

AĞUSTOS 2024

Yüksek Lisans Tezi - Matematik

DİLEK BİLBAY

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEÇİŞ ŞARTLI PERİYODİK KESİRLİ
STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİLEK BİLBAY
AĞUSTOS 2024

GEÇİŞ ŞARTLI PERİYODİK KESİRLİ
STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Prof. Dr. Abdullah KABLAN

İkinci Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Bayram BALA

Dilek BİLBAY

Ağustos 2024



©2024[Gaziantep Üniversitesi]

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Dilek BİLBAY

ABSTRACT

THE PERIODIC FRACTIONAL STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH TRANSMISSION CONDITION

BİLBAY, Dilek

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah KABLAN

Co-Supervisor: Asst. Prof. Bayram BALA

August 2024

61 pages

Fractional Sturm-Liouville problems are generalized versions of classical Sturm-Liouville theory using fractional derivatives. In this thesis, spectral analysis of Sturm-Liouville problems, historical development of fractional analysis and fractional periodic Sturm-Liouville problems with transition conditions are examined. In addition, the spectral theory of classical Sturm-Liouville problems is discussed in detail and basic theorems are presented. At the same time, the basic functions required for fractional analysis are introduced, fractional derivative and integral concepts are detailed. Finally, the focus is on the fractional Sturm-Liouville equation with periodic boundary conditions given with transition conditions and the spectral theorems of this problem are proved.

Key Words: Periodic Sturm-Liouville Problem, Fractional Derivative, Eigenvalues and Eigenfunctions.

ÖZET

GEÇİŞ ŞARTLI PERİYODİK KESİRLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ

BİLBAY, Dilek

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Danışman: Prof. Dr. Abdullah KABLAN

İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Bayram BALA

Ağustos 2024

61 sayfa

Kesirli Sturm-Liouville problemleri, klasik Sturm-Liouville teorisinin kesirli türevler kullanılarak genelleştirilmiş versiyonlarıdır. Bu tezde Sturm-Liouville problemlerinin spektral analizi, kesirli analizin tarihsel gelişimi ve geçiş şartlı kesirli periyodik Sturm-Liouville problemleri incelenmiştir. Bununla birlikte klasik Sturm-Liouville problemlerinin spektral teorisi detaylı bir şekilde ele alınmış ve temel teoremler sunulmuştur. Aynı zamanda kesirli analiz için gerekli olan temel fonksiyonlar tanıtılmış, kesirli türev ve integral kavramları detaylandırılmıştır. Son olarak geçiş şartı ile birlikte verilen periyodik sınır şartlarına sahip, kesirli Sturm-Liouville denkleminde odaklanılmış ve bu problemin spektral teoremleri ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Periyodik Sturm-Liouville Problemi, Kesirli Türev, Özdeğerler ve Özfonksiyonlar.



“Canum aileme”

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, danışman hocam, sayın Prof. Dr. Abdullah KABLAN'a ve ikinci danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Bayram BALA'ya sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen çok sevdiğim biricik anneme, tüm aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT	i
ÖZET	ii
İTHAF	iii
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
SEMBOLLER LİSTESİ.....	viii
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
BÖLÜM 2 STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ	4
2.1. Sturm-Liouville Problemi.....	4
2.2. Çözümlerin Sıfırları.....	10
2.3 Kendine Eş Diferansiyel Operatör	15
BÖLÜM 3 KESİRLİ ANALİZ	22
3.1 Bazı Özel Fonksiyonlar	22
3.1.1 Gama Fonksiyonu	22
3.1.2 Beta Fonksiyonu	24
3.1.3 Hata Fonksiyonu	24
3.1.4 Mittag-Leffler Fonksiyonu.....	24
3.1.5 Mellin-Ross Fonksiyonu.....	26
3.2 Riemann-Liouville Kesirli İntegrali	26
3.2.1 Kesirli İntegraller için Mertebe Kuralı	33
3.2.2 Kesirli İntegralin Türevi ve Türevin Kesirli İntegrali.....	34
3.3 Riemann-Liouville Kesirli Türevi	35
3.3.1 Örnekler	36
3.4 Caputo Kesirli Türevi.....	39
BÖLÜM 4 GEÇİŞ ŞARTLI PERİYODİK KESİRLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ.....	41
4.1. Kesirli Sturm-Liouville Problemleri	41
4.2. Spektral Özellikler.....	44
BÖLÜM 5 SONUÇLAR.....	56
KAYNAKLAR	58



ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 y_1 ve y_2 çözümlerinin dönüşümlü kökleri.....	11
Şekil 3.1 Farklı mertebeden kesirli integrallerin 1. mertebeden klasik integrale yaklaşımı.....	32
Şekil 3.2 Farklı mertebeden kesirli türevlerin adi türeve yaklaşımı	38



SEMBOLLER LİSTESİ

$L_p(\mathbb{R})$	Reel sayılarda Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar kümesi
$L_p(a, b)$	(a, b) aralığında Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar kümesi
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonların uzayı
$E_a(z)$	Tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{a,b}(z)$	İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
D_{a+}^α	$[a, b]$ aralığında sol uç α . mertebeden Riemann kesirli türevi
D_{b-}^α	$[a, b]$ aralığında sağ uç α . mertebeden Riemann kesirli türevi
${}^c D_{a+}^\alpha$	$[a, b]$ aralığında sol uç α . mertebeden Caputo kesirli türevi
${}^c D_{b-}^\alpha$	$[a, b]$ aralığında sağ uç α . mertebeden Caputo kesirli türevi
I_{a+}^α	$[a, b]$ aralığında sol uç α . mertebeden kesirli integrali
I_{b-}^α	$[a, b]$ aralığında sağ uç α . mertebeden kesirli integrali
$W[f, g]$	f ve g fonksiyonlarının Wronskianı
$\Gamma(\alpha)$	Gama fonksiyonu

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Sturm-Liouville denklemlerini içeren sınır değer problemlerinin zengin ve çeşitli bir tarihi vardır. Bu tür problemler kuantum mekaniği, nükleer fizik, elektronik, jeofizik ve doğa bilimleri gibi alanlarda ortaya çıkmaktadır. Denklemler yalnızca ikinci dereceden gibi görünse de, bu tür problemler üzerine kesirli türevler inşa edilip farklı mertebeden türevlerle de incelenmektedir. Neredeyse 200 yıllık olmasına rağmen Sturm-Liouville teorisi matematikçiler, fizikçiler ve mühendislerin ilgisini çeken oldukça aktif bir araştırma alanı olmaya devam etmektedir.

Matematiğin gelişimi, bilim ve mühendisliğin çeşitli alanlarındaki problemlerin çözümüne yönelik yeni araçların ve yöntemlerin bulunmasını zorunlu kılmaktadır. Bu bağlamda, klasik diferansiyel denklemler ve integral hesapları, birçok fiziksel ve mühendislik probleminin çözümünde etkin bir rol oynamıştır. Ancak, bazı durumlarda, bu geleneksel yöntemler, karmaşıklıklar, belirsizlikler ve belirsiz sınırlı ortamlar gibi daha sofistike problemlerin modellenmesinde yetersiz kalmaktadır. Bu noktada, kesirli analiz, kesirli diferansiyel denklemler ve kesirli Sturm-Liouville problemleri devreye girmektedir.

Kesirli analiz, klasik analizin bir genellemesi olup, diferansiyel ve integrasyon işlemlerinin gerçek veya kompleks kesirli mertebelerde yapılmasına olanak tanır. Kesirli türev ve integral kavramları, fizik, mühendislik, biyoloji ve ekonomi gibi birçok alanda karmaşık sistemlerin modellenmesi ve analizi için güçlü araçlar sunmaktadır. Bu yöntemler, özellikle belirsiz ortamlar, uzun süreç, analiz, inceleme etkileşimlerinin olduğu durumlarda etkili çözümler sunar.

Kesirli diferansiyel denklemler, klasik diferansiyel denklemlerin kesirli türevler kullanılarak genelleştirilmiş halleridir. Bu denklemler, daha geniş bir çözüm yelpazesine sahip olup, fiziksel süreçlerin daha doğru bir şekilde modellenmesini sağlar. Kesirli diferansiyel denklemler, anomal difüzyon, visko elastisite,

elektrokimyasal süreçler ve finansal modellemeler gibi birçok alanda uygulanmaktadır.

Kesirli Sturm-Liouville problemleri ise, klasik Sturm-Liouville teorisinin kesirli türevler kullanılarak genelleştirilmiş versiyonlarıdır. Sturm-Liouville problemleri, sınır değer problemlerinin çözümünde önemli bir rol oynar ve özellikle özdeğer problemlerinin çözümünde kullanılır. Kesirli Sturm-Liouville problemleri, kesirli türevlerin getirdiği ek esneklik sayesinde, fiziksel sistemlerin daha karmaşık özelliklerini ve dinamiklerini modellemek için kullanılabilir.

Bunun yanı sıra son yıllarda özfonksiyonların temel aralığın iç noktalarında süreksizliklere sahip olduğu Sturm-Liouville denklemlerini içeren problemlere ilgi artmaktadır. Bu tür süreksizlik koşulları iletim (geçiş) koşulları olarak adlandırılır. Fiziksel bağlamda bu tür problemler ortamdaki bir değişiklik ile ilişkilidir. Isı ve kütle transferi de dahil olmak üzere çeşitli fiziksel transfer problemlerinde doğal olarak ortaya çıkar. Kesirli türev ve integralin sadece diferansiyel denklemde bazen de problemin sınır koşullarında ve/veya iletim koşullarında da yer aldığı durumlar özellikle ilgi çekicidir.

Bu tezin amacı klasik Sturm-Liouville teorisinin bazı sonuçlarını yukarıdaki türden süreksiz problemlere genişletmektir. Bu tezde

$$L_{\alpha}[y] := D_{b-}^{\alpha}[p(x) {}^C D_{a+}^{\alpha} y] + q(x)y = \lambda r(x)y \quad (1.1.1)$$

kesirli Sturm -Liouville problemi, $[a, c) \cup (c, b]$ aralığı üzerinde

$$y(a) = y(b) \quad (1.1.2)$$

$$I_{b-}^{\alpha}(p {}^C D_{a+}^{\alpha} y)(a) = I_{b-}^{\alpha}(p {}^C D_{a+}^{\alpha} y)(b)$$

sınır koşulları ve $c \in (a, b)$ iç noktasındaki

$$y(c-) = y(c+) \quad (1.1.3)$$

$$I_{b-}^{\alpha}(p {}^C D_{a+}^{\alpha} y)(c-) = I_{b-}^{\alpha}(p {}^C D_{a+}^{\alpha} y)(c+)$$

iletim koşulları ile birlikte incelenmiştir. Burada $p(x)$, ${}^c D_{b-}^{\alpha} p(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$ sũrekli, reel fonksiyonlar ve $[a, c) \cup (c, b]$ aralığı ũzerinde ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılan $r(x) > 0$ dır. (1.1.1)-(1.1.3) probleminin aşıkar olmayan ũmũnũ veren λ değerine bu problemin özdeğeri, aşıkar olmayan bu $y(x)$ ũmũne de problemin λ özdeğerine karşılık gelen zfunksiyonu denir.

Sturm-Liouville problemlerinin spektral özellikleri, kesirli analiz, kesirli diferansiyel denklemler ve kesirli Sturm-Liouville problemleri ũzerinde durulacak, buna ek olarak temel aralığın i noktalarında sũreksizliklere sahip olduğu kesirli Sturm-Liouville denklemlerini içeren problemler ve bu alanlardaki temel kavramlar, yöntemler ve uygulamalar ele alınacaktır. Ayrıca, kesirli tũrevlerin ve integral hesaplarının teorik temelleri, kesirli Sturm-Liouville problemlerinin analizi detaylı bir şekilde incelenecektir.

İkinci blũmde, Sturm-Liouville teorisi detaylı bir şekilde ele alınarak bu teorinin temel kavramları ve uygulama alanları açıklanmaktadır. ũmde, kesirli analiz ve kesirli tũrevler ũzerine odaklanılmış, bu alandaki önemli tanımlar ve yöntemler sunulmuştur. Drdũncũ blũmde ise, geçiş şartlarına sahip kesirli Sturm-Liouville probleminin temel spektral teoremleri tartışılmış ve bu teoremlerin matematiksel sonuçları incelenmiştir. Son olarak beşinci blũmde de elde edilen bulgular, tartışma ve genel sonuçlara yer verilmiştir. Bu tez hem teorik hem de pratik açıdan zengin içerikleriyle, ilgili alanlardaki literatũre önemli katkılar sağlamayı amaçlamaktadır.

BÖLÜM 2

STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

Bu bölümde, diferansiyel denklemler teorisinin önemli bir parçası olan Sturm-Liouville problemi ele alınacaktır. Sturm-Liouville problemi, adını Charles-François Sturm ile Joseph Liouville'den almış olup, genellikle ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerle ilişkilendirilir. Bu problemin önemi, yalnızca matematiksel analizde değil, aynı zamanda fizik ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde de geniş bir yelpazede uygulamalara sahip olmasından kaynaklanmaktadır. Sturm-Liouville problemi, özellikle özdeğer ve özfonksiyon analizinde kritik bir rol oynar ve Fourier serileri, kuantum mekaniği, dalga denklemleri ve çeşitli mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. Bu bölümde, Sturm-Liouville probleminin temel tanım ve teoremleri, özdeğerlerin ve özfonksiyonların özellikleri, sınır değer problemleri ve bu teorisinin çeşitli uygulamaları ayrıntılı bir şekilde incelenecektir.

2.1. Sturm-Liouville Problemi

Reel bir I aralığı üzerinde tanımlı ikinci mertebeden Sturm-Liouville denklemi:

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = \lambda r(x)y \quad (2.1.1)$$

ve ayrık sınır koşulları:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= 0, \quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0) \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0, \quad (\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ reel fonksiyonlar ve $r(x)$ ağırlık fonksiyonudur ve λ bir reel sayıdır.

Sturm-Liouville denklemi, (2.1.2) eşitliklerinde verildiği gibi genellikle belirli bir sınır değer problemine bağlı olarak ele alınır. Bu sınır değer problemi, uygun sınır koşulları altında denklemin çözümlerinin varlığını ve tekliğini garanti eder.

Bir Sturm-Liouville operatörü

$$L = -\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) + \lambda r(x) \quad (2.1.3)$$

şeklinde tanımlanır. (2.1.1) denklemi aynı zamanda $Ly = 0$ olarak da tanımlanır. L operatörü

$$L(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1L\alpha + c_2L\beta$$

lineerlik eşitliğini sağlar. Burada $\alpha, \beta \in C^2(I)$ herhangi iki fonksiyondur ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ herhangi iki sabittir. Dolayısıyla (2.1.1) denklemi, lineer diferansiyel denklemdir. Burada belirtilen L operatörü, farklı ağırlık fonksiyonlarına bağlı olarak çeşitli özelliklere sahip olabilir. Örneğin, bu operatör genellikle *kendine-eş*, *simetrik* veya *normaldir*.

Sturm-Liouville denkleminin çözümleri, bir özdeğer problemi oluşturur. Özdeğer probleminde, denklemin λ parametresine bağlı olarak çözümlerin karakteristik özelliklerini inceleyerek, uygun özdeğerler ve özfonksiyonlarını belirlemeye çalışırız. Lineer denklemlerin temel bir özelliği, denklemin çözümlerinin herhangi bir lineer kombinasyonunun da bir çözüm olmasıdır. Şimdi φ ve ψ , (2.1.1) denklemi sağlayan herhangi iki fonksiyon olsun. c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere,

$$L\varphi = 0, \quad L\psi = 0$$

dır. Açıktır ki,

$$L(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1L\varphi + c_2L\psi = 0$$

olur. Bu, *süper pozisyon ilkesi* olarak bilinir.

