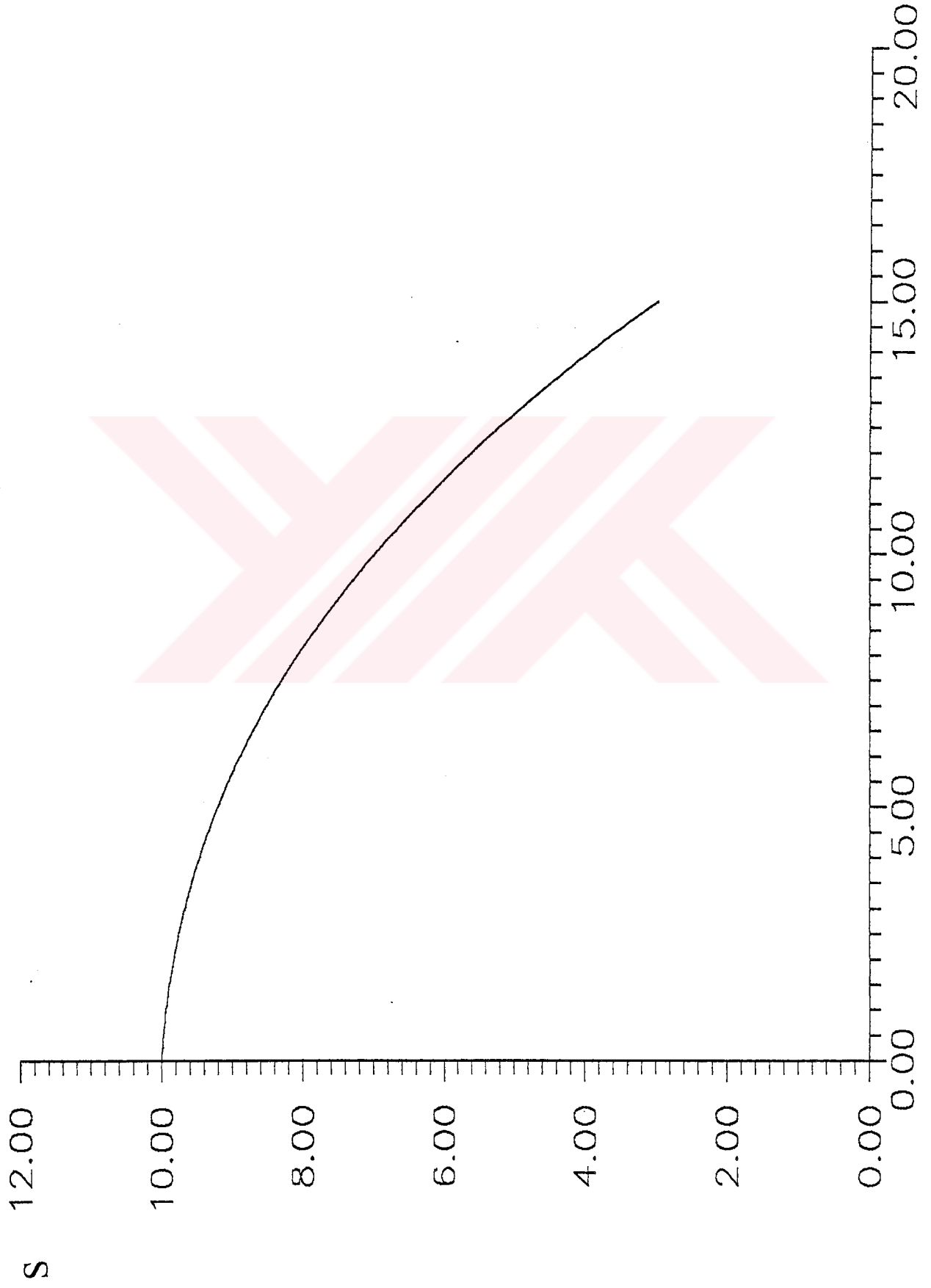
Şekil 4.5 Yarıçapı sabit tüp için iç basınç fonksiyonunun eksenel doğrultudaki değişimi



Şekil 4.6 Yarıçapı azalan tüp için iç basınç fonksiyonunun eksenel doğrultudaki değişimi (i)



Şekil 4.7 Yarıçapı azalan tüp için iç basınç fonksiyonunun eksenel doğrultudaki değişimi (ii) y



Şekil 4.8 Yarıçapı artan tüp için iç basınç fonksiyonunun eksenel doğrultudaki değişimi

KAYNAKLAR

- [1] YOUNG, Th. On the function of the heart and arteries: The Croonian Lecture, Phil. Trans. Roy. Soc., 99, 1-31 (1809).
- [2] WITZIG, K., Über erzwungene wellenbewegungen zaber, inkompressibler Flüssigkeiten in elastischen Röhren, Inaugural Dissertation, University of Bern (1914).
- [3] LAMBOSSY, P., Aperen historique et critique sur le problem de la propagation de ondes dands un liquide compressible enferme dans un tube elastique, Helv. Physical. Acta 9, 145-161 (1951).
- [4] IBERALL, A.S., Attenuation of oscillatory pressure in instrument lines, J. Res. Notn. Bur. Stand., 45 185-108 (1950).
- [5] MORGAN, G.W. ve KIELY, J.P., Wave propagation in viscous liquid contained in a flexible tube, J. Acoust. Soc. Am. 26, 326-338, (1954).
- [6] WOMERSLEY, J.R., Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin walled elastic tube -I: The linear approximation for long waves, Phil. Mag. (Seri 7) 46, 199-219. (1955).
- [7] WOMERSLEY, J.R., Oscillatory flow in arteries: constrained elastic tube as a model of arterial flow and pulse transmission, Phys. in Med. Biol. 2, 178-187 (1957).
- [8] ATABEK, H.B. ve LEW, H.S., Wave propagation through a viscous incompressible fluid contained in an initially stressed elastic tube Biophys. J. ,6, 481-503 (1966).
- [9] ATABEK, H.B., Wave propagation through a viscous fluid contained in a tethered initially stressed orthoropic elastic tube, Biophys. J., 8, 626-649 (1968).

