



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



RANDİC ETKİ VE LAPLACİAN ETKİ
ENERJİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Ayşe Nur DEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2021
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RANDİC ETKİ VE LAPLACIAN ETKİ ENERJİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Ayşe Nur DEMİR

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Ayşe Dilek MADEN

2021, 56 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

Prof. Dr. Aynur YALÇINER

Dr. Öğr. Üyesi Ezgi KAYA

Graf enerjinin tanımlanması ile birlikte enerji ile ilgili yapılan çalışmalar artmış ve birçok graf enerji ve graf parametresi tanımlanmıştır. Graf enerjilerinin zor hesaplanması sebebiyle enerji için alt ve üst sınırlar elde edilerek enerjinin yaklaşık değeri hakkında bilgi edilebilir.

Tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde grafların tarihçesine, kullanım alanlarına, temel tanımlarına ve bazı özel graf çeşitlerine yer verilmiştir.

İkinci bölümde şimdiye kadar yapılan çeşitli graf enerji ve parametreleri üzerine yapılan çalışmalardan bahsedilmiş ve graf enerji ve parametreleri için yapılan çalışmalardaki sınırlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde graf matrislerine ve bazı lineer cebir bilgilerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde graf enerji tanımlarına yer verilmiştir.

Beşinci bölümde s_α, σ_α , Laplacian etki ve Randic etki enerjilerinin alt ve üst sınırları genelleştirilmiştir.

Altıncı bölümde elde edilen sonuçlara dair bilgi ve öneriler yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: enerji, özdeğer, Laplacian etki enerjisi, Randic etki enerjisi

ABSTRACT

MS THESIS

GENERALIZATION OF RANDIC INCIDENCE AND LAPLACIAN INCIDENCE ENERGIES

Ayşe Nur DEMİR

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS**

Advisor: Ayşe Dilek MADEN

2021, 56 Pages

Jury

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

Prof. Dr. Aynur YALÇINER

Asst. Prof. Ezgi KAYA

With the introduce of graph energy, studies on energy have increased and many graph parameters and energies have been defined. Due to difficult calculation of graph energies, information about the approximate value of energy can be obtained by obtaining lower and upper bounds for energy.

The thesis consists of six chapters. In the first chapter, the history of graphs, their usage areas, basic definitions and types of graphs are given.

In the second chapter, the studies on various graph energy and parameters made so far are mentioned and the bounds on the graph energies and parameters are given.

In the third chapter, graph matrices and some linear algebra information are given.

In the fourth chapter graph energy definitions are given.

In the fifth chapter, the lower and upper bounds of s_α, σ_α , Laplacian Incidence energy and randic Incidence energies are generalized.

In the sixth chapter, information and suggestions about the results are given.

Keywords: eigenvalues, energy, Laplacian Incidence energy, Randic Incidence energy

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, yardımlarını ve değerli bilgileri benden esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN'e ve sevgili aileme teşekkür ediyorum.

Ayşe Nur DEMİR
KONYA-2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
1.1.Grafların Tarihçesi.....	1
1.2.Grafların Kullanım Alanları.....	4
1.3. Temel Graf Tanımı ve Kavramlar.....	7
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	12
3.BAZI ÖZEL GRAF ÇEŞİTLERİ	17
3.1.Graf Matrisleri.....	20
4. GRAF ENERJİ ÇEŞİTLERİ.....	28
5.RANDİC ETKİNLİK VE LAPLACIAN ETKİNLİK ENERJİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ.....	33
5.1.Ön Hazırlık.....	33
5.2.Sonuçlar.....	34
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	42
6.1 Sonuçlar	42
6.2 Öneriler	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

G	: G grafi
$V(G)$	: G grafinin nokta kümesi
$E(G)$	: G grafinin kenar kümesi
$d(v_i)$	: v_i noktasının derecesi
N_n	: n noktalı null graf
C_n	: n noktalı devir graf
K_n	: n noktalı tam graf
P_n	: n noktalı yol graf
W_n	: n noktalı tekerlek graf
$K_{t,p}$	: İki parçalı graf
T	: Ağaç
$A(G)$	: G grafinin komşuluk matrisi
$D(G)$	: G grafinin derece matrisi
$L(G)$	: G grafinin Laplacian matrisi
$L(G)^+$	: G grafinin işaretli Laplacian matrisi
$\mathcal{L}(G)$	: G grafinin normalize edilmiş Laplacian matrisi
$\mathcal{L}(G)^+$	: G grafinin normalize edilmiş işaretli Laplacian matrisi
$R(G)$	: G grafinin Randic matrisi
$I(G)$	: G grafinin etki matrisi
$I_R(G)$	: G grafinin Randic etki matrisi
$I_R E(G)$	: G grafinin Randic etki enerjisi
$E(G)$	: G grafinin enerjisi

$IE(G)$	: G grafinın etki enerjisi
$LEL(G)$	: G grafinın Laplacian tipi enerjisi
$LIE(G)$	: G grafinın Laplacian etki enerjisi
$RE(G)$	: G grafinın Randic enerjisi
s_α	: sıfırdan farklı normalize edilmiş Laplacian özdeğerlerinin α kuvvetlerinin toplamı
σ_α	: sıfırdan farklı normalize edilmiş işaretsiz Laplacian özdeğerlerinin α kuvvetlerinin toplamı



Şekiller Dizini

- Şekil 1.1.1 Königsberg köprü problemi
- Şekil 1.1.2. Köprü Problemi
- Şekil 1.1.3. Euler Grafi
- Şekil 1.1.4. Grafta noktaların düzgün renklendirilmesi
- Şekil 1.1.5. Grafta kenarların düzgün renklendirilmesi
- Şekil 1.2.1. Graflar ile Londra metrosu güzergâhı
- Şekil 1.2.2. Kelimerin ağaç diyagramları
- Şekil 1.2.3. Hekzan molekülünün graf olarak temsili
- Şekil 1.2.4. Arkadaş ağının graf olarak temsili
- Şekil 1.2.5. Çinli postacı problemi
- Şekil 1.2.6. Uçak rotası problemi
- Şekil 1.3.1. G grafi
- Şekil 1.3.2. Yönlü ve yönsüz graf örneği
- Şekil 1.3.3. Multi graf örneği
- Şekil 1.3.4. Basit ve basit olmayan graf örneği
- Şekil 1.3.6. Bağlantılı graf
- Şekil 1.3.7. Bağlantısız Graf
- Şekil 1.3.8. 3 bileşenli graf
- Şekil 1.3.9. G grafi
- Şekil 1.3.10. Birbirine izomorf olan geaf örneği
- Şekil 3.1. Null graf
- Şekil 3.2. Trivial graf
- Şekil 3.3. Regüler graf örnekleri
- Şekil 3.4. Devir graf örnekleri
- Şekil 3.5. Yol graf örnekleri
- Şekil 3.6. Tekerlek graf örnekleri
- Şekil 3.7. Tam graf örnekleri
- Şekil 3.8. Ağaç graf örnekleri
- Şekil 3.9. İki parçalı graf örnekleri
- Şekil 3.10. Tam iki parçalı graf örnekleri

Şekil 3.1.1. G grafi

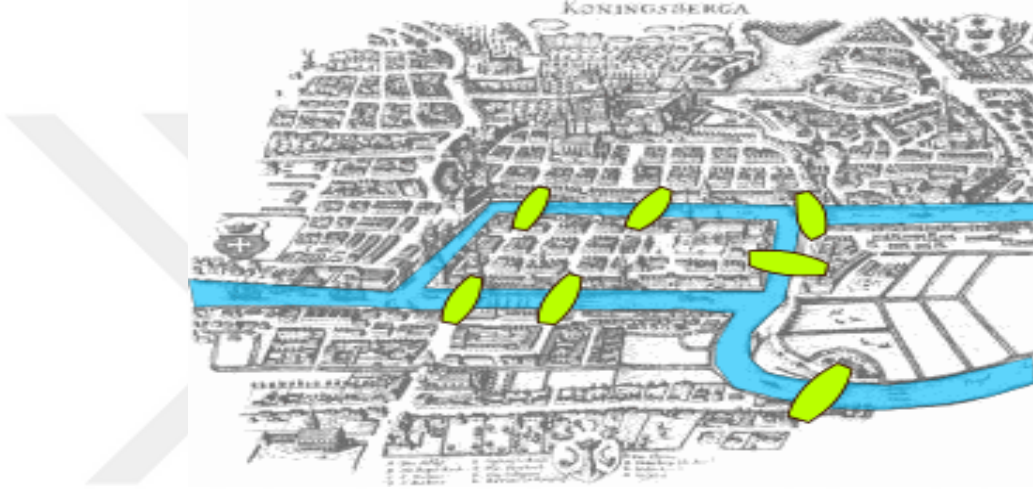
Şekil 4.1. G grafi



1. GİRİŞ

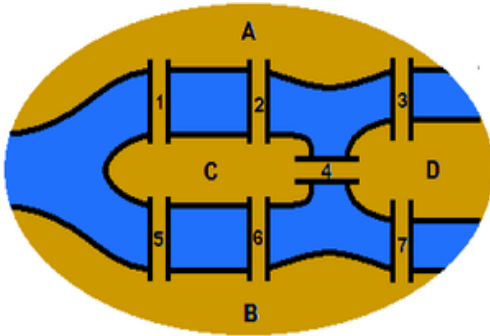
1.1.Grafların Tarihçesi

Grafların temeli 18.yüzyılda Königsberg'in 7 köprüsü problemi ile atılmıştır. Bir gün Königsbergliiler eğlence olsun diye bir oyun oynamak istediler. Oyunda şehri 4 bölgeye ayıran 7 köprüden sadece bir kez geçmek kaydıyla başlangıç noktasına geri dönülebilir mi sorusuna cevap aradılar. Köylüler farklı noktalardan başlayarak 7 köprüyü geçmeyi deneseler de hiçbiri başarılı olamadı.

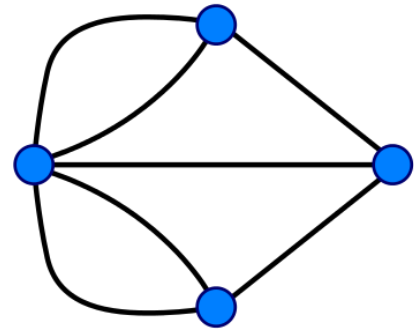


Şekil 1.1.1. Königsberg köprü problemi

Halk içinde merak uyandıran bu problem ünlü matematikçi Leonard Euler'in ilgisini çekti. Şekil 1.1.2 de bölgelerin A,B,C,D harfleri ile köprülerin ise 1'den 7'ye kadar olan sayılarla numaralandırıldığı şemayı Euler şekil 1.1.3 de bölgeleri noktalar ve köprüleri noktaları birleştiren kenarlar ile temsil ederek graf teorisinin temellerini atmış oldu.



