



T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BULANIK PARAMETRELİ BULANIK ESNEK ÖLÇÜ UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DENİZ FİDAN

Tez Danışmanı

DOÇ. DR. SERDAR ENGİNOĞLU

ÇANAKKALE – 2024



T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BULANIK PARAMETRELİ BULANIK ESNEK ÖLÇÜ UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DENİZ FİDAN

Tez Danışmanı

DOÇ. DR. SERDAR ENGİNOĞLU

Bu çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri

Koordinasyon Birimince Desteklenmiştir.

Proje No: FYL-2023-4546

ÇANAKKALE – 2024



T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ



Deniz FİDAN tarafından Doç. Dr. Serdar ENGİNOĞLU yönetiminde hazırlanan ve **03/06/2024** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan **“Bulanık Parametrelili Bulanık Esnek Ölçü Uzayları”** başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Serdar ENGİNOĞLU
(Danışman)

Doç. Dr. Hakan ŞAHİN

Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

İmza

.....

.....

.....

Tez No : 10599837

Tez Savunma Tarihi : 03/06/2024

.....
Prof. Dr. Ahmet Evren ERGİNAL
Enstitü Müdürü

03/06/2024

ETİK BEYAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kuralları'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi taahhüt ve beyan ederim.

Deniz FİDAN
03/06/2024

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleŐtirilmesinde, çalıŐmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen Saygıdeğer Danışman Hocam Doç. Dr. Serdar ENGİNOğLU'na, çalışma suresince emeğini, bilgisini ve desteğini benimle tereddütsüz paylaŐan Dr. Burak ARSLAN'a, akademik desteklerinden dolayı Kıymetli Hocalarım Doç. Dr. Hakan ŞAHİN, Doç. Dr. Can AKTAŞ ve Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR'a ve hayatımın her evresinde bana destek olan, baŐta annem Yasemen FİDAN olmak üzere değerli aileme sayılamaz, sınırsız ve sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.

Deniz FİDAN
anakkale, Haziran 2024

ÖZET

BULANIK PARAMETRELİ BULANIK ESNEK ÖLÇÜ UZAYLARI

Deniz FİDAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Serdar ENGİNOĞLU

03/06/2024, 56

Bu çalışmada, ilk olarak, bulanık parametrelili bulanık esnek küme ($fpfs$ -küme) sınıfları tanımlandı ve $fpfs$ -süper-cebir ($fpfs$ - s -cebir) kavramı ortaya atıldı. Ayrıca bahsi geçen $fpfs$ -küme sınıflarının özellikleri araştırıldı ve birbirleri ile olan ilişkileri incelendi. Daha sonra, $fpfs$ - s -cebir temelli $fpfs$ -ölçü kavramı ortaya atıldı, örneklendirildi ve bazı temel özellikleri araştırıldı. Ardından, bu çalışmada $fpfs$ -dış ölçü kavramı tanımlandı, örneklendirildi ve bazı temel özellikleri incelendi. Ek olarak, m^* - $fpfs$ -ölçülebilir küme kavramı tanımlandı ve temel özellikleri incelendi. Son olarak, gelecek çalışmalarla ilgili bir tartışmaya yer verildi.

Anahtar sözcükler: $fpfs$ -kümeler, $fpfs$ -küme Sınıfları, $fpfs$ - s -cebir, $fpfs$ -ölçü, $fpfs$ -dış Ölçü, m^* - $fpfs$ -ölçülebilir Küme

ABSTRACT

FUZZY PARAMETERIZED FUZZY SOFT MEASURE SPACES

Deniz FİDAN

Çanakkale Onsekiz Mart University

School of Graduate Studies

Master of Science Thesis in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Serdar ENGINOĞLU

06/03/2024, 56

This study first defines classes of fuzzy parameterized fuzzy soft sets (*fpfs*-sets) and propounds the concept of *fpfs*-super-algebras (*fpfs*-*s*-algebras). Moreover, it researches some properties of the aforesaid classes of *fpfs*-sets and investigates their relationships with each other. Later, this study suggests *fpfs*-measures based on *fpfs*-*s*-algebras, exemplifies them, and investigates some of their basic properties. Afterward, it defines *fpfs*-outer measures, exemplifies them, and studies some of their basic properties. Besides, this study describes m^* -*fpfs*-measurable sets and analyzes their basic properties. Finally, it includes a discussion about future studies.

Keywords: *fpfs*-sets, Classes of *fpfs*-sets, *fpfs*-*s*-algebras, *fpfs*-measures, *fpfs*-outer measures, m^* -*fpfs*-measurable Sets

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
JÜRİ ONAY SAYFASI	i
ETİK BEYAN	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
BİRİNCİ BÖLÜM	
GİRİŞ	1
İKİNCİ BÖLÜM	
TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1. Bulanık Kümeler	5
2.2. <i>fpfs</i> -Kümeler	7
2.3. Ölçü Uzayları.....	12
ÜÇÜNCÜ BÖLÜM	
BULANIK PARAMETRELİ BULANIK ESNEK KÜME SINIFLARI	17
DÖRDÜNCÜ BÖLÜM	
BULANIK PARAMETRELİ BULANIK ESNEK ÖLÇÜ	30
BEŞİNCİ BÖLÜM	
BULANIK PARAMETRELİ BULANIK ESNEK DIŞ ÖLÇÜ	41
ALTINCI BÖLÜM	
SONUÇ VE ÖNERİLER	51



SİMGELER VE KISALTMALAR

$\text{graf}(\mu)$	μ fonksiyonunun grafiği
E	Parametre kümesi
$F(E)$	E üzerindeki tüm bulanık kümelerin kümesi
μ, ν, ρ	E üzerinde tanımlı bulanık kümeler
$ $	Mutlak değer fonksiyonu
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
λ_E	λ bulanık küme
0_E	Boş bulanık küme
1_E	Evrensel bulanık küme
$\mu \tilde{\subseteq} \nu$	μ, ν 'nün bulanık altkümesidir
$\mu \tilde{\subset} \nu$	μ, ν 'nün bulanık öz altkümesidir
$=$	Eşittir
\max	Maksimum fonksiyonu
\min	Minimum fonksiyonu
$\mu \tilde{\cup} \nu$	μ ve ν 'nün bulanık birleşimi
$\mu \tilde{\cap} \nu$	μ ve ν 'nün bulanık kesişimi
$\mu \tilde{\setminus} \nu$	μ 'nün ν 'ye göre bulanık farkı
$\mu^{\tilde{c}}$	μ 'nün bulanık tümleyeni
$\mu \tilde{\Delta} \nu$	μ ve ν 'nün bulanık simetrik farkı
U	Evrensel küme
$f\text{pfs}$ -küme	Bulanık parametereli bulanık esnek küme
$F\text{PFS}(U)$	U üzerindeki tüm $f\text{pfs}$ -kümelerin kümesi
α, β, γ	U üzerinde tanımlı $f\text{pfs}$ -kümeler
$\tilde{\lambda}$	λ - $f\text{pfs}$ -küme
$\tilde{0}$	Boş $f\text{pfs}$ -küme
$\tilde{1}$	Evrensel $f\text{pfs}$ -küme
$\alpha \tilde{\subseteq} \beta$	α, β 'nın $f\text{pfs}$ -altkümesidir
$\alpha \tilde{\cup} \beta$	α ve β 'nin $f\text{pfs}$ -birleşimi
$\alpha \tilde{\cap} \beta$	α ve β 'nin $f\text{pfs}$ -kesişi
$\alpha \tilde{\setminus} \beta$	α 'nın β 'ye göre $f\text{pfs}$ -farkı
$\alpha^{\tilde{c}}$	α 'nın $f\text{pfs}$ -tümleyeni