Lineer diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremine göre [1], eğer $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonlarının tümü I aralığı üzerinde sürekliyse ve x_0 , I da bir noktaysa, o zaman herhangi iki ϕ ve γ sabitleri için (2.1.1) denklemi, I üzerinde

$$\varphi(x_0) = \phi, \quad \varphi'(x_0) = \gamma, \quad (2.1.4)$$

şartlarını sağlayan tek bir çözüme sahiptir. (2.1.4) eşitliklerinde verilen eşitlikler, *başlangıç şartı*, (2.1.1), (2.1.4) problemi de *başlangıç değer problemi* olarak adlandırılır.

Buradan itibaren verilen bazı tanım ve teoremlerde kolaylık açısından (2.1.1) denkleminin bazı özelleştirilmiş halleri kullanılacaktır.

Tanım 2.1: $f, g \in C^1$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere,

$$W(f, g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

determinantı f ve g nin *Wronskian*'i olarak adlandırılır. $W(f, g)(x)$ veya $W(x)$ şeklinde gösterilir.

Yardımcı Teorem 2.1: $q \in C(I)$ olmak üzere, y_1 ve y_2

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad x \in I, \quad (2.1.5)$$

homojen denkleminin iki çözümü olsun, o zaman ya tüm $x \in I$ için $W(y_1, y_2)(x) = 0$ dır ya da herhangi bir $x \in I$ için $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ dır.

İspat: Tanım 2.1 den

$$W' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

olduğu açıktır. Ayrıca y_1 ve y_2 , (2.1.5) denkleminin çözümleri olduğundan,

$$y_1'' + qy_1' + ry_1 = 0$$

$$y_2'' + qy_2' + ry_2 = 0$$

eşitlikleri sağlanır. İlk denklemi y_2 ile, ikinci denklemi y_1 ile çarpıp; elde edilen denklemleri birbirinden çıkartırsak,

$$y_1y_2'' - y_2y_1'' + q(y_1y_2' - y_2y_1') = 0$$

$$W' + qW = 0$$

ifadesine ulaşılır. Bu bir diferansiyel denklemdir ve çözümü

$$W(x) = c \exp\left(-\int_a^x q(t)dt\right), \quad x \in I \quad (2.1.6)$$

şeklindedir. Burada c herhangi bir sabittir. Üstel fonksiyon herhangi bir (reel veya kompleks) üs için sıfır olamayacağından $W(x) = 0$ ancak ve ancak $c = 0$ olduğunda gerçekleşecektir.

Yardımcı Teorem 2.2: (2.1.5) denkleminin herhangi iki çözümü olan $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ lineer bağımsızdır ancak ve ancak I üzerinde $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ dır.

İspat: $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ lineer bağımlıysa, o zaman biri diğerinin sabit katıdır ve bu nedenle I üzerinde $W(y_1, y_2)(x) = 0$ olur. Tersine, eğer I üzerindeki herhangi bir noktada $W(y_1, y_2)(x) = 0$ ise, o zaman Yardımcı Teorem 2.2 ye göre $W(y_1, y_2)(x) \equiv 0$ dır. Determinantın özelliklerinden (y_1, y_1') ve (y_2, y_2') vektör fonksiyonlarının lineer olarak bağımlı olduğu anlamına gelir ve dolayısıyla $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ lineer bağımlıdır.

Örnek 2.1:

$$y'' + y = 0 \quad (2.1.7)$$

denklemini iki lineer bağımsız çözüme sahiptir ki bunlar $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarıdır. Dolayısıyla genel çözüm

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

biçimindedir. Açık ki her $x \in \mathbb{R}$ için

$$W(\cos x, \sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

dir. (2.1.7) denklemini $[0, \pi]$ aralığında

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

başlangıç koşulları ile birlikte verilirse, tek çözüm olarak,

$$y(x) = \sin x$$

elde edilir. Ancak homojen başlangıç koşulları,

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

beklendiği gibi $y = 0$ aşıkâr çözümünü verir. Öte yandan,

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0,$$

sınır koşulları tek bir çözüm vermez çünkü,

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 0$$

$$y(\pi) = c_1 \cos \pi + c_2 \sin \pi = -c_1 = 0$$

denklemin çifti c_2 sabitini belirleyemez. Bu sistemdeki katsayıların determinantı,

$$\begin{vmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \cos \pi & \sin \pi \end{vmatrix} = 0$$

olur.

Bu son örnek (2.1.4) başlangıç koşullarının her durumda, genel çözümde, c_1 ve c_2 katsayılarını belirleyemediğini gösterir. Ancak herhangi iki ξ ve η sabitleri için başlangıç şartları,

$$y(x_0) = \xi, \quad y'(x_0) = \eta,$$

her zaman tek bir çözüm verir, çünkü

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = \xi$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = \eta$$

denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinanı

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(y_1, y_2)(x_0)$$

dır. Bu determinant Yardımcı Teorem 2.2 ye göre sıfırdan farklıdır.

Genel olarak $[a, b]$ üzerinde ikinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklem verildiğinde, $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ genel çözümüne

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \xi,$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \eta,$$

ayrık sınır koşulları uygulanırsa

$$c_1 [\alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y_1'(a)] + c_2 [\alpha_1 y_2(a) + \alpha_2 y_2'(a)] = \xi,$$

$$c_1 [\beta_1 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b)] + c_2 [\beta_1 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b)] = \eta,$$

sistemini verir. Dolayısıyla c_1 ve c_2 sabitleri tek bir şekilde belirlenir, ancak ve ancak,

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1')(a) & (\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_2')(a) \\ (\beta_1 y_1 + \beta_2 y_1')(b) & (\beta_1 y_2 + \beta_2 y_2')(b) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.1.8)$$

dır.

2.2. Çözümlerin Sıfırları

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad x \in I, \quad (2.1.9)$$

şeklinde verilen bir diferansiyel denklemin çözümlerinin özelliklerini incelemek için çözmek, ne gerekli ne de her zaman mümkündür. Belirli koşullar altında, denklemin $q(x)$ ile $r(x)$ katsayı fonksiyonları ve sınır koşulları, bu özellikleri tamamıyla ortaya çıkarır. Ayrıca, elde edilen çözümün sıfırlarının (köklerinin) sayısı ve dağılımı, tekil noktaları, asimptotik davranışı ve özfonksiyonların ortogonalite özellikleri gibi niteliksel özelliklerinin tamamı, katsayılar ve verilen sınır koşulları ile belirlenir. Dolayısıyla, $q(x)$ ile $r(x)$ katsayılarının çözümün davranışı üzerindeki etkisi analiz edilerek, bu özelliklerden bazıları çıkarılmaya çalışılabilir. Bu bölümde q ve r fonksiyonlarının, çözümlerin sıfırlarının dağılımı üzerindeki etkisi incelenecektir.

$y'' + y = 0$ denkleminin $\mathbb{R}$ üzerindeki iki çözümünün,

$$\dots < -\pi < -\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2} < \pi < \frac{3\pi}{2} < \dots,$$

tarafından verilen, eşit şekilde dağılmış sonsuz bir değişken sıfır dizisine sahip olduğu bilinmektedir; burada $\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$, $\sin x$ fonksiyonunun sıfırları, $\{\pi/2 + n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ ise $\cos x$ fonksiyonunun sıfırlarıdır.

Bir $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu için, $f(x_0) = 0$ ise ve x_0 noktasının tüm $x \in I \cap U \setminus \{x_0\}$ için $f(x) \neq 0$ olacak şekilde bir U komşuluğu varsa, f fonksiyonunun $x_0 \in I$ noktasında izole (yalıtılmış) bir köke sahip olduğu söylenir.

Yardımcı Teorem 2.3: Eğer $y(x)$, (2.1.9) ifadesindeki homojen denklemin aşıkâr olmayan bir çözümü ise, o zaman $y(x)$ fonksiyonunun sıfırları I aralığında izoledir.

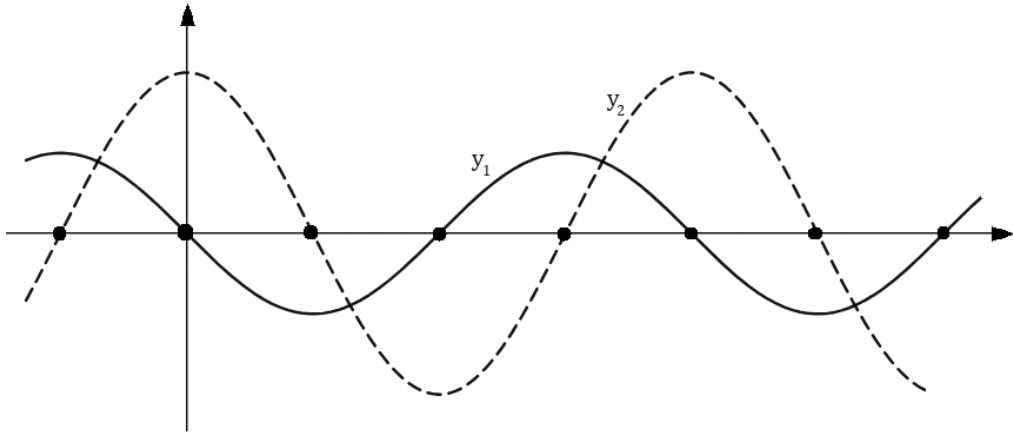
İspat: $y(x)$, (2.1.9) denkleminin bir çözümü olmak üzere varsayalım ki $y(x_0) = 0$ olsun. Eğer $y'(x_0) = 0$ ise o zaman Teklik Teoremine göre $y(x)$ sıfıra denktir. Eğer

$y'(x_0) \neq 0$ ise o zaman $y'(x)$, I üzerinde sürekli olduğundan x_0 noktasının öyle bir U komşuluğu vardır öyle ki $U \cap I$ aralığı üzerinde $y'(x) \neq 0$ dır [2]. Sonuç olarak $y(x)$, $U \cap I$ aralığı üzerinde kesinlikle ya artandır ya da azalandır.

Teorem 2.1: (Sturm Ayırma Teoremi) $y_1(x)$ ve $y_2(x)$,

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad x \in I,$$

olarak verilen denklemin lineer bağımsız çözümleri ise o zaman $y_1(x)$ fonksiyonunun kökleri, $y_2(x)$ fonksiyonunun köklerinden farklıdır ve iki kök dizisi dönüşümlüdür; yani $y_1(x)$ fonksiyonu, $y_2(x)$ fonksiyonunun birbirini takip eden iki sıfırı arasında tam bir sıfır noktasına sahiptir ve bunun tersi de geçerlidir.



Şekil 2.1 y_1 ve y_2 çözümlerinin dönüşümlü kökleri

İspat: $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ lineer bağımsız olduğundan, Wronskian,

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

sıfırdan farklıdır ve bu nedenle I üzerinde bir işarete sahiptir (Yardımcı Teorem 2.2). Öncelikle belirtelim ki $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümleri ortak bir köke sahip değildir. Aksi takdirde W , o noktada sıfır olur. Şimdi x_1 ve x_2 noktalarının, $y_2(x)$ çözümünün birbirini izleyen iki kökü olduğunu varsayalım. Dolayısıyla

$$W(x_1) = y_1(x_1)y_2'(x_1) \neq 0,$$

$$W(x_2) = y_1(x_2)y_2'(x_2) \neq 0$$

dır. O halde $y_1(x_1)$, $y_1(x_2)$, $y_2'(x_1)$, $y_2'(x_2)$ değerlerinin tamamı sıfırdan farklıdır. $y_2(x)$ fonksiyonu, I üzerinde sürekli olduğundan x_1 noktasının, $y_2'(x)$ fonksiyonunun işaretini değiştirmedeği bir U_1 komşuluğu vardır ve benzer şekilde $y_2'(x)$ fonksiyonunun işaret değiştirmedeği x_2 noktasının bir U_2 komşuluğu vardır. Ancak $U_1 \cap I$ ve $U_2 \cap I$ aralığında bulunan $y_2(x)$ fonksiyonunun işaretleri aynı olamaz çünkü eğer $y_2(x)$, aralıkların birinde artıyorsa birinde azalıyor olmak zorundadır. $W(x)$ in I üzerinde aynı işarete sahip olması için $y_1(x_1)$ ve $y_1(x_2)$ fonksiyonlarının zıt işaretlere sahip olması gerekir. Dolayısıyla $y_1(x)$ fonksiyonu sürekli olduğundan x_1 ve x_2 arasında en az bir sıfıra sahiptir. Bu aralıkta $y_1(x)$ fonksiyonunun birden fazla sıfırı olamaz çünkü eğer x_3 ve x_4 , $y_1(x)$ fonksiyonunun x_1 ve x_2 arasında yer alan iki sıfırı ise aynı argümanı kullanarak şu sonuca varılır: $y_2(x)$ fonksiyonu x_3 ve x_4 arasında yer almaz. Ancak bu x_1 ve x_2 noktalarının $y_2(x)$ fonksiyonunun ardışık sıfırları olduğu varsayımı ile çelişir.

Sonuç 2.1: $y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$ denkleminin iki çözümü de I aralığında ortak köke sahipse, bunlar lineer bağımlıdır. (2.1.9) denkleminin köklerinin dağılımını incelemek için denklem dönüştürülerek ortadaki qy' teriminden kurtulmak daha iyi olacaktır. Bu amaçla

$$y(x) = u(x)v(x),$$

dönüşümünü yapalım. Buradan,

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

ve

$$y''(x) = u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x)$$

türevleri (2.1.9) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$vu'' + (2v' + qv)u' + (v'' + qv' + rv)u = 0$$

olur. Böylece,

$$v(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_a^x q(t)dt\right), \quad (2.1.10)$$

$$\rho(x) = r(x) - \frac{1}{4}q^2(x) - \frac{1}{2}q'(x)$$

dir. Ve $2v' + qv = 0$ alınır,

$$u'' + \rho(x)u = 0 \quad (2.1.11)$$

denklemi elde edilir. $v(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde asla sıfır olamaz, dolayısıyla $u(x)$ fonksiyonunun kökleri, $y(x)$ fonksiyonunun kökleriyle çakışır ve (2.1.9) denklemindeki köklerin dağılımını araştırmak amacıyla dikkatimizi (2.1.11) denklemi ile sınırlayabiliriz.

Teorem 2.2: (Sturm Karşılaştırma Teoremi) φ ve ψ ,

$$y'' + r_1(x)y = 0,$$

$$y'' + r_2(x)y = 0, \quad x \in I,$$

olarak verilen denklemlerin sırasıyla aşık olmaya çözümleri olsun ve her $x \in I$ için $r_1(x) \geq r_2(x)$ olsun. Bu durumda, $r_1(x) \equiv r_2(x)$ ve φ, ψ çözümünün sabit bir katı olmadıkça, ψ çözümünün her iki ardışık kökü arasında, φ çözümünün en az bir kökü vardır.

