



**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI**

**FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ PLAKALARIN
TERMO-MEKANİK BURKULMA DAVRANIŞLARININ
SAYISAL İNCELENMESİ**

Doktora Tezi

Ahmed HASSAN AHMED HASSAN

Danışman
Doç. Dr. Naci KURGAN

SAMSUN
2021

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI**



**FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ PLAKALARIN
TERMO-MEKANİK BURKULMA DAVRANIŞLARININ
SAYISAL İNCELENMESİ**

Doktora Tezi

Ahmed HASSAN AHMED HASSAN

Danışman
Doç.Dr. Naci KURGAN

SAMSUN
2021

TEZ KABUL VE ONAYI

Ahmed HASSAN AHMED HASSAN tarafından, Doç. Dr. Naci KURGAN danışmanlığında hazırlanan “Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plakaların Termo-Mekanik Burkulma Davranışlarının Sayısal İncelenmesi” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 15.2.2021 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	İmza	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. İbrahim KELEŞ Samsun Üniversitesi Mekanik Anabilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret
Üye (Danışman)	Doç. Dr. Naci KURGAN Ondokuz Mayıs Üniversitesi Konstrüksiyon ve İmalat Anabilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Mustafa AKTAŞ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Elektrik Makineleri Anabilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Mevlüt GÜRBÜZ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Konstrüksiyon ve İmalat Anabilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Yusuf KANCA Hitit Üniversitesi Mekanik Anabilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY

... / ... / ...

Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım yüksek lisans/doktora/sanatta yeterlik tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

İmza

... /... / 20...

Ahmed HASSAN AHMED HASSAN

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı : Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plakaların Termo-Mekanik Burkulma Davranışlarının Sayısal İncelenmesi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 13.01.2021 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 4

Tek kaynak oranı : % 1 çıkmıştır.

İmza

... /... / 20...

Doç. Dr. Naci KURGAN

ÖZET

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ PLAKALARIN TERMO-MEKANİK BURKULMA DAVRANIŞLARININ SAYISAL İNCELENMESİ

Ahmed HASSAN AHMED HASSAN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalı

Doktora, Şubat/2021

Danışman: Doç.Dr. Naci KURGAN

Bu çalışmada, termo-mekanik yükler altında çalışan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plakaların (FDP) burkulma dayanımının hesaplanması için bir model geliştirilmesi hedeflenmiştir. Bu kapsamda, FDP'nin termo-mekanik burkulma analizi için Genişletilmiş Kantorovich Metodu (EKM) adlı yarı analitik bir yöntem bu doktora çalışmasında ilk kez uygulanmış ve sonuçlar değerlendirilmiştir. Ayrıca eğik plakaların burkulma davranışları da yine EKM kullanılarak incelenmiştir. Bu çalışmada, EKM kullanılarak burkulma denklemlerinin yeni bir türevi sunulmuştur. Burkulma denklemleri, varyasyonel hesap ve Trefftz (Minimum Potansiyel Enerji Farkı) istikrarlılık kriterleri kullanılarak çeşitli plaka teorilerine göre türetilmiştir. Bu çalışmada sunulan çeşitli sayısal çalışmalarda ince ve orta kalınlıkta plakalar incelenmiştir. Çalışmada elde edilen sayısal sonuçlar, literatürdeki mevcut sonuçlarla ve ANSYS programında sonlu elemanlar yöntemi (FEM) kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak doğrulanmıştır. Çeşitli sıcaklık dağılımları altında ince FDP'nin kritik sıcaklıkları arasındaki doğrusal ilişkiler gözlemlenmiş ve türetilmiştir. Elastik zeminin rijitliği, malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlılığı ve FDP boyunca sıcaklığın burkulma kapasitesi üzerindeki dağılımının etkileri araştırılmıştır. Elastik zeminin rijitliğinin FDP'nin burkulma kapasitesini arttırdığı görülmüştür. Ayrıca bazı sınır koşulları için elastik zeminin yüksek rijitli değerlerinde termo-mekanik burkulma eğrisini değiştirdiği de gözlemlenmiştir. Gerçekleştirilen çalışmalarla, FDP'nin termal ve/veya mekanik yükler altında özdeğer burkulma analizinde, bu tez çalışmasında kullanılan EKM'nun basit ve etkili olduğu sonucuna varılmıştır. Aynı şekilde, eğik plakaların özdeğer burkulma davranışlarının incelenmesinde EKM'nun kullanılmasının doğru ve kabul edilebilir sonuçlar verdiği, ancak eğim açısı arttıkça daha uzun hesaplama sürelerinin gerektiği görülmüştür. Bu çalışmanın, gelecekte EKM'nun burkulma sonrası problemlere uygulanması yönündeki çalışmalara zemin teşkil edeceği öngörülmektedir. Ayrıca bu çalışmada türetilen burkulma denklemlerinin, plastisite, karmaşık geometriler ve plaka problemlerinin çeşitli konfigürasyonlarına uygulanabilirliğinin araştırılması şeklindeki çalışmalara da bir temel teşkil edeceği düşünülmektedir.

Anahtar Sözcükler: Fonksiyonel derecelendirilmiş plaka, termo-mekanik burkulma, Genişletilmiş Kantorovich yöntemi, Sıcaklığa bağlı malzeme özellikleri, Pasternak elastik zemin, Eğik plaka.

ABSTRACT

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE THERMO-MECHANICAL BUCKLING BEHAVIOR OF THE FUNCTIONALLY GRADED PLATES

Ahmed HASSAN AHMED HASSAN

Ondokuz Mayıs University

Institute of Graduate Studies

Department of Mechanical Engineering

Doctorate, February/2021

Supervisor: Assoc. Prof. Naci KURGAN

In this study, it is aimed to develop a model for calculating the buckling limit of Functionally Graded Plates (FGP) operating under thermo-mechanical loads. In this context, the extended Kantorovich method (EKM) is implemented to the problem of the thermal and thermo-mechanical buckling of plates for the first time. In addition, EKM was also implemented in the buckling analysis of the skew plates for the first time. A new derivation of the buckling equations using EKM has been presented. The derivation is based on Trefftz stability criteria and obtained using the calculus of variation. The buckling equations are obtained based on many plate theories. Both thin and thick plates are treated in this work. The numerical results are validated by comparing them to the available results in the literature and to the results obtained using FEM in ANSYS program. Linear relations between critical temperatures of thin FGP under various temperature distributions have been observed and derived. The effects of the stiffness of the elastic foundation, the dependency of the material properties on temperature, and the distribution of the temperature through the thick FGP on the buckling capacity are all investigated. It is found that the stiffness of the elastic foundation scales up the buckling capacity of the FGP. In addition, it is also observed that for plates with some boundary conditions the high values of the stiffness of the elastic foundation changes the thermo-mechanical buckling curve. EKM is found simple and effective in the eigenvalue buckling analysis of FGP under thermal and/or mechanical loads. EKM is found simple and accurate in the eigenvalue buckling of skew plates. However, EKM it requires more terms and thus longer computation times as the skew angle increases. This makes EKM very slow in this particular case of skew plate. Future works should be in the direction of implementing the EKM to the post-buckling problem. Another direction is to expand the derivation given here to include more complexities of the plate problem. For example, the plasticity, complex geometries and the various configurations of the plate problem.

Keywords: Functionally graded plate, Thermo-mechanical buckling, Extended Kantorovich method, Temperature dependent material properties, Pasternak elastic foundation, Skew plate.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Yıllarca beni destekleyen ve bekleyen değerli annem, babam ve kardeşlerime sonsuz teşekkür ediyorum.

Doktora eğitimin süresince bilgi ve tecrübesiyle beni her zaman destekleyen, dinleyen, yol gösteren ve cesaretlendiren değerli hocam, danışmanım Sayın Doç. Dr. Naci Kurgan’a üzerimdeki tüm emekleri için çok teşekkür ederim. Doktora öğrencisi olan Sayın Nihat Can’a, işbirliği için ve yardımı için teşekkür ediyorum.

Burs verilen Yurtdışı Türkler ve Akraba Topluluklar Başkanlığı (YTB)’ye teşekkür ediyorum.

Ahmed HASSAN AHMED HASSAN

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ	1
1.1. Problemin Tanımı ve Önemi.....	1
1.2. Tezin Konusu ve Kapsamı	2
1.3. EKM'nin Evrimi	2
1.4. EKM İçin Yeni Kararlılık Denkleminin Türetmenin Gerekliliği.....	4
1.5. Tezin Organizasyonu	5
2. KAYNAK ÖZETLERİ	6
3. FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMELER	10
3.1. Giriş	10
3.2. FDM Kullanım Alanları.....	11
3.3. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plaka	12
3.3.1. FDP Plaka Olarak Sınıflandırılması	12
3.3.2. FDP'nin FDM Olarak Sınıflandırılması	13
3.3.3. FDP Konfigürasyonları.....	16
3.4. FDP Modellenmesi	18
3.4.1. Temel Bağıntılar	19
3.4.2. Plaka Teorileri	21
3.4.3. FDP Özellikleri Tayin Edilmesi	25
4. BURKULMA.....	28
4.1. Burkulmanın Tanımı.....	28
4.2. Plakaların Burkulması.....	29
4.3. FDP'nin Burkulması	29
4.4. FDP'lerde Termal Burkulma	30
4.5. Termal Yükleri.....	30
4.6. Sıcaklığa Bağlı FDP'nin Özellikleri	31
4.7. FDP'nin Termo-Mekanik Burkulması.....	31
5. ÇALIŞMADA KULLANILAN YÖNTEMLER.....	32
5.1. Genişletilmiş Kantorovich Metodu.....	32
5.1.1. Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisine Dayalı Türetme.....	32
5.1.2. Rafine FSDT'ye Dayalı Türetme	43
5.1.3. Rafine Plaka Teorisine Dayalı Türetme	44
5.1.4. Klasik Plaka Teorisine Dayalı Türetme.....	46
5.1.5. Elde Edilen Formülasyonlarla İlgili Notlar	50
5.1.6. EKM Prosedürü	51
5.2. Chebyshev Spektral Yöntemi.....	55

5.3. ANSYS Modeli.....	56
5.3.1. Plakanın Modellerinde Kullanılan ANSYS Elemanları	57
5.3.2. Sınır Şartları	58
5.3.3. ANSYS'te Burkulma Analizi	63
5.3.4. Plaka Modelinin Seçimi.....	66
5.3.5. Ağ Oluşturulması	67
5.3.6. Elastik Zeminin Modellenmesi.....	71
5.3.7. Eğik Plakada Yüklerin Modellenmesi.....	72
6. SAYISAL UYGULAMALAR.....	73
6.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plakaların Önemi	73
6.2. İnce Eğik Homojen Plakanın Burkulması.....	79
6.2.1. Boyutsuz Burkulma Yüğü.....	79
6.2.2. EKM Yakınsaması	80
6.2.3. EKM'nin Doğruluğunun İncelenmesi	82
6.2.4. Eğim Açısı, En Boy Oranı ve Elastik Zeminin Rijitliğinin Burkulma Faktörü Üzerindeki Etkileri.....	89
6.3. FDP'nin Termal Burkulması.....	95
6.3.1. İncelenen FDP'nin Özellikleri.....	95
6.3.2. Sıcaklık Dağılımı	96
6.3.3. EKM Doğruluğu	100
6.3.4. İnce FDP'nin Kritik Sıcaklıklarının Arasındaki İlişkiler.....	107
6.3.5. Sıcaklığa Bağlı Özelliklere Sahip Olan FDP'nin Burkulması.....	113
6.4. FDP'nin Termo-Mekanik Burkulması	115
6.4.1. EKM Doğruluğu	115
6.4.2. Sıcaklık Dağılımının Etkisi	118
6.4.3. Malzeme Sıcaklığa Bağlı Özelliklerinin Etkisi	121
6.4.4. Pasternak Elastik Zeminin Etkisi	122
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	125
KAYNAKLAR	128
ÖZ GEÇMİŞ.....	140

SİMGELER VE KISALTMALAR

Γ	Toplam potansiyel enerji
δ	Varyasyon operatörü
a, b, h	Plakanın boyu, eni ve kalınlığı
k_n, k_s	Pasternak zeminin normal ve kayma sertliği
k_n^*, k_s^*	Pasternak zeminin normal ve kayma boyutsuz sertliği
u, v, w	Plakadaki her hangi bir noktanın x,y,z eksenleri doğrultusundaki yer değiştirmeler
u_0, v_0, w_0	Plakadaki tarafsız düzleminde her hangi bir noktanın x,y,z eksenleri doğrultusundaki yer değiştirmeler
ε_{ij}	i,j eksenleri doğrultusundaki şekil değiştirme
σ_{ii}	i eksenini doğrultusundaki normal gerilme
τ_{ij}	i,j eksenleri doğrultusundaki kayma gerilme
E	Elastik modülü
μ	Poisson oranı
K_s	Kayma düzeltme faktörü
θ, φ	y,x eksenlerine göre dönmeler
z_0	Referans ve orta düzlemler arasındaki mesafe
$\bar{U}_{(z)}$	Varsayılan kayma dağılımı
w_b, w_s	kalınlık doğrultusundaki yer değiştirmenin eğilme ve kayma bileşenleri
v_m, v_c	FDP'nin metal ve seramik bileşenlerinin hacimsel oranları
n	FDP'nin malzeme değişiminin üssel indeksi
$\bar{O}_m, \bar{O}_c$	FDP'nin bileşen malzemelerin özellikleri
P_i	i eksenini doğrultusundaki uygulanan yük
D, A	Eğilme ve uzama sertliği
λ	Kiritik fakör çarpanı
$\Omega_{(z)}$	Termal genleşme katsayısı
K	Isı iletkenlik katsayısı
$\Delta T_{(z)}$	Sıcaklık artışı
T_0	Referans sıcaklık
$\Delta T_L^{cr}, \Delta T_N^{cr}$	Doğrusal ve doğrusal olmayan dağılmış kiritik sıcaklık farkı
ΔT_U^{cr}	Kritik düzgün sıcaklık artışı
ζ, η	Eğik koordinatlar
ϕ	Eğim açısı

N_i	i eksenine doğrultusundaki yük
N_{cr}	Kritik Burkulma yükü
FDM	fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme
FDP	fonksiyonel derecelendirilmiş plaka
EKM	Genişletilmiş Kantorovich metodu
CPT	Klasik plaka teorisi
ESL	Eşdeğer tek katman
FSDT	Birinci mertebe kayma deformasyon teorisi
TSDT	Üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisi
HSDT	Yüksek mertebe kayma deformasyon teorisi
RPT	Rafine plaka teorisi
ODE	Adi diferansiyel denklemler
PDE	Kısmi diferansiyel denklemler
FEM	Sonlu elemanlar metodu
DQM	Diferansiyel kareleme metodu
TID	Sıcaklığa bağlı olmayan özelliklere sahip malzeme
TD	Sıcaklığa bağlı özelliklere sahip malzeme

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Kademeli ve devamlı FDM'nin en kesiti	10
Şekil 3.2. Devamlı ve kademeli FDM'nin özelliğinin değişimi	11
Şekil 3.3. Dikdörtgen plaka yapısı	12
Şekil 3.4. FDP'nin derecelendirme boyutluluğu	14
Şekil 3.5. FDP'nin simetrisi	15
Şekil 3.6. Devamlı ve kademeli FDP'ler.....	16
Şekil 3.7. Elastik zemin modelleri.....	17
Şekil 3.8. Sandviç FDP'ler	18
Şekil 5.1. Dikdörtgen plakada düzlem içi yükler	33
Şekil 5.2. Dikdörtgen plaka ve koordinat sistemi.....	40
Şekil 5.3. Eğik plaka ve koordinat sistemleri	47
Şekil 5.4. Eğik plakada düzlem içi yükler	47
Şekil 5.5. EKM çözüm akış şeması.....	53
Şekil 5.6. Sıcaklığa bağlı özelliklere sahip FPD'nin burkulması için EKM ile çözüm akış şeması.....	54
Şekil 5.7. Plakanın kabuk modelinde sınır şartları	59
Şekil 5.8. Plakanın katı modelinde sınır şartları.....	60
Şekil 5.9. Tek eksenli basınç altında tam ve simetri modelleri	61
Şekil 5.10. Simetri modelinin ilk burkulma modu, yük faktörü = 2,37823	61
Şekil 5.11. Tam modelin ilk ve ikinci burkulma modları.....	62
Şekil 5.12. ANSYS'teki kabuk modelinde gereken ek sınır koşulları.....	63
Şekil 5.13. Hafif sapmaya sahip olan plakanın orta noktasının yük-sapma eğri	64
Şekil 5.14. Büyük sapmaya sahip olan plakanın orta noktasının yük-sapma eğri	65
Şekil 5.15. Boy kalınlık oranı (a/h)'ye göre basit mesnetli kare plaka için CPT (Reddy, 2006), FSDT (Reddy, 2006), 3B (Moslemi vd, 2016) ve ANSYS tek eksenli burkulma yükü (Ncr) çözümleri.....	66
Şekil 5.16. Kenar başına dört elemanlı eğik plakanın kabuk modeli	68
Şekil 5.17. ANSYS'ın kabuk eleman modelinin FSDT (Reddy, 2006)'ye kıyasıyla doğruluğuna eleman sayısının etkisi.....	69
Şekil 5.18. FDP'nin en kesiti	70
Şekil 5.19. ANSYS'ın kabuk eleman modelinin TSDT (Shariat & Eslami, 2007)'ye kıyasla doğruluğuna katman sayısının etkisi	71

Şekil 6.1. Termal yük altında iki katmanlı izolatör	74
Şekil 6.2. İki katmanlı izolatör üzerindeki termal gerilmeleri.....	74
Şekil 6.3. Termal yük altında üç katmanlı izolatör.....	75
Şekil 6.4. Üç katmanlı izolatör üzerindeki termal gerilmeleri.....	75
Şekil 6.5. Termal yük altında beş katmanlı izolatör	76
Şekil 6.6. Beş katmanlı izolatör üzerindeki termal ana gerilmeler	76
Şekil 6.7. İki katmanlı kompozitin ve FDM'in malzeme değişimi	77
Şekil 6.8. Katmanlı ve FDM izolatörün boy merkezinde geçen ana termal gerilme	78
Şekil 6.9. Katmanlı ve FDM izolatörün üst kenarında Y-yönde termal gerilme.....	78
Şekil 6.10. Rastgele $g_0(\eta)$ 'dan başlayarak EKM yinelemelerin sırasında çıkan $g_i(\eta)$ ve $f_i(\xi)$	80
Şekil 6.11. Plakanın burkulma şekli: $f_3(x)$, $g_3(y)$	80
Şekil 6.12. Tek eksenli basınç altında çeşitli sınır koşullarına sahip dikdörtgen plakalar için boyutsuz burkulma yükü (λ^*) ile EKM iterasyonları arasında yakınsama.....	82
Şekil 6.13. Elastik zeminin kayma rijitliği (k_p^*) bir aralığı için tek eksenli yüklenmiş SSSF plakanın burkulma şekilleri	84
Şekil 6.14. EKM'nin terim sayısı (nt) ve eğim açısı (ϕ)'ye göre analitik (Kitipornchai vd, 1993) çözümlerine kıyasla EKM'nin boyutsuz tek eksenli burkulma yükü ($\lambda\xi^*$) çözümlerindeki hata.....	86
Şekil 6.15. EKM'nin terim sayısı (nt) ve eğim açısı (ϕ)'ye göre DQM (Wang & Yuan, 2018) çözümlerine kıyasla EKM'nin boyutsuz kayma burkulma yükü (λs^*) çözümlerindeki nispi hata.....	87
Şekil 6.16. Eğim açısı (ϕ) ve boy en oranı (a/b)'ye göre SSSS plaka için boyutsuz burkulma faktörleri	90
Şekil 6.17. Eğim açısı (ϕ) ve boy en oranı (a/b)'ye göre SSSS plaka için boyutsuz burkulma faktörleri	91
Şekil 6.18. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin normal rijitliği (kn^*) ve elastik zeminin kayma rijitliği (kp^*)'ye göre SSSS dikdörtgen plaka için boyutsuz tek eksenli burkulma yükü ($\lambda\xi^*$).....	92
Şekil 6.19. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin normal rijitliği (kn^*) ve elastik zeminin kayma rijitliği (kp^*)'ye göre SSSS eğik plaka ($\phi = 30^\circ$) için boyutsuz tek eksenli burkulma yük ($\lambda\xi^*$)	93
Şekil 6.20. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin normal rijitliği (kn^*) ve elastik zeminin kayma rijitliği (kp^*)'ye göre SSSS dikdörtgen plaka için boyutsuz çift eksenli burkulma yük (λb^*).....	93
Şekil 6.21. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin normal rijitliği (kn^*) ve elastik zeminin kayma rijitliği (kp^*)'ye göre SSSS dikdörtgen plaka için boyutsuz kayma burkulma yükü (λs^*)	94
Şekil 6.22. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin normal rijitliği (kn^*) ve elastik zeminin kayma rijitliği (kp^*)'ye göre CCCC dikdörtgen plaka için boyutsuz tek eksenli burkulma yükü ($\lambda\xi^*$) ...	94
Şekil 6.23. Paslanmaz çelik SUS304'nin ve silisyum nitrür Si_3N_4 'nin sıcaklığa bağlı özellikleri.....	96

Şekil 6.24. Malzeme değişim indeksi $n = 2$ 'ye sahip Al/Al_2O_3 FDP'nin kalınlığı boyunca doğrusal olmayan sıcaklık dağılımının yaklaşık seri ve integral çözümleri	98
Şekil 6.25. Malzemenin değişim indeksi (n) ve yaklaşık seri çözümünün terim sayısına göre Al/Al_2O_3 FDP'nin kalınlığı boyunca integral çözümüne kıyasla sıcaklık dağılımının ortalama hatası	99
Şekil 6.26. Malzemenin değişim indeksi (n)'ye göre Al/Al_2O_3 FDP'nin kalınlığı boyunca sıcaklık dağılımının eşit aralıklı kontour şekli.....	100
Şekil 6.27. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (kn^*) ve boyutsuz kayma rijitliğine (kp^*) göre dikdörtgen SSSS FDP'nin termal burkulma sıcaklığı ($n = 1$)	108
Şekil 6.28. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (kn^*) ve boyutsuz kayma rijitliğine (kp^*) göre dikdörtgen SSSS FDP'nin termal burkulma sıcaklığı ($n = 2$)	110
Şekil 6.29. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (kn^*) ve boyutsuz kayma rijitliğine (kp^*) göre eğik SSSS FDP'nin termal burkulma sıcaklığı ($\phi = 30^\circ, n = 1$)	111
Şekil 6.30. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (kn^*) ve boyutsuz kayma rijitliğine (kp^*) göre eğik SSSS FDP'nin termal burkulma sıcaklığı ($\phi = 30^\circ, n = 2$)	112
Şekil 6.31. Sıcaklığa bağlı (TD) ve sıcaklığa bağlı olmayan (TID) özelliklere sahip $SUS304/Si_3N_4$ CCCC FDP için ΔT_{Ucr}	114
Şekil 6.32. Sıcaklığa bağlı (TD) özelliklere sahip $SUS304/Si_3N_4$ CCCC FDP için ΔT_{Lcr} ve ΔT_{Ncr}	115
Şekil 6.33. SSSS FDP için en boy oranı (b/a)'ya göre ΔT_{U^*} ile Y_0 ve Y_1 yükleri altında termo-mekanik burkulma eğrisi	116
Şekil 6.34. SSSS kare FDP için malzemenin değişim indeksi (n)'ye göre, ΔT_{U^*} ile Y_0 ve Y_2 yükleri altında termo-mekanik burkulma eğrisi	117
Şekil 6.35. CCCC kare FDP için malzemenin değişim indeksi (n)'ye göre ΔT_{U^*} ile Y_0 ve Y_1 yükleri altında termo-mekanik burkulma eğrisi	117
Şekil 6.36. SSSS FDP için en boy oranı (b/a)'ya göre, NY_0^* ile ΔT_L^* ve ΔT_N^* termo -mekanik burkulma eğrisi	118
Şekil 6.37. SSSS FDP için en boy oranı (b/a)'ya göre, NY_1^* ile ΔT_L^* ve ΔT_N^* termo -mekanik burkulma eğrisi	119
Şekil 6.38. SSSS FDP için malzemenin değişim indeksi (n)'ye göre, NY_0^* ile ΔT_L^* ve ΔT_N^* termo -mekanik burkulma eğrisi.....	119
Şekil 6.39. SSSS FDP için malzemenin değişim indeksi (n)'ye göre, NY_2^* ile ΔT_L^* ve ΔT_N^* termo -mekanik burkulma eğrisi.....	120
Şekil 6.40. CCCC FDP için malzemenin değişim indeksi (n)'ye göre, NY_0^* ile ΔT_L^* ve ΔT_N^* termo -mekanik burkulma eğrisi.....	120
Şekil 6.41. SSSS FDP için malzemenin değişim indeksi (n)'ye göre, NY_2^* ile ΔT_L^* ve ΔT_N^* termo -mekanik burkulma eğrisi.....	121
Şekil 6.42. Sıcaklığa bağlılığın FDP'nin termo-mekanik burkulması üzerine etkisi	121
Şekil 6.43. Elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (kn^*)'nin kare FDP'nin termo-mekanik burkulması üzerine etkisi	123

Şekil 6.44. Elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (kn^*)'nin dikdögen FDP'nin termo - mekanik burkulması üzerine etkisi	123
Şekil 6.45. Elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (kn^*)'nin ve boyutsuz kayma rijitliği (kp^*)'nin kare FDP'nin termo-mekanik burkulması üzerine etkisi.....	124



TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 3.1. Fonksiyonel modelleri.....	26
Tablo 5.1. Alüminyum (Al) ve alüminyum oksit (Al ₂ O ₃) malzeme özellikleri	70
Tablo 6.1. Alüminyum (Al) ve alüminyum oksit (Al ₂ O ₃) malzeme özellikleri	73
Tablo 6.2. EKM iterasyonu sırasında çıkan tek eksenli boyutsuz burkulma yükü ($\lambda\xi$ *).....	81
Tablo 6.3 Elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (kn *) ve elastik zeminin boyutsuz kayma rijitliği (kp *)'ye göre kare ince plaka için tek eksenli boyutsuz burkulma yükü ($\lambda\xi$ *) EKM, analitik (Thai vd, 2013) ve sonlu şerit yönteminin (Shahrestani vd, 2018) çözümleri.....	83
Tablo 6.4. Elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (kn *) ve elastik zeminin boyutsuz kayma rijitliği (kp *)'ye göre kare ince plaka için çift eksenli boyutsuz burkulma yükü (λb *) EKM ve analitik (Lam vd, 2000) çözümleri.....	83
Tablo 6.5. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (kn *) ve elastik zeminin boyutsuz kayma rijitliği (kp *)'ye göre dikdörtgen plakalar için $\pi 2\lambda\xi$ * EKM ve analitik (Akhavan vd, 2009) çözümleri	85
Tablo 6.6. Eşkenar SSSS ve CCCC eğik plakalar için EKM, analitik (Kitipornchai vd, 1993), DQM (Wang & Yuan, 2018), ve ANSYS'in FEM ile elde edilen tek eksenli burkulma yükü ($\lambda\xi$ *)	88
Tablo 6.7. Eşkenar SSSS ve CCCC eğik plakalar için EKM, analitik (Kitipornchai vd, 1993), DQM (Wang & Yuan, 2018), ve ANSYS'in FEM ile elde edilen boyutsuz tek eksenli burkulma yükü ($\lambda\xi$ *)	89
Tablo 6.8. Eşkenar eğik plakalar için EKM ve DQM (Wang & Yuan, 2018) ile elde edilen boyutsuz çift eksenli (λb *) ve kayma λs * burkulma yükleri.....	89
Tablo 6.9. Paslanmaz çelik/silisyum nitrür (SUS304/Si ₃ N ₄) özellikleri (Eslami, 2018).....	95
Tablo 6.10. Malzemenin değişim indeksi (n) ve en kalınlık oranı (a/h)'ye göre SSSS kare Al/Al ₂ O ₃ FDP için EKM, ANSYS'in FEM, IGA (Yu vd, 2017) ve Galerkin yöntemi (Javaheri & Eslami, 2002a, 2002b) ile elde edilen $\Delta TUcr$	101
Tablo 6.11. Malzemenin değişim indeksi (n) ve en kalınlık oranı (a/h)'ye göre kare CCCC Al/Al ₂ O ₃ FDP için EKM, Galerkin-power series yöntemi (Kiani vd, 2011), elemansız metodu (Zhao vd, 2009), FEM (Hung vd, 2011) ANSYS'in FEM ve Galerkin yöntemi (Javaheri & Eslami, 2002b) ile elde edilen $\Delta TUcr$	102
Tablo 6.12. Malzemenin değişim indeksi (n) ve en boy oranı (b/a)'ya göre $b/h=100$ 'ye sahip SSSS Al/Al ₂ O ₃ ince FDP için EKM, ANSYS'in FEM, ve Galerkin yöntemi (Javaheri & Eslami, 2002a, 2002b) ile elde edilen $\Delta TUcr$	102
Tablo 6.13. Malzemenin değişim indeksi (n) ve eğim açısı (ϕ)'ye göre eğik SSSS Al/Al ₂ O ₃ FDP için EKM, ANSYS'in FEM ile elde edilen $\Delta TUcr$	103
Tablo 6.14. Malzemenin değişim indeksi (n) ve boy kalınlık oranı (a/h)'ye göre SSSS Al/Al ₂ O ₃ kare FDP için EKM ve Galerkin yöntemi (Javaheri & Eslami, 2002a, 2002b) ile elde edilen $\Delta TLcr$	104
Tablo 6.15. Malzemenin değişim indeksi (n) ve en boy oranı (b/a)'ya göre $b/h=100$ 'ye sahip SSSS Al/Al ₂ O ₃ ince FDP için EKM ve Galerkin yöntemi (Javaheri & Eslami, 2002a, 2002b) ile elde edilen $\Delta TLcr$	104

Tablo 6.16. Malzemenin değişim indeksi (n) ve eğim açısı (ϕ)'ye göre eğik SSSS Al/Al ₂ O ₃ FDP için EKM ve EFG (Saadatpour vd, 1998) ile elde edilen ΔTL_{cr}	105
Tablo 6.17. Malzemenin değişim indeksi (n) ve boy kalınlık oranı (a/h)'ya göre SSSS Al/Al ₂ O ₃ kare FDP için EKM ve Galerkin yöntemi (Javaheri & Eslami, 2002a, 2002b) ile elde edilen ΔTN_{cr}	106
Tablo 6.18. Malzemenin değişim indeksi (n) ve en boy oranı (b/a)'ya göre $b/h=100$ 'ye sahip SSSS Al/Al ₂ O ₃ ince FDP için EKM ve Galerkin yöntemi (Javaheri & Eslami, 2002a, 2002b) ile elde edilen ΔTN_{cr}	106
Tablo 6.19. Malzemenin değişim indeksi (n) ve eğim açısı (ϕ)'ye göre eğik SSSS Al/Al ₂ O ₃ FDP için EKM ve EFG (Saadatpour vd, 1998) ile elde edilen ΔTN_{cr}	107



1. GİRİŞ

1.1. Problemin Tanımı ve Önemi

Plakalar, kiriş ve kabukların yanında ana yapısal eleman türlerinden biridir (Eslami, 2018). Plaka, boyutlarından biri diğer iki boyutundan önemli ölçüde daha küçük olan düz gövde olarak tanımlanabilir (Bhaskar & Varadan, 2014). Plakalar uygulamalarda çalışma altındaki mevcut yüklere göre statik ve/veya dinamik analiz ile incelenmelidir. Statik analiz, ayrıca yükleme formuna göre burkulma ve eğilme analizleri de içermektedir (Reddy, 2006). Düz bir plaka, tarafsız düzlemde kenar basınç eylemi altında veya kenarları paralel kayma kuvvetleri olduğunda, düzlem içinde deforme olur ancak kuvvetler küçük olduğunda tamamen düz kalmaktadır. Yük arttığında, plaka düzlüğünü kaybeder, yani plaka şekil değiştirmektedir. Bunun nedeni, düz şeklin artan yük altında artık istikrarlı olmamasıdır. Bu istikrarsızlık durumuna, yani istikrar kaybına, burkulma adı verilmektedir (Yoo & Lee, 2011).

Burkulma, yapının akma dayanımından daha düşük gerilmeler altında gerçekleşebilmektedir. Burkulmaya neden olan yüke kritik yük veya burkulma yükü denilmektedir. Burkulma, elemanın malzemesine, geometrisine, yüke ve sınır koşullarına bağlı olarak basınç altındaki elemanlarda meydana gelmektedir. Ancak, kolon ya da çubuklardan farklı olarak, plakalar burkulmadan sonra da yük taşıyabilirler. Plaka istikrarlılığını kaybettikten sonra başka bir istikrarlı şekil (mod) almaktadır. Fakat yine yeterli yükleme durumunda istikrarlılığını kaybeder ve mevcut modunu değiştirerek benzer durumlar oluşabilmektedir. Bu farklı modların incelenmesi burkulma sonrası analiz olarak isimlendirilmektedir (Shen, 2016).

Plakalar yüksek sıcaklıkta kullanıldığında, malzemenin özelliklerinde ısıdan dolayı bir değişikliğe ve aynı zamanda basınç-düzlem kuvvetleri, daha sonra termal burkulmaya neden olabilmektedir. Ayrıca, plaka yüksek sıcaklıklarda mekanik yükler altında plakada termal-mekanik burkulma oluşabilmektedir. Termo-mekanik yükler, burkulma analizi problemini daha da karmaşık hale sokmaktadır (Eslami, 2018).

Yüksek sıcaklıklarda, plakalar genellikle dayanıklı termal özellikleri (genellikle bir seramik tarafından sağlanır) ve iyi mekanik özellikleri (genellikle bir metal tarafından sağlanır) sağlamak için sentezlenen kompozit malzemeler şeklinde çeşitli malzemelerden oluşan termal izolatörler olarak kullanılmaktadır. Bu yüksek sıcaklıklarda, katmanlar arasında oluşan gerilmeler kompozit plakanın katmanlarının ayrılmasına neden olmaktadır. Bu problem, her katman ve bir sonraki katman

arasındaki özelliklerin farkını azaltarak katmanlar arasındaki gerilmeleri azaltan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin (FDM) geliştirilmesi ile çözülmüştür. FDM'den yapılmış plakaya FDP ifadesi şeklinde kısaltılmaktadır. FDP'nin, termo-mekanik burkulma çalışmasının her hangi termo-mekanik yük ve sınır koşullarında hala kesin bir çözümü yoktur (Eslami, 2018). Bu analizi yapmak için şimdiye kadar kullanılan tüm yöntemler yaklaşıktır. Termo-mekanik yük altında FDP'nin burkulma analizinde çeşitli yaklaşık analitik ve sayısal yöntemlerin incelenmesi ve çözümlenmesi, aktif bir araştırma alanıdır. Bu çalışmada, termo-mekanik yükler altında kalan FDP'nin burkulma davranışları incelenerek, plakaların termal ortamlarda burkulma yüklerini hesaplamak için bir yöntem geliştirilmesi hedeflenmiştir.

1.2. Tezin Konusu ve Kapsamı

FDP'nin ana uygulamalarından biri de şiddetli termo-mekanik yükleme altında hizmet veren termal izolatörlerdir. Bu problem pratik bir öneme sahiptir ve çözülmesi gerekmektedir. Araştırmacılar bu problemi daha iyi analiz edebilmek için çeşitli yöntemleri hala araştırıp geliştirmektedir. Bu çalışmada, FDP'nin termo-mekanik özdeğer burkulma analizi için Genişletilmiş Kantorovich metodu (EKM) araştırılacaktır. EKM, FDP'nin termo-mekanik burkulma analizlerinde daha önce hiç kullanılmamıştır. Bu tezde ek olarak eğik plakaların burkulması incelenmiştir. Yazarların bilgisine göre, eğik homojen plakaların burkulması henüz EKM kullanılarak araştırılmamıştır. Eğik plakaların burkulmasını araştırmak için EKM'nin uygulanması ilk kez burada sunulmaktadır.

Ayrıca bu çalışmada sunulan EKM kullanarak burkulma denklemlerinin türetmesinin literatürde bulunanların aksine doğru olduğu iddia edilmektedir. Bu çalışmada EKM'nin çeşitli sınır koşullarına sahip FDP'nin termal-mekanik burkulması problemine uygulanması öngörülmüştür. Gerçekleştirilen çalışmanın numerik sonuçları, literatürdeki diğer yöntemlerin sonuçları ile ve ayrıca bu çalışma kapsamında ANSYS sonlu elemanlar analizi paketi sonuçları ile de karşılaştırılacaktır. Sonraki bölümde EKM'nin tarifi ve evrimi sunulmaktadır.

1.3. EKM'nin Evrimi

EKM, Kantorovich & Krylov tarafından (Kantorovich & Krylov, 1958)'de bir çözüm yöntemi olarak sunulan klasik Kantorovich yönteminden, sorunu yöneten d -boyutlu olan kısmi diferansiyel denklemler (PDE)'yi tek boyutlu olan adi diferansiyel

denklemler (ODE) hale getirerek geliştirildi. Bu ODE'lerin elde edilmesi, Denklem 1.1'de gösterildiği gibi, her x_k boyutunda bir tane olmak üzere, tek boyutlu fonksiyonların, $\psi^{(k)}$, çarpımı olarak d -boyutlu çözüm fonksiyonunu, $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_d)$, kestirerek başlaması şeklindedir.

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_d) \approx \prod_{k=1}^d \psi^{(k)} \quad (1.1)$$

EMK'de yaklaşık çözüm fonksiyonunu kullanarak orijinal PDE'den ODE'leri elde etmek için iki yaklaşım vardır. Her ikisi de yaklaşık çözümde sadece bir tek yönlü fonksiyonun bilinmediği ve diğerlerinin verildiği varsayımıyla başlamaktadır. İlk yaklaşım, enerji yaklaşımına dayalı olup yaklaşık çözümü toplam potansiyel enerji integraline ikame etmektir, ardından artık bir ODE olan yönetim denklemini türetmek için varyasyonel hesabı kullanmaktır. İkinci yaklaşımda, (Grimm & Gerdeen, 1975)'de sunulduğu gibi, yaklaşık çözüm, yönetici PDE'nin Galerkin formuna, yani zayıf formuna ikame edilir ve ardından ODE'yi elde etmek için varyasyonel hesabın temel ilkesi uygulanır. Elde edilen ODE'yi çözmek, klasik Kantorovich yönteminin adımlarını sonlandırır. Klasik Kantorovich yönteminin sınırlaması, doğruluğunun başlangıçta tahmin edilen fonksiyonlara bağlı olmasıdır.

Bu sınırlamanın üstesinden gelmek için (Kerr, 1968), tatmin edici bir yakınsama elde edilene kadar çözüm sürecini yineleyerek Kantorovich yöntemini EKM'ye genişletmiştir. EKM'de, ilk tahmin edilen çözüm, yani iz fonksiyonu, sınır koşullarının hiçbirini karşılamak zorunda değildir. Bu, EKM'nin Rayleigh-Ritz ve Galerkin'in yöntemleri gibi diğer varyasyonel yöntemlere göre ana avantajıdır. EKM'nin genellikle iz fonksiyona minimum irtibatla hızlı yakınsama ile doğru sonuçlar sağladığı rapor edilmektedir.

(Yuan & Zhang, 1992), Denklem 1.2'de gösterildiği gibi çözümü daha doğru tanımlayan çok terimli iz fonksiyonu kullanımını sunarak EKM'yi daha da genişletmiştir.

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_d) \approx \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^d \psi_i^{(k)} \quad (1.2)$$

Burada n , terimlerin sayısıdır. Çok terimli EKM, daha fazla doğruluk ve tek terimli EKM ile çözülemeyen ek sorunları çözme yeteneği sağlamıştır, örneğin, dikdörtgen plakanın saf düzlem içi kayma yükü altında burkulması (Hassan & Kurgan, 2020b; Yuan & Jin, 1998). Yaklaşık çözümde n terim kullanarak, d -boyutlu PDE, her

biri eşzamanlı olarak çözülmesi gereken n ODE'yi içeren d kümelerine indirgenerek çözülmektedir.

1.4. EKM İçin Yeni Kararlılık Denkleminin Türetmenin Gerekliliği

Bir yapının burkulma yükünü hesaplamamanın iki yolu vardır. Birincisi, hafif saptırılmış, diğer adıyla burkulmuş yapının doğrusal olmayan denge denklemlerini çözmektir. Tipik olarak, von Kármán doğrusalsızlığı bu doğrusal olmayan denge denklemlerinin türevlerine dâhil edilmektedir. İkinci yol, doğrusal özdeğer kararlılık denklemlerini çözmektir. Bu tür denklemler, bir kararlılık ölçütlerinin uygulanmasından kaynaklanmalıdır (Jones, 2006). Yine tipik olarak, von Kármán doğrusal olmayanları bu doğrusal kararlılık denklemlerinin türetilmesine dâhil edilmektedir. Bu çalışmada, kısalık olması için, malzemenin, Poisson oranı olan μ sabit, diğer özelliklerinin değişimi sadece kalınlık doğrultusunda, olduğu kabul edilmektedir.

Bu çalışmanın dikkate alınacak en önemli gözlem, EKM için burkulma denklemlerinin enerji yaklaşımına dayalı bir türetimi sunan tüm yayınlar, kararlılık denklemlerini denge denklemleriyle yanlış bir şekilde karıştırmış olmasıdır. Literatürdeki tüm bu yayınlarda, kararlılık denklemleri, durağan potansiyel enerji durumundan, yani Denklem 1.3'te gösterilen denge koşulundan türetilmiştir. Doğrusal denge denklemlerini türetmişler ve onları özdeğer kararlılık denklemleri gibi basitçe çözmüşlermiş. Ancak (Jones, 2006)'e göre bu temelde yanlıştır.

$$\delta \Gamma = 0 \quad (1.3)$$

Burada, Γ potansiyel enerjidir ve δ varyasyon operatörüdür. "Burkulma denklemleri" ve "kararlılık denklemleri" terimleri bu çalışmada birbirlerinin yerine kullanılmaktadır. Kararlılık denklemlerinin üzerine inşa edilebileceği ana kriterler, nötr denge yöntemi ve bitişik denge yöntemidir. İkinci kriter aynı zamanda minimum potansiyel fark prensibi veya Trefftz kriteri olarak da bilinmektedir.

Trefftz kriterine göre, kararlılık denklemleri, burkulmadan önceki denge konumundaki potansiyel enerjinin ikinci varyasyonunun durağan durumundan türetilmektedir. (Jones, 2006), plakalar için kararlılık denklemleri hakkında ayrıntılı çalışmalar yapmış ve önemli şu noktayı vurgulanmıştır; literatürdeki bazı çalışmalarda yanlış türetilmiş kararlılık denklemlerin sonuçları, doğru türetilmiş kararlılık denklemine benzese de, şekil ve parametrelerin değişkenliği bakımından yanlış gösterime sahip denklemler olduğunu ifade etmiştir.

Bu çalışma, EKM kullanılarak plakaların statik kararlılık (burkulma) denklemlerinin doğru türetilmesi amaçlanmaktadır. Türetme ayrıntılı olarak sağlanarak diğer araştırmacılara yeni konfigürasyonların türetilmesinde kolaylık sağlamak amaçlanmıştır.

1.5. Tezin Organizasyonu

Tezin birinci bölümünde problemin önemine, tezin konusu ve kapsamına ve tezin organizasyonuna yer verilmiştir. İkinci bölümde literatürde mevcut olan ilgili çalışmalar sunulmuştur. Üçüncü bölümde FDM ve FDP tanıtılmıştır. FDP'nin sınıfları, konfigürasyonları ve modellenmesi ve özelliklerinin tayin edilme modellerinden bahsedilmiştir. Mevcut plaka teorilerinden söz edilmiştir. Dördüncü bölümde burkulma ve FDP'nin burkulması tanıtılmıştır. Beşinci bölümde bu tezde uygulanan yöntemler sunulmuştur. EKM metodu ilgili genel bilgi verilip burkulma denklemleri çeşitli plaka teorilerine dayanılarak türetilmiştir. Chebyshev spektral metodu tanıtılmıştır. Son olarak, kullanılan ANSYS modelleri sunulmuştur.

Altıncı bölümde yapılmış sayısal uygulamalar sunulmuştur. İlk olarak, FDM'nin önemi, basit bir termo-elastik analiz ile gösterilmiştir. Sonraki alt bölümlerde eğik plakaların burkulması ve FDP'nin termal ve termo-mekanik burkulmasından bahsedilmiştir. Sonuçlar, tablolar ve grafikler şekilde verilmiştir. Son bölümde tezde elde edilen bulgular özetlenmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

FDM düz ve yeterince ince olduğunda ana temel yapısal modelleme unsurlarından biri olan plaka olarak modellenmektedir. FDM'den yapılan plakalar, FDP olarak adlandırılmaktadır. Plakaların analizi, eğilme, titreşim ve burkulma davranışlarını incelemeyi içermektedir. FDP'nin mekanik veya termal yükler altında burkulma analizi, yayınlanmış birçok araştırmada incelenmiştir. FDP'nin birleşik termal ve mekanik yükler altında burkulmasını daha az araştırılmıştır.

Ülkemizde bu alanda yayınlanmış tezlerden, FDP'den birkaç çalışmada bahsedilmiştir. Bu çalışmalarda çeşitli analiz yapılmış olmakla birlikte, en fazla titreşim üzerinde çalışılmıştır. (Demirhan, 2016; Ghassabi, 2017; Mertan, 2001; Özarsalan, 2013; Piren, 2012; Uymaz, 2008) serbest FDP'nin titreşiminden bahsetmişler. (Tunca, 2009) patlama, (Aydın, 2009; Özkeş, 2013) darbe yükleri altında FDP'nin titreşim analizi ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Diğer analiz türleri ile ilgili daha az çalışma bulunmaktadır. FDP'nin ısıl gerilmeleri üzerine (Akdoğan, 2019; Bağcı, 2009; Demirbaş, 2012; Güneş, 2005), dinamik tepkileri üzerine (Özarsalan, 2007; Pınarlık, 2014), balistik performansı üzerine (Arsalan, 2014; Aydın, 2014; Hakan, 2017) analiz çalışmaları yapmışlardır. FDP'nin eğilme analizi, (Öztürk, 2005) EKM'yi, (Demirhan & Taskin, 2019) ise Navier metodunu kullanarak sunulmuştur. FDP'nin burkulması ile ilgili tek tez çalışması olan (Taşkin, 2004), FDP'nin mekanik burkulmasından bahsetmiştir.

FDP'nin burkulması üzerine yurtiçinde yayınlan makalelerde de bulunmaktadır. (Akbaş, 2017) ve (Civalek vd, 2019), FDP'nin mekanik burkulma analizinde diferansiyel kareleme metodu (DQM), (Can vd, 2020) ise sonlu elemanlar metodu (FEM) kullanmışlardır. (Karapınar, 2019) FDP'nin termal yük altında burkulmasından bahsetmiştir. Yurt içindeki çalışmalar incelendiğinde, FDP'nin termo-mekanik burkulması ile ilgili herhangi bir çalışmaya rastlanılmamıştır. (DergiPark-Akademik, 2020; Tez-Merkezi, 2020).

Plakaların burkulma analizi, özdeğer burkulma analizi ve doğrusal olmayan burkulma sonrası analiz olmak üzere iki tür çalışmayı içerir. Yapılan literatür incelemesi, özdeğer burkulma analizi ile sınırlıdır. Bu çalışmada kullanılan burkulma terimi, yalnızca özdeğer burkulmayı ifade etmektedir. Literatürde FDP'nin termo-mekanik burkulması üzerine yapılan bütün analizler yaklaşık yöntemler ile yapılmıştır. Yaklaşık yöntemler analitik ve numerik olmak üzere iki bölümde sınıflandırılabilir.

Aşağıdaki literatürde FDP'nin termo-mekanik burkulma analizinde kullanılan yöntemler incelenmiş ve bu doktora çalışmasında kullanılacak olan EKM'nin bu çalışmalarda hiç kullanılmadığı gösterilmiştir.

Sayısal yöntemler çözüm alanının birçok noktasında bir değer olarak yaklaşık çözüm elde edilmektedir. Termo-mekanik yük altında FDP'nin burkulma analizine sayısal yöntemleri uygulayan çalışmalar aşağıda kısaca sunulmaktadır. (Sari vd, 2020), Chebyshev spektral yöntemiyle nano-FDP'nin termo-mekanik burkulma analizi üzerine çalışmalar yapmıştır.

FDP'nin termo-mekanik burkulma analizinde çeşitli teorilere dayalı olarak Sonlu elemanlar yöntemi (FEM) kullanılmıştır. (Moita vd, 2018), dikdörtgen FDP'nin doğrusal ve doğrusal olmayan mekanik ve termo-mekanik burkulmasını karşılaştırmak için Reddy'nin üçüncü mertebeli kayma deformasyon teorisine dayalı FEM kullanmıştır. FEM kullanarak (Talha & Singh, 2011) dikdörtgen FDP üzerine ve (Abolghasemi vd, 2014) eliptik bir kesikli dikdörtgen FDP üzerine termo-mekanik burkulma analizi çalışması yapmıştır. FEM kullanarak FDP üzerine (Lee & Yoon, 2021)'de termal, (Correia vd, 2019)'de ise termo-mekanik burkulma analizini içeren optimizasyon çalışmaları gerçekleştirilmiştir. (Lee & Yoon, 2021)'de ANSYS ticari sonlu eleman paketi kullanılmıştır. ANSYS hem plaka teorilerine hem de üç boyutlu elastisite teorisine dayalı FDP'nin modellenmesi yeteneği sağlamaktadır. Bu doktora çalışması kapsamında yayınlanan bir makalede, ANSYS® APDL kullanılarak plaka teorisi ve üç boyutlu elastisite teorisine dayanan modeller kullanılarak, FDP dâhil dikdörtgen plakaların modellenmesi ve burkulma analizi ile ilgili ayrıntılı bir çalışma (Hassan & Kurgan, 2019) gerçekleştirilmiştir.

Fonksiyonel dereceli sonlu şerit elemanı, metal ve seramik karışımından (Ghannadpour vd, 2012b) yapılmıştır. Bu yöntemin karmaşık bir sürümü ile (Amoushahi & Lajevardi, 2018) FDP'nin termo-mekanik burkulmasını incelemiştir. Düzgün olmayan rasyonel B-Spline'ye (NURBS) dayalı FEM sürümü olan izogeometrik analiz metodu (IGA), (Jari vd, 2014) ve (Yu vd, 2017) tarafından FDP'nin termo-mekanik burkulmasını araştırmıştır. (Shariyat vd, 2018) plaka teorilerine değil üç boyutlu elastisite teorisine dayanarak delikli halka FDP'nin termo-mekanik burkulmasını araştırmıştır.

Yaklaşık analitik yöntemler fonksiyon olarak yaklaşık çözüm elde etmeyi amaçlamaktadır. Termo-mekanik yük altında FDP'nin burkulma analizini yaklaşık analitik yöntemler ile inceleyen çalışmalar az olup aşağıda kısaca listelenmektedir.

(Kowal-Michalska & Mania, 2013) tam basit mesnet olan ince kare FDP'nin termo-mekanik burkulmasını Galerkin yöntemiyle araştırmıştır. (Yaghoobi & Yaghoobi, 2013), Frobenius yöntemi ile ek olarak Pasternak elastik zeminin etkisini incelemiştir. (Bateni vd, 2013), tam ankastre mesnet olan FDP'nin malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlılığının termo-mekanik burkulmaya etkisini Galerkin yöntemiyle araştırmıştır. (Refraci vd, 2020), tam basit mesnet olan FDP'nin burkulmasına ek olarak rutubet etkisini incelemiştir.

Bu tezde ana metot olan EKM'nin ilk uygulamaları arasında plakanın eğilme problemi (Kerr & Alexander, 1968) ve plakanın özdeğer problemleri, yani titreşim (Kerr, 1969) ve burkulma analizleri (Chen, 1972; Grimm & Gerdeen, 1975; Kerr, 1969) vardı. Bu çalışmaları, çeşitli karmaşıklıklar ve konfigürasyonlar dikkate alınarak plaka problemlerinin araştırılmasında EKM'nin uygulandığı çok sayıda çalışma takip etmiştir. Bu çalışmalar (Singhatanadgid & Singhanart, 2019)'da incelenmiştir.

Plakaların burkulma analizinde EKM uygulayan araştırmaların büyük çoğunluğunun ince plakaları dikkate aldığı ve dolayısıyla klasik plak teorisine (CPT) dayandığı görülmektedir. Sadece birkaç kayma deformasyon teorisine (Lopatin & Morozov, 2013; Shufrin & Eisenberger, 2005a, 2005b, 2006) dayanmaktadır. Ayrıca, dairesel plakaların incelendiği (Yu & Zhang, 1986; Zhang & Yu, 1988) ve eğik plakaların dikkate alındığı (Hassan & Kurgan, 2020a, 2020b) dışında hemen hemen tüm çalışmalar dikdörtgen plakaları incelemiştir. Değişken kalınlığa sahip plakaların burkulması (Eisenberger & Alexandrov, 2003; Shufrin & Eisenberger, 2005b)'de EKM kullanılarak incelenmiştir.

(Grimm & Gerdeen, 1975; Lopatin & Morozov, 2011, 2014; Shufrin & Eisenberger, 2006)'de EKM kullanılarak doğrusal dağılmış düzlem içi kuvvetler altında plakaların burkulması incelenirken, (Shufrin vd, 2008a)'de genel düzlem içi yükleme durumu ele alınmıştır. İnce plakaların termal yükler altında burkulmasını ele alan (Hassan vd, 2020) dışında, bu konudaki tüm yayınların mekanik yüklemeyi araştırdığı da gözlemlenmiştir.

Elastik zeminin plakaların burkulmasına etkisi (Grimm & Gerdeen, 1975; Hassan & Kurgan, 2020b; Hassan vd, 2020)'de ele alınmıştır. (Grimm & Gerdeen, 1975; Xie & Elishakoff, 2000; Yu & Zhang, 1986; Zhang & Yu, 1988) yaptıkları çalışmada, kararlılık denklemleri yaklaşım metodunu kullanılarak yönetim denklemlerinin zayıf formuna ikame etmişlerdir. Diğer tüm araştırmalar, toplam potansiyel enerjinin integraline yaklaşık çözümü ikame edip ardından varyasyonel

hesabı kullanarak yönetim denklemlerini türetmiştir.

Birçok mühendislik uygulaması, eğik geometrisinde plakalar kullanılmaktadır (Srinivasa vd, 2018), örn. kuyruk yüzgeci ve uçakların kanatları (Anonim, 2019). Bu doktora tez çalışmasında ayrıca eğik plakaların burkulma davranışları da yine EKM kullanılarak incelenmiştir. Literatür incelendiğinde, eğik plakaların eğilme analizinde birkaç araştırmacı tarafından EKM'nin kullanıldığı görülmüştür. Literatürde bu kapsamda yapılan çalışmalar aşağıda verilmiştir. Joodaky çeşitli yazarlar ile ankastre mesnet ince homojen eğik plaka (Kargarnovin & Joodaky, 2010), ankastre mesnet ince eğik FDP (Joodaky vd, 2012) ve elastik zeminlerin üzerine oturan ince eğik FDP (Joodaky & Joodaky, 2015) için kapalı formulu çözüm elde etmiştir.

(Hassan & Kurgan, 2020a), ince eğik FDP'nin eğilme analizi için tek terimli EKM ile çok terimli EKM'yi karşılaştırmıştır. İnce eğik FDP için eğilme analizinin alanı boyunca doğru sonuçlar elde etmek için çok terimli EKM kullanılmasının gerekliliğini göstermiştir.

(Rajabi & Mohammadimehr, 2019), elastik zemin üzerine oturan ince mikrosandviç eğik plakaların eğilme analizinde çok terimli EKM uygulamıştır. (Shufrin vd, 2010), çok terimli EKM'yi, eğik plakaları içeren genel trapez plakaları özel bir durum olarak gören genişletilmiş probleme uygulamıştır.

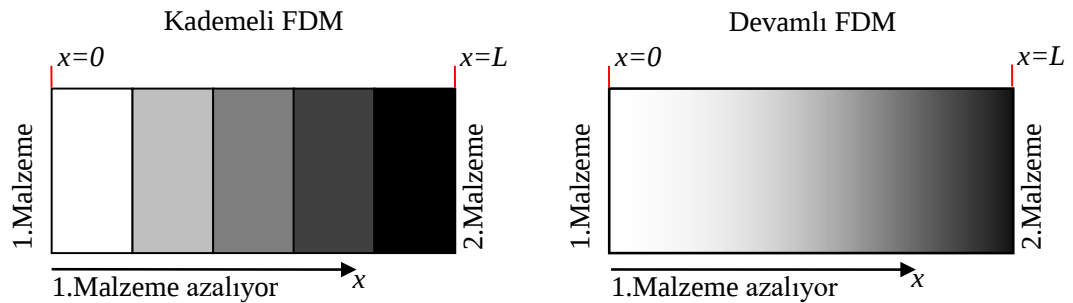
Bu çalışmalarla birlikte, eğik plakaların burkulması hiçbir şekilde, ne tek ne de çok terimli EKM kullanılarak değil, Galerkin'in yöntemi (Saadatpour vd, 1998), Rayleigh-Ritz yöntemi (Kitipornchai vd, 1993), elemansız Galerkin yöntemi (Jabbarzadeh vd, 2013), FEM (Jaunky vd, 1995), çift Fourier yöntemi (Kennedy & Prabhakara, 1978) Lagrangian çarpan yöntemi (Mizusawa vd, 1980), ve son zamanlarda sonlu şerit yöntemi (Shahrestani vd, 2018) ve diferansiyel kareleme yöntemi (DQM) (Wang & Yuan, 2018) de dâhil olmak üzere diğer yöntemler kullanılarak araştırılmıştır.

3. FONKSİYONEL DERECELENDİRMİŞ MALZEMELER

3.1. Giriş

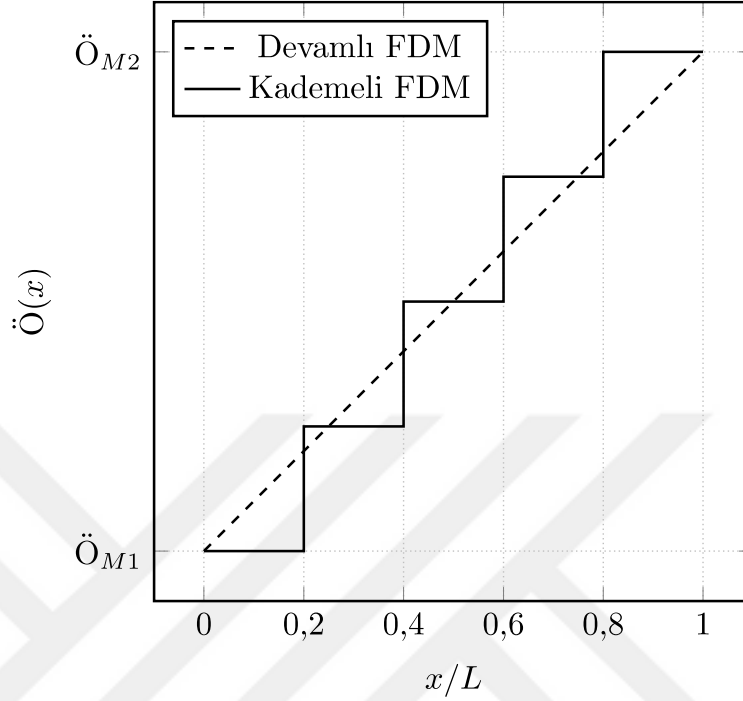
Kompozit, istenen amaç için, tek başlarına uygun olmayan iki veya daha fazla malzeme, özelliklerini sağlayacak şekilde fiziksel olarak, makro yapıda belli şartlarda, bir araya getirilerek elde edilen malzemedir. Çoklu malzeme kısmı kompozit olarak bilinir ve oluşturulan malzemeler arasında harmanlama veya çözünme olmaması açısından alaşımlardan farklıdır. Bileşikleri oluşturan malzemeler kompozit içinde ayrı ve farklı kalmaktadır. Tabakalı kompozitlerde ortaya çıkan problemlerden biri de iki farklı malzemenin bitişik katmanlarında yüksek tepki farkına yol açan malzeme özelliklerinde ani değişim nedeniyle yapıdaki süreksizliğin, yüksek gerilimlerle sonuçlandığı ve bu katmanlar arasındaki birleştirme yüzeyinde oluşan gerilme yığılması problemidir.