Şekil 1.1.2.Köprü Problemi



Şekil 1.1.3. Euler Graf

Euler yayınladığı bir makale ile problemin çözümünün olmadığını belirtmiştir. Çünkü köprülerden sadece bir kez geçileceği için tüm bölgelere farklı köprüler ile girilmeli ve çıkılmalıdır (Gurjar, 2012). Bunu yapabilmek için de tüm bölgelerin çift sayıda köprü ile komşu olması gerekir fakat bölgelerin tek sayıda köprü ile komşu olduğu bu sebeple tüm köprülerden yalnızca bir kez geçmek şartıyla tüm bölgeleri ziyaret etmenin mümkün olmadığı aşikârdır (Gurjar, 2012).

Basit bir gözlem sonucunda Euler, tüm kenarlardan sadece bir kez geçerek başlangıç noktasına yapılacak bir gezintinin ancak ve ancak her noktanın çift dereceli olması ile mümkün olduğunun farkına varmıştır (Gurjar, 2012). Aynı kenardan yalnızca bir kez geçmemiz gerektiği için bir noktadan farklı bir kenar ile çıkıp farklı bir kenar ile geri dönüş sağlamalıyız. Bu sebeple noktanın 2 kenar ile komşu olması gerekir. Eğer gezintiyi tekrar ederse yani aynı noktadan 2 kez geçerse yine 2 kenar kullanılması gerektiğinden toplamda gezintide 4 kenar olacaktır (Ahmed, 2019). Bu gezintiler tekrarlanırsa kenar sayının her zaman çift olduğu görülür.

Ağaç kavramı Gustav Kirchhof tarafından 1845 yılında uygulanmıştır ve Kirchhof graf teoriiyi elektrik ağlarında ve devrelerinde akımı hesaplamakta kullanmıştır (Gupta ve Sikhwal, 2014).

1856 yılında Thomas P. Kirkman ve William R. Hamilton polihidralar üzerinde devir grafları çalışmış ve her noktadan sadece bir kez geçen ziyaretleri inceledikleri çalışmalarında Hamilton graf kavramını keşfetmişlerdir (Gupta ve Sikhwal, 2014).

Caley, ağaçlar üzerinde çalışmak için diferansiyel kalkülüsteki belirli analitik formlar üzerinde çalışmalar yapmıştır (Gupta ve Sikhwal, 2014).

1852 yılında Thomas Guthrie ünlü 4 renk problemini bulmuştur (Gupta ve Sikhwal, 2014). Problemi Wang (2020) aşağıdaki gibi açıklamıştır.

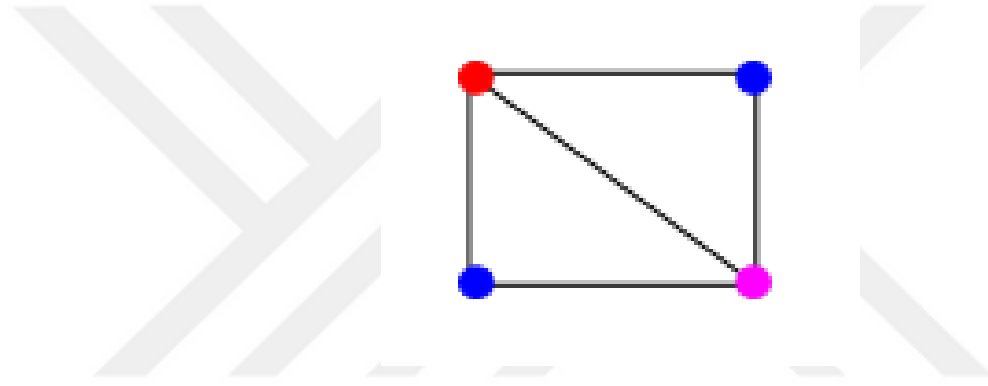
Elimizde birbirine komşu olan ülkelerden oluşan bir harita olsun. Komşu ülkeler aynı renge boyanmamak şartı ile sadece 4 renk ile tüm ülkeleri boyamak mümkün müdür? (Wang, 2020)

Merak uyandıran bu problem matematikçiler tarafından ilgiyle karşılanmış ve birçok matematikçi ispatlamaya çalışmıştır. 1878 ve 1880 yılları arasında Alfred Kempe ve Peter Guthrie Tait problemi ispatladıklarını açıklamışlardır fakat 1890 yılında Percy John Heawood, Kempe'nin ispatında eksiklikler olduğunu söylemiştir bundan kısa süre sonra da Guthrie'nin ispatı da beğenilmemiştir sonrasında birçok çözüm ortaya atılmış ve matematikçiler 4 renk ile 1939 yılında 22 ülkeli bir haritanın, 1950 yılında 50 ülkeli bir

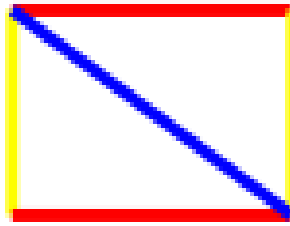
haritanın, 1960 yılında 39 ölkeli bir haritanın, 1975 yılında 52 ölkeli bir haritanın boyanabileceğini ispat etmişlerdir (Wang, 2020).

Slyvester 1878’de nicel sabitler, cebirin ortak değışkeleri ve moleküler diyagramlar arasındaki benzerliğı gösteren bir çizim ile graf terimini ortaya atmıştır (Gupta ve Sikhwal, 2014).

Graf teorideki önemli çalışmalardan biri de graf renklendirmedir (Gupta ve Sikhwal, 2014). Birçok renklendirme çeşidi vardır ve uygun olan renklendirmeler graflarda kullanılır. Düzgün renklendirme, noktaların ve kenarların iki nokta ya da iki kenar aynı renkte olmayacak şekilde ve en az renk kullanarak grafın renklendirilmesidir (Gupta ve Sikhwal, 2014).



Şekil 1.1.4. Grafta noktaların düzgün renklendirilmesi (Gupta ve Sikhwal, 2014)

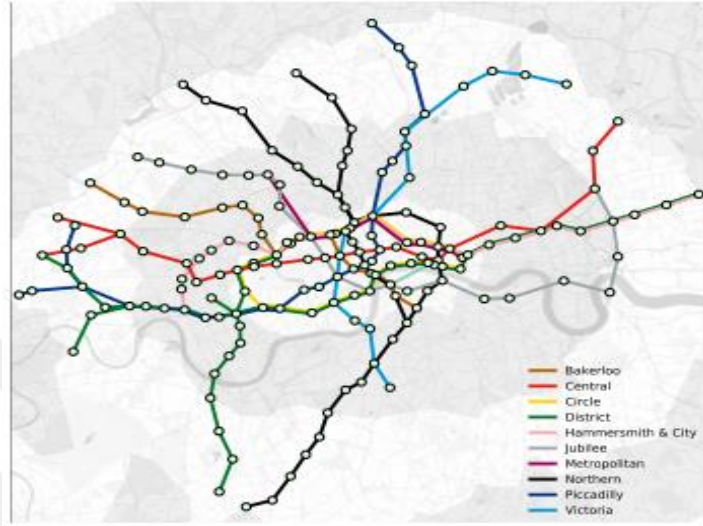


Şekil 1.1.5. Grafta kenarların düzgün renklendirilmesi (Gupta ve Sikhwal, 2014)

Euler graf teorisinin temellerini attıktan sonra grafla ilgili yeni problemler ortaya atılmış ve tanımlar yapılmıştır. 19.yy ve 20.yy da yapılan çalışmalar sonucu hem ortaya atılan bazı problemlerin çözümleri bulunmuş, hem de graf ile ilgili yapılan çalışmalar sadece matematik alanı ile kısıtlı kalmayarak birçok alanda kullanılmaya başlanmıştır.

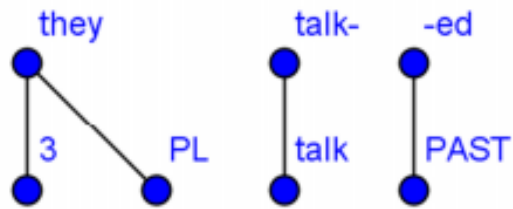
1.2.Grafların Kullanım Alanları

Günlük yaşamda graflar yolları, haritaları, toplu taşıma araçların güzergâhlarını çizerken kullanılmaktadır.

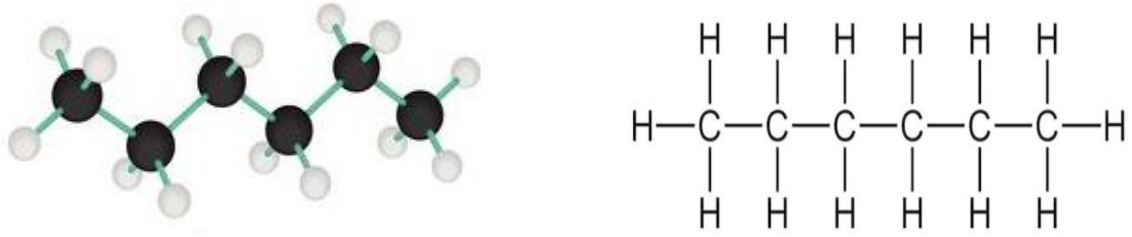


Şekil 1.2.1.Graflar ile Londra metrosu güzergâhı

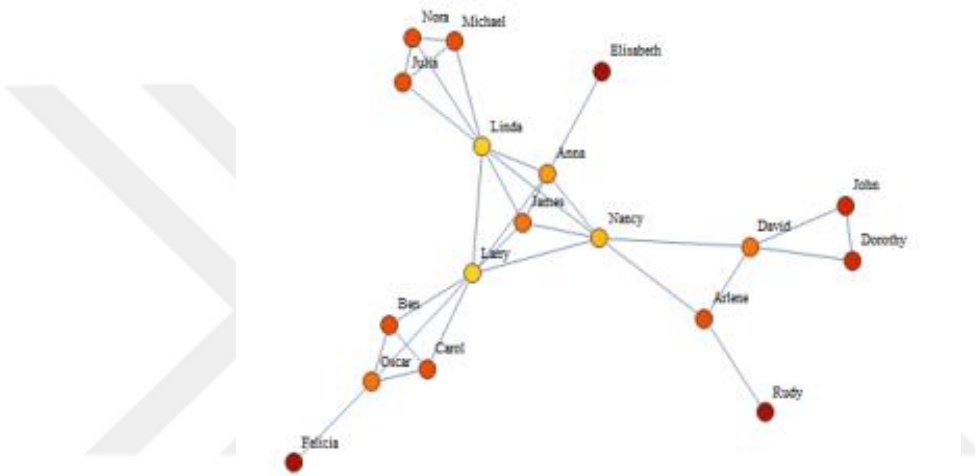
Kimya alanında moleküllerle ilgili çalışmalarda, fizik alanında devrelerin resmedilmesinde, biyoloji alanında ilaç endüstrisinde, genlerin ve proteinlerin temsil edilmesinde, dil bilim alanında kelimelerin, hecelerin, cümlelerin incelenmesinde ve daha birçok alanda graflar kullanılmaktadır.