- [10] MIRSKY, I., Wave propagation in a viscous fluid contained in an orthotropic elastic tube, Biophys. J. ,7, 165-186 (1967).
- [11] COX, R.H., Wave propagation through a Newtonian fluid contained within a thick walled viscoelastic tube, Biophys. J. ,8,691-709 (1968).
- [12] COX, R.H., Wave propagation through a Newtonian fluid contained within a thick walled viscoelastic tube: The influence of wall compressibility, J. Biomech., 270-281 (1969).
- [13] KLIP, W., Van LOOP ve KILLER, D.A., Formulas for phase velocity and damping of longitudinal waves in thick walled viscoelastic tubes, J. Appl. Phys. ,38,3745-3755 (1967).
- [14] RUBINOV, S.I., ve KELLER, J.B., Wave propagation in a fluid-filled tube, J. Acoust. Soc. Am. , 50,198-223 (1971).
- [15] RUBINOV, S.I. ve KELLER, J.B., Wave propagation in a viscoelastic tube containing a viscous fluid, J. Fluid. Mech. , 88,181-203 (1978).
- [16] RACHEV, A.I., Effects of transmural pressure and muscular activity on pulse waves in arteries, J. Biomechanical engng., ASME,102,119 (1980).
- [17] MOODIE, T.B., BARCLEY, D.W. ve TAIT, R.J. A boundary value problem for fluid-filled viscoelastic tube, Math. Modelling. 4,145,207,(1983).
- [18] SAWATZKY, R.P. ve MOODIE, T.B., On the propagation of pressure pulses through a viscous fluid contained in a viscoelastic tube, Q. J. Mech. Appl. Math., 41,33-50 (1988).
- [19] RUDINGER, G, Review of current mathematical methods for the analysis of blood flow, In. Biomechanics Symposium, s.1-33, ASME, New York (1966).
- [20] SKALAK, R., Wave propagation in blood flow. In. Biomechanics Symposium (Edited by Y.C. FUNG) s.20-46, ASME, (1966).

- [21] ATTINGER, E.O., Analysis of pulsatile blood flow. In Advances in Biomedical Engineering and Medical Physics , (Edited by S.N.LEVINE) s.1-59 Interscience, New York (1968).
- [22] MCDONALD, D.A. , Blood Flow in Arteries, The williams and Wilkins Co., Baltimore MD (1960).
- [23] FUNG, Y.C., Biodynamics:Circulation, Springer Verlag, New York (1984).
- [24] DEMİRAY, H., ERBAY, H.A. ve ERBAY,S., Effects of prestress or pulse waves in arteries, ZAMM, 67,473-485 (1987).
- [25] ERİNGEN, A.C., Nonlinear Theory of Continuous Media, Mc Graw-Hill, New York (1962).
- [26] KUIKEN, G.D.C., Wave propagation in a thin walled liquid-filled initially stressed tube, J. Fluid. Mech. ,141,289-308 (1984).
- [27] BAUER, H.F., METTEN, S.T., and SEIKMANN,J., Dynamical behavior of distensible fluid lines carrying a pulsating incompressible liquid, ZAMM, 60,221-234 (1986).
- [28] DEMİRAY, H., On the elasticity of soft biological tissues, J. Biomechanics., 5,309-311(1972).
- [29] DEMİRAY, H., Large deformation analysis of some basic problems in biophysics, Bull. Math. Biology., 38,701-712 (1976).
- [30] SIMON, B.R., KOBAYASHI, A.S., STRADNESS, D.E., and WIEDERHIELM, C.A., Re-evaluation of arterial constitutive laws, Circulation Research 30,401-500 (1972).
- [31] HART, V.G. ve SHI, J., Governing equations for wave propagation in prestressed joined dissimilar elastic tubes containing fluid flow: with an example for tapered section, Int. J. Engn. Sci.,8,1121,1138 (1995).

- [32] T.J. PEDLEY, The fluid mechanics of large blood vessels, Cambridge Univ. Press, New York (1980).



ÖZGEÇMİŞ

İlkay Bakırtaş 1972 yılında İzmit'te doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kılıç Ali Paşa İlkokulu ve Gazi Osman Paşa Ortaokulu'nda yaptı. Lise öğrenimini 1989 yılında İstanbul Özel Şişli Terakki Lisesi'nde tamamladıktan sonra aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümünde lisans eğitime başladı. 1994 yılında lisans eğitimini tamamladı. Aynı yıl Mühendislik Bilimleri Bölümü, Mekanik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimi yapmak amacıyla yaptığı başvurusu olumlu karşılanarak bu dalda lisans üstü eğitime başladı. İlkay Bakırtaş halen İ.T.Ü Mühendislik Bilimleri Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