1984'te Japonya'da, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FDM), iki katmanlı izolatörün ara yüzünde oluşan yüksek termal gerilme karşısında ilk defa tasarlanıp uygulanmış. 1984'te Japonya'daki bir uzay düzlemi projesi için kompozit, 2000K'lık yüksek bir yüzey sıcaklığına ve sadece 10mm'lik bir kesitte 1000K'lık yüksek sıcaklık değişimine dayanıklı termal bariyer tasarlayıp üretmek için FDM kavramı ilk olarak kullanılmıştır. Malzeme özelliklerinde ani değişim nedeniyle oluşan gerilme süreksizliğini önlemek veya azaltmak için, bölüm boyunca termal gerilmeyi daha yumuşak bir hala getiren termal bariyerin iki yüzü arasındaki aşamalı değişen faz önerilmiştir. En basit FDM'lerde, Şekil 3.1'de gösterildiği gibi, iki farklı malzeme devamlı veya kademeli olarak birinden diğerine değişir. FDM boyunca özellikler, malzemenin dağılımının bir fonksiyonu olarak değişmektedir.



Şekil 3.1. Kademeli ve devamlı FDM'nin en kesiti

Şekil 3.1, Şekil 3.2’de gösterilen doğrusal malzeme değişimine sahip olan devamlı ve kademeli FDM’ler boyunca $\ddot{O}_{(x)}$ özelliğinin ($x = 0$)’de olan $\ddot{O}_{M1}$ ’den ($x = L$)’de olan $\ddot{O}_{M2}$ ’ye değişimini karşılaştırmaktadır.



Şekil 3.2. Devamlı ve kademeli FDM’nin özelliğinin değişimi

3.2. FDM Kullanım Alanları

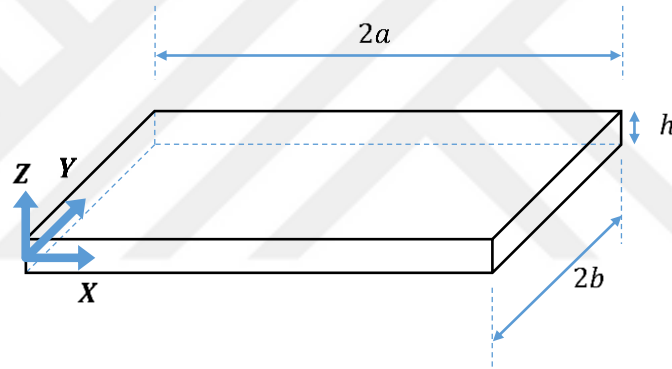
FDM’nin tasarımı mukavemet, tokluk, sertlik, optik özellikler, elektriksel özellikler, termal özellikler vb. dâhil birçok malzeme özelliklerinin ayarlanmasına izin vermektedir. Endüstriyel uygulamaların birçoğunda, örneğin termal bariyerler (Miyamoto vd, 1999), uçak motorları, tıbbi implantlar (Bakar vd, 2018; Kar & Srinivas, 2020; Konez vd, 2005; Mehrali vd, 2013; Sadollah & Bahreininejad, 2011), endüstriyel kesiciler (Konez vd, 2005), zırh malzemeleri (Mahamood vd, 2012), ve enerji depolama sistemlerinde (Uyar, 2018) FDM kavramının kullanımından yararlanılmaktadır.

Bunun bir sonucu olarak, imalatının çok yönlü yöntemlerle gerçekleştirilmesi ve ekonomik olması nedeniyle FDM’lere artan bir ilgi vardır (Cirakoglu vd, 2002a, 2002b). Malzeme özelliklerindeki kademeli değişim, farklı uygulamalar ve çalışma ortamlarında ayarlanabilmekte ve bu yüzden de fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler çoğu uygulamada tercih sebebi haline gelmiştir. Isıl direnç ve ısı iletkenlik gibi iki birbirine zıt özelliği aynı malzeme içinde bulunduracak şekilde

geliştirilen fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler, bu özelliklerinin yanında sağlamlık ve hafiflik özellikleriyle de ilk olarak uzay taşıtlarında kullanılmaya başlanmıştır. Özellikle motorların dış yüzeylerinde ve roket yapımında yapısal malzeme olarak kullanılmaktadırlar (Reynolds & Nathan, 2012; Tunca, 2009).

3.3. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plaka

FDP, FDM kavramına sahip bir plakadır. Plaka, (Reddy, 2006)'da şu şekilde tanımlanmıştır: “Plaka, kalınlığına göre büyük olan ve esnemenin yanı sıra eğilme deformasyonuna neden olan yüklere maruz kalan düz boyutlara sahip yapısal bir elemandır”. Şekil 3.3’de tipik koordinat sistemi ve karakteristik boyutların isimlerini içeren dikdörtgen bir plaka gösterilmektedir. Plakanın boyu $2a$, eni $2b$ ve kalınlığı h ile sembolize edilmektedir. Literatürde, FDP’lerin termo-mekanik burkulma analizinde çeşitli şekiller ve yapılandırmalar dikkate alınmıştır.



Şekil 3.3. Dikdörtgen plaka yapısı

3.3.1. FDP Plaka Olarak Sınıflandırılması

FDP’yi plaka olarak tanımlayan ilk husus, boy kalınlık a/h oranıdır. Plakalar, a/h ’ye göre kalın ($3 \leq 2a/h \leq 6$), orta kalın ($6 \leq 2a/h \leq 20$) ve ($20 \leq 2a/h \leq 80 \sim 100$) ince plakalar olarak sınıflandırılabilir (Ventsel & Krauthammer, 2001). İnce plakadan daha ince olana membran denilmektedir.

Membran çok ince olduğundan dolayı eğilme momentleri önemsiz hale gelmektedir. Bu yüzden membran üzerindeki analizlerde yalnızca düzlem içi gerilmeler dikkate alınmaktadır. İnce plakalarda eğilme momentleri ihmal edilemez miktarlarda oluşmaktadır. Orta kalınlıkta plakalarda, eğilme ve düzlem içi gerilmeye ek olarak, kalınlık doğrultusundaki kayma deformasyonları ihmal edilemez. Kalın plakalarda, kalınlık doğrultusundaki normal deformasyonlar ek olarak dikkate

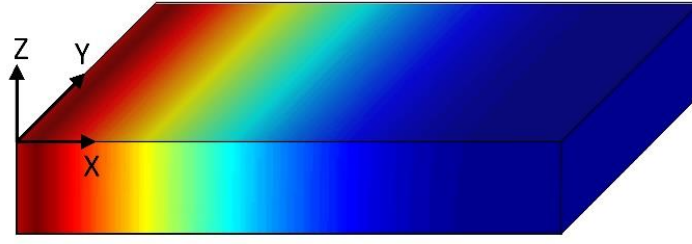
alınmaktadır. Kalın, orta kalın ve ince FDP'lerle ilgili termo-mekanik burkulma analizi çalışmaları literatüründe mevcuttur. Bu çalışmalara örnek olarak, ince plakalardan (Kowal-Michalska & Mania, 2013; Mania, 2014)'te, orta derecede kalın plakalardan (Cong vd, 2017; Tung, 2015)'te, ve kalın plakalardan (Bakora & Tounsi, 2015; Duc vd, 2016)'da bahsedilmektedir.

Diğer bir husus, kalınlık değişimi olup, odaklanılan literatürde sadece sabit kalınlığa sahip FDP'ler bulunmuştur. Bir plakanın tanımlanmasının bir sonraki hususu, boyutlarının ölçeğidir. Bu açıdan FDP, nano plakalar, mikro plakalar ve plakalar olarak sınıflandırılabilir. Nano-FDP ve mikro-FDP'ler birçok araştırmacı tarafından termo-mekanik burkulma için incelenmiştir (Aghazadeh vd, 2018). Nano-FDP ve mikro-FDP'ler bu doktora çalışmasının kapsamı dışındadır.

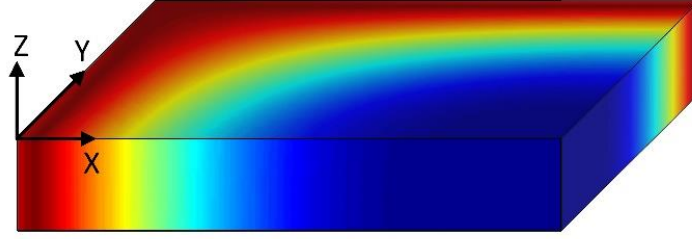
Bir diğer husus, FDP'nin şeklidir. Dikdörtgen, termo-mekanik burkulma analizi için en çok incelenen FDP şeklidir. Bununla birlikte, diğer FDP şekilleri de incelenmiştir. (Shariyat vd, 2018)'de halka, (Taj & Chakrabarti, 2013; Yu vd, 2017)'de eğik, (Kowal-Michalska & Mania, 2013)'de kare, ve (Fallah & Nosier, 2012; Kiani, 2017; Li vd, 2007)'de dairesel FDP'lerden bahsedilmektedir.

3.3.2. FDP'nin FDM Olarak Sınıflandırılması

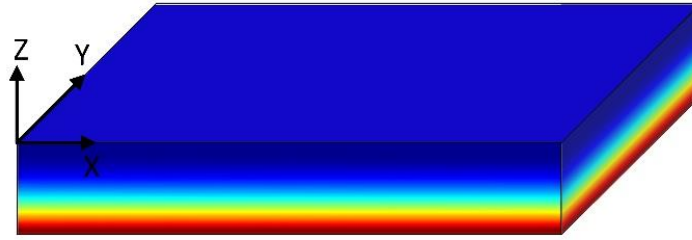
Bu sınıflandırma, FDP malzemesinin derecelendirilmesini tanımlamaktadır. Bu bölümdeki ilk husus, özellik değişimi meydana geldiği boyutların sayısını ifade eden FDP'nin boyutluluğudur. FDP'nin bileşenlerinin değişimi, Şekil 3.4'te gösterildiği gibi kalınlık veya düzlem içi iki boyut aracılığıyla gerçekleşir (Demirbas & Apalak, 2017; Hussein & Mulani, 2017). Plakaların termo-mekanik burkulma analizi literatürde, incelenen tek FDP, kalınlığı boyunca dereceli olan tek boyutludur.



a) Düzlem içi tek boyutlu derecelendirme



b) Düzlem içi çift boyutlu derecelendirme

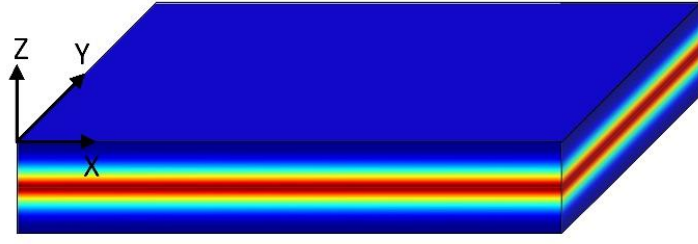


c) Kalınlık boyunca tek boyutlu derecelendirme

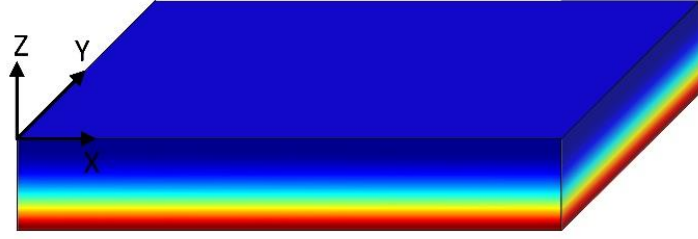
Şekil 3.4. FDP'nin derecelendirme boyutluluğu

Bir sonraki husus, FDP derecelendirilmesinin simetrisidir. Termal burkulma analizinde, bir çatallanma noktası olup olmayacağını belirlemede plakanın simetrisi önemlidir (Eslami, 2018). Şekil 3.5, simetrik ve simetrik olmayan dikdörtgen FDP'leri göstermektedir. Özel yükleme şekilleri ve sınır koşulları haricinde bir çatallanma noktasına ulaşmayı engelleyen, plakada simetri eksikliği ciddi bir başlangıç kusuru olarak kabul edilmektedir.

Literatürdeki çalışmalarda simetrik FDP'lere örnek olarak, (Chikh vd, 2016; Duc & Tung, 2010; Shen & Li, 2008; Shen & Zhu, 2010; Tung, 2015; Yaghoobi & Yaghoobi, 2013) ve simetrik olmayan FDP'lere örnek olarak, (Bateni vd, 2013; Fan & Wang, 2016; Kowal-Michalska & Mania, 2013; Yu vd, 2018) verilebilir.



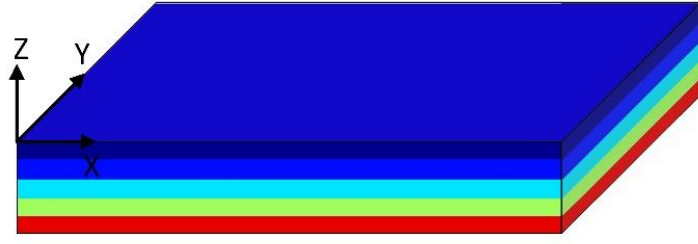
a) Simetrik FDP



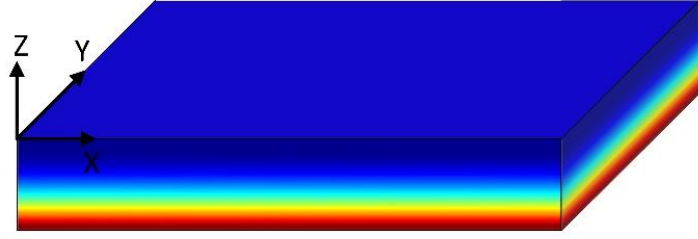
b) Simetrik olmayan FDP

Şekil 3.5. FDP'nin simetrisi

Bir diğer önemli husus, FDP derecelendirilmesinin sürekliliğidir. FDP, Şekil 3.6'da gösterildiği gibi, plakanın her noktasında özelliklerini belirleyen bir fonksiyona sahip sürekli değişimli tek bir katman olarak veya her birinin belirli bir kalınlığa sahip lamine homojen katmanlar olarak incelenebilir. Bunlardan birinin kullanımı modellerin çözüm yöntemlerine bağlıdır.



a) Kademeli FDP



b) Devamlı FDP

Şekil 3.6. Devamlı ve kademeli FDP'ler

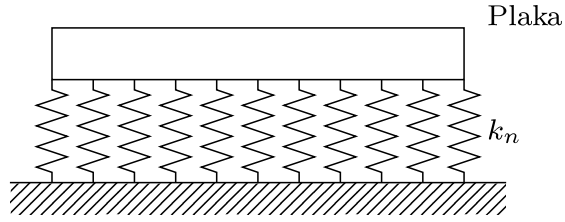
3.3.3. FDP Konfigürasyonları

3.3.3.1. Elastik Zemine Oturan FDP

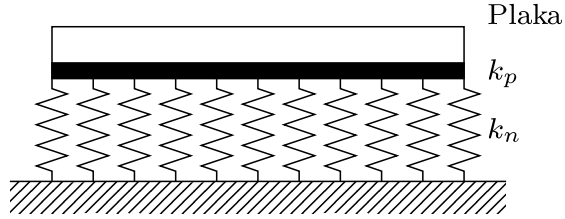
Bir önemli yapılandırma, elastik zemine dayanan FDP'dir. Elastik zemin için en basit model, kendi arasında bağlantı etkisi olmayan bir dizi ayrılmış k_n normal rijitliğine sahip olan yay olarak gören Winkler modelidir. k_n , plakanın katı olarak birim sapmasının olması için gereken normal basınçtır ($N/m^2/m$). Pasternak modeli, Winkler modeline parametre olarak bir k_p kayma rijitliğine sahip olan katmanı eklemektedir. k_p , plakanın katı olarak birim düzlem içi kayma yer değiştirmesinin olması için gereken yüküdür (N/m). Winkler ve Pasternak zemin modelleri Şekil 3.7'de gösterilmektedir. Pasternak modeli, yapı-zemin etkileşimlerinin mekanik davranışını tanımlamak için yaygın olarak kullanılmaktadır (Mahmoudi vd, 2017). Çoğunlukla k_n ve k_p , boyutsuz biçimde k_n^* ve k_p^* olarak ifade edilir.

$$k_n^* = \frac{k_n a^4}{100D}; \quad k_p^* = \frac{k_p a^2}{100D} \quad (3.1)$$

Burada, Şekil 3.3'te gösterildiği gibi, a plakanın boyunun yarısıdır.



a) Winkler zemin modeli



b) Pasternak zemin modeli

Şekil 3.7. Elastik zemin modelleri

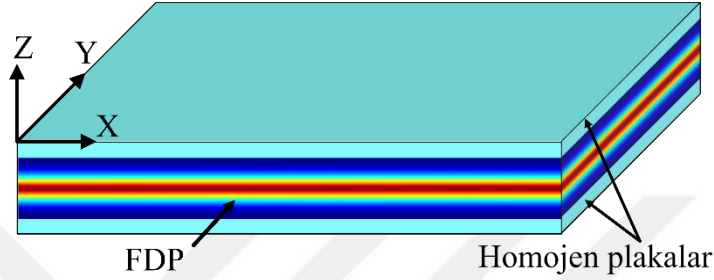
FDP'nin termo-mekanik burkulma analizi literatüründe kullanılan tek zemin modeli Pasternak modelidir. Pasternak zemin üzerindeki FDP, (Bakora & Tounsi, 2015; Bateni vd, 2013; Chikh vd, 2016; Cong vd, 2018; Cong vd, 2017; Duc vd, 2016; Duc & Van Tung, 2011; Fan & Wang, 2016; Shen & Zhang, 2012 ; Shen & Zhu, 2012; Yu vd, 2018)'de yaklaşık analitik yöntemler kullanılarak analiz edilmiştir. (Mansouri & Shariyat, 2015; Shams vd, 2016)'da ise sayısal yöntemler kullanılmışlardır. Tüm bu çalışmalarda sadece dikdörtgen FDP dikkate alındığını belirtmek gerekmektedir.

3.3.3.2. Sandviç FDP

FDP, Şekil 3.8'de gösterildiği gibi çekirdek malzemesi veya kapak malzemesi olarak sandviç yapıya dâhil edilebilir. Termo-mekanik burkulma analizi literatüründe, ikisi dikkate alınmış ve çalışılmıştır. (Shen & Li, 2008; Shen & Zhang, 2012; Shen & Zhu, 2012; Tung, 2015; Yaghoobi & Yaghoobi, 2013; Yu vd, 2018)'de çeşitli sandviç FDP'nin konfigürasyonları üzerinde termo-mekanik burkulma analizi yapılmışlardır. Tüm bu çalışmalarda yaklaşık analitik yöntemler uygulandığı görülmüştür. Ek olarak, tüm bu çalışmalar yalnızca dikdörtgen FDP'yi dikkate almıştır.



a) Homojen çekirdekli sandviç FDP



b) FDP çekirdekli sandviç FDP

Şekil 3.8. Sandviç FDP'ler

3.4. FDP Modellenmesi

Plakalar, elastisite teorisi veya malzeme-mekaniği yaklaşımı kullanılarak modellenebilmektedir (Thai & Kim, 2015). Elastisite teorisi, yüksek doğrulukta çözümler sunulabildiği için diğer yöntemlerinin doğruluğunu ve geçerliliğini değerlendirmek için referans noktası sağlamaktadır (Thai & Kim, 2015). Malzeme-mekaniği yaklaşımı ise, daha basit teorilerle sonuçlanan plaka problemini basitleştiren deformasyon geometrisine uygun hipoteze dayanır (Reddy, 2006). Sonuçlanan teorilere, plaka teorileri denmektedir.

FDP'lerin davranışının modellenmesi ve analizi, birçok plaka mekaniği kitaplarında tartışılmaktadır, ör. (Bhaskar & Varadan, 2014; Carrera vd, 2016; Chakraverty & Pradhan, 2016; Elishakoff vd, 2016; Eslami, 2018; Jones, 2006; Reddy, 2004, 2006; Szilard, 2004; Ventsel & Krauthammer, 2001). FDP'lerin termo-mekanik burkulması, çoğunlukla plaka teorilerine dayanan çeşitli modeller kullanılarak incelenmiştir. Bununla birlikte, elastisite teorisine dayanan diğer modeller bu analiz için nadiren kullanılmaktadır.

FDP'nin termo-mekanik burkulma analizi literatüründe sadece tek bir kez (Shariyat vd, 2018)'de elastisite teorisine dayalı bir model kullanılmıştır. Aşağıda,

FDP'lerin termo-mekanik burkulmasında kullanılan modeller hakkında bir özet yer almaktadır.

3.4.1. Temel Bağıntılar

Elastisite teorine göre, yer değiştirme, şekil değiştirme ve gerilmeler arasında bağıntılar şöyle verilmektedir.

3.4.1.1. Şekil Değiştirme-Yer Değiştirme Bağıntıları

Şekil değiştirme, doğrusal ve doğrusal olmayan iki bölümlerden oluşmaktadır.

$$\begin{aligned} \text{Doğrusal şekil değiştirme} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \text{Doğrusal olmayan şekil değiştirme} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (u_{k,j} \cdot u_{k,i}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Burada, u_j : j eksenini doğrultusundaki yer değiştirme, $u_{j,i}$: u_j 'nin i eksenini doğrultusundaki türevini ifade etmektedir. Her eksenin yer değiştirmesi için bu sembollerin izlenmesi plaka teorisi literatüründe sıklıkla kullanılmaktadır. $u_1 = u_x = u$, $u_2 = u_y = v$, $u_3 = u_z = w$. Burada u , v ve w plakadaki her hangi bir noktanın x, y, z eksenleri doğrultusundaki yer değiştirmeler. Şekil değiştirmeler, normal ve kayma bileşenlerine ayrılarak verilebilir. Normal şekil değiştirmeler ε_{xx} , ε_{yy} ve ε_{zz} şeklinde gösterilerek aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{,x} + \frac{1}{2} (u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \\ \varepsilon_{yy} &= v_{,y} + \frac{1}{2} (u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2) \\ \varepsilon_{zz} &= w_{,z} + \frac{1}{2} (u_{,z}^2 + v_{,z}^2 + w_{,z}^2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Kayma şekil değiştirmeler ε_{xy} , ε_{xz} ve ε_{yz} şöyle verilmektedir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2} (u_{,y} + v_{,x}) + \frac{1}{2} (u_{,y}u_{,x} + v_{,y}v_{,x} + w_{,y}w_{,x}) \\ \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} (w_{,y} + v_{,z}) + \frac{1}{2} (u_{,y}u_{,z} + v_{,y}v_{,z} + w_{,y}w_{,z}) \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} (u_{,z} + w_{,x}) + \frac{1}{2} (u_{,z}u_{,x} + v_{,z}v_{,x} + w_{,z}w_{,x}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.4.1.2. Von Kármán Doğrusalsızlığı

Von Kármán doğrusalsızlığı, orta dereceli dönüş ile küçük şekil değiştirme, yani orta derecede deformasyon varsayımıyla yer değiştirme - şekil değiştirme bağıntılarının doğrusal olmama durumunu basitleştiren yaygın olarak kullanılan varsayımlardır (Bhaskar & Varadan, 2014; Eslami, 2018). Genel olarak, plakanın kalınlığı doğrultusundaki şekil değiştirme ε_{zz} , düzlem içi şekil değiştirmeler ile karşılaştırıldığında ihmal edilebilmektedir. Von Kármán doğrusalsızlığı kabul edildiğinde şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları aşağıda verilen denklemlerle basitleştirilmiştir. Von Kármán'ın normal şekil değiştirmeleri:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}(x,y,z) &= u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x}^2) \\ \varepsilon_{yy}(x,y,z) &= v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y}^2) \\ \varepsilon_{zz}(x,y,z) &= 0\end{aligned}\tag{3.5}$$

Von Kármán'ın kayma şekil değiştirmeleri:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy}(x,y,z) &= \varepsilon_{yx}(x,y,z) = \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) + \frac{1}{2}(w_{,y}w_{,x}) \\ \varepsilon_{zy}(x,y,z) &= \varepsilon_{yz}(x,y,z) = \frac{1}{2}(w_{,y} + v_{,z}) \\ \varepsilon_{xz}(x,y,z) &= \varepsilon_{zx}(x,y,z) = \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x})\end{aligned}\tag{3.6}$$

Literatürde, Von Kármán doğrusalsızlığına geometrik doğrusalsızlık veya kinematik doğrusalsızlık da denir ve genellikle FDP'lerin termo-mekanik burkulma analizinde dikkate alınır. Von Kármán CPT'ye tanıtıldığında, Von Kármán doğrusalsızlığı ile CPT veya Von Kármán plaka teorisi olarak adlandırılabilir.

3.4.1.3. Şekil Değiştirme-Gerilme Bağıntıları

Genel olarak, plakanın kalınlığın doğrultusunda normal gerilme σ_{zz} , düzlemindeki gerilmeler ile karşılaştırıldığında ihmal edilebilmektedir. Normal gerilmeler σ_{xx} , σ_{yy} ve σ_{zz} şöyle verilmektedir:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x,y,z) &= \frac{E_{(x,y,z)}}{1 - \mu_{(x,y,z)}^2} (\varepsilon_{xx} + \mu_{(x,y,z)} \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy}(x,y,z) &= \frac{E_{(x,y,z)}}{1 - \mu_{(x,y,z)}^2} (\varepsilon_{yy} + \mu_{(x,y,z)} \varepsilon_{xx})\end{aligned}\tag{3.7}$$

Kayma gerilmeleri τ_{xy} , τ_{xz} ve τ_{yz} şöyle verilmektedir:

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}(x,y,z) &= \tau_{yx}(x,y,z) = \frac{E_{(x,y,z)}}{(1 + \mu_{(x,y,z)})} 2\varepsilon_{xy}(x,y,z) \\
\tau_{xz}(x,y,z) &= \tau_{zx}(x,y,z) = \frac{E_{(x,y,z)}}{(1 + \mu_{(x,y,z)})} 2\varepsilon_{xz}(x,y,z) \\
\tau_{yz}(x,y,z) &= \tau_{zy}(x,y,z) = \frac{E_{(x,y,z)}}{(1 + \mu_{(x,y,z)})} 2\varepsilon_{yz}(x,y,z)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

E elastik modülüne, μ Poisson oranını, ifade etmektedir.

3.4.2. Plaka Teorileri

Plaka teorileri, malzeme mekaniği yaklaşımına dayanıp yukarıda sunulan elastisite bağıntıları basitleştirmektedir. Plaka teorilerine dayanan modeller, eşdeğer tek katmanlı (ESL) teorileri, lamine katman teorileri ve karışık teorileri içerir. FDM plakaların termo-mekanik burkulması literatürde, lamine katman modeli sadece (Kowal-Michalska & Mania, 2013)'te bir kez kullanılmıştır. FDM plakaların termo-mekanik burkulma analizinde en fazla kullanılan ESL modeller kısaca aşağıda açıklanmıştır. Plaka teorilerinde yarı-ters metot olarak kullanılarak geliştirilmiştir. Burada yer değiştirme metodu ile bir tahmin yapılır (Reddy, 2006). (Abrate & Di Sciuva, 2017)'de, ESL teorilerinin kapsamlı bir incelenmesi sunulmuştur.

ESL teorileri, plakanın kalınlıktaki özelliklerinin ve dolayısıyla yer değiştirmenin tek bir fonksiyon ile ifade edilebileceği varsayımına dayanır. Plakanın enine ve boyuna göre nispeten küçük kalınlığı nedeniyle plakanın iki boyutlu bir yapı olarak incelenmesi uygundur. Normalde, plaka temsil edilmek için seçilen düzlem tarafsız düzlemdir. Tarafsız düzlem, eğilme-esneme bağlantısının olmadığı düzlem olarak tanımlanır. Bu nedenle, tarafsız düzlemi referans düzlem olarak almak yer değiştirme ilişkilerini basitleştirir. ESL, yer değiştirme fonksiyonunun türüne göre kategorilere ayrılmıştır: Polinom teorileri: Yer değiştirme, kalınlık koordinatının kuvvet serileri olarak tanımlanmıştır. Polinom, basit veya Legendre, Hermite ve Chebyshev gibi ortogonal polinomlar olabilir.

Termo-mekanik yük altında burkulan FDP'nin literatüründe tek kullanılan polinom, basit kuvvet dizisi polinomudur. Polinom olmayan teoriler: Trigonometrik, hiperbolik veya polinom olmayan herhangi bir form olarak yer değiştirme tanımlanmaktadır. Aşağıda, ESL teorileri kısaca sunulmuştur.

3.4.2.1. Klasik plaka Teorisi

Klasik plaka teorisi (CPT), 1888'de Love, Kirchhoff tarafından önerilen varsayımlar kullanılarak geliştirmiştir. Aynı zamanda "Kirchhoff plaka teorisi", "Kirchhoff-Love plaka teorisi" veya "ince plaka teorisi" olarak ta adlandırılmaktadır. "Euler-Bernoulli kiriş teorisinin" bir uzantısıdır. CPT, kalınlık doğrultusunda var olan hem kayma hem de normal deformasyon etkilerini göz ardı eder. CPT'de, deformasyondan önce nötr düzleme dik olan herhangi düz bir kesit, deformasyondan sonra da düz ve nötr düzleme dik kaldığı varsayılmaktadır (Reddy, 2006). CPT'de, yer değiştirme bileşenleri aşağıda gösterildiği gibi ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned}u_{(x,y,z)} &= u_{0(x,y)} - (z - z_0) \frac{\partial w_{0(x,y)}}{\partial x} \\v_{(x,y,z)} &= v_{0(x,y)} - (z - z_0) \frac{\partial w_{0(x,y)}}{\partial y} \\w_{(x,y,z)} &= w_{0(x,y)} \\\tau_{xz(x,y,z)} &= \tau_{yz(x,y,z)} = 0\end{aligned}\tag{3.9}$$

z_0 , normal olarak sonuçlanacak yönetim denklemlerindeki eğilme ve düzlem içi esnemeyi ayıracak şekilde ayarlanmaktadır. z_0 'ın fiziksel anlamı, plakanın orta ile nötr düzlemleri arasındaki mesafedir. z_0 yükün uygulandığı düzlem değilse, sınır koşulları ve yüklemenin birkaç konfigürasyonu dışında burkulma yerine eğilme meydana gelecektir. (u_0, v_0, w_0) plakadaki tarafsız her hangi bir noktanın (x, y, z) eksenleri doğrultusundaki yer değiştirmelerini ifade eder. $\varepsilon_{zz(x,y)}$, plakanın kalınlığı doğrultusundaki normal şekil değiştirmesini, $\tau_{xz(x,y)}$ ve $\tau_{yz(x,y)}$ plakanın kalınlığı doğrultusundaki kayma şekil değiştirmesini ifade etmektedir. CPT modelleri, dikdörtgen FDP için (Amoushahi & Lajevardi, 2018)'de termo-mekanik burkulma analizinde uygulanmaktadır. Burkulma sonrası analizlerde, (Tung & Duc, 2010) dikdörtgen plakalar üzerine ve (Li vd, 2007)'de dairesel plakalar üzerine CPT kullanılarak çalışmalar yapmışlardır.

3.4.2.2. Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi

Birinci mertebe kayma deformasyon teorisi (FSDT), "Reissner-Hencky-Bollé-Mindlin plaka teorisi", "Reissner-Mindlin plaka teorisi", "Mindlin plaka teorisi", "birinci dereceden teori" veya "Orta derecede kalın plaka teorisi" olarak ta adlandırılır (Bhaskar & Varadan, 2014). "Timoshenko kiriş teorisinin" genişletilmiş bir

versiyonunu oluşturur. FSDT, deformasyon sonrasında kesitin nötr düzleme dikliği varsayımını gevşeterek CPT'yi genişletir. FSDT'de, deformasyondan önce nötr düzleme dik olan herhangi düz bir kesit, deformasyondan sonra da düz kaldığı varsayılmaktadır. FSDT, plakanın kalınlık doğrultusunda sabit kayma şekil değiştirme değerini verir ve bu nedenle, kayma gerilmesinin parabolik dağılımını hesaba katmak için kayma düzeltme faktörlerini dikkate almak gerektirmektedir (Reddy, 2006). FSDT, yer değiştirme bileşenlerini şöyle ifade etmektedir.

$$\begin{aligned}
 u_{(x,y,z)} &= u_{0(x,y)} + (z - z_0)\theta_{(x,y)} \\
 v_{(x,y,z)} &= v_{0(x,y)} + (z - z_0)\varphi_{(x,y)} \\
 w_{(x,y,z)} &= w_{0(x,y)} \\
 \tau_{xz(x,y,z)} &= K_s \frac{E_{(x,y,z)}}{(1 + \mu_{(x,y,z)})} 2\varepsilon_{xz(x,y,z)} \\
 \tau_{yz(x,y,z)} &= K_s \frac{E_{(x,y,z)}}{(1 + \mu_{(x,y,z)})} 2\varepsilon_{yz(x,y,z)}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

(θ, φ) sırasıyla y ve x eksenlerine göre dönme miktarları. K_s , kayma düzeltme faktörlerini, $\tau_{xz(x,y)}^*$ ve $\tau_{yz(x,y)}^*$, düzeltilmiş kayma gerilmeler. (Cong vd, 2017; Duc & Tung, 2010; Fallah & Nosier, 2012; Fallah vd, 2016; Mania, 2014; Shams vd, 2016; Sharma & Kumar, 2017a, 2017b; Shukla vd, 2007; Tung, 2015; Wu vd, 2018; Yaghoobi & Yaghoobi, 2013; Yang vd, 2014; Yu vd, 2017)'de dikdörtgen, ve (Abolghasemi vd, 2014)'de ise dairesel plakalar üzerine FSDT modelleri kullanarak termo-mekanik burkulma analizleri yapılmıştır.

3.4.2.3. Yüksek Mertebe Kayma Deformasyon Teorileri

Yüksek mertebe kayma deformasyon teorisi (HSDT)'nin kullanılması, FSDT için gereken kayma düzeltme faktörüne olan ihtiyacı ortadan kaldırmaktadır. Ek olarak, HSDT, daha fazla hesaplama çabasıyla birlikte FSDT'den daha doğru sonuçlar verir. Teorik olarak, kayma deformasyon sırası, istenen doğruluk derecesine ulaşmak için herhangi bir sıraya ulaşabilir; ancak pratikte, üçüncü dereceden kayma deformasyonu oldukça yeterli ve uygun hesaplama çabasıyla tatmin edici sonuçlar vermektedir (Reddy, 2006). Pek çok HSDT vardır. (Reddy, 1984)'de Reddy tarafından önerilen üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisi (TSDT), HSDT'lerden en yaygın biridir. HSDT'ler (Reddy, 1990)'de gözden geçirilmiştir. TSDT, yer değiştirme bileşenlerini şöyle ifade etmektedir.

$$\begin{aligned}
u_{(x,y,z)} &= u_{0(x,y)} + (z - z_0) \theta_{(x,y)} - \frac{4(z^3 - c_0)}{3h^2} \left(\theta_{(x,y)} + \frac{\partial w_{0(x,y)}}{\partial x} \right) \\
v_{(x,y,z)} &= v_{0(x,y)} + (z - z_0) \varphi_{(x,y)} - \frac{4(z^3 - c_0)}{3h^2} \left(\varphi_{(x,y)} + \frac{\partial w_{0(x,y)}}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$w_{(x,y,z)} = w_{0(x,y)}$$

z_0 ve c_0 normal olarak sonuçlanacak yönetim denklemlerindeki eğilme ve düzlem içi esneme ayıracak şekilde ayarlanmaktadır. Reddy'nin TSDT modelleri yalnızca dikdörtgen FDP üzerine, (Cong vd, 2018; Duc vd, 2016; Duc & Van Tung, 2011; Fan & Wang, 2016; Lal vd, 2013; Lal vd, 2012; Mansouri & Shariyat, 2015; Shen & Li, 2008; Shen vd, 2017; Shen & Zhang, 2012; Shen & Zhu, 2010, 2012; Van Dung & Nga, 2016; Yu vd, 2018)'de termo-mekanik burkulma analizinde uygulanmaktadır.

3.4.2.4. Polinom Olmayan Plaka Kayma Deformasyon Teorileri

Önerilen yer değiştirme fonksiyonların polinom biçiminde olmadığı bir kayma deformasyonu teorileri kategorisidir. Polinom olmayan plaka teorileri, plakanın yer değiştirme bileşenlerini şöyle ifade etmektedir.

$$\begin{aligned}
u_{(x,y,z)} &= u_{0(x,y)} - (z - z_0) \frac{\partial w_{0(x,y)}}{\partial x} - \theta_{(x,y)} \mathcal{U}_{(z)} \\
v_{(x,y,z)} &= v_{0(x,y)} - (z - z_0) \frac{\partial w_{0(x,y)}}{\partial y} - \varphi_{(x,y)} \mathcal{U}_{(z)}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$w_{(x,y,z)} = w_{0(x,y)}$$

$\mathcal{U}_{(z)}$ varsayılan kayma dağılımına ifade eder. $\mathcal{U}_{(z)}$, trigonometrik, hiperbolik veya herhangi bir başka polinom olmayan form olarak ifade edilir. FDP'nin termo-mekanik burkulma analizi literatüründe, polinom olmayan olan hiperbolik kayma deformasyon teorisi sadece (Chikh vd, 2016)'de uygulanmıştır.

3.4.2.5. Dört Değişkenli Kayma Deformasyon Rafine Plaka Teorileri

Yukarıda sunulan plaka teorilerinin her birinde beş değişken vardır. Problemi basitleştirmek için, değişken sayısı w 'yi iki parça (w_b, w_s)'ye bölünerek dört değişkene indirilebilir ve düzlem içi yer değiştirmeleri aşağıda gösterildiği gibi bu iki parçanın fonksiyonları olarak ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
u_{(x,y,z)} &= u_{0(x,y)} - (z - z_0) \frac{\partial w_b(x,y)}{\partial x} - \mathcal{U}_{(z)} \frac{\partial w_s(x,y)}{\partial x} \\
v_{(x,y,z)} &= v_{0(x,y)} - (z - z_0) \frac{\partial w_b(x,y)}{\partial y} - \mathcal{U}_{(z)} \frac{\partial w_s(x,y)}{\partial y}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$w_{(x,y,z)} = w_b(x,y) + w_s(x,y)$$

(w_b, w_s) kalınlık doğrultusundaki yer değiştirmenin eğilme ve kayma bileşenleridir. Özel dönüştürme değişkenleri (θ, φ) bu teorilerde sadeleşmektedir. Bu iyileştirme, yani değişken azaltma, her hangi bir polinom veya polinom olmayan bir kesme deformasyon teorisine uygulanabilir. FDP'nin termo-mekanik burkulma analizi literatüründe, sadece (Bateni vd, 2013)'de dört değişkenli rafine kayma deformasyon plaka teorileri kullanmıştır.

3.4.2.6. Dört Değişkenli Rafine-FSDT

(Qi & Knight Jr, 1996)'de önerilen rafine birinci mertebe kayma deformasyon teorisinde, ε_{zy} ve ε_{zy} 'ye uygun bir kayma düzeltme fonksiyon $\mathcal{U}_{(z)}$ ile düzeltilmiştir. Son zamanlarda, (Nguyen vd, 2019)'de aynı kavramı, (θ, φ) 'den kurtulmak için yanal yer değiştirmeyi w eğilme ve kayma bileşenlerine (w_b, w_s) ayırma kavramıyla birleştirilmişlerdir. τ_{xz} ve τ_{yz} , kinematik ilişkiler aracılığıyla ε_{zy} ve ε_{zy} 'yi düzelten $\mathcal{U}_{(z)}$ fonksiyonu ile de düzeltildiğinde, ek düzeltme faktörü K_s 'ye gerek olmadığı belirtilmiştir. Rafine FSDT'nin kurucu denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
u_{(x,y,z)} &= u_{0(x,y)} - (z - z_0) \frac{\partial w_b(x,y)}{\partial x} \\
v_{(x,y,z)} &= v_{0(x,y)} - (z - z_0) \frac{\partial w_b(x,y)}{\partial y} \\
w_{(x,y,z)} &= w_b(x,y) + w_s(x,y)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{zy(x,y,z)} &= \mathcal{U}_{(z)} \frac{1}{2} (w_{,y} + v_{,z}) \\
\varepsilon_{xz(x,y,z)} &= \mathcal{U}_{(z)} \frac{1}{2} (u_{,z} + w_{,x})
\end{aligned}$$

3.4.3. FDP Özellikleri Tayin Edilmesi

FDP'nin özellikleri, herhangi bir noktada fonksiyonel modelleri veya mikro mekanik modeller kullanılarak belirlenebilir.

3.4.3.1. Fonksiyonel Modeller

FDP'nin mikro yapısı, bir bileşenden diğerine en az bir boyutla değişmektedir. Bu değişim herhangi bir fonksiyona sahip olacak şekilde tasarlanabilmektedir. Fonksiyon modelleri, doğrudan özellik değişimi veya sadece mikro yapı değişimi, yani her bileşenin hacimsel oranlarını (v_c, v_m) tanımlayabilir. FDP modellenmek için kullanılan fonksiyonlardan örnekler Tablo 3.1'de verilmiştir. Tablo 3.1'deki, v_c bileşenlerden birinin hacimsel oranı, n ise üstel indeks değeridir.

Tablo 3.1. Fonksiyonel modelleri

Fonksiyon modeli	Fonksiyon formül	Formül kaynaklarından örneği
Kuvvet fonksiyonu modeli P-FDP (kısaca: FDP)	$v_{c(z)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^n$ $\frac{-h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$	(Amoushahi & Lajevardi, 2018)
Üstel fonksiyon modeli E-FDP	$E_{(z)} = E_c e^{\ln\left(\frac{E_m}{E_c}\right)(v_{c(z)})}$ $0 \leq v_{c(z)} \leq 1$	(Sayyad & Ghugal, 2018)
Sigmoid kuvvet fonksiyonu modeli	$v_{c(z)} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^n, & \frac{-h}{2} \leq z \leq 0 \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h}\right)^n, & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases}$	(Duc & Cong, 2013)
Polinom fonksiyon modeli	$v_{c(z)} = \sum_{i=0}^n \gamma_i z^n$	(Hussein & Mulani, 2017)

3.4.3.2. Mikro-Mekanik Yöntemler

Bu yöntemlerin amacı, kompozit mikro-yapının malzemesinin bir fonksiyonu ve belirli bir geometrik olarak belirli bir noktada etkili özelliklerini tahmin etmektir. Bu yöntemler şu şekilde kategorize edilebilir (Daniel vd, 1994):

3.4.3.3. Malzeme Mekaniği Yöntemleri

Bu yöntemler, düzgün şekil değiştirme (paralel, karışım kuralı, Voigt modeli) veya düzgün gerilme (seri, karışım kuralı tersi, Reuss modeli) varsayımlarıyla basitleştirilir. Voigt modeli (karışım kuralı) aşağıda gibi verilmektedir.

$$\ddot{O} = v_c \ddot{O}_c + v_m \ddot{O}_m = v_c \ddot{O}_c + (1 - v_c) \ddot{O}_m \quad (3.15)$$

Reuss modeli (karışım kuralı tersi) aşağıda gibi verilmektedir.

$$\ddot{O} = \frac{1}{\frac{v_c}{\ddot{O}_c} + \frac{v_m}{\ddot{O}_m}} = \frac{1}{\frac{v_c}{\ddot{O}_c} + \frac{(1 - v_c)}{\ddot{O}_m}} \quad (3.16)$$

Burada $\bar{O}$ etkili bir malzeme özelliğidir, $\bar{O}_c$, $\bar{O}_m$ bileşen malzemelerin özellikleridir, v_c , v_m bileşenlerin hacim oranları. Voight modeli, malzeme mekanığı yöntemlerinden FDP üzerine analizlerde en fazla kullanılanlardan birisidir.

3.4.3.4. Elastisite Teorisi Yöntemleri

Elastisite teorisi basitleştirilmiş modeller üzerinde uygulanır ve elastik özellikler için tam-form çözümler oluşturulur. Yaygın yöntemler, kendi kendine tutarlı yöntemler (etkili ortam yaklaşım) ve Mori-Tanaka yöntemi (etkili alan yaklaşımı) şeklindedir. FDP'nin termo-mekanik burkulması literatüründe (Fan & Wang, 2016)'de kendi kendine tutarlı modeli ve (Sharma & Kumar, 2017a, 2017b; Taj & Chakrabarti, 2013)'de Mori-Tanaka modeli kullanılmıştır.

4. BURKULMA

4.1. Burkulmanın Tanımı

Burkulma, yükteki küçük değişikliklerden dolayı yapının İstikrarının kaybolmasıdır (Yoo & Lee, 2011). Kritik burkulma yükü, yükün mevcut değerinden hafifçe arttığında, yapının dengesinin kararlı olmadığı en küçük yük olarak tanımlanır. İstikrarı kaybetmek, bir şekilden (konfigürasyondan) diğerine geçmek demektir. Burkulma oluşumu yapının şekline, malzemenin özelliklerine, yükleme konfigürasyonuna ve sınır koşullarına bağlıdır. Farklı vücutlar farklı şekillerde burkulmaktadır. Sütunlar ve düz plakalar, klasik burkulma olarak bilinen çatallanma burkulmasına, kavisli plakalar geçmeli burkulma, ve silindirik kabuklar sonlu bozulma burkulmasına maruz kalmaktadır (Eslami, 2018).

Bir yapının burkulma yükünü hesaplamanın iki yolu vardır. Birincisi, hafif saptırılmış, diğer adıyla burkulmuş yapının doğrusal olmayan denge denklemlerini çözmektir. Bu doğrusal olmayan denge denklemleri, kuvvetlerin ve momentlerin dengesi kullanılarak veya minimum toplam potansiyel enerji ilkesiyle elde edilebilir. Tipik olarak, von Kármán doğrusalsızlığı bu doğrusal olmayan denge denklemlerinin türevlerine dâhil edilir. İkinci yol, doğrusal özdeğer kararlılık denklemlerini çözmektir. Bu tür denklemler, bir kararlılık ölçüt uygulanmasından kaynaklanmaktadır. Yine tipik olarak, von Kármán doğrusalsızlığı bu doğrusal kararlılık denklemlerinin türetilmesine dâhil edilir.

Kararlılık denklemlerinin üzerine inşa edilebileceği eşit derecede geçerli olan ana kriterler, tarafsız denge yöntemi ve bitişik denge yöntemidir. İkinci ölçüt aynı zamanda minimum potansiyel fark prensibi veya Trefftz ölçütü olarak da bilinmektedir. Trefftz ölçütüne göre, kararlılık denklemleri, aşağıda gösterildiği gibi, burkulmadan önceki denge durumundaki potansiyel enerjinin ikinci varyasyonunun durağan durumundan türetilir.

$$\delta(\delta_e^2 \Gamma) = 0 \quad (4.1)$$

Burada Γ , toplam potansiyel enerji, δ , varyasyon operatörü, $\delta_e^2 \Gamma$, burkulmadan önceki denge durumunda elde edilen Γ 'nin ikinci varyasyonudur, yani, $\delta_e^2 \Gamma = \delta^2 \Gamma|_{\delta \Gamma=0}$. FDP termo-mekanik burkulma analizi literatüründe (Shariyat vd, 2018) yaptıkları çalışmada, üç boyutlu elastisite teorisi kullanılarak modellenen delikli dairesel FDP'nin istikrarsızlığını tespit etmek için Trefftz kriterini kullanmışlardır.

Doğrusal denklem yaklaşımı grubundaki ikinci yaklaşım, burkulma (çatallanma) noktasındaki denge konfigürasyonunu ve burkulma noktasından hemen sonra çok yakın olan bitişik bir konfigürasyonu dikkate alan bitişik (komşu) denge kriteridir (Yoo & Lee, 2011). Bu yöntemi kullanan birçok yayınlanmış çalışmaya (Bateni vd, 2013; Mahmoudi vd, 2017; Yaghoobi & Yaghoobi, 2013) örnek olarak verilebilir.

4.2. Plakaların Burkulması

Malzeme mekaniği alanında, plakaların incelenmesi eğilme, burkulma ve titreşim analizi üç ana analizden oluşmaktadır (Reddy, 2006). Düz bir plaka, kenarlarından düzlem içi yüklere maruz kaldığında veya sınırlandırılmış kenarlara sahip olarak termal yüklere maruz kaldığında, plakanın davranışının doğru tahmin edilmesini sağlamak için burkulma ve burkulma sonrası analizlerin yapılması gerekmektedir. Bir plaka elemanı, kritik yükün ötesinde bir ek yükleme yapabilmektedir. Bu rezerv kuvvetine burkulma sonrası mukavemeti denir (Yoo & Lee, 2011).

4.3. FDP'nin Burkulması

Plakalarda burkulma olmasının koşullarını (Aydogdu, 2008) yaptığı çalışmada incelenmiş, simetrik olmayan FDP'lerde orta düzlem içi basınç yükü altında burkulma yükü sadece tüm kenarların ankastre mesnet durumunda gerçekleşebileceği sonucuna varmıştır. Bunun nedeni, düzlemsel (esneme) ve dışarı-düzlem (eğilme) yer değiştirmelerinin, simetrik olmayan lamine plakalar gibi eşleşmesidir (Eslami, 2018). Yani, simetrik olmayan FDP'nin düzlem içi yük altında, kenarlarından birisi ankastre mesnet olmazsa eğilecektir.

Tek biçimli kayma yükü altında, ankastre mesnet veya basit mesnetli kenarı olan plakalarda çatallanma meydana gelebilir, çünkü bu sınır koşullarının her ikisi de sapma direncini sağlamaktadır. FDP'lerin istikrarlılık problemi, sınır koşullarının türüne ve plaka kalınlığındaki malzeme değişiminin şekline çok duyarlıdır.

Düzlem içi basınç altında plakada burkulma olması için, başlangıçta düz bir şekilde olması gerekir. Yani, plaka başlangıçta düz ve burkulma gerçekleşene kadar düz kalmalıdır. Aksi takdirde, çatallanma noktasına, yani burkulma noktasına, ulaşamayacak ve sadece eğilme deformasyonuna maruz kalacaktır. İlk düzlük, yalnızca yükün uygulandığı düzlem ve sınır koşulları tarafından değil, aynı zamanda yapıdaki ilk kusurlarla da kesintiye uğrayabilmektedir.

Çift eksenli düzlem içi basınç altında, eğer uygun bir şekilde seçilmiş yükler var ise, düzlem içi gerilme ortadan kalkabilir, bu nedenle plaka asimetrik olsa bile basit mesnet plakalarda çatallanma noktası oluşacaktır. Ön burkulma durumu (gerilme ve şekil değiştirme) burkulma çalışmaları yapmadan önce çalışılmalıdır (Eslami, 2018).

Fiziksel tarafsız düzlem, tam eğilme altında kalınlık doğrultusundaki sapmanın düzlem içi yer değiştirmelerden, yani esnemenin ayrıldığı düzlemdir. O düzlem de, eğilme momenti ve şekil değiştirmeye sahip olmayan düzlemdir. (Zhang & Zhou, 2008) yaptıkları bir çalışmada, FDP’lerde düzlem içi yüklerin ve sınır koşullarının fiziksel tarafsız düzlem üzerinde uygulanmasını sağlayarak, esneme ve eğilme deformasyonlarını ayırmaya çalışmışlardır.

4.4. FDP’lerde Termal Burkulma

Sıcaklık, plaka malzemesinin özelliklerini (eğer sıcaklığa bağlıysa) etkilemektedir ve her iki karşıt taşınmaz kenar arasında düzlem içi basınç yükünü oluşturmaktadır. Nötr düzlemin, termal yük altında simetrik olmayan FDP’nin orta düzlemi ile çakıştığı varsayılırsa, çatallanma noktasının oluşması için tüm kenarların ankastre mesnetlenmesi gerekmektedir (Kiani vd, 2011). Bu durum, fiziksel tarafsız düzlem dikkate alınmadıkça, plakanın kalınlığı doğrultusundaki malzeme dağılımının plakanın orta düzlemine göre simetrik olmaması koşuluyla, basit mesnet sınır koşullarına sahip dikdörtgen bir FDP termal yük altında olduğunda meydana gelir (Aydogdu, 2008; Eslami, 2018).

Simetrik FDP için, plaka başlangıçta düzse çatallanma noktası oluşana kadar düz kalmaktadır. Tüm kenarlar serbestçe genişlemekte, yani hareket edebiliyorsa, düzlem içi termal gerilim olmayacak ve sıcaklık etkisi yalnızca malzemelerin özellikleri üzerinde olacaktır. (Swaminathan & Sangeetha, 2017) yaptıkları bir çalışmada, FDP’lerin termal analizi hakkında kapsamlı bir inceleme sunmuşlardır.

4.5. Termal Yükleri

Bir FDP’ye uygulanan termal yükler, bir veya daha fazla boyutta sabit veya değişen sıcaklıkla ifade edilebilir. Sıcaklık değişimi doğrudan bir mekânsal fonksiyon olarak verilebilir veya ısı iletimi probleminden türetilir. Literatür incelendiğinde, (Na & Kim, 2005; Shukla vd, 2007) yaptıkları çalışmada, kalınlık doğrultusunda sıcaklık değişimi denkleminin sabit olduğunu, (Na & Kim, 2005; Najafizadeh & Hedayati, 2004) doğrusal denklem olduğunu ve (Lal vd, 2013; Li vd, 2007) ise doğrusal olmayan denklem olduğunu belirtmişlerdir. (Bateni vd, 2013; Fallah &

Nosier, 2012; Kiani, 2017; Na & Kim, 2008; Shen & Li, 2008) yaptıkları çalışmada, sıcaklık değişimini ısı iletim problemi olarak vermişlerdir.

4.6. Sıcaklığa Bağlı FDP'nin Özellikleri

Gerilim oluşumuna ek olarak, termal yükler yapının malzeme özelliklerini etkilemektedir. Sıcaklığa bağlı ve bağlı olmayan özelliklere sahip iki malzemeye sırasıyla (TD) ve (TID) şeklinde ifade edilmektedir. FDP'nin termo-mekanik özdeğer burkulması literatüründe, (Bateni vd, 2013; Jari vd, 2014) yaptıkları çalışmada, analiz sonuçları üzerindeki sıcaklığa bağlılığının etkisini incelerken, (Kowal-Michalska & Mania, 2013; Shariyat vd, 2018; Yaghoobi & Yaghoobi, 2013) ise, sıcaklığa bağlı olmayan malzeme özelliklerini incelemişlerdir.

4.7. FDP'nin Termo-Mekanik Burkulması

FDP'lerin, yüksek sıcaklıklara dayanması beklenmektedir. Normalde, termal yüklere ek olarak etki eden mekanik yükler de vardır. Bu durumda, FDP'lerin aynı anda hem termal, hem de mekanik yüklere dayanması gerekmektedir. FDP'lerin mekanik burkulma ve/veya termal burkulmasını ayrı ayrı ele alan çok sayıda yayınlanmış çalışma vardır. Ancak, bu çalışmaların küçük bir kısmı termal ve mekanik yüklerin aynı anda uygulanmasını ele almıştır. Bu nedenle literatürdeki bu eksikliği giderme kapsamında bu tez çalışmasında plakların termo-mekanik burkulma davranışları ele alınmıştır. Plakaların termo-mekanik burkulma durumlarında, mümkün olan en basit konfigürasyon için bile şimdiye kadar analitik bir çözümün bulunmaması, bu problemin yeterince karmaşıklığını göstermektedir.

5. ÇALIŞMADA KULLANILAN YÖNTEMLER

5.1. Genişletilmiş Kantorovich Metodu

Bu bölümde, Genişletilmiş Kantorovich Metodu (EKM) ile varyasyonel yöntem uygulanarak ve Trefftz ölçütüne dayanarak dikdörtgen ve paralelkenar plakaların elastik burkulma denklemleri ve sınır koşullarının türetilmesi sağlanacaktır. Bu alandaki literatür incelendiğinde, bu istikrarlılık denklemlerinin genellikle yanlış bir türetme kullanılarak doğrusal denge koşuluyla karıştırılarak elde edildiği görülmektedir. Bu çalışma, denge koşulunun kararlılığı üzerine inşa edilen doğru türetmeyi sağlamayı amaçlamaktadır. Burkulma denklemleri, klasik plaka teorisi (CPT), birinci mertebeden kayma deformasyon plaka teorisi (FSDT), rafine-FSDT, rafine plaka teorisi (RPT) ve Reddy'nin yüksek mertebeden kayma deformasyon plaka teorisi (HSDT) olmak üzere beş farklı plaka teorisine dayanarak türetiləcəktir. Bu çeşitli teorilere dayanarak yapılan türetme işlemi, teorilerin birbirlerine benzerliğinden dolayı, yalnızca bir teori için ayrıntılı türetme işlemi verilecek olup, diğer teoriler ise kısaca açıklanacaktır. Daha sonra her teorinin FDP'nin burkulma analizine uygulanabilirliği tartışılacaktır. Bu tez çalışması, herhangi bir rafine teoriye dayanan EKM'yi ilk uygulayan çalışmadır. Ayrıca, burkulma analizinde rafine FSDT ilk kez uygulanmaktadır.

Bu bölümde, ilk olarak FDP için birinci mertebe kayma deformasyon teorisi (FSDT)'ye dayalı olarak ayrıntılı burkulma denklemlerinin türetilmesi verilmiştir. Von Kármán geometrik doğrusalsızlığı durumu dikkate alınmıştır. Plakanın malzemesi, keyfi olarak sürekli değişen özelliklere sahip fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FDM) olarak kabul edilmiştir. İşlemin kısa sürmesi açısından, dikkate alınan plaka dikdörtgen olacak şekilde ve sadece mekanik yükler altında seçilmiştir. Ayrıca bu türetmede elastik zemin ihmal edilmiştir. Daha sonra, diğer plaka teorilerine dayalı olarak ortaya çıkan burkulma denklemleri verilmiştir. Termal yükler ve elastik zemin, klasik plaka teorisine (CPT) dayalı olarak ortaya çıkan burkulma denklemlerine dâhil edilmiştir.

5.1.1. Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisine Dayalı Türetme

Kararlılık denklemleri, Denklem 4.1'de gösterilen Trefftz kriterine göre buradan elde edilecektir. İlk adımda, ilk olarak plakanın toplam potansiyel enerjisi Γ elde edilecektir.

Bundan sonraki adımda varyasyonu $\delta^2\Gamma$ bulup ona denge koşullarını ikamet edip, $\delta_e^2\Gamma$ elde edilmeye çalışılacaktır. Daha sonra, $\delta_e^2\Gamma$ 'yi tek-integralli bir fonksiyon kılan Kantorovich yöntemi kavramı ikame edilecektir. Bir sonraki adımda, $\delta(\delta_e^2\Gamma)$ olan $\delta_e^2\Gamma$ varyasyonu elde edilecektir.. Son adımda ise kararlılık denklemlerini ve sınır koşullarını elde etmek için $\delta(\delta_e^2\Gamma)$ 'yi sıfıra eşitlenecektir.

5.1.1.1. Toplam Potansiyel Enerjisi

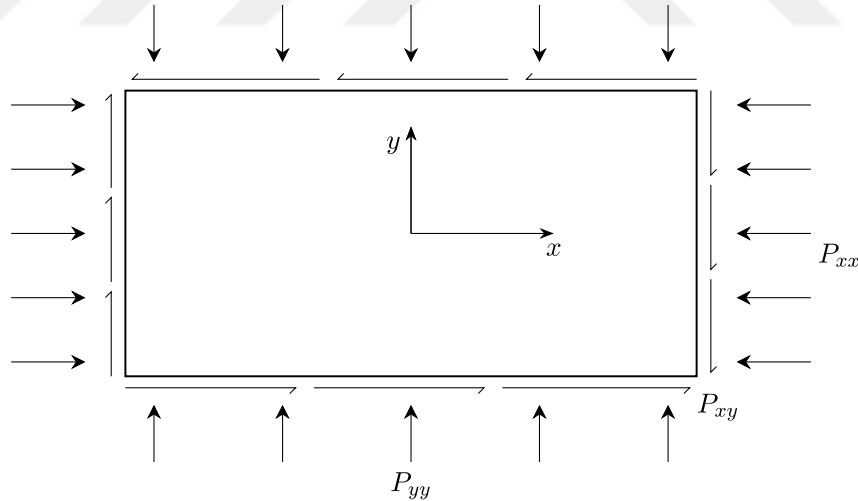
$2a$ boyunda, $2b$ eninde ve h kalınlığında dikdörtgen bir plakanın Γ değeri aşağıdaki Denklem 5.1 ile verilmektedir.

$$\Gamma = V + U \quad (5.1)$$

Burada U şekil değiştirme enerjisi, V ise uygulanan yüklerden sonuçlan enerjisidir. Plakanın kenarlarına nötr düzleminin içi uygulanan yükler için V aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$V = \int_{-a}^a (P_{yy}v + P_{xy}u)dx + \int_{-b}^b (P_{xx}u + P_{xy}v)dy \quad (5.2)$$

Burada P_{ij} , Şekil 5.1'de gösterildiği gibi, belirtilen yönlerde plakanın kenarlarına düzlem içi uygulanan yüklerdir. P_{ij} , kuvvet/uzunluk birimlerindedir.



