



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



PERİYODİK KATSAYILI LİNEER FARK
DENKLEM SİSTEMLERİNİN SCHUR
KARARLIĞI VE SALINIMLILIĞI ÜZERİNE

Shuaibullah OMARY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Eylül-2024
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Shuaibullah OMARY tarafından hazırlanan “Periyodik Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemlerinin Schur Kararlılığı ve Salınımlılığı Üzerine” adlı tez çalışması 03/09/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Kemal AYDIN

.....

Danışman

Doç. Dr. Ahmet DUMAN

.....

Üye

Prof. Dr. Nesip AKTAN

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun/.../20.. gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Havvanur UÇBEYİAY
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Shuaibullah OMARY

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PERİYODİK KATSAYILI LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN SCHUR KARARLIĞI VE SALINIMLILIĞI ÜZERİNE

Shuaibullah OMARY

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet DUMAN

2024, 40 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Kemal AYDIN

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Doç. Dr. Ahmet DUMAN

Bu çalışmada, periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemlerinin çözümlerinin Schur kararlı ve salınımlılık tanımları verilip, periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemlerin hem Schur kararlı hem de sıfıra yakınsayarak salınımlı olduğu durumlar incelenmiştir. Ayrıca hem Schur kararlı hemde sıfıra yakınsayarak salınımlı olan bir periyodik katsayılı lineer fark denklem sisteminin hangi bozunumlar altında hem Schur kararlı hemde sıfıra yakınsayarak salınımlı kaldığını ifade eden yeni süreklilik teoremleri elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçlar nümerik örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Periyodik katsayılı fark denklem sistemleri, Schur kararlılık, Hurwitz kararlılık, Salınımlılık, Süreklilik teoremleri.

ABSTRACT

MS THESIS

ON SCHUR STABILITY AND OSCILLABILITY OF LINEAR DIFFERENCE EQUATION SYSTEMS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

Shuaibullah OMARY

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE**

Advisor: Assoc. Prof. Ahmet DUMAN

2024, 40 Pages

Jury

Prof. Kemal AYDIN

Prof. Nesip AKTAN

Assoc. Prof. Ahmet DUMAN

In this study, Schur stable and oscillatory definitions of the solutions of linear difference equation systems with periodic coefficients are given and the cases where the linear difference equation systems with periodic coefficients are both Schur stable and oscillate by approaching zero are examined. In addition, new continuity theorems expressing under which perturbations a linear difference equation system with periodic coefficients which is both Schur stable and oscillate by approaching zero, remains both Schur stable and oscillate by approaching zero, are obtained. In addition, the obtained results are supported with numerical examples.

Keywords: Systems of difference equations with periodic coefficients, Schur stability, Hurwitz stability, Oscillation, Continuity theorems.

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca vermiş olduğu değerli bilgi ve birikimlerinden gerek mesâi saatleri içerisinde gerekse mesâi saatleri dışarısında sürekli ilgi ve alâkasından dolayı danışman hocam Doç. Dr. Ahmet DUMAN' a teşekkürlerimi sunarım. Çalışma boyunca tecrübesinden yararlandığım Prof. Dr. Kemâl AYDIN ve Dr. Öğr. Üyesi Ayşegül KETEN ÇOPUR'a samîmî şükranlarımı sunarım. Çalışmalarım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve sabır göstererek daima yanımda olan eşime sevgi ve minnetlerimi sunarım.

Shuaibullah OMARY
KONYA-2024



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. FARK DENKLEM SİSTEMLERİN SCHUR KARARLILIĞI ve SALINIMLILIĞI.....	3
2.1. Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemleri	3
2.2. Schur Kararlılık ve Hurwitz Kararlılık için Öz değerler ve Parametreler Arasındaki Bağlantı	6
2.3. Fark Denklem Sistemlerini Hem Schur Kararlı Hem Salınlımlı Kılan Denk Sonuçlar	9
3. PERİYODİK KATSAYILI LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİ.....	11
3.1. Periyodik Katsayılı Linear Fark Denklem Sistemlerini Hem Schur Kararlı Hem Salınlımlı Kılan Denk Sonuçlar	15
4. PERİYODİK KATSAYILI FARK DENKLEM SİSTEMLERİN HEM SCHUR KARARLILIĞIN HEM DE SALINIMLILIĞININ HASSASİYETİ.....	32
5. SONUÇLAR	38
6. KAYNAKLAR	39

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık Sayılar Kümesi
$\ A\ $	: A matrisinin $\ A\ = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$ ile verilen spektral normu
$\omega(A)$	: Sabit katsayılı lineer fark denklem sistemleri için kararlılık parametresi
$\kappa(A)$	: Sabit katsayılı lineer diferensiyel denklem sistemleri için kararlılık parametresi
$\lambda_i(A)$	: A matrisini özdeğerleri
H^*	: H matrisinin adjointi, yani eşlenik transpozisi
$H = H^* > 0$	: H matrisi, simetrik pozitif matris
$X(t)$	: Periyodik katsayılı lineer fark denklem sisteminin fundamental matrisi
$X(T)$	: Monodromi matrisi
$\omega_1(A, T)$	: Periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemleri için tanımlanmış kararlılık parametresi

1. GİRİŞ

Fark denklemleri bilimin birçok alanındaki problemlerin modellenmesinde kullanılır, örneğin, sayısal analiz, kontrol teorisi, biyolojide canlı nüfus sayısının araştırılması, ekonomide ve birçok gerçek hayat probleminin modellenmesinde kullanılmaktadır. Modellenen problemin çözümünün nasıl davrandığını ve hangi bozunumlar altında karakteristik özelliklerini koruduğunu bilmek uygulama alanında önemli kazanımlar sağlamaktadır. Elimizdeki problemin *“etkilere vereceği tepkinin sorgulanması ve yapısını değiştirmeyen etkilerin şartlarının belirlenmesi”* hassasiyet problemi olarak tanımlanmaktadır. Bir problemin hassasiyeti, yani ne kadar bozunuma dayandığının bilinmesi, problemin karakteristik özellikleri değişmeden girdilerinde uygun bozunumlar yapılmasına olanak sağlar. Problemin hassasiyeti, problemin bozunumlara dayanıklılığının ölçüsünün belirlenmesi olarak da değerlendirilebilir (Duman, 2008).

Periyodik katsayılı fark denklem sistemlerinin çözümlerinin davranışı üzerine çok sayıda çalışmalar yapılmaktadır, özellikle Schur kararlılık ve salınımlılık üzerine ayrı çalışmalar yapılmıştır fakat hem Schur kararlılık hem de salınımlı üzerine literatürde yeterli çalışma yapılmamıştır. Çalışmamız da literatürde hem Schur kararlılık hem de salınımlılık üzerine verilen sonuçlar ve hem Schur kararlılık hem de salınımlılığın hassasiyetini veren süreklilik teoremleri verilmiştir. Ayrıca bu sonuçlar nümerik örnekler ile desteklenmiştir.

Bu çalışmada;

- Periyodik katsayılı fark denklem sistemlerin Schur kararlı ve salınımlı olduğu durumlar incelenmiş ve bu durumların bozunuma ne kadar dayanıklı olduğu incelenmiş,
- Periyodik katsayılı fark denklem sistemlerin Schur kararlılığı ve salınımlılığı için yeni bir kriter bulunmuş,
- Öz değerler ve kararlılık parametresi arasındaki bağlantı anlatılmış ve kararlılık parametresine bağlı sonuç elde edilmiş,
- Periyodik katsayılı fark denklem sistemlerin Schur kararlı ve salınımlılığın sürekliliği araştırılmış ve sonuç elde edilmiştir.

Tezin İçerięi

Tez çalışmamız 4 kısımdan oluşmaktadır.

1. bölümde; problem tanıtılıp, tezde neler yapıldığı açıklanmıştır.

2. bölümde; Sabit katsayılı fark denklem sistemlerin Schur kararlılığı ve salınımlılığı ilgili literatür bilgisi verilmiştir.

3. bölümde; Periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemlerin Schur kararlılığı ve salınımlılığı için sonuçlar verilmiştir.

4. bölümde; Periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemlerin Schur kararlılığı ve salınımlılığının hangi bozunumlar altında korunduğunu veren bir sonuç verilmiştir.



2. FARK DENKLEM SİSTEMLERİN SCHUR KARARLILIĞI ve SALINIMLILIĞI

Bu bölümde, literatürde bulunan sabit katsayılı lineer fark denklem sistemleri ve bu sistemlerin Schur kararlılığı, salınımlılığı ve bu iki durumu beraber sağlayan sonuçlar verilmiştir.

2.1. Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemleri

$a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere N bilinmeyenli N tane denklemden oluşan sabit katsayılı lineer homojen *fark denklem sistemi*

$$x_1(t+1) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1N}x_N(t),$$

$$x_2(t+1) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2N}x_N(t),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_N(t+1) = a_{N1}x_1(t) + a_{N2}x_2(t) + \dots + a_{NN}x_N(t)$$

şeklinde ifade edilir. Bu sistem,

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ \vdots \\ x_N(t+1) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$x(t+1) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

matris-vektör formunda yazılabilir. (2.1) sistemi $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^N$ başlangıç şart altında

$$x(t+1) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0 \quad (2.2)$$

sistemi de *sabit katsayılı lineer fark Cauchy problemi* olarak adlandırılmaktadır.

I birim matris ve A singüler olmayan bir matris olmak üzere

$$X(t+1) = AX(t), \quad X(0) = I, \quad t \geq 0$$

Cauchy probleminin çözümü olan $X(t) = A^t$ matrisine (2.1) sisteminin *fundamental matrisi* denir. (2.2) Cauchy probleminin çözümü ise $x(t) = A^t x_0$ şeklindedir (Akın ve Bulgak, 1998; Elaydi, 2005; Duman, 2008).

Tanım 2.1. Her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı varsa öyle ki $x(t+1) = Ax(t)$ fark denklem sisteminin $\|x(0)\| < \delta$ şartını sağlayan $x(t)$ çözümü için $\|x(t)\| < \varepsilon, t \geq 0$ sağlanırsa bu taktirde (2.2) sisteminin $x(t)$ çözümüne *fark kararlıdır* denir.

Eğer (2.2) başlangıç değer problemin $x(t)$ çözümü için;

- a) Çözüm fark kararlı,
- b) $x(t+1) = Ax(t)$ sisteminin her çözümü için $n \rightarrow \infty$ iken $\|x(t)\| \rightarrow 0$ ise bu takdirde (2.2) sistemin $x(t)$ çözümüne *Schur kararlıdır* denir(Akın ve Bulgak, 1998).

Schur kararlılık: (2.1) sisteminin

$$x(t+1) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\lambda_i(A)| < 1$, $(i = 1, 2, \dots, N)$. Bu kriter literatürde *Spektral Kriter* olarak adlandırılmaktadır. Bir sistemin Schur kararlı olması A katsayı matrisinin Schur kararlı olmasına denktir. (Duman, 2008; Duman ve Aydın, 2011).

Tanım 2.2. Her $t \in \mathbb{N}$ için $\{y_t\}$ dizisi $y_t y_{t+k} < 0$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ var ise $\{y_t\}$ dizisine salınımlıdır denir (Agarwal vd., 2000).

Salınımlılık: (2.1) sistemini

$$x(t+1) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

ele alalım. Bu sistemin özdeğerleri $\lambda_j(A) \in \mathbb{C}, (j = 1, 2, \dots, N)$ olmak üzere,

(2.1) denklem sisteminin salınımlı olabilmesi için gerek ve yeter şart $\lambda_j(A) = \alpha_j + i\beta_j, (j = 1, 2, \dots, N)$ olmak üzere

- a) $\beta_j = 0$ iken $\lambda_j(A) = \alpha_j < 0, (j = 1, 2, \dots, N)$ olmasıdır.

b) $\beta_j \neq 0$ iken; $r = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}$ olmak üzere

- 1) $r < 1$ ise $\lambda_j(A), (j = 1, 2, \dots, N)$ ise $x(t)$ çözümü sifıra yakınsayarak salınımlı;
- 2) $r = 1$ ise $\lambda_j(A), (j = 1, 2, \dots, N)$ ise $x(t)$ çözümü sabit büyüklükte salınımlı;
- 3) $r > 1$ ise $\lambda_j(A), (j = 1, 2, \dots, N)$ ise $x(t)$ çözümü artan büyüklükte salınımlıdır (Elaydi, 2005; Çakıroğlu, 2019).