$\alpha \tilde{\Delta} \beta$	α ve β 'nin <i>fpfs</i> -simetrik farkı
I	$I \subseteq \mathbb{N}$ şartını sağlayan bir indis kümesi
J	Keyfi bir indis kümesi
$P(X)$	X 'in kuvvet kümesi
(X, \mathcal{A})	\mathcal{A} , X üzerinde bir σ -cebiri olmak üzere bir ölçülebilir uzay
$\overline{\mathbb{R}}$	Genişletilmiş reel sayılar kümesi
(X, \mathcal{A}, m)	m bir ölçü ve (X, \mathcal{A}) bir ölçülebilir uzay olmak üzere bir ölçü uzayı
(X, m^*)	m^* bir dış ölçü olmak üzere bir dış ölçü uzayı
A^c	A 'nın klasik tümleyeni
$\mathcal{R}(U)$	U üzerindeki tüm <i>fpfs</i> -halkaların kümesi
$\mathcal{R}_\sigma(U)$	U üzerindeki tüm <i>fpfs</i> - σ -halkaların kümesi
$\mathcal{A}(U)$	U üzerindeki tüm <i>fpfs</i> -cebirlerin kümesi
$\mathcal{A}_\sigma(U)$	U üzerindeki tüm <i>fpfs</i> - σ -cebirlerin kümesi
\mathcal{A}_α	α tarafından üretilen <i>fpfs</i> - σ -cebiri
$\pi(U)$	U üzerindeki tüm <i>fpfs</i> - π -sistemlerin kümesi
$\lambda(U)$	U üzerindeki tüm <i>fpfs</i> - λ -sistemlerin kümesi
<i>fpfs</i> - s -cebiri	<i>fpfs</i> -süper-cebiri
$\mathcal{S}(U)$	U üzerindeki tüm <i>fpfs</i> - s -cebirlerin kümesi
\mathcal{S}_S	S tarafından üretilen <i>fpfs</i> - s -cebiri
(U, \mathcal{S})	\mathcal{S} bir <i>fpfs</i> - s -cebiri olmak üzere bir <i>fpfs</i> -ölçülebilir uzay
(U, \mathcal{S}, m)	m bir <i>fpfs</i> -ölçü ve (U, \mathcal{S}) bir <i>fpfs</i> -ölçülebilir uzay olmak üzere bir <i>fpfs</i> -ölçü uzayı
$\mathbb{R}^{\geq 0}$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\tilde{P}(\alpha)$	α 'nın <i>fpfs</i> -kuvvet kümesi
$\mathcal{N}(U, \mathcal{S}, m)$	(U, \mathcal{S}, m) üzerindeki tüm m -boş kümelerin kümesi
(U, m^*)	m^* bir <i>fpfs</i> -dış ölçü olmak üzere bir <i>fpfs</i> -dış ölçü uzayı

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge No	Çizelge Adı	Sayfa No
Çizelge 1.	Boş olmayan bir X kümesi üzerindeki küme sınıfları ve küme işlemleri arasındaki ilişkiler.....	13
Çizelge 2.	$fpps$ -küme sınıfları ve $fpps$ -küme işlemleri arasındaki ilişkiler.....	27



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil No	Şekil Adı	Sayfa No
Şekil 1.	Küme sınıfları arasındaki ilişkiler	14
Şekil 2.	<i>fpfs</i> -küme sınıfları arasındaki ilişkiler	28



BİRİNCİ BÖLÜM

GİRİŞ

Ölçü teorisinin temel kavramlarından biri olan ölçü kavramı, integralin temelini oluşturur. Bu kavram, bir küme ailesi olan σ -cebiri kavramına dayanmaktadır. Ölçü teorisinde kullanılan diğer bazı küme aileleri de halka, σ -halka, cebir, π -sistem ve λ -sistem olarak sıralanabilir. Ölçü kavramı ve bahsi geçen küme sınıfları dışında ön ölçü, m -boş küme, tam ölçü uzayı, dış ölçü ve m^* -ölçülebilir küme kavramları da ölçü teorisinde önem arz etmektedir. Klasik kümelerde yaygın olarak çalışılan ölçü teorisi bulanık kümeler (Zadeh, 1965) ve esnek kümeler (Molodtsov, 1999) gibi yeni kavramlar yoluyla da incelenmiştir.

Bulanık kümeler Zadeh (1965) tarafından belirsizliklerle başa çıkmak için ortaya atılan bir matematiksel araçtır. Bu kavram üzerine karar vermeden ölçü teorisine kadar birçok alanda uygulamalı ve teorik çalışmalar yapılmıştır. Bu tez çalışmasının da temelini oluşturan bulanık ölçü kavramıyla ilgili alan yazındaki bazı çalışmalar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Sugeno (1974) bulanık ölçü ve bulanık integral kavramlarını önermiştir.
- Klement (1980) bulanık- σ -cebiri ve bulanık ölçülebilir uzay kavramlarını önermiştir.
- Ralescu ve Adams (1980) yeni bir bulanık ölçü kavramı tanımlamış ve monoton yakınsaklık teoremi ve Fatou Lemma'yı incelemiştir.
- Mesiar ve Piasecki (1993) bir bulanık σ -cebirden \mathbb{R} 'ye tanımlı fonksiyonlar aracılığıyla Carathéodory anlamında ölçülebilir küme kavramını incelemiştir.
- Al-Mayahi ve Hamzah (2017) bulanık kümeler üzerinde bulanık ölçü kavramını çalışmış ve özelliklerini incelemiştir.

Esnek kümeler Molodtsov (1999) tarafından belirsizlikleri modellemek amacıyla ileri sürülmüştür. Aktaş ve Çağman'ın (2007) esnek gruplar ile ilgili çalışması, esnek kümelerde uzaklık ve benzerlik ölçümleri (Majumdar ve Samanta, 2008), esnek yarı-halka (Feng vd., 2008), esnek modül (Sun vd., 2008), esnek kümelerin temellendirilmesi

(Çağman ve Enginoğlu, 2010) ve esnek topoloji (Çağman vd., 2011c; Shabir ve Naz, 2011) gibi birçok yeni çalışmaya öncülük etmiştir. Bahsi geçen alanlardaki çalışmalara ek olarak ölçü teorisindeki çalışmalar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Khameneh ve Kılıçman (2013) esnek- σ -cebir kavramını tanımlamış, örneklendirmiş ve temel özelliklerini incelemiştir. Ayrıca esnek olasılık ölçüsü kavramını çalışmıştır.
- Mukherjee vd. (2015) esnek dış ölçü ve esnek ölçülebilirlik kavramlarını incelemiştir.
- Riaz vd. (2017) esnek halka, esnek- σ -halka ve esnek cebir kavramlarını tanımlamış ve esnek ölçü kavramını araştırmıştır.
- Rao ve Srinivasa Kumar (2018) esnek ölçülebilir kümeler üzerine çalışmıştır.
- Goldar ve Ray (2022) esnek reel sayıları tanımlamış ve bu sayıların yardımıyla esnek Lebesgue ölçüsünü çalışmıştır. Ayrıca klasik Lebesgue ölçüsü ve esnek Lebesgue ölçüsü kavramlarını karşılaştırmıştır.

Söz konusu çalışmaların haricinde esnek kümeler ve bulanık kümelerin hibrit versiyonları da bir çalışma konusudur. Bu bağlamda, Maji vd. (2001) bulanık belirsizliğe sahip alternatifleri parametrelendirmek için bulanık esnek kümeler kavramını önermiştir. Bu hibrit versiyonun tanımlanmasından sonra diğer hibrit versiyonlar olan bulanık parametrelili esnek kümeler (Çağman vd., 2011a) ve bulanık parametrelili bulanık esnek kümeler (*fpfs*-kümeler) (Çağman vd., 2011b) kavramları çalışılmıştır. Hem parametrelerin hem de alternatiflerin bulanık belirsizliklere sahip olduğu problemleri modelleme yeteneği olan *fpfs*-kümeler bu hibrit versiyonların en genelidir. *fpfs*-kümelerin matris temsilleri olan *fpfs*-matrisler ile ilgili yapılan çalışmalar sayesinde, *fpfs*-küme kavramının çalışmaya değer bir kavram olduğu gözlemlenebilir:

- Enginoğlu ve Memiş (2018a) *fpfs*-matrisler aracılığıyla 18 esnek karar verme (SDM) metodunu yapılandırmıştır.
- Enginoğlu ve Memiş (2018b) (Maji vd., 2001)'de verilen karar verme metodunu *fpfs*-matrisler uzayına yapılandırmış ve bu metodunun süre bakımından bir sadeleştirmesini çalışmıştır.