Şekil 5.1. Dikdörtgen plakada düzlem içi yükler

U , aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$U = \frac{1}{2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + 2\tau_{xy}\gamma_{xy} + 2\tau_{xz}\gamma_{xz} + 2\tau_{yz}\gamma_{yz}) dz dx dy \quad (5.3)$$

Burada σ_{ii} ve τ_{ij} belirtilen yönlerde normal ve kayma gerilmeleridir, ϵ_{ii} ve γ_{ij}

ise belirtilen yönlerde normal ve kayma şekil değiştirmelerdir. Bu gerilme ve şekil değiştirme bileşenlerini bulmak için Denklem 3.10’de gösterilen FSDT’nin kurucu denklemleri ve Denklemler 3.5 ve 3.6’da gösterilmiş von Kármán doğrusalsızlığı benimsenmiştir.

Kurucu Denklemleri 3.3 ve 3.4’de var olan yer değiştirme denklemlerine ve ardından Denklemler 3.7 ve 3.8’de gösterilen gerilme bağıntılarına ikame etmek, u , v , w , θ , φ ve bunların türevleri cinsinden gerilme ve yer değiştirme bileşenlerini ortaya çıkarmaktadır.

Bu gerilme ve yer değiştirme bileşenlerini Denklem 5.1’e ikame etmek ve sonra z boyunca integral almak, $u_{(x,y)}$, $v_{(x,y)}$, $w_{(x,y)}$, $\theta_{(x,y)}$ ve $\varphi_{(x,y)}$ ’nin çift integral fonksiyonu olarak U ’yi vermektedir.

$$U_{(u,v,w,\theta,\varphi)} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a (U_z) dx dy \quad (5.4)$$

U_z aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$U_z = \frac{A}{8} \left(\begin{aligned} &2(1-\mu)K_s((\theta + w_{,x})^2 + (\varphi + w_{,y})^2) \\ &+ 4(u_{,x}^2 + v_{,y}^2) + 2(1-\mu)(u_{,y} + v_{,x})^2 + 8\mu u_{,x}v_{,y} \\ &+ (w_{,x}^2 + w_{,y}^2)^2 + 4w_{,x}^2(u_{,x} + \mu v_{,y}) \\ &+ 4w_{,y}^2(\mu u_{,x} + v_{,y}) + 4(1-\mu)w_{,x}w_{,y}(u_{,y} + v_{,x}) \end{aligned} \right) \quad (5.5)$$

$$+ \frac{B}{2} \left(\begin{aligned} &(1-\mu)(\varphi_{,x} + \theta_{,y})(u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y}) \\ &+ (\mu\theta_{,x} + \varphi_{,y})(2v_{,y} + w_{,y}^2) \\ &+ (\theta_{,x} + \mu\varphi_{,y})(2u_{,x} + w_{,x}^2) \end{aligned} \right)$$

$$+ \frac{D}{4} (4\mu\theta_{,x}\varphi_{,y} + (1-\mu)(\theta_{,y} + \varphi_{,x})^2 + 2(\theta_{,x}^2 + \varphi_{,y}^2))$$

D , B ve A şöyle verilmektedir:

$$D_{(x,y)} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(z - z_0)^2 E_{(z)}}{1 - \mu^2} dz \quad A_{(x,y)} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{(z)}}{1 - \mu^2} dz \quad (5.6)$$

$$B_{(x,y)} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(z - z_0) E_{(z)}}{1 - \mu^2} dz$$

D ve A , sırasıyla, eğilme ve uzama sertliğidir. Plaka boyunca değişken kalınlığın h genel durumu için, D ve A aşağıda gösterildiğı gibi ayrılabilir fonksiyonlar olarak ifade edilebilir.

$$D_{(x,y)} = D^0 D^x D^y \quad A_{(x,y)} = A^0 A^x A^y \quad (5.7)$$

Burada D^0 ve A^0 sabittir; D^x ve A^x , x ’in fonksiyonları; D^y ve A^y , y ’nin fonksiyonlarıdır. h sabitse, $D^x = D^y = A^x = A^y = 1$.

5.1.1.2. Toplam Potansiyel Enerjisinin İkinci Varyasyonu

Toplam potansiyel enerjinin ikinci değişimi $\delta^2 \Gamma$, aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\delta^2 \Gamma = \int_{-b}^b \int_{-a}^a (\bar{\Gamma}) dx dy \quad (5.8)$$

$\bar{\Gamma}$ aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} = & \frac{A}{2} \left(\begin{aligned} & (1 - \mu)K_s \left((\delta\theta + \delta w_{,x})^2 + (\delta\varphi + \delta w_{,y})^2 \right) \\ & + 2((\delta u_{,x})^2 + (\delta v_{,y})^2) \\ & + (1 - \mu)(\delta u_{,y} + \delta v_{,x})^2 + 4\mu\delta u_{,x}\delta v_{,y} \\ & + 2(\delta w_{,x})^2(u_{,x} + \mu v_{,y}) + 2(\delta w_{,y})^2(\mu u_{,x} + v_{,y}) \\ & + 2(1 - \mu)\delta w_{,x}\delta w_{,y}(u_{,y} + v_{,x}) \\ & + 2(1 - \mu)(\delta u_{,y} + \delta v_{,x})(w_{,x}\delta w_{,y} + w_{,y}\delta w_{,x}) \\ & + 4w_{,x}\delta w_{,x}(\delta u_{,x} + \mu\delta v_{,y}) + 4w_{,y}\delta w_{,y}(\mu\delta u_{,x} + \delta v_{,y}) \\ & + 4w_{,x}w_{,y}\delta w_{,x}\delta w_{,y} + (w_{,y})^2(3(\delta w_{,y})^2 + (\delta w_{,x})^2) \\ & + (w_{,x})^2((\delta w_{,y})^2 + 3(\delta w_{,x})^2) \end{aligned} \right) \\ & + B \left(\begin{aligned} & (1 - \mu)(\delta\varphi_{,x} + \delta\theta_{,y})(\delta u_{,y} + \delta v_{,x}) \\ & + (1 - \mu)(\delta\varphi_{,x} + \delta\theta_{,y})(w_{,y}\delta w_{,x} + w_{,x}\delta w_{,y}) \\ & + 2(\mu\delta\theta_{,x} + \delta\varphi_{,y})(\delta v_{,y} + w_{,y}\delta w_{,y}) \\ & + 2(\delta\theta_{,x} + \mu\delta\varphi_{,y})(\delta u_{,x} + w_{,x}\delta w_{,x}) \\ & + (\delta w_{,x})^2(\theta_{,x} + \mu\varphi_{,y}) + (\delta w_{,y})^2(\mu\theta_{,x} + \varphi_{,y}) \end{aligned} \right) \\ & + \frac{D}{2} \left(\begin{aligned} & 4\mu\delta\theta_{,x}\delta\varphi_{,y} + (1 - \mu)(\delta\theta_{,y} + \delta\varphi_{,x})^2 \\ & + 2(\delta\theta_{,x})^2 + 2(\delta\varphi_{,y})^2 \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Burada δu , δv , δw , $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta u_{,x}$, $\delta u_{,y}$, $\delta v_{,x}$, $\delta v_{,y}$, $\delta w_{,x}$, ve $\delta w_{,y}$ varyasyonel yer değiştirmeler ve bunların türevleridir. Önemli bir not, toplam potansiyel enerjinin ikinci varyasyonunu alırken tüm V terimlerinin yok olmasıdır. Yani, $\delta^2 \Gamma$ 'ye sadece U katkıda bulunmaktadır.

5.1.1.3. Dengede Toplam Potansiyel Enerjisinin İkinci Varyasyonu

Düz plakanın dengesi, burkulma noktasından önce kalınlık doğrultusundaki yer değiştirme veya dönme meydana gelmediğini ifade etmektedir. w , θ ve φ ve bunların türevleri, Denklem 5.9'den çıkarılıp denge durumunda değerlendirilen potansiyel enerjinin ikinci varyasyonu olan $\delta_e^2 \Gamma$ elde edilmektedir.

$$\delta_e^2 \Gamma = \int_{-b}^b \int_{-a}^a (\Gamma_e) dx dy \quad (5.10)$$

Γ_e aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\begin{aligned}
\Gamma_e = & \frac{A}{2} \left(\begin{aligned} & (1-\mu)K_s \left((\delta\theta + \delta w_{,x})^2 + (\delta\varphi + \delta w_{,y})^2 \right) \\ & + 2((\delta u_{,x})^2 + (\delta v_{,y})^2) \\ & + (1-\mu)(\delta u_{,y} + \delta v_{,x})^2 + 4\mu\delta u_{,x}\delta v_{,y} \\ & + 2(\delta w_{,x})^2(u_{,x} + \mu v_{,y}) + 2(\delta w_{,y})^2(\mu u_{,x} + v_{,y}) \\ & + 2(1-\mu)\delta w_{,x}\delta w_{,y}(u_{,y} + v_{,x}) \end{aligned} \right) \\
& + B \left(\begin{aligned} & (1-\mu)(\delta\varphi_{,x} + \delta\theta_{,y})(\delta u_{,y} + \delta v_{,x}) \\ & + 2(\mu\delta\theta_{,x} + \delta\varphi_{,y})(\delta v_{,y}) \\ & + 2(\delta\theta_{,x} + \mu\delta\varphi_{,y})(\delta u_{,x}) \end{aligned} \right) \\
& + \frac{D}{2} \left(\begin{aligned} & 4\mu\delta\theta_{,x}\delta\varphi_{,y} + (1-\mu)(\delta\theta_{,y} + \delta\varphi_{,x})^2 \\ & + 2((\delta\theta_{,x})^2 + (\delta\varphi_{,y})^2) \end{aligned} \right)
\end{aligned} \quad (5.11)$$

Denklem 5.11’da, B integrali ile çarpılan terimler, yanal sapma ve dönüşlerin varyasyonlarını, $(\delta w, \delta\theta, \delta\varphi)$, düzlem içi yer değiştirmelerin varyasyonlarıyla, $(\delta u, \delta v)$, birleştiren tek terimlerdir. B integralini sıfıra eşitlemek bu irtibatı ortadan kaldırmaktadır. Denklem 5.6’dan B , malzeme özellikleri $E_{(z)}$ ve μ tarafından ve referans düzlemin geometrik orta düzlemden mesafesi z_0 tarafından kontrol edilmektedir. $(B = 0)$ ’yi kılan z_0 , plaka saf eğilme altındayken gerilmelerin veya şekil değiştirmelerin oluşmadığı tarafsız düzlemi tanımlar (Zhang, 2013; Zhang & Zhou, 2008). Eğer $E_{(z)}$ orta düzlem etrafında sabitse veya simetrikse, z_0 ’in kaybolması gerektiğini ve fiziksel tarafsız düzlemin orta düzlemle çakışacağını belirtmektedir.

Ayrıca Denklem 5.11’de, $(\delta w_{,x})^2, (\delta w_{,y})^2$ ile çarpılan düzlem içi yer değiştirme terimleri (u, v) , sırasıyla σ_{xx}, σ_{yy} ve τ_{xy} denge durumu gerilim bileşenlerinin integralleridir. Bu integrallere, düzlemdeki sonuçlan kuvvet bileşenleri N_{xx}, N_{yy} ve N_{xy} denir ve denklem 3.7 ve 3.8’deki gerilim bileşenlerinin kalınlık boyunca integraliyle verilmektedir (Abolghasemi vd, 2014).

Düzlem içindeki sonuçlan kuvvetin aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \frac{A}{2} \begin{bmatrix} 2(u_{,x} + \mu v_{,y}) \\ 2(\mu u_{,x} + v_{,y}) \\ (1-\mu)(u_{,y} + v_{,x}) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Genel durumda ortaya çıkan düzlem içi kuvvetler, plakanın düzlem içi boyutlarına göre değişkendir. Genel olarak aşağıdaki gibi ayrı biçimde ifade edilebilirler.

$$\begin{aligned}
N_{xx(x,y)} &= N_{xx}^0 N_{xx}^x N_{xx}^y \\
N_{yy(x,y)} &= N_{yy}^0 N_{yy}^x N_{yy}^y \\
N_{xy(x,y)} &= N_{xy}^0 N_{xy}^x N_{xy}^y
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Plakanın x ve y eksenlerin doğrultusundaki hareket eden düzgün veya doğrusal olarak değişen düzlem içi yükler altında olması durumunda, sonuçta ortaya çıkan düzlem içi kuvvetler, uygulanan kuvvetlere eşit olacaktır (Shufrin & Eisenberger, 2006; Zhang & Yu, 1988). Aksi takdirde, uygulanan düzlem içi yükler doğrusal olmayan dağılımlara sahipse, sonuçta ortaya çıkan düzlem içi kuvvetler ön burkulma denge problemi çözülerek elde edilmelidir (Efraim & Eisenberger, 2007; Nguyen vd, 2007; Nguyen vd, 2008; Shariyat & Alipour, 2014; Shufrin vd). $\delta_e^2 \Gamma$ aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$\delta_e^2 \Gamma = \int_{-b}^b \int_{-a}^a (\Gamma_L + \Gamma_I) dx dy \tag{5.14}$$

Γ_L aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\begin{aligned}
\Gamma_L &= \frac{A}{2} (1 - \mu) K_s \left((\delta\theta + \delta w_{,x})^2 + (\delta\varphi + \delta w_{,y})^2 \right) \\
&+ \frac{D}{2} \left(4\mu\delta\theta_{,x}\delta\varphi_{,y} + (1 - \mu)(\delta\theta_{,y} + \delta\varphi_{,x})^2 + 2((\delta\theta_{,x})^2 + (\delta\varphi_{,y})^2) \right) \\
&+ ((\delta w_{,x})^2 (N_{xx}) + (\delta w_{,y})^2 (N_{yy}) + 2\delta w_{,x}\delta w_{,y} (N_{xy}))
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Γ_I aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\Gamma_I = \frac{A}{2} \left(2((\delta u_{,x})^2 + (\delta v_{,y})^2) + (1 - \mu)(\delta u_{,y} + \delta v_{,x})^2 + 4\mu\delta u_{,x}\delta v_{,y} \right) \tag{5.16}$$

Denklem 5.14’de, $\delta_e^2 \Gamma$ ’deki terimler iki grupta yeniden düzenlenmiştir. İlki, Γ_L , kalınlık doğrultusundaki yer değiştirme ve dönme varyasyon terimlerini içerir ve düzlem içi yer değiştirmelerin varyasyon terimlerini içermez.

İkinci grup, Γ_I , yalnızca düzlem içi yer değiştirmenin varyasyon terimlerini içerirken, kalınlık doğrultusundaki yer değiştirme veya dönme terimleri yoktur. Buna ek olarak, $\delta_e^2 \Gamma_L$ ’ye kuvvet bileşimleri içerirken $\delta_e^2 \Gamma_I$ ’ye içermez. Bu nedenle, $\delta_e^2 \Gamma$ ’nin bir fazla varyasyonu, birbirinden irtibatsız bir denklem seti ile sonuçlanacaktır. Dolayısıyla, elde edilen kararlılık denklemlerini etkilemeyeceğinden emin olurken, türetmenin kalan adımlarında yalnızca Γ_L ’yi dikkate almak güvenlidir. Türevin geri kalanında dikkate alınan kısım $\delta_e^2 \Gamma_L$ olarak adlandırılır. Buna ek olarak, $\delta_e^2 \Gamma_L$ ’ye kuvvet bileşimleri içerirken $\delta_e^2 \Gamma_I$ ’ye içermez. Bu nedenle, $\delta_e^2 \Gamma$ ’nin bir fazla varyasyonu, birbirinden irtibatsız bir denklem seti ile sonuçlanacaktır. Dolayısıyla, elde edilen kararlılık denklemlerini etkilemeyeceğinden emin olurken, türetmenin

kalan adımlarında yalnızca Γ_L 'yi dikkate almak güvenlidir. Türevin geri kalanında dikkate alınan kısım $\delta_e^2 \Gamma_L$ olarak adlandırılır.

5.1.1.4. Kantorovich Yöntemi Uygulanması

Bu adımda, bilinmeyen iki değişkenli fonksiyonlar $\delta w_{(x,y)}$, $\delta \theta_{(x,y)}$ ve $\delta \varphi_{(x,y)}$ birkaç terimin toplamı olarak ifade edilir, her biri tek değişkenli Denklem 1.2'de gösterildiği gibi farklı değişkenlerin fonksiyonları. Sonuç olarak $\delta w_{(x,y)}$, $\delta \theta_{(x,y)}$ ve $\delta \varphi_{(x,y)}$ aşağıdaki gibi yaklaşıktır.

$$\begin{aligned}\delta w_{(x,y)} &\approx \sum_{i=1}^{n_w} f_{i(x)} F_{i(y)} = f F \\ \delta \theta_{(x,y)} &\approx \sum_{i=1}^{n_\theta} g_{i(x)} G_{i(y)} = g G \\ \delta \varphi_{(x,y)} &\approx \sum_{i=1}^{n_\varphi} m_{i(x)} M_{i(y)} = m M\end{aligned}\tag{5.17}$$

f, g ve m 'nin her biri tek sıralı bir matris olduğunda, sırasıyla $f_{i(x)}$, $g_{i(x)}$ ve $m_{i(x)}$ fonksiyonlarını içerir. F, G ve M 'nin her biri tek sütunlu bir matristir ve sırasıyla $F_{i(y)}$, $G_{i(y)}$ ve $M_{i(y)}$ fonksiyonlarını içerir. n_w, n_θ ve n_φ sırasıyla $\delta w_{(x,y)}$, $\delta \theta_{(x,y)}$ ve $\delta \varphi_{(x,y)}$ 'yi yaklaştırılmak için kullanılan terimlerin sayısıdır. n_w, n_θ ve n_φ birbirinden irtibatsızdır; yani, fonksiyonların her biri, farklı sayıda terim kullanılarak yaklaştırılmaktadır. Γ_l ihmal edilmekle Denklem 5.17'deki yaklaşımları Denklem 5.14'ye ikame edilmek suretiyle $\delta_e^2 \Gamma$ şöyle yeniden yazılabilir.

$$\delta_e^2 \Gamma = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left(\Gamma_L^*_{(f,F,g,G,m,M)} \right) dx dy\tag{5.18}$$

$\Gamma_L^*_{(f,F,g,G,m,M)}$ aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\begin{aligned}\Gamma_L^* &= \frac{A}{2} (1 - \mu) K_s ((gG + f'F)^2 + (mM + fF')^2) \\ &+ \frac{D}{2} (4\mu(g'G)(mM') + (1 - \mu)(gG' + m'M)^2 + 2((g'G)^2 + (mM')^2)) \\ &+ ((f'F)^2(N_{xx}) + (fF')^2(N_{yy}) + (1 - \mu)(f'F)(fF')(N_{xy}))\end{aligned}\tag{5.19}$$

5.1.1.5. Birinci Yön İçin Kararlılık Denklemleri ve Sınır Koşulları

F, G ve M tek yön fonksiyonlarının hepsinin bilindiği ve türevli olduğu varsayılırsa, Denklem 5.18'deki iki boyutlu fonksiyonel $\delta_e^2 \Gamma$ tek boyutlu f, g ve m fonksiyonlarına indirgenmektedir. Kararlılık denklemleri artık Denklem 4.1'deki

Trefftz ölçütüne $\delta_e^2 \Gamma$ ikame edilerek elde edilebilir.

$$\delta(\delta_e^2 \Gamma) = 0 = \int_{-a}^a \left(\delta_f(H_1 + H_y + H_{xy1}) + \delta_g(H_2) + \delta_m(H_3) \right. \\ \left. + \delta_f'(H_4 + H_x + H_{xy2}) + \delta_g'(H_5) + \delta_m'(H_6) \right) dx \quad (5.20)$$

H 'ler aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\begin{aligned} H_1 &= A^0 A^x (1 - \mu) K_s \left(L_{(A^y, F', F')}^y f + L_{(A^y, F', M)}^y m \right) \\ H_2 &= A^0 A^x (1 - \mu) K_s \left(L_{(A^y, G, G)}^y g + L_{(A^y, G, F)}^y f' \right) \\ &\quad + D^0 D^x (1 - \mu) \left(L_{(D^y, G', G')}^y g + L_{(D^y, G', M)}^y m' \right) \\ H_3 &= A^0 A^x (1 - \mu) K_s \left(L_{(A^y, M, F')}^y f + L_{(A^y, M, M)}^y m \right) \\ &\quad + 2D^0 D^x \left(\mu L_{(D^y, M', G)}^y g' + L_{(D^y, M', M')}^y m \right) \\ H_4 &= A^0 A^x (1 - \mu) K_s \left(L_{(A^y, F, G)}^y g + L_{(A^y, F, F)}^y f' \right) \\ H_5 &= 2D^0 D^x \left(\mu L_{(D^y, G, M')}^y m + L_{(D^y, G, G)}^y g' \right) \\ H_6 &= D^0 D^x (1 - \mu) \left(L_{(D^y, M, G')}^y g + L_{(D^y, M, M)}^y m' \right) \\ H_x &= 2N_{xx}^0 N_{xx}^x \left(L_{(N_{xx}^y, F, F)}^y f' \right) \\ H_y &= 2N_{yy}^0 N_{yy}^x \left(L_{(N_{yy}^y, F', F')}^y f \right) \\ H_{xy1} &= 2N_{xy}^0 N_{xy}^x \left(L_{(N_{xy}^y, F', F)}^y f' \right) \\ H_{xy2} &= 2N_{xy}^0 N_{xy}^x \left(L_{(N_{xy}^y, F, F')}^y f \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

L^y fonksiyon aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$L_{(\psi_0, \psi_1, \psi_2)}^y = \int_{-b}^b (\psi_0(\psi_1)^T(\psi_2)) dy \quad (5.22)$$

Kısmi integral versiyonların türevleri olan $\delta f'$, $\delta g'$ veya $\delta m'$ içeren Denklem 5.20'deki her integralde uygulanarak $\delta_e^2 \Gamma$ şöyle yazılabilir.

$$\delta(\delta_e^2 \Gamma) = 0 = \int_{-a}^a \left(\delta_f(H_1 + H_y + H_{xy1} - H_4' - H_x' - H_{xy2}') \right. \\ \left. + \delta_g(H_2 - H_5') + \delta_m(H_3 - H_6') \right) dx \\ + \delta_f(H_4 + H_x + H_{xy2})_{-a}^{+a} + \delta_g(H_5)_{-a}^{+a} + \delta_m(H_6)_{-a}^{+a} \quad (5.23)$$

δf , δg ve δm 'nin tümü keyfi olduğundan ve Denklem 5.23'yi ifadesini sağlamak için, aşağıdaki tüm kararlılık denklemleri geçerli olmalıdır.

$$\begin{aligned} H_1 + H_y + H_{xy1} - H_4' - H_x' - H_{xy2}' &= 0 \\ H_2 - H_5' &= 0 \\ H_3 - H_6' &= 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

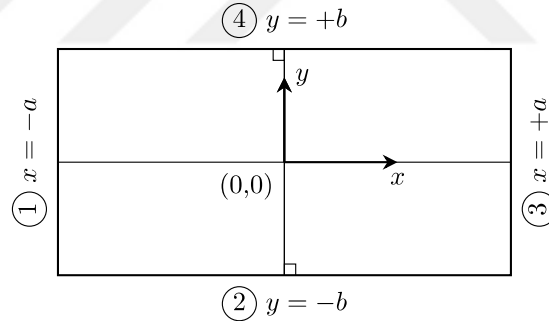
Ek olarak aşağıdaki sınır koşulları x , $\{-a, +a\}$ 'de karşılanmalıdır.

$$\begin{array}{llll}
\text{eğer} & f = 0 & \text{yada} & H_4 + H_x + H_{xy2} = 0 \\
\text{ve eğer} & g = 0 & \text{yada} & H_5 = 0 \\
\text{ve eğer} & m = 0 & \text{yada} & H_6 = 0
\end{array} \quad (5.25)$$

Hem kalınlık doğrultusundaki yer değiştirme hem de dönüşler kısıtlandığında, kenarın ankastre mesnet olduğu söylenir (C). Basit mesnet kenar (S), kendi eksenini etrafında serbestçe dönebilmesi dışında ankastre mesnetli kenarla aynı sınırlamalara sahiptir. Hem kalınlık doğrultusundaki yer değiştirme hem de dönüşlerde herhangi bir kısıtlama olmadığında, kenar serbest (F) olarak adlandırılmaktadır. $x \in \{-a, +a\}$ kenarlarındaki bu sınır koşulları aşağıdaki gibi çevrilmektedir.

$$\begin{array}{llll}
\text{C:} & f = 0 & \text{ve} & g = 0 & \text{ve} & m = 0 \\
\text{S:} & f = 0 & \text{ve} & g = 0 & \text{ve} & H_6 = 0 \\
\text{F:} & H_4 + H_x + H_{xy2} = 0 & \text{ve} & H_5 = 0 & \text{ve} & H_6 = 0
\end{array} \quad (5.26)$$

Bir plakanın sınır koşulları, etiketleme sırası kenarların yanına yazıldığı Şekil 5.2’de gösterildiği gibi sol kenardan başlayarak saat yönünün tersine her kenarın sınır durumu belirtilerek açıklanmaktadır. Örneğin, CSFC, $x = \{-a\}$ kenarının sabitlendiği, $y = \{-b\}$ kenarının basit mesnet olduğu, $x = \{+a\}$ kenarının serbest olduğu ve $y = \{+b\}$ kenarının sıkıştırıldığı anlamına gelmektedir.



Şekil 5.2. Dikdörtgen plaka ve koordinat sistemi

Burkulma yüklerinin çarpılan kritik faktörü olan λ , bir genelleştirilmiş bir özdeğer problemi olarak Denklem 5.24’de var olan yönetim denklemlerinin Denklem 5.25’den seçilen sınır koşulları ile çözülmesiyle elde edilmektedir. Örneğin, plakanın, tek eksenli yük olan N_{xx} altında burkulma yükünü bulmak için genelleştirilmiş özdeğer problemi aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\begin{aligned}
H_1 - H_4' &= \lambda H_x' \\
H_2 - H_5' &= 0 \\
H_3 - H_6' &= 0
\end{aligned} \quad (5.27)$$

Sınır koşulları aşağıdaki gibi yeniden yazılmaktadır.

$$\begin{array}{llllll}
\mathbf{C}: & f = 0 & \text{ve} & g = 0 & \text{ve} & m = 0 \\
\mathbf{S}: & f = 0 & \text{ve} & g = 0 & \text{ve} & H_6 = 0 \\
\mathbf{F}: & H_4 = -\lambda H_x & \text{ve} & H_5 = 0 & \text{ve} & H_6 = 0
\end{array} \quad (5.28)$$

Bu, x yönündeki belirli bir çözüm için kararlılık denklemlerinin ve sınır koşullarının türetilmesini tamamlar. y yönündeki belirli bir çözüm için ikinci yönetim denklem seti ve sınır koşulları, aynı adımlar izlenerek elde edilebilir.

5.1.1.6. y -eksenindeki Kararlılık Denklemleri ve Sınır Koşulları

Diğer yön için kararlılık denklemlerini ve sınır koşullarını elde etmek için, Denklem 5.20'den başlayarak ve f , g ve m 'nin bilinen fonksiyonlar olduğu varsayılarak adımlar izlenmelidir. Bu varsayımı Denklem 4.1'deki Trefftz ölçütüne ikame etmekle $\delta(\delta_e^2 \Gamma)$ şöyle verilmektedir.

$$\delta(\delta_e^2 \Gamma) = 0 = \int_{-b}^b \left(\delta_F(T_1 + T_x + T_{xy1}) + \delta_G(T_2) + \delta_M(T_3) + \delta_F'(T_4 + T_y + T_{xy2}) + \delta_G'(T_5) + \delta_M'(T_6) \right) dy \quad (5.29)$$

T 'ler şöyle verilmektedir:

$$\begin{aligned}
T_1 &= A^0 A^y (1 - \mu) K_s (L_{(A^x, f', f')}^x F + L_{(A^x, f', g)}^x G) \\
T_2 &= A^0 A^y (1 - \mu) K_s (L_{(A^x, g, g)}^x G + L_{(A^x, g, f')}^x F) \\
&\quad + 2D^0 D^y (L_{(D^x, g', g')}^x G + \mu L_{(D^x, g', m)}^x M') \\
T_3 &= A^0 A^y (1 - \mu) K_s (L_{(A^x, m, f)}^x F' + L_{(A^x, m, m)}^x M) \\
&\quad + D^0 D^y (1 - \mu) (L_{(D^x, m', g)}^x G' + L_{(D^x, m', m')}^x M) \\
T_4 &= A^0 A^y (1 - \mu) K_s (L_{(A^x, f, m)}^x M + L_{(A^x, f, f')}^x F') \\
T_5 &= D^0 D^y (1 - \mu) (L_{(D^x, g, m')}^x M + L_{(D^x, g, g)}^x G') \\
T_6 &= 2D^0 D^y (\mu L_{(D^x, m, g')}^x G + L_{(D^x, m, m)}^x M') \\
T_x &= 2N_{xx}^0 N_{xx}^y (L_{(N_{xx}^x, f', f')}^x F) \\
T_y &= 2N_{yy}^0 N_{yy}^y (L_{(N_{yy}^x, f, f')}^x F') \\
T_{xy1} &= 2N_{xy}^0 N_{xy}^y (L_{(N_{xy}^x, f', f')}^x F') \\
T_{xy2} &= 2N_{xy}^0 N_{xy}^y (L_{(N_{xy}^x, f, f')}^x F)
\end{aligned} \quad (5.30)$$

L^x fonksiyon şöyle verilmektedir:

$$L_{(\psi_0, \psi_1, \psi_2)}^x = \int_{-a}^a (\psi_0 (\psi_1)^T (\psi_2)) dx \quad (5.31)$$

Kısmi integral versiyonların türevleri olan $\delta F'$, $\delta G'$ veya $\delta M'$ içeren Denklem 5.29'deki her integrale uygulamakla $\delta_e^2 \Gamma$ şöyle yazılabilir.

$$\delta(\delta_e^2 \Gamma_L) = 0 = \int_{-b}^b \left(\delta_F(T_1 + T_x + T_{xy1} - T_4' - T_y' - T_{xy2}') + \delta_G(T_2 - T_5') + \delta_M(T_3 - T_6') \right) dy + \delta_F(T_4 + T_y + T_{xy2})_{-b}^{+b} + \delta_G(T_5)_{-b}^{+b} + \delta_M(T_6)_{-b}^{+b} \quad (5.32)$$

δF , δG ve δM 'nin tümü keyfi olduğundan ve Denklem 5.32'yi sağlamak için, aşağıdaki tüm kararlılık denklemleri geçerli olmalıdır.

$$\begin{aligned} T_1 + T_x + T_{xy1} - T_4' - T_y' - T_{xy2}' &= 0 \\ T_2 - T_5' &= 0 \\ T_3 - T_6' &= 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Ek olarak aşağıdaki sınır koşulları y, $\{-b, +b\}$ 'de karşılanmalıdır.

$$\begin{array}{llll} \text{eğer} & F = 0 & \text{yada} & T_4 + T_y + T_{xy2} = 0 \\ \text{ve eğer} & G = 0 & \text{yada} & T_5 = 0 \\ \text{ve eğer} & M = 0 & \text{yada} & T_6 = 0 \end{array} \quad (5.34)$$

Çeşitli sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{C:} & F = 0 & \text{ve} & G = 0 & \text{ve} & M = 0 \\ \mathbf{S:} & F = 0 & \text{ve} & T_5 = 0 & \text{ve} & M = 0 \\ \mathbf{F:} & T_4 + T_y + T_{xy2} = 0 & \text{ve} & T_5 = 0 & \text{ve} & T_6 = 0 \end{array} \quad (5.35)$$

Burkulma yüklerinin çarpılan kritik faktörü olan λ , bir genelleştirilmiş bir özdeğer problemi olarak Denklem 5.33 ve 5.24'de var olan yönetim denklemlerinin Denklem 5.34 ve 5.25'den seçilen sınır koşulları ile çözülmesiyle elde edilmektedir. Örneğin, plakanın, tek eksenli yük olan N_{xx} altında burkulma yükünü bulmak için genelleştirilmiş özdeğer problemi aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\begin{aligned} T_1 - T_4' &= -\lambda T_x \\ T_2 - T_5' &= 0 \\ T_3 - T_6' &= 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Sınır koşulları aşağıdaki gibi yeniden yazılmaktadır.

$$\begin{array}{llll} \mathbf{C:} & F = 0 & \text{ve} & G = 0 & \text{ve} & M = 0 \\ \mathbf{S:} & F = 0 & \text{ve} & T_5 = 0 & \text{ve} & M = 0 \\ \mathbf{F:} & T_4 = 0 & \text{ve} & T_5 = 0 & \text{ve} & T_6 = 0 \end{array} \quad (5.37)$$

Elde edilen FSDT kararlılık denklemlerinin (5.24 ve 5.33) ve sınır koşullarının (5.25 ve 5.34) literatürde yapılan mevcut çalışmalara (Shufrin & Eisenberger, 2005a, 2005b, 2006) benzediği görülmüştür. Aradaki fark, bu tez çalışmasında türetilen burkulma denklemlerinin, bir kararlılık ölçütüne dayalı olarak doğru bir şekilde türetilmeleridir. Oysa (Shufrin & Eisenberger, 2005a, 2005b, 2006)'de yapılan çalışmalarda türetilen denklemler, potansiyel enerjinin ilk varyasyonunun sıfır olmasının denge koşulundan yanlış bir şekilde elde edilmesiyle bulunmuştur. Bu çalışma ile örneğin, elastik zeminin etkileri ve plakanın geometrisinin eğim açısı gibi

birçok başka husus da probleme kolayca dâhil edilebilir.

5.1.2. Rafine FSDT'ye Dayalı Türetme

Burada, adımların benzerliğinden dolayı ve kısalığı korumak için türetmenin ayrıntılı adımları atlanır ve sadece kısa bir açıklama sağlanacaktır. Denklem 3.14'deki kurucu denklemlerden başlayarak kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmelerinin ve şekil değiştirmelerinin yeni formüllerini dikkate alarak ve Bölüm 5.1.1'teki toplam potansiyel enerjiyi Γ bulmak için aynı adımları uygulayarak, ardından ikinci varyasyonu $\delta^2 \Gamma$, sonra $\delta_e^2 \Gamma$ elde etmek için burkulma öncesi denge durumunu ($w_b = w_s = 0$) empoze ederek ve sonra $(\delta w_b, \delta w_s)$ aşağıdaki ifadede gösterilmektedir.

$$\begin{aligned}\delta w_{b(x,y)} &\approx \sum_{i=1}^{n_b} f_{i(x)} F_{i(y)} = f F \\ \delta w_{s(x,y)} &\approx \sum_{i=1}^{n_s} r_{i(x)} R_{i(y)} = r R\end{aligned}\tag{5.38}$$

Bundan sonra, F ve R 'nin bilindiği göz önüne alındığında, kısmi integral uygulanarak aşağıdaki burkulma denklemleri oluşturulabilmektedir.

$$\begin{aligned}J_1 + J_y + J_{xy1} - J_2' - J_x' - J_{xy2}' + J_3'' &= 0 \\ k_1 + k_y + k_{xy1} - k_2' - k_x' - k_{xy2}' &= 0\end{aligned}\tag{5.39}$$

$x \in \{-a, +a\}$ 'da sağlanması gereken sınır koşulları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}\text{C:} & \quad f = 0 \quad \text{ve} \quad r = 0 \quad \text{ve} \quad f' = 0 \\ \text{S:} & \quad f = 0 \quad \text{ve} \quad r = 0 \quad \text{ve} \quad J_3 = 0 \\ \text{F:} & \quad J_2 + J_x + J_{xy2} - J_3' = 0 \quad \text{ve} \quad k_2 + k_x + k_{xy2} = 0 \quad \text{ve} \quad J_3 = 0\end{aligned}\tag{5.40}$$

J 'ler ve k 'ler şu şekilde verilmektedir:

$$\begin{aligned}
J_1 &= 2D^0 D^x \left(L_{(D^y, F'', F'')}^y f + L_{(D^y, F'', F)}^y f'' \right) \\
J_2 &= 4D^0 D^x (1 - \mu) \left(L_{(D^y, F', F')}^y f' \right) \\
J_3 &= 2D^0 D^x \left(\mu L_{(D^y, F, F'')}^y f + L_{(D^y, F, F)}^y f'' \right) \\
J_x &= 2N_{xx}^0 N_{xx}^x \left(L_{(N_{xx}^y, F, F)}^y f' + L_{(N_{xx}^y, F, R)}^y r' \right) \\
J_y &= 2N_{yy}^0 N_{yy}^x \left(L_{(N_{yy}^y, F', F')}^y f + L_{(N_{yy}^y, F', R')}^y r \right) \\
J_{xy1} &= 2N_{xy}^0 N_{xy}^x \left(L_{(N_{xy}^y, F', F)}^y f' + L_{(N_{xy}^y, F', R)}^y r' \right) \\
J_{xy2} &= 2N_{xy}^0 N_{xy}^x \left(L_{(N_{xy}^y, F, F')}^y f + L_{(N_{xy}^y, F, R')}^y r \right) \\
k_1 &= Q^0 Q^x \left(L_{(Q^y, R, R)}^y r' \right) \\
k_2 &= Q^0 Q^x \left(L_{(Q^y, R', R')}^y r \right) \\
k_x &= 2N_{xx}^0 N_{xx}^x \left(L_{(N_{xx}^y, R, F)}^y f' + L_{(N_{xx}^y, R, R)}^y r' \right) \\
k_y &= 2N_{yy}^0 N_{yy}^x \left(L_{(N_{yy}^y, R', F')}^y f + L_{(N_{yy}^y, R', R')}^y r \right) \\
k_{xy1} &= 2N_{xy}^0 N_{xy}^x \left(L_{(N_{xy}^y, R', F)}^y f' + L_{(N_{xy}^y, R', R)}^y r' \right) \\
k_{xy2} &= 2N_{xy}^0 N_{xy}^x \left(L_{(N_{xy}^y, R, F')}^y f + L_{(N_{xy}^y, R, R')}^y r \right)
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Q^0 sabit olduğunda, Q^x , x 'in bir fonksiyonudur ve Q^y , y 'nin bir fonksiyonudur, çarpımları, h kalınlığının x ve y yönlerinde değiştiği göz önüne alındığında, aşağıdaki integral ile ifade edilmektedir.

$$Q^0 Q^x Q^y = Q_{(x,y)} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{(z)} \mathcal{U}_{(z)} \mathcal{U}_{(z)}}{1 + \mu} dz \tag{5.42}$$

Burkulma yüklerinin kritik katsayı faktörü olan λ , Bölüm 5.1.1'de gösterildiği gibi alınmaktadır. İkinci set denklemler ve sınır koşulları benzer şekilde türetilir. İşlemlerin ve adımların uzun olmaması açısından ve yukarıdakilerle benzerliğinden dolayı, ortaya çıkan bu formülasyonlar burada verilmemiştir.

5.1.3. Rafine Plaka Teorisine Dayalı Türetme

Bu bölümde, FDP'ler için rafine plaka teorilerinin (RPT) kullanılması ve fiziksel tarafsız düzlem, referans düzlem olarak kabul edilse bile, birbirine bağlı kalınlık doğrultusundaki ve düzlem içi yer değiştirme varyasyonlarına sahip kararlılık denklemleri sağladığı gösterilecektir. RPT'de, kalınlık doğrultusunda yer değiştirme w , w_b ve w_s 'ye ayrıştırılır. RPT, kayma düzeltmesini yapısal denklemlerin

seviyesinden aşağı doğru ele almaktadır. Seçilen bir fonksiyon $\mathcal{U}_{(z)}$ ile empoze edilen kalınlık doğrultusundaki yer değiştirmenin kayma bileşeni, düzlem içi yer değiştirmelere katkıda bulunur. $\mathcal{U}_{(z)}$, kinematik ilişkiler aracılığıyla kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerine ve gerilmelere aktarılmaktadır. Geleneksel rafine plaka teorisinin çok sayıda sürümü vardır, örneğin (Do vd, 2020; Farahmand, 2020; Shimpi, 2002; Tran vd, 2020); normal olarak benimsenen kayma dağılımı fonksiyonunda $\mathcal{U}_{(z)}$ farklılık gösterirler. Burada $\mathcal{U}_{(z)}$ RPT'nin teorisinin genel fonksiyonunu ifade etmektedir. RPT'nin kurucu denklemlerinin genel formu Denklem 3.13'de verilmiştir. RPT'de düzeltme faktörü olan K_s 'ye ihtiyaç yoktur.

Kurucu denklemlerden ve kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmelerinden başlayarak ve Bölüm 5.1.1'deki toplam potansiyel enerjiyi Γ bulmak için aynı adımları uygulayarak, ardından ikinci varyasyonu olan $\delta^2 \Gamma$ 'ye denge şartını olan ($w_b = w_s = 0$) kabul edilerek $\delta_e^2 \Gamma$ aşağıdaki gibi elde etmektedir.

$$\delta_e^2 \Gamma = \int_{-b}^b \int_{-a}^a (\Gamma_e) dx dy \quad (5.43)$$

Burada Γ_e aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\begin{aligned} &= A \left(\begin{aligned} &\delta u_{,y}^2 + \delta v_{,y}^2 + 2\mu \delta u_{,x} \delta v_{,y} \\ &+ (\mu u_{,x} + v_{,y}) (\delta w_{b,y} + \delta w_{s,y})^2 \\ &+ (u_{,x} + \mu v_{,y}) (\delta w_{b,x} + \delta w_{s,x})^2 \\ &+ \frac{1}{2} (1 - \mu) ((\delta u_{,y} + \delta v_{,x})^2 + \delta w_{s,y}^2 + \delta w_{s,x}^2) \\ &+ (1 - \mu) (u_{,y} + v_{,x}) (\delta w_{b,x} + \delta w_{s,x}) (\delta w_{b,y} + \delta w_{s,y}) \end{aligned} \right) \\ &- 2B \left(\begin{aligned} &\delta w_{b,yy} (\mu \delta u_{,x} + \delta v_{,y}) + \delta w_{b,xx} (\delta u_{,x} + \mu \delta v_{,y}) \\ &+ (1 - \mu) \delta w_{b,xy} (\delta u_{,y} + \delta v_{,x}) \end{aligned} \right) \\ &+ D (\delta w_{b,yy}^2 + \delta w_{b,xx}^2 + 2\mu \delta w_{b,xx} \delta w_{b,yy} + 2(1 - \mu) \delta w_{b,xy}^2) \\ &+ Q_1 (\delta w_{s,yy}^2 + \delta w_{s,xx}^2 + 2\mu \delta w_{s,xx} \delta w_{s,yy} + 2(1 - \mu) \delta w_{s,xy}^2) \\ &+ 2Q_2 \left(\begin{aligned} &2(1 - \mu) \delta w_{b,xy} \delta w_{s,xy} \\ &+ \delta w_{b,xx} (\mu \delta w_{s,yy} + \delta w_{s,xx}) \\ &+ \delta w_{b,yy} (\mu \delta w_{s,xx} + \delta w_{s,yy}) \end{aligned} \right) \\ &+ Q_3 (\delta w_{s,y}^2 + \delta w_{s,x}^2) \\ &- 2Q_4 \left(\begin{aligned} &\delta w_{s,yy} (\mu \delta u_{,x} + \delta v_{,y}) + \delta w_{s,xx} (\delta u_{,x} + \mu \delta v_{,y}) \\ &+ (1 - \mu) \delta w_{s,xy} (\delta u_{,y} + \delta v_{,x}) \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (5.44)$$

İntegral olan Q 'ler aşağıdaki şekilde verilmiştir.

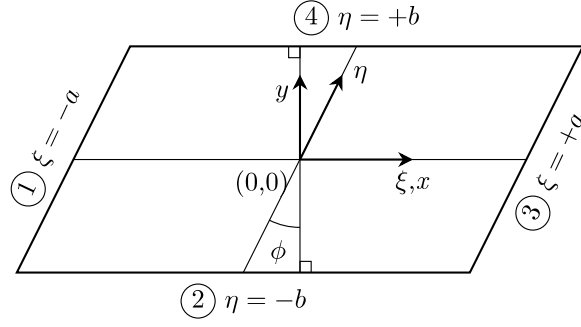
$$\begin{aligned}
Q_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{(z)} \mathcal{U}_{(z)} \mathcal{U}'_{(z)}}{1 - \mu^2} dz & Q_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{(z)} \mathcal{U}'_{(z)} (2\mathcal{U}'_{(z)} - 1)}{1 + \mu} dz \\
Q_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(z - z_0) E_{(z)} \mathcal{U}_{(z)}}{1 - \mu^2} dz & Q_4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{(z)} \mathcal{U}_{(z)}}{1 - \mu^2} dz
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Denklem 5.44, δw_b 'nin, $(\delta u, \delta v)$ 'in B ile çarpılan terimlerle birleştirildiğini göstermektedir. Ayrıca, δw_s 'in, Q_4 ile çarpılan terimlerle $(\delta u, \delta v)$ ile birleştirilir. B 'yi sıfıra eşitlemek, referans düzlemin, eğilme ve düzlem içi yer değiştirmeler arasında hiçbir bağlantının olmadığı fiziksel nötr düzlemde olmasını sağlamaktadır. Bununla birlikte, bağlanmamış sapma ve düzlem içi yer değiştirmeleri olan bir dizi denklem elde etmek için, Q_4 'ün de sıfır olması gerekir. Q_4 'ün sıfıra eşitlenmesi, aşağıdaki iki ifadeden en az birini gerektirir. İlki, $\xi_{(z)}$ sıfırdır. İkincisi, $E_{(z)}$ sabittir ve kalınlık boyunca $\mathcal{U}_{(z)}$ 'nin integrali sıfırdır. $\mathcal{U}_{(z)}$ sıfır ise RPT, klasik plaka teorisine (CPT) indirgenir. Aksi takdirde, $E_{(z)}$ sabitse, malzeme homojendir. Bu nedenle, FDP'nin burkulma analizi için, fiziksel tarafsız düzlem referans düzlem olarak seçilse bile, RPT'nin kullanılması her zaman 4 değişken $(\delta w_b, \delta w_s, \delta u, \delta v)$ 'nin çözümünü içerecektir. Homojen plakalar için RPT yalnızca sapma bileşenleri olan $(\delta w_b, \delta w_s)$ 'den oluşan çok daha basit burkulma denklemleri sağlamaktadır.

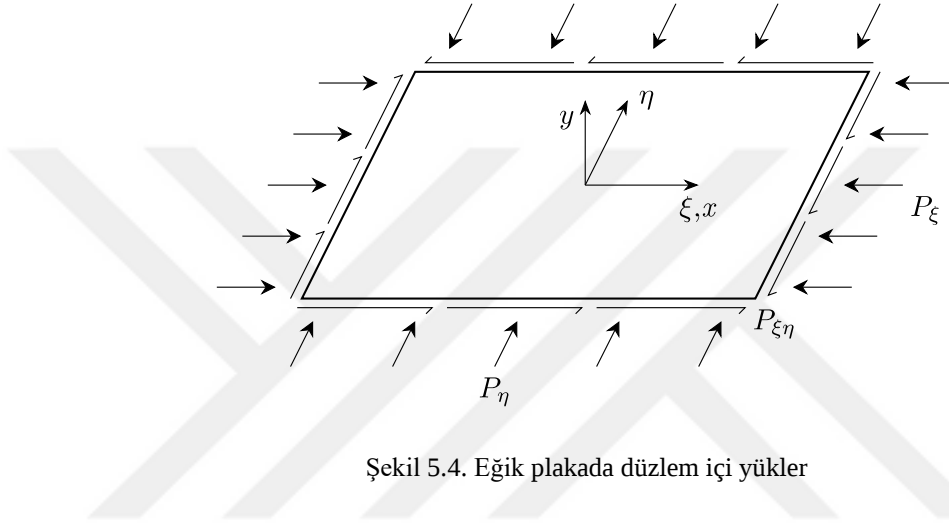
5.1.4. Klasik Plaka Teorisine Dayalı Türetme

Klasik Plaka Teorisine (CPT) dayalı kararlılık denklemleri ve sınır koşulları, diğer plaka teorileri için izlenen adımlar izlenerek türetilir. Ayrıca, CPT diğer teorilerde ortaya çıkan denklemleri de azaltmıştır. İşlemlerin kısa olması amacı ile bu bölümde türetme ihmal edilmiştir ve burada sadece x yönündeki denklemler verilmiştir. Eğik plaka, eğim açısı ϕ ile ifade edilmiştir.

Ayrıca termal yükler de dikkate alınmıştır. Son olarak, Pasternak elastik zeminin etkisi de denklemlere dâhil edilmiştir. Şekil 5.3'de gösterildiği gibi eğim açısı ϕ 'ye sahip olan eğik plaka, düzgün düzlem içi yükler altında, Şekil 5.4'de gösterildiği gibidir. Buradaki şekillerde verilen plaka, Şekil 3.7'de gösterilen Pasternak elastik zemin üzerine dayanmaktadır.



Şekil 5.3. Eğik plaka ve koordinat sistemleri



Şekil 5.4. Eğik plakada düzlem içi yükler

Kısalık olması için, malzemenin, Poisson oranı olan μ sabit, diğer özelliklerinin sadece kalınlık doğrultusunda değişmektedir. Plakanın kalınlığının da sabit olduğu kabul edilmektedir. Termal yükün değişimi de sadece kalınlık doğrultusunda olduğu farz edilmektedir. Denklem 3.7'den farklı olarak burada termal yük ihmal edilmediği için normal gerilmeler bu durumda aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx(x,y,z)} &= \frac{E_{(z)}}{1-\mu^2} \left((\varepsilon_{xx} - \Omega_{(z)} \Delta T_{(z)}) + \mu (\varepsilon_{yy} - \Omega_{(z)} \Delta T_{(z)}) \right) \\ \sigma_{yy(x,y,z)} &= \frac{E_{(z)}}{1-\mu^2} \left((\varepsilon_{yy} - \Omega_{(z)} \Delta T_{(z)}) + \mu (\varepsilon_{xx} - \Omega_{(z)} \Delta T_{(z)}) \right)\end{aligned}\quad (5.46)$$

$\Omega_{(z)}$, termal genişleme katsayısıdır. $\Delta T_{(z)}$, bir referans durumdan sıcaklık artışıdır.

$$\Delta T_{(z)} = T_{(z)} - T_0 \quad (5.47)$$

T_0 , termal gerilmelerin ve şekil değiştirmelerin oluşmadığı referans sıcaklıktır. Pasternak elastik zemin, plakanın toplam potansiyel enerjisine aşağıdaki terimleri eklemektedir.

$$\Gamma_{Zemin} = \frac{1}{2} \iint [k_n w^2 + k_p (w_{,x}^2 + w_{,y}^2)] dx dy \quad (5.48)$$

k_n ve k_p , sırasıyla, Bölüm 3.3.3.1’de açıklanmış Pasternak zeminin normal rijitliği ve kayma rijitliğidir. Türetme, dikdörtgen koordinatlar yerine eğik koordinatlar alınarak ($\xi - \eta$)’ye göre ifade edilecektir. Şekil 5.3’de gösterilen koordinat sistemleri dikkate alındığında, eğik ($\xi-\eta$) ve kartezyen koordinat ($x-y$) sistemleri arasındaki ilişki, aşağıdaki gibi ϕ eğim açısının bir fonksiyonudur.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Burada $c = \cos \phi$; ve $s = \sin \phi$. Denklem 5.49 kullanılarak, kartezyen koordinatlarındaki herhangi bir fonksiyon ve türevleri, eğik koordinat sisteminde karşılık gelen fonksiyona ve türevlere dönüştürülebilir. Eğik koordinat sisteminin açısı, plakanın her bir kenarı eksenlerden birine paralel olacak şekilde, dikkate alınan eğik plakanın aynı açısı olacak şekilde seçilmiştir. Plakanın sapması olan $w_{(x,y)}$ terimleri aşağıdaki gibi eğik koordinatlara ($\xi-\eta$) dönüştürülmektedir.

$$\begin{aligned} w(x, y) &\rightarrow w(\xi, \eta) & w_{,y} &\rightarrow c^{-1}(-s w_{,\xi} + w_{,\eta}) \\ w_{,x} &\rightarrow w_{,\xi} & w_{,xy} &\rightarrow c^{-1}(-s w_{,\xi\xi} + w_{,\eta\xi}) \\ w_{,xx} &\rightarrow w_{,\xi\xi} & w_{,yy} &\rightarrow c^{-2}(s^2 w_{,\xi\xi} - 2s w_{,\xi\eta} + w_{,\eta\eta}) \\ \int dx &\rightarrow \int d\xi & \int dy &\rightarrow \int c d\eta \end{aligned} \quad (5.50)$$

(Wang & Yuan, 2018)’de gösterildiği gibi, gerilme sonuçlarının dönüşümü aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} N_x &= c^{-1}(N_\xi + 2s N_{\xi\eta} + s^2 N_\eta) \\ N_y &= c N_\eta \\ N_{xy} &= N_{\xi\eta} + s N_\eta \end{aligned} \quad (5.51)$$

Uygulanan yük mekanik ve termal yüklerden oluşur. Mekanik yük, Şekil 5.4’de gösterildiği gibi kabul edilir. Denklem 3.9’daki kurucu denklemlerden başlayarak kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmelerinin ve şekil değiştirmelerinin sıfır olması dikkate alınarak ve Bölüm 5.1.1’deki toplam potansiyel enerjiyi Γ bulmak için aynı adımları uygulayarak, ardından ikinci varyasyonu $\delta^2 \Gamma$, sonra $\delta_e^2 \Gamma$ elde etmek için burkulma öncesi denge durumunu ($w = 0$) empoze ederek ve sonra (δw) aşağıda gösterildiği gibi ifade edilmektedir.

$$\delta w_{(\xi,\eta)} \approx \sum_{i=1}^{n_t} f_{i(\xi)} g_{i(\eta)} = f g \quad (5.52)$$

Bundan sonra, f nin bilindiği göz önüne alındığında, kısmi integral uygulanarak, aşağıdaki burkulma denklemleri elde edilebilmektedir.

$$T_1 + T_{P1} + T_{T1} + T_{T01} = 0 \quad (5.53)$$

$\eta \in \{-b, +b\}$ 'da sağlanması gereken sınır koşulları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{array}{llll} \text{eğer} & g = 0 & \text{yada} & T_2 + T_{P2} + T_{T2} + T_{T02} = 0 \\ \text{ve eğer} & g' = 0 & \text{yada} & T_3 = 0 \end{array} \quad (5.54)$$

Çeşitli sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{array}{llll} \mathbf{C:} & g = 0 & \text{ve} & g' = 0 \\ \mathbf{S:} & g = 0 & \text{ve} & T_3 = 0 \\ \mathbf{F:} & T_2 + T_{P2} + T_{T2} + T_{T02} = 0 & \text{ve} & T_3 = 0 \end{array} \quad (5.55)$$

Burkulma yüklerinin çarpılan kritik faktörü olan λ , bir genelleştirilmiş bir özdeğer problemi olarak Denklem 5.53'de var olan yönetim denklemlerinin Denklem 5.55'den seçilen sınır koşulları ile çözülmesiyle elde edilmektedir.

Örneğin, plakanın sıcaklığın arttığı bir ortamdayken mekanik yükler altında burkulma yükünü bulmak için genelleştirilmiş özdeğer problemi aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$T_1 + T_{T1} + T_{T01} = -\lambda T_{P1} \quad (5.56)$$

Sınır koşulları aşağıdaki gibi yeniden yazılmaktadır.

$$\begin{array}{llll} \mathbf{C:} & g = 0 & \text{ve} & g' = 0 \\ \mathbf{S:} & g = 0 & \text{ve} & T_3 = 0 \\ \mathbf{F:} & T_2 + T_{T2} + T_{T02} = -\lambda T_{P2} & \text{ve} & T_3 = 0 \end{array} \quad (5.57)$$

Bir plakanın sınır koşulları, etiketleme sırasının kenarların yanına yazıldığı Şekil 5.3'da gösterildiği gibi sol kenardan başlayarak saat yönünün tersine her kenarın sınır durumu belirtilerek açıklanmaktadır. Örneğin, CSFC, $\xi = \{-a\}$ kenarının sabitlendiği, $\eta = \{-b\}$ kenarının basit mesnet olduğu, $\xi = \{+a\}$ kenarının serbest olduğu ve $\eta = \{+b\}$ kenarının sıkıştırıldığı anlamına gelir. Bu, kararlılık denklemlerinin türetilmesini ve verilen çözüm için y yönünde sınır koşullarını tamamlamaktadır. T 'ler şöyle verilmektedir:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{D}{c^3} (\hat{A}_{(0,0)} g'''' + 2sQ_{(1,0)} g''' - 2sQ_{(2,1)} g' + \hat{A}_{(2,2)} g \\
&\quad + (2R_2 \hat{A}_{(1,1)} + R_1 (\hat{A}_{(2,0)} + \hat{A}_{(0,2)})) g'') \\
&\quad + k_n c \hat{A}_{(0,0)} g + \frac{k_p}{c} (\hat{A}_{(1,1)} g - sQ_{(1,0)} g' - \hat{A}_{(0,0)} g'') \\
T_2 &= \frac{D}{c^3} (-\hat{A}_{(0,0)} g''' - 2sQ_{(1,0)} g'' - (2R_2 \hat{A}_{(1,1)} + R_1 \hat{A}_{(0,2)}) g' \\
&\quad - 2s\hat{A}_{(1,2)} g) + \frac{k_p}{c} (\hat{A}_{(0,0)} g' - s\hat{A}_{(0,1)} g) \\
T_3 &= \frac{D}{c^3} (\hat{A}_{(0,0)} g'' - 2s\hat{A}_{(0,1)} g' + R_1 \hat{A}_{(0,2)} g) \\
T_{P1} &= P_\eta \hat{A}_{(0,0)} g'' - P_{\xi\eta} Q_{(1,0)} g' - P_\xi \hat{A}_{(1,1)} g \\
T_{P2} &= -P_{\xi\eta} \hat{A}_{(0,1)} g - P_\eta \hat{A}_{(0,0)} g' \\
T_{T01} &= \frac{G_2}{c} (-\hat{A}_{(0,0)} g'' - sQ_{(1,0)} g' + \hat{A}_{(1,1)} g) \\
T_{T02} &= \frac{G_2}{c} (\hat{A}_{(0,0)} g' - s\hat{A}_{(0,1)} g) \\
T_{T1} &= \frac{G_1}{c} (\hat{A}_{(0,0)} g'' + sQ_{(1,0)} g' - \hat{A}_{(1,1)} g) \\
T_{T2} &= \frac{G_1}{c} (-\hat{A}_{(0,0)} g' + s\hat{A}_{(0,1)} g)
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Burada $\hat{A}_{(i,j)}$ ve $Q_{(i,j)}$ aşağıdaki gibi verilen $(n \times n)$ matrislerdir.

$$\hat{A}_{(i,j)} = \int_{-a}^{+a} \left[\left[\frac{d^i f}{d\xi^i} \right]^T \left[\frac{d^j f}{d\xi^j} \right] \right] d\xi \tag{5.59}$$

$$Q_{(i,j)} = \hat{A}_{(i,j)} - \hat{A}_{(j,i)}$$

G_1 , G_2 , R_1 ve R_2 aşağıdaki gibi verilen sabitlerdir.

$$G_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{(z)} \Omega_{(z)} T_{(z)}}{1 - \mu} dz \quad G_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{(z)} \Omega_{(z)} T_0}{1 - \mu} dz \tag{5.60}$$

$$R_1 = s^2 + \mu c^2 \quad R_2 = R_1 - 1$$

Sonuçlar termal yük olan N_T , G 'ler ile şöyle ifade edebilir:

$$N_T = G_1 - G_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{(z)} \Omega_{(z)} \Delta T_{(z)}}{1 - \mu} dz \tag{5.61}$$

5.1.5. Elde Edilen Formülasyonlarla İlgili Notlar

FSDT'ye dayalı burkulma denklemlerinde, sapma ve düzlem içi yer değiştirmeler/rotasyonlar fiziksel tarafsız düzlemde bağlanmamış olarak bulunmaktadır. Bu aynı zamanda rafine FSDT için de geçerli bulunmaktadır. RPT durumunda, sapma ve düzlem içi yer değiştirmeler, fiziksel tarafsız düzlemde bile

birleşik olarak bulunmuştur. Dolayısıyla, RPT'ye dayalı FDP'nin burkulma denklemleri dört değişkeni (δw_b , δw_s , δu , δv) birbirine bağılyken FSDT ve rafine FSDT'nin kararlılık denklemlerinde yalnızca sapma ve rotasyonlar bulunmaktadır. Burkulma denklemleri, rafine FSDT, Denklem 5.39, yalnızca iki değişkenden (δw_b , δw_s) oluşurken FSDT, Denklem (5.24 ve 5.33), üç değişkenden (δw , $\delta \theta$, $\delta \phi$) oluşur.