Not 2.1. (2.1) sisteminin

$$x(t+1) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

özdeğerleri $\lambda_i(A) \in \mathbb{R}, (i = 1, 2, \dots, N)$ ise sisteminin hem Schur kararlı hem salınımlı olması için gerek ve yeter şart $(-1 < \lambda_i(A) < 0)$, $(i = 1, 2, \dots, N)$ olmasıdır (Çakıroğlu, 2019).

Hurwitz Kararlılık: A , N boyutlu karesel bir matris ($A \in M_N(\mathbb{R})$) ve $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$, $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) diferensiyellenebilir fonksiyon lar olmak üzere öz değerleri $\lambda_j(A) \in \mathbb{C}, (j = 1, 2, \dots, N)$ olan

$$x'(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

diferensiyel denklem sistemini ele alalım. (2.3) sisteminin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter şart $Re(\lambda_i(A)) < 0$, $(i = 1, 2, \dots, N)$ (1. Lyapunov Yöntemi-Spektral Kriter) olmasıdır (Akın ve Bulgak, 1998; Elaydi, 2005; Duman, 2008).

Herhangi bir $A \in M_N(\mathbb{R})$ matrisini ele alalım. Eğer A matrisi simetrik bir matris ise öz değerlerinin hesaplanması probleminin iyi konulmuş problem, A matrisi simetrik olmayan bir matris ise öz değer problemi kötü konulmuş bir problemidir. Yani, simetrik olmayan matrislerin elemanlarına küçük değişiklikler yapıldığında matrisin öz değerlerinde büyük değişiklik olabilmektedir. Matris elemanlarındaki yapılan değişiklik çık küçük olabilir ki yapılan değişiklik matrisin bilgisayardaki gösteriminde değişiklik olmaz. Fakat yapılan bu değişiklik A matrisinin Schur kararlılığını etkileyebilir. Meselâ literatürde Ostrowski'nin örneğine göre

$$A_{\omega} = \begin{pmatrix} 0.5 & 10 & \dots & 0 \\ 0 & 0.5 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \omega & 0 & \dots & 0.5 \end{pmatrix}$$

biçimindeki N boyutlu ω – parametrelili A_{ω} matrisi, karakteristik denklemi

$$\det(A_{\omega} - \lambda I) = (0.5 - \lambda)^N \mp 10^{N-1} \omega.$$

$\omega = 0$ için A_0 matrisinin öz değerleri $\lambda_i(A_0) = 0.5$ ($i = 1, 2, \dots, N$) dir. Eğer $\omega = 10^{1-N}$, $N = 101$ için $A_{10^{-100}}$ matrisinin bütün öz değerleri $\lambda(A_{10^{-100}}) = 1.5$ olur. Böylece,

$$\|A_{10^{-100}} - A_0\| = 10^{-100} \Rightarrow |\lambda(A_{10^{-100}}) - \lambda(A_0)| = 1.$$

Böylece Schur kararlı olan A_0 matrisinin elemanlarında yapılan 10^{-100} kadar bir değişim, Schur kararlı olmayan $A_{10^{-100}}$ matrisine dönüştürmektedir.

Simetrik olmayan matrisler için öz değer problemi iyi konulmuş bir problem olmadığından Schur kararlılığı tespit için Spektral Kriter yerine, Schur kararlılığı karakterize eden bir lineer cebirsel denklemin çözümü yardımıyla hesaplanan parametreleri kullanmak daha kullanışlıdır (Akın ve Bulgak, 1998; Duman, 2008).

Şimdi, yukarıda bahsettiğimiz parametrelerin tanımı için gerekli Lyapunov teoremini verelim.

2.2. Schur Kararlılık ve Hurwitz Kararlılık için Öz değerler ve Parametreler Arasındaki Bağntı

Teorem 2.1. (Fark Denklem Sistemi İçin Lyapunov Teoremi)

Verilen bir A matrisinin (veya $x(t+1) = Ax(t)$ sisteminin $x(t) \equiv 0$ aşıkâr çözümünün) Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$A^*HA - H + I = 0$$

Lyapunov fark matris denkleminin

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k, H = H^* > 0$$

çözümünün olmasıdır (Akın ve Bulgak, 1998; Duman, 2008; Duman ve Aydın, 2014).

Lyapunov fark denklemini sağlayan $H = H^* > 0$ pozitif tanımlı H matrisi varsa $\omega(A) = \|H\|$, aksi halde $\omega(A) = \infty$ olarak seçilir. Bu şekilde tanımlanan $\omega(A)$ matris fonksiyoneline A matrisinin Schur kararlılık parametresi ya da Schur kararlılığının kalitesini gösteren parametre denir (Bulgakov ve Godunov, 1988; Bulgak, 1999; Duman, 2008; Duman vd, 2018).

Ayrıca, $A = 0$ matrisi alınırsa Lyapunov fark denkleminin çözümü $H = I$ olur ki $\omega(A) = 1$ elde edilir. Bu durum (2.1) sisteminin Schur kararlılığı için Mükemmel Durum olarak adlandırılır. Buradan $\omega(A) = \|H\| \geq 1$ olduğu açıktır (Duman, 2008).

(2.1) fark denklem sisteminin Schur kararlı olması için gerek ve yeter şartın $|\lambda_i(A)| < 1$, $(i = 1, 2, \dots, N)$ olması ile Teorem 2.1.'deki Schur kararlılık parametresinin $\omega(A) < \infty$ olması birbirine denktir; yani,

$$|\lambda_i(A)| < 1, (i = 1, 2, \dots, N) \Leftrightarrow (\exists H = H^* > 0 \ni A^*HA - H + I = 0) \Leftrightarrow (\omega(A) < \infty)$$

dir.

Şimdi de diferensiyel denklem sistemlerinin Hurwitz kararlılığının kalitesini veren parametreyi tanımlamak için Lyapunov teoremini verelim.

Teorem 2.2. (Diferensiyel Denklem Sistemi İçin Lyapunov Teoremi)

Verilen bir A matrisinin (veya $x'(t) = Ax(t)$ sisteminin $x(t) \equiv 0$ aşıkâr çözümünün) Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$A^*H + HA + I = 0$$

Lyapunov matris denkleminin

$$H = \int_0^{\infty} e^{tA^*} e^{tA} dt, H = H^* > 0$$

çözümünün olmasıdır (2. Lyapunov Yöntemi) (Bulgakov, 1980; Bulgakov, 1995; Aydın, 1995; Bulgak, 1999).

Lyapunov matris denklemini sağlayan $H = H^* > 0$ pozitif tanımlı H matrisi varsa $\kappa(A) = 2\|A\|\|H\|$, aksi halde $\kappa(A) = \infty$ olarak seçilir. Bu şekilde tanımlanan $\kappa(A)$ matris fonksiyoneline A matrisinin Hurwitz kararlılık parametresi ya da Hurwitz kararlılığının kalitesini gösteren parametre denir (Bulgakov, 1980; Bulgakov, 1995; Aydın, 1995).

Ayrıca, $A = -I$ matrisi alınırsa Lyapunov denkleminin çözümü $2H = I$ olur ki $\kappa(A) = 1$ elde edilir. Bu durum (2.3) sisteminin Hurwitz kararlılığı için Mükemmel Durum olarak adlandırılır (Bulgakov, 1995).

(2.3) diferensiyel denklem sisteminin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter şartın $Re(\lambda_i(A)) < 0$, ($i = 1, 2, \dots, N$) olması ile Teorem 2.2.'deki Hurwitz kararlılık parametresinin $\kappa(A) < \infty$ olması birbirine denktir; yani,

$Re(\lambda_i(A)) < 0, (i = 1, 2, \dots, N) \Leftrightarrow \exists H = H^* > 0 \ni A^*H + HA + I = 0 \Leftrightarrow \kappa(A) < \infty$ dir.

(2.1) ve (2.3) sistemleri aynı A katsayı matrisini kullandığı takdirde (2.1) sisteminin hem Schur kararlı hemde sifıra yakınsayarak salınımlı olması için A matrisinin hem Schur kararlı hemde Hurwitz kararlı olması yeterlidir. Buradan aşağıdaki kritiği yazabiliriz.

Kritik 2.1. (2.1) fark denklem sisteminin hem Schur kararlı hemde sifıra yakınsayarak salınımlı olması için

$$A \in \{A \mid \omega(A) < \infty \text{ ve } \kappa(A) < \infty\}$$

olması yeterlidir (Çakıroğlu, 2019).

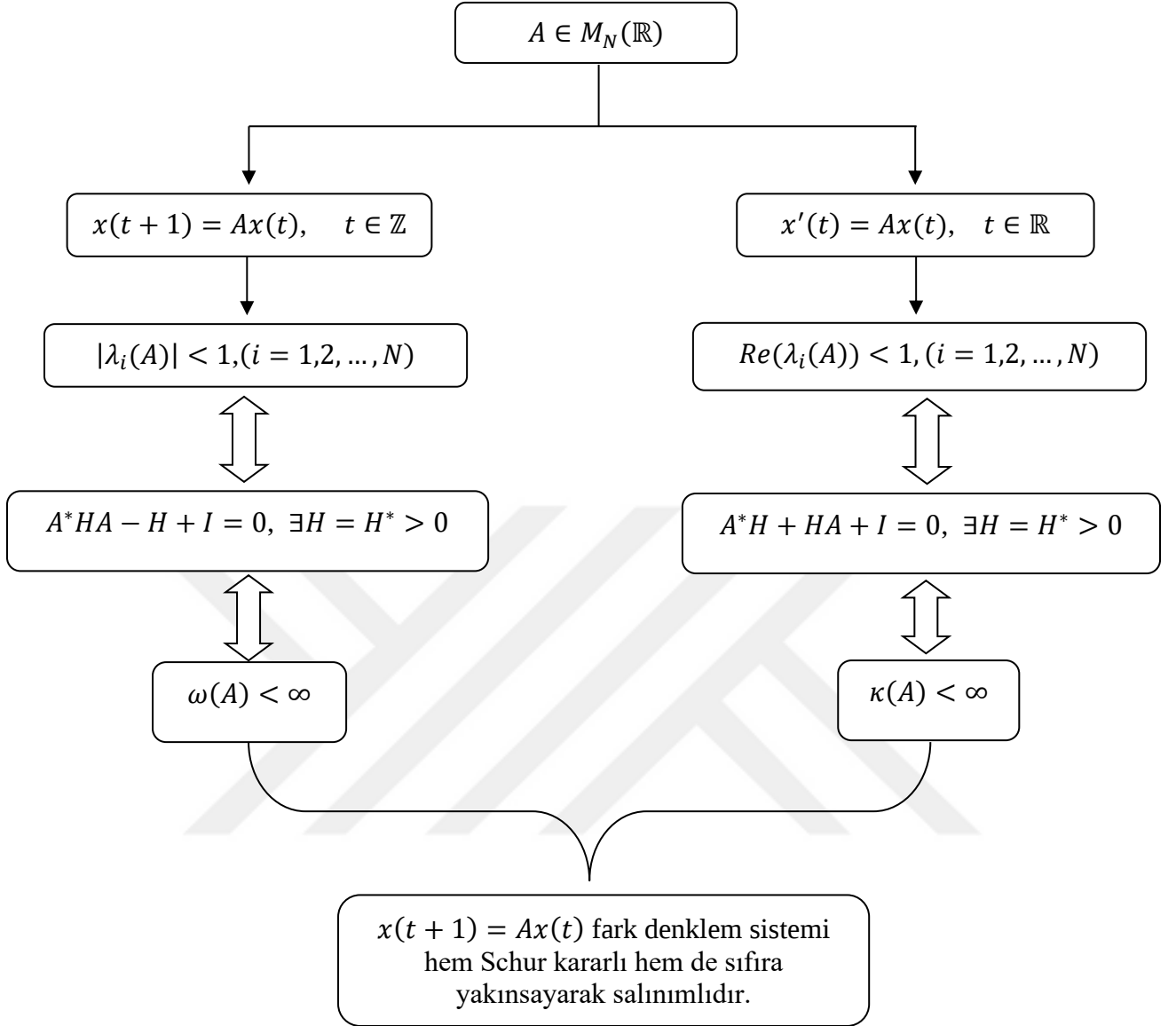
2.3. Fark Denklem Sistemlerini Hem Schur Kararlı Hem Salınımlı Kılan Denk Sonuçlar

(2.1) fark denklem sistemi ve (2.3) diferensiyel denklem sistemi aynı A katsayı matrisine sahip olsun.