- Enginoğlu vd. (2018a) EMA18an ve EMA18on SDM metotlarını önermiş ve bu metotları görüntü işlemede bir karar verme problemine uygulamıştır.
- Enginoğlu vd. (2018b) EMO18a ve EMO18o SDM metotlarını önermiş ve performans bazlı bir değer atama problemine uygulamıştır.
- Memiş vd. (2019) Hamming Pseudo-Benzerlik Temelli Bulanık Parametrelili Bulanık Esnek Sınıflandırıcı (FPFSNHC)'yı tıbbi teşhis alanındaki dört veri setine uygulamıştır.
- Enginoğlu vd. (2019b) Bulanık Esnek Max-Min Karar Verme Metodu'nu *fpfs*-matrisler uzayına yapılandırmıştır.
- Enginoğlu vd. (2019c) TOPSIS karar verme metodunu *fpfs*-matrisler uzayında çalışmıştır.
- Enginoğlu vd. (2019a) *fpfs*-matrisler yoluyla Kuzeybatı Anadolu Troad ve Mysia bölgelerinde yer alan antik granit ocaklarında üretilen monolitik sütunların sınıflandırması üzerine çalışmıştır.
- Enginoğlu ve Memiş (2020) EM20a ve EM20o SDM metotlarını önermiş ve görüntü işlemedeki son teknoloji ürünü yedi tuz ve biber gürültü kaldırma filtresinin performans bazlı değer atama problemine uygulamıştır.
- Enginoğlu ve Öngel (2020) 20 SDM metodu *fpfs*-matrisler uzayına yapılandırmıştır.
- Enginoğlu ve Çağman (2020) Yaygınlık Etkisi Metot (PEM)'u önermiştir.
- Memiş vd. (2021) Euclidean Pseudo-Benzerlik Temelli Bulanık Parametrelili Bulanık Esnek Sınıflandırıcı (FPFSEC)'yı 18 veri setine uygulamıştır.
- Enginoğlu vd. (2021a; 2021b) 2013-2019 yılları arasındaki bazı SDM metotları yapılandırarak toplamda 84 tane SDM metot yapılandırmışlardır.
- Memiş vd. (2022a) Hamming pseudo-benzerlik, Chebyshev pseudo-benzerlik,

Euclidean pseudo-benzerlik, Hamming-Hausdorff pseudo-benzerlik ve Minkowski pseudo-benzerlik fonksiyonları aracılığıyla Karşılaştırma Matrisi Temelli Bulanık Parametrelili Bulanık Esnek Sınıflandırıcı (FPFSCMC)'yı önermiştir.

- Memiş vd. (2022b) Birleştirme Operatörü Temelli Bulanık Parametrelili Bulanık Esnek Sınıflandırıcı (FPFSAC) isimli bir sınıflandırma algoritması önermiş ve 15 veri setine uygulamıştır.
- Memiş vd. (2022c) Bulanık Parametrelili Bulanık Esnek k -En Yakın Komşu (FPFS-kNN) Sınıflandırıcısı'nı önermiştir.
- Parmaksız vd. (2022) *fpfs*-matrisler aracılığıyla COVID-19 teşhisi, tedavi önceliği ve aşı önceliği planlaması problemleri üzerine çalışmıştır.

Hem *fpfs*-kümelerin çalışmaya değer olması hem de bulanık ve esnek kümelerin hibrit versiyonları aracılığıyla ölçü teorisinde yapılan çalışmaların erişilebilir alan yazında (Ulucay vd., 2016) ile sınırlı olması *fpfs*-kümeler aracılığıyla ölçü ve dış ölçü gibi kavramları çalışmaya değer kılmaktadır.

Bölüm 2'de bir sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak bazı temel tanımlar ve özellikler sunuldu. Bölüm 3'te *fpfs*-halka, *fpfs*- σ -halka, *fpfs*-cebir, *fpfs*- σ -cebir, *fpfs*- π -sistem, *fpfs*- λ -sistem ve *fpfs*-süper cebir (*fpfs*- s -cebir) kavramları tanımlandı, bazı özellikleri ve birbirleriyle olan ilişkileri incelendi. Bölüm 4'te *fpfs*-ölçü kavramı tanımlandı, bazı temel özellikleri incelendi ve örneklendirildi. Bölüm 5'te *fpfs*-dış ölçü kavramına odaklanıldı ve bazı temel özellikleri incelendi. Son bölümde gelecek çalışmalar için bir tartışmaya yer verildi.

İKİNCİ BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bulanık kümeler, *fpfs*-kümeler ve ölçü uzayları ile ilgili bazı temel kavramlar sunuldu.

2.1. Bulanık Kümeler

Bu alt bölümde Zadeh (1965) tarafından ortaya atılan bulanık kümeler kavramının bu çalışmada ihtiyaç duyulan özellikleri verildi.

Tanım 2.1. E boştan başka bir küme ve $\mu : E \rightarrow [0, 1]$ bir fonksiyon olsun. O halde, μ 'nün grafiği olan $\text{graf}(\mu) := \{(x, \mu(x)) : x \in E\}$ 'ye E üzerinde bir bulanık küme denir ve $\{\mu(x)_x : x \in E\}$ ile gösterilir.

Burada $\text{graf}(\mu)$ ve μ birbirini tek türlü belirlediğinden bu notasyonlar birbiri yerine kullanılabilir. Bu nedenle, bir karışıklığa yol açmadığı sürece, bir $\text{graf}(\mu)$ bulanık kümesi kısaca μ ile gösterilir.

Aksi belirtilmediği sürece, bu çalışmanın devamında, E bir parametre kümesi, μ, E üzerinde bir bulanık küme, $F(E)$, E üzerindeki tüm bulanık kümelerin kümesi ve $\mu, \nu, \rho \in F(E)$ olsun. Ayrıca bir bulanık kümede, bir karışıklığa yol açmadığı sürece 1x biçimindeki elemanlar kısalık için x olarak gösterilirken 0x biçimindeki elemanlar kümede gösterilmez.

Örnek 2.2. $\mu(x) = |\sin(x)|$ ile tanımlı $\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu verilsin. O halde, $\{|\sin(x)|_x : x \in \mathbb{R}\}$ kümesi \mathbb{R} üzerinde bir bulanık kümedir.

Tanım 2.3. $\mu \in F(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\mu(x) = 0$ veya $\mu(x) = 1$ oluyorsa μ 'ye keskin bulanık küme denir.

Tanım 2.4. $\mu, \nu \in F(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ oluyorsa, μ 'ye ν 'nün bir altkümesi denir ve $\mu \tilde{\subseteq} \nu$ ile gösterilir.

Örnek 2.5. $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ üzerinde $\mu = \{^{0.3}x_1, ^{0.1}x_2, ^{0.5}x_3, ^{0.6}x_4\}$ ve

$v = \{^{0.4}x_1, x_2, ^{0.9}x_3, ^{0.8}x_4\}$ bulanık kümeleri verilsin. Her $x \in E$ için $\mu(x) \leq v(x)$ olduğundan $\mu \underline{\subseteq} v$ biçimindedir. Burada, $^{0.3}x_1 \in \mu$ olduğu halde $^{0.3}x_1 \in v$ olmadığına dikkat edilmelidir. Bu bakımdan, bulanık kapsama adi kapsamadan farklıdır.

Tanım 2.6. $\mu, v \in F(E)$ olsun. Eğer $\mu \underline{\subseteq} v$ olduğu halde $\mu \neq v$ ise μ 'ye v 'nün bir öz altkümesi denir ve $\mu \underline{\subset} v$ ile gösterilir.

Tanım 2.7. $\mu \in F(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\mu(x) = \lambda$ oluyorsa, μ 'ye E üzerinde λ bulanık küme denir ve ${}^\lambda E$ veya λ_E ile gösterilir. Özel olarak, 0_E boş bulanık küme ve 1_E evrensel bulanık küme olarak adlandırılır.

Tanım 2.8. $\mu, v \in F(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\mu(x) = v(x)$ oluyorsa, μ ve v eşittir denir ve $\mu = v$ ile gösterilir.

Tanım 2.9. $\mu, v \in F(E)$ olsun. O halde, $\rho(x) := \max\{\mu(x), v(x)\}$ ile tanımlı $\rho \in F(E)$ 'ye μ ile v 'nün bulanık birleşimi denir ve $\rho = \mu \tilde{\cup} v$ ile gösterilir.

Önerme 2.10. $\mu, v, \rho \in F(E)$ olsun. O halde, $\mu \tilde{\cup} \mu = \mu$, $\mu \tilde{\cup} 0_E = \mu$, $\mu \tilde{\cup} 1_E = 1_E$, $\mu \tilde{\cup} v = v \tilde{\cup} \mu$, $(\mu \tilde{\cup} v) \tilde{\cup} \rho = \mu \tilde{\cup} (v \tilde{\cup} \rho)$ ve $\mu \underline{\subseteq} v \Rightarrow \mu \tilde{\cup} v = v$ biçimindedir.

Tanım 2.11. $\mu, v \in F(E)$ olsun. O halde, $\rho(x) := \min\{\mu(x), v(x)\}$ ile tanımlı $\rho \in F(E)$ 'ye μ ile v 'nün bulanık kesişimi denir ve $\rho = \mu \tilde{\cap} v$ ile gösterilir.

Önerme 2.12. $\mu, v, \rho \in F(E)$ olsun. O halde, $\mu \tilde{\cap} \mu = \mu$, $\mu \tilde{\cap} 0_E = 0_E$, $\mu \tilde{\cap} 1_E = \mu$, $\mu \tilde{\cap} v = v \tilde{\cap} \mu$, $(\mu \tilde{\cap} v) \tilde{\cap} \rho = \mu \tilde{\cap} (v \tilde{\cap} \rho)$ ve $\mu \underline{\subseteq} v \Rightarrow \mu \tilde{\cap} v = \mu$ biçimindedir.