Rafine FSDT kararlılık denklemlerinde değişkenlerin sayısı daha az olmasına rağmen, FSDT'den daha basit değildir. Bunun nedeni, ilki dördüncü dereceden terimler içerirken, ikincisi ikiden yüksek olmayan dereceli terimler içerir. Aslında, her birinin eşdeğer birinci dereceden sistemi altı denklem içerdiğinden, iki yönetim denklem seti basitlik açısından benzerdir. Dikkat çekmeye değer bir diğer nokta, rafine FSDT'nin kararlılık denklemlerinin iki değişkeninin sadece sonuçta ortaya çıkan kuvvet terimlerinde birleştirilmesidir. CPT'ye dayalı FDP'nin kararlılık denklemleri ve sınır koşullarının, yalnızca dört olan en yüksek dereceli sapmaya bağılı olduğu bulunmuştur. Bu yüzden CPT hepsi arasında en basit olanıdır. RPT, bu sadelik karşılaştırmasında son sırada gelmektedir.

Rafine FSDT'nin FSDT'ye göre ana avantajı, bir kayma düzeltme faktörü K_s 'ye olan ihtiyacın ortadan kaldırılmasıdır. Bunun yerine, plakanın üst ve alt yüzeylerindeki çekme koşullarını karşılamak için akıllıca seçilmesi gereken ve kalınlık doğrultusunda kayma gerilmelerinin kalınlık boyunca istenen dağılımını belirleyen bir kayma dağıtım fonksiyonu $\eta_{(z)}$ gerektirir. Öte yandan FSDT, bir kayma düzeltme faktörü K_s gerektirir. Homojen izotropik plakalar için, genellikle kabul edilen kayma düzeltme faktörleri $\frac{5}{6}$ ve $\frac{\pi^2}{12}$ 'dir. Böyle bir durumda FSDT formülasyonları, daha kalın plakalar için bile yüksek dereceli teorilerle aynı sonuçlar sağlamaktadır. FDP söz konusu olduğunda, bu düzeltme faktörleri mutlaka doğru değildir. Bu düzeltme faktörlerini kullanmak sonuçlarda ufak hata üretmektedir, ancak FDP çok kalın halde iken çıkan hata ihmal edilemez. Bu durum için doğru düzeltme faktörü elde etmek için birçok model önerilmiştir, örn. (Efraim & Eisenberger, 2007; Nguyen vd, 2007; Nguyen vd, 2008; Shariyat & Alipour, 2014). Kısacası, FSDT ve rafine FSDT'ye dayalı EKM burkulma formülasyonlarının her ikisinin de kullanımı basit ve kullanışlıdır.

5.1.6. EKM Prosedürü

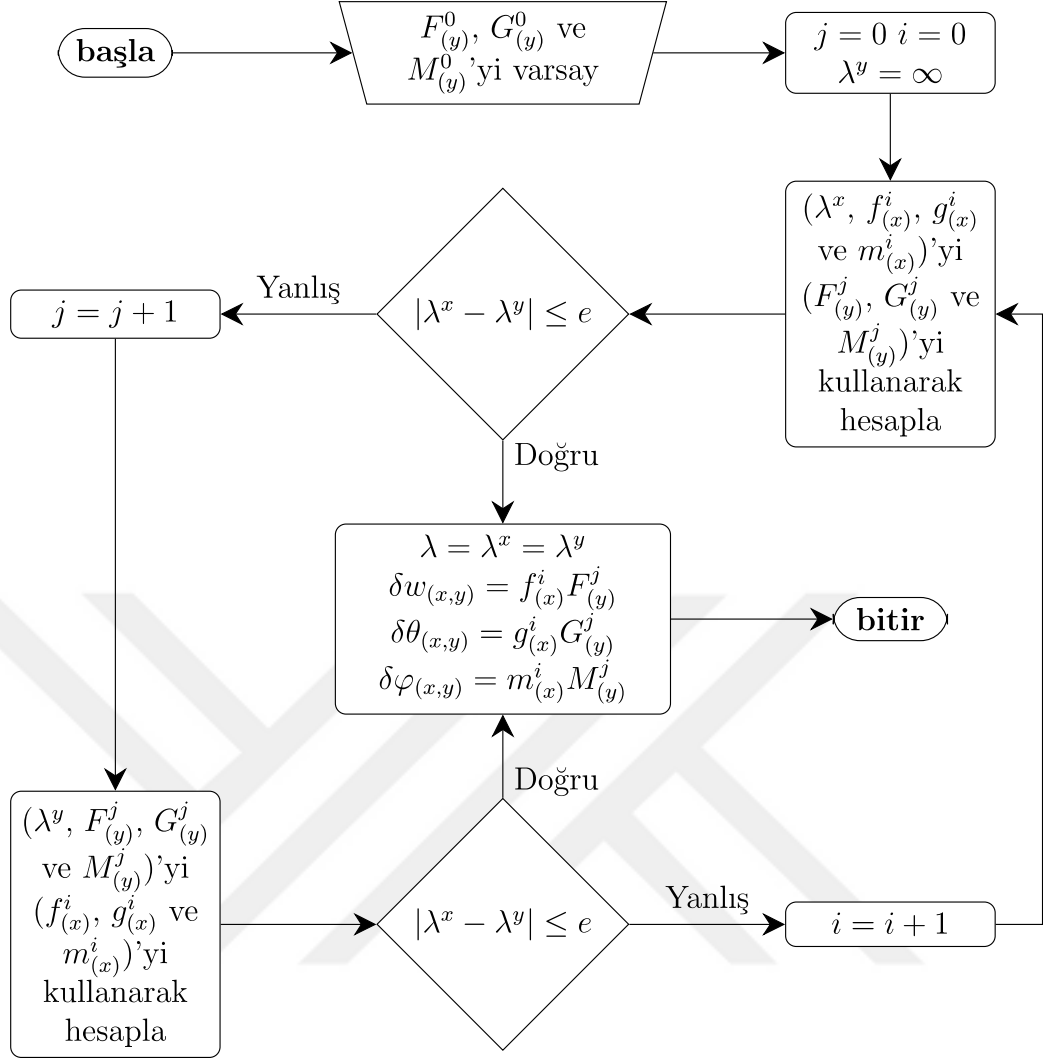
Aşağıda, elde edilen kararlılık denklemlerini ve sınır koşullarını kullanarak burkulma problemini çözmek için EKM adımlarının açıklaması verilmiştir. Burada çözüm aşamasını göstermek için FSDT durumu örnek alınmıştır. Şekil 5.5, EKM

özüm akış Şeması Şekilde göstermektedir.

Birinci adımda, tek yönün fonksiyonlarını tahmin etmektir, diyelim ki F , G ve M varsayılmıştır. EKM'nin diğer varyasyonel yöntemlere göre ana avantajlarından biri, başlangıçta tahmin edilen fonksiyonların sınır koşullarının hiçbirini karşılaması gerekmemesidir. Yani, iz fonksiyonları, çözümün yakınsaması üzerinde minimum etkiyle keyfi olarak tahmin edilebilirler.

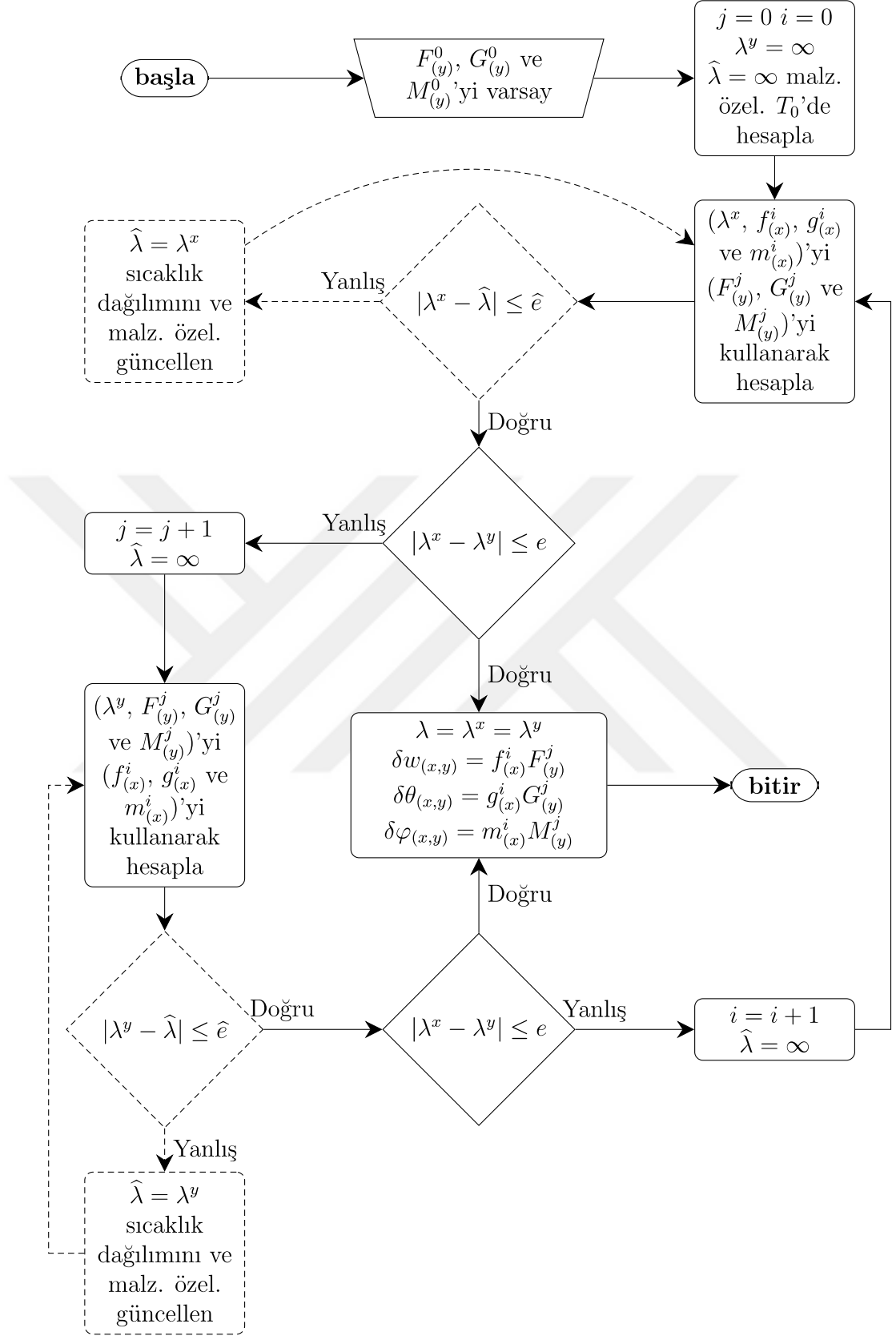
İkinci adımda, denklem 5.24'deki kararlılık denklemlerinin ve denklem 5.25'deki sınır koşullarının yerine F , G ve M 'yi ikame etmek ve en küçük özdeğer ve öz-vektörü için tek boyutlu genelleştirilmiş özdeğer problemi olarak özölmektir. Karşılık gelen öz-vektörler elde edilen yanal yer değiştirme ve döndürmeler f , g ve m iken minimum özdeğer normalde burkulma faktörüdür λ^x dir.

Üçüncü adımda, Denklem 5.33'deki kararlılık denklemlerini ve Denklem 5.34'deki sınır koşullarını çözmek için 2. adımda en son elde edilen fonksiyonları kullanmaktır. Ortaya çıkan öz-vektörler yeni fonksiyonlar F , G ve M iken, özdeğer yeni burkulma faktörüdür λ^y . Bu, EKM'nin ilk döngüsünü tamamlar.



Şekil 5.5. EKM çözüm akış şeması

Elde edilen burkulma faktörleri (λ^x ve λ^y) arasında önemli bir fark olana kadar ikinci ve üçüncü adımlar tekrar edilmektedir. Kabul edilen farka tolerans (e) denir. Plakada elde edilen burkulma şeklindeki değişiklik ayrıca ek bir yakınsama koşulu olarak ilave edilebilir. Termal ve termo-mekanik burkulma problemlerinde aynı adımlar ile çözüm elde edilmektedir. Ayrıca eğer incelenen malzemenin özellikleri sıcaklığa bağlıysa her tekrarda elde edilmiş kritik sıcaklık ile malzemenin özellikleri yinelenmeli şekilde güncellenmelidir. Bu ek adım, Şekil 5.6’de kesik çizgili bloklar olarak EKM çözüm yöntemi akış şemasına eklenmiştir.



Şekil 5.6. Sıcaklığa bağlı özelliklere sahip FPD'nin burkulması için EKM ile çözüm akış şeması

5.2. Chebyshev Spektral Yöntemi

Tek boyutlu genelleştirilmiş özdeğer problemini EKM adımlarıyla çözmek, orijinal iki boyutlu genelleştirilmiş özdeğer problemini çözmekten çok daha kolaydır. Elde edilen genelleştirilmiş özdeğer problemini çözmek için herhangi bir uygun yöntem kullanılabilir. Düşünülen plakanın problemi ve dolayısıyla türetilen denklemler yeterince basitse, (Chen, 1972; Kerr, 1969; Singhatanadgid & Jommalai, 2016; Xie & Elishakoff, 2000)'nin yaptığı gibi tam bir analitik çözüm elde edilebilmektedir.

(Lopatin & Morozov, 2011, 2013, 2014; Yu & Zhang, 1986; Zhang & Yu, 1988), EKM kullanılarak elde edilen kararlılık denklemlerini çözmek için yaklaşık analitik yöntem olan Galerkin'in yöntemini uygulamıştır. Daha karmaşık plaka problemleri için sayısal yöntemler kullanılmalıdır. (Grimm & Gerdeen, 1975) sayısal integral yöntemini kullanırken, (Eisenberger & Alexandrov, 2003; Eisenberger & Shufrin, 2009; Shufrin & Eisenberger, 2005a, 2005b, 2006; Shufrin & Eisenberger, 2007; Shufrin vd, 2008a; Shufrin vd, 2008b) kesin eleman yöntemini kullanmıştır. Çeşitli algoritmaları etkin bir şekilde uygulayarak genelleştirilmiş özdeğer problemini yürütebilen birçok çözücü vardır. EKM ile elde edilen kararlılık denklemlerinin çözümü için (Yuan & Jin, 1998) COLSYS ODE çözücüsünü, ve (Shufrin vd, 2009) ise MATLAB'ın BVP çözücüsünü kullanmıştır.

Bu çalışmada, elde edilen genelleştirilmiş özdeğer problemleri Chebyshev spektral yöntemi kullanılarak, açık kaynaklı sayısal hesaplamalar paketi olan Chenfun (Driscoll vd, 2014) ile çözülmüştür. Problemler basit olduğunda ve çözüm sürekli olduğunda, spektral yöntemler tercih edilen çözüm yöntemleridir (Trefethen, 2000). FEM ve sonlu farklar yöntemi gibi diğer sayısal yöntemlerin ihtiyaç duyduğu daha az nokta ile en yüksek doğruluğu sağlamaktadır.

Spektral yöntemler, çözümü FEM'deki gibi yerel işlevlerin değil, küresel temel işlevlerin toplamı olarak ifade etmektedir (Boyd, 2001). Spektral yöntemler uygulanırken belirli alanlardaki problemler için, eşit olmayan aralıklı polinomlar interpolantları uygulanmaktadır. Bu tür ünlü polinomlar Chebyshev ve Legendre polinomlarıdır. Spektral yönteminde türevleri, etki alanındaki tüm noktalarda fonksiyon değerinin ağırlıklı toplamı olarak ifade etmeye dayanmaktadır. Böylece, ODE bir doğrusal cebirsel denklemler sistemine dönüştürülmektedir.

İlgili fonksiyon olan $\Psi(x)$ Lagrange formunda yazılıp türevi alınır ve ağırlıkları bir $(N \times N)$ matris D_N olarak ve N noktadaki fonksiyon değerlerini bir $(N \times 1)$ vektör V olarak formunda yeniden yazılmaktadır. Yani,

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \Psi(x_1) \\ \Psi(x_2) \\ \vdots \\ \Psi(x_N) \end{pmatrix} = D_N \begin{pmatrix} \Psi(x_1) \\ \Psi(x_2) \\ \vdots \\ \Psi(x_N) \end{pmatrix} = D_N V \quad (5.62)$$

İkinci ve daha yüksek türevler, D_N 'yi ilgili üsse koyarak elde edilmektedir. Örneğin,

$$\frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = D_N D_N V \quad \frac{d^3 \Psi(x)}{dx^3} = D_N D_N D_N V \quad (5.63)$$

Chebyshev spektral yönteminde Lagrange birleşiminin alındığı noktalar, Gauss-Chebyshev-Labatto noktalarıdır. Bu noktalar, bir üst yarım dairenin eşit aralıklı düğümlerinin yatay çizgiye izdüşümünden kaynaklanmaktadır (Trefethen, 2000). Bu noktalar matematiksel olarak aşağıdaki ifade edilmektedir.

$$x_i = -\cos\left(\frac{(i-1)\pi}{N-1}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5.64)$$

5.3. ANSYS Modeli

Plaka burkulma problemini hala malzeme mekaniği alanında aktif bir araştırma alanı olduğundan, araştırmacıların, sağlam bir genel amaçlı sonlu elemanlar analiz aracı olan ANSYS gibi analiz araçlarını kullanarak önerilen çözümleri ve teorileri doğrulamaları gerekmektedir. Bu çalışmada, “Mechanical APDL” (ANSYS®, Introducing APDL), ANSYS Parametrik Tasarım Dili, Sürüm 17,1'deki plakanın modellenmesi ve burkulma analizlerini çeşitli modeller ve seçenekler üzerinde yapılan bir dizi karşılaştırmalı çalışma ile incelemiştir.

Çeşitli elemanlar kullanılarak homojen ve fonksiyonel derecelendirilmiş kabuk ve katı modeller incelenmiştir. Plaka burkulma analizi için hem kabuk hem de katı plaka modellerinde sınır koşullarının ifade edilmesi tartışılmıştır. ANSYS'te burkulma analizi prosedürleri sunulmuş ve karşılaştırmalı çalışmalar ile mesh boyutu, sınır şartları ve eleman seçeneklerinin etkileri incelenmiştir. ANSYS'te elde edilen sonuçlar çeşitli analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Birçok yayın, plakaların burkulması analizleri üzerine sunulan yöntemler için bir doğrulama adımı olarak ANSYS kullanır, ancak ANSYS analizinde kullanılan modeller, seçenekler veya adımlar yayınlarda açık olarak paylaşılmamıştır. Literatürde, ANSYS'teki çeşitli plaka modelleri modal ve gerilme analizlerine

dayanılarak karşılaştırılmıştır; ancak araştırmacıların ANSYS'te plakalar üzerinde burkulma analizi yapmaları için bir rehber olabileceğine dair hiç bir referans bulunamamıştır.

Bu alandaki mevcut referansların sadece gerilme ve modal analizler için olduğu görülmüştür. (Banerjee vd, 2011), yaptıkları çalışmada, gerilme analizi için kabuk elemanlarını ve katı-kabuk elemanlarını plaka modelleri ile karşılaştırmıştır. (Wang, 2006) yaptığı çalışmada, gerilme ve modal analiz için kabuk, katı ve katı-kabuk elemanlarını plakanın modelleri ile karşılaştırmıştır. Burkulma analizi için (Swamy vd, 2015), eski düzlemsel eleman kullanılarak homojen dikdörtgen plakanın burkulmasını incelemiştir. (Subramani & Sugathan, 2012) silindirik ince duvarlı yapıların burkulmasını, iki kabuk modeli arasında karşılaştırmışlar ve ANSYS'te bir kabuk ile katı modellerin karşılaştırılması (Bischoff, 2008) tarafından yapılmıştır.

5.3.1. Plakanın Modellerinde Kullanılan ANSYS Elemanları

ANSYS, birçok simülasyon alanını kapsayan geniş bir eleman yelpazesi sunmaktadır. Plakanın modellenmesi için, bu çalışmada kabuk, katı ve katı-kabuk elemanları kullanılmıştır.

5.3.1.1. Kabuk Elemanlar

Shell181 ve Shell281, plakaların modellenmesi için uygun kabuk elemanlardır (ANSYS®, Element Library). Kabuk elemanları, plaka problemini, yüzeydeki şekil değiştirme/deformasyon varsayımlarıyla indirgeyen plak/kabuk teorileri kavramını kullanmaktadır. ANSYS'te mevcut yapısal kabuk elemanları birinci mertebeden kayma deformasyon teorisine FSDT dayanmaktadır. ANSYS komutu olan SECDATA kullanılarak lamine plakalar modellenabilir(ANSYS®, Command Reference).

5.3.1.2. Katı Elemanlar

Plakayı üç boyutlu katı gövde olarak modellemek için katı elemanlar kullanılmaktadır. Bu elemanların tam plakayı modellemiş gibi görünse de, ince plakaları modellerken kilitleme problemleri yaşanmaktadır. Bu sorun klasik FEM ile ilgilidir, modelin olması gerekenden farklı davranmasını sağlamaktadır (Reddy, 2006). Bu nedenle, ince plakaların modellenmesinde katı elemanların kullanılması sonuçların bazı işlemleriyle ilişkilendirilmelidir. ANSYS'teki katı yapısal elemanlar, tetrahedral (dört yüzlü) ve tuğla elemanlara ayrılabilir.

Tetrahedral elemanlar Solid285 ve Solid187'yi içerir (ANSYS®, Element Library). Tetrahedral elemanlar düzensiz örgüleri modellemek için yüksek bir yeteneğe sahiptir. Bu elemanlar homojen plakaları modellemek için kullanılabilir, ancak ANSYS'te bu elemanları kullanarak lamine plakaları modellemek için hazır bir araç bulunamamıştır. Bir lamine plaka modellemek için kalınlığın farklı katmanlara farklı malzemeler ataması veya farklı farklı malzemeye sahip bitişik hacimleri birbirine yapıştırması gerektiği gözlenmiştir.

Tuğla elemanlar arasında Solid185 ve Solid186 bulunmaktadır (ANSYS®, Element Library). Tuğla formlarında düzensiz örgülerin modellenmesinde yeteneği bulunmaz. Bununla birlikte, düzenli geometri için tetrahedral elemanlardan daha doğru sonuçlar vermektedir. Lamine plakalar, farklı malzemelerle atanmış bitişik tuğla katmanları olarak modellenebilir. Ek olarak, ANSYS tarafından sağlanan tuğla yapı elemanlar bir kabuk bölümü ile ilişkilendirilebilme yeteneğine sahiptir; yani ANSYS komutu SECDATA kullanılarak farklı malzemelerin bir plakanın kalınlığı boyunca farklı bölümlere atanabileceği anlamına gelmektedir. Bu nedenle, lamine plakalar ANSYS'te mevcut bölüm komutları kullanılarak doğrudan modellenebilir.

5.3.1.3. Katı-Kabuk Elemanlar

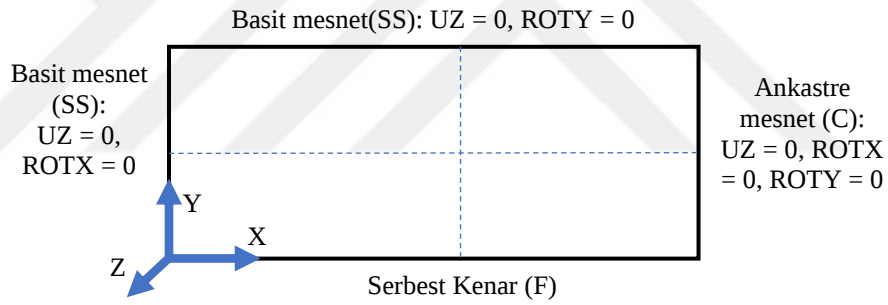
ANSYS'te sağlanan yalnızca tek bir katı-kabuk elemanı vardır; Solsh190 olarak adlandırılır (ANSYS®, Element Library). Katı-kabuk elemanları, katı elemanların ve kabuk elemanların faydalarını bir kerede birleştirmeyi amaçlayan nispeten yeni bir teknolojidir. Solsh190, kalın plakaları doğru şekilde modelleyebildiği gibi, ince P-plakaları modellerken çeşitli kilitleme fenomenlerinin önlenmesini amaçlayan zorlanma varsayımlarını içermeye kabiliyetine sahip bir tuğla yapı elemanıdır.

5.3.2. Sınır Şartları

Bir plakanın sınır koşulları, serbest, ankastre mesnet veya basit mesnet şeklinde desteklenen şartlara sahip olabilir (Reddy, 2006). Daha az yaygın olan diğer sınır koşulları arasında menteşeli, sabit ve hareketli kenarlar bulunur. Burkulma analizi için sınır koşulları, en azından yükün hareket ettiği yönde yer değiştirmeye izin vermek zorundadır. ANSYS'te burkulma analizi için bir dikdörtgen yassı plakanın geometri ve sınır koşullarının modellenmesi aşağıdaki şekilde tartışılmıştır. ANSYS'te plaka, kabuk model veya katı model olarak modellenebilir. Yer değiştirme kısıtlamaları olarak ifade edilen sınır koşulları, yani temel birincil sınır koşullarıdır. Düşünülen plaka modeline bağlı olarak, sınır koşulları aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

5.3.2.1. Kabuk Modelleri

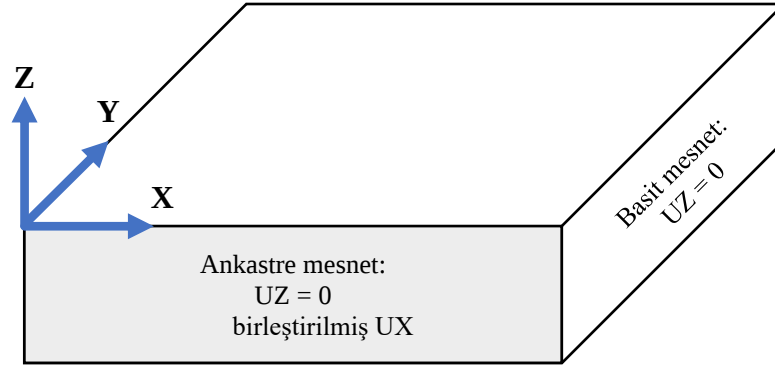
Kabuk modelleri, Shell181 veya Shell281 kabuk elemanlarına dayanmaktadır. Plaka kabuk modeli, kabuk elemanlarının daha küçük alanlara örülmüş bir halidir. Kabuk elemanlarının yer değişme (UX, UY ve UZ) ve dönme (ROTX, ROTY ve ROTZ) serbestlik dereceleri vardır. Sınır koşullarının bu serbestlik dereceleri üzerindeki etkileri hakkında iki önemli nokta dikkate alınmalıdır. İlk olarak, kenarın kalınlık yönü (UZ) etrafındaki dönüşü aslında düzlem yer değiştirmeleridir (UX veya UY). Bu nedenle, ROTZ'in sınırlandırılması, düzlem yer değiştirmelerinin sınırlandırılması anlamına gelir. Başka bir deyişle, düzlem yer değiştirmelerinin (UX ve UY) izin verilebilmesi gerekiyorsa, ROTZ'a da izin verilmesi gerekir. İkincisi, kenarın kenara dik olan bir düzlem eksen etrafında dönmesi aslında düzlem dışı yer değiştirmeyi ifade eder. Şekil 5.7'de iki kenarı basit mesnet, bir kenarı ankastre mesnet ve bir kenarı serbest olan bir plakanın kabuk modelinde ifade edilen çeşitli sınır koşulları gösterilmiştir.



Şekil 5.7. Plakanın kabuk modelinde sınır şartları

5.3.2.2. Katı Modelleri

Katı modeller katı veya katı-kabuk elemanlarına dayanmaktadır (Solid185, Solid186, Solid187, Solid285 veya Solsh190). Plakanın katı modeli, küçük hacimli katı elemanlara ayrılmış katı bir yapıdır. Katı elemanlar yalnızca yer değişme (UX, UY ve UZ) serbestlik derecelerine sahiptir. Katı modeldeki sınır koşulları, kenarların yüzlerinde ifade edilir. Şekil 5.8, katı modelde ifade edilen çeşitli sınır koşullarını gösterir.

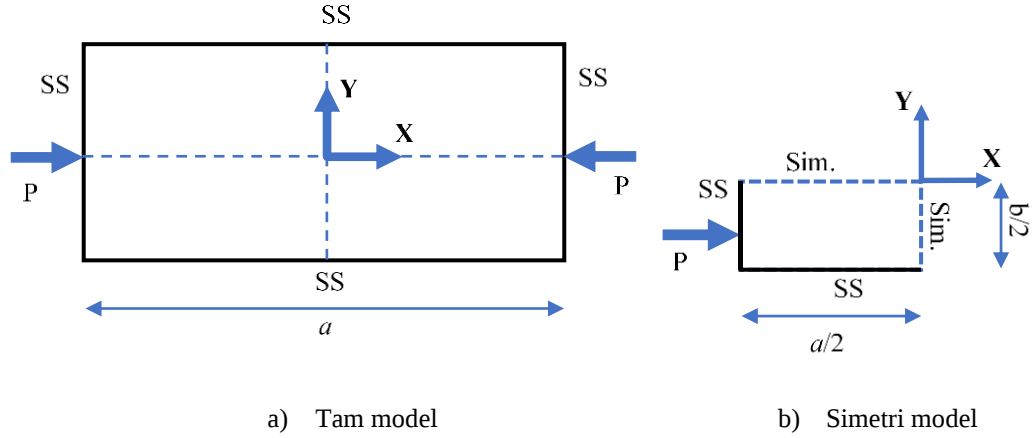


Şekil 5.8. Plakanın katı modelinde sınır şartları

Örneğin, katı modelde basit mesnet kenar, o kenarın yüzündeki tüm noktaların hiçbir yanal (plakanın düzlemi dışı) yer değiştirmeye izin vermediği bir kenardır. Katı elemanlar için dönme serbestlik derecesi olmadığından, ankastre mesnet sınır koşulu kenarın yüzündeki tüm noktaları normal yönde birleştirilerek ifade edilmektedir. Bu, kenarın kendi eksenini etrafında dönmesini engellemektedir.

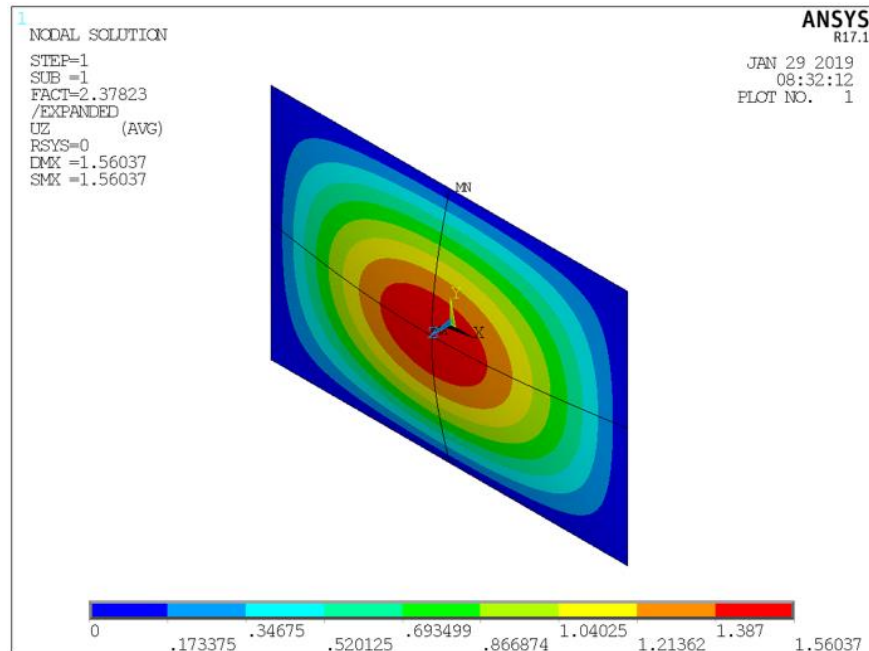
5.3.2.3. Plaka Modelinde Simetri

Bazı plaka problemleri, geometride, yüklerde ve sınır koşullarında simetri/anti-simetriye sahip olabilir de, ANSYS'te plakanın burkulma analizi için simetrisi/anti-simetri dikkatle yapılmalıdır. Analizde simetri/anti-simetri uygulanırken, bazı burkulma modları kaçırılabilir sebebi ise sadece simetrik/anti-simetrik olan modlar hesaplanacaktır. Bu nedenle, hiçbir burkulma modunun atlanmadığından emin olmak için mümkün olduğunca tam modelle çalışılmalıdır. Şekil 5.9, kenarın birim uzunluğu başına yük olarak ifade edilen tek eksenli düzgün basınç P altında, tamamen basit mesnet bir plakanın, yani tüm kenarlar basit mesnet, tam ve simetri modellerini göstermektedir. Tam modele kıyasla simetri modelinin davranışını daha iyi göstermek için, kısa kenarlara etki eden tek eksenli düzgün basınç altında 1,5m boyunda, 1m eninde ve 2mm kalınlığında ince bir plaka, tam model Şekil 5.9-a ve simetri modeli olarak Şekil 5.9-b gösterilmiştir.

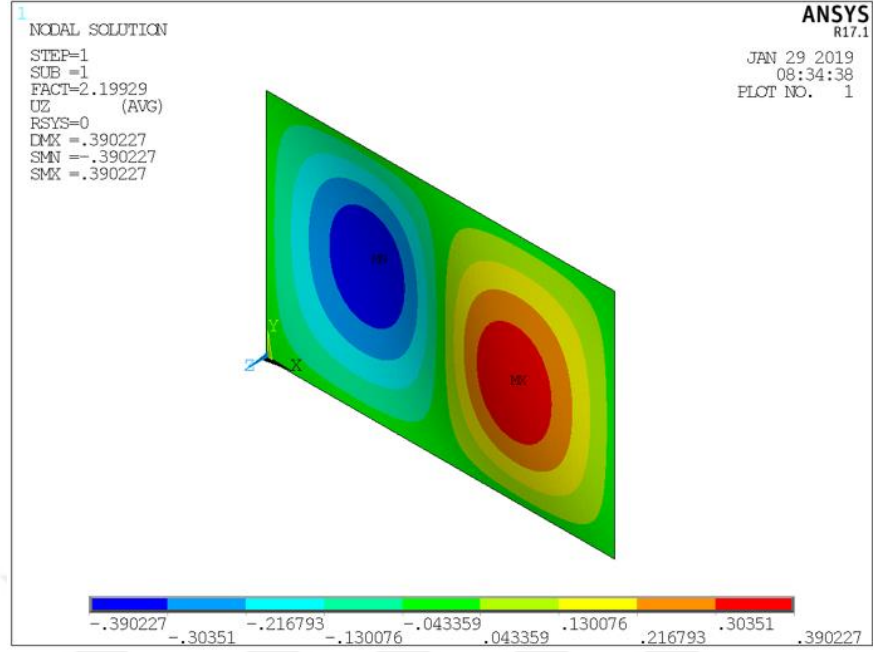


Şekil 5.9. Tek eksenli basınç altında tam ve simetri modelleri

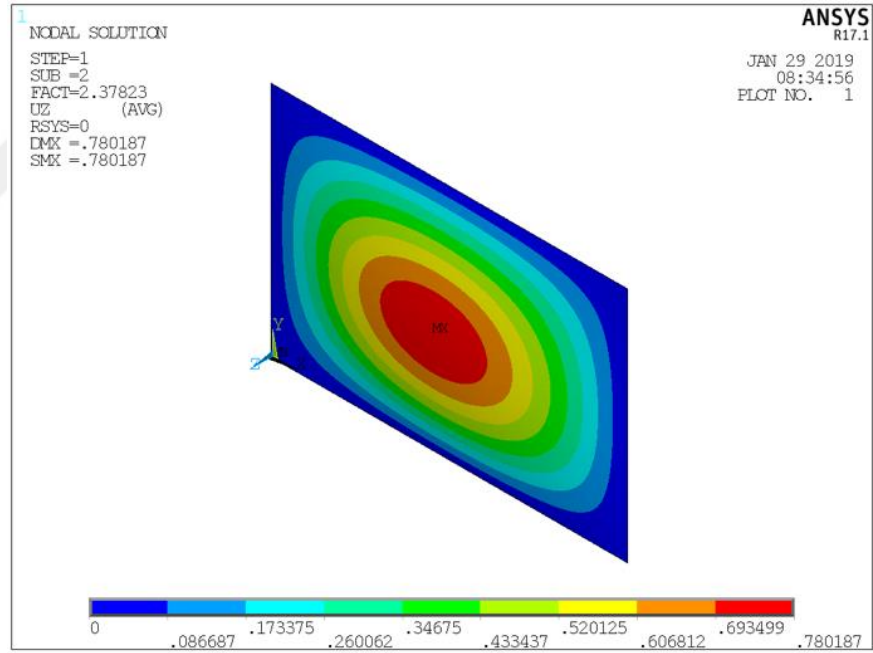
Doğrusal özdeğer burkulma analizi yapılmıştır. Elastisite modülü 70GN/m^2 ve Poisson oranı 0,3 olarak kabul edildi. Şekil 5.10’de gösterildiği gibi, ANSYS, simetri modelini kullanarak birinci burkulma yükünü $2,378\text{N/mm}$ olarak hesaplarken, tam model için ilk burkulma yükü, Şekil 5.11-a’da gösterildiği gibi 2.199N/mm olarak hesaplanır. Burada simetri modeli ilk burkulma yükünü kaçırmıştır. Simetri modeli kullanılarak hesaplanan ilk burkulma yükü, aslında Şekil 5.11-b’de gösterildiği gibi tam model için ikinci burkulma yüküdür.



Şekil 5.10. Simetri modelinin ilk burkulma modu, yük faktörü = 2,37823



a) Birince burkulma modu, yük faktörü = 2,19929



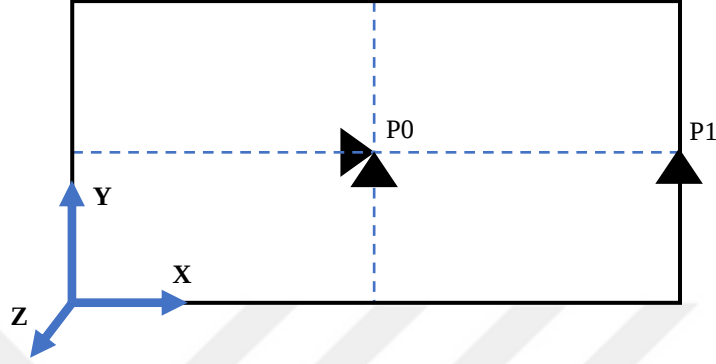
b) İkinci burkulma modu, yük faktörü = 2,37823

Şekil 5.11. Tam modelin ilk ve ikinci burkulma modları

5.3.2.4. Ek Sınır Koşulları

Plakanın dengeli yükler altında olmasına rağmen, katı cisim hareketini ve dönüşünü sınırlandırmak için modelin ilave sınır koşullarına ihtiyacı olabilir. Örneğin, tüm kenarları basit mesnet bir tam plakanın modeli için, katı cisim hareketini önlemek

için ek sınırlamalar eklenmesi gerekir. Genel olarak, plakadaki iki farklı noktanın sınırlandırılması, herhangi bir yükleme/sınır koşulu biçiminde katı cisim hareketinin önlenmesi için yeterli düşünülmüştür. Şekil 5.12, tam bir kabuk modeli için ilave kısıtlamaların tipik bir yapılandırmasını gösterir. P1 noktası X ve Y yönlerinde, P1 ise Y yönünde sınırlanmıştır.



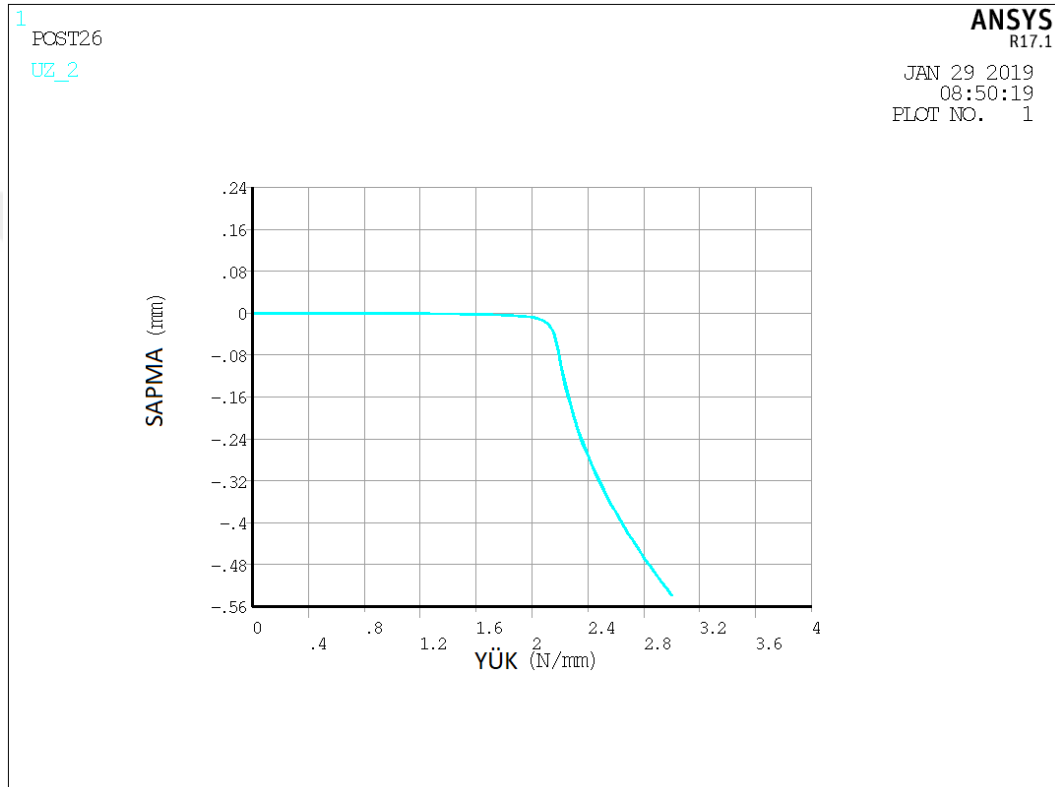
Şekil 5.12. ANSYS'teki kabuk modelinde gereken ek sınır koşulları

5.3.3. ANSYS'te Burkulma Analizi

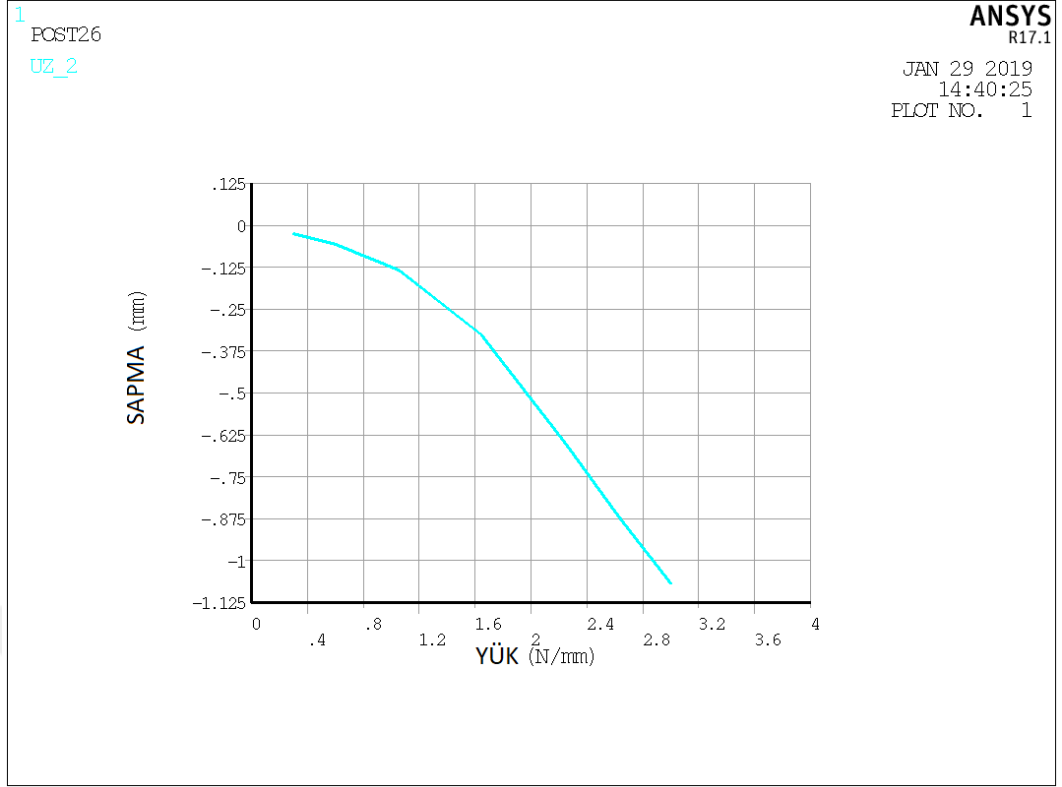
ANSYS'te burkulma analizi, özdeğer burkulma analizi ve doğrusal olmayan statik analiz olmak üzere iki şekilde yapılabilir (ANSYS®, Buckling Analysis). Özdeğer burkulma analizi, burkulma noktasına ulaşmak için uygulanan yüklerle çarpılması gereken burkulma yük faktörünü ortaya koymaktadır (ANSYS®, Buckling Analysis). Özdeğer burkulma analizi doğrusal veya doğrusal olmayan statik analize dayanabilir. Doğrusal özdeğer burkulma analizi ideal elastik yapı ile ilgilenir ve daha sonra doğrusal olmayan burkulma analizleri için yararlı olan bir tahmin sağlamaktadır. ANSYS, özdeğer burkulma analizi için kullanıma hazır bir araç sunar ve burkulma modu şekilleriyle birlikte burkulma yük faktörünü hesaplamaktadır. Bu analizlerde ANSYS tarafından gösterilen yer değiştirmelerin kendi başlarına fiziksel bir anlamı olmayıp sadece burkulma modu şeklini göstermede yararlıdır. ANSYS'te burkulma analizi yapmanın ikinci yolu, büyük yer değiştirme seçeneğinin etkin olduğu statik olan ve doğrusal olmayan bir statik yapısal analizdir (ANSYS®, Buckling Analysis).

Plaka, tahmini burkulma yükünden daha büyük olan artan yük altına konur ve daha sonra yük-sapma eğrisi, çatallanma noktası incelenir. Bu analizde plakanın burkulma sonrası da incelenebilir. Çatallanma noktası, tepkinin (yanal doğrultuda sapma, UZ) aniden daha hızlı değiştiği, yani burkulma noktasıdır. Doğrusal olmayan analize, malzemenin doğrusal olmayan özellikleri ve kusurlar dâhil edilebilir.

Bu yöntemde homojen veya simetrik lamine plakanın yalnızca düzlem içi olan yükler altında burkulma analizi yapılırken, burkulma davranışının ANSYS tarafından yakalanamayacağına dikkat edilmelidir. Bu durumda, burkulma noktası için izlenen bir sapmanın oluşturulması için başlangıçta, daha sonra artan yük ile artacak bir kusura ihtiyaç vardır. Bu ilk kusurluluk, genellikle yanal yükler altında plaka için önceki statik analizden veya önceki burkulma analizinden kaynaklanan burkulma modu şeklinden elde edilen ilk deformasyon olarak ifade edilir.



Şekil 5.13. Hafif sapmaya sahip olan plakanın orta noktasının yük-sapma eğri



Şekil 5.14. Büyük sapmaya sahip olan plakanın orta noktasının yük-sapma eğri

Uygulanan başlangıç kusurunun, belirgin çatallanma noktası olan bir eğri elde etmek için yeterince küçük olması gerektiği gözlenmiştir. Şekil 5.13 ve Şekil 5.14’de, aynı sınır koşulları altında lineer olmayan statik yapısal analizler ve iki farklı başlangıç sapmasıyla yükler sonucu oluşan bir plakanın orta noktasındaki yani yük-sapma eğrileri karşılaştırılmıştır.

Şekil 5.13 ve Şekil 5.14’de gösterilen sonuçlar, kısa kenarlara etki eden tek eksenli düzgün basınç altında, 1,5m boyunda, 1,0m eninde ve 2mm kalınlığında, 70 GN/m² elastisite modülüne ve 0,3 Poisson oranına sahip bir plaka içindir. İlk saptırılmış geometriler, Şekil 5.13’da gösterilen önceki doğrusal özdeğer burkulma analizinden, UPGEOM (ANSYS®, Command Reference) ANSYS komutunu ilk analiz için etkenler ve ikinci için nispeten daha büyük faktörü kullanarak güncelleme geometrisi ile elde edilir.

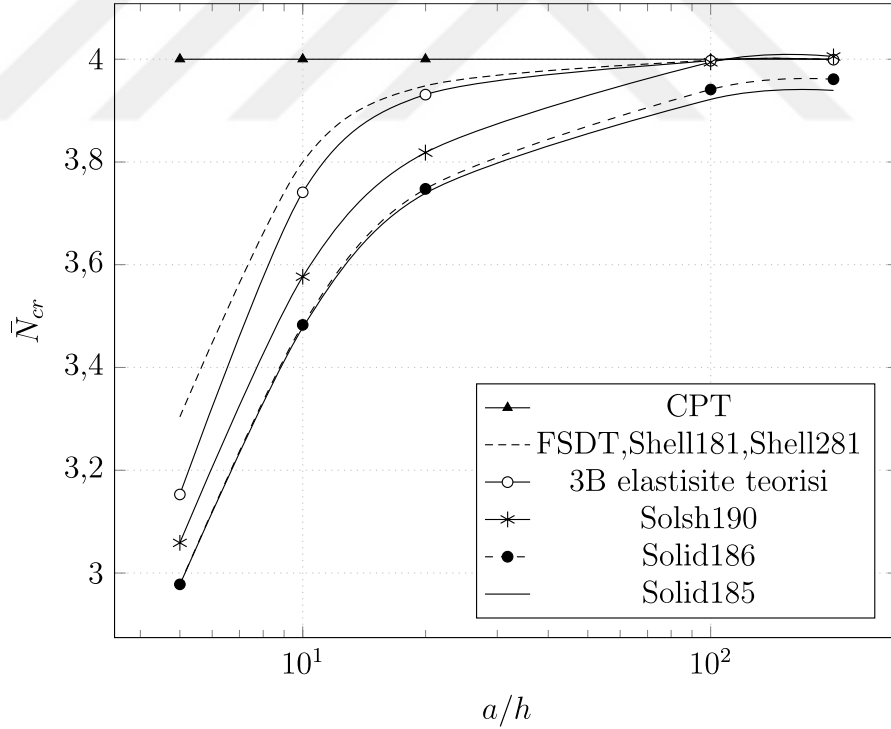
İlk durumda, yük sapma eğrisinden bir çatallanma noktası gözlenebilir, ikincisi için durum böyle değildir. Şekil 5.13’ü kontrol ederek, burkulma yükünün kabaca 2.2N/mm olduğu görülebilir, bu da Şekil 5.11-a’da gösterilen özdeğer burkulma analiz aracı kullanılarak elde edilenle aynıdır. Daha küçük ilk saptmaların uygulanması daha net çatallanma noktasına yol açar.

5.3.4. Plaka Modelinin Seçimi

ANSYS'teki kabuk ve katı plaka modelleri, burkulma analizi için farklı çözümler sunmuştur. ANSYS'te plaka burkulma analizi için bir model seçmek, kalınlığa bağlıdır. Kabuk modeller daha ince plakalar için daha doğru sonuçlar verirken, katı modeller daha kalın olanlar için daha doğru sonuçlar vermiştir. Bununla birlikte, katı-kabuk elemanlarının katı modelleri, hem ince hem de kalın plakalar için diğer katı modellerden daha doğru olduğu görülmüştür. Şekil 5.15'de, tek eksenli basınç altında bir kare plakanın çeşitli katı ve kabuk modelleri için boyutsuz doğrusal burkulma yükünün sonuçları ile üç boyutlu (3B) elastisite teorisi (Moslemi vd, 2016), FSDT (Reddy, 2006) ve CPT (Reddy, 2006)'dan ince plakalardan kalın plakalara kadar değişen plakalar için olan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Boyutsuz burkulma yükü $\bar{N}_{cr}$ şu şekilde hesaplanmıştır:

$$\bar{N}_{cr} = N_{cr} \frac{b^2}{\pi^2 D} \quad (5.65)$$

N_{cr} = burkulma yükü (N/mm), b = plakanın eni, D = eğilme rijitliği.



Şekil 5.15. Boy kalınlık oranı (a/h)'ye göre basit mesnetli kare plaka için CPT (Reddy, 2006), FSDT (Reddy, 2006), 3B (Moslemi vd, 2016) ve ANSYS tek eksenli burkulma yükü ($\bar{N}_{cr}$) çözümleri

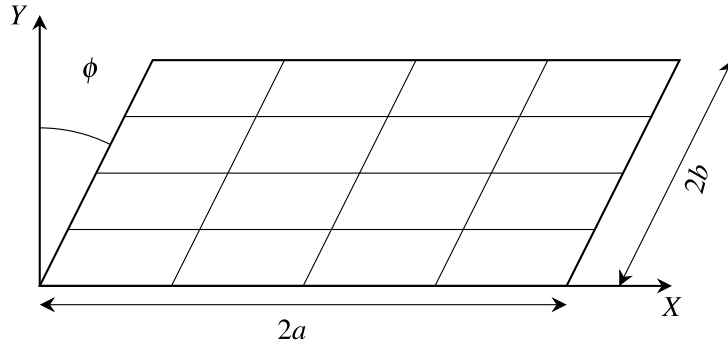
Katı elemanların modelleri kalın plakalar için hemen hemen aynı sonuçları verirken, ince plakalar için farklı sonuçlar vermiştir. Katı-kabuk elemanının modeli, daha kalın plakalar için 3B elastisite teorisine dayanan çözümler ve daha ince olanlar için FSDT ile daha tutarlı sonuçlar sağlamıştır. Doğruluğunun yanı sıra kabuk modeller katı modellere göre çok daha az zaman harcamaktadır. Yapılan analizlerin sonucunda Shell281 elemanlı kabuk modelinin bu çalışmada kullanılmasına karar verilmiştir. Seçilmiş olan kabuk elemanlar, termal yüklerin eklenmesini de kabul etmektedir. Termal yük sıcaklık farkı olarak ifade edilmektedir. Sıcaklığın FDP'nin kalınlığının boyunca değişimi, kabuk elemanın tabakalarına tayin edilebilir.

5.3.5. Ağ Oluşturulması

Sonlu elemanlar metodu FEM, problem bölgesinin daha küçük basit elemanlara bölünmesi kavramına dayanmaktadır; FEM'de, bu basit elemanlar çözülür ve tekrar monte edilerek problemin çözümü elde edilmektedir. Bu bölünme sürecine ağ oluşturması denilmektedir. Ağ boyutu, çözümün doğruluğunu etkileyebilir. Bir plaka ANSYS'te modellenirken, her FEM yazılımında olduğu gibi, elemanlar için uygun bir ağ boyuna karar verilmelidir. Çok küçük eleman boyutu, fazla eleman oluşturur ve daha doğru sonuçlar elde edilebilir. Bununla birlikte, daha fazla sayıda öge de sorunu çözmek için gereken süreyi arttırabilir. Bu çalışmada eleman boyutu terimi, düzlem içi meseleyi tanımlamak için kullanılırken, katman sayısı, kalınlıktaki katı elemanların veya kabuk bölümlerinin sayısını tanımlamak için kullanılmıştır. ANSYS'teki burkulma analizinin doğruluğu burada çeşitli ağ boyutu, katman sayısı ve çeşitli sınır koşulları için incelenmiştir. ANSYS'te düzlem içi ağ oluşturması ve çeşitli sınır koşullarının lineer özdeğer burkulma analizine etkileri kabuk modelleri kullanılarak incelenmiştir. Daha sonra, modeldeki katman sayısının etkileri, kabuk modelleri kullanılarak fonksiyonel derecelendirilmiş plakalar FDP ve çeşitli eleman seçeneklerine sahip katı modeller kullanılarak homojen plaka için incelenmiştir.

5.3.5.1. Düzlem İçi Eleman Sayısı

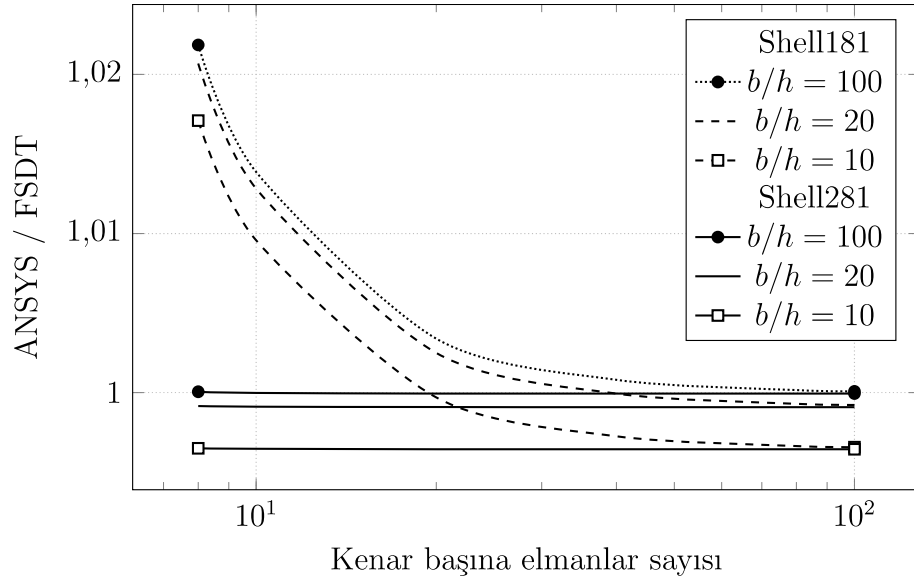
Bu bölümde, kabuk modellerinin düzlemsel ağ büyüklüğünün ve plakanın inceliğinin burkulma analizinin doğruluğunu nasıl etkilediğini göstermektedir. Ağ büyüklüğü, plakanın kenarı başına eleman sayısı ile ifade edilmektedir. Şekil 5.16'de kenar başına dört elemanlı olan kaba ağa sahip eğik plakanın kabuk modeli örnek olarak gösterilmektedir.



Şekil 5.16. Kenar başına dört elemanlı eğik plakanın kabuk modeli

Şekil 5.17’de, FSDT’ye (Reddy, 2006) kıyasıyla, Shell181 ve Shell281 elemanlarının kabuk modellerini, plakanın kenarı başına eleman olarak ifade edilen çeşitli düzlemsel ağ büyüklüğü değerlerine ve ince ila orta kalın plakalar yan-kalınlık oranı olarak ifade edilen çeşitli kalınlık değerlerini karşılaştırmaktadır. Burada kullanılan kabuk modelleri, Şekil 5.9-a’da gösterildiği gibi tam modellerdir. Şekil 5.17’de çizilen sonuçlar, ANSYS ile elde edilen burkulma yükü ile (Reddy, 2006) tarafından sunulan FSDT’ye dayalı analitik çözümler karşılaştırılmıştır.

Sonuçlar, daha küçük ağ boyutu, yani kenar başına daha fazla eleman kullanılmasının, farklı yan-kalınlık oranları b/h için daha yüksek hassasiyetli çözümler sunduğunu göstermiştir. Ancak, çözüm hassasiyetindeki kazanç, ağ boyutu küçüldükçe azalmıştır. Shell181 modeli için Şekil 5.17’de gösterildiği gibi, her bir yan-kalınlık oranı için, kenar başına 80 ve 100 elemanın ağ boyutu neredeyse aynı çözümü sağlamış; ayrıca, kenar başına 40 ve 100 elemanın çözümlerinde anlamlı bir fark gözlenmemiştir. Shell181 modellerinin doğruluğu, Shell281 modellerine göre ağ boyutuna daha duyarlı görülmüştür. Shell281 modelleri, çeşitli ağ boyut değerleri için birbirlerine daha doğru ve daha yakın çözümler sunmuştur.



Şekil 5.17. ANSYS'ın kabuk eleman modelinin FSDT (Reddy, 2006)'ye kıyasıyla doğruluğuna eleman sayısının etkisi

Çözümün doğruluğu, artan sayıda eleman ile artar, ancak bir noktada, önemli ölçüde iyileşmeyi durdurmuştur. Sonuç olarak, plaka kalınlığı, boy en oranı ve ağ boyutu nedeniyle doğrulukta değişkenlik olsa bile, Shell181 ve Shell281 modelleri kullanılarak hesaplanan burkulma yükleri FSDT çözümlerine çok yakınken, Shell281'in eleman sayısına daha az hassasiyet gösterdiği görülmüştür.