(2.1) fark denklem sistemi için

1. (2.1) fark denklem sistemi Schur kararlı ve (2.3) diferensiyel denklem sistemi Hurwitz kararlı ise;
2. $|\lambda_i(A)| < 1, (i = 1, 2, \dots, N)$ ve $Re(\lambda_i(A)) < 0, (i = 1, 2, \dots, N)$ ise;
3. $A^*HA - H = 0, H = H^* > 0$ ve $A^*H + HA + I = 0, H = H^* > 0$ ise;
4. $\omega(A) < \infty$ ve $\kappa(A) < \infty$ ise

(2.1) fark denklem sistemi hem Schur kararlı hemde sifıra yakınsayarak salınımlıdır. Burada 1., 2., 3., 4. şartları birbirine denktir (Çakıroğlu, 2019).



Şema 2.1. (2.1) fark denklem sisteminin $(x(t+1) = Ax(t))$ hem Schur kararlı hem salınımlı olması için elde edilen birbirine denk sonuçlar.

3. PERİYODİK KATSAYILI LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİ

Bu bölümde, periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemleri ve bu sistemlerin Schur kararlılığı, salınımlılığı ve bu iki durumu beraber sağlayan sonuçlar verilmiştir.

$A(t) = A(t + T)$, N boyutlu periyodik (T periyotlu) karesel bir matris olmak üzere

$$x(t + 1) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

sistemini ele alalım. Bu sistem *periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemi*, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^N$ başlangıç şartı altında

$$x(t + 1) = A(t)x(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

sistemi de *periyodik katsayılı lineer fark Cauchy problemi* olarak adlandırılmaktadır. I birim matris olmak üzere

$$X(t + 1) = A(t)X(t), \quad X(0) = I, \quad t \geq 0$$

Cauchy probleminin çözümü olan

$$X(t) = \prod_{i=0}^{t-1} A(i) = A(t-1)A(t-2) \dots A(0)$$

matrisine (3.1) sisteminin fundamental matrisi ve

$$X(T) = \prod_{i=0}^{T-1} A(i) = A(T-1)A(T-2) \dots A(0)$$

matrisine (3.1) sisteminin monodromi matrisi denir (Aydın, 1995; Akın ve Bulgak, 1998; Elaydi, 2005; Duman, 2008). (3.2) Cauchy probleminin çözümü $x(t) = X(t)x_0$ ve $t = kT + m$, $0 \leq m \leq T$ olmak üzere (3.2) sisteminin çözümü

$$x(kT + m) = X(m)X(T)^k x_0$$

şeklindedir (Aydın, 1995; Duman, 2008).

Cauchy probleminin çözümü olan $X(t)$ matrisi (3.2) sisteminin fundamental matrisi, $X(T)$ matrisi de (3.2) sisteminin monodromi matrisidir.

1. Schur Kararlılık: (3.1) sisteminin Schur kararlı olması ile sistemin $X(T)$ monodromi matrisinin Schur kararlı olmasının denk olduğu açıkça görülmektedir. Böylece, Spektral Kritere göre (3.1) sisteminin Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\lambda_i(X(T))| < 1$, ($i = 1, 2, \dots, N$) olmasıdır (Duman, 2008; Duman vd, 2016).

2. Salınımlılık: (3.1) sisteminin özdeğerleri $\lambda_i(X(T)) \in \mathbb{C}, (i = 1, 2, \dots, N)$ olmak üzere, (3.1) denklem sisteminin salınımlı olması için gerek ve yeter şart $\lambda_i(X(T)) = \alpha_i + i\beta_i, (i = 1, 2, \dots, N)$ olmak üzere

a) $\beta_i = 0$ iken $\lambda_i(X(T)) = \alpha_i < 0, (i = 1, 2, \dots, N)$ olmasıdır.

b) $\beta_i \neq 0$ iken; $r = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}, (i = 1, 2, \dots, N)$ olmak üzere

- 1) $r < 1$ ise $\lambda_i(X(T)), (i = 1, 2, \dots, N)$ birim diskin içinde olup $x(t)$ çözümü sifıra yakınsayarak salınımlıdır;
- 2) $r = 1$ ise $\lambda_i(X(T)), (i = 1, 2, \dots, N)$ birim diskin üzerinde olup $x(t)$ çözümü sabit büyüklükte salınımlıdır;
- 3) $r > 1$ ise $\lambda_i(X(T)), (i = 1, 2, \dots, N)$ birim diskin dışında olup $x(t)$ çözümü artan büyüklükte salınımlıdır.

3. Hem Schur Kararlılık Hem Salınımlılık: (3.1) sisteminin hem Schur kararlı hem de salınımlı olması ile sistemin $X(T)$ monodromi matrisinin hem Schur kararlı hem de salınımlı olmasının denk olduğu açıkça görülmektedir. Bu sistemin özdeğerleri $\lambda_i(X(T)) \in \mathbb{R}, (i = 1, 2, \dots, N)$ olmak üzere, Böylece, (3.1) sisteminin hem Schur kararlı hem de salınımlı olması için gerek ve yeter şart $(-1 < \lambda_i(X(T)) < 0), (i = 1, 2, \dots, N)$ olmasıdır.

Simetrik olmayan matrisler için öz değer problemi iyi konulmuş bir problem olmadığından Schur kararlılığı tespit için Spektral Kriter yerine, Schur kararlılığı karakterize eden bir lineer cebirsel denklemin çözümü yardımıyla hesaplanan parametreleri kullanmak daha kullanışlıdır (Akın ve Bulgak, 1998; Duman, 2008).

Şimdi, yukarıda bahsettiğimiz periyodik katsayılı sistemlerin kararlılık parametrelerin tanımı için gerekli Lyapunov teoremini verelim.

Teorem 3.1. (3.1) sisteminin monodromi matrisi $X(T)$ matrisinin Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart her $C = C^* > 0$ matrisi için

$$X^*(T)HX(T) - H + C = 0$$

Lyapunov fark matris denkleminin

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} (X^*(T))^k C (X(T))^k, H = H^* > 0$$

tek çözümüne sahip olmasıdır (Duman,2008).

$C = I$ olması durumunda

$$X^*(T)HX(T) - H + I = 0$$

Lyapunov fark matris denkleminin tek çözümü

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} (X^*(T))^k (X(T))^k, H = H^* > 0 \quad (3.3)$$

olmaktadır. (3.3) matris serisinin yakınsak olması $X(T)$ monodromi matrisinin ((3.1) sisteminin) Schur kararlı olmasına denktir.

(3.1) sisteminin Schur kararlılığının kalitesini gösteren kararlılık parametrsi;

$$\omega_1(A, T) = \|H\|,$$

şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre $\omega_1(A, T) < \infty$ ise verilen sistem Schur kararlı, aksi takdirde $\omega_1(A, T) = \infty$ ve sistem Schur kararlı değildir (Duman, 2008; Aydın vd, 2000).

(3.1) periyodik katsayılı fark denklem sisteminin Schur kararlı olması için gerek ve yeter şartın $|\lambda_i(X(T))| < 1$, $(i = 1, 2, \dots, N)$ olması ile Teorem 3.1.'deki Schur kararlılık parametresinin $\omega_1(A, T) < \infty$ olması birbirine denktir; yani,

$$|\lambda_i(X(T))| < 1, (i = 1, 2, \dots, N) \Leftrightarrow (\exists H = H^* > 0 \exists X^*(T)HX(T) - H + I = 0) \Leftrightarrow (\omega_1(A, T) < \infty)$$

dir.

Şimdi de periyodik katsayılı lineer diferensiyel denklem sistemlerinin Hurwitz kararlılığının kalitesini veren parametreyi tanımını verebilmek için Lyapunov teoremini verelim.

$A(t)$ matrisi, elemanları sürekli fonksiyonlar olan T periyodlu $(T > 0)$ N boyutlu matris olmak üzere

$$x'(t) = A(t)x(t), A(t + T) = A(t), T > 0, t \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

sistemi verilsin. Bu sistem *periyodik katsayılı lineer diferensiyel denklem sistemi* olarak adlandırılır. Eğer $X(t)$ verilen sistemin fundamental matrisi ise o zaman,

$$X(t + T) = X(t)X(T) \quad t \geq 0$$

olur.

$$\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t), \quad X(0) = I$$

sisteminin $X(t)$ çözümü varlık ve teklik teoremine göre vardır (Aydın, 1995). (3.4) sisteminin çözümündeki $X(T)$ matrisin sistemin monodromi matrisi olarak adlandırılır (Aydın, 1995).

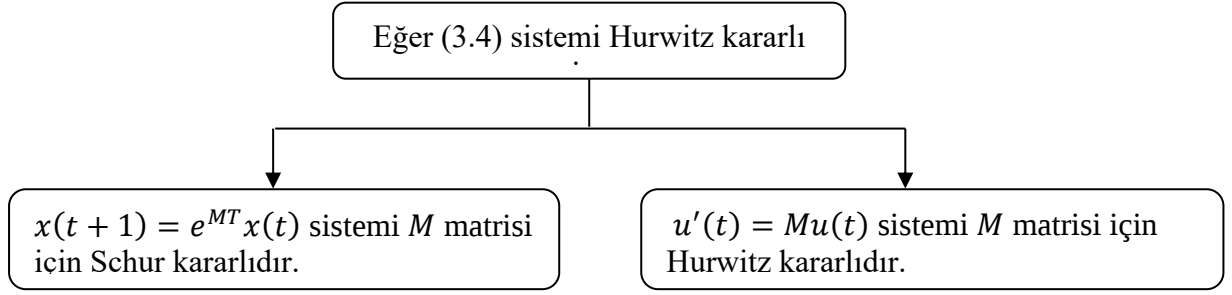
Şimdi Floquet-Lyapunov teoremini kullanarak periyodik katsayılı lineer diferensiyel denklem sistemlerinin Hurwitz kararlılığını ve periyodik katsayılı lineer diferensiyel denklem sistemlerinin Hurwitz kararlılığını kullanarak sabit katsayılı lineer fark denklem sistemlerinin salınımlılığını anlatalım.

Elemanları sürekli fonksiyonlar olan T -periyodik, N boyutlu $A(t)$ katsayı matrisi ve $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$, $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere (3.4) periyodik katsayılı lineer diferensiyel denklem sistemi

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad A(t + T) = A(t), \quad T > 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

ele alalım.

Floquet-Lyapunov Teoremine göre; (3.4) sisteminin fundamental matrisi $Y(t)$, $M, N \times N$ boyutlu bir matris ve $F(0) = I$, $F(t + T) = F(t)$, $\det F(t) \neq 0$ olmak üzere, $Y(t) = F(t)e^{Mt}$ olarak tanımlıdır ve (3.4) sisteminin Hurwitz kararlılığı M sabit matrisinin Hurwitz kararlılığına veya $Y(T) = e^{MT}$ sabit monodromi matrisinin Schur kararlılığına bağlıdır. Karşıt olarak $F(t + T) = F(t)$, $F(0) = I$, $\det F(t) \neq 0$ ise o zaman $Y(t)$ periyodik katsayılı diferensiyel denklem sisteminin fundamental matrisidir (Keten vd, 2020).



Şema 3.1. (3.4) fark denklem sisteminin $(x'(t) = A(t)x(t), A(t+T) = A(t), T > 0, t \in \mathbb{R})$ Hurwitz kararlı olması için elde edilen birbirine denk sonuçlar.

Kritik 3.1. (3.1) fark denklem sisteminin hem Schur kararlı hemde sifıra yakınsayarak salınımlı olması için

$$A(t) \in \{A(t) \mid \omega_1(A, T) < \infty \text{ ve } \kappa(M) < \infty\}$$

olması yeterlidir.