Önerme 2.13. Bulanık birleşim ve bulanık kesişim birbiri üzerine dağılmalıdır.

Tanım 2.14. $\mu, v \in F(E)$ olsun. O halde, $\rho(x) := \max\{0, \mu(x) - v(x)\}$ ile tanımlı $\rho \in F(E)$ 'ye μ 'nün v 'ye göre bulanık farkı denir ve $\rho = \mu \tilde{\setminus} v$ ile gösterilir.

Önerme 2.15. $\mu, v \in F(E)$ olsun. O halde, $\mu \tilde{\setminus} 0_E = \mu$, $\mu \tilde{\setminus} 1_E = 0_E$, $\mu \tilde{\setminus} \mu = 0_E$ ve $\mu \tilde{\setminus} v = 0_E \Rightarrow \mu \underline{\subseteq} v$ biçimindedir. Ayrıca bulanık fark işlemi değişmeli ve birleşmeli değildir.

Tanım 2.16. $\mu, \nu \in F(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\nu(x) = 1 - \mu(x)$ oluyorsa, ν 'ye μ 'nün bulanık tümleyeni denir ve μ^c ile gösterilir.

Önerme 2.17. $\mu, \nu \in F(E)$ olsun. O halde, $\mu \setminus \nu \subseteq \mu \tilde{\cap} \nu^c$ biçimindedir. Ayrıca her $x \in E$ için $\mu(x) = 1$ veya $\nu(x) = 0$ ise $\mu \setminus \nu = \mu \tilde{\cap} \nu^c$ biçimindedir.

Önerme 2.18. Bulanık birleşim ve bulanık kesişim De Morgan kurallarını sağlar. Ayrıca $\mu \tilde{\cup} \mu^c = 1_E$ ve $\mu \tilde{\cap} \mu^c = 0_E$ eşitlikleri μ keskin bulanık küme olduğunda sağlanır.

Tanım 2.19. $\mu, \nu \in F(E)$ olsun. O halde, $\rho(x) := \max\{\mu(x) - \nu(x), \nu(x) - \mu(x)\} = |\mu(x) - \nu(x)|$ ile tanımlı $\rho \in F(E)$ 'ye μ ile ν 'nün bulanık simetrik farkı denir ve $\rho = \mu \tilde{\Delta} \nu$ ile gösterilir.

Önerme 2.20. $\mu, \nu, \rho \in F(E)$ olsun. O halde, $\mu \tilde{\Delta} \mu = 0_E$, $\mu \tilde{\Delta} \nu = \nu \tilde{\Delta} \mu$, $\mu \tilde{\Delta} 0_E = \mu$ ve $\mu \subseteq \nu \Rightarrow \mu \tilde{\Delta} \nu = \nu \setminus \mu$ biçimindedir.

Tanım 2.21. $\mu, \nu \in F(E)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\min\{\mu(x), \nu(x)\} = 0$ oluyorsa μ ile ν ayrıktır denir.

2.2. *fpfs*-Kümeler

Bu alt bölümde Çağman vd. (2010) tarafından ortaya atılan *fpfs*-kümelerin bu çalışmada ihtiyaç duyulan özellikleri verildi.

Tanım 2.22. (Çağman vd., 2010) U bir evrensel küme, $\mu \in F(E)$ ve α, μ 'den $F(U)$ 'ya bir fonksiyon olsun. O halde, α 'nın grafiği olan $\left\{ \left(\mu^{(x)}x, \alpha \left(\mu^{(x)}x \right) \right) \mid x \in E \right\}$ kümesine U üzerinde E ile parametrelendirilmiş (kısaca U üzerinde) bir bulanık parametrelili bulanık esnek küme (*fpfs*-küme) denir.

Bu çalışmada, U üzerindeki tüm *fpfs*-kümelerin kümesi $FPFS_E(U)$ (kısaca $FPFS(U)$) ile gösterilir. $FPFS(U)$ 'da $\text{graf}(\alpha)$ ve α birbirini tek türlü belirlediğinden bu notasyonlar birbiri yerine kullanılabilir. Bu nedenle, bir karışıklığa yol açmadığı sürece, bir $\text{graf}(\alpha)$ *fpfs*-kümesi kısaca α ile gösterilir.

Tanım 2.23. (Çağman vd., 2010) $\alpha \in FPFS(U)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\mu(x) = \lambda$ ve $\alpha(\lambda_x) = \lambda U$ oluyorsa α , U üzerinde bir λ - $fpfs$ -küme olarak adlandırılır ve $\tilde{\lambda}$ ile gösterilir. Burada, $\tilde{0}$ ve $\tilde{1}$ sırasıyla boş $fpfs$ -küme ve evrensel $fpfs$ -küme olarak adlandırılır.

Tanım 2.24. (Çağman vd., 2010) $\alpha, \beta \in FPFS(U)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ve $\alpha(\mu(x)_x) \subseteq \beta(\nu(x)_x)$ oluyorsa α 'ya β 'nin bir $fpfs$ -alt kümesidir denir ve $\alpha \subseteq \beta$ ile gösterilir.

Tanım 2.25. (Çağman vd., 2010) $\alpha, \beta \in FPFS(U)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\mu(x) = \nu(x)$ ve $\alpha(\mu(x)_x) = \beta(\nu(x)_x)$ oluyorsa α ve β 'ya eşit $fpfs$ kümeler denir ve $\alpha = \beta$ ile gösterilir.

Tanım 2.26. (Çağman vd., 2010) $\alpha, \beta, \gamma \in FPFS(U)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\rho(x) = \max\{\mu(x), \nu(x)\}$ ve $\gamma(\rho(x)_x) = \alpha(\mu(x)_x) \cup \beta(\nu(x)_x)$ oluyorsa γ 'ya α ve β 'nin $fpfs$ -birleşimi denir ve $\alpha \cup \beta$ ile gösterilir.

Tanım 2.27. (Çağman vd., 2010) $\alpha, \beta, \gamma \in FPFS(U)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\rho(x) = \min\{\mu(x), \nu(x)\}$ ve $\gamma(\rho(x)_x) = \alpha(\mu(x)_x) \cap \beta(\nu(x)_x)$ oluyorsa γ 'ya α ve β 'nin $fpfs$ -kesişimi denir ve $\alpha \cap \beta$ ile gösterilir.

Tanım 2.28. (Çağman vd., 2010) $\alpha, \beta, \gamma \in FPFS(U)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\rho(x) = \max\{0, \mu(x) - \nu(x)\}$ ve $\gamma(\rho(x)_x) = \alpha(\mu(x)_x) \setminus \beta(\nu(x)_x)$ oluyorsa γ 'ya α ve β 'nin $fpfs$ -farkı denir ve $\alpha \setminus \beta$ ile gösterilir.

Tanım 2.29. (Enginoğlu, 2012) $\alpha, \beta \in FPFS(U)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\nu(x) = 1 - \mu(x)$ ve $\beta(\nu(x)_x) = 1_U \setminus \alpha(\mu(x)_x)$ oluyorsa β 'ya α 'nın $fpfs$ -tümleyeni denir ve α^c ile gösterilir.

Tanım 2.30. $\alpha, \beta \in FPFS(U)$ olsun. O halde, $\beta \subseteq \alpha$ iken $\alpha \setminus \beta$ 'ya üst kümeye göre $fpfs$ -tümleyen denir.

Tanım 2.31. (Enginoğlu, 2012) $\alpha, \beta, \gamma \in FPFS(U)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\rho(x) = |\mu(x) - \nu(x)|$ ve $\gamma(\rho(x)_x) = \alpha(\mu(x)_x) \tilde{\Delta} \beta(\nu(x)_x)$ oluyorsa γ 'ya α ve β 'nin $fpfs$ -simetrik farkı denir ve $\alpha \tilde{\Delta} \beta$ ile gösterilir.