İspat: x_1 ve x_2 , I aralığı üzerinde ψ çözümünün ardışık herhangi iki sıfırı olsun. Ayrıca φ çözümünün (x_1, x_2) aralığında kökünün olmadığını ve φ ile ψ fonksiyonlarının her ikisinin de (x_1, x_2) üzerinde pozitif olduğunu varsayalım. ψ'

fonksiyonu sürekli olduğundan $\psi'(x_1) \geq 0$ ve $\psi'(x_2) \leq 0$ sonucu çıkar ve bu nedenle wronskian,

$$W(x_1) = \varphi(x_1)\psi'(x_1) \geq 0, \quad W(x_2) = \varphi(x_2)\psi'(x_2) \leq 0 \quad (2.1.12)$$

eşitsizliklerini sağlar. Çünkü,

$$\begin{aligned} W'(x) &= \varphi(x)\psi''(x) - \varphi''(x)\psi(x) \\ &= [r_1(x) - r_2(x)]\varphi(x)\psi(x) \geq 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2), \end{aligned}$$

dır. W , (x_1, x_2) üzerinde artan bir fonksiyondur. Bu $r_1(x) - r_2(x) \equiv 0$ ve $W(x) \equiv 0$ olmadıkça, denklem (2.1.12) ile çelişir ki bu durumda Yardımcı Teorem 2.2 den φ ve ψ lineer bağımlıdır.

Sonuç 2.2: φ , I aralığı üzerinde $y'' + r(x)y = 0$ denkleminin aşikar olmayan bir çözümü olsun. Eğer $r(x) \leq 0$ ise, o zaman φ , I üzerinde en fazla bir çözüme sahiptir.

İspat: φ çözümünün, I aralığı üzerinde iki kökü x_1 ve x_2 olsun. O zaman Teorem 2.2 ye göre $u'' = 0$ denkleminin $\psi(x) \equiv 1$ çözümü olmamalıdır ki bu imkansızdır.

Örnek 2.2: (i) $\mathbb{R}$ üzerinde $y'' = 0$ denkleminin aşikâr olmayan herhangi bir çözümü,

$$\varphi(x) = c_1x + c_2,$$

biçiminde bir doğru ile ifade edilir ve en fazla bir köke sahiptir.

(ii) $y'' - y = 0$ denkleminin aşağıdaki biçimde genel çözümü vardır:

$$\varphi(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Eğer c_1 ve c_2 her ikisi de sıfır değilse $c_1 = -c_2$ olmadıkça herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için $\varphi(x) \neq 0$ olur. Bu durumda $x = 0$ bir köktür.

(iii) $y'' + y = 0$ denkleminin çözümü şu şekilde verilir:

$$\varphi(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x = a \sin(x - b),$$

burada $a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ ve $b = -\arctan(c_1/c_2)$ dir. Eğer $a \neq 0$ ise φ çözümü, $x_n = b + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ biçiminde sonsuz köke sahiptir.

$$y'' + r(x)y = 0, \quad x \in I, \quad (2.1.13)$$

denkleminin aşıkâr olmayan bir çözümü Örnek 2.2, (iii) deki gibi sonsuz sayıda köke sahipse *salınımlı* olarak adlandırılır. Teorem 2.2 ye göre bu denklemin salınımlı çözümlerinin olup olmadığı $r(x)$ fonksiyonuna bağlıdır. Eğer $r(x) \leq 0$ ise o zaman Sonuç 2.2 den çözümler salınım yapmayacaktır. Ancak eğer bir pozitif k sabiti için

$$r(x) > k^2 > 0, \quad x \in I,$$

ise o zaman I üzerindeki (2.1.13) denkleminin herhangi bir çözümü, $y'' + k^2 y = 0$ denkleminin $a \sin k(x - b)$ formundaki herhangi bir çözümünün

$$x_n = b + \frac{n\pi}{k}$$

biçimindeki sıfırları arasında dağılmış sonsuz sayıda sıfıra sahiptir. Böylece, π/k uzunluğundaki I aralığının her alt aralığı (2.1.13) denklemindeki en az bir köke sahiptir ve dolayısıyla k arttıkça, kök sayısının artması beklenir.

Açıktır ki r sabit olduğunda geçerlidir. Sturm ayırma teoreminden, eğer I aralığı sonsuzsa ve denklemin bir çözümü salınım yapıyorsa, o zaman

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

denkleminin tüm çözümlerinin salınım yaptığı sonucuna varılır.

2.3 Kendine Eş Diferansiyel Operatör

İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklem aynı zamanda

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad (2.1.14)$$

biçiminde yazılabilir. Bu bölümde verilen denklemin çözümlerinin dikliği araştırılacaktır. Bu da (2.1.14) denkleminin L^2 uzayı üzerinde C^2 uzayındaki çözümlerinin aranması anlamına gelir. (2.1.14) denklemi,

$$Ly = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$L = p(x) \frac{d^2}{dx^2} + q(x) \frac{d}{dx} + r(x), \quad (2.1.15)$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel operatördür ve y fonksiyonu $L^2(I) \cap C^2(I)$ vektör uzayına ait bir fonksiyondur. İleride bazı avantajlar sunacak olan kendine eş olma özelliğini

$$L : L^2(I) \cap C^2(I) \rightarrow L^2(I)$$

biçiminde tanımlanan (2.1.15) operatörü için göstermeye çalışacağız. Başlangıç olarak p, q ve r katsayılarının I aralığı üzerinde C^2 uzayından olsun. L operatörünün simetriğini $\tilde{L}$ olarak gösterelim. $\tilde{L}$ operatörünün tanımından, her $f, g \in C^2(I) \cap L^2(I)$ için

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, \tilde{L}g \rangle \quad (2.1.16)$$

eşitliği sağlanır. I sonlu veya sonsuz olmak üzere $I = (a, b)$ diyelim. Diferansiyel operatörü f fonksiyonunun üzerinden g fonksiyonuna almak için (2.1.16) eşitliğinin sol tarafında kısmi integral kullanalım. Böylece,

$$\begin{aligned} \langle Lf, g \rangle &= \int_a^b (pf'' + qf' + rf)\bar{g}dx \\ &= pf' \bar{g} \Big|_a^b - \int_a^b f'(p\bar{g})' dx + qf \bar{g} \Big|_a^b - \int_a^b f(q\bar{g})' dx + \int_a^b fr \bar{g} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[pf' \bar{g} - f(p\bar{g})' \right]_a^b + \int_a^b f(p\bar{g})'' dx + qf \bar{g} \Big|_a^b - \int_a^b f(q\bar{g})' dx + \int_a^b fr \bar{g} dx \\
&= \left\langle f, (\bar{p}g)'' - (\bar{q}g)' + \bar{r}g \right\rangle + \left[p(f' \bar{g} - f \bar{g}') + (q - p')f \bar{g} \right]_a^b,
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (a, b) sonsuzsa veya integrali alınacak fonksiyonlardan herhangi biri a veya b noktasında sınırsızsa, bu durumda integraller genelleştirilmiş integral olur. Eğer $p \in C^2(a, b)$, $q \in C^1(a, b)$ ve $r \in C(a, b)$ ise yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı iyi tanımlıdır. Buradaki son terim, a ve b noktasındaki limitlerinin farkıdır. Bu nedenle her $f, g \in L^2(I) \cap C^2(I)$ için,

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^* g \rangle + \left[p(f' \bar{g} - f \bar{g}') + (q - p')f \bar{g} \right]_a^b \quad (2.1.17)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
L^* g &= (\bar{p}g)'' - (\bar{q}g)' + \bar{r}g \\
&= \bar{p}g'' + (2\bar{p}' - \bar{q})g' + (\bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r})g
\end{aligned}$$

dir. Bu operatör

$$L^* = \bar{p} \frac{d^2}{dx^2} + (2\bar{p}' - \bar{q}) \frac{d}{dx} + (\bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r})$$

biçimindedir ve L operatörünün *biçimsel eşleniği* olarak adlandırılır. $L = L^*$ olduğunda, yani

$$\bar{p} = p, \quad 2\bar{p}' - \bar{q} = q, \quad \bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r} = r$$

olduğunda L *biçimsel olarak kendine eştir* denir. Bu üç eşitlik ancak ve ancak p , q ve r fonksiyonlarının reel olması durumunda ve $q = p'$ olduğunda sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned}
Lf &= pf'' + p'f' + rf \\
&= (pf')' + rf
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, L biçimsel olarak kendine eş olduğunda,

$$L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + r$$

formuna sahip olur ve (2.1.17) denklemi,

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle + p(f' \bar{g} + f \bar{g}') \Big|_a^b \quad (2.1.18)$$

ifadesine indirgenmiş olur.

(2.1.16) ve (2.1.18) denklemlerini karşılaştırdığımızda, artık biçimsel olarak kendine eş olan L operatörünün, her $f, g \in C^2(I) \cap L^2(I)$ için,

$$p(f' \bar{g} - f \bar{g}') \Big|_a^b = 0 \quad (2.1.19)$$

olduğunda, kendine eş olur. Bu noktada $q = p'$ olduğunda, L^* ifadesindeki $\bar{p}'' - \bar{q}'$ ifadesinin ortadan kalktığını ve bu durumda p'' ve q' ifadelerinin sürekliliğine ihtiyaç duyulmadığını belirtmekte fayda vardır.

$-L$ operatörü için özdeğer problemi,

$$Lu + \lambda u = 0 \quad (2.1.20)$$

şeklinindedir. $u = 0$ olduğunda bu denklem λ özdeğerinin her değeri için sağlanır. $u \neq 0$ olduğunda λ özdeğerinin belirli değerleri için sağlanabilir. Bunlar $-L$ operatörünün özdeğerleridir. Bazı kompleks λ değerleri için (2.1.20) denklemini sağlayan $C^2 \cap L^2$ uzayında bulunan herhangi bir $u \neq 0$ fonksiyonu, λ özdeğerine karşılık gelen $-L$ operatörünün bir özfonksiyonudur. Ayrıca $-L$ operatörünün özdeğerlerine ve özfonksiyonlarına, (2.1.20) denkleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları olarak adlandırılır. Bu denklem homojen olduğundan $-L$ operatörünün özfonksiyonları katlı sabite kadar belirlenir. (2.1.20) denkleminde, uygun sınır koşulları eklendiğinde ortaya çıkan sistem *Sturm-Liouville özdeğer problemi* olarak adlandırılır. Açık ki $-L$ operatörü (biçimsel olarak) kendine eştir ancak ve ancak L operatörü (biçimsel olarak) kendine eştir. L operatörü yerine $-L$

operatörünün özdeğerlerini aramamızın nedeni, p pozitif olduğunda L operatörünün negatif özdeğerlere sahip olmasıdır. Aşağıdaki teoremin (i) ve (ii) özellikleri, yukarıdaki özellikleri sonlu boyutlu uzaydan, sonsuz boyutlu $L^2 \cap C^2$ uzayına genişletilerek, şimdiye kadar elde edilen sonuçları özetlemektedir.

Teorem 2.3: $L : L^2(a, b) \cap C^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$ aşağıdaki şekilde tanımlanan ikinci mertebeden bir lineer diferansiyel operatör olsun:

$$Lu = p(x)u'' + q(x)u' + r(x)u, \quad x \in (a, b).$$

Ayrıca burada $p \in C^2(a, b)$, $q \in C^1(a, b)$ ve $r \in C(a, b)$ olsun. O halde,

- (i) L operatörü biçimsel olarak kendine eşittir, yani p, q ve r katsayıları reel ve $q \equiv p'$ ise $L^* = L$ dir.
- (ii) Eğer L operatörü biçimsel olarak kendine eş ise ve (2.1.19) denklemini sağlıyorsa L operatörü kendine eşittir, yani $L = \tilde{L}$ dır.
- (iii) L operatörü kendine eş ise, o zaman,

$$Lu + \lambda u = 0$$

olarak verilen denklemin özdeğerlerinin tümü reeldir ve $L^2(a, b)$ uzayında farklı özdeğerlere karşılık gelen herhangi bir özfonksiyon çifti ortogondur.

İspat: (i) ve (ii) daha önce ispatlandı. (iii) ifadesini ispatlamak için kabul edelim ki $\lambda \in \mathbb{C}$, $-L$ operatörünün özdeğeri olsun. O zaman bir $f \in L^2(a, b) \cap C^2(a, b)$, $f \neq 0$ fonksiyonu vardır ki

$$Lf + \lambda f = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \|f\|^2 = \langle \lambda f, f \rangle = -\langle Lf, f \rangle$$

olur. L operatörü kendine eş olduğundan

$$-\langle Lf, f \rangle = -\langle f, Lf \rangle = \langle f, \lambda f \rangle = \bar{\lambda} \|f\|^2$$

yazılabilir. Dolayısıyla $\bar{\lambda} \|f\|^2 = \lambda \|f\|^2$ dir. Çünkü $\|f\| \neq 0$, $\bar{\lambda} = \lambda$ dır.

Eğer μ , $-L$ operatörünün $g \in L^2(a, b) \cap C^2(a, b)$ özfonksiyonunun karşılık geldiği başka bir özdeğeri ise, o zaman

$$\lambda \langle f, g \rangle = -\langle Lf, g \rangle = -\langle f, Lg \rangle = \mu \langle f, g \rangle$$

$$(\lambda - \mu) \langle f, g \rangle = 0$$

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle f, g \rangle = 0$$

olur.

Açıklama 2.2: Yukarıda belirtildiği gibi, L için $q = p'$ olduğunda, bu teoremin sonuçları p' fonksiyonunun sürekli olma koşulu gibi daha zayıf bir koşul altında da geçerlidir.

Sonuç 2.3: $L : L^2(a, b) \cap C^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$ kendine eş bir operatör ve ρ , $[a, b]$ üzerinde pozitif ve sürekli ise, o zaman

$$Lu + \lambda \rho u = 0$$

olarak verilen denklemin tüm özdeğerleri reeldir ve farklı özdeğerlere karşılık gelen herhangi bir özfonksiyon çifti $L_\rho^2(a, b)$ uzayında ortogondur.

Açıklama 2.3: 1. Sonuç 2.3 de $Lu + \lambda \rho u = 0$ denkleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları aslında $-\rho^{-1}L$ operatörünün özdeğerleri ve özfonksiyonlarıdır.

2. (a, b) aralığının sonlu olduğunu varsayalım. ρ ağırlık fonksiyonu sürekli ve $[a, b]$ üzerinde pozitif olduğundan, minimum ve maksimum değerleri sırasıyla α ve β olmak üzere

$$0 < \alpha \leq \rho(x) \leq \beta < \infty$$

eşitsizliği sağlanır. Bu, şu anlama gelir:

$$\sqrt{\alpha} \|u\| \leq \|u\|_{\rho} \leq \sqrt{\beta} \|u\|.$$

Bu nedenle $\|u\|_{\rho} \leq \infty$ ancak ve ancak, $\|u\| \leq \infty$ dur. Bu iki normun eşdeğer olduğu söylenir ve bu iki uzay $L^2_{\rho}(a,b)$ ve $L^2(a,b)$, farklı iç çarpımlara sahip olmalarına rağmen açıkça aynı fonksiyonları içerir.

3. Sonuç 2.3 ün ispatındaki hiçbir şey, L operatörünün ikinci mertebeden bir diferansiyel operatör olmasını gerektirmez. Aslında bu sonuç, bir iç çarpım uzayındaki herhangi bir kendine eş lineer operatör için doğrudur.

BÖLÜM 3

KESİRLİ ANALİZ

Bu bölümde, kesirli türev ve kesirli integral kavramlarına detaylı bir şekilde değinilecektir. Kesirli türev ve integral, klasik türev ve integral kavramlarının bir genellemesidir ve son yıllarda çeşitli bilim ve mühendislik alanlarında önemli bir araştırma konusu haline gelmiştir.