3.1. Periyodik Katsayılı Linear Fark Denklem Sistemlerini Hem Schur Kararlı Hem Salınımlı Kılan Denk Sonuçlar

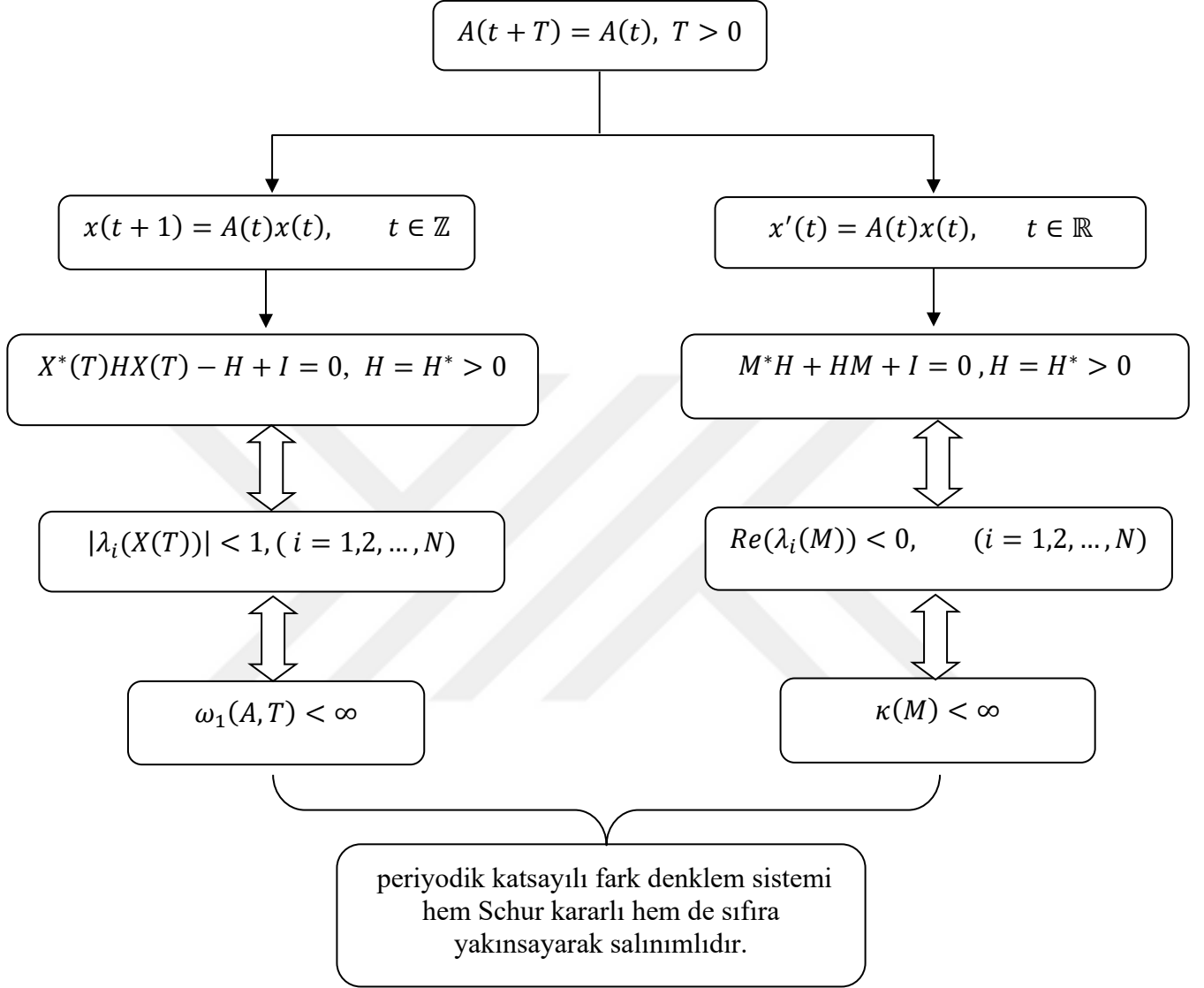
(3.1) periyodik katsayılı fark denklem sistemi ve (3.4) periyodik katsayılı diferensiyel denklem sistemi aynı $A(t+T) = A(t)$ katsayı matrisine sahip olsun.

$X(T)$, (3.1) periyodik katsayılı fark denklem sisteminin monodromi matrisi ve $Y(T)$, (3.4) periyodik katsayılı diferensiyel denklem sisteminin monodromi matrisi olmak üzere (3.1) periyodik katsayılı fark denklem sistemi için

1. (3.1) periyodik katsayılı fark denklem sistemi Schur kararlı ve (3.4) periyodik katsayılı diferensiyel denklem sistemi Hurwitz kararlı ise;
2. $|\lambda_i(X(T))| < 1, (i = 1, 2, \dots, N)$ ve $Y(T) = e^{MT}$ olmak üzere $Re(\lambda_i(M)) < 0, (i = 1, 2, \dots, N)$ ise;
3. $X^*(T)HX(T) - H + I = 0, H = H^* > 0$ ve $Y(T) = e^{MT}$ olmak üzere $M^*H + HM + I = 0, H = H^* > 0$ ise;
4. $\omega_1(A, T) < \infty$ ve $\kappa(M) < \infty$ ise

(3.1) fark denklem sistemi hem Schur kararlı hemde sıfıra yakınsayarak salınımlıdır.

Burada 1., 2., 3., 4. şartları birbirine denktir. Bunu bir de şema ile aşağıda gösterelim:



Şema 3.2. (3.1) fark denklem sisteminin $(x(t+1) = A(t)x(t), t \in \mathbb{Z})$ hem Schur kararlı hem de sıfıra yakınsayarak salınımlı olması için elde edilen birbirine denk sonuçlar

Örnek 3.1. $x(t+1) = \begin{pmatrix} -0.5 + \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) & 0 \\ 0 & -0.5 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \end{pmatrix} x(t), t \in \mathbb{Z}$ periyodik

katsayılı lineer fark denklem sistemini ele alalım. Verilen periyodik katsayılı fark denklem sisteminin monodromi matrisini hesaplayalım.

$$A(0) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad A(1) = \begin{pmatrix} 0.366 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A(2) = \begin{pmatrix} -1.366 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X(3) = A(2)A(1)A(0) = \begin{pmatrix} 0.249 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $X(3)^*HX(3) - H + I = 0$ denklemi hesaplayarak $H = \begin{pmatrix} 1.06 & 0 \\ 0 & 1.33 \end{pmatrix}$ şeklinde elde edilir ve $H^* = H > 0$ dir dolayısıyla $\omega_1(A, 3) = \|H\| = 1.33 < \infty$ olup $A(t)$ Schur kararlıdır.

Şimdi verilen periyodik katsayılı fark denklem sisteminin katsayı matrisi ile aynı

$$\text{katsayı matrisine sahip } y'(t) = \begin{pmatrix} -0.5 + \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) & 0 \\ 0 & -0.5 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \end{pmatrix} y(t), t \in \mathbb{R}$$

periyodik katsayılı lineer diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistemin monodromi matrisini hesaplayalım;

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t)$$

$$\Rightarrow Y(t) = Ce^{\int A(t)dt}$$

$$\Rightarrow Y(t) = Ce^{\begin{pmatrix} -0.5t - \frac{3}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) & 0 \\ 0 & -0.5t + \frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \end{pmatrix}}$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-0.5t - \frac{3}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)} & 0 \\ 0 & e^{-0.5t + \frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)} \end{pmatrix}$$

$Y(0) = I$ olduğundan $c_{11} = e^{\frac{3}{2\pi}}, c_{12} = 0, c_{21} = 0, c_{22} = 1$ elde edilir. Dolayısıyla periyodik katsayılı lineer diferensiyel denklem sisteminin fundamental matrisi

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-0.5t + \frac{3}{2\pi} - \frac{3}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)} & 0 \\ 0 & e^{-0.5t + \frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)} \end{pmatrix}$$

ve monodromi matrisi

$$Y(T) = Y(3) = \begin{pmatrix} e^{-1.5} & 0 \\ 0 & e^{-1.5} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Fundamental matrisin

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t), Y(0) = I$$

denklemini sağladığını biliyoruz. Bulduğumuz $Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-0.5t + \frac{3}{2\pi} - \frac{3}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)} & 0 \\ 0 & e^{-0.5t + \frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)} \end{pmatrix}$

fundamental matrisi için Cauch probleminin sağlandığını gösterelim.

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e^{-0.5t + \frac{3}{2\pi} - \frac{3}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)} & 0 \\ 0 & e^{-0.5t + \frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \\
&\begin{pmatrix} \left(-0.5 + \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\right)e^{-0.5t + \frac{3}{2\pi} - \frac{3}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)} & 0 \\ 0 & \left(-0.5 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\right)e^{-0.5t + \frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)} \end{pmatrix} \\
&A(t)Y(t) = \\
&\begin{pmatrix} -0.5 + \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) & 0 \\ 0 & -0.5 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-0.5t + \frac{3}{2\pi} - \frac{3}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)} & 0 \\ 0 & e^{-0.5t + \frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)} \end{pmatrix} \\
&= \\
&\begin{pmatrix} \left(-0.5 + \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\right)e^{-0.5t + \frac{3}{2\pi} - \frac{3}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)} & 0 \\ 0 & \left(-0.5 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\right)e^{-0.5t + \frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

yukarıda $\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t)$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
Y(0) &= \begin{pmatrix} e^{-0.5(0) + \frac{3}{2\pi} - \frac{3}{2\pi}\cos(0)} & 0 \\ 0 & e^{-0.5(0) + \frac{3}{2\pi}\sin(0)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{\frac{3}{2\pi} - \frac{3}{2\pi}} & 0 \\ 0 & e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

yukarıda $Y(0) = I$ olduğu görülür. Şimdi $Y(T) = e^{MT}$ eşitliğinden M matrisini bulalım;

$$\begin{pmatrix} e^{-1.5} & 0 \\ 0 & e^{-1.5} \end{pmatrix} = e^{3M} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Floquet Lyapunov Teoremindeki $Y(t) = F(t)e^{Mt}$ denkleminde $F(t)$ matrisini bulalım;

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{3}{2\pi} - \frac{3}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)} & 0 \\ 0 & e^{\frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böyle tüm t 'ler için $F(0) = I$ ve $\det F(t) \neq 0$ dir.

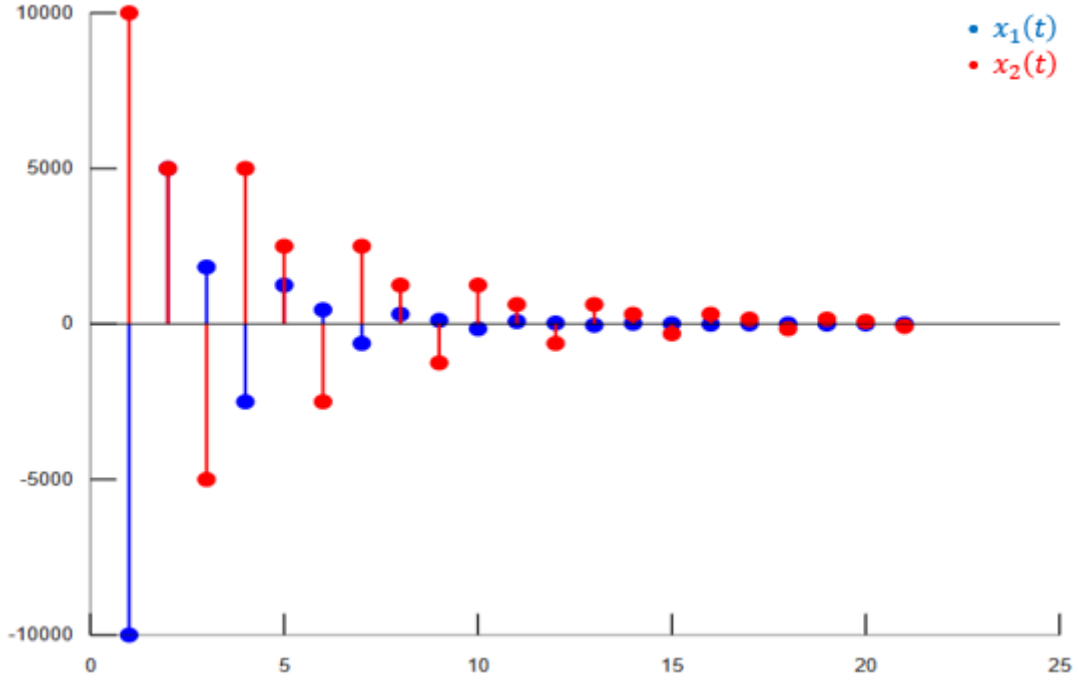
M matrisinin özdeğerleri $\operatorname{Re}(\lambda_i(M)) < 0$ aynı zamanda $\kappa(M) = 1 < \infty$ olup verilen periyodik katsayılı lineer diferensiyel denklemi Hurwitz kararlıdır.

Dolayısıyla sistem

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} -0.5 + \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) & 0 \\ 0 & -0.5 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \end{pmatrix} x(t), t \in \mathbb{Z}$$

periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemi hem Schur kararlı hem de sifıra yakınsayarak salınımlı olur.

Verilen fark denklem sisteminin $\begin{pmatrix} -10000 \\ 10000 \end{pmatrix}$ başlangıç şartı altında $x(t)$ çözümünün grafiği aşağıda verilmiştir. Burada $x_1(t)$ mavi ve $x_2(t)$ kırmızı ile çizilmiştir.



Şekil 3.1. Örnek 3.1.'teki sistemin hem Schur kararlı hem de sifıra yakınsayarak salınımlı olduğunu gösteren grafik.