Şekil 1.2.2. İngilizce ‘They talked’ cümlesinin graf ile temsili (Piperski, 2014)



Şekil 1.2.3. Hekzan molekülünün graf olarak temsili



Şekil 1.2.4. Arkadaş ağının graf olarak temsili (Chakraborty ve ark., 2018)

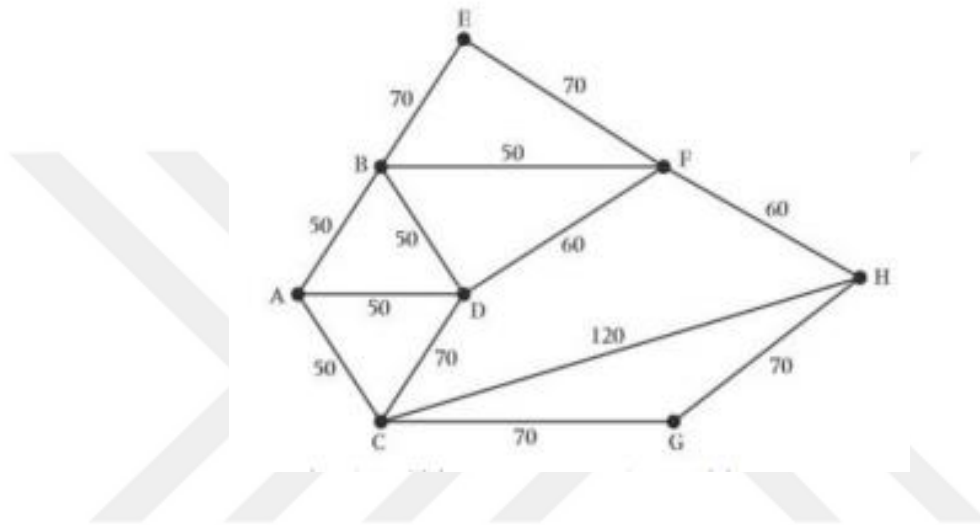
Yöneylem araştırması bir problemin en uygun çözümüne yönelik geliştirilen bir yöntemdir. Yöneylem araştırmalarında yaygın olarak graflar kullanılmaktadır. Şimdi bunlardan bazıları verilecektir.

Zaman Çizelgesi Hazırlanması

Bir üniversite düşünölsün. Bu üniversitedeki bir öğretmenin belirli bir sınıfa belirli bir zaman aralığında ders vermesi gerekmektedir. Tüm öğretmenler göz önüne alındığında öğretmenleri ve öğrencileri farklı birer nokta kümesindeki noktalar olarak zaman aralıklarını ise noktaları birleştiren birer kenar olarak düşünürsek zaman çizelgesini iki parçalı graf olarak çizebiliriz (Bisen, 2017).

Çinli Postacı Problemi

1962 yılında Çinli matematikçi Kuan-Mei-Ko bir postacının belirli bir yerdeki sokaklardan geçerek tüm postaları en kısa uzaklığı yürüyerek nasıl dağıtabilir sorusuna cevap aramıştır. Bu problemde evleri birer nokta ve sokakları ise posta teslimi yapılacak evler arasında birer kenar olarak düşünürsek problem aşağıdaki gibi graf olarak çizilebilir (Bisen, 2017).

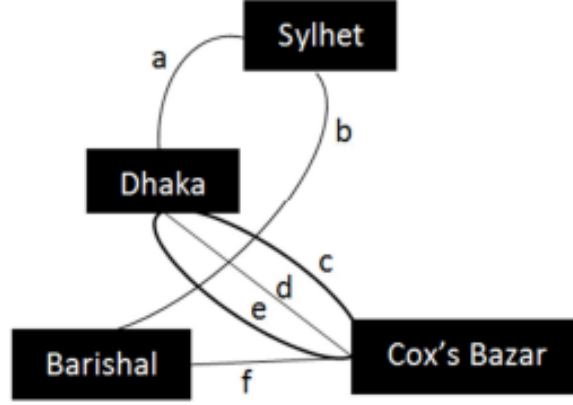


Şekil 1.2.5.Çinli postacı problemi (Bisen, 2017)

Uçak Rotası Problemi

Ahmet (2019) bu problemi şöyle açıklamıştır:

Bir iş adamı iş için Bangladeş'teki 4 şehri uçakla ziyaret etmesi gerekiyor. Aynı zamanda bu iş adamının bölgedeki 6 havayolu şirketinin servislerini değerlendirdiği bir liste yapması gerekiyor (Ahmed, 2019). Bölgedeki havayolu şirketleri aşağıdaki graf ile temsil edilsin.



Şekil 1.2.6. Uçak rotası problemi (Ahmed, 2019)

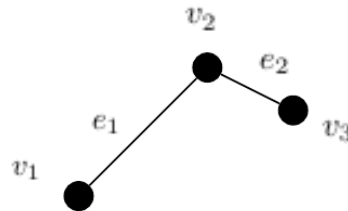
Bu iş adamının Dhaka'dan başlayarak 6 havayolu şirketi ile 4 şehri gezip tekrar Dhaka'ya dönmesi mümkün müdür? (Ahmed, 2019)

Euler böyle bir gezintinin gerçekleşmesi için her noktanın çift dereceli olması gerektiğini belirtmişti ve yukarıdaki grafta da noktalar dereceleri çift olduğundan iş adamı bu gezintiyi yapabilir (Ahmed, 2019).

1.3. Graf Tanımı ve Temel Kavramlar

Tanım 1.3.1. G grafi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ($V \neq 0$) nokta kümesi ve $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenar kümesinden oluşan bir yapıdır. $G = (V(G), E(G))$ biçiminde gösterilir.

Grafta iki noktayı birleştiren bir kenar varsa bu iki nokta komşudur denir. Bir grafta v noktasının komşu olduğu noktalara v nin komşuluğu denir. Bir grafta v_i ve v_j noktaları birleştiren e_k kenarı $v_i v_j = e_k$ olarak da gösterilebilir.



Şekil 1.3.1. G grafi

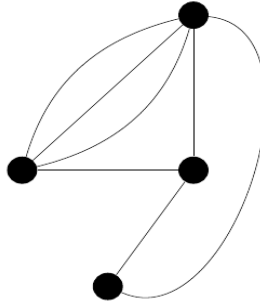
Şekil 1.3.1. deki G grafında $e_1 = v_1 v_2$ olduğundan v_1 ile v_2 noktası komşudur. v_1 ile v_3 noktalarını birleştiren bir kenar olmadığından v_1 ile v_3 noktası komşu değildir.

Tanım 1.3.2. Grafın kenarları bir yön belirtiyorsa bu graflara **yönlü graf** eğer grafın tüm kenarları bir yön belirtmiyorsa grafa **yönsüz graf** denir (Wilson, 1996).



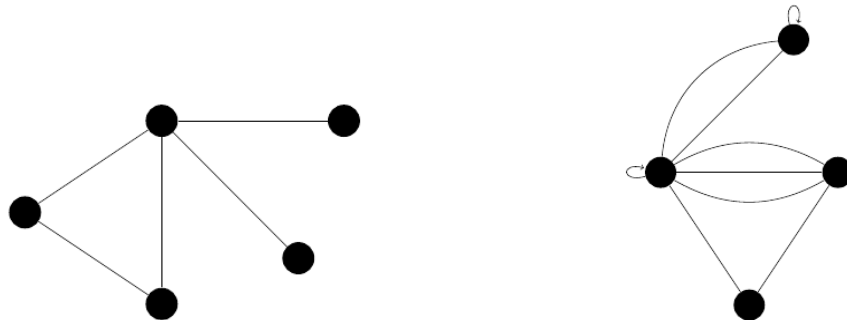
Şekil 1.3.2. Yönlü ve yönsüz graf örneği

Tanım 1.3.3. İki nokta arasında birden fazla kenar içeren graflara **multi graf** denir.



Şekil 1.3.3. Multi graf örneği

Tanım 1.3.4. Bir grafda iki nokta arasında birden fazla komşuluk yoksa ve noktalar kendilerine komşu değillerse bu graflara **basit graf** denir (Wilson, 1996).



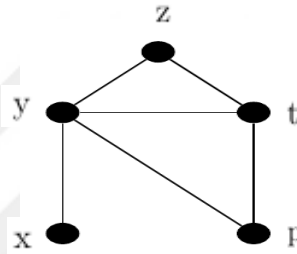
Şekil 1.3.4. Basit ve basit olmayan graf örneği

Tanım 1.3.5. Bir G grafında $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ sonlu kenar dizisine **yürüme** denir ve ard arda gelen noktalar aynı ya da komşu olmak üzere $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \dots \rightarrow v_n$ şeklinde de gösterilir (Wilson, 1996).

Tanım 1.3.6. Bir yürümedeki tüm kenarlar farklı ise bu yürümeye **iz** denir(Wilson, 1996).

Tanım 1.3.7. Tüm noktaları farklı olan ize **yol** denir (Wilson, 1996).

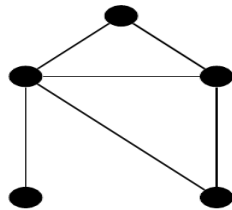
Tanım 1.3.8. En az bir kenar içeren, başlangıç ve bitiş noktası aynı olan ize **devir** denir (Wilson, 1996).



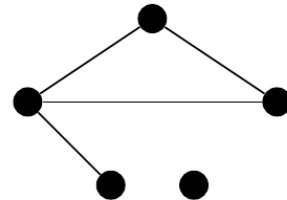
Şekil 1.3.5. G grafi

Örneğin Şekil 1.3.5. deki grafta $x \rightarrow y \rightarrow p \rightarrow t$ yürüme, $t \rightarrow p \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow t \rightarrow y$ iz, $z \rightarrow t \rightarrow p \rightarrow y \rightarrow x$ yol, $y \rightarrow p \rightarrow t \rightarrow y$ ise bir devirdir.

Tanım 1.3.9. Graftaki her nokta çifti arasında bir yol varsa bu grafa **bağlantılı graf** eğer en az bir nokta çifti arasında bir yol yoksa **bağlantısız graf** denir (Wilson, 1996).