Kesirli türev ve integral kavramlarının anlaşılması için gerekli olan bazı özel fonksiyonlar da bu bölümde ele alınacaktır. Bu fonksiyonlar arasında Mittag-Leffler fonksiyonu, Mellin-Ross fonksiyonu, Gama fonksiyonu, Beta fonksiyonu ve hata fonksiyonu bulunmaktadır. Her bir fonksiyonun tanımı, özellikleri ve kesirli hesaplamalarla ilişkisi açıklanacaktır.

Mittag-Leffler fonksiyonu, kesirli diferansiyel denklemler ve kesirli kontrol teorisi gibi alanlarda önemli bir rol oynar. Melin-Ross fonksiyonu ise özellikle analitik fonksiyon teorisi ve uygulamaları açısından kritik öneme sahiptir. Gama ve beta fonksiyonları, olasılık teorisi ve istatistik gibi alanlarda temel araçlar olup, kesirli türev ve integral hesaplamalarında da sıkça kullanılır. Son olarak hata fonksiyonu ise Gauss integrali ile yakından ilişkili olup, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmaktadır.

3.1 Bazı Özel Fonksiyonlar

Bu bölümde kesirli integral veya kesirli türevin tanımına bakmadan önce, kesirli analize bağlı olan ve sıklıkla karşılaşılabilecek bazı gerekli tanımlar verilecektir. Bunlar; Gama fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonu, Melin-Ross fonksiyonu ve hata fonksiyonudur.

3.1.1 Gama Fonksiyonu

Gama fonksiyonu genel olarak, tüm reel sayılar için faktöriyelin bir genişlemesi olarak düşünülebilir. Gama fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (3.1.1)$$

biçiminde tanımlanır. Bu fonksiyonun bazı özellikleri ise

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (3.1.2)$$

$$\Gamma(x) = (x-1)!, \quad x \in \mathbb{N} \quad (3.1.3)$$

dir. Ayrıca (3.1.3) denkleminden $\Gamma(1) = 1$ olduğu görülür.

Şimdi $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ olduğunu gösterelim. (3.1.1) tanımından,

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt \quad (3.1.4)$$

elde edilir. $t = y^2$ dönüşümü yapılırsa

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \quad (3.1.5)$$

bulunur. (3.1.5) eşitliği

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (3.1.6)$$

şeklinde de yazılabilir. (3.1.5) ile (3.1.6) eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa

$$\left[\Gamma(\frac{1}{2}) \right]^2 = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (3.1.7)$$

elde edilir ki aslında bu integral birinci çeyrek üzerinde iki katlı bir integraldir. Bu integral kutupsal koordinatlarda hesaplanırsa

$$\left[\Gamma(\frac{1}{2}) \right]^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi \quad (3.1.8)$$

olur. Böylece $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ elde edilir. Bunun yanı sıra tamamlanmamış Gama fonksiyonu

$$\Gamma^*(v, t) = \frac{1}{\Gamma(v)t^v} \int_0^t e^{-x} x^{v-1} dx, \quad \text{Re}(v) > 0 \quad (3.1.9)$$

şeklinde ifade edilir.

3.1.2 Beta Fonksiyonu

Gama fonksiyonu gibi beta fonksiyonu da bir integralle tanımlanır. Beta fonksiyonunun tanımı,

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (3.1.10)$$

biçimindedir. Beta fonksiyonu aynı zamanda Gama fonksiyonu cinsinden de

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (3.1.11)$$

şeklinde ifade edilebilir.

3.1.3 Hata Fonksiyonu

Hata fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır ve $Erf(.)$ biçiminde gösterilir:

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.1.12)$$

Tamamlayıcı hata fonksiyonu ($Erfc$), hata fonksiyonu türünden şu şekilde yazılabilir:

$$Erfc(x) = 1 - Erf(x). \quad (3.1.13)$$

(3.1.12) ifadesinden kolayca görülebilir ki $Erf(0) = 0$ ve $Erf(\infty) = 1$ dir.

3.1.4 Mittag-Leffler Fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonu adını 1903 yılında onu tanımlayan ve inceleyen İsveçli matematikçiden almıştır [3]. Bu fonksiyon e^x üstel fonksiyonunun bir genellemesidir ve kesirli analizde önemli bir rol oynamaktadır. Mittag-Leffler fonksiyonunun bir ve iki parametrelili gösterimleri bir kuvvet serisi cinsinden sırasıyla,

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (3.1.14)$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (3.1.15)$$

şeklinde ifade edilir. (3.1.15) ifadesinde tanımlanan kuvvet serisi, (3.1.14) serisinin bir genellemesidir. Bu serinin farklı genellemeleri [4] de bulunabilir.

(3.1.15) eşitliğinden

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x E_{\alpha,\alpha+\beta}(x) \quad (3.1.16)$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(x) + \alpha x \frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta+1}(x) \quad (3.1.17)$$

eşitliklerinin doğru olduğu görülür. Ayrıca burada (3.1.17) eşitliğinden

$$\frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta+1}(x) = \frac{1}{\alpha x} [E_{\alpha,\beta}(x) - \beta E_{\alpha,\beta+1}(x)]$$

yazılabilir. Yani

$$\frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\alpha x} [E_{\alpha,\beta-1}(x) - \beta E_{\alpha,\beta}(x)] \quad (3.1.18)$$

eşitliği elde edilir ki bu da (3.1.16) ifadesine denktir. (3.1.15) eşitliğinden

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x \cdot x^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x E_{\alpha,\alpha+\beta}(x) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca burada $E_{\alpha,\beta}(0) = 1$ dir. Aynı zamanda α ve β nın bazı özel değerleri için Mittag-Leffler fonksiyonu bazı bilindik fonksiyonlara indirgenebilir. Bununla ilgili,

$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$E_{\frac{1}{2},1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)} = e^{x^2} \text{Erfc}(-x)$$

$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}$$

örnekleri verilebilir.

3.1.5 Mellin-Ross Fonksiyonu

$E_t(v, a)$ ile gösterilecek olan Mellin-Ross fonksiyonu e^{at} üstel fonksiyonunun kesirli integrali bulunurken ortaya çıkar. Fonksiyon hem tamamlanmamış Gama hem de Mittag-Leffler fonksiyonu ile yakından ilişkilidir. Tanımı

$$E_t(v, a) = t^v e^{at} \Gamma^*(v, t) \quad (3.1.19)$$

şeklindedir. Ayrıca

$$E_t(v, a) = t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+v+1)} = t^v E_{1,v+1}(at) \quad (3.1.20)$$

biçiminde de yazılabilir.

3.2 Riemann-Liouville Kesirli İntegrali

v pozitif bir reel sayı olsun. f , $(0, \infty)$ aralığı üzerinde parçalı sürekli ve $[0, \infty]$ aralığının her sonlu alt aralığında integrallenebilir olsun. O halde $t > 0$ olmak üzere

$${}_a I_x^v f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_a^x (x-t)^{v-1} f(t) dt, \quad v > 0 \quad (3.2.1)$$

ifadesine f fonksiyonunun x eksenı boyunca keyfi bir v . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali denir [5]. Bu ifade aynı zamanda ${}_a D_x^{-v} f(x)$ olarak da gösterilebilir. Bazı durumlarda a ve x indislerinin kaldırılmasıyla gösterim basitleştirilecektir. (3.2.1) eşitliği çeşitli yollarla elde edilebilir.

Şimdi lineer diferansiyel denklemler teorisini kullanan bir yaklaşımı ele alalım.

$$y^n(x) = f(x) \quad (3.2.2)$$

$$y(a) = 0, y'(a) = 0, \dots, y^{(n-1)}(a) = 0 \quad (3.2.3)$$

şeklinde başlangıç koşulları ile birlikte verilen n . mertebeden diferansiyel denklem için Cauchy fonksiyonunun

$$H(x, t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (3.2.4)$$

formu kullanılarak (3.2.2) - (3.2.3) başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$y(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt \quad (3.2.5)$$

olarak bulunur. (3.2.5) ifadesini ispatlamak için tümevarım yöntemi kullanılacaktır. Fakat öncesinde bu ispat için gerekli olan Dirichlet formülünü tanıtalım.

Tanım 3.1: (Dirichlet formülü) $h(x, y)$ sürekli, μ ve v pozitif olsun. O zaman

$$\begin{aligned} & \int_0^t (t-x)^{\mu-1} dx \int_0^x (x-y)^{v-1} h(x, y) dy \\ &= \int_0^t dy \int_y^t (t-x)^{\mu-1} (x-y)^{v-1} h(x, y) dx \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

biçimindeki eşitlik Dirichlet formülü olarak adlandırılır. $h(x, y)$ seçimine göre Dirichlet formülünün bazı özel durumları vardır. Bunlardan biri

$$h(x, y) = g(x)f(y), \quad g(x) \equiv 1$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & \int_0^t (t-x)^{\mu-1} dx \int_0^x (x-y)^{v-1} f(y) dy \\ &= B(\mu, v) \int_0^t (t-y)^{\mu+v-1} f(y) dy \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

dir. Burada $B(\mu, v)$ Beta fonksiyonunu ifade eder.

Şimdi n türevin mertebesi olmak üzere, $n = 1$ için

$$y'(x) = f(x), \quad y(a) = 0 \quad (3.2.8)$$

olur. (3.2.8) ifadesinde verilen başlangıç değer probleminin çözümü (3.2.4) denklemi yardımıyla

$$\int_a^x y'(t) dt = \int_a^x \frac{(x-t)^{1-1}}{(1-1)!} f(t) dt$$

olarak bulunur. $y(a) = 0$ olduğundan (3.2.8) ifadesinin çözümü

$$y(x) = \int_a^x f(t) dt$$

dir. Şimdi (3.2.5) ifadesinin $n = k$ için doğru olduğunu varsayarak denklemin $n = k + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim. $n = k + 1$ için başlangıç değer problemi

$$y^{(k+1)}(x) = f(x), \quad (3.2.9)$$

$$y(a) = y'(a) = \dots = y^{(k)}(a) = 0$$

olur. Buradan $y^{(k+1)}(x) = (y')^{(k)}(x)$ olarak yazılabilir. $y'(x) = u(x)$ olduğu kabul edilirse (3.2.9) problemi

$$u^{(k)}(x) = f(x) \quad (3.2.10)$$

$$u(a) = u'(a) = \dots = u^{(k-1)}(a) = 0$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Tümevarımdan

$$\begin{aligned} \int_a^c y'(t)dt &= \int_{z=a}^x \left(\int_{t=a}^z \frac{(z-t)^{k-1}}{(k-1)!} f(t)dt \right) dz \\ y(x) - y(a) &= \int_{t=a}^x \left(\int_{z=t}^x \frac{(z-t)^{k-1}}{(k-1)!} f(t)dz \right) dt \\ &= \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f(t)dt \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

olarak bulunur. $y(a) = 0$ başlangıç şartı kullanılırsa

$$y(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f(t)dt$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.2.5) ifadesi doğrudur. Burada (3.2.11) denkleminde (3.2.6) Dirichlet formülü kullanılmıştır. (3.2.2) - (3.2.3) başlangıç değer problemindeki $f(x)$ fonksiyonu, $y(x)$ fonksiyonunun n . türevi olduğundan, $y(x)$, $f(x)$ fonksiyonunun n . integrali olarak yorumlanabilir. Böylece

$${}_a I_x^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-c)^{n-1} f(t)dt \quad (3.2.12)$$

olur. Son olarak, n tamsayısı herhangi bir v pozitif reel sayısı ile değiştirilirse ve (3.2.12) ifadesinde bulunan faktöriyel bir Gama fonksiyonuna dönüştürülürse o zaman (3.2.12) ifadesi Riemann-Liouville kesirli integrali olur.

Örnek 3.1: $v > 0$, $\mu > -1$ olmak üzere $I^v x^\mu$ integralini hesaplayalım. (3.2.12) deki tanımdan,

$$I^v x^\mu = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} t^\mu dt = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{v-1} x^{v-1} t^\mu dt$$

bulunur. Bu son integralde $u = \frac{t}{x}$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
I^v x^\mu &= \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^1 (1-u)^{v-1} x^{v-1} (xu)^\mu x du \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)} x^{\mu+v} \int_0^1 u^\mu (1-u)^{v-1} du \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)} x^{\mu+v} B(\mu+1, v) \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+v+1)} x^{\mu+v}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki örnekte kolaylıkla görülür ki,

$$I^v x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+v+1)} x^{\mu+v}, \quad v > 0, \quad \mu > -1, \quad x > 0 \quad (3.2.13)$$

olur ve bu kuvvet kuralını ifade eder. Kuvvet kuralı ile sabit bir k değerinin v . mertebeden kesirli integrali

$$I^v k = \frac{k}{\Gamma(v+1)} x^v \quad (3.2.14)$$

şeklinde ifade edilir. Özel olarak $v = \frac{1}{2}$ seçilirse

$$I^{\frac{1}{2}} x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

$$I^{\frac{1}{2}} x^1 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{x^3}{\pi}}$$

$$I^{\frac{1}{2}}x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{25}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}$$

elde edilir. Yukarıdaki örneklerin hesaplanması kolay görülebilir, fakat aslında üstel fonksiyonlar, sinüs ve kosinüs gibi temel fonksiyonların bile bazı kesirli integralleri daha karmaşık fonksiyonlara dönüşebilir. Örneğin, a sabit olmak üzere $f(t) = e^{at}$ olsun. (3.2.13) tanımından

$$I^v e^{at} = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t (t-y)^{v-1} e^{ay} dy, \quad v > 0 \quad (3.2.15)$$

olur. Eğer (3.1.19) ve (3.1.20) tanımları hatırlanırsa (3.2.15) ifadesi

$$I^v e^{at} = E_t(v, a) = t^v E_{1, v+1}(at) \quad (3.2.16)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde kesirli integralin tanımının doğrudan uygulanması ve ardından değişkenlerde bazı değişiklikler yapılması

$$I^v \cos(at) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t y^{v-1} \cos[a(t-y)] dy =: C_t(v, a), \quad \text{Re}(v) > 0 \quad (3.2.17)$$

$$I^v \sin(at) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t y^{v-1} \sin[a(t-y)] dy =: S_t(v, a), \quad \text{Re}(v) > 0 \quad (3.2.18)$$

sonucunu verir. Özellikle eğer $v = \frac{1}{2}$ seçilirse

$$x = \sqrt{\frac{2at}{\pi}}$$

$$C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$$

ve

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$

olmak üzere

$$I^{\frac{1}{2}} e^{at} = E_t \left(\frac{1}{2}, a \right) = a^{-\frac{1}{2}} e^{at} \text{Erf}(at)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.19)$$

$$I^{\frac{1}{2}} \cos(at) = C_t \left(\frac{1}{2}, a \right) = \sqrt{\frac{2}{a}} [C(x) \cos(at) - S(x) \sin(at)] \quad (3.2.20)$$

$$I^{\frac{1}{2}} \sin(at) = C_t \left(\frac{1}{2}, a \right) = \sqrt{\frac{2}{a}} [C(x) \sin(at) - S(x) \cos(at)] \quad (3.2.21)$$

sonuçları elde edilir. Bazı durumlarda, diğer bazı trigonometrik fonksiyonların kesirli integrallerini hesaplamak için basit trigonometrik özdeşlikler kullanılabilir. Örneğin