Örnek 3.2. $x(t+1) = \begin{pmatrix} -0.5 & -\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & -0.5 \end{pmatrix} x(t)$, $t \in \mathbb{Z}$ periyodik katsayılı lineer

fark denklem sistemini ele alalım. Verilen periyodik katsayılı fark denklem sisteminin monodromi matrisini hesaplayalım.

$$A(0) = \begin{pmatrix} -0.5 & -1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad A(1) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad A(2) = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix},$$

$$A(3) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix},$$

$$X(4) = A(3)A(2)A(1)A(0) = \begin{pmatrix} 0.312 & 0 \\ 0 & 0.312 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $X(4)^*HX(4) - H + I = 0$ denklemi hesaplayarak $H = \begin{pmatrix} 1.107 & 0 \\ 0 & 1.107 \end{pmatrix}$ şeklinde elde edilir ve $H^* = H > 0$ dir dolayısıyla $\omega_1(A, 4) = \|H\| = 1.107 < \infty$ olup $A(t)$ Schur kararlıdır.

Şimdi verilen periyodik katsayılı fark denklem sisteminin katsayı matrisi ile aynı

katsayı matrisine sahip $y'(t) = \begin{pmatrix} -0.5 & -\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & -0.5 \end{pmatrix} y(t), t \in \mathbb{R}$ periyodik

katsayılı lineer diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistemin monodromi matrisini hesaplayalım;

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t)$$

$$\Rightarrow Y(t) = Ce^{\int A(t)dt}$$

$$\Rightarrow Y(t) = Ce^{\begin{pmatrix} -0.5t & -\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t) \\ \frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t) & -0.5t \end{pmatrix}}$$

$Y(0) = I$ olduğundan $C = I$ elde edilir, dolayısıyla

$$Y(t) = e^{\begin{pmatrix} -0.5t & -\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t) \\ \frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t) & -0.5t \end{pmatrix}}.$$

Şimdi $e^{\begin{pmatrix} -0.5t & -\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t) \\ \frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t) & -0.5t \end{pmatrix}}$ matrisini hesaplayalım.

$$A(t)x = \lambda(t)x, x \neq 0$$

$$\Rightarrow (A(t) - \lambda(t)I)x = 0$$

$$|A(t) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -0.5t - \lambda & -\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t) \\ \frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t) & -0.5t - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

burada özdeğerleri $\lambda_1 = -0.5t + \frac{2}{\pi}i\sin(\frac{\pi}{2}t)$ ve $\lambda_2 = -0.5t - \frac{2}{\pi}i\sin(\frac{\pi}{2}t)$ elde edilir, böylece

$$f(A(t)) = e^{A(t)}, r(A(t)) = \alpha_1 A(t) + \alpha_0 I$$

$$f(\lambda) = e^\lambda, r(\lambda) = \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

$f(A(t)) = r(A(t))$ olduğundan $e^{A(t)} = \alpha_1 A(t) + \alpha_0 I$ ve $f(\lambda_i) = r(\lambda_i)$

$$e^{-0.5t + \frac{2}{\pi}i\sin(\frac{\pi}{2}t)} = \alpha_1(-0.5t + \frac{2}{\pi}i\sin(\frac{\pi}{2}t)) + \alpha_0$$

$$e^{-0.5t - \frac{2}{\pi}i\sin(\frac{\pi}{2}t)} = \alpha_1(-0.5t - \frac{2}{\pi}i\sin(\frac{\pi}{2}t)) + \alpha_0$$

bu iki denklem birbirinden çıkarsak $\alpha_0 = \frac{0.5te^{-0.5t}}{\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)} \left(\frac{e^{\frac{2}{\pi}i\sin(\frac{\pi}{2}t)} - e^{-\frac{2}{\pi}i\sin(\frac{\pi}{2}t)}}{2i} \right) + e^{-0.5t} \left(\frac{e^{\frac{2}{\pi}i\sin(\frac{\pi}{2}t)} + e^{-\frac{2}{\pi}i\sin(\frac{\pi}{2}t)}}{2} \right)$ ve $\alpha_1 = \frac{e^{-0.5t}}{\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)} \left(\frac{e^{\frac{2}{\pi}i\sin(\frac{\pi}{2}t)} - e^{-\frac{2}{\pi}i\sin(\frac{\pi}{2}t)}}{2i} \right)$ elde edilir.

burdan Euler formülünü kullanarak $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ ve $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ ki $x = \frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)$ dir, dolayısıyla

$$\alpha_0 = \frac{0.5te^{-0.5t}}{\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)} \sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) + e^{-0.5t} \cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \text{ ve } \alpha_1 = \frac{e^{-0.5t}}{\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)} \sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)$$

olur, $e^{A(t)} = \alpha_1 A(t) + \alpha_0 I$ denklemin yerine yazılırsa

$$e^{A(t)} = \frac{e^{-0.5t}}{\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)} \sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \begin{pmatrix} -0.5t & -\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t) \\ \frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t) & -0.5t \end{pmatrix} + \frac{0.5te^{-0.5t}}{\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)} \sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) + e^{-0.5t} \cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dolayısıyla periyodik katsayılı lineer diferensiyel denklem sisteminin fundamental matrisi

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-0.5t} \cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) & -e^{-0.5t} \sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \\ e^{-0.5t} \sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) & e^{-0.5t} \cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \end{pmatrix}$$

dir. Buradan monodromi matrisi

$$Y(T) = Y(4) = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Fundamental matrisin

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t), Y(0) = I$$

denklemini sağladığını biliyoruz. Bulduğumuz $Y(t) =$

$$\begin{pmatrix} e^{-0.5t} \cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) & -e^{-0.5t} \sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \\ e^{-0.5t} \sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) & e^{-0.5t} \cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \end{pmatrix} \text{ fundamental matrisi için Cauch}$$

probleminin sağlandığını gösterelim.

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e^{-0.5t} \cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) & -e^{-0.5t} \sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \\ e^{-0.5t} \sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) & e^{-0.5t} \cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -0.5e^{-0.5t} \cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)e^{-0.5t} \sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) & 0.5e^{-0.5t} \sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)e^{-0.5t} \cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \\ -0.5e^{-0.5t} \sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)e^{-0.5t} \cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) & -0.5e^{-0.5t} \cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)e^{-0.5t} \sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A(t)Y(t) &= \\
&\begin{pmatrix} -0.5 & -\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-0.5t}\cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) & -e^{-0.5t}\sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \\ e^{-0.5t}\sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) & e^{-0.5t}\cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -0.5e^{-0.5t}\cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)e^{-0.5t}\sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) & 0.5e^{-0.5t}\sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)e^{-0.5t}\cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \\ -0.5e^{-0.5t}\sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)e^{-0.5t}\cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) & -0.5e^{-0.5t}\cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)e^{-0.5t}\sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

yukarıda $\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t)$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
Y(0) &= \begin{pmatrix} e^{-0.5(0)}\cos\left(\frac{2}{\pi}\sin(0)\right) & -e^{-0.5(0)}\sin\left(\frac{2}{\pi}\sin(0)\right) \\ e^{-0.5(0)}\sin\left(\frac{2}{\pi}\sin(0)\right) & e^{-0.5(0)}\cos\left(\frac{2}{\pi}\sin(0)\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^0 & -e^0(0) \\ e^0(0) & e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

yukarıda $Y(0) = I$ olduğu görülür.

Şimdi $Y(T) = e^{MT}$ eşitliğinden M matrisini bulalım;

$$\begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix} = e^{4M} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Floquet Lyapunov Teoremindeki $Y(t) = F(t)e^{Mt}$ denkleminde $F(t)$ matrisini bulalım;

$$F(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) & -\sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \\ \sin\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) & \cos\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece tüm t 'ler için $F(0) = I$ ve $\det F(t) = 1 \neq 0$ dir.

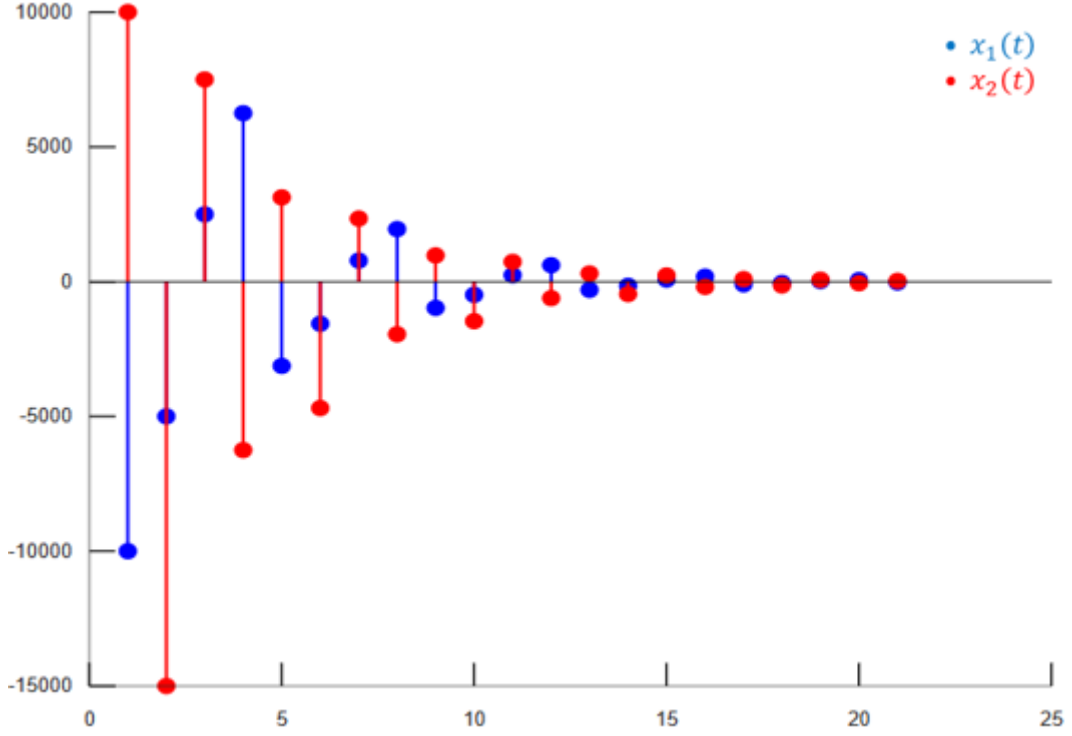
M matrisinin özdeğerleri $\operatorname{Re}(\lambda_i(M)) < 0$ aynı zamanda $\kappa(M) = 1 < \infty$ olup verilen periyodik katsayılı lineer diferensiyel denklemi Hurwitz kararlıdır.

Dolayısıyla sistem

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} -0.5 & -\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & -0.5 \end{pmatrix} x(t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemi hem Schur kararlı hem de sıfıra yakınsayarak salınımlı olur.

Verilen fark denklem sisteminin $\begin{pmatrix} -10000 \\ 10000 \end{pmatrix}$ başlangıç şartı altında $x(t)$ çözümünün grafiği aşağıda verilmiştir. Burada $x_1(t)$ mavi ve $x_2(t)$ kırmızı ile çizilmiştir.



Şekil 3.2. Örnek 3.2.'teki sistemin hem Schur kararlı hem de sifıra yakınsayarak salınımlı olduğunu gösteren grafik.

Örnek 3.3. $x(t+1) = \begin{pmatrix} -0.1 + \sin(\frac{\pi}{2}t) & \cos(\frac{\pi}{2}t) & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}t) & -0.1 + \sin(\frac{\pi}{2}t) & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 + \cos(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix} x(t),$

$t \in \mathbb{Z}$ periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemini ele alalım. Verilen periyodik katsayılı fark denklem sisteminin monodromi matrisini hesaplayalım.

$$A(0) = \begin{pmatrix} -0.1 & 1 & 0 \\ 1 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad A(1) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix},$$

$$A(2) = \begin{pmatrix} -0.1 & -1 & 0 \\ -1 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 \end{pmatrix}, \quad A(3) = \begin{pmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$X(4) = A(3)A(2)A(1)A(0) = \begin{pmatrix} 0.9801 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9801 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1875 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $X(4)^*HX(4) - H + I = 0$ denklemi hesaplayarak $H = \begin{pmatrix} 25.38 & 0 & 0 \\ 0 & 25.38 & 0 \\ 0 & 0 & 1.037 \end{pmatrix}$ şeklinde elde edilir ve $H^* = H > 0$ dir dolayısıyla $\omega_1(A, 4) = \|H\| = 25.38 < \infty$ olup $A(t)$ Schur kararlıdır.