Önerme 2.32. (Çağman vd., 2010; Enginoğlu, 2012) $\alpha, \beta, \gamma \in FPF(S(U))$ olsun. O halde,

- | | |
|---|--|
| i. $\tilde{0} \subseteq \alpha \subseteq \tilde{1}$ | x. $\alpha \tilde{\cup} (\beta \tilde{\cap} \gamma) = (\alpha \tilde{\cup} \beta) \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\cup} \gamma)$ |
| ii. $\alpha \subseteq \alpha$ | xi. $\alpha \tilde{\cap} (\beta \tilde{\cup} \gamma) = (\alpha \tilde{\cap} \beta) \tilde{\cup} (\alpha \tilde{\cap} \gamma)$ |
| iii. $\alpha \subseteq \beta \wedge \beta \subseteq \alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta$ | xii. $\alpha \subseteq \beta \Leftrightarrow \alpha \tilde{\cup} \beta = \beta \Leftrightarrow \alpha \tilde{\cap} \beta = \alpha$ |
| iv. $\alpha \subseteq \beta \wedge \beta \subseteq \gamma \Rightarrow \alpha \subseteq \gamma$ | xiii. $\alpha^c = \tilde{1} \setminus \alpha$ |
| v. $\alpha \tilde{\cup} \beta = \beta \tilde{\cup} \alpha$ | xiv. $\alpha \subseteq \beta \Leftrightarrow \alpha \setminus \beta = \tilde{0}$ |
| vi. $\alpha \tilde{\cap} \beta = \beta \tilde{\cap} \alpha$ | xv. $\tilde{0}^c = \tilde{1}$ |
| vii. $(\alpha \tilde{\cup} \beta) \tilde{\cup} \gamma = \alpha \tilde{\cup} (\beta \tilde{\cup} \gamma)$ | xvi. $(\alpha^c)^c = \alpha$ |
| viii. $(\alpha \tilde{\cap} \beta) \tilde{\cap} \gamma = \alpha \tilde{\cap} (\beta \tilde{\cap} \gamma)$ | xvii. $(\alpha \tilde{\cup} \beta)^c = \alpha^c \tilde{\cap} \beta^c$ |
| ix. $\alpha \tilde{\cup} \alpha = \alpha = \alpha \tilde{\cap} \alpha$ | xviii. $(\alpha \tilde{\cap} \beta)^c = \alpha^c \tilde{\cup} \beta^c$ |

Önerme 2.33. $\alpha, \beta, \gamma \in FPF(S(U))$ olsun. O halde,

- | | |
|--|---|
| i. $\alpha \tilde{\cap} \beta \subseteq \alpha \subseteq \alpha \tilde{\cup} \beta$ | x. $\alpha \setminus \tilde{0} = \alpha$ |
| ii. $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \beta^c \subseteq \alpha^c$ | xi. $\alpha \setminus \beta = \beta^c \setminus \alpha^c$ |
| iii. $\alpha \tilde{\cap} \beta = \tilde{0} \Rightarrow (\alpha \tilde{\cap} \gamma) \tilde{\cap} (\beta \tilde{\cap} \gamma) = \tilde{0}$ | xii. $\alpha \setminus \beta \subseteq \alpha$ |
| iv. $\alpha \tilde{\cap} \beta = \tilde{0} \Rightarrow \alpha \subseteq \beta^c$ | xiii. $\alpha \setminus \beta \subseteq \alpha \tilde{\cap} \beta^c$ |
| v. $(\alpha \tilde{\cup} \alpha^c) \tilde{\cap} \alpha = \alpha$ | xiv. $\alpha \setminus (\alpha \tilde{\cap} \beta) = \alpha \setminus \beta$ |
| vi. $\alpha \tilde{\cup} \beta = \tilde{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \tilde{0}$ | xv. $(\alpha \tilde{\cup} \beta) \setminus \alpha = \beta \setminus \alpha$ |
| vii. $\alpha \tilde{\cap} \beta = \tilde{1} \Rightarrow \alpha = \beta = \tilde{1}$ | xvi. $(\alpha \tilde{\cup} \beta) \setminus \gamma = (\alpha \setminus \gamma) \tilde{\cup} (\beta \setminus \gamma)$ |
| viii. $\alpha \tilde{\cup} (\alpha \tilde{\cap} \beta) = \alpha \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\cup} \beta) = \alpha$ | xvii. $(\alpha \tilde{\cap} \beta) \setminus \gamma = (\alpha \setminus \gamma) \tilde{\cap} (\beta \setminus \gamma)$ |
| ix. $\alpha \setminus \alpha = \tilde{0}$ | xviii. $\alpha \setminus (\beta \tilde{\cup} \gamma) = (\alpha \setminus \beta) \tilde{\cap} (\alpha \setminus \gamma)$ |

$$\begin{array}{ll}
xix. \alpha \tilde{\setminus} (\beta \tilde{\cap} \gamma) = (\alpha \tilde{\setminus} \beta) \tilde{\cup} (\alpha \tilde{\setminus} \gamma) & xxv. \alpha \tilde{\Delta} \beta \tilde{\subseteq} \alpha \tilde{\cup} \beta \\
xx. \alpha \tilde{\Delta} \alpha = \tilde{0} & xxvi. \alpha \tilde{\Delta} \beta = (\alpha \tilde{\setminus} \beta) \tilde{\cup} (\beta \tilde{\setminus} \alpha) \\
xxi. \alpha \tilde{\Delta} \tilde{0} = \alpha & xxvii. \alpha \tilde{\Delta} \beta = (\alpha \tilde{\cup} \beta) \tilde{\setminus} (\alpha \tilde{\cap} \beta) \\
xxii. \alpha \tilde{\Delta} \tilde{1} = \alpha^{\tilde{c}} & xxviii. \alpha \tilde{\cap} \beta = (\alpha \tilde{\cup} \beta) \tilde{\setminus} (\alpha \tilde{\Delta} \beta) \\
xxiii. \alpha \tilde{\Delta} \beta = \beta \tilde{\Delta} \alpha & xxix. \alpha \tilde{\Delta} (\beta \tilde{\cup} \gamma) = \left((\alpha \tilde{\Delta} \beta) \tilde{\cup} (\gamma \tilde{\setminus} \alpha) \right) \tilde{\cap} \left((\alpha \tilde{\Delta} \gamma) \tilde{\cup} (\beta \tilde{\setminus} \alpha) \right) \\
xxiv. \alpha \tilde{\Delta} \beta = \alpha^{\tilde{c}} \tilde{\Delta} \beta^{\tilde{c}} & xxx. \alpha \tilde{\Delta} (\beta \tilde{\cap} \gamma) = \left((\alpha \tilde{\Delta} \beta) \tilde{\cup} (\alpha \tilde{\setminus} \gamma) \right) \tilde{\cap} \left((\alpha \tilde{\Delta} \gamma) \tilde{\cup} (\alpha \tilde{\setminus} \beta) \right)
\end{array}$$

KANIT. $\alpha, \beta, \gamma \in FPF S(U)$ olsun. O halde, Önerme 2.33 (xviii) için kanıt

$$\begin{aligned}
\alpha \tilde{\setminus} (\beta \tilde{\cup} \gamma) &= \alpha \tilde{\setminus} \left\{ \left(\max\{v(x), \rho(x)\} \right)_x, \left\{ \max\{\beta^{(v(x)x)}(u), \gamma^{\rho(x)x}(u)\} \}_u \mid u \in U \right\} \right\} \Big| x \in E \\
&= \left\{ \left(\max\{0, \mu(x) - \max\{v(x), \rho(x)\}\} \right)_x, \right. \\
&\quad \left. \left\{ \max\{0, \alpha^{(\mu(x)x)}(u) - \max\{\beta^{(v(x)x)}(u), \gamma^{\rho(x)x}(u)\}\} \}_u \mid u \in U \right\} \right\} \Big| x \in E \\
&= \left\{ \left(\max\{0, \min\{\mu(x) - v(x), \mu(x) - \rho(x)\}\} \right)_x, \right. \\
&\quad \left. \left\{ \max\{0, \min\{\alpha^{(\mu(x)x)}(u) - \beta^{(v(x)x)}(u), \alpha^{(\mu(x)x)}(u) - \gamma^{\rho(x)x}(u)\}\} \}_u \mid u \in U \right\} \right\} \Big| x \in E \\
&= \left\{ \left(\min\{\max\{0, \mu(x) - v(x)\}, \max\{0, \mu(x) - \rho(x)\}\} \right)_x, \right. \\
&\quad \left. \left\{ \min\{\max\{0, \alpha^{(\mu(x)x)}(u) - \beta^{(v(x)x)}(u)\}, \max\{0, \alpha^{(\mu(x)x)}(u) - \gamma^{\rho(x)x}(u)\}\} \}_u \mid u \in U \right\} \right\} \Big| x \in E \\
&= (\alpha \tilde{\setminus} \beta) \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\setminus} \gamma)
\end{aligned}$$

biçimindedir. Ayrıca Önerme 2.33 (xxix) için kanıt

$$\begin{aligned}
\alpha \tilde{\Delta} (\beta \tilde{\cup} \gamma) &= (\alpha \tilde{\setminus} (\beta \tilde{\cup} \gamma)) \tilde{\cup} ((\beta \tilde{\cup} \gamma) \tilde{\setminus} \alpha) \\
&= ((\alpha \tilde{\setminus} \beta) \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\setminus} \gamma)) \tilde{\cup} ((\beta \tilde{\setminus} \alpha) \tilde{\cup} (\gamma \tilde{\setminus} \alpha)) \\
&= ((\alpha \tilde{\setminus} \beta) \tilde{\cup} (\beta \tilde{\setminus} \alpha) \tilde{\cup} (\gamma \tilde{\setminus} \alpha)) \tilde{\cap} ((\alpha \tilde{\setminus} \gamma) \tilde{\cup} (\beta \tilde{\setminus} \alpha) \tilde{\cup} (\gamma \tilde{\setminus} \alpha)) \\
&= ((\alpha \tilde{\Delta} \beta) \tilde{\cup} (\gamma \tilde{\setminus} \alpha)) \tilde{\cap} ((\alpha \tilde{\Delta} \gamma) \tilde{\cup} (\beta \tilde{\setminus} \alpha))
\end{aligned}$$

biçimindedir. □

Not 2.34. *fpfs*-fark ve *fpfs*-simetrik fark birleşmeli değildir. Ayrıca *fpfs*-fark değişmeli de değildir.