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x)$$

özdeşliğinden,

$$I^v \cos^2(at) = \frac{t^v}{2\Gamma(v+1)} + \frac{1}{2} C_t(v, 2a) \quad (3.2.22)$$

ve

$$I^v \sin(at) = \frac{t^v}{2\Gamma(v+1)} - \frac{1}{2} C_t(v, 2a) \quad (3.2.23)$$

ifadeleri elde edilir. Aşağıdaki grafikte

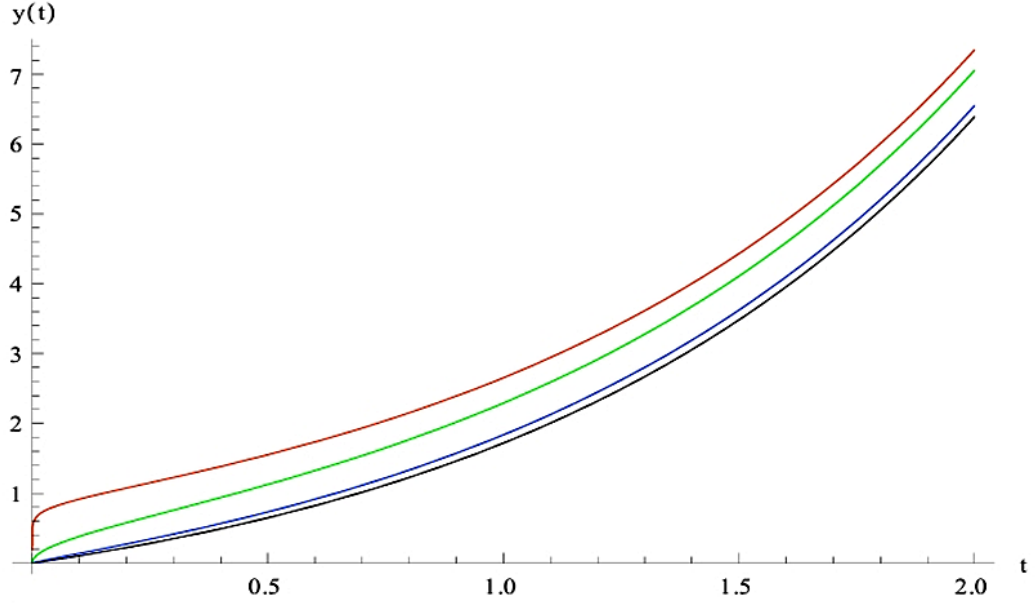
$$y_1(t) = \int_0^t e^{ax} dx = \frac{1}{a} (e^{at} - 1)$$

ve

$$y_v(t) = D^{-v} e^{at} = E_{1,v+1}(at) \quad (3.2.24)$$

eşitliklerinin $a = 1$ ve $v = 0.1, v = 0.5, v = 0.9$ olmak üzere farklı değerlerdeki karşılaştırmaları verilmiştir, şekilde y_1 en alttaki grafik; $y_{0,1}$ ise en üstteki grafik.

Kesirli integralin mertebesi büyüdükçe grafiğin 1. mertebeden klasik integrale yaklaştığı görülüyor.



Şekil 3.1 Farklı mertebeden kesirli integrallerin 1. mertebeden klasik integrale yaklaşımı.

3.2.1 Kesirli İntegraller için Mertebe Kuralı

Teorem 3.1: f fonksiyonu, J üzerinde sürekli ve $u, v > 0$ olsun. O halde her t için

$$D^{-u}[D^{-v}f(t)] = D^{-(u+v)}f(t) = D^{-v}[D^{-u}f(t)] \quad (3.2.25)$$

eşitliği doğrudur.

İspat: Kesirli integralin tanımından,

$$\begin{aligned} D^{-u}[D^{-v}f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(u)} \int_0^t (t-x)^{u-1} [D^{-v}f(t)] dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(u)} \int_0^t (t-x)^{u-1} \left[\frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-y)^{v-1} f(y) dy \right] dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(u)\Gamma(v)} \int_0^t (t-x)^{u-1} dx \int_0^x (x-y)^{v-1} f(y) dy \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} D^{-(u+v)}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(u+v)} \int_0^t (t-y)^{u+v-1} f(y) dy \\ &= B(u, v) \int_0^t (t-y)^{u+v-1} f(y) dy \end{aligned}$$

elde edilir. (3.2.7) eşitliğinden (3.2.25) ifadesinin doğru olduğu görülmektedir.

3.2.2 Kesirli İntegralin Türevi ve Türevin Kesirli İntegrali

Kesirli integraller için

$$D^{-u}[D^{-v}f(t)] = D^{-v}[D^{-u}f(t)]$$

eşitliğinin sağlandığı bir önceki bölümde gösterildi. Şimdi türevleri içeren benzer bir ifade gösterilecektir. Ancak burada

$$D[D^{-v}f(t)] \neq D^{-v}[Df(t)]$$

dir.

Teorem 3.2: f fonksiyonu, J üzerinde sürekli ve $v > 0$ olsun. Eğer Df sürekli ise o zaman her t için

$$D[D^{-v}f(t)] = D^{-v}[Df(t)] + \frac{f(0)}{\Gamma(v)} t^{v-1} \quad (3.2.26)$$

eşitliği doğrudur.

İspat: Kesirli integral tanımından

$$D^{-v}f(t) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t (t-z)^{v-1} f(z) dz$$

dir. $\lambda = \frac{1}{v}$ olmak üzere $z = t - x^\lambda$ dönüşümü yapılırsa

$$D^{-v}f(t) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_{t^v}^0 (x^\lambda)^{v-1} f(t - x^\lambda) (-\lambda x^{\lambda-1}) dx$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse kolaylıkla görülür ki

$$D^{-v}f(t) = \frac{1}{\Gamma(v+1)} \int_0^{t^v} f(t - x^\lambda) dx$$

dir. Leibniz integral kuralı

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^{b(t)} f(t, x) dx \right] = f(t, b(t)) b'(t) + \int_0^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx \quad (3.2.27)$$

dir. (3.2.27) kullanılarak

$$D[D^{-v}f(t)] = \frac{1}{\Gamma(v+1)} \left[f(0) v t^{v-1} + \int_0^{t^v} \frac{\partial}{\partial t} f(t - x^\lambda) dx \right]$$

elde edilir. Şimdi tersine $t - x^\lambda = z$ dönüşümü yapılırsa

$$D[D^{-v}f(t)] = \frac{f(0)}{v\Gamma(v)} v t^{v-1} + \frac{1}{v\Gamma(v)} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(z) \left(\frac{-1}{\lambda} x^{1-\lambda} \right) dx$$

bulunur. Son olarak, $\lambda = \frac{1}{v}$ ve $x = (t - z)^{\frac{1}{v}}$ olduğundan denklem

$$D[D^{-v}f(x)] = \frac{f(0)}{\Gamma(v)} t^{v-1} + \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t (t - z)^{v-1} \frac{\partial}{\partial t} f(z) dz$$

ifadesine dönüşmüş olur. Bu da (3.2.26) eşitliğinin doğruluğunu gösterir.

3.3 Riemann-Liouville Kesirli Türevi

$0 < u < 1$ ve $f \in C[a, b]$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun u . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$${}_a D_x^u f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-u)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-u} f(t) dt \quad (3.3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Kesirli türev, aynı zamanda kesirli integral tanımı yardımı ile tanımlanabilir. Bu amaçla, $0 < v < 1$ olmak üzere $v = n - u$ olduğunu varsayalım. Burada n , u tamsayısından büyük en küçük tamsayıdır. Dolayısıyla u . mertebeden $f(x)$ fonksiyonunun kesirli türevi

$$D^u f(x) = D^n [D^{-v} f(x)] = D^n [I^v f(x)] \quad (3.3.2)$$

şeklinde tanımlanır.

3.3.1 Örnekler

$\mu \geq 0$ olmak üzere $f(x) = x^\mu$ fonksiyonunun v . mertebeden kesirli türevini bulmak için (3.3.2) tanımında u ve v değerlerinin yerlerini değiştirmek yeterli olacaktır. Yani $0 < u < 1$ olmak üzere $u = n - v$ olsun. Özel olarak $n = 1$ için $u = 1 - v$ olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} D^v f(x) &= D^1 [D^{-(1-v)} f(x)] \\ &= D^1 [D^{-(1-v)} x^\mu] \\ &= D^1 \left[\frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma((\mu - v + 1) + 1)} x^{\mu-v+1} \right] \\ &= (\mu - v + 1) \frac{\Gamma(\mu + 1)}{(\mu - v + 1)\Gamma(\mu - v + 1)} x^{\mu-v} \\ &= \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - v + 1)} x^{\mu-v} \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki örnekte görüldüğü üzere,

$$D^v x^\mu = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - v + 1)} x^{\mu-v}, \quad \mu \geq 0, \quad 0 < v < 1 \quad (3.3.3)$$

dir. Bu denklem, (3.2.13) denkleminde seçtiğimiz kuvvet kuralına benzer. Özellikle

$\mu = 0, 1, 2$ için $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevi (3.3.2) tanımı ve

(3.3.3) eşitliği kullanarak bulunabilir. Her iki ifade de tamamen aynı sonucu verecektir. Ayrıca bir sabitin $\frac{1}{2}$. mertebeden türevinin Riemann-Liouville tanımı kullanılarak sıfır olmadığı görülecektir.

$f(x) = x^\mu$ fonksiyonu için,

$$D^{\frac{1}{2}}f(x) = D^1[D^{-\frac{1}{2}}f(x)]$$

$$D^{\frac{1}{2}}x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma\left(\mu - \frac{1}{2} + 1\right)} x^{\mu-\frac{1}{2}}$$

$f(x) = x^0$ fonksiyonu için,

$$D^{\frac{1}{2}}x^0 = D^1\left[2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

$$D^{\frac{1}{2}}x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

$f(x) = x^1$ fonksiyonu için,

$$D^{\frac{1}{2}}x^1 = D^1\left[\frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}\right] = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

$$D^{\frac{1}{2}}x^1 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

$f(x) = x^2$ fonksiyonu için,

$$D^{\frac{1}{2}}x^2 = D^1\left[\frac{16}{9}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}\right] = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}$$

$$D^{\frac{1}{2}}x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}x^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}$$

bulunur. Benzer şekilde $0 < v < 1$ olmak üzere $f(t) = e^{at}$ fonksiyonunun v . mertebeden türevi bulunurken (3.3.2) eşitliğinden yararlanılacaktır. Yani

$$D^v e^{at} = D^1[D^{-v}e^{at}]$$

olur. (3.2.16) ifadesi göz önüne alındığında

$$D^v e^{at} = D^1[t^v E_{1,v+1}(at)]$$

bulunur. Son olarak (3.1.18) denklemi kullanılırsa

$$D^v e^{at} = t^{-v} E_{1,-v+1}(at) \quad (3.3.4)$$

elde edilir. Özel olarak $v = \frac{1}{2}$ ve $a = 1$ seçilirse

$$D^{\frac{1}{2}}e^t = t^{-\frac{1}{2}}E_{1,\frac{1}{2}}(t)$$

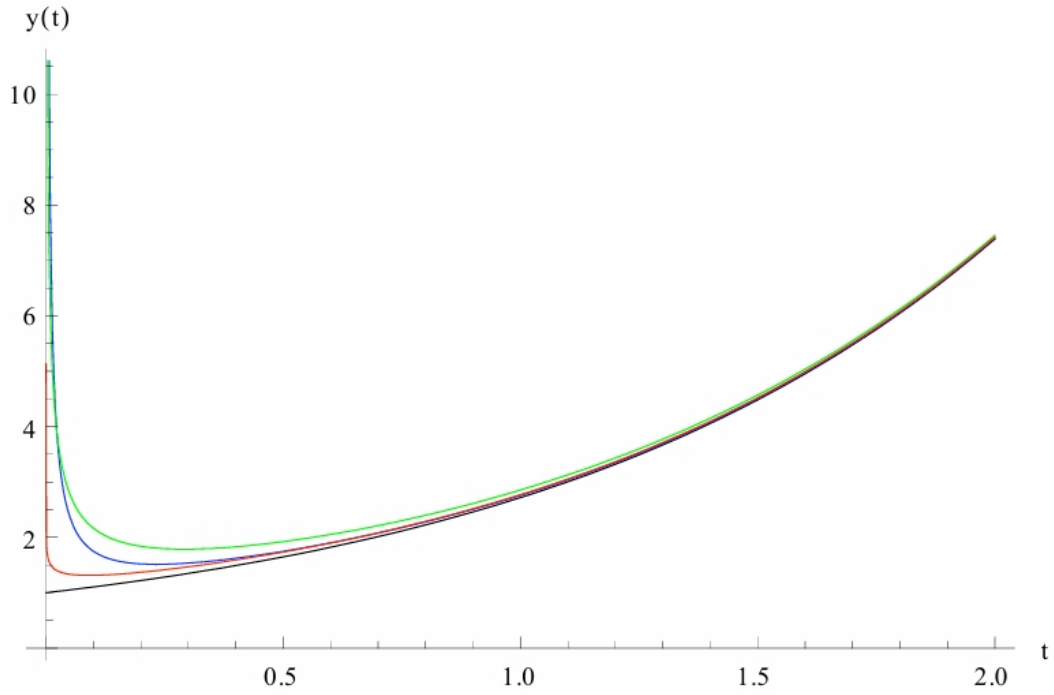
olur. Aşağıdaki grafikte

$$y_1(t) = \frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$$

ve $a = 1$ olmak üzere

$$y_v(t) = D^v e^{at} = t^{-v} E_{1,-v+1}(at) \quad (3.3.5)$$

ifadesinin $v = 0.1, 0.5, 0.9$ değerlerindeki farklı davranışlarının karşılaştırılması verilmiştir. Şekilde y_1 en alttaki grafikdir. Görüldüğü üzere $v \rightarrow 1$ iken y_v fonksiyonu y_1 fonksiyonuna yaklaşmaktadır.



Şekil 3.2 Farklı mertebeden kesirli türevlerin adi türeğe yaklaşımı.

3.4 Caputo Kesirli Türevi

$0 \leq n-1 < v \leq n$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve f fonksiyonu en az n . mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun v . mertebeden Caputo kesirli türevi

$${}_a^C D_x^v f(x) = \frac{1}{\Gamma(v-n)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{v+1-n}} \quad (3.4.1)$$

şeklinde tanımlanır. Öte yandan Caputo kesirli türevi ile Riemann-Liouville kesirli türevi arasında

$${}_a^C D_x^v f(x) = {}_a D_x^v f(x) - \frac{(x-a)^{-v}}{\Gamma(1-v)} f(a) \quad (3.4.2)$$

ilişkisi bulunmaktadır.

$f(x)$ fonksiyonu ile birlikte verilen koşullar altında, $v \rightarrow n$ iken Caputo türevi $f(x)$ fonksiyonunun klasik bir n . türevi haline gelir. Bunu göstermek adına

$0 \leq n-1 < v < 1$ olsun ve $f(x)$ fonksiyonu her $T > a$ için $[a, T]$ aralığında sınırlı, sürekli ve $n+1$. dereceden türeve sahip olsun. Daha sonra (3.4.2) ifadesinin $v \rightarrow n$ iken limiti alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{v \rightarrow n} {}^C D_x^v f(x) &= \lim_{v \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{n-v}}{\Gamma(n-v+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-v+1)} \int_a^x (x-\tau)^{n-v} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^x f^{(n+1)}(\tau) d\tau \\ &= f^{(n)}(x), \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

olur.