Şimdi verilen periyodik katsayılı fark denklem sisteminin katsayı matrisi ile aynı katsayı matrisine sahip $y'(t) =$

$$\begin{pmatrix} -0.1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & -0.1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{pmatrix} y(t), t \in \mathbb{R} \quad \text{periyodik}$$

katsayılı lineer diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistemin monodromi matrisini hesaplayalım;

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t)$$

$$\Rightarrow Y(t) = Ce^{\int A(t)dt}$$

$$\Rightarrow Y(t) = Ce \begin{pmatrix} -0.1t - \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & 0 \\ \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & -0.1t - \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & 0 \\ 0 & 0 & -0.5t + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

$$Y(t) = C \begin{pmatrix} \frac{e^{-0.1t + \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)} + e^{-0.1t}}{2e^{\frac{2}{\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)}} & \frac{e^{-0.1t + \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)} - e^{-0.1t}}{2e^{\frac{2}{\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)}} & 0 \\ \frac{e^{-0.1t + \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)} - e^{-0.1t}}{2e^{\frac{2}{\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)}} & \frac{e^{-0.1t + \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)} + e^{-0.1t}}{2e^{\frac{2}{\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-0.5t + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)} \end{pmatrix}$$

$$Y(0) = I \text{ olduğundan } C = \begin{pmatrix} e^{\frac{2}{\pi}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2}{\pi}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ elde edilir. Dolayısıyla periyodik}$$

katsayılı lineer diferensiyel denklem sisteminin fundamental matrisi

yukarıda $\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t)$ olduğu görülür.

$$Y(0) = \begin{pmatrix} \frac{e^{\frac{2}{\pi}} + e^{\frac{2}{\pi}}}{2e^{\frac{2}{\pi}}} & \frac{e^{\frac{2}{\pi}} - e^{\frac{2}{\pi}}}{2e^{\frac{2}{\pi}}} & 0 \\ \frac{e^{\frac{2}{\pi}} - e^{\frac{2}{\pi}}}{2e^{\frac{2}{\pi}}} & \frac{e^{\frac{2}{\pi}} + e^{\frac{2}{\pi}}}{2e^{\frac{2}{\pi}}} & 0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

yukarıda $Y(0) = I$ olduğu görülür.

Şimdi $Y(T) = e^{MT}$ eşitliğinden M matrisini bulalım

$$\begin{pmatrix} e^{-0.4} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-0.4} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{pmatrix} = e^{4M} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Floquet Lyapunov Teoremindeki $Y(t) = F(t)e^{Mt}$ denkleminde $F(t)$ matrisini bulalım;

$$F(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sin(\frac{\pi t}{2})} + e^{\frac{2}{\pi}}}{2e^{\frac{2}{\pi}(\cos(\frac{\pi t}{2}) + \sin(\frac{\pi t}{2}))}} & \frac{e^{\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sin(\frac{\pi t}{2})} - e^{\frac{2}{\pi}}}{2e^{\frac{2}{\pi}(\cos(\frac{\pi t}{2}) + \sin(\frac{\pi t}{2}))}} & 0 \\ \frac{e^{\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sin(\frac{\pi t}{2})} - e^{\frac{2}{\pi}}}{2e^{\frac{2}{\pi}(\cos(\frac{\pi t}{2}) + \sin(\frac{\pi t}{2}))}} & \frac{e^{\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sin(\frac{\pi t}{2})} + e^{\frac{2}{\pi}}}{2e^{\frac{2}{\pi}(\cos(\frac{\pi t}{2}) + \sin(\frac{\pi t}{2}))}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2}{\pi} \sin(\frac{\pi t}{2})} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece tüm t 'ler için $F(0) = I$ ve $\det F(t) \neq 0$ dir.

M matrisinin özdeğerleri $Re(\lambda_i(M)) < 0$ aynı zamanda $\kappa(M) = 5 < \infty$ olup verilen periyodik katsayılı lineer diferensiyel denklemi Hurwitz kararlıdır.

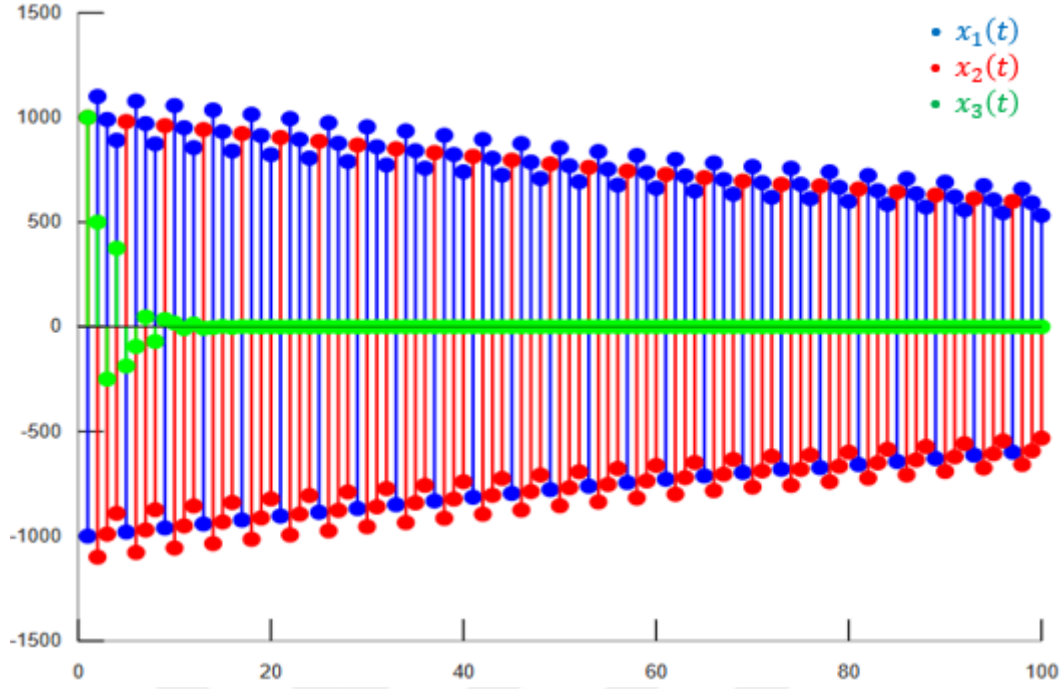
Dolayısıyla sistem

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} -0.1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & -0.1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{pmatrix} x(t), t \in \mathbb{Z}$$

periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemi hem Schur kararlı hem de sıfıra yakınsayarak salınımlı olur.

Verilen fark denklem sisteminin $\begin{pmatrix} -1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$ başlangıç şartı altında $x(t)$

çözümünün grafiği aşağıda verilmiştir. Burada $x_1(t)$ mavi, $x_2(t)$ kırmızı ve $x_3(t)$ yeşil ile çizilmiştir.



Şekil 3.3. Örnek 3.3.'teki sistemin hem Schur kararlı hem de sifıra yakınsayarak salınımlı olduğunu gösteren grafik.

Örnek 3.4. $x(t+1) = \begin{pmatrix} 0.1 + \sin(\frac{\pi}{2}t) & \cos(\frac{\pi}{2}t) & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}t) & 0.1 + \sin(\frac{\pi}{2}t) & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix} x(t)$, $t \in \mathbb{Z}$ periyodik

katsayılı lineer fark denklem sistemini ele alalım. Verilen periyodik katsayılı fark denklem sisteminin monodromi matrisini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
 A(0) &= \begin{pmatrix} 0.1 & 1 & 0 \\ 1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}, & A(1) &= \begin{pmatrix} 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}, \\
 A(2) &= \begin{pmatrix} 0.1 & -1 & 0 \\ -1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}, & A(3) &= \begin{pmatrix} -0.9 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix} \\
 X(4) &= A(3)A(2)A(1)A(0) = \begin{pmatrix} 0.9801 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9801 & 0 \\ 0 & 0 & 0.003 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $X(4)^*HX(4) - H + I = 0$ denklemi hesaplayarak $H =$

$$\begin{pmatrix} 25.38 & 0 & 0 \\ 0 & 25.38 & 0 \\ 0 & 0 & 1.01 \end{pmatrix} \text{şeklinde elde edilir ve } H^* = H > 0 \text{ dir dolayısıyla } \omega_1(A, 4) =$$

$\|H\| = 25.38 < \infty$ olup $A(t)$ Schur kararlıdır.

Şimdi verilen periyodik katsayılı fark denklem sisteminin katsayı matrisi ile aynı

$$\text{katsayı matrisine sahip } y'(t) = \begin{pmatrix} 0.1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & 0.1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix} y(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

periyodik katsayılı lineer diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistemin monodromi matrisini hesaplayalım;

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t)$$

$$\Rightarrow Y(t) = Ce^{\int A(t)dt}$$

$$\Rightarrow Y(t) = Ce^{\begin{pmatrix} 0.1t - \frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}t) & \frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t) & 0 \\ \frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t) & 0.1t - \frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}t) & 0 \\ 0 & 0 & 0.25t \end{pmatrix}}$$

$$Y(t) = C \begin{pmatrix} \frac{e^{0.1t + \frac{4}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)} + e^{0.1t}}{2e^{\frac{2}{\pi}(\cos(\frac{\pi}{2}t) + \sin(\frac{\pi}{2}t))}} & \frac{e^{0.1t + \frac{4}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)} - e^{0.1t}}{2e^{\frac{2}{\pi}(\cos(\frac{\pi}{2}t) + \sin(\frac{\pi}{2}t))}} & 0 \\ \frac{e^{0.1t + \frac{4}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)} - e^{0.1t}}{2e^{\frac{2}{\pi}(\cos(\frac{\pi}{2}t) + \sin(\frac{\pi}{2}t))}} & \frac{e^{0.1t + \frac{4}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)} + e^{0.1t}}{2e^{\frac{2}{\pi}(\cos(\frac{\pi}{2}t) + \sin(\frac{\pi}{2}t))}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{0.25t} \end{pmatrix}$$

$$Y(0) = I \text{ olduğundan } C = \begin{pmatrix} e^{\frac{2}{\pi}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2}{\pi}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ elde edilir. Dolayısıyla periyodik}$$

katsayılı lineer diferensiyel denklem sisteminin fundamental matrisi

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{0.1t + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)} + e^{0.1t + \frac{2}{\pi}}}{2e^{\frac{2}{\pi}(\cos(\frac{\pi}{2}t) + \sin(\frac{\pi}{2}t))}} & \frac{e^{0.1t + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)} - e^{0.1t + \frac{2}{\pi}}}{2e^{\frac{2}{\pi}(\cos(\frac{\pi}{2}t) + \sin(\frac{\pi}{2}t))}} & 0 \\ \frac{e^{0.1t + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)} - e^{0.1t + \frac{2}{\pi}}}{2e^{\frac{2}{\pi}(\cos(\frac{\pi}{2}t) + \sin(\frac{\pi}{2}t))}} & \frac{e^{0.1t + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)} + e^{0.1t + \frac{2}{\pi}}}{2e^{\frac{2}{\pi}(\cos(\frac{\pi}{2}t) + \sin(\frac{\pi}{2}t))}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{0.25t} \end{pmatrix}$$

ve monodromi matrisi

$$Y(T) = Y(4) = \begin{pmatrix} e^{0.4} & 0 & 0 \\ 0 & e^{0.4} & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Fundamental matrisin

$$= \begin{pmatrix} \frac{\frac{2}{e\pi} + \frac{2}{e\pi}}{2e\pi} & \frac{\frac{2}{e\pi} - \frac{2}{e\pi}}{2e\pi} & 0 \\ \frac{\frac{2}{e\pi} - \frac{2}{e\pi}}{2e\pi} & \frac{\frac{2}{e\pi} + \frac{2}{e\pi}}{2e\pi} & 0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

yukarıda $Y(0) = I$ olduğu görülür.

Şimdi $Y(T) = e^{MT}$ eşitliğinden M matrisini bulalım

$$\begin{pmatrix} e^{0.4} & 0 & 0 \\ 0 & e^{0.4} & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = e^{4M} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Floquet Lyapunov Teoremindeki $Y(t) = F(t)e^{Mt}$ denkleminde $F(t)$ matrisini bulalım;

$$F(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sin(\frac{\pi t}{2})} + e^{\frac{2}{\pi}}}{2e^{\frac{2}{\pi}(\cos(\frac{\pi t}{2}) + \sin(\frac{\pi t}{2}))}} & \frac{e^{\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sin(\frac{\pi t}{2})} - e^{\frac{2}{\pi}}}{2e^{\frac{2}{\pi}(\cos(\frac{\pi t}{2}) + \sin(\frac{\pi t}{2}))}} & 0 \\ \frac{e^{\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sin(\frac{\pi t}{2})} - e^{\frac{2}{\pi}}}{2e^{\frac{2}{\pi}(\cos(\frac{\pi t}{2}) + \sin(\frac{\pi t}{2}))}} & \frac{e^{\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sin(\frac{\pi t}{2})} + e^{\frac{2}{\pi}}}{2e^{\frac{2}{\pi}(\cos(\frac{\pi t}{2}) + \sin(\frac{\pi t}{2}))}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böyle tüm t 'ler için $F(0) = I$ ve $\det F(t) \neq 0$ dir.