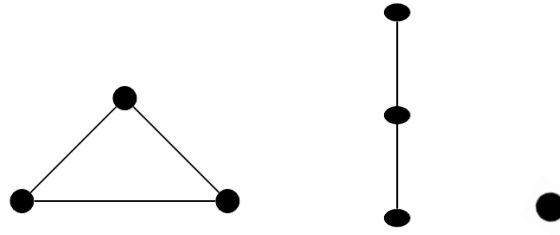


Şekil 1.3.6. Bağlantılı graf



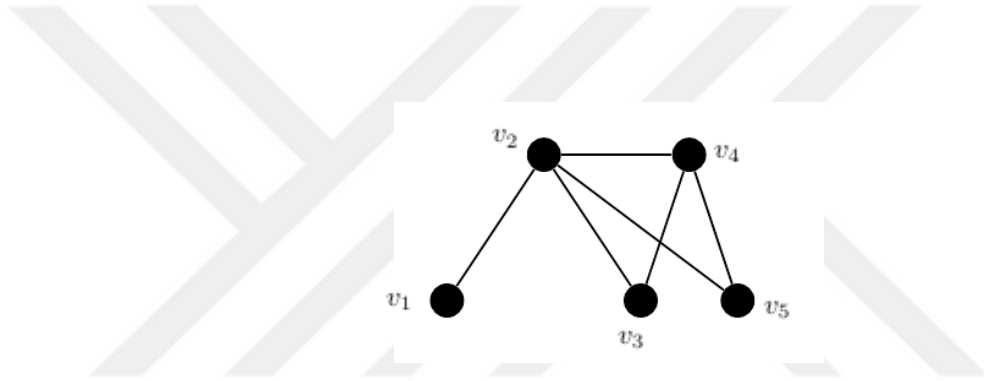
Şekil 1.3.7. Bağlantılı olmayan graf

Tanım 1.3.10. Bağlantılı grafların birleşiminden oluşan bağlantısız graflarda her bir bağlantılı grafa, grafın bileşeni denir (Wilson, 1996).



Şekil 1.3.8. 3 bileşenli graf örneği

Tanım 1.3.11. Grafta bir v noktasının komşu olduğu kenar sayısına v noktasının *derecesi* denir ve $d(v)$ ile gösterilir (Wilson, 1996).



Şekil 1.3.9. G grafi

Örnek 1.2.1. Şekil 1.3.9. de verilen G grafinin noktalarının derecelerini bulalım.

$$d(v_1) = 1, d(v_2) = 4, d(v_3) = 2, d(v_4) = 3, d(v_5) = 2$$

Tanım 1.3.12. G_1 ve G_2 grafları verilsin. G_1 ve G_2 graflarının noktaları arasında G_1 de herhangi iki noktayı birleştiren kenar sayısının G_2 de karşılık gelen noktaları birleştiren kenar sayısının aynı olması gibi bire bir eşleme varsa G_1 ve G_2 izomorftur denir ve $G_1 \cong G_2$ ile gösterilir (Wilson, 1996).



Şekil 1.3.10. Birbirine izomorf olan graf örneği



2.KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu kısımda graf parametreleri ve enerjileri üzerine yapılan çalışmalardan bahsedilecektir.

20.yy başlarında Kimya alanında enerji çalışmaları yapılsada matematik alanında enerji çalışmaları bulunmamaktaydı. Literatürde pek çok çalışmalar yapan ve enerjinin tanımını verem ünlü Sırp matematikçi ve kimyacı Prof. Dr. Ivan Gutman kimya molekülünün moleküler graf olarak temsil edildiğinde Hückel orbital yaklaşımıyla konjuge hidrokarbonların toplam π elektronlarının enerjisinin temsili grafın enerjisine eşit olduğu farketmiştir.

Gutman (1978), "The energy of a graph" isimli çalışmasında bir grafın enerjisini grafın özdeğerlerinin mutlak değerlerinin toplamı olarak tanımlamıştır (Gutman, 1978).

Gutman'ın enerji tanımından sonra graf enerjisi alanında çalışmalar hız kazanmış ve popüler bir konu haline gelmiştir.

Bir M matrisinin transpoz M^T olmak üzere M matrisinin singüler değerleri MM^T matrisinin özdeğerlerinin kareköklüdür. Nikiforov (2007), "The energy of graphs and matrices" isimli çalışmasında tüm matrisler için enerji kavramını genişleterek bir M matrisinin enerjisinin M matrisinin singüler değerlerinin toplamı olduğunu göstermiştir (Nikiforov, 2007).

Joodanyeh ve arkadaşları (2009), "Incidence Energy of Graphs" isimli çalışmasında etki enerjisini, etki matrisinin singüler değerlerinin toplamı olarak tanımlamıştır (Jooyandeh ve ark., 2009).

Gutman ve arkadaşları (2009), "On Incidence Energy of Graphs" isimli çalışmasında etki matrisinin enerjisinin aynı zamanda işaretli Laplacian matrisin özdeğerlerinin kareköklerinin toplamına eşit olduğunu göstermiştir (Gutman ve ark., 2009).

Liu ve Liu (2008), "A Laplacian-energy-like invariant of a graphs" isimli çalışmasında Laplacian tipi enerjiyi Laplacian matrisin özdeğerlerinin kareköklerinin toplamı olarak tanımlamıştır (Liu ve Liu, 2008).

Bozkurt ve arkadaşları (2010), "Randic Matrix and Randic Energy" isimli çalışmasında Randic enerjiyi Randic matrisin özdeğerlerinin mutlak değerlerinin toplamı olarak tanımlamıştır (Bozkurt ve ark., 2010).

Gu ve arkadaşları (2014), "Randic Incidence Energy of Graphs" isimli çalışmasında Randic etki enerjisini Randic etki matrisinin singüler değerlerinin toplamı olarak tanımlamıştır (Gu ve ark., 2014).

Shi ve Wang (2013), "The Laplacian incidence energy of graphs" isimli çalışmasında Laplacian etki enerjisini normalize edilmiş Laplacian özdeğerlerin kareköklerinin toplamı olarak tanımlamıştır (Shi ve Wang, 2013).

Bozkurt ve Bozkurt (2012), "On the sum of powers of normalized Laplacian eigenvalues of graphs" isimli çalışmasında $\alpha \neq 0$ olmak üzere α reel sayısı için sıfırdan farklı normalize edilmiş Laplacian özdeğerlerin α kuvvetlerinin toplamını

$$s_{\alpha} = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^{\alpha}$$

olarak tanımlamıştır (Bozkurt ve Bozkurt, 2012). $\alpha = 1$ için $s_1 = n$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ için $s_{1/2}$ Laplacian etki enerjisine eşit olur.

Bozkurt (2019), "Note on the Sum of Powers of Normalized Signless Laplacian Eigenvalues of Graphs" isimli çalışmasında, $\alpha \neq 0$ olmak üzere α reel sayısı için sıfırdan farklı normalize edilmiş işaretli Laplacian özdeğerlerin α kuvvetlerinin toplamını

$$\sigma_{\alpha} = \sum_{i=1}^n (\gamma_i^+)^{\alpha}$$

olarak tanımlamıştır (Bozkurt Altındağ, 2019). $\alpha = 1$ için $\sigma_1 = n$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ için $\sigma_{1/2}$ Randic etki enerjisine eşit olur.

Li ve arkadaşları (2018), "Bounding the sum of powers of normalized Laplacian eigenvalues of a graph" isimli çalışmada s_{α} için aşağıdaki alt ve üst sınırları elde etmişlerdir.

Teorem 2.1.(Li ve ark., 2018) G , $n \geq 2$ noktalı bağlantılı bir graf ve $1 \leq k \leq n - 2$ olmak üzere k pozitif bir tam sayı olsun.

(i) $0 < \alpha < 1$ için

$$s_{\alpha}(G) \leq k^{1-\alpha} \left(\frac{nk}{n-1} \right)^{\alpha} + (n-1-k) \left(\frac{n}{n-1} \right)^{\alpha}$$

eşitlik ancak ve ancak $G \cong K_n$ olduğu durumda sağlanır.

(ii) $\alpha > 1$

$$s_{\alpha}(G) \geq k^{1-\alpha} \left(\frac{nk}{n-1} \right)^{\alpha} + (n-1-k) \left(\frac{n}{n-1} \right)^{\alpha}$$

eşitlik ancak ve ancak $G \cong K_n$ olduğu durumda sağlanır.

(iii) $\alpha < 0$

$$s_{\alpha}(G) \leq k^{1-\alpha} \left(\frac{nk + \sqrt{(n-1-k)k[2(n-1)R_{-1} - n]}}{n-1} \right)^{\alpha} \\ + (n-1-k)^{1-\alpha} \left(\frac{n(n-1-k) - \sqrt{(n-1-k)k[2(n-1)R_{-1} - n]}}{n-1} \right)^{\alpha}$$

eşitlik ancak ve ancak $G \cong K_n$ olduğu durumda ve bazı güçlü regüler graflar için sağlanır.

Teorem 2.2. (Li ve ark., 2018) $G, n \geq 3$ noktalı m kenarlı ve t geren ağaçlı bir grafi verilsin. $\alpha \neq 0,1$ olmak üzere α gerçel bir sayı olsun. $k \geq 0$ gerçel sayısı için

$$s_{\alpha}(G) \geq P^{\alpha} + \frac{(k+1)(n-2)}{P^{\frac{\alpha}{(k+1)(n-2)}}} \left(\frac{2mt}{Q} \right)^{\frac{(k+1)n-(2k+1)}{(k+1)(n+1)(n-1)}\alpha} - \frac{k}{k+1} \left(\frac{2mt}{Q} \right)^{\frac{\alpha}{n-1}}$$

olur ve eşitlik ancak ve ancak $G \cong K_n$ olduğu durumda sağlanır.

Bozkurt-Altındağ (2021), "Sum of Powers of Normalized Signless Laplacian Eigenvalues and Randic (Normalized) Incidence Energy of Graphs" isimli çalışmada σ_α için aşağıdaki alt ve üst sınırları elde etmiştir (Altındağ, 2021).

Teorem 2.3. (Bozkurt Altındağ, 2021) G , $n \geq 3$ noktalı, bağlantılı, iki parçalı olmayan graf olsun.

(i) $0 \leq \alpha \leq 1$ ise

$$\sigma_\alpha(G) \leq 2^\alpha + \left(1 - \frac{2R_{-1}}{n}\right)^\alpha + \frac{\left(n - 3 + \frac{2R_{-1}}{n}\right)^\alpha}{(n-2)^{\alpha-1}}$$

(i) $\alpha \leq 0$ ya da $\alpha \geq 1$ ise

$$\sigma_\alpha(G) \geq 2^\alpha + \left(1 - \frac{2R_{-1}}{n}\right)^\alpha + \frac{\left(n - 3 + \frac{2R_{-1}}{n}\right)^\alpha}{(n-2)^{\alpha-1}}$$

eşitlik ancak ve ancak $\alpha = 0$ ya da $\alpha = 1$ ve $G \cong K_n$ olduğu durumlarda sağlanır.