5.3.5.2. Katman Sayısı ve FDP Modellenmesi

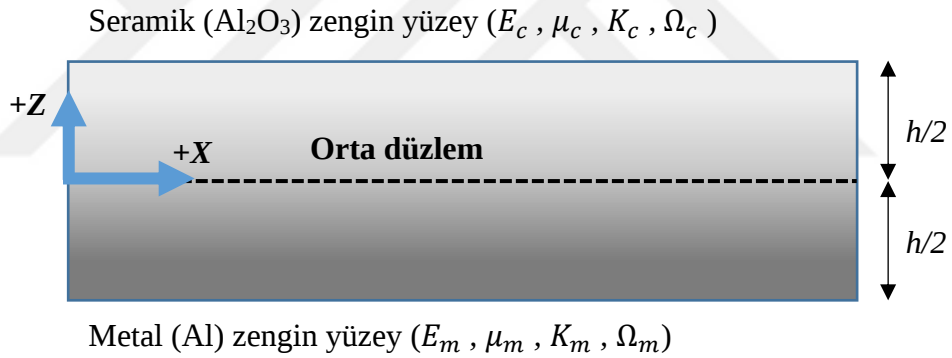
FDM'ler, kademeli ara katmanın kompozit yapının farklı malzemelerini ayırdığı homojen olmayan kompozit malzemelerdir (Birman vd, 2013; Miyamoto vd, 1999). FDM'nin kavramı, farklı malzemeler arasındaki ara yüzde meydana gelen yapıdaki ani değişimin, yapıdaki gerilme yığılmasını azaltmayı amaçlayan bir kompozit dereceli aşama ile değiştirmektir (Miyamoto vd, 1999). FDM'deki bu mikro-yapı değişimi hacmin bir veya daha fazla boyutu boyunca belirli bir fonksiyonla gerçekleşir. Malzeme özelliklerin değişiminin ANSYS'de modellenmesi birçok yöntem kullanılarak gerçekleştirilebilir. yapılan bir çalışmada, gerçek olmayan termal yükler kullanılmıştır (Hassan & Keleş, 2017). Bununla birlikte FDP özelliklerinde sadece kalınlıklar değişiklik gösterirse, FDP'yi ifade etmek için istenen özelliklere sahip katmanları istiflemek daha uygun hale gelmiştir.

Kabuk modelleri için, katman sayısı kalınlıktan tanımlanan bölümlerin sayısı anlamına gelir. ANSYS'de bu bölümleri ve her birinin nispi kalınlığını, malzemesini ve yönünü tanımlama işlemleri SECDATA komutu ile sağlanmaktadır. Katman

sayısının burkulma analizi için kabuk modelinin doğruluğu üzerindeki etkisi burada verilmiştir. Homojen plakanın kabuk modeli için, katman sayısı sonuçları değiştirmemiştir. Bu nedenle, kabuk model doğruluğu üzerindeki etkilerini göstermek için, bir kompozit plaka analizi yapılmıştır. FDP kabuk elemanları kullanılarak modellenmiştir ve burada incelenmiştir. Modellenmiş FDP, kalınlığına göre doğrusal olarak değişen elastisite modülü E olan seramik-metal kompozit bir plakadır. Bu FDP'nin malzemeleri Tablo 5.1'de gösterilen özelliklere sahip olan alüminyum (Al) ve alüminyum oksit (Al_2O_3)'dır. Modellenen FDP'nin en kesiti Şekil 5.18'de gösterilmiştir.

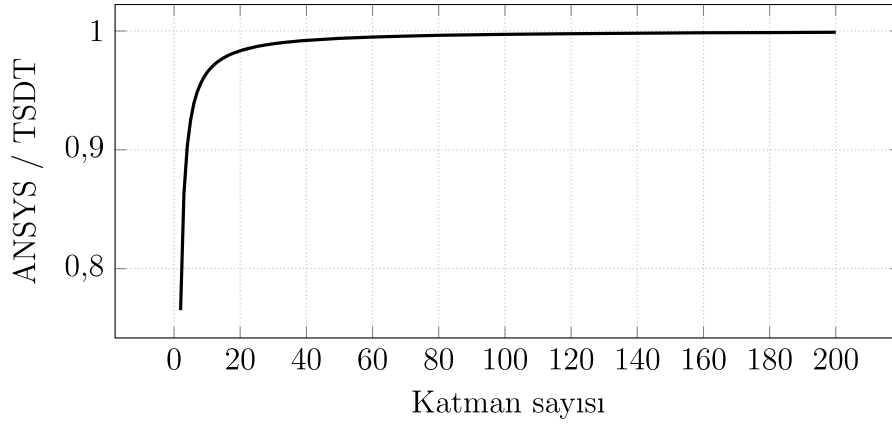
Tablo 5.1. Alüminyum (Al) ve alüminyum oksitin (Al_2O_3) malzeme özellikleri

Malzeme	Al (Metal)	Al_2O_3 (Seramik)
Elastisite modülü (E)	70 GN/m ²	380 GN/m ²
Poisson oranı (μ)	0,3	0,3
Termal genleşme katsayısı (Ω)	$23 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$	$7,4 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
Isı iletkenlik katsayısı (K)	204 W/m $^\circ\text{C}$	10,4 W/m $^\circ\text{C}$



Şekil 5.18. FDP'nin en kesiti

ANSYS'te modelleme özelliklerinde değişiklik kalınlık katmanlara bölünerek yapılır. Her katman homojendir ve bir miktar kalınlığa sahip olup istenen yönde genel varyasyon sunan bir şekilde komşusundan biraz farklı özelliklere sahiptir. Elastisite modülünde tabakalı ve devam eden lineer profil arasındaki fark, tabaka sayısındaki artışla daralacağı düşünülmüştür. En/boy oranı a/b 0,5 ve yan-kalınlık oranı b/h 10 olarak alınmıştır. Sonuçlar, (Shariat & Eslami, 2007)'de sunulan üçüncü dereceden deformasyon teorisine TSDT dayanan çözümlerle karşılaştırılmıştır. Şekil 5.19, çeşitli katmanlar sayısı için TSDT çözümlerine kıyasla Shell281 elemanlarının FDP kabuk modeli için ANSYS tarafından elde edilen burkulma yükünü gösterir.



Şekil 5.19. ANSYS’ın kabuk eleman modelinin TSDT (Shariat & Eslami, 2007)’ye kıyasla doğruluğuna katman sayısının etkisi

Sonuçlar, düşük sayıda katman kullanmanın düşük bir burkulma yüküyle sonuçlandığını göstermiştir. Düşük katman sayısı aralığında, katman sayısının artırılması, hesaplanan burkulma yükü üzerinde önemli bir etkiye sahiptir, ancak bir noktada, katman sayısındaki değişiklik nedeniyle sonuçlardaki değişiklikler azalmaya başlamıştır. FDP’lerde sürekli değişimi ifade etmek için çoğu zaman mümkün olduğunca fazla katmana sahip olmak istense de, çok fazla sayıda katmana sahip modeller, analizde uzun zaman almakta, oldukça düşük katmanlara sahip olanlardan önemli ölçüde farklı çözümler sunmamıştır. Örneğin, Şekil 5.19’de gösterilen durumda, 60 katmanlı model, 180 katmanlı modelin çözümünden sadece biraz daha düşük değerler ortaya koymuştur. Bu nedenle, makul analiz süresi ile yeterince doğru sonuçlar elde etmek için katman sayısı mantıklı seçilmeli gerektiği düşünülmektedir.

5.3.6. Elastik Zeminin Modellenmesi

Elastik zemin, (SimuTech, 2019) tarafından açıklandığı gibi CONTA174 - TARGE170 bağlı temas çifti ile modellenmiştir. Plakanın yüzey alanının bir kopyası CONTA174 elemanlarından yapılır ve orijinal yüzey alanına eklenmiştir. Bundan sonra, plakanın ilk yüzey alanının tamamen kısıtlanmış (sabit) bir kopyası TARGE170 elemanlarından yapılmıştır. Normal ve kayma rijitliğini temsil eden iki kopya arasında, yani CONTA174 ve TARGE170 elemanları arasında bir temas çifti tanımlanmıştır. Plakada bir sapma meydana geldiğinde, CONTA174 elemanları plağa takıldıkları için aynı yer değiştirmeleri yaşarlar. Plakanın yer değiştirmesi, CONTA174 ve TARGE170 elemanları arasında tanımlanan sertlikten kaynaklanan dirençle karşı karşıyadır.

5.3.7. Eğik Plakada Yüklerin Modellenmesi

Shell181 ve Shell281 kabuk elemanlar, kenarlarına dağıtılmış yüklerden yalnızca dik olanlara izin vermektedir. Eğik plaka durumunda, Şekil 5.4’de gösterildiği gibi, yüklerin plakanın kenarlarına normal olmayan ξ ve η yönlerine paralel olduğu varsayılmıştır. Bu sorunu aşmanın bir diğer yolu, herhangi bir yöndeki basınç yüklerini kabul eden ve bu yükleri kabuk elemanlarına aktaran bir sarma elemanı kullanmaktır. Bu çalışmada, bunun için SURF153 elemanları kullanılmıştır.



6. SAYISAL UYGULAMALAR

Sayısal sonuçlar bölümü dört alt bölüme ayrılmıştır. Birinci alt bölümde, FDP'nin önemi, ANSYS'te bir termal gerilme analizi yapılarak incelenmiştir. İkinci alt bölümde, mekanik yükler altında homojen eğik plakaların burkulma davranışı incelenmiştir. Bu ikinci alt bölümde, EKM'nin yakınsaması ve doğruluğunu incelemek amaçlanmıştır. Üçüncü alt bölümde, termal yükler altında eğik FDP'nin burkulma davranışı incelenmiştir. Çeşitli termal yük dağılımları altında burkulma sıcaklıkları arasında ilginç doğrusal ilişkiler gözlemlenmiştir. Dördüncü ve son alt bölümde ise, termo-mekanik yükler altında FDP'nin burkulma davranışı incelenmiştir. Son üç alt bölümün her birinde, plakaların burkulması alanında yeni bir EKM uygulaması gösterilmiştir. Sayısal sonuçlar, literatürdeki çalışmalar ve ayrıca ANSYS kullanılarak elde edilen FEM çözümleriyle karşılaştırılmıştır.

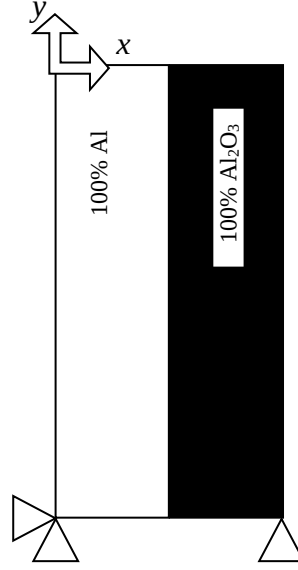
6.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plakaların Önemi

FDP'nin önemi, aşağıda basit bir sayısal analizin sonuçlarıyla gösterilmiştir. Şekil 6.1'de gösterilen izolatör, iki farklı malzemeden oluşur ve düzgün 350°C sıcaklık artışı altında kararlı durumda kalmaktadır. 0,5m'lik eşit enine sahip katmanların malzemeleri Tablo 6.1'de gösterilen özelliklere sahip olan alüminyum (Al) ve alüminyum oksit (Al_2O_3) olarak belirlenmiştir.

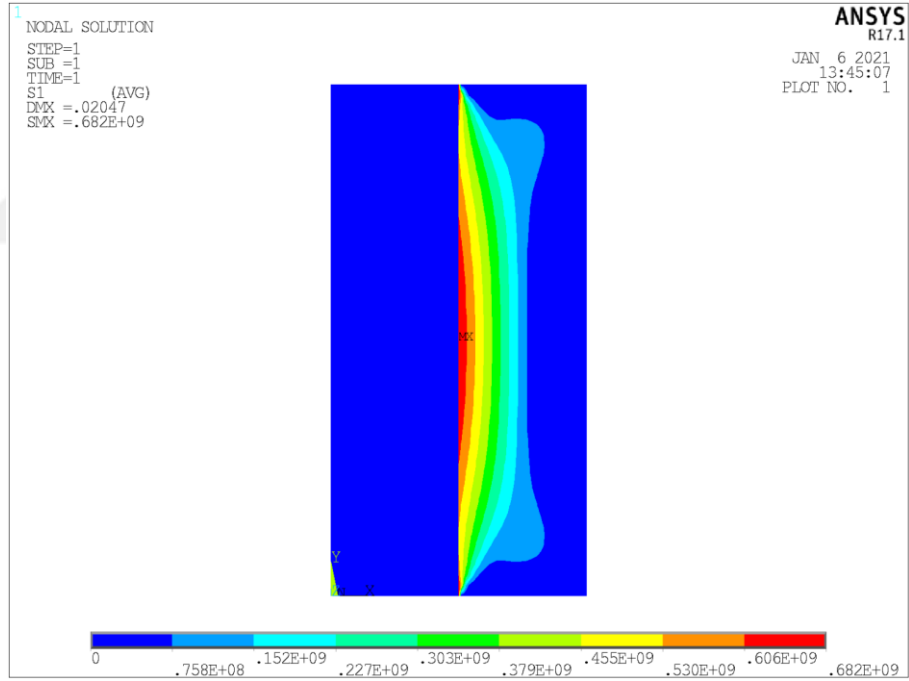
Tablo 6.1. Alüminyum (Al) ve alüminyum oksitin (Al_2O_3) malzeme özellikleri

Malzeme	Al (Metal)	Al_2O_3 (Seramik)
Elastisite modülü (E)	70 GN/m ²	380 GN/m ²
Poisson oranı (μ)	0,3	0,3
Termal genleşme katsayısı (Ω)	$23 \times 10^{-6} / ^\circ C$	$7,4 \times 10^{-6} / ^\circ C$
Isı iletkenlik katsayısı (K)	204 W/m °C	10,4 W/m °C

ANSYS'te, termal eleman olan Plane77 ve yapısal eleman olan Plane183 kullanılarak termal gerilmeler alınmıştır. Analizde, incelenen izolatör termal genleşme üzerinde herhangi bir kısıtlama olmaksızın basitçe desteklenmiştir, ancak yine de, Şekil 6.2'de gösterildiği gibi, iki malzemenin arasındaki ara yüzde gerilme yığılması oluşmaktadır.



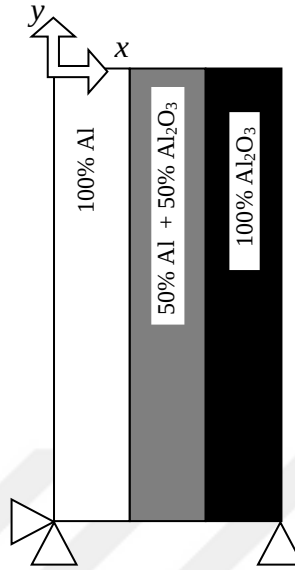
Şekil 6.1. Termal yük altında iki katmanlı izolatör



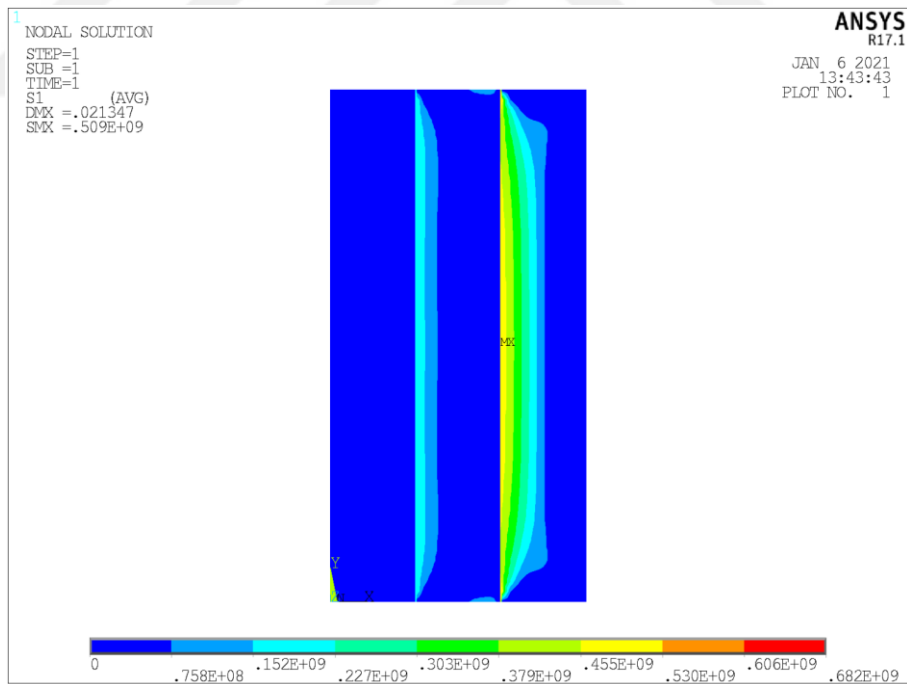
Şekil 6.2. İki katmanlı izolatör üzerindeki termal gerilmeleri

Şekildeki iki katlı izolatörün ara yüzeyinde oluşan yüksek seviyeli gerilmeler, ara yüzeyde çatlamaya neden olur, çatlaklar malzeme veya birleştirme yüzeyi boyunca ilerler ve bu durum sonuç olarak, çok tabakalı malzemenin ayrılmasına sebep olmaktadır. Malzemedeki ani değişimin kademeli değişim ile değiştirilmesinin faydası, Şekil 6.3 ve Şekil 6.4’de verilen basit bir analizle görülebilmektedir. Şekil 6.1’deki aynı sorun göz önüne alındığında, çift malzemeli izolatördeki ani malzeme

değişimi, Al ve Al_2O_3 taraflarının arasında ortalama özelliklere sahip bir ara tabaka ile değiştirilirse, bu ani değişiklikten kaynaklanan gerilmelerin azalması beklenmektedir.



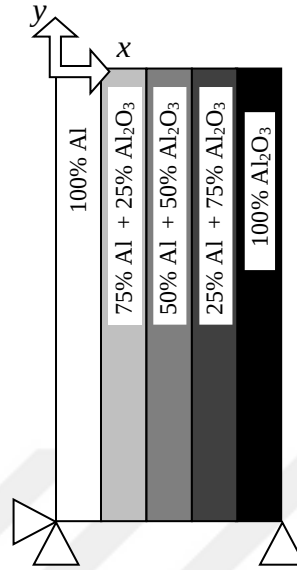
Şekil 6.3. Termal yük altında üç katmanlı izolatör



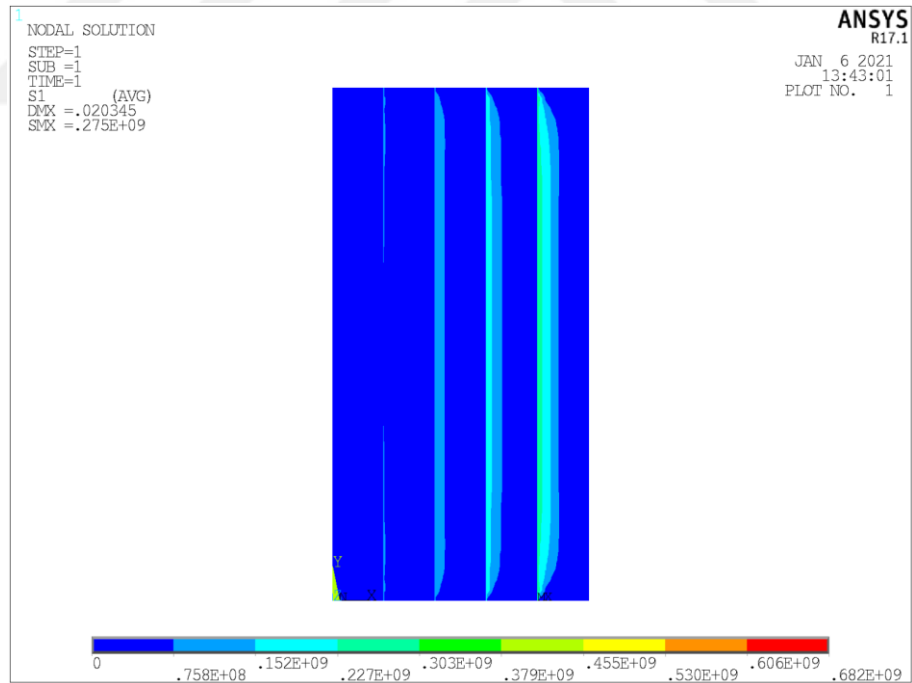
Şekil 6.4. Üç katmanlı izolatör üzerindeki termal gerilmeleri

Şekil 6.3 ve Şekil 6.4, incelenen izolatör aynı yük altında iki katmanlı olduğunun yerine üç katmanlı olduğunda, ara yüzeyler üzerinde oluşan termal gerilmelerin azaldığı görülmektedir. Şekil 6.2 ile Şekil 6.4'deki oluşan gerilmeler

karşılaştırıldığında, Şekil 6.4’de ara kat eklenmesiyle oluşan termal gerilmelerin azaldığı görülmektedir.



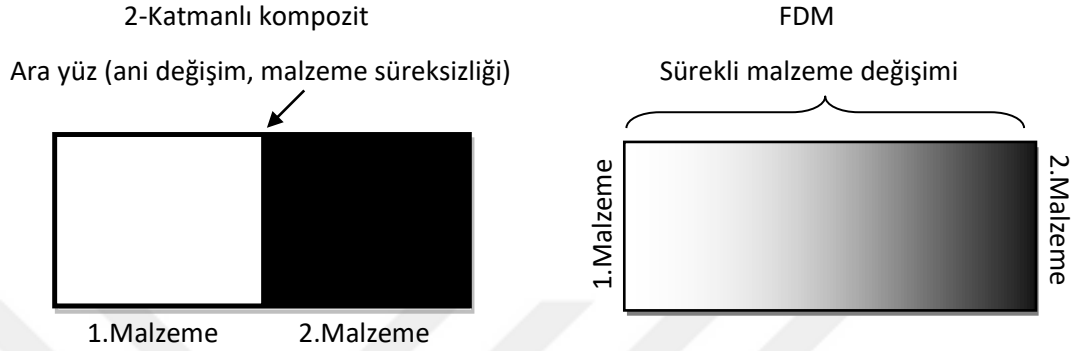
Şekil 6.5. Termal yük altında beş katmanlı izolatör



Şekil 6.6. Beş katmanlı izolatör üzerindeki termal ana gerilmeler

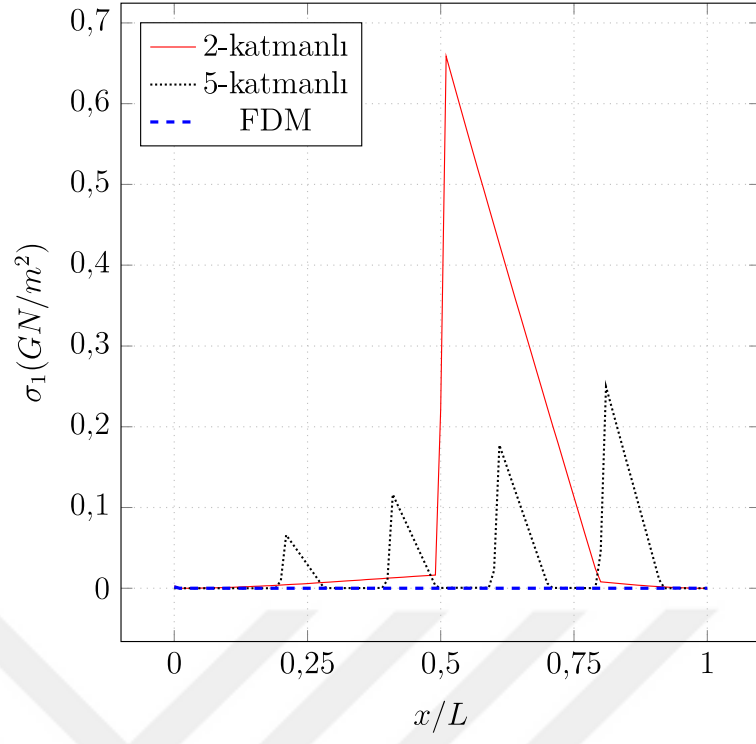
Şekil 6.5’de olduğu gibi, kademeli olarak değişen ara tabakalar arttıkça, Şekil 6.6’da, görüldüğü gibi giderek termal gerilmelerin azaldığı sonucu ortaya çıkmaktadır. Bu durum, kademeli olarak değişen ara tabakalar arttıkça, oluşacak termal gerilmelerin

azalacağı sonucunu desteklemektedir. Ara katmanlarının kademeli şekilde değişmesi, ani malzeme veya yapı değişimini kaldırmak için tasarlanırsa, oluşan bu katlı malzemeye fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FDM) denir. FDM'ye, ara katmanları yeterli sayıda arttığında sürekli değişen FDM veya kısaca FDM denir. FDM kavramı Şekil 6.7'de gösterilmektedir.

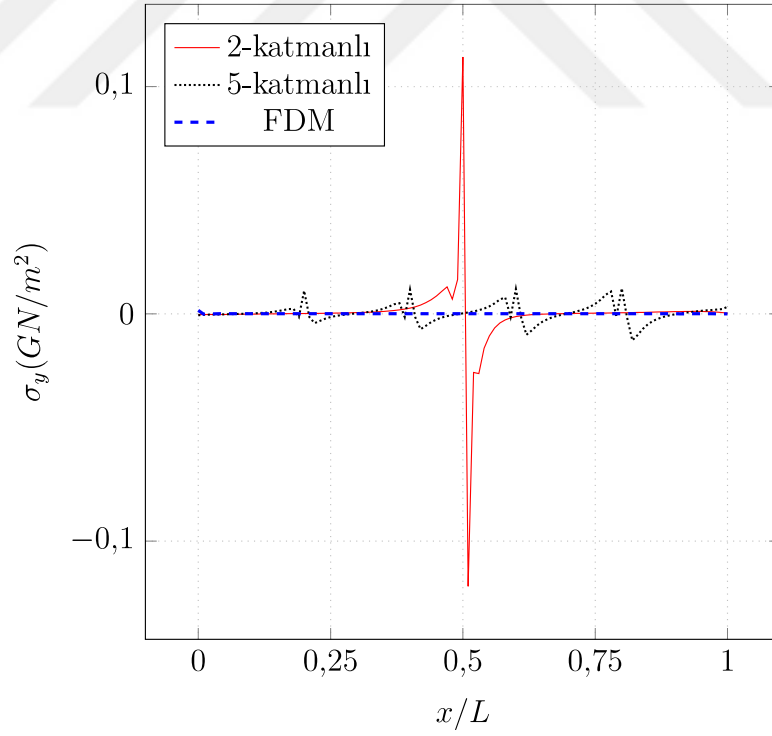


Şekil 6.7. İki katmanlı kompozitin ve FDM'in malzeme değişimi

Devamlı FDM'nin, termal gerilmeleri büyük miktarda önlemesi beklenmektedir. Bu noktayı gösterilmek için yukarıda sunulmuş izolator örneğe devam edilip, FDM ile iki katmanlı ve beş katmanlı izolatorlerin üzerinde oluşan termal gerilme karşılaştırılmıştır. Şekil 6.8 ve Şekil 6.9, sırasıyla, farklı sayıda ara katmana sahip olan izolatorün boyunun merkezinden ve üst serbest kenarından geçen termal gerilmeleri, sürekli değişen FDM ile karşılaştırmaktadır.



Şekil 6.8. Katmanlı ve FDM izolatörün boy merkezinde geçen ana termal gerilme



Şekil 6.9. Katmanlı ve FDM izolatörün üst kenarında Y-yönde termal gerilme

6.2. İnce Eğik Homojen Plakanın Burkulması

Bu bölüm sayısal bir çözüm yöntemi olarak EKM'nin doğruluğunu ve yakınlığını değerlendirmeyi amaçlamaktadır. EKM, Pasternak elastik zeminine dayanarak düzlem içi yükleme altında ince eğik (paralelkenar) izotropik homojen plakanın elastik burkulma problemini sayısal olarak çözmek için uygulanmıştır. EKM, literatürde daha önce eğik plaka burkulma problemine hiç uygulanmamıştır. EKM'nin doğruluğu ve yakınsamasının araştırılması yapılmıştır. Formülasyonlar CPT'ye dayanmaktadır. Kararlılık denklemleri ve sınır koşulları terimleri, eğik koordinat sisteminde ifade edilen varyasyonel hesap kullanılarak minimum toplam potansiyel enerji ilkesinden Bölüm 5.1.4'de ifade edildiği şekilde türetilmiştir. Ortaya çıkan iki adi diferansiyel denklemler seti, MATLAB yazılımındaki "Chebfun" paketi kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Düzlem içi basınç ve kayma yükleri, çeşitli sınır koşulları ve en boy oranları ile birlikte dikkate alınmıştır.

Sonuçlar literatürde bulunan analitik ve sayısal çözümler ve ANSYS yazılımı kullanılarak elde edilen sonlu eleman çözümleriyle karşılaştırılmıştır. Eğim açısının, elastik zeminin rijitliğinin ve en boy oranının burkulma yükü üzerindeki etkileri de araştırılmıştır. Elastik zemine dayanan tek eksenli ve çift eksenli yükleme altında çeşitli eğim açısına, çeşitli sınır koşullarına ve en boy oranlarına sahip dikdörtgen plakalar için, tek-terimli EKM sonuçları doğru bulunmuştur. Ancak, eğim açısı büyüdükçe EKM daha fazla terime ihtiyaç duymaktadır. Çok terimli EKM sonuçları, elastik zemin üzerine oturmuş tek eksenli, çift eksenli ve kayma yükü altında çeşitli sınır koşullarına ve en boy oranlarına sahip dikdörtgen ve eğik plakaların analizinde doğru bulunmuştur. İnce eğik plakaların burkulma analizinde EKM kullanımı, basit, doğru ve yakınsama hızlı bulunmuştur.

6.2.1. Boyutsuz Burkulma Yükü

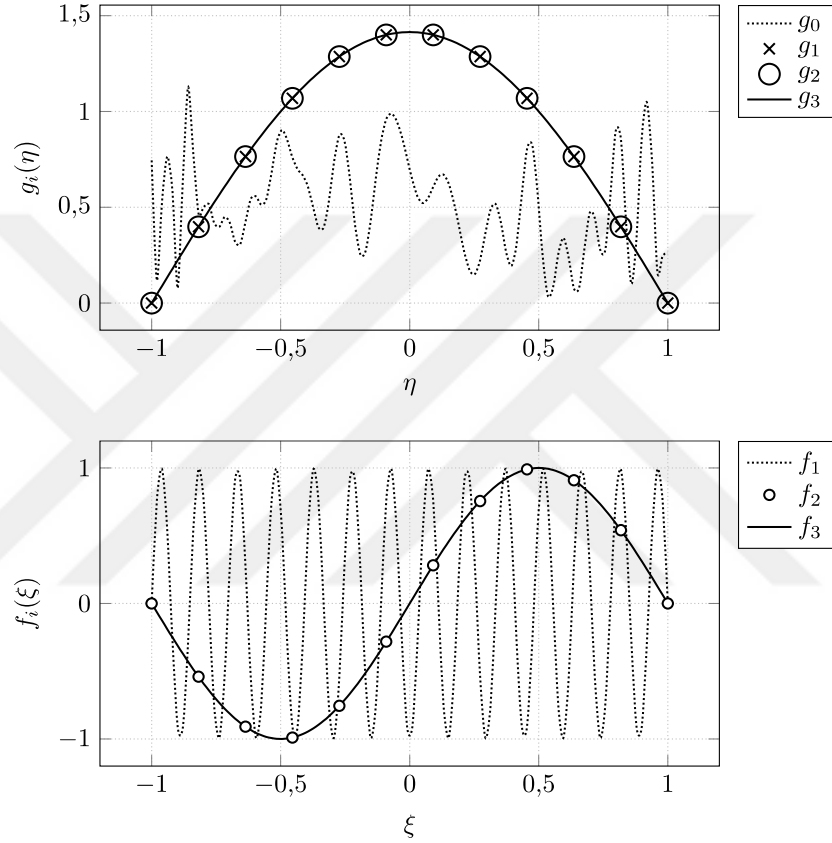
Burkulma faktörü λ , uygulanan yükü P ölçeklendirerek yapıda burkulmaya neden olan faktördür. Normalde, boyutsuz bir burkulma yükü λ^* kullanılmaktadır.

$$\lambda^* = \lambda P \frac{b^2}{c^2 \pi^2 D} \quad (6.1)$$

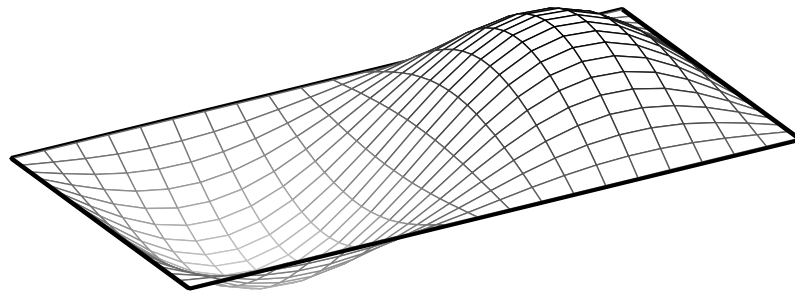
Bu çalışmada, uygulanan yükü aşağıdaki gibi göstermek için boyutsuz bir burkulma faktörünün simgesi bir alt simge eklenmiştir: λ_ξ^* 'de yalnızca tek eksenli P_ξ uygulandığı, λ_b^* 'de eşit tek eksenli yükler P_ξ ve P_η uygulandığı ve λ_s^* 'de ise yalnızca kayma yükü $P_{\xi\eta}$ uygulandığı anlamına gelmektedir.

6.2.2. EKM Yakınsaması

İlk olarak, tek eksenli basınç P_ξ altında SSSS dikdörtgen plakanın daha basit sorunu ele alınmıştır. Plakanın en boy oranı $a/b = 2$ olarak seçilmiştir. Şekil 6.10'de ilk üç yineleme sırasında $g_j(\eta)$ ve $f_i(\xi)$ elde edilen çözüm fonksiyonlarını, sınırların koşullarının hiçbirini karşılamayan rastgele bir g_0 fonksiyonuyla başlatılır. Şekil 6.11'de ortaya çıkan burkulmuş plaka şekli gösterilmektedir.



Şekil 6.10. Rastgele $g_{0(\eta)}$ 'dan başlayarak EKM yinelemelerin sırasında çıkan $g_{i(\eta)}$ ve $f_{i(\xi)}$



Şekil 6.11. Plakanın burkulma şekli: $f_3(x) \cdot g_3(y)$

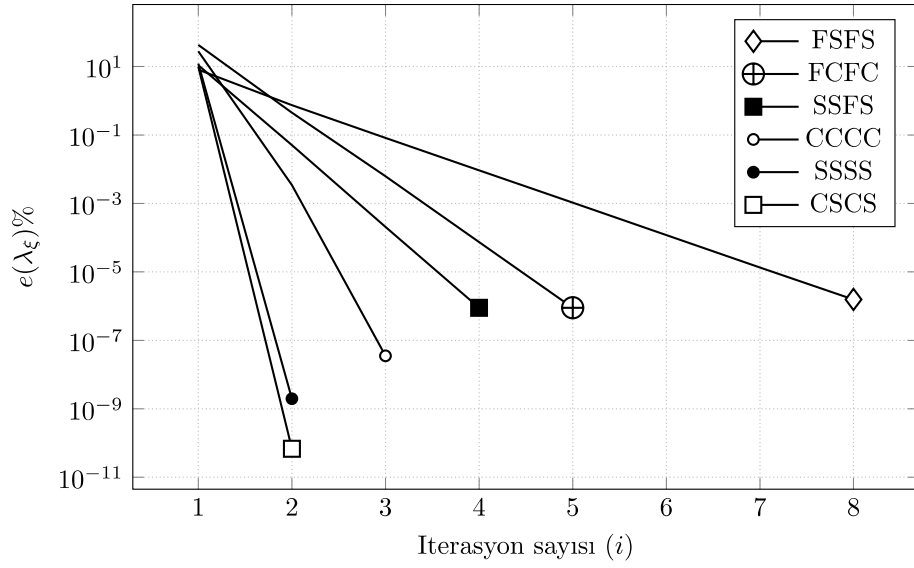
Tablo 6.2, farklı başlangıç iz fonksiyonlarına sahip iki çalışma için her yinelemenin sonunda elde edilen boyutsuz burkulma faktörü λ_ξ^* göstermektedir. İlk çalıştırma rastgele bir fonksiyonla başlarken, ikinci çalıştırma sabit bir fonksiyonla $g_{0(\eta)} = 1$ başlamaktadır.

Tablo 6.2. EKM iterasyonu sırasında çıkan tek eksenli boyutsuz burkulma yükü (λ_ξ^*)

$g_{0(\eta)}$	EKM iterasyonları				Analitik
	1	2	3	4	
Rasgele $g_{0(\eta)}$	7312,25	3,99999999997	4,00000000000	4,00000000000	
$g_{0(\eta)} = 1$	6,25000	4,00000000000	4,00000000000	-	4,00000

Şekil 6.10 ve Tablo 6.2 ile birlikte, $g_{0(\eta)}$ rasgele iz fonksiyonuyla bile EKM'nin yaklaşmasının hızlı olduğunu göstermektedir. Sunulan tüm bu sonuçlar için, iki ardışık iterasyonun boyutsuz burkulma faktörü λ^* arasındaki $e(\lambda_\xi)\%$ ile ifade edilen göreceli yüzde farkı 10^{-5} 'den az olduğunda çözüm birleşik olarak kabul edilmiştir. Eldeki durum için, EKM'nin rastgele bir iz fonksiyonundan başlayarak yakınsama için üç iterasyon ile çözüme ulaştırmıştır. $g_{0(\eta)}$ için ilk tahmin daha iyi yakınsama daha hızlı sonuç verdiği gözlenmiştir. Dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta ise ilk iz fonksiyonunun sınır koşullarından herhangi birini karşılamak zorunda olmasa da, rastgele ilk g_0 seçiminin bazen EKM'yi yakınsamaya zorlayabileceğidir. Sürekli bir başlangıç fonksiyonunu tahmin etmenin, daha iyi sonuçlar vereceği düşünülmektedir.

Yakınsama hızının sınır koşullarına göre değiştiği bulunmuştur. Şekil 6.12, ince bir kare plaka için burkulma probleminin çözümünün çeşitli sınır koşullarına yakınsamasını göstermektedir. EKM çözümlerinin tüm sınır koşulları için logaritmik olarak yakınsadığı gözlenmiştir. Ankastre mesnet ve serbest kenarlar, aynı iz fonksiyonundan başlayarak gerekli iterasyonlar artırmıştır. Başka bir iz fonksiyonu kullanılırsa, her bir sınır koşulu kümesi için gereken iterasyon sayısının muhtemelen değişeceği açıktır. Bu karşılaştırmadan elde edilen tek sonuç, farklı sınır koşullarının aynı başlangıç iz fonksiyonundan başlayarak daha fazla veya daha az yineleme gerektirebileceğidir.



Şekil 6.12. Tek eksenli basınç altında çeşitli sınır koşullarına sahip dikdörtgen plakalar için boyutsuz burkulma yükü (λ^*) ile EKM iterasyonları arasında yakınsama

6.2.3. EKM'nin Doğruluğunun İncelenmesi

EKM'nin doğruluğunu incelemek için elde edilen sonuçlar, literatürde bulunan sonuçlarla ve ANSYS APDL yazılımı kullanılarak elde edilen sonlu elemanlar çözümü ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar sorunun her yönünün EKM'nin doğruluğunu nasıl etkilediğini gösteren bir şekilde yapılmıştır. Bu yönler, sınır koşulları, elastik zeminin sertliği, en boy oranı, yükleme konfigürasyonu ve eğim açısıdır.

Tablo 6.3, tek-terimli EKM kullanılarak elde edilen çeşitli sınır koşulları, k_n^* ve k_p^* için tek eksenli basınç altında bir kare izotropik plakanın boyutsuz burkulma faktörlerini λ_ξ^* göstermektedir. Ayrıca Tablo 6.3'te bu çalışmanın EKM sonuçları ile, (Thai vd, 2013)'nin yaptıkları analitik çözümleri ve (Shahrestani vd, 2018)'nin yaptıkları sonlu şerit yöntemi çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 6.3 Elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (k_n^*) ve elastik zeminin boyutsuz kayma rijitliği (k_p^*)'ye göre kare ince plaka için tek eksenli boyutsuz burkulma yükü (λ_x^*) EKM, analitik (Thai vd, 2013) ve sonlu şerit yönteminin (Shahrestani vd, 2018) çözümleri

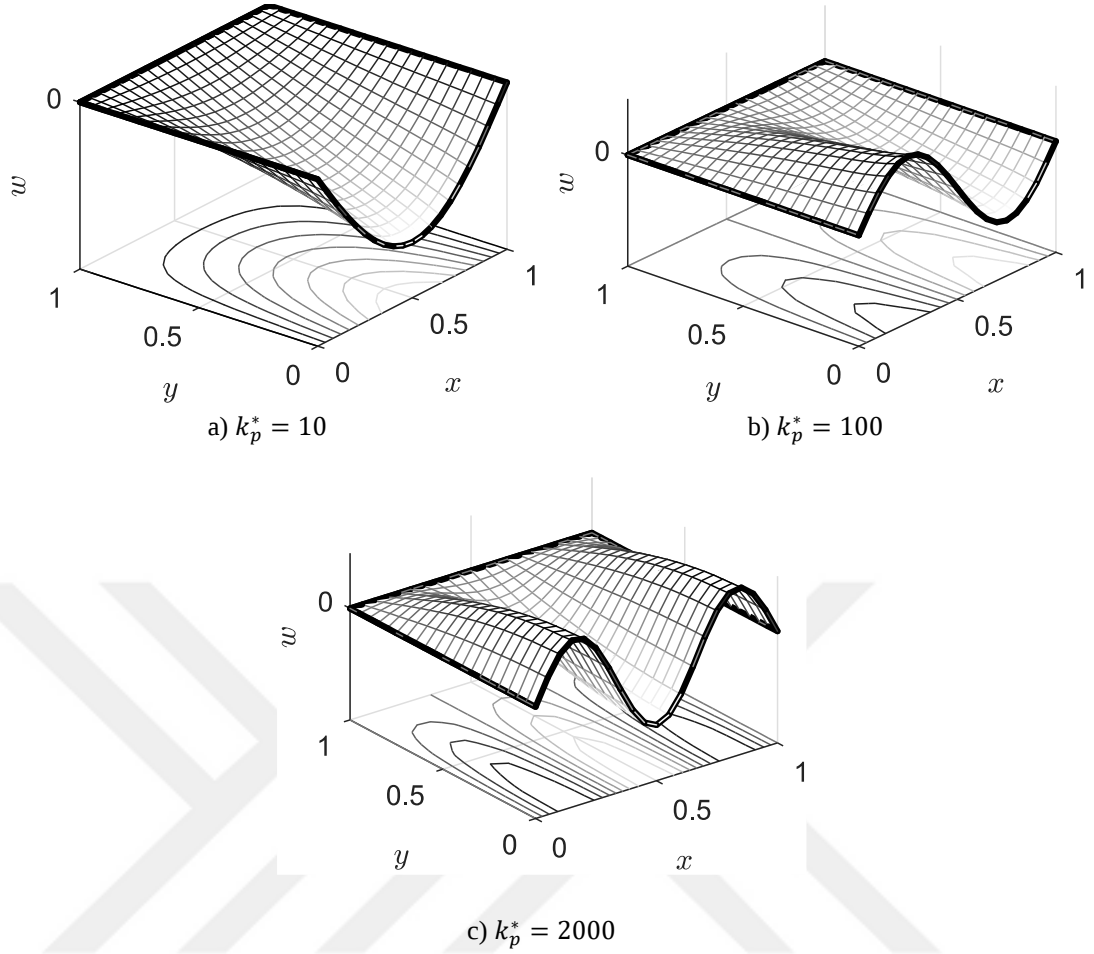
k_n^*	k_p^*	Sınır şartları							
		SSSS	SCSC	CSCS	SSSC	CCCC	SFSF	SCSF	SSSF
EKM									
0	0	4,0000	7,6904	6,7432	5,7402	10,0968	0,9523	1,6525	1,4016
1	0	5,0266	7,9479	7,4909	6,7668	10,7603	1,9789	2,6791	2,4282
0	1	18,9151	20,7392	22,5557	19,7238	24,0490	11,1150	14,7849	14,1697
1	1	19,1718	20,9898	22,7614	19,9775	24,2515	12,1416	15,6283	15,1963
Analitik									
0	0	4,0000	7,6912	6,7431	5,7402	-	0,9523	1,6525	1,4016
1	0	5,0260	7,9478	7,4908	6,7668	-	1,9789	2,6791	2,4282
0	1	18,9151	20,7345	22,5573	19,7210	-	11,1150	14,8063	14,1697
1	1	19,1717	20,9911	22,7613	19,9776	-	12,1416	15,6287	15,1963
Sonlu şerit yöntemi									
0	0	4,0001	7,6989	6,7433	5,7414	10,0742	0,9523	1,6527	-
1	0	5,0267	7,9555	7,4910	6,7679	10,7383	1,9790	2,6793	-
0	1	18,9156	20,7698	22,5581	19,7352	24,0582	11,1151	14,8124	-
1	1	19,1722	20,9917	22,7622	-	24,2460	-	-	-

Tek terimli EKM'nin sonuçlarının, çeşitli sınır koşullarına sahip kare plakalar için doğru olduğu bulunmuştur. Ayrıca, Tablo 6.3'deki sonuçlar, elastik zeminin k_n^* ve k_p^* değerinin burkulma problemine eklenmesinin, sonuçların doğruluğunu etkilemediğini göstermektedir. Bu durum, çift eksenli yükleme durumunda da geçerlidir. Tablo 6.4'de, EKM sonuçları ile çeşitli sınır koşulları için (Lam vd, 2000)'in yaptıkları çalışmadaki analitik çözümlerin arasındaki mükemmel uyum gösterilmektedir. Tek terimli EKM'nin, iki eksenli ve tek eksenli yükleme altındaki kare plakalar için güvenilir olduğu bulunmuştur.

Tablo 6.4. Elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (k_n^*) ve elastik zeminin boyutsuz kayma rijitliği (k_p^*)'ye göre kare ince plaka için çift eksenli boyutsuz burkulma yükü (λ_b^*) EKM ve analitik (Lam vd, 2000) çözümleri

k_n^*	k_p^*	Sınır şartları					
		SSSS		SCSC		SSSC	
		EKM	Analitik	EKM	Analitik	EKM	Analitik
0	0	2	2	3,83	3,83	2,663	2,663
1	0	2,513	2,513	4,28	4,28	3,132	3,132
0	1	12,13	12,13	13,96	13,96	12,8	12,8
1	1	12,65	12,65	14,41	14,41	13,26	13,26

Plakanın elde edilen burkulma şekillerinin de literatürde yapılan analitik çözümlere kıyasla doğru olduğu bulunmuştur. Örneğin, Şekil 6.13'de gösterilen EKM kullanılarak elde edilen k_p^* çeşitli değerleri için tek eksenli yük P_y altında SSSF kare plakaların burkulma şekilleri (Akhavan vd, 2009)'de sunulanlarla aynıdır.



Şekil 6.13. Elastik zeminin kayma rijitliği (k_p^*) bir aralığı için tek eksenli yüklenmiş SSSF plakanın burkulma şekilleri

Tablo 6.5, tek terimli EKM'nin çeşitli a/b değerleri için de doğru olduğunu göstermektedir. Tablo 6.5'de sunulan karşılaştırmalardan, tek terimli EKM'nin, çeşitli sınır koşulları, k_n^* , k_p^* ve a/b ile çift eksenli yükün yanı sıra tek eksenli yükleme altında dikdörtgen plakaların burkulma analizi için doğru bir yöntem olduğu sonucuna varılabilir.

Tablo 6.5. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (k_n^*) ve elastik zeminin boyutsuz kayma rijitliği (k_p^*)'ye göre dikdörtgen plakalar için $\pi^2\lambda_\xi^*$ EKM ve analitik (Akhavan vd, 2009) çözümleri

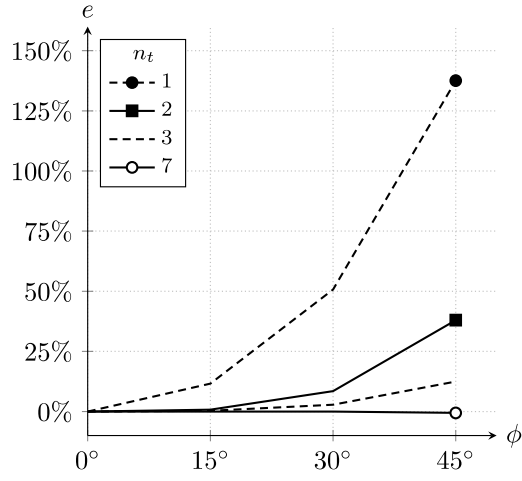
a/b	k_n^*	k_p^*	Sınır şartları					
			SSSS		SCSC		SSSC	
			EKM	Analitik	EKM	Analitik	EKM	Analitik
0,5	0	0	61,68	61,68	75,91	75,91	67,64	67,64
	1	0,1	152,2	152,2	168,1	168,1	159	159
	10	1	704,6	704,6	712,2	712,2	708,2	708,2
1	0	0	39,48	39,48	75,91	75,91	56,65	56,65
	1	0,1	69,61	69,61	91,37	91,36	82,9	82,9
	10	1	212	212	230	230	220	220
2	0	0	39,48	39,48	68,8	68,8	55,32	55,32
	1	0,1	69,61	45,11	72,92	72,91	59,34	59,34
	10	1	85,26	85,26	109,8	110,3	95,43	95,43

Plakanın eğim açısı ϕ ve EKM'nin terim sayısı n_t sonuçların doğruluğu, (Kitipornchai vd, 1993)'nin analitik çözümlerine kıyasla nispi fark (e) olarak Şekil 6.14' da gösterilmiştir. Yüzde bağıl farkı şu şekilde verilir:

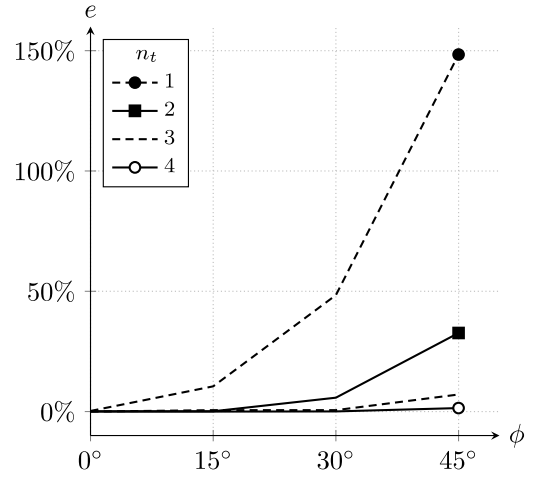
$$e = \frac{(\lambda^*)_{\text{EKM}} - (\lambda^*)_{\text{ref.}}}{(\lambda^*)_{\text{ref.}}} \times 100\% \quad (6.2)$$

Sonuçlar, farklı sınır koşulları için eğim açısı büyüdükçe doğru sonuçlar elde etmek için daha fazla terime ihtiyaç duyulduğunu göstermektedir. EKM, ϕ büyüdükçe doğru λ^* değerinden daha fazla hesaplıyor. Farklı sınır koşullarında aynı doğruluğu elde etmek için farklı n_t 'ye ihtiyaç duyulduğu bulunmuştur. Örneğin, Şekil 6.14-b'da gösterilen 45° CCCC eğik plaka dört terime ihtiyaç duyarken, Şekil 6.14-a'da gösterilen aynı eğim açısına sahip SSSS plaka 7 terime ihtiyaç duymaktadır.

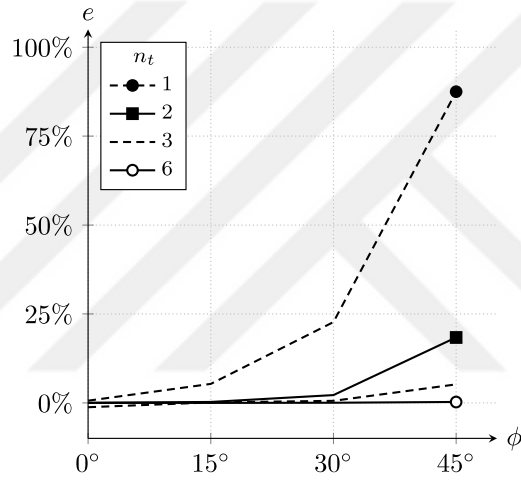
Aynı doğruluk seviyesine ulaşmak için Şekil 6.15, farklı sınır koşulları için $P_{\xi\eta}$ kayma yüklemesi durumunda eğim açısının EKM sonuçlarının doğruluğu üzerindeki aynı etkisini göstermektedir. Şekil 6.15 içindeki nispi fark e , EKM çözümleri ile (Wang & Yuan, 2018)'in yaptıkları çalışmada DQM çözümleri arasındadır.



a) SSSS

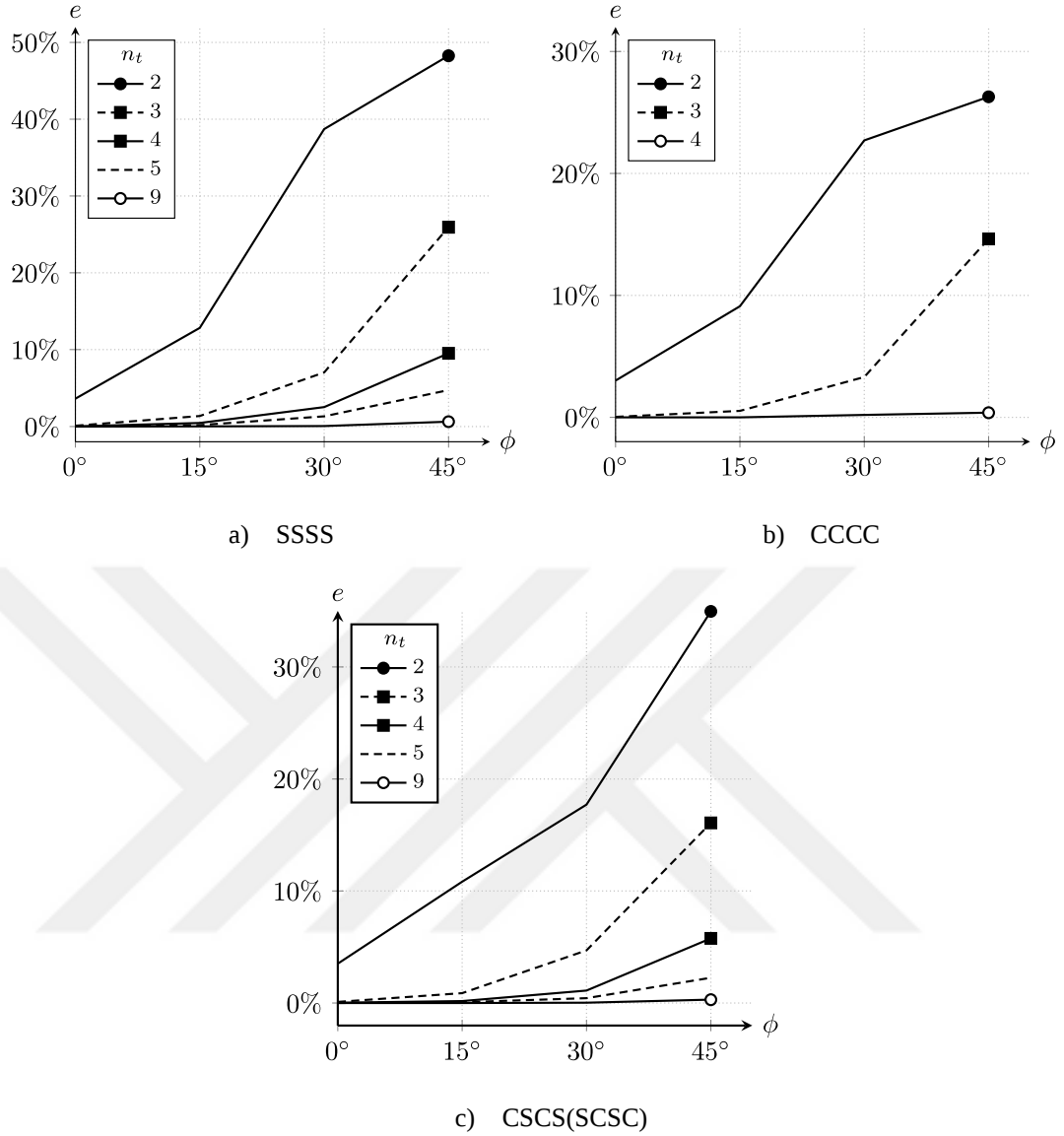


b) CCCC



c) CFCF

Şekil 6.14. EKM'nin terim sayısı (n_t) ve eğim açısı (ϕ)'ye göre analitik (Kitipornchai vd, 1993) çözümlerine kıyasla EKM'nin boyutsuz tek eksenli burkulma yükü (λ_ξ^*) çözümlerindeki hata



Şekil 6.15. EKM'nin terim sayısı (n_t) ve eğim açısı (ϕ)'ye göre DQM (Wang & Yuan, 2018) çözümlerine kıyasla EKM'nin boyutsuz kayma burkulma yükü (λ_s^*) çözümlerindeki nispi hata

Şekil 6.14 ve Şekil 6.15 içindeki sonuçlardan, tek terimli EKM'nin ϕ sıfır olmazsa burkulma analizi için uygun olmadığı açıktır. Ayrıca, tek-terimli EKM, dikdörtgen plakalar için bile kayma yükü altında plaka burkulma problemi için geçerli değildir. Bunun nedeni ki sadece tek bir terim kullanılırken, yani. $n_t = 1$, Denklem 5.58'deki tüm Q 'ler yok ederek $P_{\xi\eta}$ terimini yönetim denklemlerinden kaldırılmaktadır. Tek eksenli yükleme altındaki eşkenar dörtgen plakalar için burkulma faktörü λ^* 'nın sayısal sonuçları Tablo 6.6 ve Tablo 6.7' de gösterilmektedir.

Çift eksenli ve kayma yükler durumları için Tablo 6.8'da literatürde bulunan çözümlerle karşılaştırıldı. EKM terimlerinin sayısı n_t , EKM sonuçlarından sonra üst

simge olarak verilir. Tablo 6.6 ve Tablo 6.7, çeşitli en boy oranlarına sahip eğik plakaları için boyutsuz burkulma faktörü λ_{ξ}^* da göstermektedir. Bu sonuçlar plakanın a/b en boy oranının EKM'nin doğruluğu üzerinde herhangi bir etkisi olmadığını göstermektedir. Daha fazla terimin dâhil edilmesinin daha iyi sonuçlar sağladığı, ancak hesaplama süresini de artırdığı bulunmuştur.