BÖLÜM 4

GEÇİŞ ŞARTLI PERİYODİK KESİRLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ

Kesirli Sturm-Liouville problemleri, klasik Sturm-Liouville problemlerinden çözüm yöntemleri, tanımları ve özellikleri bakımından farklıdır. Bu tür problemler birçok uygulamada ortaya çıkar ve matematiksel fizik, mühendislik ve diğer bilim dallarında önemli bir yer tutar [6]. Bu bölümde kesirli Sturm-Liouville problemleri ile klasik Sturm-Liouville problemlerinin karşılaştırması yapılacak, klasikte kullanılan kısmi integrasyon yönteminin kesirli hali ele alınacaktır. Devamında ikinci bölümde verilen Sturm-Liouville problemleri için temel spektral teoremler, üçüncü bölümde tanıtılan kesirli integral ve türevlerin yardımı ile kesirli Sturm-Liouville problemleri için yeniden ele alınıp ispatlanacaktır.

4.1. Kesirli Sturm-Liouville Problemleri

Klasik Sturm-Liouville problemi

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = \lambda r(x)y \quad (4.1.1)$$

dir. Burada $p(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$ incelenen çalışmalara bağlı olarak farklı şartları sağlayan fonksiyonlardır. Bu tip problemler düzenli Sturm-Liouville problemleri olarak adlandırılır ancak p , q ve r katsayıları sonsuz olduğunda veya $[a, b]$ aralığının uzunluğu sonsuz olduğunda tekil Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılır. Düzenli ve tekil Sturm-Liouville problemlerine ilişkin sonuçlar Naimark [7] ve Levitan ve arkadaşları [8] tarafından verilmektedir. Bazı sınır değer problemlerinin çözümünde veya türevinde bir iç noktada süreksizlikler olabilir. Bu durumda koşullar genellikle çözümlerin ve türevlerinin o iç noktadaki sol ve sağ limitlerine uygulanır. Bu tür koşullara genellikle iletim koşulları denir. Bu tip Sturm-Liouville problemleri [9]-[11] de olduğu gibi birçok yazarın dikkatini çekmiştir. Son olarak, periyodik katsayılarla veya periyodik sınır koşullarına sahip olan Sturm-Liouville problemlerine periyodik Sturm-Liouville problemleri adı verilir. Bu teoremin büyük bir kısmı

Eastham'ın kitabında [12] verilmiştir, ayrıca [13] ve [14] e bakılabilir. Çok uzun süredir Sturm-Liouville problemlerinin düzenli ve tekil formları çalışılmaktadır. Ancak kesirli analiz teorisinin gelişimi bu türdeki problemler için yeni perspektifler açmıştır. Kesirli analizin tarihsel gelişimi için [15] ve [16] ya bakılabilir.

Kesirli Sturm-Liouville problemleri klasikte bulunan sağ ve soldaki adi türevlerin aynı şekilde incelenen çalışmalarla bağlı olarak Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald Letnikov vb. çeşitli türevlerle değiştirildiği Sturm-Liouville problemleridir [17]. Son yıllarda kesirli Sturm-Liouville problemi literatürde büyük ilgi görmeye başlamıştır. Kesirli Sturm-Liouville problemlerinin sayısal çözümü [18]-[20] de, [21] de ise düzenli kesirli Sturm-Liouville problemleri incelenmiştir. Son zamanlarda Akdoğan ve arkadaşları [22] de, Yakar ve arkadaşları [23] de tekil kesirli Sturm-Liouville problemlerini analiz etmiştir. Kesirli Sturm-Liouville problemleri için birçok çeşitli örnek bulunmaktadır. Örneğin ilk türev kesirli, ikinci türev adi seçilebilir, her iki türev kesirli seçilebilir ya da her iki türev birbirinden farklı olarak Grünwald Letnikov ve Caputo vb. türev cinsinden seçilebilir. [21] de

$$L_{\alpha}[y] = -D^{\alpha}(u(x)D^{\alpha}y) + v(x)y, \quad x \in (a, b) \quad (4.1.2)$$

biçiminde, her iki kesirli türevi de α mertebeden Riemann-Liouville cinsinden olan bir problem ele alınmıştır.

Diğer yandan problemin incelendiği aralık da kesirli türevin çözümünü büyük oranda etkilemektedir. Sürekli bir aralıkta incelenen kesirli Sturm-Liouville problemi ile incelenen aralığın içinde bir veya birden fazla süreksiz noktalar içeren Sturm-Liouville problemleri, çözümleri ve sınır şartları açısından farklılık gösterir. Buna ek olarak süreksizlik noktasında probleme uygun olarak seçilen geçiş şartına ihtiyaç duyulur. Klasik Sturm-Liouville problemleri için ayırık sınır şartları ve geçiş şartları problemin durumuna göre adi türev içerirken kesirli Sturm-Liouville problemlerinde sınır şartları ve geçiş şartları problemin türüne göre farklı türlerde kesirli türev ve integraller içerebilir. Örneğin [22],

$${}^C D_1^\alpha p(x) D_{-1^+}^\alpha y + q(x)y = -\lambda y, \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$$

$$I_{-1^+}^{1-\alpha} y(-1) = 0, \quad D_{-1^+}^\alpha y(-1) = 1$$

(4.1.3)

$$I_{-1^+}^{1-\alpha} y(1) = 1, \quad D_{-1^+}^\alpha y(1) = 0$$

$$I_{-1^+}^{1-\alpha} y(+0) = \frac{1}{k} I_{-1^+}^{1-\alpha} y(-0), \quad D_{-1^+}^\alpha y(+0) = k D_{-1^+}^\alpha y(-0)$$

biçimindeki bir problemi incelemiştir. Görüldüğü üzere bu problemde ilk türev α mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi, ikinci türev α mertebeden Caputo kesirli türevidir. Yine sınır ve geçiş şartlarında kesirli türev ve integraller içermektedir. Problem $[-1, 0) \cup (0, 1]$ aralığı üzerinde bir süreksizlik noktasına sahip olduğundan geçiş şartlarına sahiptir. Yukarıdaki her iki örnekte de $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n < \alpha \leq n + 1$ dir. $\alpha = n + 1$ olduğu durumda türev ifadesi kesirli türev olmaktan çıkıp adi türeve döner. Bazı durumlarda $0 < \alpha \leq 1$ seçimi ile kesirli türevin mertebesi daha özel seçilir.

Bu tezde incelenen kesirli Sturm-Liouville probleminin ilk türevi Riemann-Liouville, ikinci türevi Caputo olarak seçilmiştir. İncelendiği aralıkta bir süreksizlik noktası mevcuttur, sınır şartlarında ve geçiş şartlarında probleme uygun olarak seçilen kesirli integral ve türevler bulunmaktadır.

Klasik Sturm-Liouville teorisinde özfonksiyonların ve özdeğerlerin temel özellikleri, birinci dereceden türevler için kısmi integrasyon formülleri ile bağlantılıdır. Kısmi integrasyon yöntemi çözümlerin bulunması açısından büyük kolaylık sağlar ve problemlerde sıklıkla kullanılır. Aynı durum kesirli türevler için de geçerlidir. Bu bölümün devamında teoremlerin ispatlarında kesirli türevler için sıklıkla kullanılacak olan kısmi integrasyon yöntemini verelim. Daha fazlası için [24] e bakılabilir.

Yardımcı Teorem 4.1: $\alpha \in (m - 1, m)$, $m \in \mathbb{Z}$, $v \in L_p[a, b]$ olsun ve varsayalım ki v , $[a, b]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli olsun. O halde (3.2.1), (3.3.1) ve (3.4.1) kesirli diferansiyel operatörleri aşağıdaki

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) D_{b-}^\alpha v(x) dx &= \int_a^b v(x) {}^C D_{a+}^\alpha u(x) dx \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} u^{(k)}(x) D^{m-k-1} I_{b-}^{m-\alpha} v(x) \Big|_{x=a}^b \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) D_{a+}^\alpha v(x) dx &= \int_a^b v(x) {}^C D_{b-}^\alpha u(x) dx \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k u^{(k)}(x) D^{m-k-1} I_{a+}^{m-\alpha} v(x) \Big|_{x=a}^b \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

bağıntılarını sağlar.

4.2. Spektral Özellikler

Bir Sturm-Liouville probleminin periyodikliği genel olarak iki farklı durumdan kaynaklanmaktadır. Bunlardan biri verilen problemin katsayılarının periyodik olmasıdır ki bu durum bu çalışmada ele alınmayacaktır. Diğer durum ise sınır koşullarının periyodik olmasından kaynaklanır. Bu bölümde aşağıda verilen periyodik Sturm-Liouville problemi incelenecektir.

$$L_\alpha[y] := D_{b-}^\alpha [p(x) {}^C D_{a+}^\alpha y] + q(x)y = \lambda r(x)y \quad (4.2.1)$$

olmak üzere

$$y(a) = y(b) \quad (4.2.2)$$

$$I_{b-}^\alpha (p {}^C D_{a+}^\alpha y)(a) = I_{b-}^\alpha (p {}^C D_{a+}^\alpha y)(b)$$

kesirli sınır koşulları ve $c \in (a, b)$ olmak üzere

$$y(c-) = y(c+) \quad (4.2.3)$$

$$I_{b-}^\alpha (p {}^C D_{a+}^\alpha y)(c-) = I_{b-}^\alpha (p {}^C D_{a+}^\alpha y)(c+)$$

kesirli geçiş şartlarıdır. Burada $p(x)$, ${}^C D_{b-}^\alpha p(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$ sürekli, reel fonksiyonlar ve $[a, c) \cup (c, b]$ aralığı üzerinde ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılan

$r(x) > 0$ dır. (4.2.1)-(4.2.3) probleminin aşıkâr olmayan çözümünü veren λ değerine bu problemin özdeğeri, aşıkâr olmayan bu $y(x)$ çözümüne de problemin λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu denir. Şimdi Bölüm 2 ve Bölüm 3 ışığında geçiş şartlı kesirli periyodik Sturm-Liouville problemleri için temel teoremleri verelim.

İlk olarak simetriklik (kendine eşlik) teoremi, Sturm-Liouville problemlerinin çözüm uzaylarının önemli bir özelliğini ifade eder. Bu özellik özdeğerlerin reel olmasını ve özfonksiyonların dik olmasını sağlar ki bu da fiziksel problemlerde kritik bir öneme sahiptir.

Teorem 4.1: (4.2.1)-(4.2.3) geçiş şartlı periyodik kesirli Sturm-Liouville problemi $[a, c) \cup (c, b]$ aralığı üzerinde kendine eştir.

İspat: θ ve φ , (4.2.1)-(4.2.3) probleminin iki farklı özfonksiyonu olsun. (4.2.1) daki L_α operatörünün tanımından

$$\begin{aligned} \langle L_\alpha[\theta], \varphi \rangle = & \int_a^c D_{b^-}^\alpha [p(x)^C D_{a^+}^\alpha \theta(x)] \varphi(x) dx + \int_a^c q(x) \theta(x) \varphi(x) dx \\ & + \int_c^b D_{b^-}^\alpha [p(x)^C D_{a^+}^\alpha \theta(x)] \varphi(x) dx + \int_c^b q(x) \theta(x) \varphi(x) dx \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

olur. Bu eşitlikteki birinci ve üçüncü integrallere (4.1.4) bağıntısı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \langle L_\alpha[\theta], \varphi \rangle = & \int_a^c p(x)^C D_{a^+}^\alpha \theta(x)^C D_{a^+}^\alpha \varphi(x) dx - \varphi(x) I_{b^-}^{1-\alpha} [p(x)^C D_{a^+}^\alpha \theta(x)] \Big|_a^c \\ & + \int_a^c q(x) \theta(x) \varphi(x) dx + \int_c^b p(x)^C D_{a^+}^\alpha \theta(x)^C D_{a^+}^\alpha \varphi(x) dx \\ & - \varphi(x) I_{b^-}^{1-\alpha} [p(x)^C D_{a^+}^\alpha \theta(x)] \Big|_c^b + \int_c^b q(x) \theta(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \langle L_\alpha[\theta], \varphi \rangle = & \int_a^c p(x)^C D_{a^+}^\alpha \theta(x)^C D_{a^+}^\alpha \varphi(x) dx - \varphi(c-) I_{b^-}^{1-\alpha} [p(c-)^C D_{a^+}^\alpha \theta(c-)] \\ & + \varphi(a) I_{b^-}^{1-\alpha} [p(a)^C D_{a^+}^\alpha \theta(a)] + \int_a^c q(x) \theta(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_c^b p(x)^C D_{a+}^\alpha \theta(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x) dx - \varphi(b) I_{b-}^{1-\alpha} [p(b)^C D_{a+}^\alpha \theta(b)] \\
& + \varphi(c+) I_{b-}^{1-\alpha} [p(c+)^C D_{a+}^\alpha \theta(c+)] + \int_c^b q(x) \theta(x) \varphi(x) dx
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

olur. Bu son eşitlikte, (4.2.2) sınır koşulları ve (4.2.3) geçiş şartları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
< L_\alpha[\theta], \varphi > &= \int_a^c p(x)^C D_{a+}^\alpha \theta(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x) dx + \int_a^c q(x) \theta(x) \varphi(x) dx \\
& + \int_c^b p(x)^C D_{a+}^\alpha \theta(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x) dx + \int_c^b q(x) \theta(x) \varphi(x) dx
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada yine (4.1.4) bağıntısı birinci ve üçüncü integrallere uygulanırsa

$$\begin{aligned}
< L_\alpha[\theta], \varphi > &= \int_a^c \theta(x) D_{b-}^\alpha [p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x)] dx + \theta(x) I_{b-}^{1-\alpha} [p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x)] \Big|_a^c \\
& + \int_a^c q(x) \theta(x) \varphi(x) dx + \int_c^b \theta(x) D_{b-}^\alpha [p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x)] dx \\
& + \theta(x) I_{b-}^{1-\alpha} [p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x)] \Big|_c^b + \int_c^b q(x) \theta(x) \varphi(x) dx
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
< L_\alpha[\theta], \varphi > &= \int_a^c \theta(x) D_{b-}^\alpha [p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x)] dx + \theta(c-) I_{b-}^{1-\alpha} [p(c-)^C D_{a+}^\alpha \varphi(c-)] \\
& - \theta(a) I_{b-}^{1-\alpha} [p(a)^C D_{a+}^\alpha \varphi(a)] + \int_a^c q(x) \theta(x) \varphi(x) dx \\
& + \int_c^b \theta(x) D_{b-}^\alpha [p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x)] dx + \theta(b) I_{b-}^{1-\alpha} [p(b)^C D_{a+}^\alpha \varphi(b)] \\
& + \theta(c+) I_{b-}^{1-\alpha} [p(c+)^C D_{a+}^\alpha \varphi(c+)] + \int_c^b q(x) \theta(x) \varphi(x) dx
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

olur. Burada yine (4.2.2) sınır koşulları ve (4.2.3) geçiş şartları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\langle L_\alpha[\theta], \varphi \rangle &= \int_a^c \theta(x) D_{b-}^\alpha [p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x)] dx + \int_a^c q(x) \theta(x) \varphi(x) dx \\
&\quad + \int_c^b \theta(x) D_{b-}^\alpha [p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x)] dx + \int_c^b q(x) \theta(x) \varphi(x) dx \\
&= \langle \theta, L_\alpha[\varphi] \rangle
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\langle L_\alpha[\theta], \varphi \rangle = \langle \theta, L_\alpha[\varphi] \rangle$$

eşitliği elde edilmiş olur. Dolayısıyla (4.2.1)-(4.2.3) problemi $[a, c) \cup (c, b]$ aralığı üzerinde kendine eştir.