Gu ve arkadaşları (2014), "Randic Incidence Energy of Graphs" isimli çalışmasında aşağıdaki Randic etki enerjisinin alt ve üst sınırlarını elde etmişlerdir.

Teorem 2.4. (Gu ve ark., 2014) G izole nokta içermeyen n noktalı bir graf olsun. Buradan

$$I_R E(G) \geq \sqrt{n}$$

Eşitlik ancak ve ancak $G \cong K_2$ olduğu durumda sağlanır.

Teorem 2.5. (Gu ve ark., 2014) G izole nokta içermeyen n ($n \geq 2$) noktalı bir graf olsun. Buradan

$$I_R E(G) \leq \sqrt{2} + \sqrt{(n-1)(n-2)}$$

eşitlik ancak ve ancak $G \cong K_n$ olduğu durumda sağlanır.

Shi ve Wang (2013), "The Laplacian incidence energy of graph" isimli çalışmasında Laplacian etki enerjisi için aşağıdaki alt ve üst sınırı elde etmiştir.

Teorem 2.6. (Shi ve Wang, 2013) G , n noktalı ve minimum derecesi δ olan bir graf olsun. Buradan

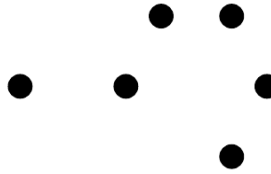
$$n \sqrt{\frac{\delta}{\delta + 1}} \leq LIE(G) \leq \sqrt{n(n - 1)}$$

eşitliğin iki tarafı da tam graflar için sağlanır.

3.BAZI ÖZEL GRAF ÇEŞİTLERİ

Nokta sayısı, kenar sayısı, noktalar ve kenarlar arasındaki ilişkiye göre isimlendirilen özel graflar vardır. Bu bölümde bazı özel graflar ve sembollerinden bahsedilecektir.

Tanım 3.1. Kenar kümesi boş küme olan yani hiç kenar içermeyen graflara *sıfır(null) graf* denir ve nokta sayısı n olmak üzere N_n ile gösterilir (Wilson, 1996).



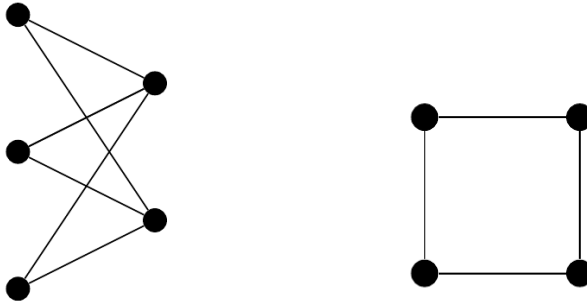
Şekil 3.1. Null graf

Tanım 3.2. Sadece bir noktadan oluşan ve kenar içermeyen grafa *trivial graf* denir.



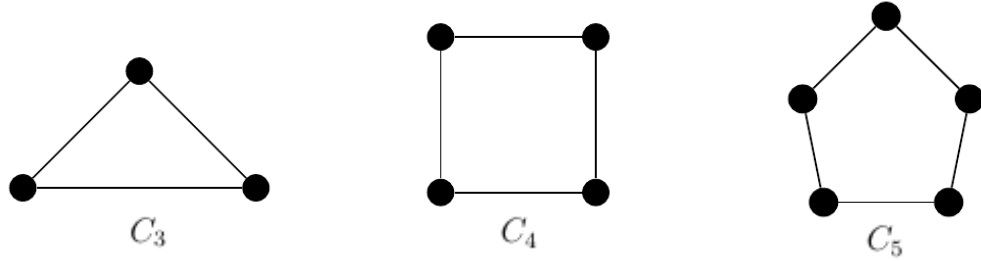
Şekil 3.2. Trivial graf

Tanım 3.3. Tüm noktalarının derecesi aynı olan graflara *regüler graf* denir. Noktaların derecesi r olmak üzere r -regüler ile gösterilir (Wilson, 1996).



Şekil 3.3. Regüler graf örnekleri

Tanım 3.4. Tüm noktalarının derecesi 2 olan bağlantılı graflara **devir graf** denir. Devir graflar aynı zamanda regüler graflardır. n nokta sayısı olmak üzere C_n ile gösterilir (Wilson, 1996).



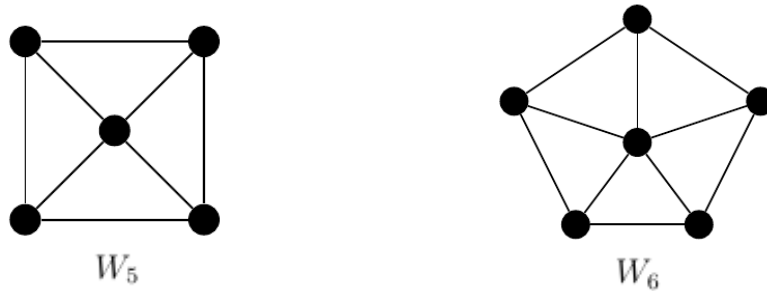
Şekil 3.4. Devir graf örnekleri

Tanım 3.5. Devir grafın bir kenarının silinmesi ile elde edilen graflara **yol graf** denir ve n noktası sayısı olmak üzere P_n ile gösterilir (Wilson, 1996).



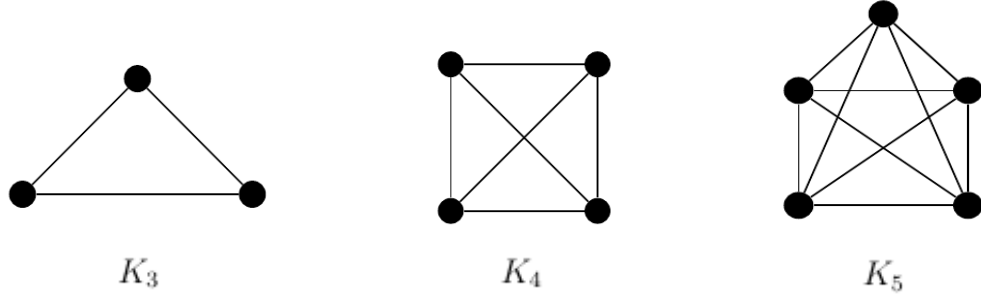
Şekil 3.5. Yol graf örnekleri

Tanım 3.6. C_{n-1} grafında tüm noktalara komşu olan yeni bir nokta eklenmesiyle oluşan grafa **tekerlek graf** denir ve W_n ile gösterilir (Wilson, 1996).



Şekil 3.6. Tekerlek graf örnekleri

Tanım 3.7. Tüm noktaları birbirine komşu olan graflara **tam graf** denir ve n nokta sayısı olmak üzere K_n ile gösterilir (Wilson, 1996).



Şekil 3.7. Tam graf örnekleri

Tanım 3.8. Devir içermeyen bağlantılı graflara **ağaç** denir ve ağaçlar T ile gösterilir (Wilson, 1996).



Şekil 3.8. Ağaç graf örnekleri

Tanım 3.9. X ve Y olarak iki ayrık nokta kümesinden oluşan, tüm komşuluklar X nokta kümesinden bir nokta ile Y nokta kümesinden bir nokta arasında olan graflara **iki parçalı** graf denir (Wilson, 1996).



Şekil 3.9. İki parçalı graf örnekleri

İki parçalı graflar bileşenlerindeki nokta sayısı t ve p olmak üzere $K_{t,p}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.10. İki parçalı graflarda eğer X nokta kümesindeki noktalar Y nokta kümesindeki tüm noktalara sadece tek bir kenar ile komşu ise bu grafa ***tam iki parçalı*** graf denir (Wilson, 1996).



Şekil 3.10. Tam iki parçalı graf örnekleri

Tanım 3.11. G grafi verilsin. Tüm noktaları ve kenarları sırasıyla G grafinin nokta ve kenar kümesinin elemanı olan grafa G 'nin ***alt grafi*** denir (Wilson, 1996).

Tanım 3.12. G grafi verilsin. G grafinin tüm noktalarını içeren ve ağaç olan alt graflarına ***geren ağaç*** denir ve geren ağaçlar t ile gösterilir (Wilson, 1996).

3.1. Graf Matrisleri

Öncelikle lineer cebirden bildiğimiz, özdeğer tanımını verelim. A $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. I_n birim matris, λ bilinmeyen olmak üzere $A - \lambda I_n$ matrisine karakteristik matris, bu matrisin determinatına ise A nın karakteristik polinomu denir (Çetin ve Orhun, 1998).

$$|A - \lambda I_n| = 0$$

Denklemin karakteristik denklemine ve bu denklemin köklerine matrisin özdeğerlerini denir. Matrisin özdeğerlerinin kümesi matrisin spektrumu olarak adlandırılır ve spec ile gösterilir.

A matrisinde λ matrisin bir özdeğeri olmak üzere

$$Ax = \lambda x$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı x vektörüne A matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir (Çetin ve Orhun, 1998).

M^T , M gerçel matrisinin transpozu olmak üzere MM^T matrisinin özdeğerlerinin kareköklerine M matrisinin singüler değerleri denir.

Graflar matrisler yardımıyla temsil edilebilir. Bu bölümde graflara ait bazı özel matrislerin tanımlarından bahsedilecektir.

Komşuluk matrisi

Bir G grafında $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ nokta kümesi, $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenar kümesi olsun. Buradan $A(G) = (A_{ij})$ komşuluk matrisi;

$$(A_{ij}) = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in E \\ 0, & v_i v_j \notin E \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Bozkurt ve ark., 2010).

Derece matrisi

Bir G grafında nokta kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olsun. Derece matrisi $D(G) = (D_{ij})$

$$(D_{ij}) = \begin{cases} d(v_i), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Bozkurt ve ark., 2010).

Etki Matrisi

Bir G grafında $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ nokta kümesi, $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenar kümesi olmak üzere etki matrisi $I(G) = (I_{ij})$

$$(I_{ij}) = \begin{cases} 1, & v_i \text{ ile } e_j \text{ komşu ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Fulkerson ve Gross, 1965).

Laplacian Matris

Bir G grafında $A(G)$ komşuluk matrisi ve $D(G)$ derece matrisi olmak üzere Laplacian matris $L(G) = D(G) - A(G)$ olarak tanımlanır. Aynı zamanda Laplacian matrisi $L(G) = (L_{ij})$

$$(L_{ij}) = \begin{cases} d(v_i), & i = j \\ -1, & v_i v_j \in E \\ 0, & v_i v_j \notin E \end{cases}$$

şeklinde de ifade edilir (Chung, 1997).