Tablo 6.6. Eşkenar SSSS ve CCCC eğik plakalar için EKM, analitik (Kitipornchai vd, 1993), DQM (Wang & Yuan, 2018), ve ANSYS'in FEM ile elde edilen tek eksenli burkulma yükü (λ_{ξ}^*)

Yöntem	Sınır şartları							
	SSSS				CCCC			
	$\phi = 0^\circ$	15°	30°	45°	0°	15°	30°	45°
$a/b = 0,5$								
EKM	6,2500 ¹	6,9835 ⁴	9,9159 ⁷	19,1321 ⁷	19,3388 ²	21,5551 ⁴	30,295 ⁴	54,515 ⁷
Analitik	62,499	6,9782	9,9166	19,2473	19,3377	21,554	30,2876	54,553
DQM	6,25	6,9965	9,8787	18,859	19,339	21,555	30,289	54,539
FEM	6,1886	6,9001	9,7394	18,6225	19,2425	21,3469	29,3619	49,7263
$a/b = 1$								
EKM	4,0000 ¹	4,3985 ⁴	5,8902 ⁷	10,0455 ⁷	10,0753 ²	10,8344 ⁴	13,539 ⁷	20,109 ⁷
Analitik	4	4,3938	5,8969	10,1032	10,0738	10,8345	13,5377	20,1115
DQM	4	4,3919	5,8716	10,006	10,074	10,835	13,538	20,105
FEM	3,9626	4,3439	5,7576	9,4302	10,052	10,8057	13,4656	19,7801
$a/b = 1,5$								
EKM	4,3403 ¹	4,6822 ⁴	5,9218 ⁶	9,1427 ⁷	8,3523 ²	8,9345 ⁴	11,030 ⁷	16,267 ⁷
Analitik	4,3403	4,6783	5,9226	9,1658	8,3504	8,9333	11,0296	16,2603
DQM	4,3403	4,677	5,9019	8,9974	8,3505	8,9335	10,9843	16,258
FEM	4,3075	4,6373	5,8293	8,808	8,333	8,9107	10,984	16,1386
$a/b = 2$								
EKM	4,0000 ¹	4,3446 ⁴	5,6112 ⁷	8,8757 ⁷	7,8673 ²	8,3866 ⁴	10,455 ⁷	15,154 ⁷
Analitik	4	4,3417	5,6206	8,9046	7,867	8,3866	10,2834	15,1971
DQM	4	4,34	5,5933	8,7691	7,8671	8,3867	10,283	15,157
FEM	3,9712	4,305	5,5341	8,6909	7,8507	8,3662	10,2462	15,0791
$a/b = 2,5$								
EKM	4,1344 ¹	4,4378 ⁴	5,5432 ⁷	8,4614 ⁷	7,5732 ²	8,1243 ⁴	9,878 ⁷	14,890 ⁷
Analitik	4,1344	4,4365	5,5556	8,5024	7,5731	8,1151	9,97	14,9399
DQM	4,1344	4,4349	5,5301	8,3109	7,5731	8,1275	9,9476	14,788
FEM	4,1068	4,4025	5,4281	8,2923	7,5584	8,0977	9,9154	14,6274

Not: Üst simgeler EKM terimlerinin sayısını n_t göstermektedir

Tablo 6.7. Eşkenar SSSS ve CCCC eğik plakalar için EKM, analitik (Kitipornchai vd, 1993), DQM (Wang & Yuan, 2018), ve ANSYS'in FEM ile elde edilen boyutsuz tek eksenli burkulma yükü (λ_x^*)

Yöntem	Sınır şartları							
	SFSF				CFCF			
	$\phi = 0^\circ$	15°	30°	45°	0°	15°	30°	45°
$a/b = 0,5$								
EKM	3,8926 ¹	4,4098 ⁴	6,4535 ⁶	11,7152 ⁵	15,8285 ²	17,6475 ⁴	23,4382 ⁶	34,0955 ⁶
Analitik	3,8926	4,4093	6,4561	11,7162	15,8221	17,6435	23,4293	34,0985
FEM	3,8840	4,3929	6,3861	11,2259	15,7349	17,4335	22,6297	31,2363
$a/b = 1$								
EKM	0,9523 ¹	1,0677 ⁴	1,5140 ⁶	2,7806 ⁵	3,9208 ²	4,2844 ⁴	5,6171 ⁶	8,118 ⁶
Analitik	0,9523	1,0674	1,5128	2,7443	3,9193	4,2824	5,6159	8,0948
FEM	0,9512	1,0650	1,5027	2,6928	3,9115	4,2593	5,5142	7,7364
$a/b = 1,5$								
EKM	0,4168 ¹	0,4634 ⁴	0,6399 ⁶	1,1176 ⁵	1,7302 ²	1,8540 ⁴	2,2833 ⁶	3,2441 ⁶
Analitik	0,4168	0,4633	0,6384	1,1080	1,7287	1,8528	2,2826	3,2347
FEM	0,41654	0,4625	0,6351	1,0915	1,7264	1,8458	2,2528	3,1121
$a/b = 2$								
EKM	0,2322 ¹	0,2567 ⁴	0,3459 ⁶	0,5808 ⁵	0,9668 ²	1,0212 ⁴	1,1973 ⁶	1,5376 ⁶
Analitik	0,2322	0,2566	0,3464	0,5749	0,9663	1,0205	1,1971	1,5375
FEM	0,2321	0,2563	0,3449	0,5673	0,9652	1,0174	1,1848	1,4926
$a/b = 2,5$								
EKM	0,1477 ¹	0,1627 ⁴	0,2152 ⁶	0,3526 ⁵	0,6160 ²	0,6431 ⁴	0,7285 ⁶	0,8826 ⁶
Analitik	0,1477	0,1626	0,2165	0,3478	0,6151	0,6428	0,7293	0,8827
FEM	0,1477	0,1624	0,2156	0,34361	0,6144	0,6411	0,7231	0,8618

Not: Üst simgeler EKM terimlerinin sayısını n_t göstermektedir

Tablo 6.8. Eşkenar eğik plakalar için EKM ve DQM (Wang & Yuan, 2018) ile elde edilen boyutsuz çift eksenli (λ_b^*) ve kayma (λ_s^*) burkulma yükleri

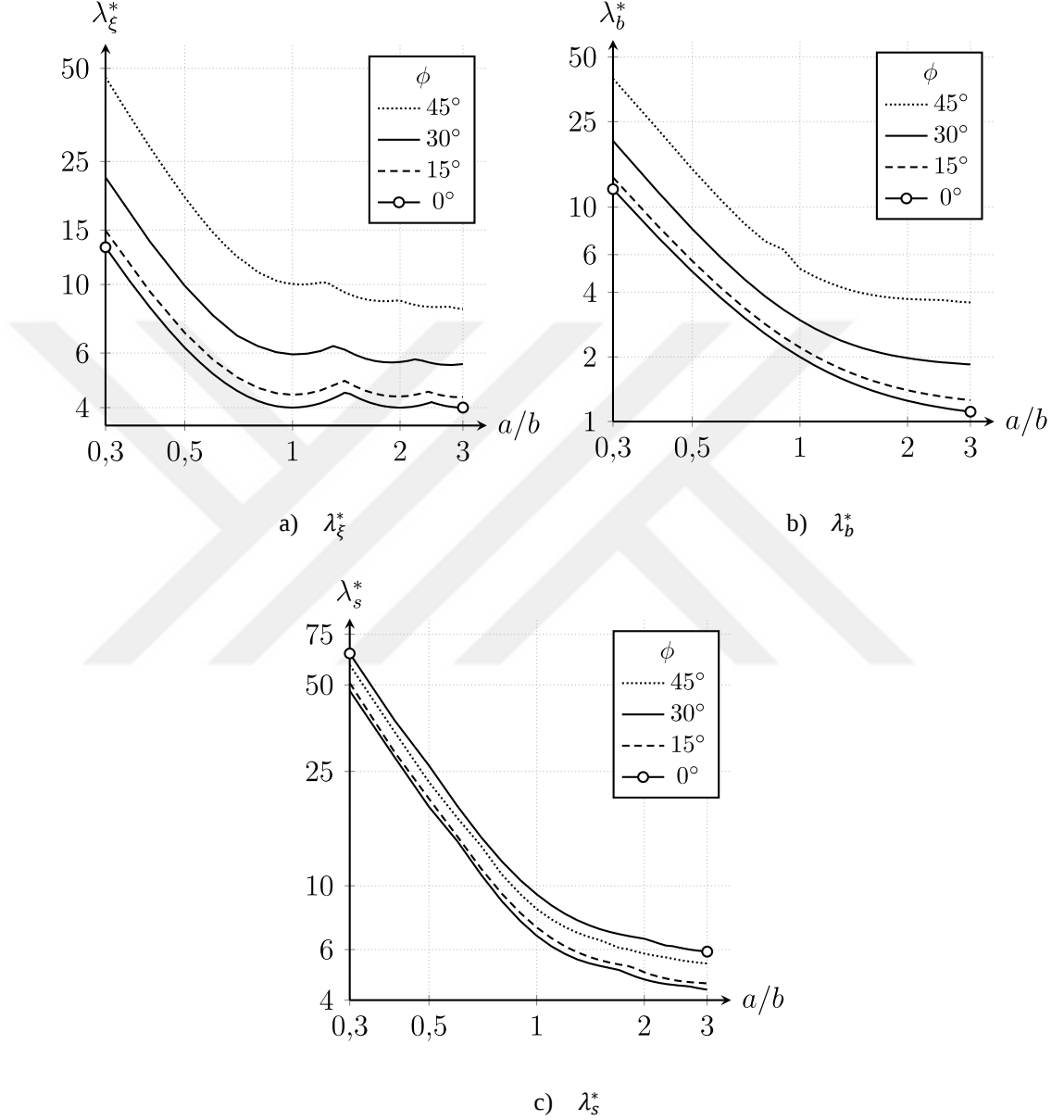
Sınır koşulu	λ^*	Eğim açısı ϕ°							
		0		15		30		45	
		EKM	DQM	EKM	DQM	EKM	DQM	EKM	DQM
SSSS	λ_b^*	2,0000 ¹	2	2,2028 ⁴	2,1966	2,9498 ⁷	2,9394	4,9981 ⁸	4,9517
	λ_s^*	9,3256 ⁴	9,3245	7,1017 ⁴	7,0701	6,6481 ⁷	6,6186	7,9754 ⁹	7,9221
CCCC	λ_b^*	5,3038 ²	5,3036	5,7151 ³	5,715	7,1650 ⁴	7,1603	10,5896 ⁶	10,575
	λ_s^*	14,6476 ³	14,642	11,4051 ⁴	11,406	10,8958 ⁵	10,887	13,0729 ⁶	13,087
SCSC	λ_b^*	3,8299 ¹	3,8299	4,1801 ⁴	4,1808	5,4544 ⁷	5,4515	8,5138 ⁸	8,528
	λ_s^*	12,5573 ⁵	12,565	9,7665 ⁵	9,7594	9,3138 ⁷	9,3053	11,2549 ⁷	11,184
SFSF	λ_b^*	0,9322 ¹	0,9322	1,0357 ⁴	1,0361	1,3117 ⁷	1,3097	1,6247 ⁴	1,6151
	λ_s^*	4,2327 ⁴	4,2303	3,3222 ⁵	3,3201	2,910 ⁶	2,9058	3,1045 ⁶	3,0582
CFCF	λ_b^*	2,7662 ¹	2,7423	2,8530 ⁵	2,8504	3,2598 ⁵	3,2542	4,3057 ⁷	4,2802
	λ_s^*	7,463 ⁴	7,486	5,6790 ⁵	5,6816	5,1370 ⁶	5,1314	5,681 ⁷	5,6422

Not: Üst simgeler EKM terimlerinin sayısını n_t göstermektedir

6.2.4. Eğim Açısı, En Boy Oranı ve Elastik Zeminin Rijitliğinin Burkulma Faktörü Üzerindeki Etkileri

EKM'nin doğruluğunu incelemek için, elde edilen sonuçlar literatürde bulunan ve ANSYS APDL yazılımı kullanılarak sonlu elemanlar çözümü ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar, sorunun her yönünün EKM'nin doğruluğunu nasıl etkilediğini

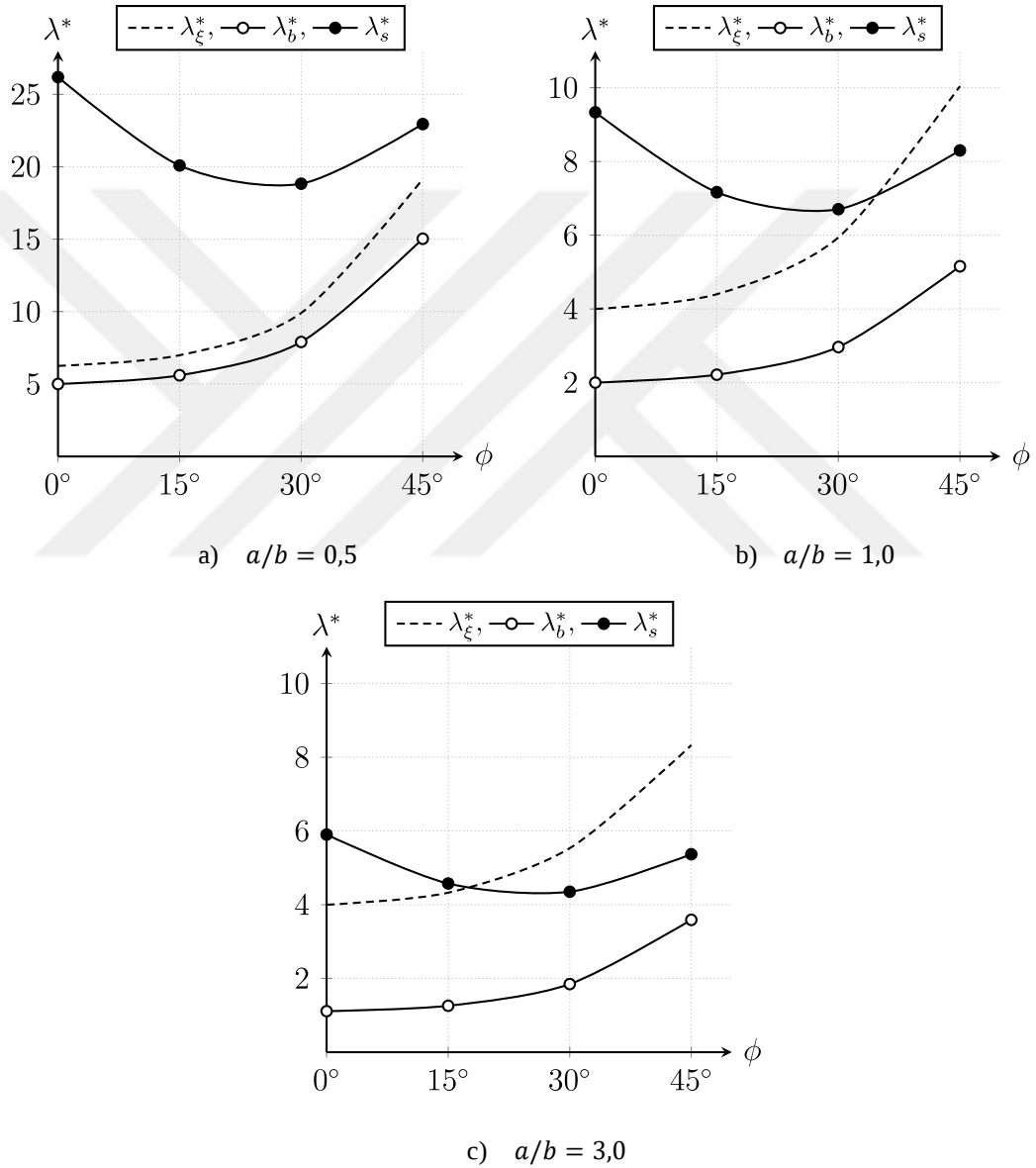
gösteren bir şekilde yapılmıştır. Bu etkenler sırasıyla sınır koşulları, elastik zeminin sertliği, en boy oranı, yükleme konfigürasyonu ve eğim açısıdır. Şekil 6.16, a/b 'nin ve ϕ 'nin tek eksenli, çift eksenli ve kayma yükü altında SSSS plakalar için λ^* üzerindeki etkisini gösteren bir dizi logaritmik grafiklerdir.



Şekil 6.16. Eğim açısı (ϕ) ve boy en oranı (a/b)'ye göre SSSS plaka için boyutsuz burkulma faktörleri

Tek eksenli yükleme durumunda, Şekil 6.16-a, $a/b < 1$ iken λ_{ξ}^* düşmesini, a/b büyüdükçe λ_{ξ}^* dalgalanmasını göstermektedir. ϕ büyüdükçe λ_{ξ}^* arttığı bulunmaktadır. Ayrıca, a/b büyüdükçe, ϕ etkisinin azaldığı gösterilmektedir. ϕ büyüdükçe etkisinin büyüdüğü gözlemlenmiştir. Örneğin, $\phi = 30$ ve $\phi = 45$ durumlardaki λ^* arasındaki

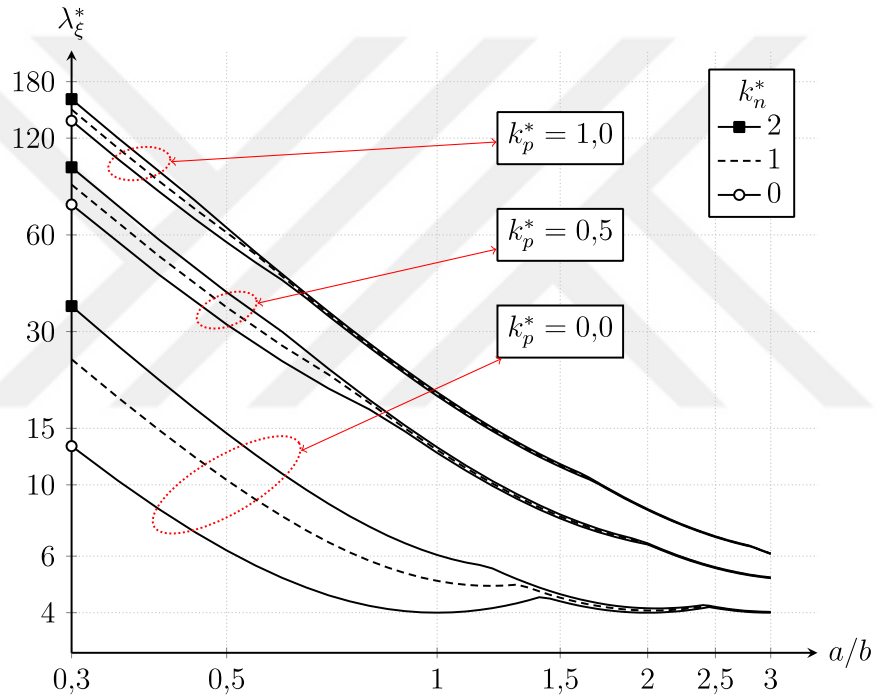
fark $\phi = 30$ ve $\phi = 15$ durumlarıdaki λ^* arasındaki farktan çok daha büyük. Aynı etkiler Şekil 6.16-b’de çift eksenli yükleme durumunda da gösterilmektedir. Kayma yükleme durumu için, a/b , Şekil 6.16-c’de gösterildiği gibi tek eksenli ve çift eksenli yükleme durumlarıyla aynı şekilde λ_s^* üzerinde aynı etkiye sahiptir. Bununla birlikte, bu durumda eğim açısının etkisi farklıdır. ϕ ’nin λ_s^* üzerine etkisi gösterilmek için, bir kaç a/b değerinde Şekil 6.16’deki grafiklerden anlık görüntüler alınır ve Şekil 6.17’de gösterilmektedir.



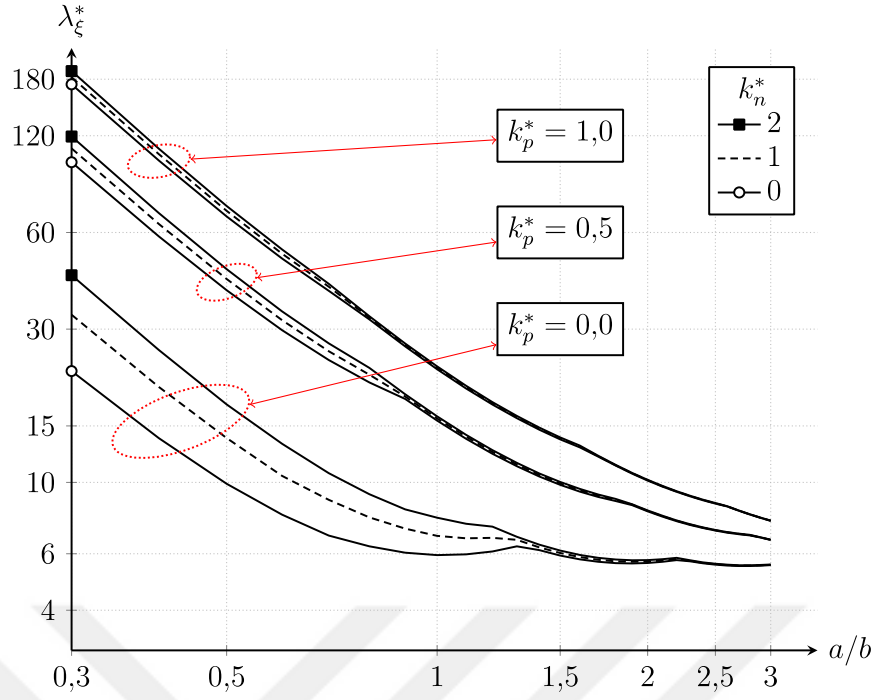
Şekil 6.17. Eğim açısı (ϕ) ve boy en oranı (a/b)’ye göre SSSS plaka için boyutsuz burkulma faktörleri

Şekil 6.17’de, ϕ ’nin λ_s^* , λ_{ξ}^* ve λ_b^* ile karşılaştırıldığında farklı etkisini açıkça gösterilmektedir. Ayrıca a/b arttıkça burkulma faktörlerinin düştüğü ve ϕ etkisinin

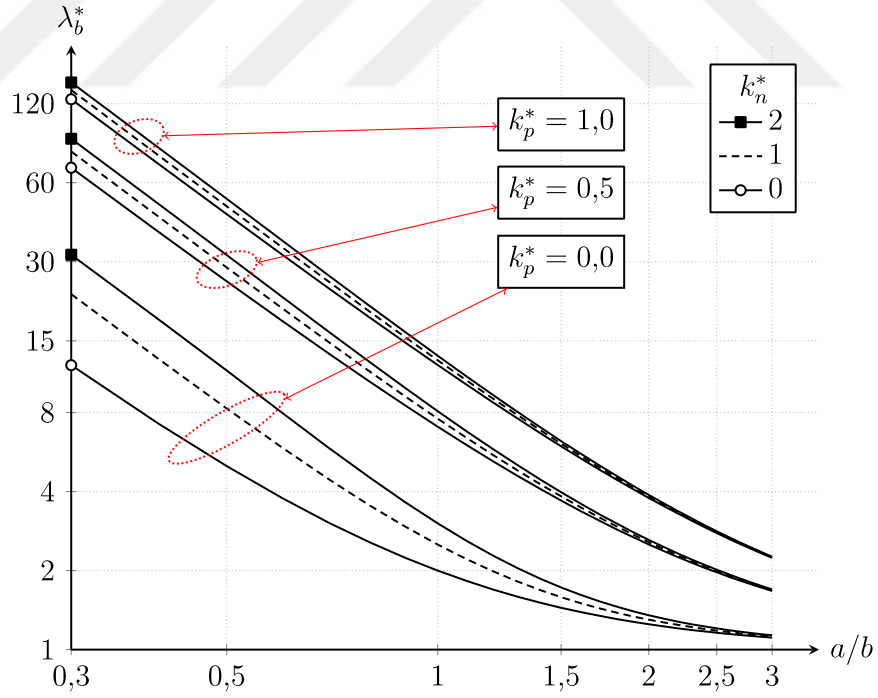
azaldığı gösterilmektedir. Son olarak, elastik zemin rijitliğinin burkulma faktörü üzerindeki etkisinden bahsedilmiştir. Şekil 6.18 ve Şekil 6.19’da a/b , k_n^* ve k_p^* SSSS dikdörtgen ve eğik plakalar için λ_ξ^* logaritmik grafikler ile gösterilmiştir. Şekiller k_n^* ve k_p^* ’nin λ_ξ^* ’yi artırdığını göstermektedir. Ancak, a/b büyüdükçe k_p^* etkisinin azaldığı ve k_n^* etkisinin yok olduğu ettiği açıkça görülebilir. Aynı etkiler, Şekil 6.20’de gösterildiği gibi çift eksenli yükleme durumunda ve Şekil 6.21’ da gösterildiği gibi kayma yükü durumunda da gözlenmektedir. Bu etkiler SSSS plakalarının burkulma faktörüne özgü değildir. Örneğin, Şekil 6.22’de görüldüğü gibi, CCCC dikdörtgen plakada da aynı etkiler gösterilmektedir.



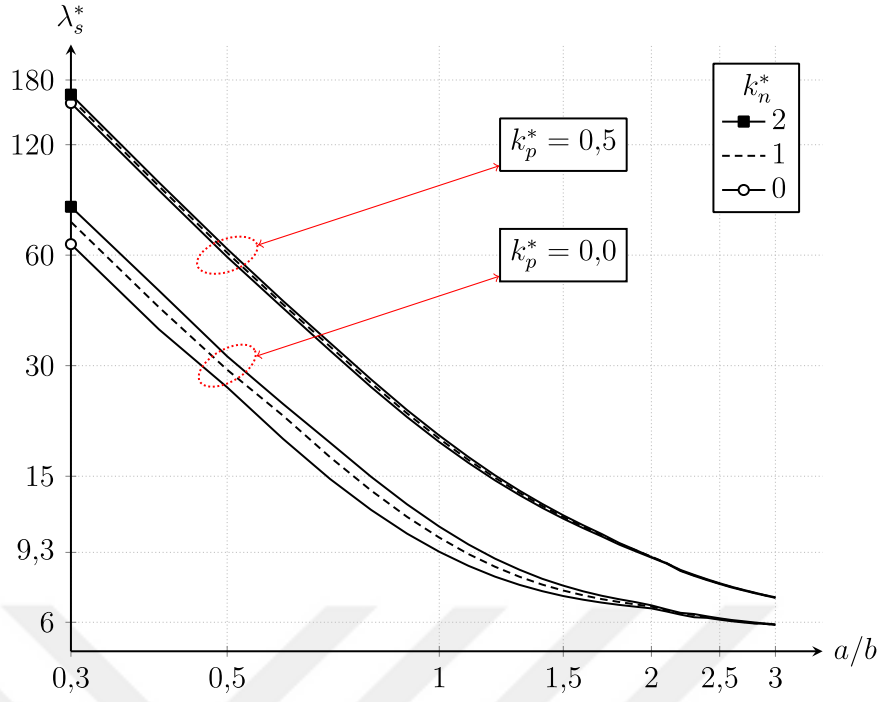
Şekil 6.18. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin normal rijitliği (k_n^*) ve elastik zeminin kayma rijitliği (k_p^*)'ye göre SSSS dikdörtgen plaka için boyutsuz tek eksenli burkulma yükü (λ_ξ^*)



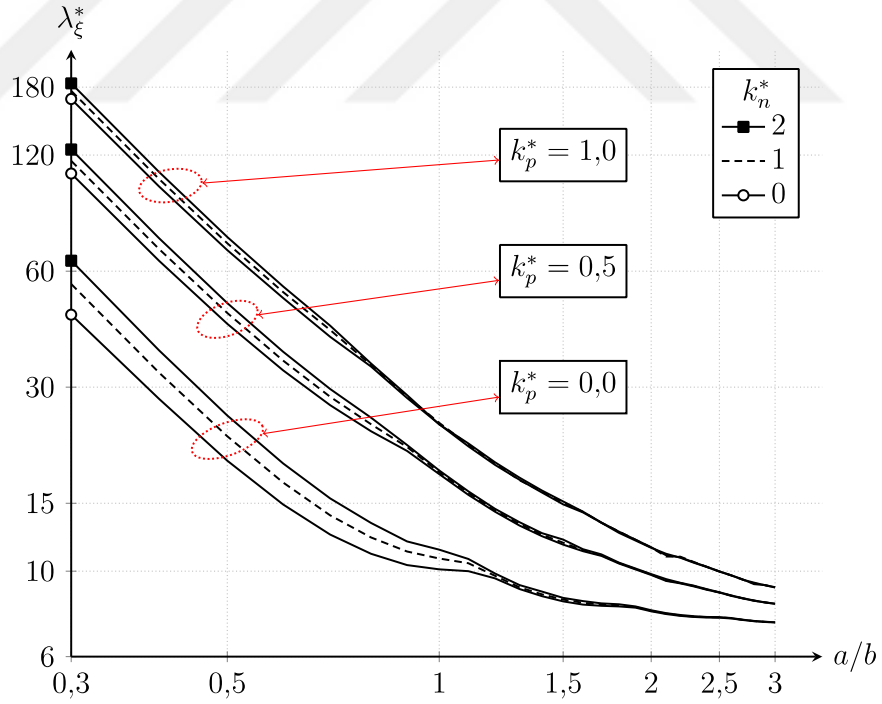
Şekil 6.19. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin normal rijitliği (k_n^*) ve elastik zeminin kayma rijitliği (k_p^*)'ye göre SSSS eğik plaka ($\phi = 30^\circ$) için boyutsuz tek eksenli burkulma yük (λ_ξ^*)



Şekil 6.20. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin normal rijitliği (k_n^*) ve elastik zeminin kayma rijitliği (k_p^*)'ye göre SSSS dikdörtgen plaka için boyutsuz çift eksenli burkulma yük (λ_b^*)



Şekil 6.21. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin normal rijitliği (k_n^*) ve elastik zeminin kayma rijitliği (k_p^*)'ye göre SSSS dikdörtgen plaka için boyutsuz kayma burkulma yükü (λ_s^*)



Şekil 6.22. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin normal rijitliği (k_n^*) ve elastik zeminin kayma rijitliği (k_p^*)'ye göre CCCC dikdörtgen plaka için boyutsuz tek eksenli burkulma yükü (λ_ξ^*)

6.3. FDP'nin Termal Burkulması

6.3.1. İncelenen FDP'nin Özellikleri

Bu çalışmada, sıcaklığa bağlı ve bağlı olmayan özelliklere sahip olan FDP'ler incelenmiştir. FDP'nin termal burkulmasına ilişkin yayınlanmış çalışmalarda kullanılan sıcaklığa bağlı (TD) ve bağlı olmayan (TID) özelliklere sahip FDM'ler, sırasıyla, paslanmaz çelik/silisyum nitrür (SUS304/Si₃N₄) ve alüminyum/ alüminyum oksit (Al/Al₂O₃) FDM'lerdir. Al/Al₂O₃ bileşenlerinin sıcaklığa bağlı olmayan özellikleri Tablo 6.1'te gösterilmektedir. SUS304/Si₃N₄ bileşenlerinin sıcaklığa bağlı özellikleri Tablo 6.9'te gösterilmektedir (Eslami, 2018).

Tablo 6.9. Paslanmaz çelik/silisyum nitrür (SUS304/Si₃N₄) özellikleri (Eslami, 2018)

Malzeme	Özellik	$\ddot{O}_{-1}$	$\ddot{O}_0$	$\ddot{O}_1$	$\ddot{O}_2$	$\ddot{O}_3$
SUS304 (metal)	α (/ K)	0	12,33e-6	8,086e-4	0	0
	E (N/m ²)	0	201,04e+9	3,079e-4	-6,534e-7	0
	K (W/m K)	0	15,379	-1,264e-3	-2,092e-6	-7,223e-10
	μ	0	0,28	0	0	0
Si ₃ N ₄ (Seramik)	α (/ K)	0	5,8723e-6	9,095e-4	0	0
	E (N/m ²)	0	348,43e+9	-3,07e-4	2,16e-7	-8,946e-11
	K (W/m K)	0	13,723	-1,032e-3	5,466e-7	-7,876e-11
	μ	0	0,28	0	0	0

Sıcaklığa bağlı özellikler, sıcaklığın (T) fonksiyonu olarak Denklem 6.3'de verilmektedir (Eslami, 2018). SUS304 ve Si₃N₄'in sıcaklığa bağlı özellikleri Şekil 6.23'de gösterilmektedir.

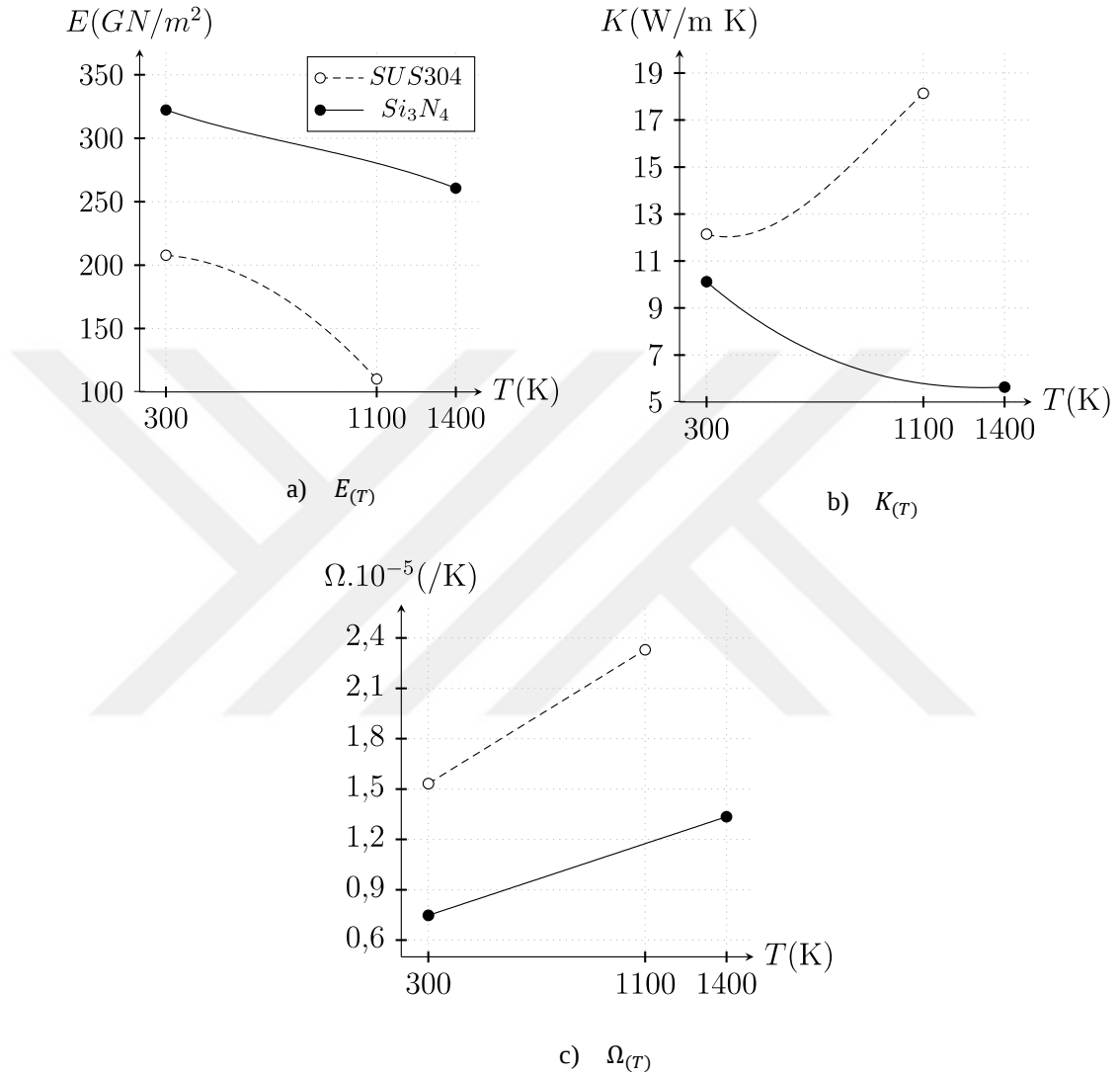
$$\ddot{O} = \ddot{O}_0(\ddot{O}_{-1}T^{-1} + 1 + \ddot{O}_1T^1 + \ddot{O}_2T^2 + \ddot{O}_3T^3) \quad (6.3)$$

Kararlılık denklemlerinin türetilmesinde varsayıldığı gibi, plakanın özellikleri kalınlık yönünde değişir. Bu çalışmada kullanılan özelliklerin değişimi basit üstel ilişki şeklindedir. Etkili özelliklerin bu varyasyonu, FDM'nin bileşenlerinin fonksiyonu olarak herhangi bir noktadaki özelliklerin Voigt modeli kullanılarak türetildiğini varsaymaktadır. Dolayısıyla etkili özellikler aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\ddot{O}_{(z)} = \ddot{O}_m + (\ddot{O}_c - \ddot{O}_m) V_{(z)}^n \quad V_{(z)} = \frac{2z + h}{2h} \quad (6.4)$$

Buradaki $\ddot{O}$, malzemenin özelliği; m ve c alt simgeleri, Şekil 5.18'te gösterildiği gibi sırasıyla metal bileşenin ve seramik bileşenin özelliklerini belirtmek için kullanılmaktadır. Sıcaklığa bağlı özellikler için, $\ddot{O}_c$ ve $\ddot{O}_m$ verilen sıcaklık ile Denklem 6.3'ten hesaplanmaktadır. n , değişim indeksidir. $V_{(z)}$, seramik hacim oranıdır. K_c ve K_m , sırasıyla seramik ve metal bileşenlerin iletkenlik katsayılarıdır.

Eğer $n = 0$ ise, o zaman plaka saf seramik olur. Eğer $n = \infty$ ise, plaka saf metalik olur. Aksi takdirde plaka hem seramik hem de metal malzemeden oluşan bir FDM'dir. Malzeme bileşimi, verilen fonksiyona göre kalınlık boyunca plakanın altındaki saf metalden üstteki saf seramiğe kadar sürekli olarak değişir.



Şekil 6.23. Paslanmaz çelik SUS304'nin ve silisyum nitrür Si_3N_4 'nin sıcaklığa bağlı özellikleri

6.3.2. Sıcaklık Dağılımı

Kalınlık boyunca sıcaklık dağılımı $T(z)$ düzgün, doğrusal veya doğrusal olmayan değişkendir. Düzgün ve doğrusal sıcaklık dağılımları aşağıdaki gibi basit formüllerle verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 &\text{Düzgün:} & T(z) - T_0 &= T_m = T_c \\
 &\text{Doğrusal dağılım:} & T(z) - T_0 &= T_m + (T_c - T_m) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Buradaki T_m ve T_c , FDP'nin metal ve seramik yüzlerin referans sıcaklıktan (T_0) artışıdır. Doğrusal olmayan dağılım, Denklem 6.6'te gösterilen ısı iletim probleminin çözümü olarak elde edilir (Ghannadpour vd, 2012a).

$$\frac{-d}{dz} \left(K_{(T,z)} \frac{dT_{(z)}}{dz} \right) = 0 \quad (6.6)$$

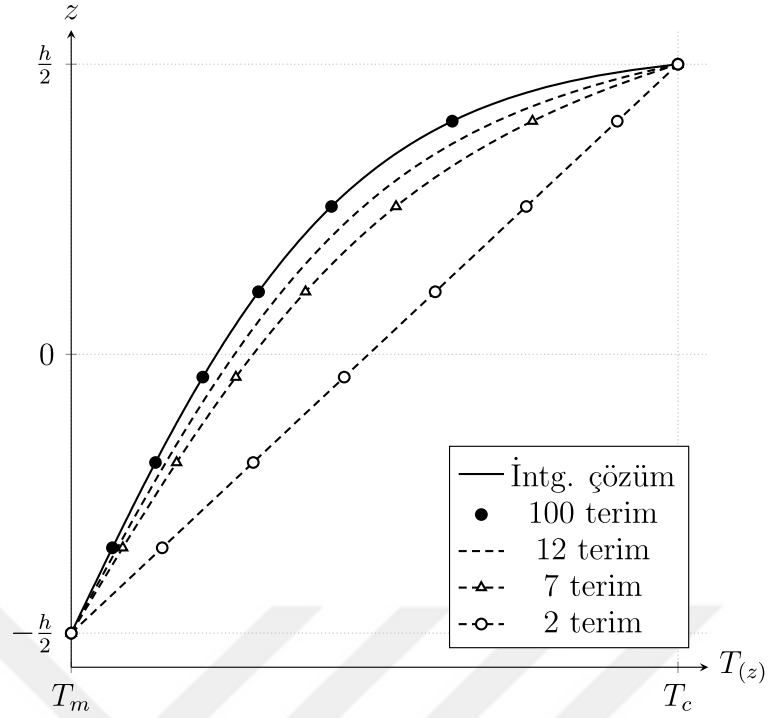
FDP'nin malzemesinin sıcaklığa bağlı olmayan olursa bu diferansiyel denklemin çözümü, aşağıdaki gibi verilen doğrusal olmayan sıcaklık dağılımıdır (Hung vd, 2011; Zhang & Zhou, 2008).

$$T_{(z)} - T_0 = T_m + (T_c - T_m) \left(\int_{-h/2}^z \frac{1}{K_{(z)}} dz \right) / \left(\int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{K_{(z)}} dz \right) \quad (6.7)$$

FDP'nin malzemesinin sıcaklığa bağılı olursa doğrusal olmayan sıcaklık dağılımı Denklemi 6.6 yinelemeli çözüm ile hesaplanmaktadır.

Geleneksel olarak, plakanın termal burkulma problemi, düzgün sıcaklık artışı durumunda kritik homojen sıcaklığı ΔT_U^{cr} bulmaktır. Aksi takdirde, yani doğrusal ve doğrusal olmayan dağılmış sıcaklıklar için, plakanın termal burkulma problemi, $T_c - T_m$ plakanın iki yüzü arasındaki kritik farkı bulmaktır, bu durum için ΔT_L^{cr} ve ΔT_N^{cr} sırasıyla kritik doğrusal ve doğrusal olmayan sıcaklık plakanın boyunca farklıdır.

Literatürde, sıcaklığa bağlı olmayan özelliklere sahip olan malzeme boyunca doğrusal olmayan $T_{(z)}$, (Javaheri & Eslami, 2002a) tarafından verildiği gibi, genellikle bir polinom serisinin bir toplamı olarak yaklaşırlar. Seride ne kadar çok terim olursa, elde edilen sıcaklık dağılımı o kadar doğru olur. Ancak, genellikle yalnızca ilk yedi terim dâhil edilir. Şekil 6.24, Tablo 6.1'de gösterilen özelliklere sahip AL/Al₂O₃ FDP'nin kalınlığı boyunca doğrusal olmayan sıcaklık dağılımını göstermektedir. FDP'nin, değişim indeksi $n = 2$, ve alt metal yüzeyi T_m °C, ve üst seramik yüzeyi T_c °C sıcaklık referans sıcaklıktan artışına maruz kalmaktadır. Yalnızca iki terim kullanılırsa sıcaklığın doğrusal dağılımı verilmektedir. Şekil 6.24, yedi terimli yaklaşık seri çözüm ile daha doğru birleşik çözüm arasındaki sıcaklık dağılımında önemli bir farkı göstermektedir. Çizim ayrıca, polinom serisi çözümünün Denklem 6.7'de gösterilen sayısal entegrasyon çözümüne yakınsadığını da göstermektedir.

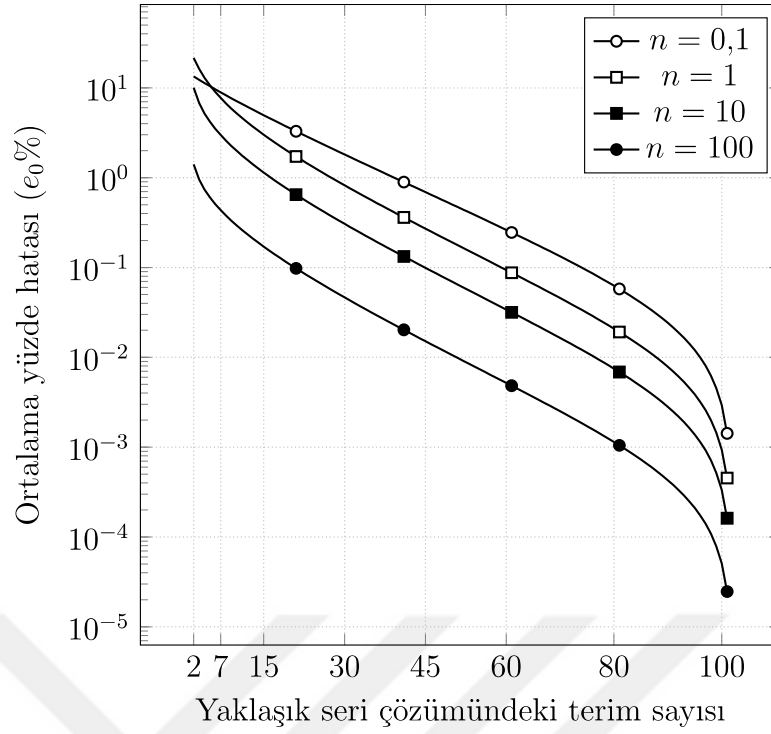


Şekil 6.24. Malzeme değişim indeksi $n = 2$ 'ye sahip Al/Al₂O₃ FDP'nin kalınlığı boyunca doğrusal olmayan sıcaklık dağılımının yaklaşık seri ve integral çözümleri

Polinom serisindeki terim sayısı ile n değişim indeksinin çeşitli değerleri için kalınlık boyunca sıcaklık dağılımındaki ortalama hata ilişkisi, Şekil 6.25'deki yarı logaritmik grafikte gösterilmektedir. Şekil 6.25'de daha fazla terim kullanılarak yaklaşık seri çözüm birleşeceği gösterilmektedir. Malzeme homojen seramik ($n = 0$) veya homojen metalik ($n = \infty$) hale geldikçe, ortalama hatanın ortadan kalktığı ve dolayısıyla sıcaklık dağılımının doğrusal hale geldiği görülmektedir. Şekil 6.25'te çizilen ortalama yüzde hatası aşağıdaki gibi hesaplanır.

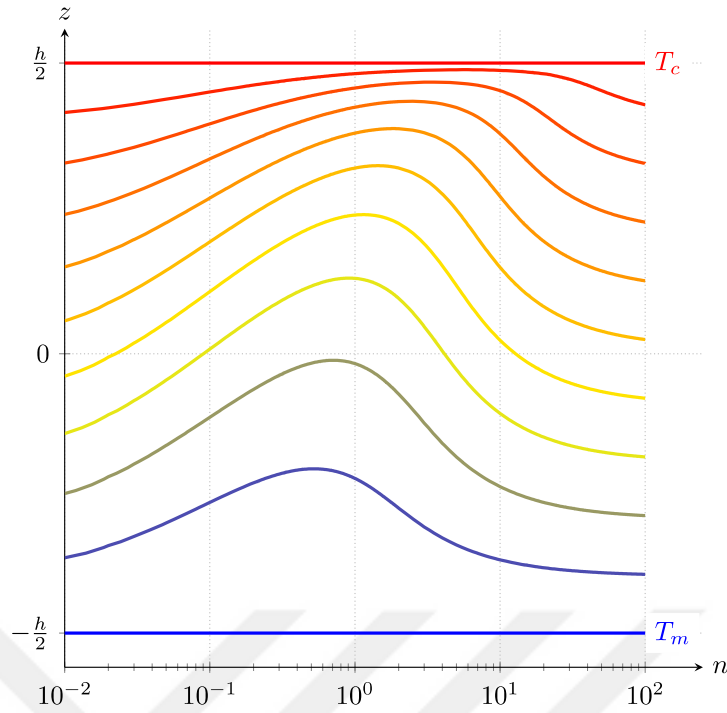
$$e_0 \% = 100\% \times \left(\int_{-h/2}^{h/2} T_{(z)} dz - \int_{-h/2}^{h/2} \hat{T}_{(z)} dz \right) / ((T_c - T_m)h) \quad (6.8)$$

Burada $\hat{T}_{(z)}$ Denklem 6.7'de gösterilen integral çözümdür.



Şekil 6.25. Malzemenin değişim indeksi (n) ve yaklaşık seri çözümünün terim sayısına göre Al/Al₂O₃ FDP'nin kalınlığı boyunca integral çözümüne kıyasla sıcaklık dağılımının ortalama hatası

Bir Al/Al₂O₃ FDP'nin kalınlığı boyunca sıcaklık dağılımı n değişim indeksinin bir fonksiyonu olarak Şekil 6.26'deki yarı logaritmik grafiğin eşit aralıklı konturları ile gösterilmektedir. Şekil 6.26, çok düşük değerlerin yanı sıra çok yüksek n değerlerinin de kabaca doğrusal bir sıcaklık dağılımına yol açtığını göstermektedir. Orta değere sahip n , kalınlık yönünde sıcaklığın açıkça doğrusal olmayan bir değişimine yol açmaktadır. Bu anlaşılabilir bir durumdur çünkü çok düşük ve çok yüksek n değerleri sırasıyla neredeyse homojen seramik veya metalik hale gelmektedir.



Şekil 6.26. Malzemenin değişim indeksi (n)'ye göre Al/Al₂O₃ FDP'nin kalınlığı boyunca sıcaklık dağılımının eşit aralıklı kontour şekli

6.3.3. EKM Doğruluğu

Düzgün, doğrusal ve doğrusal olmayan sıcaklık dağılımı altında kalan FDP'nin burkulma analizi EKM ile incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, ANSYS'in FEM çözümlerine ek olarak, literatürde bulunan analitik ve sayısal çözümlerle karşılaştırılarak doğrulanmıştır. Bu bölümdeki tüm çalışmalar, malzemenin Al/Al₂O₃ yapısındaki FDM olduğu düşünülerek gerçekleştirilmiştir.

6.3.3.1. Düzgün Sıcaklık Artışı

Burada ilk olarak, düzgün sıcaklık artışı ΔT_U altında kare FDP'nin burkulma analizi, ardından en boy oranının farklı değerlerine sahip ince bir plaka burkulma analizi ve son olarak eğik ince SSSS FDP'nin burkulma analizi yapılmıştır. ($a/h = 100$)'ye sahip ince kare ve orta kalınlıkta ($a/h = 50$) FDP'ler, burkulma sıcaklığı için, her ikisi de SSSS ve CCCC dikkate alınarak yapılmıştır. Sonuçlar literatürde bulunan diğer yöntemlerin çözümleriyle karşılaştırılır.

Tablo 6.10'de, ince ve orta kalınlıkta SSSS FDP'ler için burkulma homojen sıcaklığın EKM sonuçları, ANSYS (FEM), izogeometrik analiz IGA (Yu vd, 2017) ve Galerkin yöntemi (Javaheri & Eslami, 2002a, 2002b) ile karşılaştırılmıştır. Bu çözümler farklı plaka teorilerine dayanmaktadır.

Aynı karşılaştırma CCCC FDP'ler için de yapılır ve Tablo 6.11'te sunulmuştur. Dikkate alınan ikinci durum, homojen sıcaklık artışı altında farklı en boy oranı b/a değerlerine sahip dikdörtgen SSSS Al/Al₂O₃ ince FDP'leridir. EKM sonuçları, Tablo 6.12'de diğer yöntemlerin sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Tablo 6.13 ise, EKM'nin eğik plakaların düzgün kritik sıcaklığının elde edilmesindeki doğruluğunu göstermektedir. Her durumda EKM'nin düzgün sıcaklık artışı altındaki FDP'lerin kritik sıcaklıklarını elde etmede çok doğru olduğu bulunmuştur.

Tablo 6.10. Malzemenin değişim indeksi (n) ve en kalınlık oranı (a/h)'ye göre SSSS kare Al/Al₂O₃ FDP için EKM, ANSYS'in FEM, IGA (Yu vd, 2017) ve Galerkin yöntemi (Javaheri & Eslami, 2002a, 2002b) ile elde edilen ΔT_{cr}^c

$\frac{a}{h}$	Yöntem	Plaka modeli	Değişim indeksi n					
			0	0,5	1	2	5	10
100	EKM	CPT	17,0991	9,6879	7,9438	7,0426	7,2657	7,4692
	Galerkin	CPT	17,0991	9,6879	7,9438	7,0426	7,2657	7,4692
	IGA	FSDT	17,0946	9,6942	7,9557	7,0382	7,2555	-
	ANSYS(FEM)	FSDT	17,0895	9,6831	7,9401	7,0402	7,2715	7,4753
	EKM	R-FSDT	17,0905	9,6835	7,9405	7,0390	7,2605	7,4635
	EKM	FSDT	17,0893	9,6830	7,9400	7,0392	7,2615	7,4643
	Galerkin	HSDT	17,0895	9,6831	7,940	7,0390	7,2607	7,4634
50	EKM	CPT	68,3962	38,7515	31,7751	28,1704	29,0628	29,8771
	Galerkin	CPT	68,3964	38,7516	31,7751	28,1704	29,0629	29,8771
	IGA	FSDT	68,2429	38,7481	31,7874	29,1780	29,0875	-
	ANSYS(FEM)	FSDT	68,2425	38,6749	31,7151	28,1170	29,0240	29,8304
	EKM	R-FSDT	68,2560	38,6830	31,720	28,1160	28,9825	29,7840
	EKM	FSDT	68,2404	38,6729	31,7141	28,1156	28,9948	29,7981
	Galerkin	HSDT	68,2425	38,6751	31,7149	28,1131	28,9821	29,7837
20	EKM	CPT	427,478	242,197	198,594	176,065	181,643	186,732
	Galerkin	CPT	427,478	242,197	198,594	176,065	181,643	186,732
	ANSYS(FEM)	FSDT	421,535	237,379	195,760	174,193	179,576	185,413
	EKM	R-FSDT	422,674	239,841	196,714	174,220	178,985	183,629
	EKM	FSDT	421,457	239,156	196,234	173,946	179,016	183,689
	Galerkin	HSDT	421,516	-	196,257	-	178,528	183,141
10	EKM	CPT	1709,911	968,790	794,377	704,260	726,571	746,927
	Galerkin	CPT	1709,910	968,790	794,377	704,260	726,571	746,927
	ANSYS(FEM)	FSDT	1618,626	916,223	756,453	670,910	682,380	700,519
	EKM	R-FSDT	1623,821	926,587	760,595	670,779	677,729	690,603
	EKM	FSDT	1617,483	921,887	757,919	671,540	686,284	700,511
	Galerkin	HSDT	1617,484	-	757,891	-	678,926	692,519

Tablo 6.11. Malzemenin değişim indeksi (n) ve en kalınlık oranı (a/h)'ye göre kare CCCC Al/Al₂O₃ FDP için EKM, Galerkin-power series yöntemi (Kiani vd, 2011), elemansız metodu (Zhao vd, 2009), FEM (Hung vd, 2011) ANSYS'in FEM ve Galerkin yöntemi (Javaheri & Eslami, 2002b) ile elde edilen ΔT_U^{cr}

a/h	Yöntem	Plaka modeli	Değişim indeksi n				
			0	0,5	1	2	5
100	EKM	CPT	45,24	25,67	21,06	18,50	19,25
	Galerkin-power series	CPT	45,51	25,79	21,15	18,75	19,34
	Element-free	FSDT	44,17	24,90	20,77	18,48	19,15
	FEM	FSDT	47,50	26,54	21,70	19,18	19,70
	ANSYS (FEM)	FSDT	45,26	25,52	21,01	18,70	19,35
	EKM	FSDT	45,36	25,71	21,08	18,69	19,27
	Galerkin	HSDT	45,28	25,65	21,04	18,65	19,23
50	EKM	CPT	181,76	102,98	84,44	74,86	77,23
	Galerkin-power series	CPT	182,06	103,15	84,58	74,99	77,36
	Element-free	FSDT	175,82	99,16	82,35	71,01	74,59
	FEM	FSDT	188,28	105,27	86,07	76,07	78,06
	ANSYS (FEM)	FSDT	180,13	101,63	83,68	74,43	76,88
	EKM	FSDT	180,52	102,35	83,95	74,42	76,69
	Galerkin	HSDT	180,30	102,23	83,84	74,30	76,50

Tablo 6.12. Malzemenin değişim indeksi (n) ve en boy oranı (b/a)'ya göre $b/h=100$ 'ye sahip SSSS Al/Al₂O₃ ince FDP için EKM, ANSYS'in FEM, ve Galerkin yöntemi (Javaheri & Eslami, 2002a, 2002b) ile elde edilen ΔT_U^{cr}

n	Yöntem	Plak modeli	En-boy oranı b/a			
			2	3	4	5
0	EKM	CPT	42,7478	85,4956	145,3423	222,2884
	Galerkin	CPT	42,7478	85,4955	145,3424	222,2884
	ANSYS(FEM)	FSDT	42,7327	85,46876	145,2989	222,2232
	EKM	FSDT	42,6868	85,2520	144,6399	220,6493
	Galerkin	HSDT	42,6876	85,2551	144,6490	220,6706
1	EKM	CPT	19,8594	39,7189	67,5221	103,2690
	Galerkin	CPT	19,8594	39,7189	67,5221	103,2690
	ANSYS(FEM)	FSDT	19,8538	39,7090	67,5061	103,2452
	EKM	FSDT	19,8356	39,6236	67,2471	102,6273
	Galerkin	HSDT	19,8359	39,6248	67,2507	102,6356
5	EKM	CPT	18,1643	36,3286	61,7586	94,4543
	Galerkin	CPT	18,1643	36,3286	61,7586	94,4543
	ANSYS(FEM)	FSDT	18,1839	36,3700	61,8304	94,5651
	EKM	FSDT	18,1377	36,2223	61,4519	93,7389
	Galerkin	HSDT	18,1327	36,2025	61,3952	93,6070
10	EKM	CPT	18,6732	37,3464	63,4888	97,1005
	Galerkin	CPT	18,6732	37,3464	63,4888	97,1006
	ANSYS(FEM)	FSDT	18,6942	37,3910	63,5663	97,2202
	EKM	FSDT	18,6423	37,2230	63,1332	96,2713
	Galerkin	HSDT	18,6367	37,2006	63,0687	96,1214

Tablo 6.13. Malzemenin değişim indeksi (n) ve eğim açısı (ϕ)'ye göre eğik SSSS Al/Al₂O₃ FDP için EKM, ANSYS'in FEM ile elde edilen ΔT_U^{cr}

n	Yöntem	Plaka modeli	Eğim açısı ϕ			
			0°	15°	30°	45°
1	EKM	CPT	7,9438	8,4069	10,1355	14,1530
	ANSYS(FEM)	FSDT	7,9171	8,3693	9,9972	14,1049
5	EKM	CPT	7,2657	7,6897	9,1713	12,9205
	ANSYS(FEM)	FSDT	7,3044	7,7213	9,2199	12,9890

6.3.3.2. Doğrusal Sıcaklık Artışı

Burada ilk olarak, en kalınlık oranının farklı değerlerine sahip kare SSSS FDP'lerin kalınlığı boyunca doğrusal sıcaklık ΔT_L dağılımı altında burkulma öncesi analizi yapılmış, ardından farklı en boy oranlarına sahip SSSS FDP'lerin burkulma analizi yapılmış ve son olarak eğik ince SSSS FDM'lerin burkulma analizi yapılmıştır. Tablo 6.14 ve Tablo 6.15, sırasıyla boy kalınlık oranı a/h ve en-boy oranının b/a farklı değerleri için (Javaheri & Eslami, 2002a, 2002b)'deki Galerkin'in çözümlerine kıyasla EKM sonuçlarını gösterir.

Tablo 6.15'te gösterilen sonuçların T_m 'nin 5°C olduğu düşünülerek elde edildiğine dikkat edilmelidir. Tablo 6.16'de ise, EKM kullanılarak elde edilen doğrusal sıcaklık dağılımı altında ($a = b$)'ye sahip ince eğik FDP için kritik sıcaklık farkı gösterilmiştir ve (Saadatpour vd, 1998)'in yaptıkları çalışmada elemansız Galerkin çözümü (EFG) ve ANSYS'in FEM çözümleriyle karşılaştırılmıştır. Dikkate alınan tüm durumlarda, EKM, doğrusal sıcaklık dağılımı altında dikdörtgen FDP'lerinin kritik sıcaklıklarını elde etmede yüksek doğruluk göstermektedir. Dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta, Tablo 6.14'deki kalın plakaların kritik sıcaklıklarının, malzemenin erime noktasını aşmasıdır. Bu nedenle, kalın plakalarda termal burkulmanın meydana gelmeyeceği sonucuna varılabilir.