Örnek 2.35. $E = \{x\}$ ve $U = \{u\}$ olmak üzere $\widetilde{0.7}$, $\widetilde{0.6}$ ve $\widetilde{0.4}$ için

$$\left(\widetilde{0.7} \setminus \widetilde{0.6}\right) \setminus \widetilde{0.4} = \widetilde{0} \neq \widetilde{0.5} = \widetilde{0.7} \setminus \left(\widetilde{0.6} \setminus \widetilde{0.4}\right)$$

ve

$$\left(\widetilde{0.7} \Delta \widetilde{0.6}\right) \Delta \widetilde{0.4} = \widetilde{0.3} \neq \widetilde{0.5} = \widetilde{0.7} \Delta \left(\widetilde{0.6} \Delta \widetilde{0.4}\right)$$

olduğundan *fpfs*-fark ve *fpfs*-simetrik fark birleşmeli değildir. Ayrıca

$$\widetilde{0.7} \setminus \widetilde{0.6} = \widetilde{0.1} \neq \widetilde{0} = \widetilde{0.6} \setminus \widetilde{0.7}$$

olduğundan *fpfs*-fark değişmeli de değildir.

Tanım 2.36. I bir indis kümesi, $\alpha, \beta \in FPFS(U)$ ve her $i \in I$ için $\alpha_i \in FPFS(U)$ olsun. Eğer $\alpha \tilde{\cap} \beta = \widetilde{0}$ ise α ve β ayrıktır denir. Ayrıca her $i, k \in I$ için $i \neq k$ iken $\alpha_i \tilde{\cap} \alpha_k = \widetilde{0}$ oluyorsa α_i *fpfs*-kümeleri karşılıklı ayrıktır denir.

Tanım 2.37. I bir indis kümesi, $\alpha, \beta \in FPFS(U)$ ve her $i \in I$ için $\alpha_i \in FPFS(U)$ olsun. Eğer $\alpha \tilde{\subseteq} \beta^{\tilde{c}}$ ise α ve β zayıf ayrıktır denir. Ayrıca her $i, k \in I$ için $i \neq k$ iken $\alpha_i \tilde{\subseteq} \alpha_k^{\tilde{c}}$ oluyorsa α_i *fpfs*-kümeleri karşılıklı zayıf ayrıktır denir.

Örnek 2.38. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ ve $E = \{x_1, x_2\}$ olmak üzere

$$\alpha = \left\{ \left({}^{0.7}x_1, \left\{ {}^{0.6}u_3 \right\} \right), \left({}^0x_2, \left\{ {}^{0.4}u_1, {}^{0.7}u_2 \right\} \right) \right\}$$

ve

$$\beta = \left\{ \left({}^0x_1, \left\{ {}^{0.3}u_1, {}^{0.5}u_2 \right\} \right), \left({}^{0.1}x_2, \left\{ {}^{0.2}u_3 \right\} \right) \right\}$$

olsun. O halde, $\alpha \tilde{\cap} \beta = \widetilde{0}$ biçimindedir. Dolayısıyla, α ve β ayrıktır. Ayrıca

$$\beta^{\tilde{c}} = \left\{ \left(x_1, \left\{ {}^{0.7}u_1, {}^{0.5}u_2, u_3 \right\} \right), \left({}^{0.9}x_2, \left\{ u_1, u_2, {}^{0.8}u_3 \right\} \right) \right\}$$

biçimindedir ve $\alpha \tilde{\subseteq} \beta^{\tilde{c}}$ sağlanır. Dolayısıyla, α ve β zayıf ayrıktır.

Not 2.39. Önerme 2.33 (iv.)'ten ayrıklığın zayıf ayrıklığı gerektirdiği görülmektedir.

Örnek 2.40. $U = \{u\}$ ve $E = \{x\}$ olmak üzere

$$\alpha = \{(0.4x, \{0.8u\})\} \text{ ve } \beta = \{(0.2x, \{0.1u\})\}$$

fffs-kümeleri zayıf ayrıktır ancak ayrık değildir. Dolayısıyla, zayıf ayrıklık ayrıklığı gerektirmez.

2.3. Ölçü Uzayları

Bu alt bölümde (Gut, 2013; Halmos, 1974; Royden ve Fitzpatrick, 2018)'den yararlanılarak ölçü uzaylarının bu çalışmada ihtiyaç duyulan özellikleri verildi. Bu çalışma boyunca $I \subseteq \mathbb{N}$ bir indis kümesi ve $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ olsun.

Tanım 2.41. X boştan başka bir küme ve K , X 'in alt kümelerinin boş olmayan bir koleksiyonu olsun. Eğer K , fark ve sonlu birleşim altında kapalı ise X üzerinde bir halka olarak adlandırılır.

Tanım 2.42. X boştan başka bir küme ve K , X 'in alt kümelerinin boş olmayan bir koleksiyonu olsun. Eğer K , fark ve sayılabilir birleşim altında kapalı ise X üzerinde bir σ -halka olarak adlandırılır.

Örnek 2.43. X boştan başka bir küme olsun. O halde, $\{\emptyset\}$ ve $P(X)$ sınıfları X üzerinde bir σ -halkadır.

Tanım 2.44. X boştan başka bir küme ve K , X 'in alt kümelerinin boş olmayan bir koleksiyonu olsun. Eğer K , tümleyen ve sonlu birleşim altında kapalı ise X üzerinde bir Boolean cebir ya da cebir olarak adlandırılır.

Tanım 2.45. X boştan başka bir küme ve K , X 'in alt kümelerinin boş olmayan bir koleksiyonu olsun. Eğer K , tümleyen ve sayılabilir birleşim altında kapalı ise X üzerinde bir σ -cebir olarak adlandırılır.

Örnek 2.46. X boştan başka bir küme olsun. O halde, $\{\emptyset, X\}$ ve $P(X)$ sınıfları X üzerinde bir σ -cebirdir.

Tanım 2.47. X boştan başka bir küme ve K , X 'in alt kümelerinin boş olmayan bir koleksiyonu olsun. Eğer K , sonlu kesişim altında kapalı ise X üzerinde bir π -sistem olarak adlandırılır.

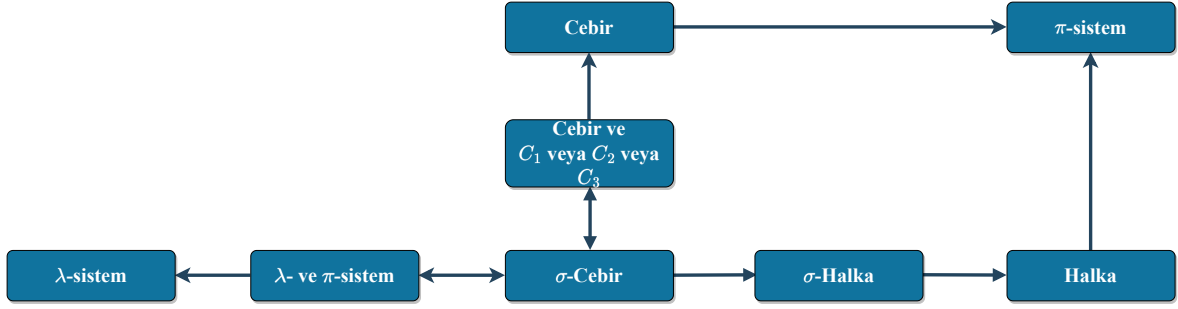
Tanım 2.48. X boştan başka bir küme ve K , X 'in X 'i içeren alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun. Eğer K , üst kümeye göre tümleyen ve sayılabilir artan birleşim altında kapalı ise X üzerinde bir Dynkin sistem ya da λ -sistem olarak adlandırılır. Burada sayılabilir artan birleşim, kapsama bağıntısına göre içe içe kümelerin artan sırada sayılabilir birleşimini ifade eder.