İşaretsiz Laplacian Matris

Bir G grafında $A(G)$ komşuluk matrisi ve $D(G)$ derece matrisi olmak üzere işaretsiz Laplacian Matris $L(G)^+ = A(G) + D(G)$ olarak tanımlanır. Aynı zamanda $L(G)^+ = (L^+_{ij})$

$$(L^+_{ij}) = \begin{cases} d(v_i), & i = j \\ 1, & v_i v_j \in E \\ 0, & v_i v_j \notin E \end{cases}$$

şeklinde de ifade edilir (Haemers ve Spence, 2004).

Randic Matris

Bir G grafında $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ nokta kümesi ve $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenar kümesi olsun. Randic Matris $R(G) = (R_{ij})$

$$(R_{ij}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}, & v_i v_j \in E \\ 0, & v_i v_j \notin E \\ 0, & i = j \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Bozkurt ve ark., 2010).

Randic Etki Matrisi

Bir G grafında $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ nokta kümesi ve $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenar kümesi olsun. Randic etki matrisi $I_R(G) = (I_{Rij})$

$$(I_{Rij}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d_i}}, & v_i \text{ ile } e_j \text{ komşu ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Gu ve ark., 2014).

Normalize Edilmiş Laplacian Matris

Bir G grafında $L(G)$ Laplacian matris ve $D(G)$ derece matrisi olmak üzere normalize edilmiş Laplacian matris $\mathcal{L}(G) = D^{-1/2} L(G) D^{-1/2}$ olarak tanımlanır. Aynı zamanda normalize edilmiş Laplacian matris $\mathcal{L}(G) = (\mathcal{L}_{ij})$

$$(\mathcal{L}_{ij}) = \begin{cases} 1, & v_i = v_j \text{ ve } d(v_i) \neq 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{d(v_i)d(v_j)}}, & v_i v_j \in E(G) \\ 0, & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

şeklinde de ifade edilir (Chung, 1997).

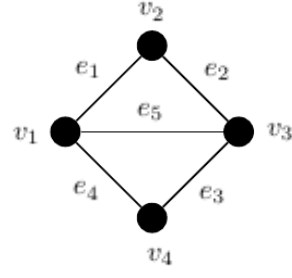
Normalize Edilmiş İşaretsiz Laplacian Matris

Bir G grafında $L(G)^+$ işaretsiz Laplacian Matris ve $D(G)$ derece matrisi olmak üzere normalize edilmiş işaretsiz Laplacian matris $\mathcal{L}(G)^+ = D^{-1/2} L(G)^+ D^{-1/2}$ olarak tanımlanır. Aynı zamanda normalize edilmiş işaretsiz Laplacian matris $L(G)^+ = (L^+_{ij})$

$$(L^+_{ij}) = \begin{cases} 1, & v_i = v_j \text{ ve } d(v_i) \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{d(v_i)d(v_j)}}, & v_i v_j \in E(G) \\ 0, & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

şeklinde de ifade edilir (Chung, 1997).

Örnek 3.1.1. Şekil 3.1.1. de verilen grafın komşuluk, derece, etki, Laplacian, işaretsiz Laplacian, Randic, Randic etki, normalize edilmiş Laplacian, normalize edilmiş işaretsiz Laplacian matrislerinin bulalım.



Şekil 3.1.1. G grafi

G'nin komşuluk matrisi $A(G)$

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

G'nin derece matrisi $D(G)$

$$D(G) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

G'nin etki matrisi $I(G)$

$$I(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

G'nin Randic matrisi $R(G)$

$$R(G) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix},$$

G'nin Randic etki matrisi $I_R(G)$

$$I_R(G) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

G'nin Laplacian matrisi $L(G)$

$$L(G) = D(G) - A(G) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

G'nin işaretli Laplacian matrisi $L(G)^+$

$$L(G)^+ = D(G) - A(G) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

G'nin normalize edilmiş Laplacian matrisi $\mathcal{L}(G)$

$$\mathcal{L}(G) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & 1 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 1 & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 1 \end{pmatrix},$$

G'nin normalize edilmiş işaretli Laplacian matrisi $L(G)^+$

$$\mathcal{L}(G)^+ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

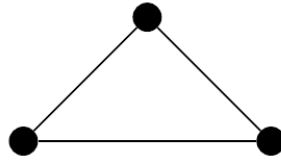
4. GRAF ENERJİ ÇEŞİTLERİ

Bir G grafında komşuluk matrisi $A(G)$ nin özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ olmak üzere Sırp Matematikçi Gutman 1978 yılında G grafının enerjisini

$$E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

olarak tanımlamıştır (Gutman, 1978).

Örnek 4.1. Şekil 4.1. de verilen grafın enerjisinin bulalım.



Şekil 4.1. G grafi

$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ komşuluk matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$ olmak

üzere

$$E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = 4.$$

Laplacian tipi enerji

Bir G grafında Laplacian matrisin özdeğerleri $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n = 0$ olarak tanımlansın.

Buradan Laplacian tipi enerji $LEL(G)$ aşağıdaki gibi tanımlanır (Liu ve Liu, 2008).

$$LEL(G) = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\mu_i}$$

Örnek 4.2 Şekil 4.1. de verilen grafin Laplacian tipi enerjisini bulalım.

$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ matrisinin özdeğerleri } \mu_1 = 3, \mu_2 = 3, \mu_3 = 0 \text{ olmak üzere}$$

$$LEL(G) = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\mu_i} = 2\sqrt{3}$$

Etki Enerjisi

Etki matrisinin singüler değerleri $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ olmak üzere etki enerjisi aşağıdaki gibi tanımlanır (Jooyandeh ve ark., 2009).

$$IE(G) = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\sigma_i}$$

$L(G)^+ = I(G)I(G)^T$ olduğundan işaretli Laplacian matrisin özdeğerleri $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n$ olmak üzere etki enerjisi aşağıdaki gibi de tanımlanabilir (Gutman ve ark., 2009).

$$IE(G) = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\theta_i}$$

Örnek 4.3. Şekil 4.1. de verilen grafin etki enerjisini bulalım.

$$L(G)^+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ matrisinin özdeğerleri } \theta_1 = 4, \theta_2 = 1, \theta_3 = 1 \text{ olmak üzere}$$

$$IE(G) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\theta_i} = 4.$$

Randic Enerji

Bir G grafinde Randic matrisin özdeğerleri $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n = 0$ olmak üzere Randic enerji

$$RE = RE(G) = \sum_{i=1}^{n-1} |\rho_i|$$

olarak tanımlanır (Bozkurt ve ark., 2010).

Örnek 4.4. Şekil 4.1. de verilen grafin Randic enerjisini bulalım.

$$R(G) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ matrisinin özdeğerleri } \rho_1 = 1, \rho_2 = \frac{-1}{2}, \rho_3 = \frac{-1}{2} \text{ olmak üzere}$$

$$RE(G) = \sum_{i=1}^n |\rho_i| = 2$$

Randic Etki Enerjisi

Bir G grafında normalize edilmiş işaretli Laplacian özdeğerleri $\gamma_1^+ \leq \gamma_2^+ \leq \dots \leq \gamma_n^+$ olmak üzere Randic etki enerjisi aşağıdaki gibi tanımlanır (Gu ve ark., 2014).

$$I_R E(G) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\gamma_i^+}$$

Örnek 4.5. Şekil 4.1. de verilen grafın Randic etki enerjisini bulalım.

$$\mathcal{L}^+(G) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ matrisinin özdeğerleri } \gamma_1^+ = \frac{1}{2}, \gamma_2^+ = \frac{1}{2}, \gamma_3^+ = 2 \text{ olmak}$$

Üzere

$$I_R E(G) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\gamma_i^+} = 2\sqrt{2}$$

Laplacian Etki Enerjisi

Bir G grafında $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_n = 0$ normalize edilmiş Laplacian matrisin özdeğerleri olmak üzere Laplacian etki enerjisi;

$$LIE = LIE(G) = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\gamma_i}$$

olarak tanımlanır (Shi ve Wang, 2013).

Örnek 4.6. Şekil 4.1. de verilen grafin Laplacian etki enerjisini bulalım.

$$\mathcal{L}(G) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ matrisinin özdeğerleri } \gamma_1 = \frac{3}{2}, \gamma_2 = \frac{3}{2}, \gamma_3 = 0 \text{ olmak}$$

üzere

$$LIE(G) = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\gamma_i} = \sqrt{6}.$$

5.RANDİC ETKİ VE LAPLACIAN ETKİ ENERJİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Bu bölümde grafların s_α, σ_α , Laplacian etki enerjisi LIE , Randic etki enerjisi $I_R E$ değerlerinin genelleştirilmesi verilecek ve bağlantılı iki parçalı ve bağlantılı iki parçalı olmayan graflar incelenecektir. Ön hazırlık bölümündeki lemmalar, teorem ve ispatlarda kullanılacaktır. n noktalı m kenarlı graflar $G(n, m)$ ile gösterilecektir.

5.1. Ön Hazırlık

$G \times K_2$, G ve K_2 graflarının kartezyen çarpımı ve G grafindaki geren ağaç sayısı $t = t(G)$ olmak üzere;

$$t_1 = t_1(G) = \frac{2t(G \times K_2)}{t(G)}$$

olarak tanımlanır (Bozkurt Altındağ, 2019).

Lemma 5.1.1. (Cvetkovic, 1980) G , n noktalı, m kenarlı ve t geren ağaçlı, bağlantılı bir graf olsun. O zaman

$$\prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i = \frac{2mt}{\prod_{i=1}^n d_i}$$

olur.

Lemma 5.1.2. (Bozkurt Altındağ, 2019) G n noktalı, m kenarlı, bağlantılı, iki parçalı graf ise $\prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i^+ = \frac{2mt}{\prod_{i=1}^n d_i}$, eğer G n noktalı, m kenarlı, bağlantılı, iki parçalı olmayan bir graf ise $\prod_{i=1}^n \gamma_i^+ = \frac{t_1}{\prod_{i=1}^n d_i}$ dir.

Lemma 5.1.3. (Gu ve ark., 2014) G izole noktası olmayan $n \geq 2$ noktalı bir graf olsun. O halde $\gamma_2^+ = \gamma_3^+ = \dots = \gamma_n^+$ ancak ve ancak $G \cong K_n$.

Lemma 5.1.4. (Bozkurt Altındağ, 2019) G iki parçalı, bağlantılı bir graf ise normalize edilmiş Laplacian özdeğerleri ile normalize edilmiş işaretli Laplacian özdeğerleri aynıdır. Yani $s_\alpha = \sigma_\alpha$.

Lemma 5.1.5. (Das ve ark., 2015) G grafi izole noktası olmayan n noktalı bir graf olsun. O halde $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{n-1}$ ancak ve ancak $G \cong K_n$.

Lemma 5.1.6. (Das ve ark., 2015) G izole noktası olmayan $n \geq 2$ noktalı bir graf olsun.