Tablo 6.14. Malzemenin deşişim indeksi (n) ve boy kalınlık oranı (a/h)'ye göre SSSS Al/Al₂O₃ kare FDP için EKM ve Galerkin yöntemi (Javaheri & Eslami, 2002a, 2002b) ile elde edilen ΔT_L^{cr}

n	Yöntem	Plak modeli	a/h					
			10	20	40	60	80	100
0	EKM	CPT	3409,821	844,955	203,739	84,995	43,435	24,198
	Galerkin	CPT	3409,821	844,955	203,738	84,995	43,434	24,198
	EKM	FSDT	3224,966	832,914	202,978	84,844	43,387	24,179
	Galerkin	HSDT	3224,968	833,032	202,982	84,848	43,387	24,177
1	EKM	CPT	1480,450	363,080	83,737	32,007	13,901	5,521
	Galerkin	CPT	1480,450	363,079	83,736	32,006	13,901	5,520
	EKM	FSDT	1412,074	358,654	83,458	31,952	13,884	5,514
	Galerkin	HSDT	1412,023	538,696	83,459	31,952	13,882	5,513
5	EKM	CPT	1242,035	304,054	69,559	26,134	10,935	3,900
	Galerkin	CPT	1242,035	304,054	69,558	26,133	10,934	3,899
	EKM	FSDT	1172,690	299,532	69,273	26,077	10,917	3,893
	Galerkin	HSDT	1160,024	298,693	69,219	26,067	10,913	3,891
10	EKM	CPT	1314,743	322,040	73,865	27,906	11,821	4,376
	Galerkin	CPT	1314,743	322,040	73,864	27,906	11,820	4,375
	EKM	FSDT	1232,491	316,648	73,524	27,839	11,800	4,367
	Galerkin	HSDT	1218,328	315,677	73,461	27,826	11,797	4,364

Tablo 6.15. Malzemenin deşişim indeksi (n) ve en boy oranı (b/a)'ya göre $b/h=100$ 'ye sahip SSSS Al/Al₂O₃ ince FDP için EKM ve Galerkin yöntemi (Javaheri & Eslami, 2002a, 2002b) ile elde edilen ΔT_L^{cr}

n	Yöntem	Plak modeli	b/a			
			2	3	4	5
0	EKM	CPT	75,496	160,991	280,685	434,577
	Galerkin	CPT	75,495	160,991	280,684	434,576
	EKM	FSDT	75,374	160,504	279,280	431,299
	Galerkin	HSDT	75,376	160,505	279,297	431,334
1	EKM	CPT	27,868	65,114	117,258	184,300
	Galerkin	CPT	27,868	65,114	117,258	184,300
	EKM	FSDT	27,824	64,935	116,742	183,097
	Galerkin	HSDT	27,823	64,936	116,748	183,110
5	EKM	CPT	22,660	53,926	97,698	153,977
	Galerkin	CPT	22,659	53,925	97,698	153,977
	EKM	FSDT	22,614	53,743	97,170	152,746
	Galerkin	HSDT	22,604	53,710	97,073	152,516
10	EKM	CPT	24,230	57,320	103,646	163,208
	Galerkin	CPT	24,229	57,319	103,646	163,208
	EKM	FSDT	24,175	57,101	103,016	161,739
	Galerkin	HSDT	24,165	57,061	102,901	161,471

Tablo 6.16. Malzemenin deşğıim indeksi (n) ve eğim açısı (ϕ)'ye göre eğik SSSS Al/Al₂O₃ FDP için EKM ve EFG (Saadatpour vd, 1998) ile elde edilen ΔT_L^{cr}

a/b	ϕ	n					
		1			5		
		EKM (CPT)	EFG (CPT)	FEM (FSDT)	EKM (CPT)	EFG (CPT)	FEM (FSDT)
1	0°	5,5209	5,5199	5,5207	3,8999	3,8991	3,8987
	15°	6,3806	6,3133	6,4022	4,6252	4,5651	4,6385
	30°	9,5001	9,2260	9,7737	7,3198	7,6308	7,4681
	45°	17,6795	17,9718	19,0164	14,0963	14,3519	15,2242
2	0°	27,8683	27,8812	-	22,6594	22,6704	-
	15°	30,2000	30,1040	-	24,6168	24,5363	-
	30°	38,7561	38,2188	-	31,8156	31,7856	-
	45°	60,6512	60,4732	-	50,2507	50,0298	-

6.3.3.3. Doğrusal Olmayan Sıcaklık Artışı

Bu bölümde ilk olarak, en kalınlık a/h oranının farklı değerlerine sahip kare bir SSSS FDP'lerinin kalınlığı boyunca doğrusal olmayan sıcaklık dağılımı ΔT_N altında burkulma analizi yapılmıştır. Sonra, farklı en boy oranlarına b/a sahip ince SSSS FDP'lerinin burkulma analizi yapılmış ve son olarak eğik ince SSSS FDM'nin burkulma analizi yapılmıştır. Tablo 6.17 ve Tablo 6.18, sırasıyla boy kalınlık oranı a/h ve en boy oranı b/a 'nın farklı değerleri için diğer çözümlere kıyasla EKM sonuçlarını gösterir. Tablo 6.19, EKM kullanılarak elde edilen ve element içermeyen Galerkin'in (Saadatpour vd, 1998) çözümü (EFG) ve ANSYS FEM çözümleriyle karşılaştırılan, doğrusal olmayan sıcaklık dağılımı altında $a = b$ 'ye sahip ince eğik FDP için kritik sıcaklık farkını listelemektedir.

Tablo 6.17 ve Tablo 6.18'te gösterilen sonuçların $T_m = 5^\circ\text{C}$ dikkate alınarak elde edildiğine dikkat edilmelidir. Kalınlık boyunca sıcaklığın doğrusal olmayan dağılımı, hem yakınsak hem de yedi terimli polinom seri çözümleri dikkate alınarak analizler yapılmıştır. Tablo 6.17 ve Tablo 6.18 incelendiğinde, iki durum arasında ortaya çıkan burkulma sıcaklığında önemli bir fark olduğu görülmektedir. Göz önünde bulundurulan tüm durumlarda EKM, doğrusal olmayan sıcaklık dağılımı altında dikedörtgen FDP'lerin kritik sıcaklıklarını elde etmede yüksek doğruluk göstermiştir.

Tablo 6.17. Malzemenin deşişim indeksi (n) ve boy kalınlık oranı (a/h)'ya göre SSSS Al/Al₂O₃ kare FDP için EKM ve Galerkin yöntemi (Javaheri & Eslami, 2002a, 2002b) ile elde edilen ΔT_N^{cr}

n	Yöntem	$T_{(z)}$ terim sayısı	Plaka modeli	a/h					
				10	20	40	60	80	100
0	EKM	100	CPT	3409,821	844,955	203,739	84,995	43,435	24,198
	EKM	7	CPT	3409,821	844,955	203,739	84,995	43,435	24,198
	Galerkin	7	CPT	3409,821	844,955	203,738	84,995	43,434	24,198
	EKM	7	FSDT	3224,966	832,914	202,978	84,844	43,387	24,179
	Galerkin	7	HSDT	3224,968	833,032	202,984	84,848	43,387	24,177
1	EKM	100	CPT	2633,408	645,842	148,950	56,933	24,727	9,821
	EKM	7	CPT	2055,001	503,988	116,235	44,428	19,296	7,664
	Galerkin	7	CPT	2055,001	503,987	116,234	44,428	19,296	7,663
	EKM	7	FSDT	1960,088	497,844	115,847	44,352	19,272	7,654
	Galerkin	7	HSDT	1960,018	497,903	115,849	44,352	19,270	7,652
5	EKM	100	CPT	1749,960	428,396	98,004	36,821	15,407	5,495
	EKM	7	CPT	1553,336	380,261	86,993	32,684	13,675	4,877
	Galerkin	7	CPT	1553,336	380,261	86,999	32,683	13,675	4,877
	EKM	7	FSDT	1466,609	374,606	86,635	32,613	13,653	4,868
	Galerkin	7	HSDT	1450,769	373,557	86,568	32,600	13,648	4,866
10	EKM	100	CPT	1633,873	400,210	91,794	34,680	14,690	5,438
	EKM	7	CPT	1519,568	372,211	85,372	32,254	13,663	5,057
	Galerkin	7	CPT	1519,568	372,211	85,372	32,254	13,662	5,057
	EKM	7	FSDT	1424,502	365,979	84,978	32,176	13,638	5,047
	Galerkin	7	HSDT	1408,132	364,857	84,905	32,162	13,634	5,044

Tablo 6.18. Malzemenin deşişim indeksi (n) ve en boy oranı (b/a)'ya göre $b/h=100$ 'ye sahip SSSS Al/Al₂O₃ ince FDP için EKM ve Galerkin yöntemi (Javaheri & Eslami, 2002a, 2002b) ile elde edilen ΔT_N^{cr}

n	Yöntem	$T_{(z)}$ terim sayısı	Plaka modeli	b/a			
				2	3	4	5
0	EKM	100	CPT	75,496	160,991	280,685	434,577
	EKM	7	CPT	75,496	160,991	280,685	434,577
	Galerkin	7	CPT	75,495	160,991	280,684	434,576
	EKM	7	FSDT	75,374	160,504	279,280	431,299
	Galerkin	7	HSDT	75,376	160,505	279,297	431,334
1	EKM	100	CPT	49,572	115,824	208,577	327,831
	EKM	7	CPT	38,684	90,384	162,765	255,826
	Galerkin	7	CPT	38,683	90,384	162,764	255,825
	EKM	7	FSDT	38,622	90,136	162,049	254,155
	Galerkin	7	HSDT	38,622	90,138	162,057	254,174
5	EKM	100	CPT	31,926	75,978	137,651	216,945
	EKM	7	CPT	28,339	67,441	122,185	192,569
	Galerkin	7	CPT	28,338	67,441	122,184	192,569
	EKM	7	FSDT	28,282	67,213	121,525	191,029
	Galerkin	7	HSDT	28,270	67,172	121,403	190,743
10	EKM	100	CPT	30,111	71,233	128,804	202,824
	EKM	7	CPT	28,005	66,250	119,793	188,634
	Galerkin	7	CPT	28,004	66,249	119,793	188,634
	EKM	7	FSDT	27,941	65,997	119,065	186,936
	Galerkin	7	HSDT	27,929	65,951	118,932	186,627

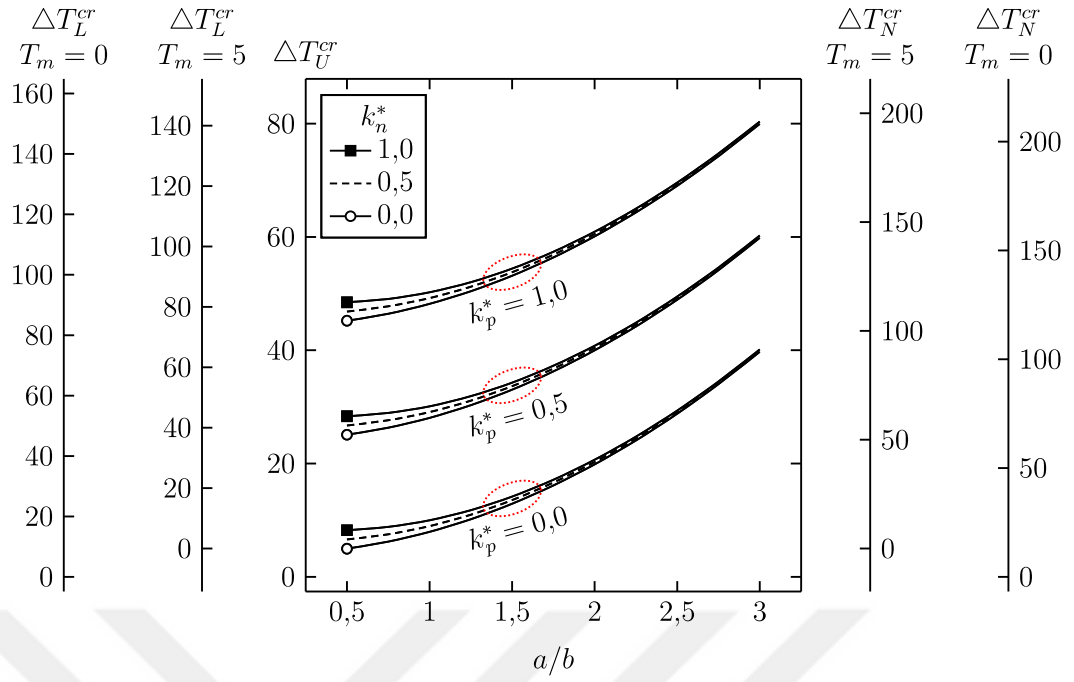
Tablo 6.19. Malzemenin deşğıim indeksi (n) ve eğim açısı (ϕ)'ye göre eğik SSSS Al/Al₂O₃ FDP için EKM ve EFG (Saadatpour vd, 1998) ile elde edilen ΔT_N^{cr}

a/b	ϕ	n					
		1			5		
		EKM (CPT)	EFG (CPT)	FEM (FSDT)	EKM (CPT)	EFG (CPT)	FEM (FSDT)
1	0°	7,6636	7,6621	7,6632	4,8774	4,8763	4,8758
	15°	8,8903	8,7634	8,8869	5,7865	5,7093	5,8011
	30°	13,1818	12,8065	13,5668	10,0054	9,5433	9,3399
	45°	24,5723	24,9465	26,3965	17,6529	17,9490	19,0400
2	0°	38,6838	38,7017	38,6525	28,3389	28,3524	28,3067
	15°	41,9188	41,7871	41,9254	30,7883	30,6860	30,7810
	30°	53,7081	53,0512	54,0838	39,6498	39,7522	39,9718
	45°	85,2902	83,9423	85,5235	62,7607	62,5692	63,7321

6.3.4. İnce FDP'nin Kritik Sıcaklıklarının Arasındaki İlişkiler

Aşağıda, Pasternak elastik temele dayanan, $n = 1$, eni $b = 1m$ ve boy kalınlık oranı $a/h = 100$ olan ince, tamamen basit bir şekilde desteklenen Al/Al₂O₃ FDP için sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Geleneksel olarak, elastik temelin sertliği aşağıdaki gibi boyutsuz bir biçimde ifade edilir. Şekil 6.27, b/a en boy oranına göre düzgün sıcaklık artışı ΔT_U^{cr} , doğrusal ΔT_L^{cr} ve doğrusal olmayan ΔT_N^{cr} sıcaklık farkı altında Pasternak elastik zemin parametreleri (k_n^*, k_p^*) farklı değerlerde plakanın termal burkulmasını göstermektedir.

Doğrusal ve doğrusal olmayan sıcaklık dağılımlarının her birinde sırasıyla $T_m = 0^\circ C$ ve $T_m = 5^\circ C$ alındığına dikkat edilmelidir. Farklı sıcaklık dağılımlarının, üç durum için sonuçlarının tam olarak farklı ölçeklerde aynı grafiğı oluşturduğu görülmüştür. Ayrıca, $T_m = 0$ durumunda ve karşılık gelen $T_m = 5$ durumundaki sonuçların, sadece bir ofset ile doğrusal olarak ilişkili olması da dikkate değer bulunmuştur.



Şekil 6.27. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (k_n^*) ve boyutsuz kayma rijitliğine (k_p^*) göre dikdörtgen SSSS FDP'nin termal burkulma sıcaklığı ($n = 1$)

Doğrusal ve doğrusal olmayan sıcaklık dağılımlarının Şekil 6.27'teki burkulma sıcaklık farkının sıfır değerleri, termal yükün T_m düzgün kısmının burkulmaya neden olmak için tek başına yeterli olduğunu göstermektedir. Çeşitli sıcaklık dağılımı altında FDP'nin burkulma sıcaklığı arasındaki bu doğrusal ilişkilerin nedenleri aşağıdaki gibi açıklanabilir. Sıcaklık dağılımından türetilen tek terim, N_T ısıl yükten kaynaklanan kuvvettir. Dolayısıyla, termal burkulma sıcaklığının çözümü temelde sonuçta oluşan kritik termal kuvveti N_T^{cr} elde etmektir. Denklem 6.5'te gösterilen düzgün sıcaklık artışı durumunda, sıcaklık dağılımı sabit bir $T_{(z)} = T_m$ olur. Denklem 5.61'de burkulma homojen sıcaklık ΔT_U^{cr} 'nin ikame edilmesi N_T^{cr} verir.

$$N_T^{cr} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{(z)} \Omega_{(z)} \Delta T_U^{cr}}{1 - \mu} dz = \Delta T_U^{cr} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{(z)} \Omega_{(z)}}{1 - \mu} dz = \Delta T_U^{cr} C_1 \quad (6.9)$$

Denklem 6.5'de gösterildiği gibi, kalınlık boyunca doğrusal sıcaklık dağılımı durumunda seramik ve metalik yüzeyler arasındaki kritik sıcaklık farkı $\Delta T_L^{cr} = T_c - T_m$ 'dir. Bu denklem, Denklem 6.5'de ve sonra Denklem 5.61'te yerine koyulduğunda, aşağıdakileri vermektedir.

$$N_T^{cr} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{(z)} \Omega_{(z)} \left(T_m + \Delta T_L^{cr} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \right)}{1 - \mu} dz = \Delta T_L^{cr} C_2 + T_m C_1 \quad (6.10)$$

Denklem 6.9'in denklem 6.10 ile karşılaştırılması aşağıdakileri verir.

$$\Delta T_L^{cr} = \frac{C_1}{C_2} (\Delta T_U^{cr} - T_m) \quad (6.11)$$

Burada C_1 ve C_2 aşağıdaki gibi verilen sabitlerdir.

$$C_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{(z)} \Omega_{(z)}}{1 - \mu} dz \quad C_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{(z)} \Omega_{(z)} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)}{1 - \mu} dz \quad (6.12)$$

Denklem 6.6'da gösterilen doğrusal olmayan sıcaklık dağılımı durumunda, seramik ve metal yüzeyler arasındaki kritik sıcaklık farkı $\Delta T_N^{cr} = T_c - T_m$ Denklem 5.61'den aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$N_T^{cr} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{(z)} \Omega_{(z)} \left(T_m + \Delta T_N^{cr} \frac{K_{(z)}^v}{K^c} \right)}{1 - \mu} dz \quad (6.13)$$

Denklem 6.9'in Denklem 6.13 ile karşılaştırılması aşağıdakileri verir.

$$\Delta T_N^{cr} = \frac{K^c C_1}{C_3} (\Delta T_U^{cr} - T_m) \quad (6.14)$$

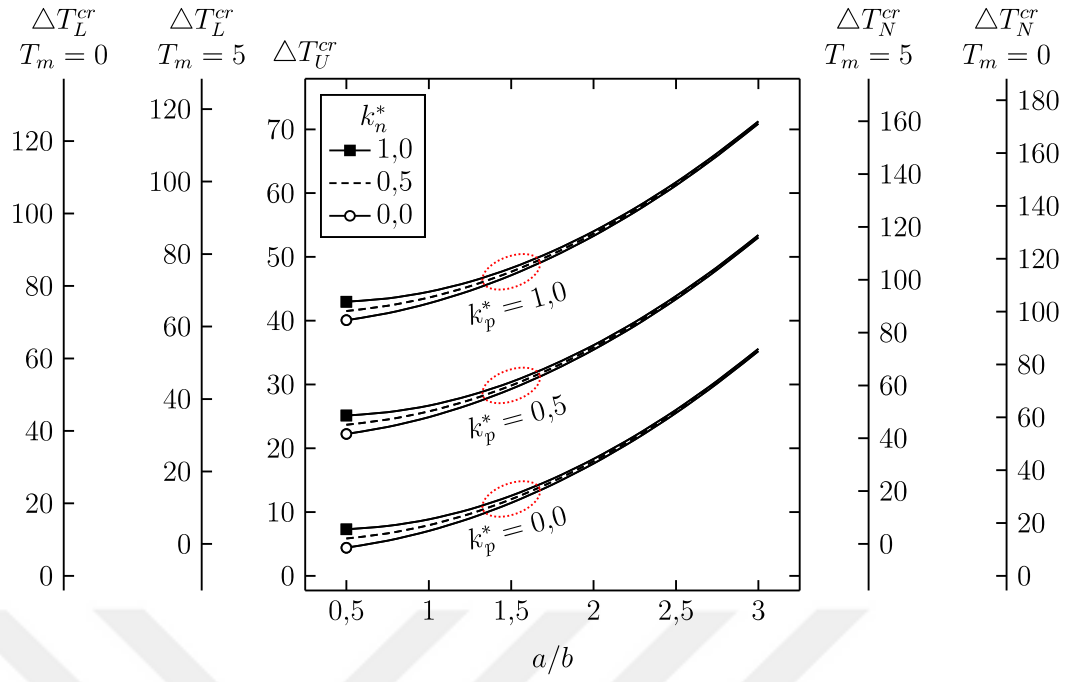
$K_{(z)}^v$ fonksiyonu ve K^c ve C_3 sabitleri aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$K^c = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{K_{(z)}} dz \quad K_{(z)}^v = \int_{-h/2}^z \frac{1}{K_{(z)}} dz \quad C_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{(z)} \Omega_{(z)} K_{(z)}^v}{1 - \mu} dz \quad (6.15)$$

Denklem 6.14 ve Denklem 6.11'deki türetilmiş ilişkiler kullanılarak, herhangi bir sıcaklık dağılımı için kritik sıcaklık herhangi birinden elde edilebilir. Denklem 6.11'de varsayılan özellik varyasyonu ikame edilerek daha da basitleştirilebilir ve ardından aşağıdaki denklem elde edilir.

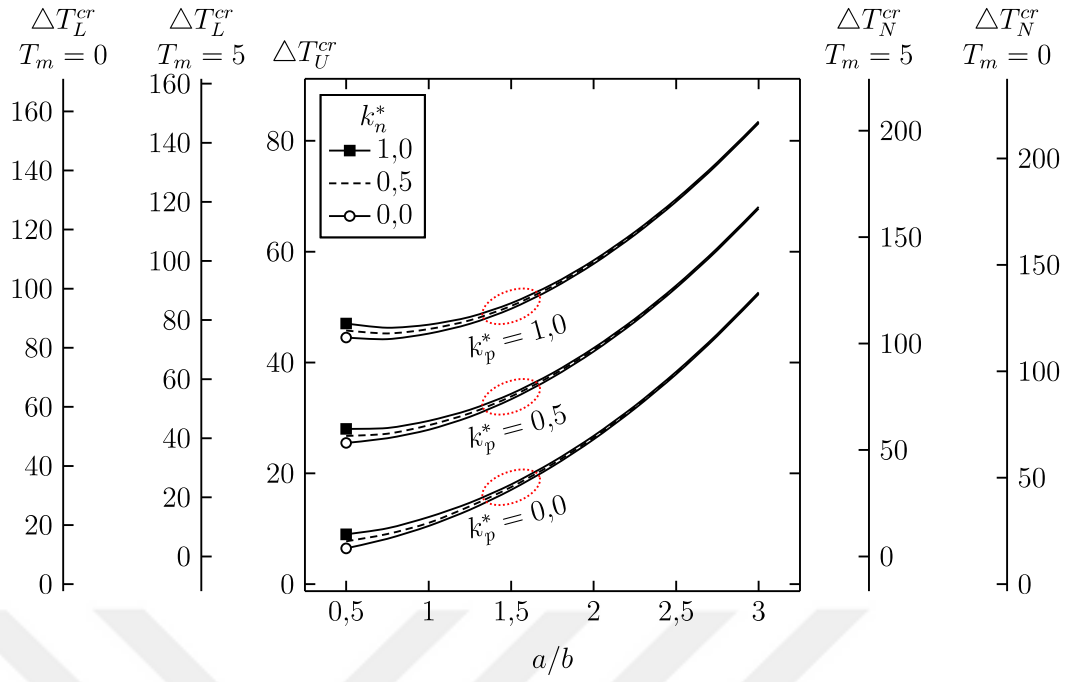
$$\Delta T_L^{cr} = 2 \left(\frac{\frac{\Omega_{cm} E_m + \Omega_m E_{cm}}{n+1} + \frac{\Omega_{cm} E_{cm}}{2n+1} + \Omega_m E_m}{\frac{2(\Omega_{cm} E_m + \Omega_m E_{cm})}{n+2} + \frac{\Omega_{cm} E_{cm}}{n+1} + \Omega_m E_m} \right) (\Delta T_U^{cr} - T_m) \quad (6.16)$$

Burada $n > \frac{-1}{2}$ olmalıdır. Bu sadeleştirme Denklem 6.14'ün doğrusal olmayan sıcaklık dağılımına uygulanamaz çünkü C_3 ve K^c integralleri için basit analitik çözümler bulunmamaktadır. Aynı doğrusal ilişkiler, başka herhangi bir malzeme değişim indeksi n kullanıldığında da fark edilir. Bunu göstermek için farklı malzeme değişim indeksine $n=2$ sahip Al/Al₂O₃ FDP için aynı analiz yapılmıştır. Şekil 6.28'deki sonuçlardan aynı grafiğin de yine farklı doğrusal ölçeklerde sonuçlandığı bulunmuştur.



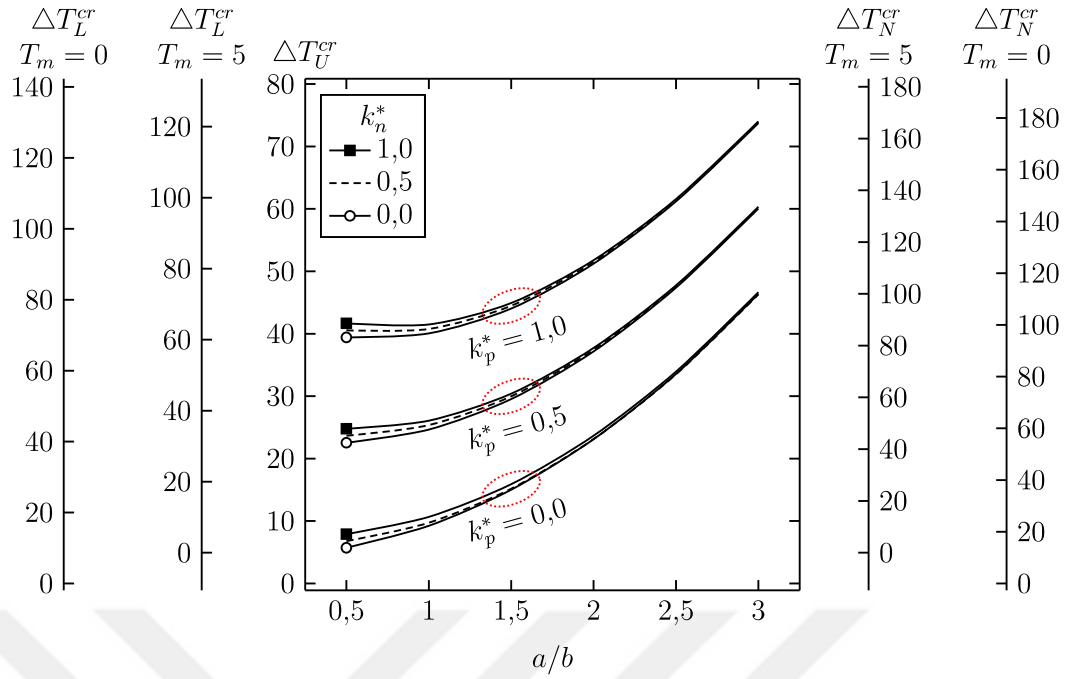
Şekil 6.28. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (k_n^*) ve boyutsuz kayma rijitliğine (k_p^*) göre dikdörtgen SSSS FDP'nin termal burkulma sıcaklığı ($n = 2$)

Dolayısıyla, Denklem 6.16 ve Denklem 6.14'de gösterilen doğrusal dönüşümler, malzeme değişim indeksinin n herhangi bir değeri için geçerlidir. Aynı analiz, $n = 1$ ve eğim açısı $\phi = 30^\circ$ olan ince $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ FDP için tekrar yapılmış ve Şekil 6.29'de gösterilmiştir. Şekil 6.29'deki sonuçlar, kritik sıcaklıkların, eğik FDP'ler için de doğrusal olarak ilişkili olduğunu göstermektedir.



Şekil 6.29. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (k_n^*) ve boyutsuz kayma rijitliğine (k_p^*) göre eğik SSSS FDP'nin termal burkulma sıcaklığı ($\phi = 30^\circ, n = 1$)

Denklem 6.16 ve Denklem 6.14'deki doğrusal dönüşümler, eğik ince FDP'ler için de geçerlidir. Ayrıca Şekil 6.27 ve Şekil 6.28'de farklı malzeme değişim indekslerine n sahip iki ince Al/Al₂O₃ FDP'nin kritik sıcaklıkları karşılaştırılırken, iki durumun kritik sıcaklıklarının da doğrusal olarak ilişkili olduğu kolaylıkla fark edilebilir. Bu, Şekil 6.29 ve Şekil 6.30'de gösterilen ince FDM eğik plaka durumu için de not edilir. Her bir FDP geometrisinin iki durumu arasındaki ilişki, D ve G_1 integraller ile çarpılarak denklem 5.53'den elde edilebilir.



Şekil 6.30. Boy en oranı (a/b), elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (k_n^*) ve boyutsuz kayma rijitliğine (k_p^*) göre eğik SSSS FDP'nin termal burkulma sıcaklığı ($\phi = 30^\circ, n = 2$)

Burada T_0 sıfır olarak kabul edildiğinden G_2 sadeleşir. Düzgün termal yük durumunda, belirli bir ince FDP'nin kritik homojen sıcaklıkları $\Delta T_{U_1}^{cr}$ arasındaki ilişki, aynı boyutlara ve sınır koşullarına sahip ancak aşağıdaki denklem kullanılarak farklı malzemelerdeki diğer herhangi bir plakanın kritik düzgün sıcaklık artışı $\Delta T_{U_2}^{cr}$ 'den elde edilebilir.

$$\frac{N_{uT_1}}{D_1} \Delta T_{U_1}^{cr} = \frac{N_{uT_2}}{D_2} \Delta T_{U_2}^{cr} \quad (6.17)$$

Burada sayısal alt simgeler 1 ve 2, iki farklı FDP'lerine ifade etmektedir. N_{uT} , birim sıcaklık artışından kaynaklanan sonuç kuvvettir, yani,

$$N_{uT} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\Omega(z)}{1-\mu} dz \quad (6.18)$$

Denklemler 6.16, 6.14 ve 6.17'deki doğrusal dönüşümleri, belirli bir FDP'nin yalnızca bir bilinen kritik sıcaklığı kullanarak, diğer tüm kritik sıcaklıklar, yalnızca o belirli FDP için değil, aynı zamanda aynı boyutlara ve sınır koşullarına sahip herhangi bir başka plaka için de elde edilebilir. Kritik sıcaklıkların Pasternak elastik temelin iki parametresiyle ilişkileri incelenmiştir. Dikdörtgen ince FDP'ler için, Şekil 6.27 ve Şekil 6.28, plakanın malzemesine bakılmaksızın, kayma sertliğinin k_p , kritik sıcaklıkları doğrusal olarak ölçeklendirdiğini göstermektedir. Kararlılık

denklemlerinden, farklı kayma sertliği k_p ile Pasternak elastik zemine dayanan aynı malzemeden iki ince plaka için kritik düzgün sıcaklıklar aşağıdaki denklemle ilişkilendirilir.

$$N_{uT_1} \Delta T_{U_1}^{cr} - k_{p_1} = N_{uT_2} \Delta T_{U_2}^{cr} - k_{p_2} \quad (6.19)$$

Eğik plakaların diğer durumu için, Şekil 6.29 ve Şekil 6.30, k_p 'nin artık kritik sıcaklıkları doğrusal olarak değişmediğini göstermektedir. Bu çalışma yalnızca doğrusal ilişkilere odaklandığından, bu durumda k_p 'nin etkisi daha fazla araştırılmamıştır. Pasternak elastik temelin normal sertliğinin k_n etkisi doğrusal bulunur ve a/b en-boy oranı arttıkça azalır. K_n , kritik sıcaklıklar üzerinde doğrusal bir etkiye sahip olmasına rağmen, bu ilişkiyi formüle etmenin basit bir yolu olmadığı bulunmuştur. Bahsedilmesi gereken son bir önemli doğrusal ilişki, boy kalınlık oranının çeşitli sıcaklık dağılımı altında kritik sıcaklık üzerindeki etkisidir. Tablo 6.14'ün gösterdiği gibi, $T_m = 0$ olduğu kabul edilerek kritik sıcaklıklar a/h ile doğrusal şekilde değişmektedir. $T_m = 0^\circ\text{C}$ 'de, aynı malzeme ve aynı sınır koşullarına ve aynı boy en oranına a/b , ancak farklı boy kalınlık oranına a/h sahip olan iki ince FDP'nin kritik sıcaklıkları arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

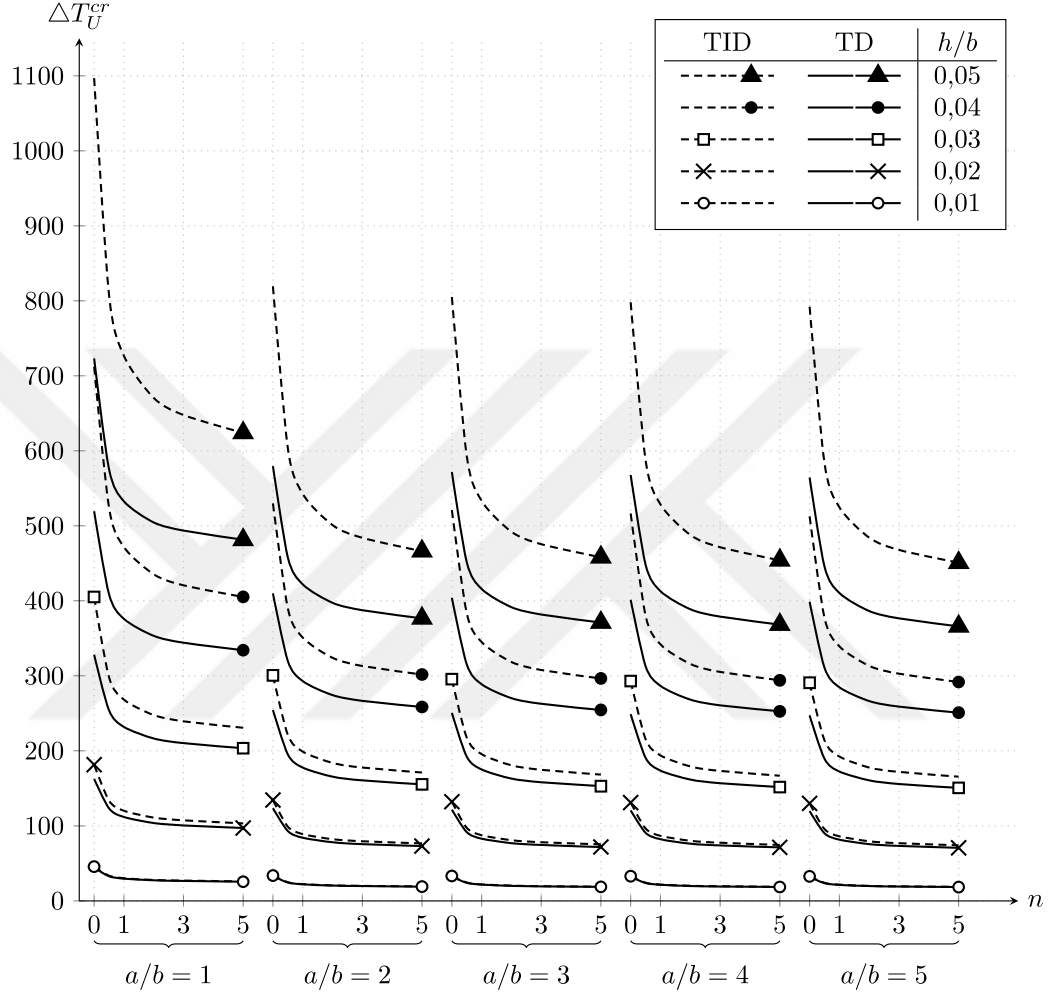
$$\Delta T_1^{cr}(a/h)_1 = \Delta T_2^{cr}(a/h)_2 \quad (6.20)$$

6.3.5. Sıcaklığa Bağlı Özelliklere Sahip Olan FDP'nin Burkulması

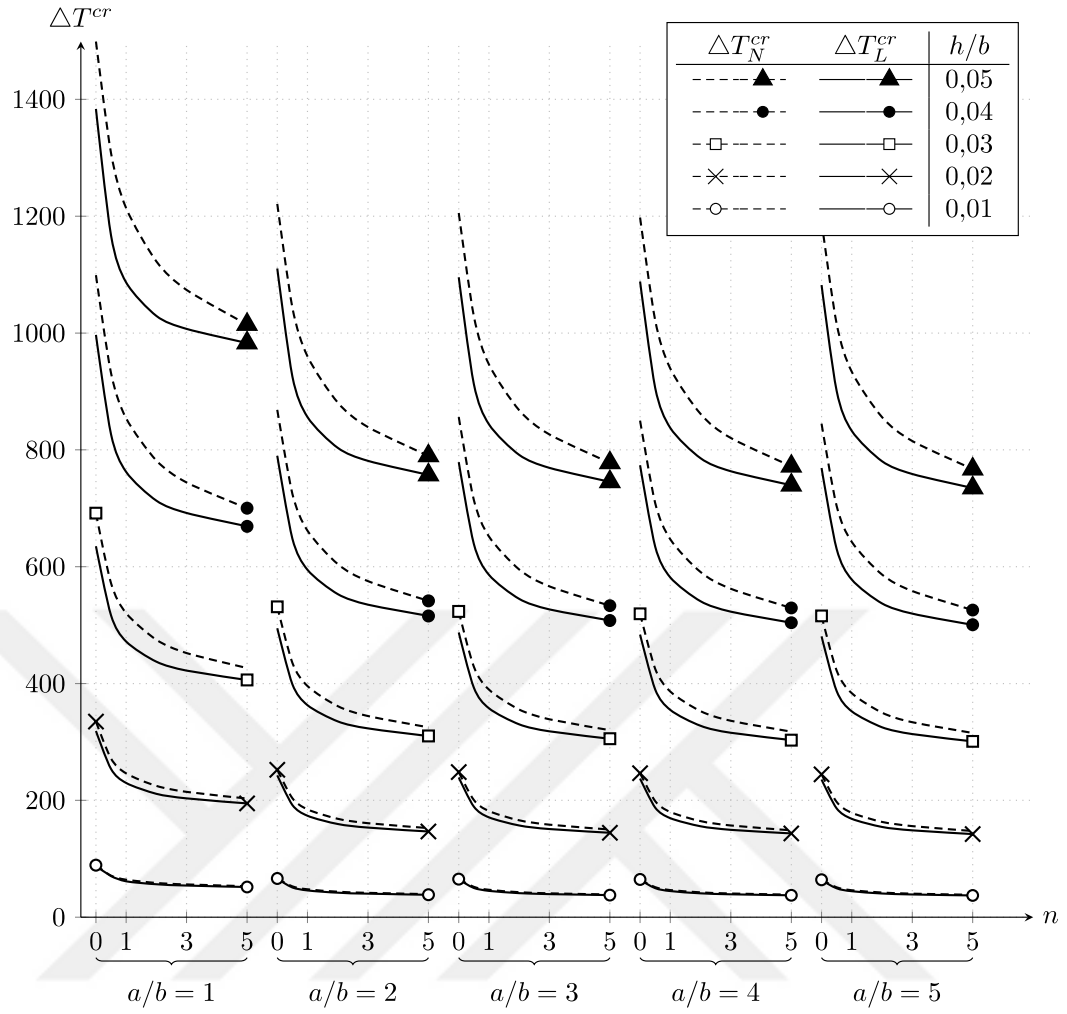
Şekil 6.40, Tablo 6.9'de gösterilen özelliklere sahip olan SUS304/Si₃N₄ FDP'nin sıcaklığa bağlı (TD) ve sıcaklığa bağlı olmayan (TID) iki halde ΔT_U^{cr} karşılaştırmayı göstermektedir. TID durumunda, özellikler 300K sıcaklıkta hesaplanmıştır. FDP tamamen ankastre mesnet ve düzgün sıcaklık artışı altında kabul edilmektedir. FDP'nin boyu $a = 1m$ olarak alınmıştır. Sonuçlar, boy-en oranı a/b ve kalınlık-en oranı h/b aralıkları için gösterilmektedir. FSDT plaka teorisi kullanılmaktadır. Sonuçlar, Şekil 5.6'de gösteren algoritma uygulanarak alınmıştır. Burada elde edilen sonuçlar, literatürdeki (Eslami, 2018) sonuçlarla mükemmel bir uyum içindedir. Şekil 6.40'de var olan sonuçlar, sıcaklığa bağlı olduğu düşünüldüğünde, kritik sıcaklığın düştüğünü göstermektedir. Bununla birlikte, ince plakalarda bu etkinin önemsiz olduğu bulunmuştur.

TD SUS304/Si₃N₄ ankastre mesnet FDP'nin kalınlığı boyunca doğrusal ve doğrusal olmayan sıcaklık dağılımları altında kritik sıcaklık farkı Şekil 6.32'de karşılaştırılmıştır. Referans sıcaklık 300K olarak alınmıştır. Doğrusal olmayan dağılım, ısı iletim denklemi çözülerek elde edilmiştir. Sonuçlar (Eslami, 2018)'teki

sonuçlarıyla mükemmel bir uyum içindedir. Şekil 6.32, FDP'nin kalınlığı artıkça ΔT_L^{cr} ve ΔT_N^{cr} arasındaki farkın artmasını göstermektedir. Şekil 6.31 ve Şekil 6.32 ile karşılaştırıldığında bir tarafta ΔT_U^{cr} diğer tarafta ΔT_L^{cr} ve ΔT_N^{cr} kritik sıcaklıklar arasındaki büyük farkı göstermektedir.



Şekil 6.31. Sıcaklığa bağlı (TD) ve sıcaklığa bağlı olmayan (TID) özelliklere sahip SUS304/Si₃N₄ CCCC FDP için ΔT_U^{cr}



Şekil 6.32. Sıcaklığa bağlı (TD) özelliklere sahip SUS304/Si₃N₄ CCCC FDP için ΔT_L^{cr} ve ΔT_N^{cr}

6.4. FDP'nin Termo-Mekanik Burkulması

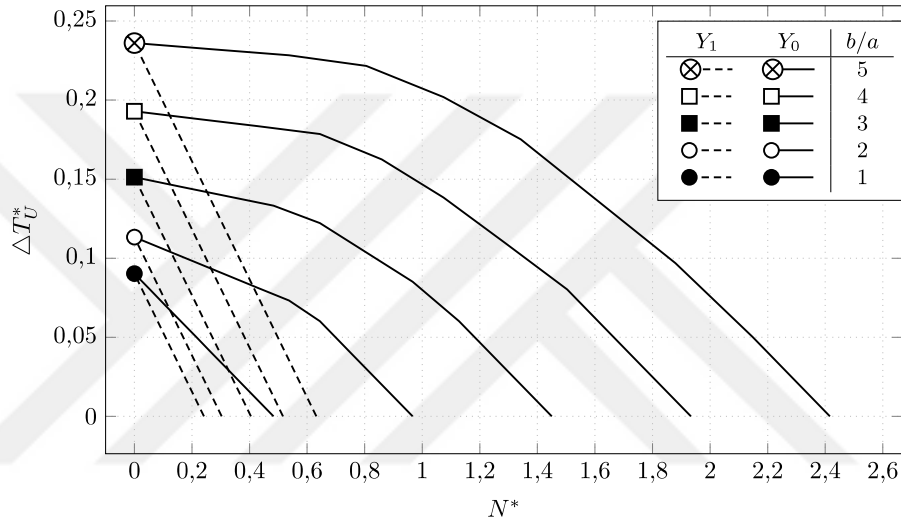
Bu çalışmada FDP'nin termo-mekanik burkulması ile FDP'nin aynı anda termal ve mekanik yükler altında burkulmasına ifade edilmiştir. Bu bölümdeki tüm analizlerde FSDT modeli uygulanmıştır. Bu bölümde, ilk olarak, EKM ile hesaplanmış FDP'nin termo-mekanik burkulmanın doğruluğu gösterilecektir. Bundan sonra, Pasternak zeminin ve sıcaklığa bağlılığının etkileri incelenecektir.

6.4.1. EKM Doğruluğu

Burada FDP'nin, düzlem içi mekanik yükler altında burkulmasına sıcaklığının düzgün artışının etkisi incelenmiştir. Bu alt bölümde dikkate alınan FDP'nin malzeme özellikleri sıcaklığa bağlı olmayıp Tablo 6.1'de gösterilmektedir. Bu bölümde boyutsuz termal ve mekanik burkulma değerleri aşağıdaki denklem ile verilmektedir.

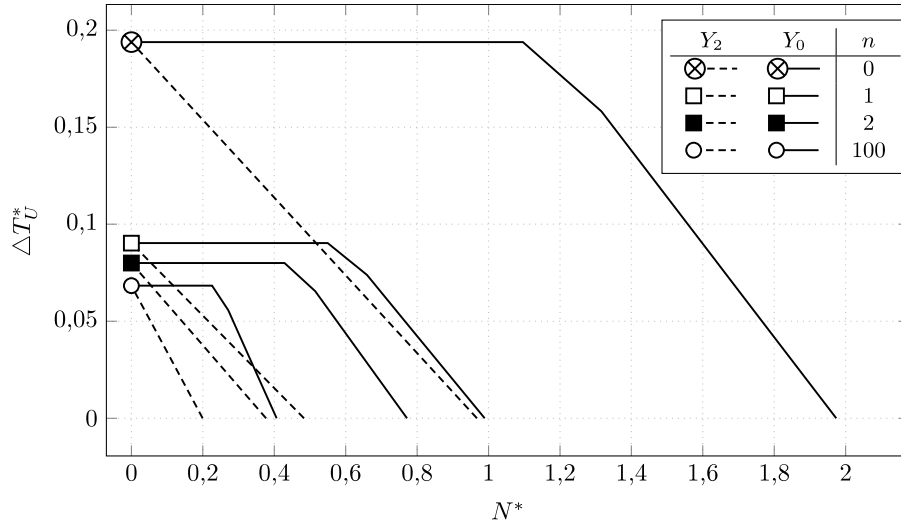
$$N^* = \frac{N^{cr} b}{E_m h^2} \quad \Delta T^* = \frac{\Omega_m \Delta T^{cr} b}{h} \quad (6.21)$$

$n = 1$, $h = 0.01m$ ve $a/h = 20$ 'ye sahip olan basit mesnet FDP'nin termo-mekanik burkulmasına en-boy oranının etkisi Şekil 6.33'de gösterilmektedir. Termal yük arttıkça mekanik burkulma noktası azalmaktadır. Çift eksenli basma yükler (Y_1) altında FDP'nin burkulma yükü düzgün sıcaklık artışı ΔT_U ile doğrusal şekilde etkilenmektedir. Şekil 6.33 ayrıca gösterir ki kare FDP hariç, FDP'nin Y-ekseni doğrultusunda tek eksenli basma yükler (Y_0) altında burkulma yükü doğrusal olmayan şekilde sıcaklık ile etkilenmektedir.



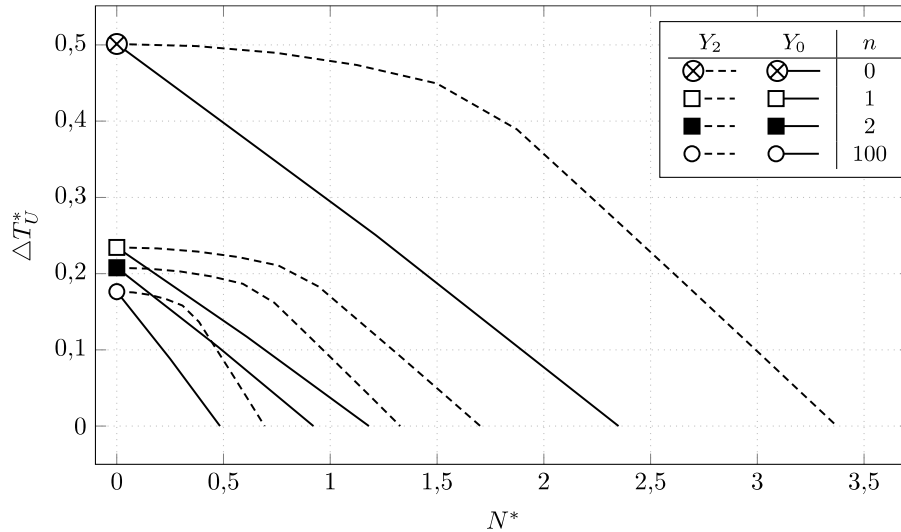
Şekil 6.33. SSSS FDP için en boy oranı (b/a)'ya göre ΔT_U^* ile Y_0 ve Y_1 yükleri altında termo-mekanik burkulma eğrisi

$a = b$, $h = 0.01m$ ve $a/h = 20$ 'ye sahip olan basit mesnet FDP'nin termo-mekanik burkulmasına malzeme değişim indeksi n etkisi Şekil 6.34'de gösterilmektedir. Burada n , tek eksenli basma yükler (Y_0) altında kare FDP'nin burkulma yükü ΔT_U ile doğrusal şekilde etkilendiğini değiştirmediği görülmektedir. Başka bir yükleme türü olan, bir eksenle basma diğerinde çekme yükler (Y_2) altında kare FDP için belirli bir noktaya kadar ΔT_U artarken burkulma yükü doğrusal şekilde azalmaktadır, bu noktadan sonra burkulma sıcaklığı yük değeri ile değişmemektedir. Bu nokta n ile değişmektedir.



Şekil 6.34. SSSS kare FDP için malzemenin değişim indeksi (n)'ye göre, ΔT_U^* ile Y_0 ve Y_2 yükleri altında termo-mekanik burkulma eğrisi

Şekil 6.35, CCCC aynı diğer özelliklere sahip olan FDP'nin burkulma yükü ΔT_U ile etkilenmesi göstermektedir. Y_0 altında FDP'nin burkulma yükü ΔT_U ile doğrusal şekilde azalmaktadır. Ankastre mesnetli FDP Y_2 altında bir arada ΔT_U artıkça burkulma yükü doğrusal şekilde azalmaktadır. Bu aradan sonra yük değeri burkulma sıcaklığına etkisi doğrusal olmayan şekilde azalmaktadır. Şekil 6.33, Şekil 6.34 ve Şekil 6.35'de gösterilen EKM ile elde edilen sonuçlar (Yu vd, 2017)'deki sonuçlar ile mükemmel bir uyum içindedir.



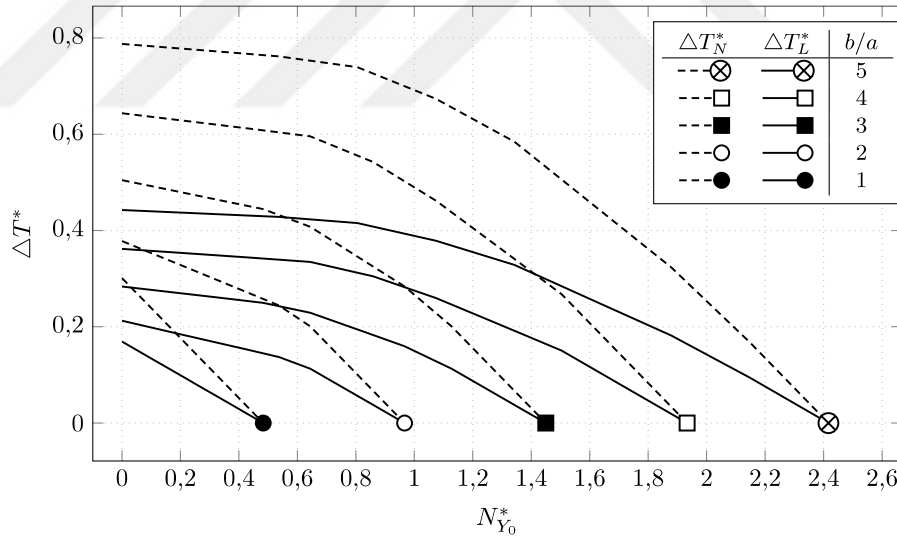
Şekil 6.35. CCCC kare FDP için malzemenin değişim indeksi (n)'ye göre ΔT_U^* ile Y_0 ve Y_1 yükleri altında termo-mekanik burkulma eğrisi

6.4.2. Sıcaklık Dağılımının Etkisi

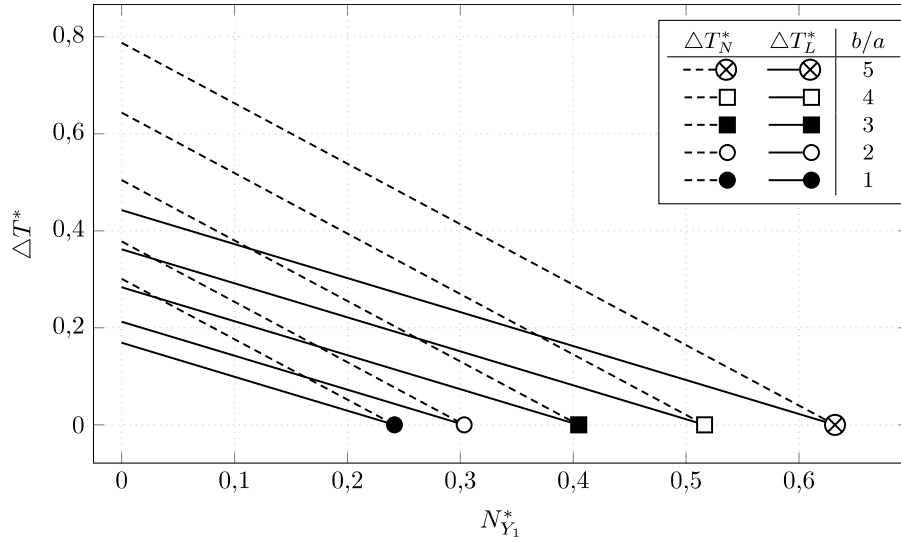
Bu bölümde, FDP'nin kalınlığı boyunca doğrusal ve doğrusal olmayan sıcaklık dağılımı etkisinde olduğu kabul edilerek, yukarıda yapılan analizler tekrar yapıp, sonuçlar karşılaştırılacaktır. FDP'nin metal yüzeyi referans sıcaklıkta olduğu kabul edilmiş ve referans sıcaklık $T_0 = 300\text{ K}$ alınmıştır. FDP'nin kalınlığı boyunca sıcaklık dağılımı Denklem'deki ısı iletim problemi çözülerek hesaplanmıştır.

Şekil 6.36 ve Şekil 6.37 doğrusal sıcaklık dağılımı ΔT_L ve doğrusal olmayan sıcaklık dağılımı ΔT_N altında, sırasıyla Y_0 ve Y_1 burkulma yükleri ile karşılaştırılmıştır. Şekil 6.33, Şekil 6.36 ve Şekil 6.37 gösterir ki, termo-mekanik burkulma FDP'nin en boy oranı ile aynı şekilde etkilenmektedir.

FDP'nin kalınlığı boyunca sıcaklık dağılımının doğrusal olduğu varsayılırsa, burkulma yükleri düşük alınmaktadır. Şekil 6.36 ve Şekil 6.37, doğrusal ve doğrusal olmayan sıcaklık dağılımları altında burkulma yükleri arasındaki farkın sıcaklık yükseldikçe arttığını göstermektedir.

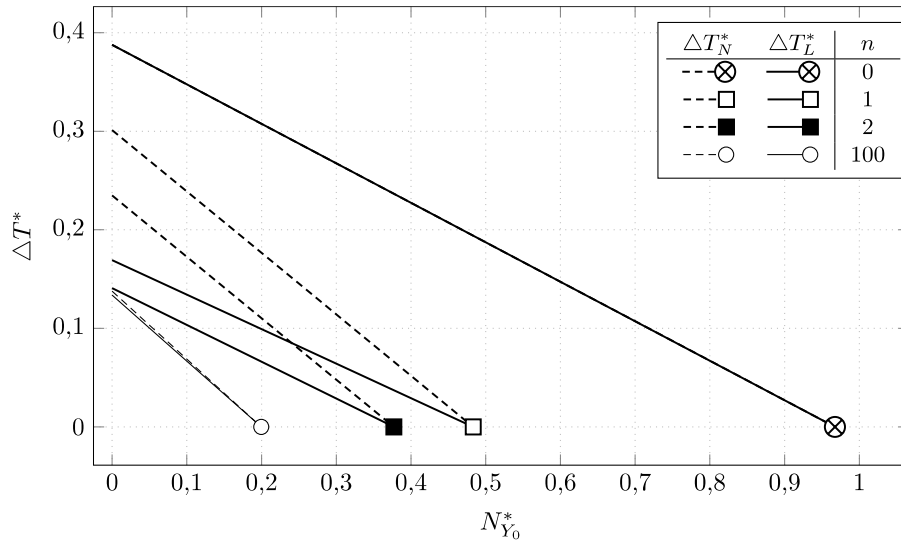


Şekil 6.36. SSSS FDP için en boy oranı (b/a)'ya göre, $N_{Y_0}^*$ ile ΔT_L^* ve ΔT_N^* termo -mekanik burkulma eğrisi

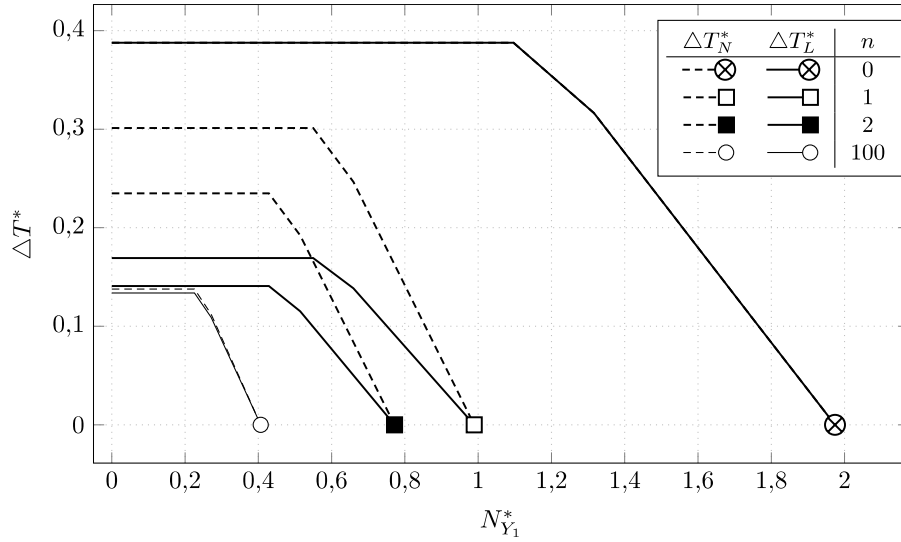


Şekil 6.37. SSSS FDP için en boy oranı (b/a)'ya göre, N_{Y1}^* ile ΔT_L^* ve ΔT_N^* termo -mekanik burkulma eğrisi

Şekil 6.38 ve Şekil 6.39'de Y_0 ve Y_2 yüklere maruz kalan SSSS FDP için ΔT_L^* ve ΔT_N^* sırasıyla ile karşılaştırılmıştır. Şekil 6.38 ve Şekil 6.39, tek malzemeli plaka durum için, yani $n = 0$ ya da $n \rightarrow \infty$, ΔT_L^* ve ΔT_N^* çakıştığını göstermektedir. Diğer n değerleri için, önceki Şekil 6.36 ve Şekil 6.37'de aynı görüldüğü gibi, ΔT_L altındaki burkulma yükü ΔT_N kıyasla düşük alındığını göstermektedir.

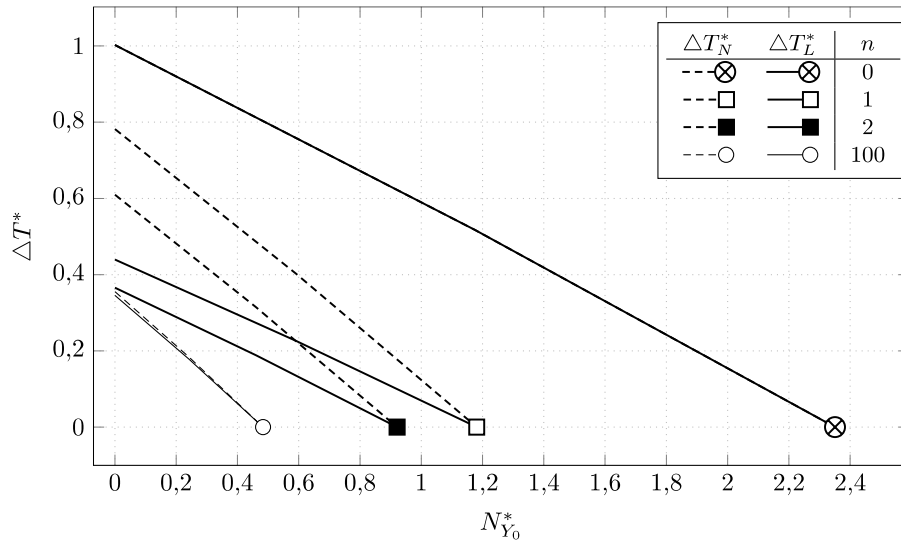


Şekil 6.38. SSSS FDP için malzemenin değişim indeksi (n)'ye göre, N_{Y0}^* ile ΔT_L^* ve ΔT_N^* termo -mekanik burkulma eğrisi

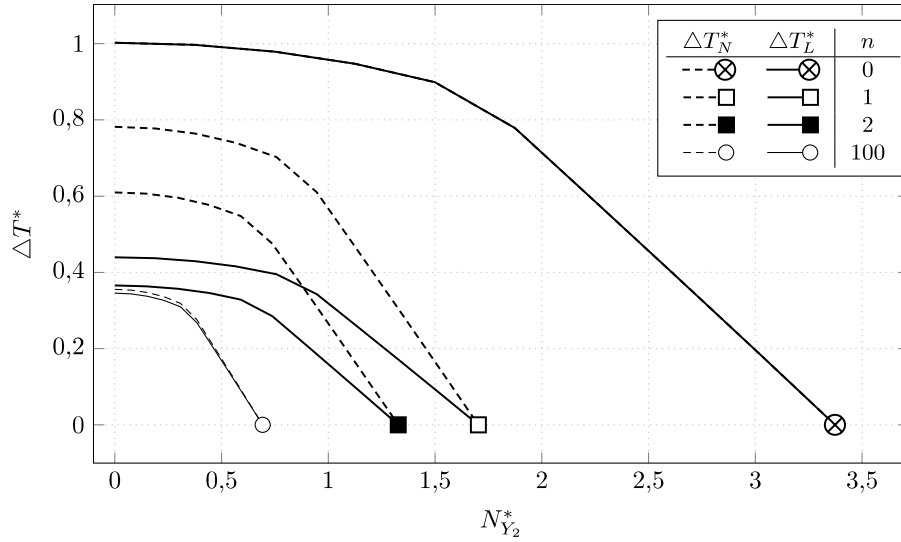


Şekil 6.39. SSSS FDP için malzemenin değişim indeksi (n)'ye göre, $N_{Y_2}^*$ ile ΔT_L^* ve ΔT_N^* termo -mekanik burkulma eğrisi

Şekil 6.34'de ΔT_U ile Şekil 6.38 ve Şekil 6.39'de ΔT_L ve ΔT_N altında burkulma yüklerini karşılaştırsak, mekanik yükün belli bir aralıkta kritik sıcaklık farkını etkilemediği noktanın, üç sıcaklık dağılımı için aynı olduğu görülmüştür. Şekil 6.40 ve Şekil 6.41'da CCCC kare FDP için, ΔT_L ve ΔT_N altında sırasıyla Y_0 ve Y_2 yükleri ile karşılaştırılmıştır. Şekil 6.40 ve Şekil 6.41, önceki Şekil 6.35'de gösterilmiş SSSS durumundaki gözlemlerin diğer sınır koşulları için de geçerli olduğunu göstermektedir.