M matrisinin için $\kappa(M) = \infty$ olup verilen periyodik katsayılı lineer diferensiyel denklemi Hurwitz kararlı değildir.

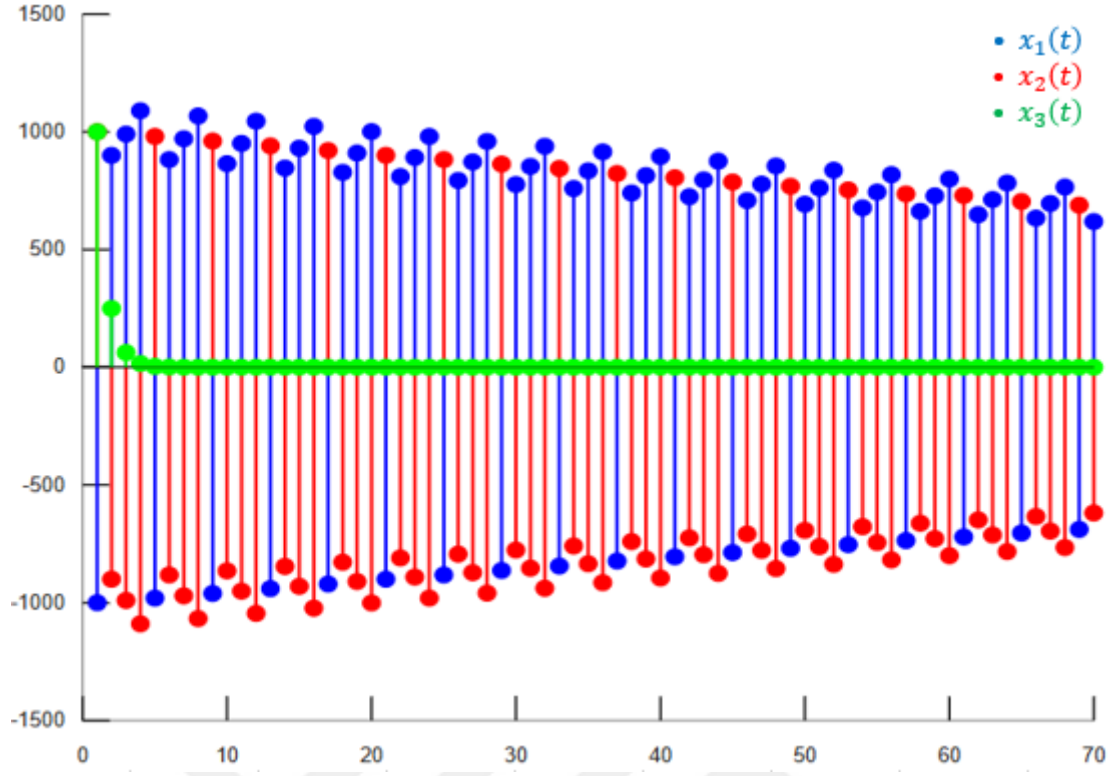
Dolayısıyla sistem

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0.1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & 0.1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix} x(t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemi Schur kararlı ama sıfıra yakınsayarak salınımlı olmaz.

Verilen fark denklem sisteminin $\begin{pmatrix} -1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$ başlangıç şartı altında $x(t)$

çözümünün grafiği aşağıda verilmiştir. Burada $x_1(t)$ mavi, $x_2(t)$ kırmızı ve $x_3(t)$ yeşil ile çizilmiştir.



Şekil 3.4. Örnek 3.4.'teki sistemin hem Schur kararlı hem salınımlı olmadığını gösteren grafik.

4. PERİYODİK KATSAYILI FARK DENKLEM SİSTEMLERİN HEM SCHUR KARARLILIĞIN HEM DE SALINIMLILIĞININ HASSASİYETİ

Bu bölümde, birinci mertebeden periyodik katsayılı fark denklem sistemleri ve periyodik katsayılı diferensiyel denklem sistemlerinin literatürde ki süreklilik teoremleri verilip bu teoremler yardımı ile periyodik katsayılı fark denklem sistemlerinin hem Schur kararlılığı hemde sıfıra yakınsayarak salınımlılığı için yeni bir kriter elde edilmiştir.

Literatürde, (3.1) sisteminin Schur kararlılığının hassasiyetini ve (3.4) sisteminin Hurwitz kararlılığının hassasiyetini veren süreklilik teoremlerini ifade etmeden önce bu sistemlerin bozunum sistemlerini tanıtalım.

$A(t) = A(t + T)$ ve $B(t) = B(t + T)$, N boyutlu periyodik (T periyotlu) karesel matrisler olmak üzere (3.1) periyodik katsayılı lineer fark denklem sisteminin

$$y(t + 1) = (A(t) + B(t))y(t), \quad t \in \mathbb{Z} \quad (4.1)$$

bozunum sistemidir. (4.1) Cauchy probleminden elde edilen

$$Z(t + 1) = (A(t) + B(t))Z(t), \quad Z(0) = I, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Cauchy probleminin çözümü olan $Z(t)$ matrisi (4.1) sisteminin fundamental matrisi, $Z(T)$ matrisi de (4.1) sisteminin monodromi matrisidir. (4.1) sistemi Schur kararlı ise

$$Z^*(T)\tilde{H}Z(T) - \tilde{H} + I = 0$$

Lyapunov denklemini sağlayan

$$\tilde{H} = \sum_{k=0}^{\infty} (Z^*(T))^k (Z(T))^k, \quad \tilde{H} = \tilde{H}^* > 0$$

çözümü var ve $\omega_1(A + B, T) = \|\tilde{H}\| < \infty$ dur (Duman, 2008).

Teorem 4.1. (3.1) sistemi Schur kararlı ($\omega_1(A, T) < \infty$) olmak üzere

$$\|Z(T) - X(T)\| < \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A, T)}} - \|X(T)\|$$

eşitsizliğini sağlayan $B(t)$ bozunum matrisi için (4.1) bozunum sistemi de Schur kararlıdır (Aydın vd, 2001;Duman, 2008).

Şimdi (3.4) periyodik katsayılı lineer diferensiyel denklem sisteminin bozunum sistemini tanıtalım.

$A(t)$ ve $B(t)$ elemanları sürekli fonksiyonlar olan T periyodlu ($T > 0$) N boyutlu matrisler ve $w(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_N(t))^T$, $w_1(t), w_2(t), \dots, w_N(t)$ türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$w'(t) = [A(t) + B(t)]w(t), \quad B(t + T) = B(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

sistemi (3.4) periyodik katsayılı diferensiyel denklem sisteminin bozunum sistemidir.

Teorem 4.2. (3.4) sisteminin fundamental matrisi $W(t) = F(t)e^{Mt}$ (burada M, N boyutlu karesel matris ve $F(0) = I$, $F(t + T) = F(t)$, $\det F(t) \neq 0$) olmak üzere (3.4) sistemi Hurwitz kararlı olsun. Bu taktirde $\|\delta M\| < \frac{\|M\|}{\kappa(M)}$ olacak şekilde herhangi bir δM matrisi için $B(t) := F(t)\delta M F^{-1}(t)$ olmak üzere,

$$\|B(t)\| \leq \frac{\sigma_{\max}(F(t)) \|M\|}{\sigma_{\min}(F(t)) \kappa(M)}$$

$B(t + T) = B(t)$ bozunum matrisi için (4.2) bozunum sistemi de Hurwitz kararlıdır. Burada $\sigma_{\max}(F(t))$ ve $\sigma_{\min}(F(t))$ sırasıyla $F(t)$ matrisinin max ve min singüler değerleridir (Keten vd, 2020).

Sonuç 4.1. (3.1) sistemi hem Schur kararlı hem de sifıra yakınsayarak salınımlı (yani $(t) \in \{A(t) \mid \omega_1(A, T) < \infty \text{ ve } \kappa(M) < \infty\}$) olmak üzere

$$B(t) \in \{B(t) \mid \|B(t)\| < \min\{\delta, \Delta\}\}$$

şartını sağlayan herhangi bir $B(t)$ bozunum matrisi için $A(t) + B(t)$ matrisi ((3.4) bozunum sistemi) hem Schur kararlı hem de sifıra yakınsayarak salınımlıdır. Burada

$$\delta = \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A, T)}} - \|X(T)\| \text{ ve } \Delta = \frac{\sigma_{\max}(F(t)) \|M\|}{\sigma_{\min}(F(t)) \kappa(M)} \text{ dir.}$$

Örnek 4.1. $A(t) = \begin{pmatrix} -0.5 + \sin(\frac{2\pi}{3}t) & 0 \\ 0 & -0.5 + \cos(\frac{2\pi}{3}t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{Z}$ matrisini ele

alalım. $A(t)$ matrisi için (3.1) periyodik katsayılı fark denklem sistemi $\omega_1(A, 3) = 1.33$ olduğundan Schur kararlı, (3.4) periyodik katsayılı diferensiyel denklem sistemi $\kappa(M) = 1$ olduğundan Hurwitz kararlıdır.

Şimdi δ 'yı hesaplayalım; $\|X(3)\| = 0.5$ olduğundan

$$\delta = \sqrt{\|X(3)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A,3)}} - \|X(3)\| = \sqrt{(0.5)^2 + \frac{1}{1.33}} - 0.5 = 0.5.$$

Şimdi Δ 'yı hesaplayalım; $\|M\| = 0.5$ olduğundan

$F(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{3}{2\pi} - \frac{3}{2\pi} \cos(\frac{2\pi}{3}t)} & 0 \\ 0 & e^{\frac{3}{2\pi} \sin(\frac{2\pi}{3}t)} \end{pmatrix}$ hesapladık, şimdi $\sigma_{\max}(F(t))$ ve $\sigma_{\min}(F(t))$ hesaplayalım

$$F^T(t)F(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{3}{\pi} - \frac{3}{\pi} \cos(\frac{2\pi}{3}t)} & 0 \\ 0 & e^{\frac{3}{\pi} \sin(\frac{2\pi}{3}t)} \end{pmatrix}$$

$F^T(t)F(t)$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1(F^T(t)F(t)) = e^{\frac{3}{\pi} - \frac{3}{\pi} \cos(\frac{2\pi}{3}t)}$ ve $\lambda_2(F^T(t)F(t)) = e^{\frac{3}{\pi} \sin(\frac{2\pi}{3}t)}$ dir, $t = 0$ alırsak $\lambda_1(F^T(t)F(t)) = 1$ ve $\lambda_2(F^T(t)F(t)) = 1$ olur, $\sigma_{\max}(F(t)) = \sqrt{1} = 1$ ve $\sigma_{\min}(F(t)) = \sqrt{1} = 1$, $F(t)$ matrisinin en büyük ve en küçük singüler değerleridir. Dolayısıyla

$$\Delta = \frac{\sigma_{\max}(F(t)) \|M\|}{\sigma_{\min}(F(t)) \kappa(M)} = 0.5.$$