O halde $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{n-1}$ ancak ve ancak $G \cong K_n$ ya da $G \cong K_{p,n-p}$.

Lemma 5.1.7. (Zhou ve ark., 2008) $a_1, a_2, \dots, a_N$ sıfırdan farklı reel sayılar olsun. O halde

$$N \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i - \left(\prod_{i=1}^N a_i \right)^{\frac{1}{N}} \right] \leq N \sum_{i=1}^N a_i - \left(\sum_{i=1}^N \sqrt{a_i} \right)^2$$

$$\leq N(N-1) \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i - \left(\prod_{i=1}^N a_i \right)^{\frac{1}{N}} \right]$$

Ancak ve ancak $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ olduğu durumlarda eşitlik her iki tarafta da sağlanır.

Lemma 5.1.8. (Mitrinovic ve Vasic, 1970) p reel sayı olmak üzere $i = 1, 2, \dots, p$ için

$a_i > 0$ olsun. $A_p = \frac{\sum_{i=1}^p a_i}{p}$ ve $G_p = \left(\prod_{i=1}^p a_i \right)^{\frac{1}{p}}$ olmak üzere buradan

$$p(A_p - G_p) \geq (p-1)(A_{p-1} - G_{p-1})$$

dir.

5.2. Sonuçlar

Teorem 5.2.1. G , $n \geq 3$ noktalı grafi k bileşenden oluşsun öyle ki bunlardan p tanesi iki parçalı olsun. Buradan

$$s_\alpha(G) = \begin{cases} \geq 2^\alpha p + \sqrt{s_{2\alpha} - 4^\alpha p + (n-k-p-1)(n-k-p) \left[\prod_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i \right]^{\frac{2\alpha}{n-k-p}}} \\ \leq 2^\alpha p + \sqrt{(n-k-p-1)(s_{2\alpha} - 4^\alpha p) + (n-k-p) \left[\prod_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i \right]^{\frac{2\alpha}{n-k-p}}} \end{cases} \quad (5.1)$$

İspat. Normalize edilmiş Laplacian matrisin 0 ve 2 özdeğerlerinin katlılığının sırasıyla k ve p olduğuna dikkat edilsin. Lemma 5.1.7. deki eşitsizlikte $i = p + 1, \dots, n - k$ için $\alpha_i = \gamma_i^{2\alpha}$ ve $N = n - k - p$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$P = (n - k - p) \left[\left(\frac{1}{n - k - p} \right) \sum_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i^{2\alpha} - \left(\prod_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i^{2\alpha} \right)^{\left(\frac{1}{n-k-p} \right)} \right]$$

olmak üzere

$$P \leq (n - k - p) \sum_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i^{2\alpha} - \left[\sum_{i=p+1}^{n-k} \sqrt{\gamma_i^{2\alpha}} \right]^2 \leq (n - k - p - 1)P$$

olur. $\sum_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i^{2\alpha} = s_{2\alpha} - 4^\alpha p$ olduğundan

$$P \leq (n - k - p)(s_{2\alpha} - 4^\alpha p) - (s_\alpha - 2^\alpha p)^2 \leq (n - k - p - 1)P$$

Buradan

$$P = (n - k - p) \left[\left(\frac{1}{n - k - p} \right) \sum_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i^{2\alpha} - \left(\prod_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i^{2\alpha} \right)^{\left(\frac{1}{n-k-p} \right)} \right]$$

$$P = s_{2\alpha} - 4^\alpha p - (n - k - p) \left[\prod_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i \right]^{\frac{2\alpha}{n-k-p}}$$

Lemma 5.1.6. dan eşitlik ancak ve ancak $G \cong K_n$ ya da $G \cong K_{p,n-p}$ olduğu durumlarda sağlanır.

Teorem 5.2.1. G , $n \geq 3$ noktalı grafi k bileşenden oluşsun öyle ki bunlardan p tanesi iki parçalı olsun. Buradan

$$\sigma_\alpha(G) = \begin{cases} \geq 2^\alpha k + \sqrt{\sigma_{2\alpha} - 4^\alpha k + (n-k-p-1)(n-k-p) \left[\prod_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i^+ \right]^{\frac{2\alpha}{n-k-p}}} \\ \leq 2^\alpha k + \sqrt{(n-k-p-1)(\sigma_{2\alpha} - 4^\alpha k) + (n-k-p) \left[\prod_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i^+ \right]^{\frac{2\alpha}{n-k-p}}} \end{cases} \quad (5.2)$$

eşitlik ancak ve ancak $G \cong K_n$ ya da $G \cong K_{p,n-p}$ olduğu durumlarda sağlanır.

İspat. Normalize edilmiş işaretli Laplacian matrisinin 0 ve 2 özdeğerlerinin katlılığının sırasıyla p ve k olduğuna dikkat edilsin. Lemma 5.1.7.deki eşitsizlikte $i = p+1, \dots, n-k$ için $\alpha_i = (\gamma_i^+)^{2\alpha}$ ve $N = n-k-p$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$K = (n-k-p) \left[\left(\frac{1}{n-k-p} \right) \sum_{i=p+1}^{n-k} (\gamma_i^+)^{2\alpha} - \left(\prod_{i=p+1}^{n-k} (\gamma_i^+)^{2\alpha} \right)^{\left(\frac{1}{n-k-p} \right)} \right]$$

Olmak üzere

$$K \leq (n-k-p) \sum_{i=p+1}^{n-k} (\gamma_i^+)^{2\alpha} - \left[\sum_{i=p+1}^{n-k} \sqrt{(\gamma_i^+)^{2\alpha}} \right]^2 \leq (n-k-p-1)K$$

Olur. $\sum_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i^{2\alpha} = \sigma_{2\alpha} - 4^\alpha k$ olduğundan

$$K \leq (n-k-p)(\sigma_{2\alpha} - 4^\alpha k) - (\sigma_\alpha - 2^\alpha p)^2 \leq (n-k-p-1)K$$

Buradan

$$K = (n-k-p) \left[\left(\frac{1}{n-k-p} \right) \sum_{i=p+1}^{n-k} (\gamma_i^+)^{2\alpha} - \left(\prod_{i=p+1}^{n-k} (\gamma_i^+)^{2\alpha} \right)^{\left(\frac{1}{n-k-p} \right)} \right]$$

$$K = \sigma_{2\alpha} - 4^\alpha - (n - k - p) \left[\prod_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i^+ \right]^{\frac{2\alpha}{n-k-p}}$$

eşitlik ancak ve ancak $G \cong K_n$ ya da $G \cong K_{p,n-p}$ olduğu durumlarda sağlanır.

(5.1) ve (5.2) de $\alpha = 1/2$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.2.3. G , $n \geq 3$ noktalı grafi k bileşenden oluşsun öyle ki bunlardan p tanesi iki parçalı olsun. Buradan

$$LIE(G) = \begin{cases} \geq \sqrt{2}p + \sqrt{n - 2p + (n - k - p - 1)(n - k - p) \left[\prod_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i \right]^{\frac{1}{n-k-p}}} \\ \leq \sqrt{2}p + \sqrt{(n - k - p - 1)(n - 2p) + (n - k - p) \left[\prod_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i \right]^{\frac{1}{n-k-p}}} \end{cases} \quad (5.3)$$

ve

$$I_RE(G) = \begin{cases} \geq \sqrt{2}k + \sqrt{(n - 2k) + (n - k - p - 1)(n - k - p) + \left[\prod_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i^+ \right]^{\frac{1}{n-k-p}}} \\ \leq \sqrt{2}k + \sqrt{(n - k - p - 1)(n - 2k) + (n - k - p) \left[\prod_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i^+ \right]^{\frac{1}{n-k-p}}} \end{cases} \quad (5.4)$$

eşitlik ancak ve ancak $G \cong K_n$ ya da $G \cong K_{p,n-p}$ olduğu durumlarda sağlanır.

(5.1) ve (5.2) de $k = 1, p = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.2.4. $G(n, m)$ ($n \geq 3$) t geren ağaçlı, bağlantılı, iki parçalı olmayan bir graf olsun.

Lemma 5.1.1. de $\prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i = \frac{2mt}{\prod_{i=1}^n d_i}$ olduğundan buradan

$$s_{\alpha}(G) = \begin{cases} \geq \sqrt{s_{2\alpha} + (n-2)(n-1) \left[\frac{2mt}{\prod_{i=1}^n d_i} \right]^{\frac{2\alpha}{n-1}}} \\ \leq \sqrt{(n-2)s_{2\alpha} + (n-1) \left[\frac{2mt}{\prod_{i=1}^n d_i} \right]^{\frac{2\alpha}{n-1}}} \end{cases} \quad (5.5)$$

eşitlik ancak ve ancak $G \cong K_n$ olduğu durumlarda sağlanır.

Sonuç 5.2.5. (Bozkurt Altındağ, 2019) $G(n, m)(n \geq 3)$ t geren ağaçlı, bağlantılı iki parçalı olmayan bir graf olsun. Lemma 5.1.2. den $\prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i^+ = \frac{t_1}{2 \prod_{i=1}^n d_i}$ olur ve buradan

$$\sigma_{\alpha}(G) = \begin{cases} \geq 2^{\alpha} + \sqrt{\sigma_{2\alpha} - 4^{\alpha} + (n-2)(n-1) \left[\frac{t_1}{2 \prod_{i=1}^n d_i} \right]^{\frac{2\alpha}{n-1}}} \\ \leq 2^{\alpha} + \sqrt{(n-2)(\sigma_{2\alpha} - 4^{\alpha}) + (n-1) \left[\frac{t_1}{2 \prod_{i=1}^n d_i} \right]^{\frac{2\alpha}{n-1}}} \end{cases} \quad (5.6)$$

eşitlik ancak ve ancak $G \cong K_n$ olduğu durumlarda sağlanır.

(5.5) ve (5.6) de $\alpha = 1/2$ alınır aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.2.6. $G(n, m)(n \geq 3)$ t geren ağaçlı, bağlantılı, iki parçalı olmayan bir graf olsun. Buradan

$$LIE(G) = \begin{cases} \geq \sqrt{n + (n-2)(n-1) \left[\frac{2mt}{\prod_{i=1}^n d_i} \right]^{\frac{1}{n-1}}} \\ \leq \sqrt{(n-2)n + (n-1) \left[\frac{2mt}{\prod_{i=1}^n d_i} \right]^{\frac{1}{n-1}}} \end{cases} \quad (5.7)$$

eşitlik ancak ve ancak $G \cong K_n$ olduğu durumlarda sağlanır.