Reellik teoremi, periyodik kesirli Sturm-Liouville problemlerinin özdeğer ve özfonksiyonlarının özelliklerini belirten temel bir teoremdir. Bu teorem, periyodik sınır koşulları altında tanımlanan Sturm-Liouville operatörlerinin özdeğerlerinin gerçekte sayılar olduğunu ve özfonksiyonlarının da gerçekte fonksiyonlar olduğunu ifade eder. Reellik teoremi, bu tür problemlerin çözümlerinin fiziksel anlamda yorumlanabilir ve analiz edilebilir olmasını sağlar. Bu teorem, periyodik kesirli Sturm-Liouville problemlerinin matematiksel çözümlemelerinde ve çeşitli uygulamalarda çözümlerin gerçekliğini ve geçerliliğini güvence altına alır. Şimdi ele alınan problemin özdeğerlerinin reellik durumunu ifade eden aşağıdaki teoremle devam edelim.

Teorem 4.2: $[a, c) \cup (c, b]$ aralığı üzerinde (4.2.1)-(4.2.3) probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: λ , (4.2.1)-(4.2.3) probleminin özdeğeri, φ fonksiyonu da bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. Bu durumda

$$L_\alpha[\varphi(x)] = \lambda r(x) \varphi(x) \tag{4.2.9}$$

ve dolayısıyla

$$\overline{L_\alpha[\varphi(x)]} = \overline{\lambda} \overline{r(x) \varphi(x)} \tag{4.2.10}$$

olur. (4.2.9) eşitliğini $\overline{\varphi(x)}$ ile (4.2.10) eşitliğini de $\varphi(x)$ ile çarpıp ortaya çıkan ifadeleri birbirinden çıkarırsak

$$\overline{\varphi(x)L_\alpha[\varphi(x)]} - \varphi(x)\overline{L_\alpha[\varphi(x)]} = (\lambda - \bar{\lambda})|\varphi(x)|^2 r(x) \quad (4.2.11)$$

eşitliği elde edilir. Devamında bu eşitlik $[a, c) \cup (c, b]$ aralığı üzerinde integrallenirse eşitliğin sağ tarafı

$$\begin{aligned} & \int_a^c \overline{\varphi(x)L_\alpha[\varphi(x)]} - \varphi(x)\overline{L_\alpha[\varphi(x)]} dx \\ & + \int_c^b \overline{\varphi(x)L_\alpha[\varphi(x)]} - \varphi(x)\overline{L_\alpha[\varphi(x)]} dx \\ & = \int_a^c D_{b-}^\alpha [p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x)] \overline{\varphi(x)} dx + \int_a^c q(x) \varphi(x) \overline{\varphi(x)} dx \\ & + \int_c^b D_{b-}^\alpha [p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x)] \overline{\varphi(x)} dx + \int_c^b q(x) \varphi(x) \overline{\varphi(x)} dx \\ & - \int_a^c D_{b-}^\alpha [p(x)^C D_{a+}^\alpha \overline{\varphi(x)}] \varphi(x) dx - \int_a^c q(x) \overline{\varphi(x)} \varphi(x) dx \\ & - \int_c^b D_{b-}^\alpha [p(x)^C D_{a+}^\alpha \overline{\varphi(x)}] \varphi(x) dx - \int_c^b q(x) \overline{\varphi(x)} \varphi(x) dx \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

biçiminde bulunur ve böylece

$$\begin{aligned} & \int_a^c \overline{\varphi(x)L_\alpha[\varphi(x)]} - \varphi(x)\overline{L_\alpha[\varphi(x)]} dx \\ & + \int_c^b \overline{\varphi(x)L_\alpha[\varphi(x)]} - \varphi(x)\overline{L_\alpha[\varphi(x)]} dx \\ & = \int_a^c D_{b-}^\alpha [p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x)] \overline{\varphi(x)} dx + \int_c^b D_{b-}^\alpha [p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x)] \overline{\varphi(x)} dx \\ & - \int_a^c D_{b-}^\alpha [p(x)^C D_{a+}^\alpha \overline{\varphi(x)}] \varphi(x) dx - \int_c^b D_{b-}^\alpha [p(x)^C D_{a+}^\alpha \overline{\varphi(x)}] \varphi(x) dx \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

elde edilir. (4.2.13) ifadesinde (4.1.4) bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_a^c \overline{\varphi(x)L_\alpha[\varphi(x)]} - \varphi(x)\overline{L_\alpha[\varphi(x)]} dx \\ & + \int_c^b \overline{\varphi(x)L_\alpha[\varphi(x)]} - \varphi(x)\overline{L_\alpha[\varphi(x)]} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^c p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x)^C \overline{D_{a+}^\alpha \varphi(x)} dx - \overline{\varphi(x)} I_{b-}^{1-\alpha} [p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x)] \Big|_a^c \\
&\quad + \int_c^b p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x)^C \overline{D_{a+}^\alpha \varphi(x)} dx - \overline{\varphi(x)} I_{b-}^{1-\alpha} [p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi(x)] \Big|_c^b \\
&\quad - \int_a^c p(x)^C D_{a+}^\alpha \overline{\varphi(x)}^C D_{a+}^\alpha \varphi(x) dx + \varphi(x) I_{b-}^{1-\alpha} [p(x)^C D_{a+}^\alpha \overline{\varphi(x)}] \Big|_a^c \\
&\quad - \int_c^b p(x)^C D_{a+}^\alpha \overline{\varphi(x)}^C D_{a+}^\alpha \varphi(x) dx + \varphi(x) I_{b-}^{1-\alpha} [p(x)^C D_{a+}^\alpha \overline{\varphi(x)}] \Big|_c^b
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

bulunur ki bu ifade de düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
&\int_a^c \overline{\varphi(x)} L_\alpha [\varphi(x)] - \varphi(x) \overline{L_\alpha [\varphi(x)]} dx \\
&\quad + \int_c^b \overline{\varphi(x)} L_\alpha [\varphi(x)] - \varphi(x) \overline{L_\alpha [\varphi(x)]} dx \\
&= -\overline{\varphi(c-)} I_{b-}^{1-\alpha} [p(c-)^C D_{a+}^\alpha \varphi(c-)] + \overline{\varphi(a)} I_{b-}^{1-\alpha} [p(a)^C D_{a+}^\alpha \varphi(a)] \\
&\quad - \overline{\varphi(b)} I_{b-}^{1-\alpha} [p(b)^C D_{a+}^\alpha \varphi(b)] + \overline{\varphi(c+)} I_{b-}^{1-\alpha} [p(c+)^C D_{a+}^\alpha \varphi(c+)] \\
&\quad + \varphi(c-) I_{b-}^{1-\alpha} [p(c-)^C D_{a+}^\alpha \overline{\varphi(c-)}] - \varphi(a) I_{b-}^{1-\alpha} [p(a)^C D_{a+}^\alpha \overline{\varphi(a)}] \\
&\quad + \varphi(b) I_{b-}^{1-\alpha} [p(b)^C D_{a+}^\alpha \overline{\varphi(b)}] - \varphi(c+) I_{b-}^{1-\alpha} [p(c+)^C D_{a+}^\alpha \overline{\varphi(c+)}]
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte (4.2.2) ve (4.2.3) şartları kullanılırsa

$$\int_a^c \overline{\varphi(x)} L_\alpha [\varphi(x)] - \varphi(x) \overline{L_\alpha [\varphi(x)]} dx + \int_c^b \overline{\varphi(x)} L_\alpha [\varphi(x)] - \varphi(x) \overline{L_\alpha [\varphi(x)]} dx = 0$$

elde edilir. Böylece (4.2.11) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&\int_a^c \overline{\varphi(x)} L_\alpha [\varphi(x)] - \varphi(x) \overline{L_\alpha [\varphi(x)]} dx \\
&\quad + \int_c^b \overline{\varphi(x)} L_\alpha [\varphi(x)] - \varphi(x) \overline{L_\alpha [\varphi(x)]} dx \\
&= (\lambda - \bar{\lambda}) \left(\int_a^c |\varphi(x)|^2 r(x) dx + \int_c^b |\varphi(x)|^2 r(x) dx \right)
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \left(\int_a^c |\varphi(x)|^2 r(x) dx + \int_c^b |\varphi(x)|^2 r(x) dx \right) = 0$$

olur. $\varphi(x) \neq 0$ ve $r(x) > 0$ olduğundan

$$\int_a^c |\varphi(x)|^2 r(x) dx + \int_c^b |\varphi(x)|^2 r(x) dx > 0$$

dır. Dolayısıyla $\lambda = \bar{\lambda}$ olur yani özdeğerler reeldir.

Ortogonalite (diklik) teoremi, periyodik kesirli Sturm-Liouville problemlerinin özfonksiyonlarının birbirine ortogonal olduğunu belirten temel bir teoremdir. Bu teorem, Sturm-Liouville operatörüne ait farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların, belirli bir ağırlık fonksiyonu altında ortogonal olduğunu ifade eder. Yani, bu özfonksiyonlar, iç çarpımları sıfır olacak şekilde birbirlerine diktir. Ortogonalite teoremi, Sturm-Liouville problemlerinin çözümlerinin analizi ve bu çözümlerin çeşitli uygulamalarda kullanımı açısından kritik öneme sahiptir. Bu teorem, özfonksiyonların bir ortogonal baz oluşturmasını sağlar ve böylece çözüm uzayının tam ve eksiksiz bir şekilde tanımlanmasına olanak tanır.

Teorem 4.3: $[a, c) \cup (c, b]$ aralığı üzerinde (4.2.1)-(4.2.3) probleminin farklı özdeğerlerine ait olan özfonksiyonlar,

$$\langle f(x), g(x) \rangle_{r(x)} := \int_a^c f(x)g(x)r(x)dx + \int_c^b f(x)g(x)r(x)dx$$

şeklinde tanımlanan iç çarpıma göre diktir.

İspat: φ_n ve φ_m , sırasıyla λ_n ve λ_m farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$L_\alpha[\varphi_n] = \lambda_n r(x)\varphi_n(x) \quad (4.2.17)$$

$$L_\alpha[\varphi_m] = \lambda_m r(x)\varphi_m(x) \quad (4.2.18)$$

eşitliklerine sahip oluruz. (4.2.17) eşitliği φ_m ile (4.2.18) eşitliği de φ_n ile çarpılır ve birbirinden çıkartılırsa

$$\varphi_m(x)L_\alpha[\varphi_n(x)] - \varphi_n(x)L_\alpha[\varphi_m(x)] = (\lambda_n - \lambda_m)\varphi_n(x)\varphi_m(x)r(x) \quad (4.2.19)$$

olur. Devamında (4.2.19) eşitliği $[a, c) \cup (c, b]$ aralığında integrellenirse

$$\begin{aligned} & \int_a^c \varphi_m(x)L_\alpha[\varphi_n(x)] - \varphi_n(x)L_\alpha[\varphi_m(x)] dx \\ & + \int_c^b \varphi_m(x)L_\alpha[\varphi_n(x)] - \varphi_n(x)L_\alpha[\varphi_m(x)] dx \\ & = \int_a^c \varphi_m(x)D_{b-}^\alpha[p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi_n(x)]dx + \int_a^c q(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx \\ & + \int_c^b \varphi_m(x)D_{b-}^\alpha[p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi_n(x)]dx + \int_c^b q(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx \\ & - \int_a^c \varphi_n(x)D_{b-}^\alpha[p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi_m(x)]dx - \int_a^c q(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx \\ & - \int_c^b \varphi_n(x)D_{b-}^\alpha[p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi_m(x)]dx - \int_c^b q(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıлып (4.1.4) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^c \varphi_m(x)L_\alpha[\varphi_n(x)] - \varphi_n(x)L_\alpha[\varphi_m(x)] dx \\ & + \int_c^b \varphi_m(x)L_\alpha[\varphi_n(x)] - \varphi_n(x)L_\alpha[\varphi_m(x)] dx \\ & = \int_a^c p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi_n(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi_m(x)dx - \varphi_m(x)I_{b-}^{1-\alpha}[p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi_n(x)]\Big|_a^c \\ & + \int_c^b p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi_n(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi_m(x)dx - \varphi_m(x)I_{b-}^{1-\alpha}[p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi_n(x)]\Big|_c^b \\ & - \int_a^c p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi_m(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi_n(x)dx + \varphi_n(x)I_{b-}^{1-\alpha}[p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi_m(x)]\Big|_a^c \\ & - \int_c^b p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi_m(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi_n(x)dx + \varphi_n(x)I_{b-}^{1-\alpha}[p(x)^C D_{a+}^\alpha \varphi_m(x)]\Big|_c^b \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

bulunur ve buradan

$$\begin{aligned}
& \int_a^c \varphi_m(x) L_\alpha[\varphi_n(x)] - \varphi_n(x) L_\alpha[\varphi_m(x)] dx \\
& + \int_c^b \varphi_m(x) L_\alpha[\varphi_n(x)] - \varphi_n(x) L_\alpha[\varphi_m(x)] dx \\
& = -\varphi_m(c-) I_{b-}^{1-\alpha} [p(c-)^C D_{a+}^\alpha \varphi_n(c-)] + \varphi_m(a) I_{b-}^{1-\alpha} [p(a)^C D_{a+}^\alpha \varphi_n(a)] \\
& - \varphi_m(b) I_{b-}^{1-\alpha} [p(b)^C D_{a+}^\alpha \varphi_n(b)] + \varphi_m(c+) I_{b-}^{1-\alpha} [p(c+)^C D_{a+}^\alpha \varphi_n(c+)] \\
& + \varphi_n(c-) I_{b-}^{1-\alpha} [p(c-)^C D_{a+}^\alpha \varphi_m(c-)] - \varphi_n(a) I_{b-}^{1-\alpha} [p(a)^C D_{a+}^\alpha \varphi_m(a)] \\
& + \varphi_n(b) I_{b-}^{1-\alpha} [p(b)^C D_{a+}^\alpha \varphi_m(b)] - \varphi_n(c+) I_{b-}^{1-\alpha} [p(c+)^C D_{a+}^\alpha \varphi_m(c+)]
\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

eşitliği elde edilir. Burada (4.2.22) eşitliğine, (4.2.2) sınır şartları ve (4.2.3) geçiş şartları uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \int_a^c \varphi_m(x) L_\alpha[\varphi_n(x)] - \varphi_n(x) L_\alpha[\varphi_m(x)] dx \\
& + \int_c^b \varphi_m(x) L_\alpha[\varphi_n(x)] - \varphi_n(x) L_\alpha[\varphi_m(x)] dx = 0
\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

bulunur. (4.2.19) eşitliğinden açıktır ki

$$\begin{aligned}
& \int_a^c \varphi_m(x) L_\alpha[\varphi_n(x)] - \varphi_n(x) L_\alpha[\varphi_m(x)] dx \\
& + \int_c^b \varphi_m(x) L_\alpha[\varphi_n(x)] - \varphi_n(x) L_\alpha[\varphi_m(x)] dx \\
& = (\lambda_n - \lambda_m) \left(\int_a^c \varphi_n(x) \varphi_m(x) r(x) dx + \int_c^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) r(x) dx \right)
\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

dir. Bu da

$$(\lambda_n - \lambda_m) \left(\int_a^c \varphi_n(x) \varphi_m(x) r(x) dx + \int_c^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) r(x) dx \right) = 0 \tag{4.2.25}$$

olduğu anlamına gelir. $\lambda_n \neq \lambda_m$ olduğundan $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{r(x)} = 0$ dir. Dolayısıyla özfonksiyonlar diktir.