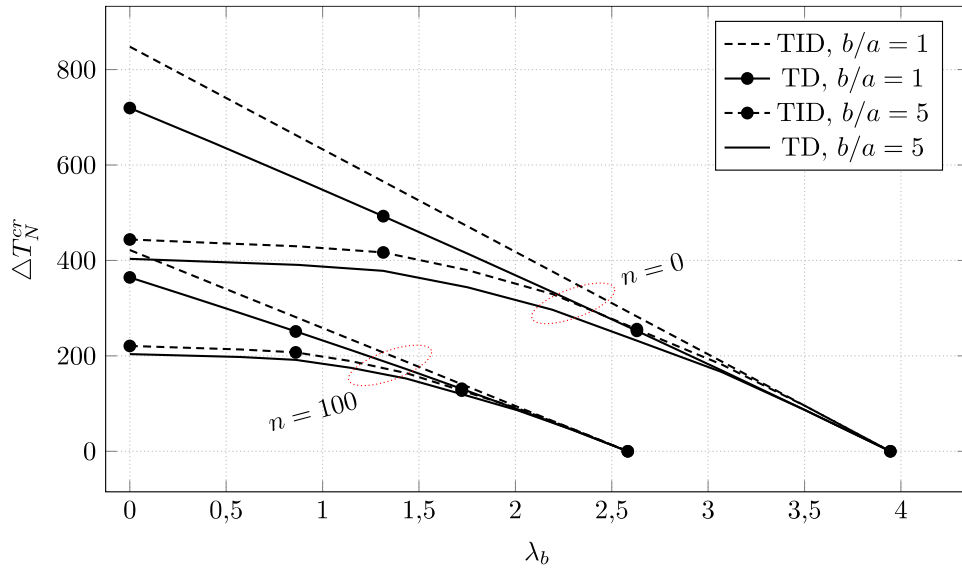
Şekil 6.40. CCCC FDP için malzemenin değişim indeksi (n)'ye göre, $N_{Y_0}^*$ ile ΔT_L^* ve ΔT_N^* termo -mekanik burkulma eğrisi



Şekil 6.41. SSSS FDP için malzemenin değişim indeksi (n)'ye göre, N_{Y2}^* ile ΔT_L^* ve ΔT_N^* termo -mekanik burkulma eğrisi

6.4.3. Malzeme Sıcaklığa Bağlı Özelliklerinin Etkisi

FDP'nin sıcaklığa özelliklerinin bağlılığının termo-mekanik burkulmasına etkisini araştırmak için basit bir durum araştırılmıştır. Tek eksenli basma ve doğrusal olmayan sıcaklık dağılımı altında FDP'nin termo-mekanik burkulma eğrileri Şekil 6.42'de gösterilmektedir.



Şekil 6.42. Sıcaklığa bağlılığın FDP'nin termo-mekanik burkulması üzerine etkisi

Şekil 6.31'de gösterilen termal burkulma sıcaklıklarını etkilediği gibi, FDP'nin malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlılığı dikkate alındığında, plakanın termal

burkulma kapasitesini düşürdüğü görülmüştür. Şekil 6.42’de gösterilen λ_b , boyutsuz basma burkulma değeridir. λ_b , aşağıda verilen denklem ile hesaplanmaktadır.

$$\lambda_b = \frac{N_b^{cr} a^2}{\pi^2 D_{ref}} \quad (6.22)$$

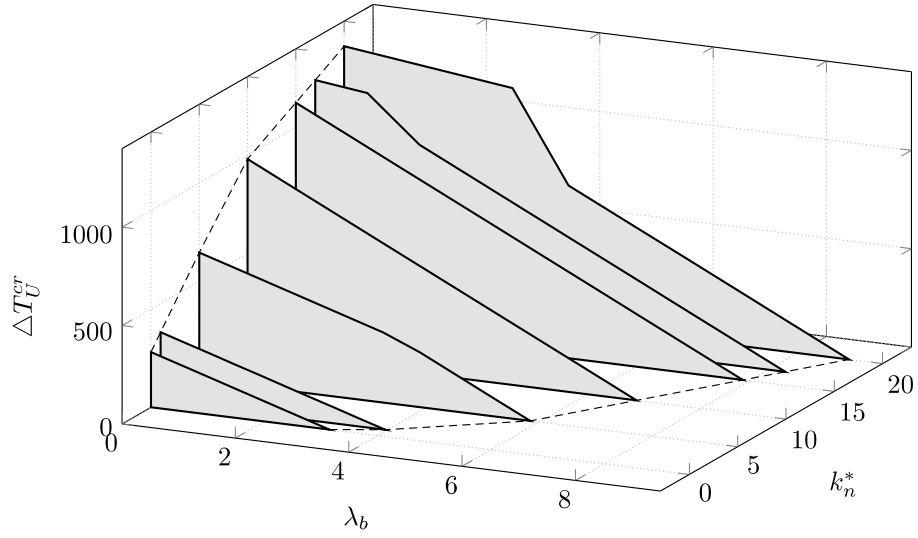
Burada N_b^{cr} , kritik basma yüküdür. D_{ref} , FDP’nin seramik malzemenin referans sıcaklıktaki eğilme sertliğidir (Eslami, 2018). D_{ref} , Denklem 6.23 kullanılarak hesaplanmaktadır. Dikkate alınan FDP’nin boyu-kalınlığı oranı $a/h = 20$. Malzeme özellikleri Tablo 6.9’da gösterildiği gibidir ve malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olmadığı varsayıp referans sıcaklıkta hesaplanmıştır.

$$D_{ref} = \frac{h^3}{12(1 - \mu^2)} (E_c)_{300K} \quad (6.23)$$

6.4.4. Pasternak Elastik Zeminin Etkisi

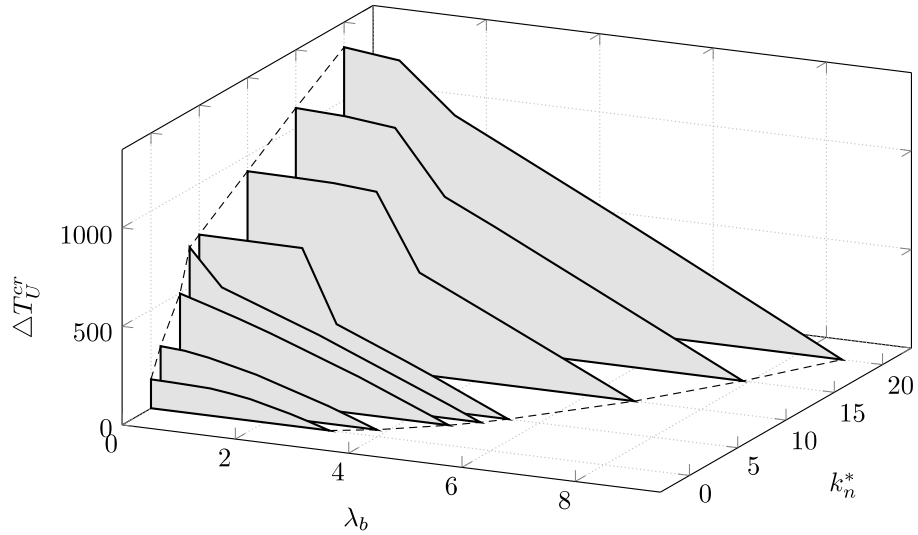
Pasternak elastik zeminin FDP’nin termo-mekanik burkulması üzerindeki etkisi bu bölümde incelenmiştir. Bu bölümdeki tüm analizlerde kullanılan malzeme özellikleri, Tablo 6.9’da gösterildiği gibidir ve malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olmadığı kabul edilip referans sıcaklıkta hesaplanmıştır. İlk olarak Pasternak elastik zeminin normal sertliğinin etkisi incelenmiştir.

Bu ilk analizde kayma sertliği ihmal edilmiştir. Dikkate alınan FDP, tek eksenli basmaya ve düzgün sıcaklık artışına maruz olup, FDP’nin, malzemesinin değişim indeksi $n = 1$, boy kalınlık oranı $a/h = 20$ ve en boy oranı $b/a = 1$ ’dir. Şekil 6.43, boyutsuz normal sertliğin artırılmasının hem termal hem de mekanik burkulma sınırlarını artırdığını göstermektedir. Sonuçlardan elde edilen bir başka gözlem ise, k_n^* arttıkça termo-mekanik burkulma eğrisinin şeklinin değişmesidir. Şekil 6.43, belirli bir k_n^* değerindeki burkulmanın, mekanik yükün belirli bir aralığı için yalnızca termal yüke irtibatlı olduğunu göstermektedir.



Şekil 6.43. Elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (k_n^*)'nin kare FDP'nin termo-mekanik burkulması üzerine etkisi

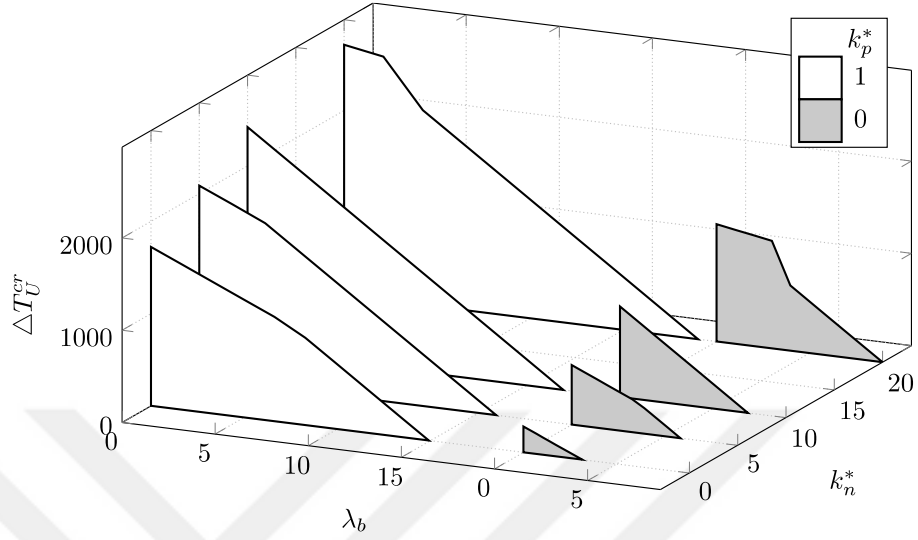
k_n^* 'nin diğer en-boy oranı ile FDP'nin termo-mekanik burkulması üzerindeki etkisini araştırmak için, $b/a = 5$ 'ye sahip bir plaka üzerinde aynı analiz yapılmıştır. Şekil 6.44'de gösterdiği gibi bu durumda k_n^* 'nin yüksek değerlerinde burkulmanın yalnızca termal yüke bağlı olduğu görülmektedir. Ancak bu davranış k_n^* 'nin daha fazla artmasıyla azalmaktadır.



Şekil 6.44. Elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (k_n^*)'nin dikdörtgen FDP'nin termo - mekanik burkulması üzerine etkisi

Son olarak Pasternak elastik zeminin kayma sertliğinin k_p^* FDP'nin termo-mekanik burkulması üzerindeki etkisi araştırılmaktadır. Şekil 6.45, k_p^* 'nin plakanın

burkulma sınırlarını büyük ölçüde arttırdığını göstermektedir. Şekil 6.27 - Şekil 6.30 arasındaki şekillerde gösterilen ince plakaların termal burkulması durumunda aynı k_p^* ve k_n^* etki şeklin daha önceki bölümlerinde gözlemlenmiştir.



Şekil 6.45. Elastik zeminin boyutsuz normal rijitliği (k_n^*)'nin ve boyutsuz kayma rijitliği (k_p^*)'nin kare FDP'nin termo-mekanik burkulması üzerine etkisi

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu doktora tez çalışmasında, termo-mekanik yükler altında çalışan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plakaların burkulma davranışları incelenerek, plakaların termal ortamlardaki burkulma dayanımlarının iyileştirilmesi ve kullanılabilirliğinin artırılması için bir yöntem geliştirilmesi hedeflenmiştir. Bu kapsamda, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerden yapılmış plakaların termo-mekanik burkulma analizi için Genişletilmiş Kantorovich Metodu (EKM) adlı yarı analitik bir yöntem bu doktora çalışmasında ilk kez uygulanmış ve literatüre katkı sağlayacak önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar ve öneriler aşağıda özetlenmiştir.

Fonksiyonel derecelendirilmiş plakaların özdeğer burkulma probleminde, EKM'nin birçok yeni uygulaması bu tez çalışması ile literatüre kazandırılmıştır. Eğik plakaların burkulması, FDP'nin termal ve termo-mekanik burkulması bu tezde ilk kez araştırılmıştır. Burkulma denklemlerinin yeni bir türevi sunulmuştur. Burkulma denklemleri, varyasyonel hesap ve Trefftz istikrarlılık ölçütleri kullanılarak çeşitli plaka teorilerine göre türetilmiştir. Bu çalışmada sunulan çeşitli sayısal çalışmalarda ince ve orta kalınlıktaki plakalar incelenmiştir.

Eğik plakaların burkulma probleminin EKM kullanılarak başarıyla çözülmesi bu çalışmada ilk kez gerçekleştirilmiş ve EKM'nin doğruluğu ve yakınsaması araştırılmıştır. Kararlılık denklemleri ve sınır koşulları terimleri, varyasyonel hesaplama kullanılarak minimum toplam potansiyel enerji ilkesinden türetilmiş ve eğik bir koordinat sisteminde ifade edilmiştir. Eğik plakanın ince olduğu varsayılmış ve temel formülasyon olarak klasik plaka teorisi CPT kullanılmıştır. Genelleştirilmiş özdeğer problemini çözmek için "Chebfun" sayısal hesaplama paketi kullanılmıştır. Plakanın Pasternak elastik zemin üzerinde durduğu ve düzlem içi yükleme altında olduğu kabul edilmiştir. Tek eksenli ve çift eksenli düzgün basınç ve kayma yükleri göz önünde bulundurularak, çeşitli sınır koşulları uygulanmıştır.

Bu çalışmada kullanılan EKM'nin yakınsamaları, rastgele ilk iz fonksiyonu ile başlarken bile incelenmiş ve hızlı olduğu bulunmuştur. Yöntemin doğruluğu, elde edilen sonuçların, ANSYS kullanılarak sonlu elemanlar çözümü sonuçları ve literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmasıyla değerlendirilmiştir.

Tek terimli EKM'nin, elastik bir zemin üzerine oturan düzlem içi düzgün tek eksenli ve çift eksenli basınç altında ince dikdörtgen plakaların mekanik burkulma

analizinde doğru olduğu bulunmuş, ancak eğik plakaların mekanik burkulma analizinde güvenilir olmadığı görülmüştür. Ayrıca tek terimli EKM'nin, kayma yükü altındaki plakaların burkulma analizi için uygun olmadığı, bu nedenle bu analiz için çok terimli EKM'nin uygulanmasının daha uygun olacağı gözlemlenmiştir. Pasternak elastik zeminine dayanan farklı yükleme tipleri altında çeşitli sınır koşullarına sahip ince eğik plakaların burkulma analizinde çok terimli EKM'nin kullanılmasının doğru olduğu sonucuna varılmıştır.

Daha fazla terim kullanıldıkça sonuçların daha iyi olduğu görülmüştür. Farklı durumlardaki problemler için, aynı doğruluk seviyesine ulaşmak amacıyla farklı terim sayılarının gerektiği önem arz etmektedir. İnce eğik plakaların burkulma analizinde EKM'nin kullanımı basit ve doğru bulunmuş, fakat terim sayısı artıkça hesaplama zamanının üstel şekilde arttığı görülmüştür. Ayrıca eğim açısının, en boy oranının ve elastik zemin sertliğinin, burkulma yükü üzerindeki etkileri araştırılmış ve sonuçlar değerlendirilmiştir.

Termal burkulma için ince FDP, çeşitli sıcaklık dağılımları altında kritik sıcaklıkları ile Pasternak elastik temele dayanan kalınlık arasındaki ilişkiler, hem dikdörtgen hem de eğik plakalar incelenmiştir. Formülasyonlar, fiziksel tarafsız düzlemi referans düzlem olarak alan *von Karman* doğrusalsızlığı dikkate alınarak klasik plaka teorisine (CPT) göre türetilmiştir. Çok terimli genişletilmiş Kantorovich yöntemini kullanarak kararlılık denklemleri ve sınır koşulları terimleri, eğik bir koordinat sisteminde ifade edilen varyasyonel hesap kullanılarak minimum toplam potansiyel enerjinin Trefftz ölçütüne göre türetilmiştir. Doğrusal olmayan sıcaklık dağılımı, ısı iletim problemi çözülerek elde edilmiştir.

Elde edilen formülasyonlar literatürde bulunan analitik ve sayısal çözümlerle ve bu çalışmadaki ANSYS yazılımı kullanılarak elde edilen sonlu eleman çözümleriyle karşılaştırılarak doğrulanmıştır. Plakanın kalınlığı boyunca düzgün, doğrusal ve doğrusal olmayan sıcaklık dağılımlarının tümü doğrusal olarak ilişkili bulunmuş ve bu doğrusal ilişkiler bu çalışmada türetilmiştir. Çeşitli sıcaklık dağılımları altındaki kritik sıcaklıklar arasındaki doğrusal ilişkileri göstermek için yeni çok ölçekli grafikler kullanılmıştır.

Pasternak zeminin kayma sertliğinin, ince dikdörtgen FDP'nin kritik sıcaklığını doğrusal olarak arttırdığını, ancak eğik plakalarda bu durumun oluşmadığı görülmüştür. Pasternak temelinin normal sertliğinin, hem ince dikdörtgen hem de eğik FDP'lerinin kritik sıcaklığını doğrusal olarak arttırdığı bulunmuş, ancak en boy oranı

arttıkça bu durumun etkisi azalmıştır. Ayrıca boy kalınlık oranının ince FDP'nin kritik sıcaklıklarını doğrusal olarak azalttığı bulunmuştur. Belirli bir sıcaklık dağılımı altında ince bir FDP için bir kritik sıcaklığın bilinmesiyle, yalnızca bu belirli plaka için değil, aynı düzlem içi boyutlara ve sınıra sahip farklı malzemelerden yapılmış diğer tüm ince FDP'ler için de tüm kritik sıcaklıklar olduğu sonucuna varılmıştır. Bu çalışma ile türetilen doğrusal ilişkilerin öne çıkan bir faydası da, optimizasyon çalışmalarında çok önemli bir parametre olan işlemlerin hızlı bir şekilde gerçekleştirilmesidir.

Çalışmanın son bölümünde ise, termo-mekanik burkulma durumu için orta kalın FDP'nin birleşik termal ve mekanik yükler altında burkulması incelenmiştir. Bu kapsamda, elastik zeminin sertliğinin, sıcaklık dağılımının ve malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlılığın FDP'nin burkulmasına etkileri incelenmiştir. Sıcaklığın FDP'nin kalınlığı boyunca doğrusal olarak dağıldığını kabul edilerek burkulma kapasitesini düşürdüğü bulunmuştur. Doğrusal olmayan sıcaklık dağılımı, ısı iletim problemi çözülerek hesaplanmıştır. Sıcaklığa bağlı olmayan malzeme özelliklere sahip homojen plakalar durumunda, doğrusal ve doğrusal olmayan sıcaklık dağılımlarının eşit olduğu görülmüştür. FDP'nin malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlılığının termo-mekanik burkulma üzerindeki etkisinin, termal burkulma üzerindeki etkileriyle aynı olduğu bulunmuştur. Elastik zeminin sertliğinin termo-mekanik burkulma eğrisine etkisi incelenmiş ve FDP'nin burkulma kapasitesinin, elastik zeminin sertliğindeki artışla doğru orantılı olduğu görülmüştür. Bu çalışma ile FDP'nin özdeğer burkulma probleminde EKM'nin kullanımının basit ve etkili olduğu sonucuna varılmıştır.

Bu çalışmanın, gelecekte EKM'nun burkulma sonrası problemlere uygulanması yönündeki çalışmalara zemin teşkil edeceği öngörülmektedir. Ayrıca bu çalışmada türetilen burkulma denklemlerinin, plastisite, karmaşık geometriler ve plaka problemlerinin çeşitli konfigürasyonlarına uygulanabilirliğinin araştırılması şeklindeki çalışmalara da bir temel teşkil edeceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Abolghasemi S, Shaterzadeh A R & Rezaei R (2014). Thermo-mechanical buckling analysis of functionally graded plates with an elliptic cutout [Article]. *Aerospace Science and Technology*, 39: 250-259. doi:10.1016/j.ast.2014.10.004
- Abrate S & Di Sciuva M (2017). Equivalent single layer theories for composite and sandwich structures: A review. *Composite Structures*, 179: 482-494. doi:10.1016/j.compstruct.2017.07.090
- Aghazadeh R, Dag S & Cigeroglu E (2018). Thermal effect on bending, buckling and free vibration of functionally graded rectangular micro-plates possessing a variable length scale parameter. *Microsystem Technologies*, 24(8): 3549-3572
- Akbaş Ş D (2017). Stability of a non-homogenous porous plate by using generalized differential quadrature method. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 9: 147-155
- Akdoğan E N (2019). Thermal stress problems in FGMs. Master of Science, Middle East Technical University Mechanical Engineering, 141
- Akhavan H, Hashemi S H, Taher H R D, Alibeigloo A & Vahabi S (2009). Exact solutions for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic foundation. Part I: Buckling analysis. *Computational Materials Science*, 44(3): 968-978
- Amoushahi H & Lajevardi M M (2018). Buckling of functionally graded plates under thermal, axial, and shear in-plane loading using complex finite strip formulation [Article]. *Journal of Thermal Stresses*, 41(2): 182-203. doi:10.1080/01495739.2017.1389326
- Anonim (2019). *Why Do Airplanes Have Swept Wings?* Retrieved from <https://monroe aerospace.com/blog/why-do-airplanes-have-swept-wings/>
- ANSYS® (Buckling Analysis). *Release 17.1, Help System, Mechanical APDL, Structural Analysis Guide, Buckling Analysis*. ANSYS, Inc.
- ANSYS® (Command Reference). *ANSYS® Release 17.1, Help System, Mechanical APDL*. ANSYS, Inc.
- ANSYS® (Element Library). *ANSYS® Release 17.1, Help System, Mechanical APDL, Element Reference, Element Library*. ANSYS, Inc.
- ANSYS® (Introducing APDL). *ANSYS® Release 17.1, Help System, Mechanical APDL, ANSYS Parametric Design Language Guide*. ANSYS, Inc.
- Arsalan K (2014). Fonksiyonel kademelendirilmiş plakalar ile takviyelendirilmiş bal peteği sandviç yapıların balistik performansının incelenmesi. Yüksek Lisans, Erciyes Üniversitesi Makine Mühendisliği, 137 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (377188).
- Aydın M (2009). Düşük hızlı çarpma yükleri altında fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plakaların mekanik davranışlarının incelenmesi Yüksek Lisans, Erciyes Üniversitesi Makine Mühendisliği, 91 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (246043).
- Aydın M (2014). Fonksiyonel kademelendirilmiş sandviç plakaların balistik davranışı. Doktora, Erciyes Üniversitesi Makine Mühendisliği 129 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (360601).
- Aydogdu M (2008). Conditions for functionally graded plates to remain flat under in-plane loads by classical plate theory. *Composite Structures*, 82(1): 155-157. doi:10.1016/j.compstruct.2006.10.004

- Bağcı M D (2009). Düzlem içi ısıl yüke maruz tek yönlü işlevsel kademelendirilmiş plaka ve disk bağlantılarının ısıl gerilme analizi. Yüksek Lisans, Erciyes Üniversitesi Makine Mühendisliği, 146 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (246046).
- Bakar W Z, Basri S N, Jamaludin S N & Sajjad A (2018). Functionally graded materials: an overview of dental applications. *World Journal of Dentistry*, 9(2): 137-144
- Bakora A & Tounsi A (2015). Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations [Article]. *Structural Engineering and Mechanics*, 56(1): 85-106. doi:10.12989/sem.2015.56.1.085
- Banerjee B, Chen J & Kathirgamanathan A (2011). Comparison of ANSYS elements SHELL181 and SOLSH190. *Res. Rep., Univ. of Auckland, New Zealand*
- Bateni M, Kiani Y & Eslami M R (2013). A comprehensive study on stability of FGM plates [Article]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 75: 134-144. doi:10.1016/j.ijmecsci.2013.05.014
- Bhaskar K & Varadan T (2014). *Plates: theories and applications*. John Wiley & Sons,
- Birman V, Keil T & Hosder S (2013). *Structural Interfaces and Attachments in Biology*. Springer New York, 19-41.
- Bischoff M (2008). Modeling of shells with three-dimensional finite elements. Proceedings of the 6th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures. May, 28-31.
- Boyd J P (2001). *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Courier Corporation,
- Can N, Kurgan N & Hassan A H A (2020). Buckling Analysis of Functionally Graded Plates Using Finite Element Analysis. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 12(1): 43-56. doi:10.24107/ijeas.727320
- Carrera E, Fazzolari F A & Cinefra M (2016). *Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications*. Academic Press,
- Chakraverty S & Pradhan K K (2016). *Vibration of functionally graded beams and plates*. Academic Press,
- Chen P C T (1972). Buckling analysis of a rectangular plate by the Kantorovich method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 14(1): 15-24. doi:10.1016/0020-7403(72)90003-3
- Chikh A, Bakora A, Heireche H, Houari M S A, Tounsi A & Adda Bedia E A (2016). Thermo-mechanical postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on Pasternak elastic foundations using hyperbolic shear deformation theory [Article]. *Structural Engineering and Mechanics*, 57(4): 617-639. doi:10.12989/sem.2016.57.4.617
- Cirakoglu M, Bhaduri S & Bhaduri S (2002a). Combustion synthesis processing of functionally graded materials in the Ti-B binary system. *Journal of alloys and compounds*, 347(1-2): 259-265
- Cirakoglu M, Bhaduri S & Bhaduri S (2002b). Processing and characterization of Ti-B-based functionally graded materials produced by microwave-activated combustion synthesis. *Journal of Materials Research*, 17(11): 2823-2830
- Civalek Ö, Korkmaz K A & Altonsoy F B (2019). Polinomal Diferansiyel Quadrature (PDQ) Metodu ile Dikdörtgen Plakların Statik, Dinamik ve Burkulma Hesabı. *Süleyman Demirel Üniversitesi Uluslararası Teknolojik Bilimler Dergisi*, 1(2): 34-60
- Cong P H, Chien T M, Khoa N D & Duc N D (2018). Nonlinear thermomechanical buckling and post-buckling response of porous FGM plates using Reddy's HSDT [Article]. *Aerospace Science and Technology*, 77: 419-428. doi:10.1016/j.ast.2018.03.020

- Cong P H, Ngoc An P T & Duc N D (2017). Nonlinear stability of shear deformable eccentrically stiffened functionally graded plates on elastic foundations with temperature-dependent properties [Article]. *Science and Engineering of Composite Materials*, 24(3): 455-469. doi:10.1515/secm-2015-0225
- Correia V M F, Madeira J A, Araújo A L & Soares C M M (2019). Multiobjective optimization of functionally graded material plates with thermo-mechanical loading. *Composite Structures*, 207: 845-857
- Daniel I M, Ishai O, Daniel I M & Daniel I (1994). *Engineering mechanics of composite materials*. Oxford university press New York,
- Demirbas M D & Apalak M K (2017). Thermal stress analysis of one- and two-dimensional functionally graded plates subjected to in-plane heat fluxes [Article in Press]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*. doi:10.1177/1464420716675507
- Demirbaş M D (2012). Düzlem içi ısı yüküne maruz iki yönlü işlevsel kademelendirilmiş dörtgen ve dairesel plakaların ısı gerilme analizi. Doktora, Erciyes Üniversitesi Makine Mühendisliği, 207, (346291).
- Demirhan P A (2016). Fonksiyonel derecelendirilmiş sandviç kiriş ve plakların dört değişkenli kayma deformasyon teorisi ile eğilme ve titreşim analizi. Doktora, Trakya Üniversitesi Makine Mühendisliği, 148 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (446755).
- Demirhan P A & Taskin V (2019). Static analysis of simply supported functionally graded sandwich plates by using four variable plate theory. *Teknik Dergi*, 30(2): 8987-9007. doi:10.18400/tekderg.396672
- DergiPark-Akademik (2020). <http://dergipark.gov.tr/> Retrieved 2020, from TÜBİTAK ULAKBİM
- Do V T, Pham V V & Nguyen H N (2020). On the Development of Refined Plate Theory for Static Bending Behavior of Functionally Graded Plates. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020
- Driscoll T A, Hale N & Trefethen L N (2014). *Chebfun guide*: Pafnuty Publications, Oxford.
- Duc N D & Cong P H (2013). Nonlinear postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on elastic foundations using higher order shear deformation plate theory in thermal environments [Article]. *Composite Structures*, 100: 566-574. doi:10.1016/j.compstruct.2013.01.006
- Duc N D, Cong P H & Quang V D (2016). Thermal stability of eccentrically stiffened FGM plate on elastic foundation based on Reddy's third-order shear deformation plate theory [Article]. *Journal of Thermal Stresses*, 39(7): 772-794. doi:10.1080/01495739.2016.1188638
- Duc N D & Tung H V (2010). Mechanical and thermal postbuckling of shear-deformable FGM plates with temperature-dependent properties [Article]. *Mechanics of Composite Materials*, 46(5): 461-476. doi:10.1007/s11029-010-9163-9
- Duc N D & Van Tung H (2011). Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations [Article]. *Composite Structures*, 93(11): 2874-2881. doi:10.1016/j.compstruct.2011.05.017
- Efraim E & Eisenberger M (2007). Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates. *Journal of Sound and Vibration*, 299(4-5): 720-738
- Eisenberger M & Alexandrov A (2003). Buckling loads of variable thickness thin isotropic plates. *Thin-Walled Structures*, 41(9): 871-889. doi:10.1016/S0263-8231(03)00027-2

- Eisenberger M & Shufrin I (2009). Buckling of plates by the multi term extended Kantorovich method. Proceedings of the 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference, Lisbon, Portugal, 1-13.
- Elishakoff I, Pentaras D & Gentilini C (2016). *Mechanics of functionally graded material structures*. World Scientific,
- Eslami M R (2018). *Buckling and Postbuckling of Beams, Plates, and Shells*. Springer,
- Fallah F & Nosier A (2012). Nonlinear behavior of functionally graded circular plates with various boundary supports under asymmetric thermo-mechanical loading [Article]. *Composite Structures*, 94(9): 2834-2850. doi:10.1016/j.compstruct.2012.03.029
- Fallah F, Nosier A, Sharifi M & Ghezelbash F (2016). On perturbation method in mechanical, thermal and thermo-mechanical loadings of plates: Cylindrical bending of FG plates [Article]. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 96(2): 217-232. doi:10.1002/zamm.201400136
- Fan Y & Wang H (2016). Nonlinear bending and postbuckling analysis of matrix cracked hybrid laminated plates containing carbon nanotube reinforced composite layers in thermal environments [Article]. *Composites Part B: Engineering*, 86: 1-16. doi:10.1016/j.compositesb.2015.09.048
- Farahmand H (2020). Analytical solutions of bending and free vibration of moderately thick micro-plate via two-variable strain gradient theory. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 42: 1-11
- Ghannadpour S, Ovesy H & Nassirnia M (2012a). Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method. *Computers & Structures*, 108: 93-99
- Ghannadpour S A M, Ovesy H R & Nassirnia M (2012b) An investigation on buckling behaviour of functionally graded plates using finite strip method. *Vol. 152-154. 2012 International Conference on Mechanical Engineering and Materials, ICMEM 2012* (pp. 1470-1476). Melbourne, VIC.
- Ghassabi A A (2017). Lokal olmayan parametrenin uzaysal değişimini göz önünde bulundurarak fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen nano plakların serbest titreşim analizleri. Yüksek Lisans, Orta Doğu Teknik Üniversitesi Makine Mühendisliği, 73 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (461953).
- Grimm T R & Gerdeen J C (1975). Instability Analysis of Thin Rectangular Plates Using the Kantorovich Method. *Journal of Applied Mechanics*, 42(1): 110-114. doi:10.1115/1.3423499
- Güneş R (2005). Çok katmanlı ve fonksiyonel kademelendirilmiş kompozit plakalarda ısıl artık gerilmelerin analizi. Doktora, Erciyes Üniversitesi Makine Mühendisliği, 2015 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (169765).
- Hakan M (2017). Fonksiyonel kademelendirilmiş plakaların farklı mermi çarpma açılarında balistik limitlerinin araştırılması. Yüksek Lisans, Erciyes Üniversitesi Makine Mühendisliği, 145 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (476224).
- Hassan A H A & Keleş İ (2017). FGM Modelling using Dummy Thermal Loads. *Journal of Selcuk International Science and Technology*, 1(10-16)
- Hassan A H A & Kurgan N (2019). Modeling and Buckling Analysis of Rectangular Plates in ANSYS. *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, 11(1): 310-329. doi:10.24107/ijeas.531011
- Hassan A H A & Kurgan N (2020a). Bending analysis of thin FGM skew plate resting on Winkler elastic foundation using multi-term extended Kantorovich method.

- Engineering Science and Technology, an International Journal*, 23(4): 788-800. doi:10.1016/j.jestch.2020.03.009
- Hassan A H A & Kurgan N (2020b). Buckling of thin skew isotropic plate resting on Pasternak elastic foundation using extended Kantorovich method. *Heliyon*, 6(6): e04236. doi:10.1016/j.heliyon.2020.e04236
- Hassan A H A, Kurgan N & Can N (2020). The relations between the various critical temperatures of thin FGM plates. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 6(SI): 1418-1433. doi:10.22055/JACM.2020.34697.2459
- Hung N-X, Tran Vinh L, Trung N-T & Huy Cuong V D (2011). Analysis of functionally graded plates using an edge-based smoothed finite element method. *Composite Structures*, 93(11): 3019-3039. doi:10.1016/j.compstruct.2011.04.028
- Hussein O S & Mulani S B (2017). Two-dimensional optimization of functionally graded material plates subjected to buckling constraints. 58th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2017, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc, AIAA.
- Jaberzadeh E, Azhari M & Boroomand B (2013). Inelastic buckling of skew and rhombic thin thickness-tapered plates with and without intermediate supports using the element-free Galerkin method. *Applied Mathematical Modelling*, 37(10-11): 6838-6854
- Jari H, Atri H R & Shojaee S (2014). Nonlinear thermal analysis of functionally graded material plates using a NURBS based isogeometric approach [Article]. *Composite Structures*, 119: 333-345. doi:10.1016/j.compstruct.2014.09.006
- Jaunky N, Knight Jr N & Ambur D (1995). Buckling of arbitrary quadrilateral anisotropic plates. *AIAA journal*, 33(5): 938-944
- Javaheri R & Eslami M (2002a). Thermal buckling of functionally graded plates. *AIAA journal*, 40(1): 162-169
- Javaheri R & Eslami M (2002b). Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory. *Journal of Thermal Stresses*, 25(7): 603-625
- Jones R M (2006). *Buckling of bars, plates, and shells*. Bull Ridge Corporation,
- Joodaky A & Joodaky I (2015). A semi-analytical study on static behavior of thin skew plates on Winkler and Pasternak foundations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 100: 322-327
- Joodaky A, Kargarnovin M H & Mehrabadi S J (2012). Bending and deflection analysis of thin FGM skew plates using extended Kantorovich method. *American Journal of Scientific Research*(46)
- Kantorovich L V & Krylov V I (1958). *Approximate Methods of Higher Analysis*. Interscience, New York.
- Kar U K & Srinivas J (2020). Material modeling and analysis of hydroxyapatite/titanium FGM plate under thermo-mechanical loading conditions. *Materials Today: Proceedings*. doi:10.1016/j.matpr.2020.03.312
- Karapınar I S (2019). Determination of Buckling Temperatures for Elliptical FGM Plates with Variable Thicknesses. *Uludağ University Journal of The Faculty of Engineering*, 24(1): 75-88. doi:10.17482/uumfd.480661
- Kargarnovin M & Joodaky A (2010). Bending analysis of thin skew plates using extended Kantorovich method. *Engineering Systems Design and Analysis*, 39-44.
- Kennedy J & Prabhakara M (1978). Buckling of simply supported orthotropic skew plates. *The Aeronautical Quarterly*, 29(3): 161-174

- Kerr A D (1968). An extension of the Kantorovich method. *Quarterly of Applied Mathematics*, 26(2): 219-229
- Kerr A D (1969). An extended Kantorovich method for the solution of eigenvalue problems. *International Journal of Solids and Structures*, 5(6): 559-572. doi:10.1016/0020-7683(69)90028-6
- Kerr A D & Alexander H (1968). An application of the extended Kantorovich method to the stress analysis of a clamped rectangular plate. *Acta Mechanica*, 6(2-3): 180-196. doi:10.1007/BF01170382
- Kiani Y (2017). Axisymmetric static and dynamics snap-through phenomena in a thermally postbuckled temperature-dependent FGM circular plate [Article]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 89: 1-13. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2016.11.003
- Kiani Y, Bagherizadeh E & Eslami M R (2011). Thermal buckling of clamped thin rectangular FGM plates resting on Pasternak elastic foundation (Three approximate analytical solutions). *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 91(7): 581-593. doi:doi:10.1002/zamm.201000184
- Kitipornchai S, Xiang Y, Wang C & Liew K (1993). Buckling of thick skew plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(8): 1299-1310
- Konez A, Alagöz H, Topal S & Gülgeç M (2005). Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin üretim teknikleri ve kullanım alanları. *Mühendis ve Makine*, 46(547): 1-25
- Kowal-Michalska K & Mania R J (2013). Static and dynamic thermomechanical buckling loads of functionally graded plates [Conference Paper]. *Mechanics and Mechanical Engineering*, 17(1): 99-112
- Lal A, Jagtap K R & Singh B N (2013). Post buckling response of functionally graded materials plate subjected to mechanical and thermal loadings with random material properties [Article]. *Applied Mathematical Modelling*, 37(5): 2900-2920. doi:10.1016/j.apm.2012.06.013
- Lal A, Neeranjan Singh H & Shegokar N L (2012). FEM model for stochastic mechanical and thermal postbuckling response of functionally graded material plates applied to panels with circular and square holes having material randomness [Article]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1): 18-33. doi:10.1016/j.ijmecsci.2012.05.010
- Lam K, Wang C & He X (2000). Canonical exact solutions for Levy-plates on two-parameter foundation using Green's functions. *Engineering Structures*, 22(4): 364-378
- Lee H M & Yoon G H (2021). Size optimization method for controlling the buckling mode shape and critical buckling temperature of composite structures. *Composite Structures*, 255: 112902
- Li S R, Zhang J H & Zhao Y G (2007). Nonlinear thermomechanical post-buckling of circular FGM plate with geometric imperfection [Article]. *Thin-Walled Structures*, 45(5): 528-536. doi:10.1016/j.tws.2007.04.002
- Lopatin A V & Morozov E V (2011). Buckling of the SSCF rectangular orthotropic plate subjected to linearly varying in-plane loading. *Composite Structures*, 93(7): 1900-1909. doi:10.1016/j.compstruct.2011.01.024
- Lopatin A V & Morozov E V (2013). Buckling of a uniformly compressed rectangular SSCF composite sandwich plate. *Composite Structures*, 105: 108-115. doi:10.1016/j.compstruct.2013.04.036

- Lopatin A V & Morozov E V (2014). Approximate buckling analysis of the CCFF orthotropic plates subjected to in-plane bending. *International Journal of Mechanical Sciences*, 85: 38-44. doi:10.1016/j.ijmecsci.2014.05.003
- Mahamood R M, Akinlabi E T, Shukla M & Pityana S (2012). Functionally graded material: an overview.
- Mahmoudi A, Benyoucef S, Tounsi A, Benachour A, Adda Bedia E A & Mahmoud S R (2017). A refined quasi-3D shear deformation theory for thermo-mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundations [Article in Press]. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. doi:10.1177/1099636217727577
- Mania R J (2014). Dynamic response of FGM thin plate subjected to combined loads. 10th Jubilee Conference on "Shell Structures: Theory and Applications", SSTA 2013, 317-320, Gdansk.
- Mansouri M H & Shariyat M (2015). Biaxial thermo-mechanical buckling of orthotropic auxetic FGM plates with temperature and moisture dependent material properties on elastic foundations [Article]. *Composites Part B: Engineering*, 83: 88-104. doi:10.1016/j.compositesb.2015.08.030
- Mehrali M, Shirazi F S, Mehrali M, Metselaar H S C, Kadri N A B & Osman N A A (2013). Dental implants from functionally graded materials. *Journal of Biomedical Materials Research Part A: An Official Journal of The Society for Biomaterials, The Japanese Society for Biomaterials, and The Australian Society for Biomaterials and the Korean Society for Biomaterials*, 101(10): 3046-3057
- Mertan B (2001). Fonksiyonel derecelendirilmiş kenarları basit mesnetli dikdörtgen ince plakların serbest titreşim analizi. Yüksek Lisans, Boğaziçi Üniversitesi Makine Mühendisliği, 180 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (112044).
- Miyamoto Y, Kaysser W, Rabin B, Kawasaki A & Ford R G (1999). *Functionally graded materials: design, processing and applications*. Springer Science & Business Media,
- Mizusawa T, Kajita T & Naruoka M (1980). Analysis of skew plate problems with various constraints. *Journal of Sound and Vibration*, 73(4): 575-584
- Moita J S, Araújo A L, Correia V F, Soares C M M & Herskovits J (2018). Buckling and nonlinear response of functionally graded plates under thermo-mechanical loading. *Composite Structures*, 202: 719-730
- Moslemi A, Neya B N & Amiri J V (2016). 3-D elasticity buckling solution for simply supported thick rectangular plates using displacement potential functions. *Applied Mathematical Modelling*, 40(11-12): 5717-5730. doi:10.1016/j.apm.2015.12.034
- Na K S & Kim J H (2005). Three-dimensional thermomechanical buckling of functionally graded plates. 11th International Conference on Fracture 2005, ICF11, 120-125, Turin.
- Na K S & Kim J H (2008). Volume fraction optimization of functionally graded composite plates for stress reduction and thermo-mechanical buckling. 9th International Conference on Multiscale and Functionally Graded Materials, FGM IX, 706-711, Oahu Island, HI.
- Najafizadeh M M & Hedayati B (2004). Refined theory for thermoelastic stability of functionally graded circular plates [Article]. *Journal of Thermal Stresses*, 27(9): 857-880. doi:10.1080/01495730490486532
- Nguyen H N, Hong T T, Vinh P V, Quang N D & Thom D V (2019). A refined simple first-order shear deformation theory for static bending and free vibration analysis of advanced composite plates. *Materials*, 12(15): 2385. doi:10.3390/ma12152385

- Nguyen T-K, Sab K & Bonnet G (2007). Shear correction factors for functionally graded plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 14(8): 567-575
- Nguyen T-K, Sab K & Bonnet G (2008). First-order shear deformation plate models for functionally graded materials. *Composite Structures*, 83(1): 25-36
- Özarsalan O (2007). Fonksiyonel derecelendirilmiş bir plağın analiz. Yüksek Lisans, İstanbul Teknik Üniversitesi Uçak Mühendisliği, 66 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (222284).
- Özarsalan O (2013). İki boyutlu işlevsel kademelendirilmiş bir plağın serbest titreşim analizi. Doktora, Erciyes Üniversitesi Makine Mühendisliği, 130 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (335421).
- Özkeş İ (2013). Çekirdeği fonksiyonel kademelendirilmiş sandviç plakaların düşük hızlı çarpma yükleri altındaki mekanik davranışlarının incelenmesi. Yüksek Lisans, Erciyes Üniversitesi Makine Mühendisliği, 90 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (360605).
- Öztürk C (2005). Kantorovich yönteminin bazı plak problemlerine uygulanması. YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ İnşaat Mühendisliği, 45, (199016).
- Pınarlık M (2014). Fonksiyonel değişimli ortotrop plakların dinamik tepkisine kayma deformasyonu ve dönel eylemsizlik etkilerinin incelenmesi. Yüksek Lisans, Süleyman Demirel Üniversitesi İnşaat Mühendisliği, 131 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (391968).
- Piren C (2012). Çift yönlü fonksiyonel derecelendirilmiş plakların üç boyutlu serbest titreşim analizi. Yüksek Lisans Makine Mühendisliği, 82 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (318023).
- Qi Y & Knight Jr N F (1996). A refined first-order shear-deformation theory and its justification by plane strain bending problem of laminated plates. *International Journal of Solids and Structures*, 33(1): 49-64. doi:10.1016/0020-7683(95)00010-8
- Rajabi J & Mohammadimehr M (2019). Bending analysis of a micro sandwich skew plate using extended Kantorovich method based on Eshelby-Mori-Tanaka approach. *Computers and Concrete*, 23(5): 361-376
- Reddy J (1984). A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 20(9-10): 881-896
- Reddy J (1990). A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 25(6): 677-686
- Reddy J N (2004). *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press,
- Reddy J N (2006). *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC press,
- Refrati S, Bousahla A A, Bouhadra A, Menasria A, Bourada F, Tounsi A, . . . Tounsi A (2020). Effects of hygro-thermo-mechanical conditions on the buckling of FG sandwich plates resting on elastic foundations. *Computers and Concrete*, 25(4): 311-325
- Reynolds N J & Nathan J (2012). *Functionally graded materials*. Nova Science Publishers,
- Saadatpour M, Azhari M & Bradford M (1998). Buckling of arbitrary quadrilateral plates with intermediate supports using the Galerkin method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 164(3-4): 297-306
- Sadollah A & Bahreininejad A (2011). Optimum gradient material for a functionally graded dental implant using metaheuristic algorithms. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*, 4(7): 1384-1395

- Sari M S, Ghaffari S, Ceballes S & Abdelkefi A (2020). Buckling response of functionally graded nanoplates under combined thermal and mechanical loadings. *Journal of Nanoparticle Research*, 22: 1-21
- Sayyad A S & Ghugal Y M (2018). Modeling and analysis of functionally graded sandwich beams: A review [Article in Press]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*: 1-20. doi:10.1080/15376494.2018.1447178
- Shahrestani M G, Azhari M & Foroughi H (2018). Elastic and inelastic buckling of square and skew FGM plates with cutout resting on elastic foundation using isoparametric spline finite strip method. *Acta Mechanica*, 229(5): 2079-2096
- Shams S, Soltani B & Memar Ardestani M (2016). The effect of elastic foundations on the buckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments using a meshfree method [Article]. *Journal of Solid Mechanics*, 8(2): 262-279
- Shariat B S & Eslami M (2007). Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads. *Composite Structures*, 78(3): 433-439. doi:10.1016/j.compstruct.2005.11.001
- Shariyat M & Alipour M (2014). A novel shear correction factor for stress and modal analyses of annular FGM plates with non-uniform inclined tractions and non-uniform elastic foundations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 87: 60-71
- Shariyat M, Behzad H & Shaterzadeh A R (2018). 3D thermomechanical buckling analysis of perforated annular sector plates with multiaxial material heterogeneities based on curved B-spline elements [Article]. *Composite Structures*, 188: 89-103. doi:10.1016/j.compstruct.2017.12.065
- Sharma K & Kumar D (2017a). Elastoplastic analysis of FGM plate with a central cutout of various shapes under thermomechanical loading [Article]. *Journal of Thermal Stresses*, 40(11): 1417-1441. doi:10.1080/01495739.2017.1323566
- Sharma K & Kumar D (2017b). Elastoplastic stability and failure analysis of FGM plate with temperature dependent material properties under thermomechanical loading [Article]. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 14(7): 1361-1386. doi:10.1590/1679-78253747
- Shen H-S (2016). *Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells*. CRC press,
- Shen H S & Li S R (2008). Postbuckling of sandwich plates with FGM face sheets and temperature-dependent properties [Article]. *Composites Part B: Engineering*, 39(2): 332-344. doi:10.1016/j.compositesb.2007.01.004
- Shen H S, Xiang Y, Lin F & Hui D (2017). Buckling and postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated plates in thermal environments [Article]. *Composites Part B: Engineering*, 119: 67-78. doi:10.1016/j.compositesb.2017.03.020
- Shen H S & Zhang C L (2012). Non-linear analysis of functionally graded fiber reinforced composite laminated plates, Part I: Theory and solutions [Article]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(9): 1045-1054. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2012.05.005
- Shen H S & Zhu Z H (2010). Buckling and postbuckling behavior of functionally graded nanotube-reinforced composite plates in thermal environments [Article]. *Computers, Materials and Continua*, 18(2): 155-182. doi:10.1016/j.matdes.2010.01.048
- Shen H S & Zhu Z H (2012). Postbuckling of sandwich plates with nanotube-reinforced composite face sheets resting on elastic foundations [Article]. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 35: 10-21. doi:10.1016/j.euromechsol.2012.01.005

- Shimpi R P (2002). Refined plate theory and its variants. *AIAA journal*, 40(1): 137-146
- Shufrin I & Eisenberger M (2005a). Stability and vibration of shear deformable plates—first order and higher order analyses. *International Journal of Solids and Structures*, 42(3): 1225-1251. doi:10.1016/j.ijsolstr.2004.06.067
- Shufrin I & Eisenberger M (2005b). Stability of variable thickness shear deformable plates—first order and high order analyses. *Thin-Walled Structures*, 43(2): 189-207. doi:10.1016/j.tws.2004.07.013
- Shufrin I & Eisenberger M (2006). Buckling of plates with variable in-plane forces (pp. 26-55).
- Shufrin I & Eisenberger M (2007). Shear buckling of thin plates with constant in-plane stresses. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 7(02): 179-192
- Shufrin I, Rabinovitch O & Eisenberger M (2008a). Buckling of laminated plates with general boundary conditions under combined compression, tension, and shear—A semi-analytical solution. *Thin-Walled Structures*, 46(7): 925-938. doi:10.1016/j.tws.2008.01.040
- Shufrin I, Rabinovitch O & Eisenberger M (2008b). Buckling of symmetrically laminated rectangular plates with general boundary conditions—A semi analytical approach. *Composite Structures*, 82(4): 521-531
- Shufrin I, Rabinovitch O & Eisenberger M (2009). Elastic nonlinear stability analysis of thin rectangular plates through a semi-analytical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 46(10): 2075-2092
- Shufrin I, Rabinovitch O & Eisenberger M (2010). A semi-analytical approach for the geometrically nonlinear analysis of trapezoidal plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(12): 1588-1596
- Shukla K K, Kumar K V R, Pandey R & Nath Y (2007). Postbuckling response of functionally graded rectangular plates subjected to thermo-mechanical loading [Conference Paper]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 7(3): 519-541. doi:10.1142/S0219455407002381
- SimuTech (2019). A Normal and Tangential Elastic Foundation in Workbench Mechanical. Retrieved from <https://www.simutechgroup.com/tips-and-tricks/fea-articles/143-a-normal-and-tangential-elastic-foundation-in-workbench-mechanical>
- Singhatanadgid P & Jommalai P (2016). Buckling analysis of laminated plates using the extended Kantorovich method and a system of first-order differential equations. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 30(5): 2121-2131
- Singhatanadgid P & Singhanart T (2019). The Kantorovich method applied to bending, buckling, vibration, and 3D stress analyses of plates: A literature review. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(2): 170-188. doi:10.1080/15376494.2017.1365984
- Srinivasa C, Kumar Y S W P & Banagar A R (2018). Bending Behavior of Simply Supported Skew Plates. *Int. J. Sci. Eng. Res.*, 9: 21-26
- Subramani T & Sugathan A (2012). Finite element analysis of thin walled-shell structures by ANSYS and LS-DYNA. *International Journal of Modern Engineering Research*, 2(4): 1576-1587
- Swaminathan K & Sangeetha D M (2017). Thermal analysis of FGM plates – A critical review of various modeling techniques and solution methods [Review]. *Composite Structures*, 160: 43-60. doi:10.1016/j.compstruct.2016.10.047

- Swamy M S, A R, D S & Badami S S (2015). Buckling Analysis of Plate Element Subjected to In Plane Loading Using ANSYS. *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*, 4(5): 10. doi:10.15680/IJIRSET.2015.0405090 3121
- Szillard R (2004). *Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods*. John Wiley & Sons,
- Taj M N A G & Chakrabarti A (2013). Buckling analysis of functionally graded skew plates: An efficient finite element approach [Article]. *International Journal of Applied Mechanics*, 5(4). doi:10.1142/S1758825113500415
- Talha M & Singh B N (2011). Thermo-mechanical buckling analysis of finite element modeled functionally graded ceramic-metal plates [Article]. *International Journal of Applied Mechanics*, 3(4): 867-880. doi:10.1142/S1758825111001275
- Taşkın V (2004). Derecelendirilmiş dikdörtgensel plaklarda bazı stabilite problemlerinin çözümleri. Doktora, Yıldız Teknik Üniversitesi Makine Mühendisliği, 147 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (151658).
- Tez-Merkezi (2020). <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> Retrieved 2020, from Yüksek Öğretim kurulu Başkanlığı
- Thai H-T, Park M & Choi D-H (2013). A simple refined theory for bending, buckling, and vibration of thick plates resting on elastic foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 73: 40-52
- Thai H T & Kim S E (2015). A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells [Review]. *Composite Structures*, 128: 70086. doi:10.1016/j.compstruct.2015.03.010
- Tran H Q, Tran M T & Nguyen-Tri P (2020). A new four-variable refined plate theory for static analysis of smart laminated functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates. *Mechanics of Materials*, 142: 103294
- Trefethen L N (2000). *Spectral methods in MATLAB*. SIAM,
- Tunca Ö B (2009). Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme ve sandviç plakların patlama yükü altındaki titreşim analizi. Yüksek Lisans, İstanbul Teknik Üniversitesi Uçak ve Uzay Mühendisliği, 81 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (251299).
- Tung H V (2015). Thermal and thermomechanical postbuckling of FGM sandwich plates resting on elastic foundations with tangential edge constraints and temperature dependent properties [Article]. *Composite Structures*, 131: 1028-1039. doi:10.1016/j.compstruct.2015.06.043
- Tung H V & Duc N D (2010). Nonlinear analysis of stability for functionally graded plates under mechanical and thermal loads [Article]. *Composite Structures*, 92(5): 1184-1191. doi:10.1016/j.compstruct.2009.10.015
- Uyar A (2018). Thermo-elastic analysis and multi objective optimal design of functionally graded flywheel for energy storage system. M.Sc., Istanbul Technical University Aeronautics and Astronautics Engineering, (507459).
- Uymaz B (2008). Fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen plakların üç boyutlu serbest titreşim analizi. Doktora, Trakya Üniversitesi Makine Mühendisliği, 131 <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi> database, (179826).
- Van Dung D & Nga N T (2016). Buckling and postbuckling nonlinear analysis of imperfect FGM plates reinforced by FGM stiffeners with temperature-dependent properties based on TSDT [Article]. *Acta Mechanica*, 227(8): 2377-2401. doi:10.1007/s00707-016-1637-y

- Ventsel E & Krauthammer T (2001). *Thin plates and shells: theory: analysis, and applications*. CRC press,
- Wang E (2006). Thin-wall structure simulation. 2006 International ANSYS Conference. <https://www.ansys.com/-/media/ansys/corporate/resourcelibrary/conference-paper/2006-int-ansys-conf-22.pdf>
- Wang X & Yuan Z (2018). Buckling analysis of isotropic skew plates under general in-plane loads by the modified differential quadrature method. *Applied Mathematical Modelling*, 56: 83-95
- Wu H, Yang J & Kitipornchai S (2018). Parametric instability of thermo-mechanically loaded functionally graded graphene reinforced nanocomposite plates [Article]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 135: 431-440. doi:10.1016/j.ijmecsci.2017.11.039
- Xie W-C & Elishakoff I (2000). Buckling mode localization in rib-stiffened plates with misplaced stiffeners – Kantorovich approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11(10): 1559-1574. doi:10.1016/S0960-0779(99)00078-8
- Yaghoobi H & Yaghoobi P (2013). Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach [Article]. *Meccanica*, 48(8): 2019-2035. doi:10.1007/s11012-013-9720-0
- Yang S F, Chen H & Ran C (2014) Dynamic stability analysis of functionally graded plates subjected to complex loads. Vol. 578-579. *4th International Conference on Civil Engineering, Architecture and Building Materials, CEABM 2014* (pp. 679-686). Haikou: Trans Tech Publications Ltd.
- Yoo C H & Lee S (2011). *Stability of structures: principles and applications*. Elsevier,
- Yu T, Yin S, Bui T Q, Liu C & Wattanasakulpong N (2017). Buckling isogeometric analysis of functionally graded plates under combined thermal and mechanical loads [Article]. *Composite Structures*, 162: 54-69. doi:10.1016/j.compstruct.2016.11.084
- Yu T X & Zhang L C (1986). The elastic wrinkling of an annular plate under uniform tension on its inner edge. *International Journal of Mechanical Sciences*, 28(11): 729-737. doi:10.1016/0020-7403(86)90020-2
- Yu Y, Shen H S, Wang H & Hui D (2018). Postbuckling of sandwich plates with graphene-reinforced composite face sheets in thermal environments [Article]. *Composites Part B: Engineering*, 135: 72-83. doi:10.1016/j.compositesb.2017.09.045
- Yuan S & Jin Y (1998). Computation of elastic buckling loads of rectangular thin plates using the extended Kantorovich method. *Computers & structures*, 66(6): 861-867. doi:10.1016/S0045-7949(97)00111-9
- Yuan S & Zhang Y (1992). Further extension of the extended Kantorovich method. *Computational methods in engineering advances and applications*, 2: 1240-1245
- Zhang D-G (2013). Modeling and analysis of FGM rectangular plates based on physical neutral surface and high order shear deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 68: 92-104
- Zhang D-G & Zhou Y-H (2008). A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface. *Computational Materials Science*, 44(2): 716-720. doi:10.1016/j.commatsci.2008.05.016
- Zhang L C & Yu T X (1988). The plastic wrinkling of an annular plate under uniform tension on its inner edge. *International Journal of Solids and Structures*, 24(5): 497-503. doi:10.1016/0020-7683(88)90004-2
- Zhao X, Lee Y & Liew K M (2009). Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 90(2): 161-171

ÖZ GEÇMİŞ

Ahmed HASSAN AHMED HASSAN, Makine Mühendisliği Fakültesi'nden 2008 yılında mezun oldu, 2013 yılında Yüksek Lisans programını bitirdi. Mezuniyetinden bu yana mühendis ve öğretmen olarak görev yapan iyi derecede İngilizce bilmektedir. (Ocak 2021).

ORCID: 0000-0002-4880-0184

Yayınlanmış Çalışmalar:

1. Hassan A H A & Kurgan N (2019). A Review on Buckling Analysis of Functionally Graded Plates Under Thermo-Mechanical Loads. *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, 11(1): 345-368. doi:10.24107/ijeas.555719
2. Hassan A H A & Kurgan N (2019). Modeling and Buckling Analysis of Rectangular Plates in ANSYS. *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, 11(1): 310-329. doi:10.24107/ijeas.531011
3. Hassan A H A & Kurgan N (2020). Bending analysis of thin FGM skew plate resting on Winkler elastic foundation using multi-term extended Kantorovich method. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 23(4): 788-800. doi:10.1016/j.jestch.2020.03.009
4. Hassan A H A & Kurgan N (2020). Buckling of thin skew isotropic plate resting on Pasternak elastic foundation using extended Kantorovich method. *Heliyon*, 6(6): e04236. doi:10.1016/j.heliyon.2020.e04236
5. Can N, Kurgan N & Hassan A H A (2020). Buckling Analysis of Functionally Graded Plates Using Finite Element Analysis. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 12(1): 43-56. doi: 10.24107/ijeas.727320
6. Hassan A H A, Kurgan N & Can N (2020). The relations between the various critical temperatures of thin FGM plates. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 6(SI): 1418-1433. doi:10.22055/JACM.2020.34697.2459

Kazanılan Ödüller, Teşvikler ve Burslar

1. Yurtdışı Türkler ve Akraba Topluluklar Başkanlığı (YTB): Burs programı: "Ali Kuşçu Bilim ve Teknoloji", 2015 – devam.