Çizelge 1'de söz konusu kavramların özellikleri sunuldu. Burada, \checkmark yapının tanımından gelen özellikleri ve $+$ bunlar yoluyla elde edilen özellikleri belirtir.

Çizelge 1
Boş olmayan bir X kümesi üzerindeki küme sınıfları ve küme işlemleri arasındaki ilişkiler

Sınıflar	Fark	Birleşim	Tümleyen	Kesişim	Simetrik Fark	X	\emptyset
Halka	\checkmark	Sonlu \checkmark		Sonlu $+$	$+$		$+$
σ -halka	\checkmark	Sayılabılır \checkmark		Sayılabılır $+$	$+$		$+$
Cebir	$+$	Sonlu \checkmark	Üst Kümelerdeki Alt Kümeler $+$	Sonlu $+$	$+$	$+$	$+$
σ -cebir	$+$	Sayılabılır \checkmark Sayılabılır Artan $+$	Üst Kümelerdeki Alt Kümeler $+$	Sayılabılır $+$ Sayılabılır Azalan $+$	$+$	$+$	$+$
π -sistem				Sonlu \checkmark			
λ -sistem		Sayılabılır Artan \checkmark Sayılabılır Ayrık $+$	Üst Kümelerdeki Alt Kümeler \checkmark $+$	Sayılabılır Artan $+$		\checkmark	$+$
π - λ -sistem	$+$	Sayılabılır $+$ Sayılabılır Artan \checkmark	Üst Kümelerdeki Alt Kümeler \checkmark $+$	Sonlu \checkmark Sayılabılır $+$ Sayılabılır Azalan $+$	$+$	\checkmark	$+$

Şekil 1'de söz konusu küme sınıflarının aralarındaki ilişkileri sunuldu. Burada C_1 , C_2 ve C_3 sırasıyla sayılabilir ayrık birleşim, sayılabilir artan birleşim ve sayılabilir azalan kesişim altında kapalılığı ifade eder.



Şekil 1. Küme sınıfları arasındaki ilişkiler

Tanım 2.49. X boştan başka bir küme ve \mathcal{A} , X üzerinde bir σ -cebiri olsun. O halde, (X, \mathcal{A}) sıralı ikilisine bir ölçülebilir uzay denir ve \mathcal{A} 'nın her bir elemanı \mathcal{A} -ölçülebilir küme olarak adlandırılır.

Tanım 2.50. \mathcal{R} bir halka ve $m_0 : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ bir fonksiyon olsun. Eğer

i. $m_0(\emptyset) = 0$

ii. her $i \in I$ için $R_i \in \mathcal{R}$ kümeleri karşılıklı ayrık iken $m_0\left(\bigcup_{i \in I} R_i\right) = \sum_{i \in I} m_0(R_i)$

şartları sağlanıyorsa m_0 'a \mathcal{R} üzerinde bir ön ölçü denir.

Tanım 2.51. (X, \mathcal{A}) bir ölçülebilir uzay ve $m : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

i. $m(\emptyset) = 0$

ii. her $A \in \mathcal{A}$ için $m(A) \geq 0$

iii. her $i \in I$ için A_i ölçülebilir kümeleri karşılıklı ayrık iken $m\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} m(A_i)$

şartları sağlanıyorsa m 'ye (X, \mathcal{A}) üzerinde bir ölçü ve (X, \mathcal{A}, m) sıralı üçlüsüne bir ölçü uzayı denir.

Örnek 2.52. $(X, P(X))$ bir ölçülebilir uzaydır. Ayrıca $m(A) = 0$ ile tanımlı $m : P(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $(X, P(X))$ üzerinde bir ölçüdür. Böylece, $(X, P(X), m)$ bir ölçü uzayıdır.

Örnek 2.53. (X, \mathcal{A}) bir ölçülebilir uzay olsun. O halde,

$$m(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ \infty, & A \neq \emptyset \end{cases}$$

ile tanımlı $m : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu (X, \mathcal{A}) üzerinde bir ölçüdür.

Tanım 2.54. (X, \mathcal{A}, m) bir ölçü uzayı olsun. O halde,

i. Her $A \in \mathcal{A}$ için eğer $m(A) \in \mathbb{R}$ ise m 'ye bir sonlu ölçü denir

ii. $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ olacak biçimde bir $\{A_i \in \mathcal{A} \mid m(A_i) \in \mathbb{R} \wedge i \in I\}$ ailesi varsa m 'ye bir σ -sonlu ölçü denir

iii. Eğer $m(X) = 1$ ise m 'ye bir olasılık ölçüsü denir

Tanım 2.55. (X, \mathcal{A}, m) bir ölçü uzayı ve $B \subseteq P(X)$ olsun. Eğer $B \subseteq \mathcal{A}$ ve $m(A) = 0$ olacak biçimde bir $A \in \mathcal{A}$ varsa B 'ye bir m -boş küme denir. Eğer $B \in \mathcal{A}$ ise $m(B) = 0$ biçimindedir.

Tanım 2.56. (X, \mathcal{A}, m) bir ölçü uzayı olsun. Eğer \mathcal{A} tüm m -boş kümeleri içeriyorsa (X, \mathcal{A}, m) 'ye bir tam ölçü uzayı denir.

Tanım 2.57. $m^* : P(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

i. $m^*(\emptyset) = 0$

ii. her $A \in P(X)$ için $m^*(A) \geq 0$

iii. her $A, B \in P(X)$ için $A \subseteq B$ iken $m^*(A) \leq m^*(B)$

iv. $i \in I$ olmak üzere her $A_i \in P(X)$ için $m^*\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} m^*(A_i)$

şartları sağlanıyorsa m^* 'a X üzerinde bir dış ölçü ve (X, m^*) sıralı ikilisine bir dış ölçü uzayı denir.

Örnek 2.58.

$$m^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ 1, & A \neq \emptyset \end{cases}$$

ile tanımlı $m^* : P(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu X üzerinde bir dış ölçüdür. Böylece, (X, m^*) bir dış ölçü uzayıdır.

Tanım 2.59. (X, m^*) bir dış ölçü uzayı ve $A \in P(X)$ olsun. Her $B \in P(X)$ için

$$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c)$$

oluyorsa A 'ya m^* -dış ölçüsüne göre ölçülebilirdir (ya da kısaca m^* -ölçülebilirdir) denir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

BULANIK PARAMETRELİ BULANIK ESNEK KÜME SINIFLARI

Bu bölümde, *fpfs*-halka, *fpfs*- σ -halka, *fpfs*-cebir, *fpfs*- σ -cebir, *fpfs*- π -sistem, *fpfs*- λ -sistem ve *fpfs*- s -cebir kavramları tanımlandı ve bazı temel özellikleri verildi.

Tanım 3.1. \mathcal{R} , U üzerindeki *fpfs*-kümelerin boştan başka bir koleksiyonu olsun. Eğer \mathcal{R} , *fpfs*-fark ve sonlu *fpfs*-birleşim altında kapalı ise \mathcal{R} 'ye U üzerinde bir *fpfs*-halka denir. Eğer bir \mathcal{R} *fpfs*-halkası aynı zamanda sayılabilir *fpfs*-birleşim altında kapalı ise \mathcal{R} 'ye U üzerinde bir *fpfs*- σ -halka denir.

Bu çalışma boyunca, U üzerindeki tüm *fpfs*-halka ve tüm *fpfs*- σ -halkaların kümesi sırasıyla $\mathcal{R}(U)$ ve $\mathcal{R}_\sigma(U)$ ile gösterilir.

Örnek 3.2. $\{\tilde{0}\}$, $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$, $FPFS(U) \in \mathcal{R}_\sigma(U)$ biçimindedir.

Örnek 3.3. $E = \{x\}$ ve $U = \{u\}$ olmak üzere

$$\mathcal{R} = \{\tilde{0}, \tilde{0.1}, \tilde{0.2}, \tilde{0.3}\}$$

kümesi U üzerinde bir *fpfs*- σ -halkadır. Gerçekten,

\setminus	$\tilde{0}$	$\tilde{0.1}$	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.3}$
$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$
$\tilde{0.1}$	$\tilde{0.1}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$
$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.1}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$
$\tilde{0.3}$	$\tilde{0.3}$	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.1}$	$\tilde{0}$

ve

$\tilde{\cup}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0.1}$	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.3}$
$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0.1}$	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.3}$
$\tilde{0.1}$	$\tilde{0.1}$	$\tilde{0.1}$	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.3}$
$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.3}$
$\tilde{0.3}$	$\tilde{0.3}$	$\tilde{0.3}$	$\tilde{0.3}$	$\tilde{0.3}$

biçimindedir. İşlem tablolarından da görüleceği üzere \mathcal{R} , *fpfs*-fark ve *fpfs*-birleşim altında kapalıdır.