Sonuç 5.2.7. (Bozkurt Altındağ, 2019) $G(n, m)(n \geq 3)$ t geren ağaçlı, bağlantılı, iki parçalı olmayan bir graf olsun. Buradan

$$I_{RE}(G) = \begin{cases} \geq \sqrt{2} + \sqrt{(n-2) + (n-2)(n-1) + \left[\frac{t_1}{2 \prod_{i=1}^n d_i} \right]^{\frac{1}{n-1}}} \\ \leq \sqrt{2} + \sqrt{(n-2)^2 + (n-1) \left[\frac{t_1}{2 \prod_{i=1}^n d_i} \right]^{\frac{1}{n-1}}} \end{cases} \quad (5.8)$$

eşitlik ancak ve ancak $G \cong K_n$ olduğu durumlarda sağlanır.

(5.1) de $k = 1$ ve $p = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.8. (Bozkurt Altındağ, 2019) $G(n, m)(n \geq 3)$ t geren ağaçlı, bağlantılı, iki parçalı bir graf olsun. Lemma 5.1.1.den ve Lemma 5.1.2.den $\prod_{i=2}^{n-1} \gamma_i = \prod_{i=2}^{n-1} \gamma_i^+ = \frac{mt}{\prod_{i=1}^n d_i}$ olur ve buradan

$$s_\alpha(G) = \sigma_\alpha(G) = \begin{cases} \geq 2^\alpha + \sqrt{s_{2\alpha} - 4^\alpha + (n-3)(n-2) + \left[\frac{mt}{\prod_{i=1}^n d_i} \right]^{\frac{2\alpha}{n-2}}} \\ \leq 2^\alpha + \sqrt{(n-3)(s_{2\alpha} - 4^\alpha) + (n-2) \left[\frac{mt}{\prod_{i=1}^n d_i} \right]^{\frac{2\alpha}{n-2}}} \end{cases} \quad (5.9)$$

Ve $\alpha = 1/2$ alınırsa

$$I_{RE}(G) = LIE(G) = \begin{cases} \geq \sqrt{2} + \sqrt{n-2 + (n-3)(n-2) \left[\frac{mt}{\prod_{i=1}^n d_i} \right]^{\frac{1}{n-2}}} \\ \leq \sqrt{2} + \sqrt{(n-3)(n-2) + (n-2) \left[\frac{mt}{\prod_{i=1}^n d_i} \right]^{\frac{1}{n-2}}} \end{cases} \quad (5.10)$$

eşitlik ancak ve ancak $G \cong K_{p,n-p}$ olduğu durumlarda sağlanır.

Teorem 5.2.9. G , $n \geq 3$ noktalı grafi k bileşenden oluşsun öyle ki bunlardan p tanesi iki parçalı olsun. $\alpha \neq 0,1$ olmak üzere bir ε reel sayısı vardır ve buradan;

$$\sigma_\alpha(G) \geq k2^\alpha + (n-k-p) \left(\prod_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i^+ \right)^{\frac{\alpha}{n-k-p}} + \varepsilon \quad (5.11)$$

İspat. Lemma 5.1.8. de $i = 3, 4, \dots, n-k$ için $p = n-k-p$, $a_1 = (\gamma_2^+)^{\frac{\alpha}{2}}$, $a_2 = (\gamma_n^+)^{\frac{\alpha}{2}}$ ve $a_i = (\gamma_i^+)^{\frac{\alpha}{2}}$ olsun buradan

$$(n-k-p) \left[\left(\frac{\sum_{i=p+1}^{n-k} (\gamma_i^+)^{\frac{\alpha}{2}}}{n-k-p} \right) - \left(\prod_{i=p+1}^{n-k} (\gamma_i^+)^{\frac{\alpha}{2}} \right)^{\frac{1}{n-k-p}} \right] \geq \dots \geq \left((\gamma_2^+)^{\frac{\alpha}{2}} - (\gamma_n^+)^{\frac{\alpha}{2}} \right)^2$$

$$\sigma_\alpha(G) \geq k2^\alpha + (n-k-p) \left(\prod_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i^+ \right)^{\frac{\alpha}{n-k-p}} + \left((\gamma_2^+)^{\frac{\alpha}{2}} - (\gamma_n^+)^{\frac{\alpha}{2}} \right)^2.$$

$\varepsilon = \left((\gamma_2^+)^{\frac{\alpha}{2}} - (\gamma_n^+)^{\frac{\alpha}{2}} \right)^2$ olsun. O halde

$$\sigma_\alpha(G) \geq k2^\alpha + (n-k-p) \left(\prod_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i^+ \right)^{\frac{\alpha}{n-k-p}} + \varepsilon.$$

(5.11) de $\alpha = \frac{1}{2}$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir

Sonuç 5.2.12 G , $n \geq 3$ noktalı grafi k bileşenden oluşsun öyle ki bunlardan p tanesi iki parçalı olsun.. Bir ε reel sayısı vardır ve buradan ;

$$I_R E(G) \geq \sqrt{2}k + (n - k - p) \left(\prod_{i=p+1}^{n-k} \gamma_i^+ \right)^{\frac{1}{2(n-k-p)}} + \varepsilon \quad (5.12)$$

(5.11) de $k = 1, p = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.10. (Bozkurt Altındağ, 2019) $G(n, m)(n \geq 3)$ t geren ağaçlı, bağlantılı, iki parçalı olmayan bir graf olsun. Bir ε reel sayısı vardır ve Lemma 5.1.2. den $\prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i^+ = \frac{t_1}{2 \prod_{i=1}^n d_i}$ olur ve buradan;

$$\sigma_\alpha(G) \geq 2^\alpha + (n - 1) \left(\frac{t_1}{2 \prod_{i=1}^n d_i} \right)^{\frac{\alpha}{n-1}} + \varepsilon \quad (5.13)$$

(5.13) de $\alpha = \frac{1}{2}$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.11. (Bozkurt Altındağ, 2019) $G(n, m)(n \geq 3)$ t geren ağaçlı iki parçalı bir graf olsun. Bir ε reel sayısı vardır ve buradan;

$$I_R E(G) \geq \sqrt{2} + (n - 1) \left(\frac{t_1}{2 \prod_{i=1}^n d_i} \right)^{\frac{1}{2(n-1)}} + \varepsilon \quad (5.14)$$

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Bu tezde s_α, σ_α , Randic etki ve Laplacian etki enerjileri için genelleştirilmiş alt ve üst sınırlar verilmiştir. Ayrıca iki parçalı olmayan grafların Laplacian etki ve s_α değerleri için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

6.2 Öneriler

s_α, σ_α gibi yeni bir graf parametresi tanımlanabilir ve bu parametre için alt ve üst sınırlar elde edilebilir. Laplacian etki ve Randic etki enerjilerine daha iyi alt ve üst sınırlar bulunabilir.

KAYNAKLAR

- Ahmed, H., 2019, Graph Routing Problem Using Euler's Theorem and Its Applications, *Engineering Mathematics*, 3 (1), 1-5.
- Altındag, S. B. B., 2021, Sum of powers of normalized signless Laplacian eigenvalues and Randic (normalized) incidence energy of graphs, *Bull. Int. Math. Virtual Inst*, 11 (1), 135-146.
- Bisen, S. K., 2017, Application of Graph theory in Operations Research, *International Journal of Innovative Science and Research Technology*, 2 (5), 162-164.
- Bozkurt Altındağ, Ş. B., 2019, Note on the sum of powers of normalized signless Laplacian eigenvalues of graphs, *Mathematics Interdisciplinary Research*, 4 (2), 171-182.
- Bozkurt, S. B., Güngör, A. D., Gutman, I. ve Cevik, A. S., 2010, Randic matrix and Randic energy, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 64 (1), 239-250.
- Bozkurt, S. B. ve Bozkurt, D., 2012, On the sum of powers of normalized Laplacian eigenvalues of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 68 (3), 917-930.
- Chakraborty, A., Dutta, T., Mondal, S. ve Nath, A., 2018, Application of graph theory in social media, *International Journal of Computer Sciences and Engineering*, 6 (10), 722-729.
- Chung, F. R., 1997, Spectral graph theory, 92, American Mathematical Soc., p.
- Cvetković, D., Doob. M., ve Sachs, H., 1980, Spectra of Graphs, Academic press, New York.
- Çetin, N. ve Orhun, N., 1998, Lineer Cebir, Anadolu Üniversitesi, p.
- Das, K. C., Gungor, A. D. ve Bozkurt, S. B., 2015, On the normalized Laplacian eigenvalues of graphs, *Ars Combinatoria*, 118, 143-154.
- Fulkerson, D. ve Gross, O., 1965, Incidence matrices and interval graphs, *Pacific journal of mathematics*, 15 (3), 835-855.
- Gu, R., Huang, F. ve Li, X., 2014, Randic's Incidence Energy of Graphs, *arXiv preprint arXiv:1405.7498*.
- Gupta, P. ve Sikhwal, O., 2014, A study of vertex-edge coloring techniques with application, *International Journal of Core Engineering & Management*, 1 (2), 27-32.
- Gurjar, M., 2012, Applications of Euler's Theorem, *International Journal of Modern Engineering Research (IJMER)*, 2 (5), 3017-3019.
- Gutman, I., 1978, The Energy of a Graph, *Ber. Math-Statist. Sect. Forschungsz. Graz*, 103, 1-22.
- Gutman, I., Kiani, D., Mirzakhah, M. ve Zhou, B., 2009, On incidence energy of a graph, *Linear Algebra and its Applications*, 431 (8), 1223-1233.
- Haemers, W. H. ve Spence, E., 2004, Enumeration of cospectral graphs, *European Journal of Combinatorics*, 25 (2), 199-211.
- Jooyandeh, M., Kiani, D. ve Mirzakhah, M., 2009, Incidence energy of a graph, *Match*, 62 (3), 561.
- Li, J., Guo, J.-M., Shiu, W. C., Altındağ, Ş. B. B. ve Bozkurt, D., 2018, Bounding the sum of powers of normalized Laplacian eigenvalues of a graph, *Applied Mathematics and Computation*, 324, 82-92.
- Liu, J. ve Liu, B., 2008, A Laplacian-energy-like invariant of a graph, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 59 (2), 355-372.
- Mitrinovic, D. S. ve Vasic, P. M., 1970, Analytic inequalities, Springer, p.

- Nikiforov, V., 2007, The energy of graphs and matrices, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326 (2), 1472-1475.
- Piperski, A., 2014, An application of graph theory to linguistic complexity, *Yearbook of the Poznań Linguistic Meeting*.
- Shi, L. ve Wang, H., 2013, The Laplacian incidence energy of graphs, *Linear Algebra and its Applications*, 439 (12), 4056-4062.
- Wang, Y., 2020, A Logical Proof of the Four Color Problem, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 8 (05), 831.
- Wilson, R. J., 1996, Introduction to Graph Theory (Fourth), p.
- Zhou, B., Gutman, I. ve Aleksic, T., 2008, A note on Laplacian energy of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 60 (2), 441-446.