Sonuç 4.1. göre

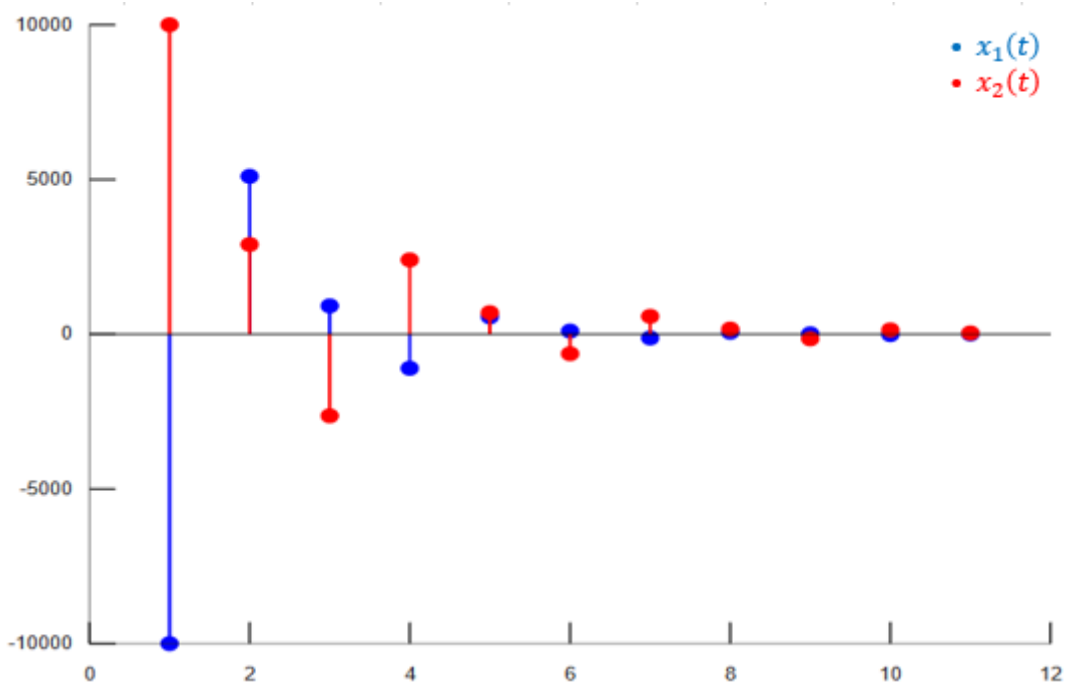
$$\|B(t)\| < \min\{0.5, 0.5\}$$

olan bozunum matrisleri için hem Schur kararlı hem de salınımlıdır.

$$B(t) = \begin{pmatrix} -0.01 - 0.2 \sin(\frac{2\pi}{3}t) & 0 \\ 0 & -0.01 - 0.2 \cos(\frac{2\pi}{3}t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{Z} \text{ ve}$$

$B(t)$ matrisi için $\max_{t \geq 0} \|B(t)\| = 0.21 < 0.5$ sağladığından (4.1) bozunum sistemi hem Schur kararlı hem de salınımlıdır.

Verilen fark denklem sisteminin $\begin{pmatrix} -10000 \\ 10000 \end{pmatrix}$ başlangıç şartı altında $x(t)$ çözümünün grafiği aşağıda verilmiştir. Burada $x_1(t)$ mavi ve $x_2(t)$ kırmızı ile çizilmiştir.



Şekil 4.1. Örnek 4.1.'teki $B(t)$ bozunum sistemin hem Schur kararlı hem de salınımlı olduğunu gösteren grafik.

Örnek 4.2. $A(t) = \begin{pmatrix} -0.5 & -\cos(\frac{\pi}{2}t) \\ \cos(\frac{\pi}{2}t) & -0.5 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{Z}$ matrisini ele alalım. $A(t)$ matrisi

için (3.1) periyodik katsayılı fark denklem sistemi $\omega_1(A, 4) = 1.107$ olduğundan Schur kararlı, (3.4) periyodik katsayılı diferensiyel denklem sistemi $\kappa(M) = 1$ olduğundan Hurwitz kararlıdır.

Şimdi δ 'yı hesaplayalım; $\|X(4)\| = 0.312$ olduğundan

$$\delta = \sqrt{\|X(4)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A,4)}} - \|X(4)\| = \sqrt{(0.312)^2 + \frac{1}{1.107}} - 0.312 = 0.687.$$

Şimdi Δ 'yı hesaplayalım; $\|M\| = 0.5$ olduğundan

$$F(t) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2}{\pi} \sin(\frac{\pi}{2}t)) & \sin(\frac{2}{\pi} \sin(\frac{\pi}{2}t)) \\ \sin(\frac{2}{\pi} \sin(\frac{\pi}{2}t)) & \cos(\frac{2}{\pi} \sin(\frac{\pi}{2}t)) \end{pmatrix} \text{ hesapladık, şimdi } \sigma_{\max}(F(t)) \text{ ve}$$

$\sigma_{\min}(F(t))$ hesaplayalım

$$F^T(t)F(t) = \begin{pmatrix} 1 & \sin(\frac{4}{\pi} \sin(\frac{\pi}{2}t)) \\ \sin(\frac{4}{\pi} \sin(\frac{\pi}{2}t)) & 1 \end{pmatrix}$$

$F^T(t)F(t)$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1(F^T(t)F(t)) = \sin(\frac{4}{\pi} \sin(\frac{\pi}{2}t)) + 1$ ve $\lambda_2(F^T(t)F(t)) = -\sin(\frac{4}{\pi} \sin(\frac{\pi}{2}t)) + 1$ dir. $t = 1$ için $\lambda_1(F^T(t)F(t)) = 1.95$ ve $\lambda_2(F^T(t)F(t)) = 0.05$ alırsak, $\sigma_{\max}(F(t)) = \sqrt{1.95} = 1.39$ ve $\sigma_{\min}(F(t)) = \sqrt{0.05} = 0.22$, $F(t)$ matrisinin en büyük ve en küçük singüler değerleridir, dolayısıyla

$$\Delta = \frac{\sigma_{\max}(F(t)) \|M\|}{\sigma_{\min}(F(t)) \kappa(M)} = 3.15.$$

Sonuç 4.1. göre

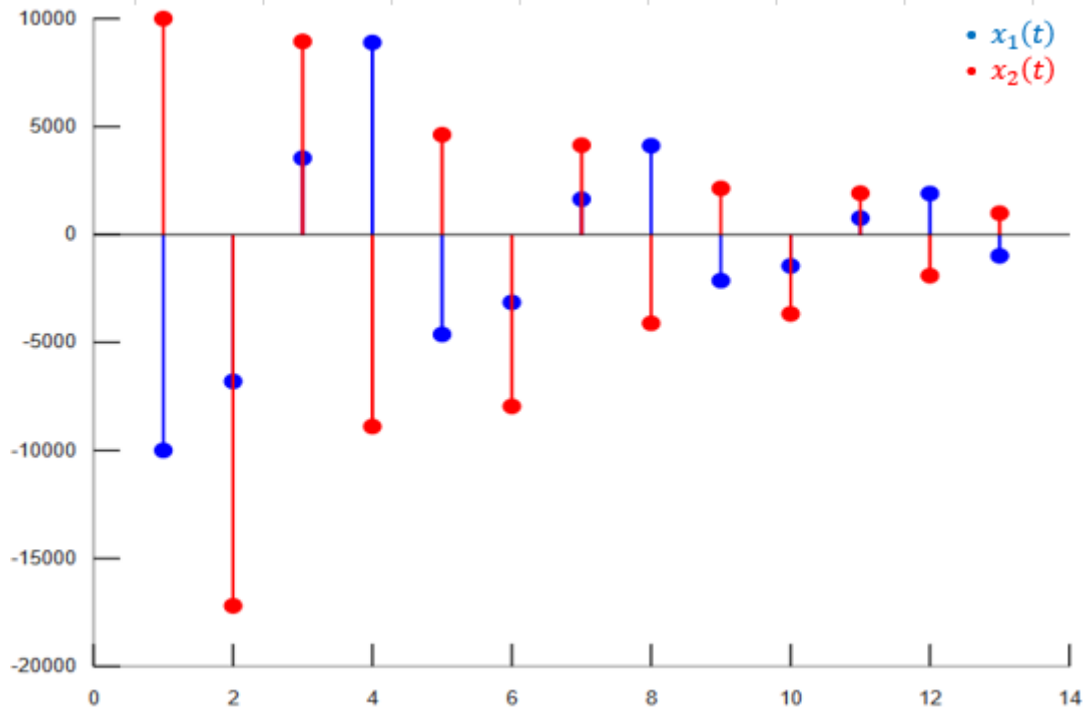
$$\|B(t)\| < \min\{0.687, 3.15\}$$

olan bozunum matrisleri için hem Schur kararlı hem de salınımlıdır.

$$B(t) = \begin{pmatrix} -0.02 & \frac{-\cos(\frac{\pi}{2}t)}{5} \\ \frac{\cos(\frac{\pi}{2}t)}{5} & -0.02 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{Z}$$

$B(t)$ matrisi için $\max_{t \geq 0} \|B(t)\| = 0.2 < 0.687$ sağladığından (4.1) bozunum sistemi hem Schur kararlı hem de salınımlıdır.

Verilen fark denklem sisteminin $\begin{pmatrix} -10000 \\ 10000 \end{pmatrix}$ başlangıç şartı altında $x(t)$ çözümünün grafiği aşağıda verilmiştir. Burada $x_1(t)$ mavi ve $x_2(t)$ kırmızı ile çizilmiştir.



Şekil 4.2. Örnek 4.2.’teki bozunum sistemin hem Schur kararlı hem de salınımlı olduğunu gösteren grafik.

Not 4.1. Çalışmamızda yapılan örneklerde ki sayısal hesaplamalar ondalık kısımda 3 basamak alınarak kesme hatası ile hesaplanmıştır.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında literatürde bulunan periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemlerinin çözümünün davranışı veren Schur kararlılık ve salınımlılık kavramlarının beraber sağlandığı durumları incelemek ve yeni sonuçlar elde etmektir. Elde edilen sonuçları ana hatlarıyla verecek olursak;

- Periyodik katsayılı fark denklem sistemlerini hem Schur kararlı hem sıfıra yakınsayarak salınımlı için yeni bir kriter,
- Periyodik katsayılı fark denklem sistemlerini hem Schur kararlı hem sıfıra yakınsayarak salınımlılığın sürekliliğini veren bir sonuç

elde edilmiştir.



6. KAYNAKLAR

- Aydın, K., 1995, Adi Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Asimtotik Kararlılığı için Şart Sayısı, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.
- Aydın, K., Bulgak, H. and Demidenko, G.V., 2000 Numeric characteristics for asymptotic stability of solutions to linear difference equations with periodic coefficients, *Siberian Math. J.*, 41, No;6 Novosibirsk, 1005–1014.
- Aydın, K., Bulgak, H. and Demidenko, G.V., 2001 Continuity of numeric characteristics for asymptotic stability of solutions to linear difference equations with periodic coefficients, *Selcuk Journal of Applied Mathematics*, 2 (2), Konya.
- Akın, Ö., Bulgak, H., 1998, Lineer Fark Denklemleri Ve Kararlılık Teorisi, *Selçuk Üniversitesi Yayınları*, Konya.
- Agarwal, R.P., Grace, S.R., O'Regan, D., 2000, Oscillation Theory For Difference And Functional Differential Equations, *Springer Science & Business Media*.
- Bulgakov, A. Ya., 1995, Matrix Computations with Guaranteed Accuracy in Stability Theory, *Selçuk Üniversitesi Yayınları*, Konya.
- Bulgakov, A. Ya., 1980, An Effectively Calculable Parameter for the Stability Property of a System of Linear Differential Equations with Constant Coefficients, *in Siberia Math J.* 21, 339-347, 1980.
- Bulgak, H., 1999, Pseudoeigenvalues, Spectral Portrait of a Matrix and Their Connections with Different Criteria of Stability, *Error Control and Adaptivity in Scientific Computing*, 95-124.
- Bulgakov A. Ya. and Godunov S. K., 1988, Circle Dichotomy of the Matrix Spectrum, *Siberia Math. J.*, 29, No;5, Novosibirsk, 1988, 59-70.
- Çakıroğlu, R., 2019, Yüksek Mertebeden Fark Denklem Sistemlerinin Çözümlerinin Hrekeri, Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.
- Duman, A., 2008, Difference Equation Systems, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.
- Duman, A., Aydın, K., 2011, Sensitivity of Schur Stability of Systems of Linear Difference Equations with Constant Coefficients, *Scientific Research and Essays*. 6 (28), 5846-5854.

- Duman, A., Aydın, K., 2014, Some Results on the Sensitivity of Schur Stability of Linear Difference Equations with Constant Coefficients, *Konuralp Journal of Mathematics* 2 (2), 22-34.
- Duman, A., Kızıllkan Çelik, G., Aydın, K., 2016, Sensitivity of Schur Stability of Systems of Linear Difference Equations with Periodic Coefficients, *NTMSCI*, 4 (2), 159-173 (2016).
- Duman, A., Kızıllkan Çelik, G., Aydın, K., 2018, Sensitivity of Schur Stability of the k -th Order difference Equation System $y(n + k) = Cy(n)$, *Konuralp Journal of Mathematics*, 6(1), (2018), 7-13.
- Elaydi, S., 2005, An Introduction to Difference Equations, *Springer*, New York.
- Keten, A., Duman, A. and Aydın, K., 2020, Sensitivity of Hurwitz Stability of Linear Differential Equation Systems with Periodic Coefficients, *Konuralp Journal of Mathematics*, 8(2), (2020), 423-428.