Sıradaki teoremdede özdeğerlerin katlı olduğu durum ispatlanacaktır. Geleneksel Sturm-Liouville problemleri, ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerle tanımlanı ve bu problemlerde özdeğerlerin basit yani tek katlı olduğu sıkça gözlemlenir. Ancak, periyodik koşullara sahip kesirli Sturm-Liouville problemleri ele alındığında, durum farklı bir hal alabilir. Bu problemler, kesirli türev operatörleri ve periyodik koşullar içerdiğinden onların klasik Sturm-Liouville problemlerinden ayrılmasına neden olur. Kesirli türev operatörlerinin kullanılması, problemin karmaşıklığını artırır ve özdeğerlerin basit değil, katlı olabileceği durumları ortaya çıkarır.

Teorem 4.4: $[a, c) \cup (c, b]$ aralığı üzerinde (4.2.1)-(4.2.3) probleminin özdeğerleri basit değildir.

İspat: λ , (4.2.2) sınır şartları ile elde edilmiş φ_1 ve φ_2 özfonksiyonlarına karşılık gelen özdeğer olsun. Sınır şartlarından

$$\varphi_1(a) = \varphi_1(b), \quad I_{b-}^\alpha (p {}^c D_{a+}^\alpha \varphi_1)(a) = I_{b-}^\alpha (p {}^c D_{a+}^\alpha \varphi_1)(b) \quad (4.2.26)$$

$$\varphi_2(a) = \varphi_2(b), \quad I_{b-}^\alpha (p {}^c D_{a+}^\alpha \varphi_2)(a) = I_{b-}^\alpha (p {}^c D_{a+}^\alpha \varphi_2)(b) \quad (4.2.27)$$

dır. Öte yandan, $x = a$ noktasında Wronskian,

$$W_\alpha[\varphi_1, \varphi_2](a) = \begin{vmatrix} \varphi_1(a) & \varphi_2(a) \\ {}^c D_{a+}^\alpha \varphi_1(a) & {}^c D_{a+}^\alpha \varphi_2(a) \end{vmatrix}$$

$$W_\alpha[\varphi_1, \varphi_2](a) = \varphi_1(a) {}^c D_{a+}^\alpha \varphi_2(a) - \varphi_2(a) {}^c D_{a+}^\alpha \varphi_1(a) \quad (4.2.28)$$

biçiminde tanımlanı. Kesirli wronskian için [25]-[27] ye bakılabilir. (4.2.26) ve (4.2.27) sınır koşulu (4.2.28) denkleminde uygulanırsa kolaylıkla görülebilir ki $W_\alpha[\varphi_1, \varphi_2]$ sıfır olmak zorunda değildir. Dolayısıyla φ_1 ve φ_2 lineer bağımlı olmak zorunda değildir. Yani özdeğerlerin lineer bağımsız iki özfonksiyona karşılık gelme olasılığı vardır. Dolayısıyla özdeğerler basit değildir.

Sturm ayırma teoremi, periyodik kesirli Sturm-Liouville problemlerinin çözüm uzayında yer alan özfonksiyonların sıfır noktalarının davranışını açıklayan önemli bir teoremdir. Bu teorem, farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların köklerinin sırayla yer aldığını belirtir. Yani, bir özfonksiyonun kökleri, bir başka özdeğere

karşılık gelen özfonksiyonun kökleri ile sıralı bir biçimde iç içe geçer. Sturm ayırma teoremi, Sturm-Liouville problemlerinin çözümlerinin yapı taşlarını anlamak ve bu çözümleri analiz etmek için kritik bir araçtır.

Teorem 4.5: θ ve φ , (4.2.1) denkleminin $[a, c) \cup (c, b]$ aralığı üzerinde lineer bağımsız çözümleri ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda θ ve φ çözümlerinin c den küçük (veya büyük) sıfırları birbirinden ayrılır. Başka bir ifadeyle θ ve φ ortak sıfıra sahip değildir ve herhangi birinin arka arkaya gelen iki sıfırı arasında diğerrinin tam olarak bir sıfırı vardır.

İspat: Çözümler lineer bağımsız olduğundan, $x \in [a, c) \cup (c, b]$ için

$$W[\theta, \varphi](x) = \theta(x) {}^C D_{a+}^{\alpha} \varphi(x) - \varphi(x) {}^C D_{a+}^{\alpha} \theta(x) \neq 0 \quad (4.2.29)$$

olur. Wronskian x ten bağımsız olduğu için işareti ya pozitif ya da negatiftir. Yani $W[\theta, \varphi]$ nin $[a, c) \cup (c, b]$ aralığı üzerinde işareti değişmez. Bu durumda wronskianin pozitif olduğunu varsayalım. Teorem wronskianin negatif olduğu durumda da ispatlanabilir. Diyelim ki $x_1, x_2 \in [a, c)$, φ çözümünün ardışık iki kökü olsun. Aynı durum $x_1, x_2 \in (c, b]$ için de geçerlidir. Şimdi x_1 ve x_2 değerleri (4.2.29) denkleminde yazılırsa,

$$W[\theta, \varphi](x_1) = \theta(x_1) {}^C D_{a+}^{\alpha} \varphi(x_1) > 0 \quad (4.2.30)$$

$$W[\theta, \varphi](x_2) = \theta(x_2) {}^C D_{a+}^{\alpha} \varphi(x_2) > 0$$

sonucuna ulaşılır. Her $i = 1, 2$ için ${}^C D_{a+}^{\alpha} \varphi(x_i) \neq 0$ olduğunu belirtmekte fayda vardır. (4.2.30) ifadesindeki eşitsizlikler çarpılırsa,

$$\theta(x_1) {}^C D_{a+}^{\alpha} \varphi(x_1) \theta(x_2) {}^C D_{a+}^{\alpha} \varphi(x_2) > 0. \quad (4.2.31)$$

elde edilir. Genelliği bozmadan ${}^C D_{a+}^{\alpha} \varphi(x_1) > 0$ olduğunu varsayalım. Böylece φ , x_1 noktasında artandır. φ sürekli olduğundan ve x_2 noktası x_1 noktasının yanındaki φ çözümünün diğer sıfırı olduğundan φ , x_2 de azalandır. Sonuç olarak ${}^C D_{a+}^{\alpha} \varphi(x_2) < 0$ dır. Benzer şekilde ${}^C D_{a+}^{\alpha} \varphi(x_1) < 0$ olduğunda ${}^C D_{a+}^{\alpha} \varphi(x_2) > 0$ olur. Dolayısıyla

${}^c D_{a+}^\alpha \varphi(x_1) {}^c D_{a+}^\alpha \varphi(x_2) < 0$ olur. Bu durum (4.2.31) eşitsizliğinden $\theta(x_1)\theta(x_2) < 0$ olduğu anlamına gelir. θ çözümünün sürekliliği $x_3 \in (x_1, x_2)$ ün varlığını sağlar öyle ki $\theta(x_3) = 0$ dır. $[a, c)$ aralığında θ çözümü yalnızca bir sifıra sahiptir. Aslında, eğer (x_1, x_2) de $\theta(x_4) = 0$ olacak şekilde $x_4 \neq x_3$ olsaydı, o zaman yukarıdaki argümanlardan $x_5 \in (x_3, x_4)$ veya $x_5 \in (x_4, x_3)$ noktasının varlığı ile sonuçlanırdı. Öyle ki $\varphi(x_5) = 0$ olurdu. Yani x_1 ve x_2 arasında φ çözümünün başka bir sıfırı olduğu anlamına gelirdi. Fakat bu x_1 ve x_2 noktalarının φ çözümünün birbirini takip eden iki sıfırı olmasıyla çelişir.



BÖLÜM 5

SONUÇLAR

Bu tez kapsamında öncelikle Sturm-Liouville problemlerinin spektral analizi, kesirli analizin tarihsel gelişimi ve geçiş şartlı kesirli periyodik Sturm-Liouville problemleri hakkında bilgilerden söz edilen giriş bölümü verilmiştir.

İkinci bölümde, klasik Sturm-Liouville problemlerinin spektral teorisi detaylı bir şekilde incelenmiş ve temel teoremler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde ise kesirli analiz için gerekli olan temel fonksiyonlar tanıtılmış, kesirli türev ve integral kavramları detaylandırılmıştır. Ayrıca ikinci ve üçüncü bölümde, dördüncü bölümde ele aldığımız problemin spektral teorisinin kesirli olarak incelenmesine olanak sağlayan temel yapı inşa edilmiştir.

Son olarak bu tez çalışmasında dördüncü bölüm verilmiştir. Bu bölümde geçiş şartı ile verilen periyodik sınır şartlarına sahip, kesirli Sturm-Liouville problemine odaklanılmış ve bu problemin spektral teoremleri ispatlanmıştır.

Çalışmamızın sonucunda, kesirli analiz ile klasik Sturm-Liouville problemleri arasındaki ilişkilerin daha iyi anlaşılmasına yönelik önemli adımlar atılmıştır. Özellikle, kesirli periyodik Sturm-Liouville problemlerinin spektral yapısı hakkında elde edilen sonuçlar, bu alandaki teorik bilgi birikimini artırmış ve gelecekteki çalışmalar için bir temel oluşturmuştur.

Bu tezde elde edilen bulgular hem teorik hem de uygulamalı matematik alanlarında çeşitli potansiyel araştırma konuları için bir temel teşkil etmektedir. Gelecekteki çalışmalar, bu problemlerin daha genel durumlarını inceleyerek, daha geniş kapsamlı sonuçlar elde edebilir. Özellikle, farklı türde geçiş şartları ve sınır koşulları altında kesirli Sturm-Liouville problemlerinin analizi, bu alanın daha derinlemesine anlaşılmasına katkı sağlayabilir.

Sonuç olarak, bu tez çalışması, kesirli analiz ve Sturm-Liouville problemleri arasındaki etkileşimleri ortaya koyarak hem matematiksel teorinin ilerlemesine hem de pratik uygulamalara yönelik önemli katkılar sunmaktadır. Bu alandaki araştırmaların devam etmesi, kesirli analiz ve spektral teori konularında daha geniş ve derinlemesine bilgiye ulaşmamıza olanak tanıyacaktır.



KAYNAKLAR

- [1] E. A. Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1955.
- [2] M. A. Al-Gwaiz and S. A. Elsanousi, Elements of Real Analysis, Boca Raton, FL, USA: Chapman and Hall/CRC, 2006.
- [3] R. Magin, Fractional Calculus in Bioengineering, Redding, CT, USA: Begell House Publishers, 2004.
- [4] A. Mathai and H. Haubold, Special Functions for Applied Scientists, Berlin, Germany: Springer, 2008.
- [5] K. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- [6] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, and H. Holden (with an appendix by P. Exner), Solvable Models in Quantum Mechanics, 2nd ed., Providence, RI, USA: AMS Chelsea Publ., 2005.
- [7] M. A. Naimark, Linear Differential Operators, Part I: Elementary Theory of Linear Differential Operators, New York, NY, USA: Frederick Ungar Publishing Company, 1967.
- [8] B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, and M. Hazewinkel, Sturm-Liouville and Dirac Operators, vol. 59, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic, 1991.
- [9] E. Tunç and O. S. Muhtarov, “Fundamental solutions and eigenvalues of one boundary-value problem with transmission conditions,” Applied Mathematics and Computation, vol. 157, no. 2, pp. 347-355, 2004.
- [10] A. Kablan and M. D. Manafov, “Matrix representations of fourth-order boundary value problems with transmission conditions,” Mediterranean Journal of Mathematics, vol. 13, no. 1, pp. 205-215, 2016.

- [11] M. Manafov and A. Kablan, “Sturm-Liouville problems with finitely many discontinuity conditions and eigen-parameter in boundary condition,” *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 17, no. 2, pp. 911-923, 2016.
- [12] M. S. P. Eastham, *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*, Edinburgh, Scotland: Scottish Academic Press [distributed by Chatto & Windus, London], 1973.
- [13] M. Manafov and A. Kablan, “Eigenfunction expansions of a quadratic pencil of differential operator with periodic generalized potential,” *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, no. 76, pp. 1-11, 2013.
- [14] Y. Yuan, J. Sun, and A. Zettl, “Eigenvalues of periodic Sturm Liouville problems,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 517, pp. 148-166, 2017.
- [15] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, San Diego, CA, USA: Academic Press, 1999.
- [16] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, B. V., 2006.
- [17] M. Klimek and O. P. Agrawal, “Fractional Sturm-Liouville problem,” *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 66, no. 3, pp. 795-812, 2013.
- [18] Q. M. Al-Mdallal, “An efficient method for solving fractional Sturm–Liouville problems,” *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 40, no. 1, pp. 183-189, 2009.
- [19] Q. M. Al-Mdallal, “On the numerical solution of fractional Sturm–Liouville problems,” *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 87, no. 12, pp. 2837-2845, 2010.
- [20] V. S. Ertürk, “Computing eigenelements of Sturm–Liouville problems of fractional order via fractional differential transform method,” *Mathematical and Computational Applications*, vol. 16, no. 3, pp. 712-720, 2011.
- [21] M. Rivero, J. J. Trujillo, and M. Velasco, “A fractional approach to the Sturm-Liouville problem,” *Open Physics*, vol. 11, no. 10, pp. 1246-1254, 2013.

- [22] Z. Akdoğan, A. Yakar, and M. Demirci, "Discontinuous fractional Sturm–Liouville problems with transmission conditions," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 350, pp. 1-10, 2019.
- [23] A. Yakar and Z. Akdoğan, "On the fundamental solutions of a discontinuous fractional boundary value problem," *Advances in Difference Equations*, vol. 2017, no. 1, pp. 1-15, 2017.
- [24] T. Abdeljawad, A. Atangana, J. F. Gómez-Aguilar, and F. Jarad, "On a more general fractional integration by parts formulae and applications," *Physica A*, vol. 536, p. 0378-4371, 2019.
- [25] Z. Lu and Y. Zhu, "Comparison principles for fractional differential equations with the Caputo derivatives," *Advances in Difference Equations*, vol. 2018, no. 1, pp. 1-11, 2018.
- [26] M. Hammad and R. Khalil, "Abel's formula and Wronskian for conformable fractional differential equations," *International Journal of Differential Equations and Applications*, vol. 13, no. 3, pp. 177-183, 2014.
- [27] M. Pospíšil and L. P. Škripková, "Sturm's theorems for conformable fractional differential equations," *Mathematical Communications*, vol. 21, no. 2, pp. 273-281, 2016.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı

Dilek BİLBAY

Eğitim Bilgileri

<u>Derece</u>	<u>Alan</u>	<u>Üniversite</u>	<u>Yıl</u>
Ön lisans	Bilgisayar Programcılığı	Atatürk Üniversitesi	2021
Ön lisans	Yeni medya ve gazetecilik	Atatürk Üniversitesi	Halen
Lisans	Matematik	Gaziantep Üniversitesi	2021
Lisans	Yazılım Mühendisliği	Atılım Üniversitesi	-
Lisans	İnşaat Mühendisliği	Gaziantep Üniversitesi	Halen