Önerme 3.4. Her *fpfs*- σ -halka bir *fpfs*-halkadır.

Önerme 3.5. $\mathcal{R} \in \mathcal{R}(U)$ olsun. O halde, her $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ için

i. $\tilde{0} \in \mathcal{R}$

ii. $\alpha \tilde{\Delta} \beta \in \mathcal{R}$

iii. $\alpha \tilde{\cap} \beta \in \mathcal{R}$

biçimindedir.

KANIT. $\mathcal{R} \in \mathcal{R}(U)$ olsun. O halde, $\mathcal{R} \neq \emptyset$ olduğundan bir $\alpha \in \mathcal{R}$ vardır. Böylece, $\alpha \tilde{\setminus} \alpha = \tilde{0} \in \mathcal{R}$ biçimindedir. Ayrıca her $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ için $\alpha \tilde{\setminus} \beta, \beta \tilde{\setminus} \alpha \in \mathcal{R}$ olduğundan

$$(\alpha \tilde{\setminus} \beta) \tilde{\cup} (\beta \tilde{\setminus} \alpha) = \alpha \tilde{\Delta} \beta \in \mathcal{R}$$

ve $\alpha \tilde{\cup} \beta, \alpha \tilde{\Delta} \beta \in \mathcal{R}$ olduğundan

$$(\alpha \tilde{\cup} \beta) \tilde{\setminus} (\alpha \tilde{\Delta} \beta) = \alpha \tilde{\cap} \beta \in \mathcal{R}$$

biçimindedir. □

Tanım 3.6. \mathcal{A} , U üzerindeki *fpfs*-kümelerin evrensel *fpfs*-kümeyi içeren bir koleksiyonu olsun. Eğer \mathcal{A} , *fpfs*-tümleyen ve sonlu *fpfs*-birleşim altında kapalı ise \mathcal{A} 'ya U

üzerinde bir *fpfs*-cebiri denir. Eğer bir \mathcal{A} *fpfs*-cebiri aynı zamanda sayılabilir *fpfs*-birleşim altında kapalı ise \mathcal{A} 'ya U üzerinde bir *fpfs*- σ -cebiri denir.

Bu çalışma boyunca, U üzerindeki tüm *fpfs*-cebiri ve tüm *fpfs*- σ -cebirlerin kümesi sırasıyla $\mathcal{A}(U)$ ve $\mathcal{A}_\sigma(U)$ ile gösterilir.

Örnek 3.7. $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, FPFS(U) \in \mathcal{A}_\sigma(U)$ biçimindedir.

Örnek 3.8. $E = \{x\}$ ve $U = \{u_1, u_2\}$ olmak üzere

$$\mathcal{A} = \left\{ \tilde{0}, \tilde{1}, \left\{ \left({}^{0.1}x, \left\{ {}^{0.3}u_1, {}^{0.6}u_2 \right\} \right) \right\}, \left\{ \left({}^{0.1}x, \left\{ {}^{0.3}u_1, {}^{0.4}u_2 \right\} \right) \right\}, \left\{ \left({}^{0.9}x, \left\{ {}^{0.7}u_1, {}^{0.4}u_2 \right\} \right) \right\}, \left\{ \left({}^{0.9}x, \left\{ {}^{0.7}u_1, {}^{0.6}u_2 \right\} \right) \right\} \right\}$$

kümesi U üzerinde bir *fpfs*- σ -cebirdir. Gerçekten, $\tilde{1} \in \mathcal{A}$, $\alpha_1 = \left\{ \left({}^{0.1}x, \left\{ {}^{0.3}u_1, {}^{0.6}u_2 \right\} \right) \right\}$, $\alpha_2 = \left\{ \left({}^{0.1}x, \left\{ {}^{0.3}u_1, {}^{0.4}u_2 \right\} \right) \right\}$, $\alpha_3 = \left\{ \left({}^{0.9}x, \left\{ {}^{0.7}u_1, {}^{0.4}u_2 \right\} \right) \right\}$ ve $\alpha_4 = \left\{ \left({}^{0.9}x, \left\{ {}^{0.7}u_1, {}^{0.6}u_2 \right\} \right) \right\}$ olmak üzere

$$\tilde{0}^{\tilde{c}} = \tilde{1}, \quad \tilde{1}^{\tilde{c}} = \tilde{0}, \quad \alpha_1^{\tilde{c}} = \alpha_3, \quad \alpha_2^{\tilde{c}} = \alpha_4, \quad \alpha_3^{\tilde{c}} = \alpha_1, \quad \alpha_4^{\tilde{c}} = \alpha_2$$

ve

$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	α_1	α_2	α_3	α_4
$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	α_1	α_2	α_3	α_4
$\tilde{1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{1}$
α_1	α_1	$\tilde{1}$	α_1	α_4	α_4
α_2	α_2	$\tilde{1}$	α_2	α_3	α_4
α_3	α_3	$\tilde{1}$	α_4	α_3	α_4
α_4	α_4	$\tilde{1}$	α_4	α_4	α_4

biçimindedir. İşlem tablolarından da görüleceği üzere \mathcal{A} , *fpfs*-tümleyen ve *fpfs*-birleşim altında kapalıdır.

Önerme 3.9. Her *fpfs*- σ -cebir bir *fpfs*-cebirdir.

Önerme 3.10. $\mathcal{A} \in \mathcal{A}(U)$ olsun. O halde, her $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ için

i. $\tilde{0} \in \mathcal{A}$

ii. $\alpha \tilde{\cap} \beta \in \mathcal{A}$

biçimindedir.

KANIT. $\mathcal{A} \in \mathcal{A}(U)$ olsun. $\tilde{1} \in \mathcal{A}$ olduğundan $\tilde{1}^{\tilde{c}} = \tilde{0} \in \mathcal{A}$ biçimindedir. Ayrıca her $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ için $\alpha^{\tilde{c}}, \beta^{\tilde{c}} \in \mathcal{A}$ olduğundan $\alpha^{\tilde{c}} \tilde{\cup} \beta^{\tilde{c}} \in \mathcal{A}$ elde edilir. Buradan,

$$(\alpha^{\tilde{c}} \tilde{\cup} \beta^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} = \alpha \tilde{\cap} \beta \in \mathcal{A}$$

sağlanır. □

Önerme 3.11. $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{\sigma}(U)$ olsun. O halde, $i \in I$ olmak üzere her $\alpha_i \in \mathcal{A}$ için $\tilde{\bigcap}_{i \in I} \alpha_i \in \mathcal{A}$ biçimindedir.

KANIT. $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{\sigma}(U)$ olsun. $i \in I$ olmak üzere her $\alpha_i \in \mathcal{A}$ için $\alpha_i^{\tilde{c}} \in \mathcal{A}$ olduğundan $\tilde{\bigcup}_{i \in I} \alpha_i^{\tilde{c}} \in \mathcal{A}$ elde edilir. Böylece, $\left(\tilde{\bigcup}_{i \in I} \alpha_i^{\tilde{c}} \right)^{\tilde{c}} = \tilde{\bigcap}_{i \in I} \alpha_i \in \mathcal{A}$ biçimindedir. □

Önerme 3.12. $\alpha \in FPFS(U)$ olsun. O halde, $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \alpha, \alpha^{\tilde{c}}, \alpha \tilde{\cup} \alpha^{\tilde{c}} \alpha \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}\}$ U üzerinde bir $fpfs$ - σ -cebirdir.

Tanım 3.13. $\alpha \in FPFS(U)$ olsun. O halde, $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \alpha, \alpha^{\tilde{c}}, \alpha \tilde{\cup} \alpha^{\tilde{c}} \alpha \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}\}$, $fpfs$ - σ -cebirine α tarafından üretilen $fpfs$ - σ -cebir denir ve \mathcal{A}_{α} ile gösterilir.

Not 3.14. $\mathcal{A}_{\alpha} = \mathcal{A}_{\alpha^{\tilde{c}}}$ olduğu açıktır. Ayrıca eğer $\alpha \tilde{\subseteq} \alpha^{\tilde{c}}$ veya $\alpha^{\tilde{c}} \tilde{\subseteq} \alpha$ ise $\mathcal{A}_{\alpha} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \alpha, \alpha^{\tilde{c}}\}$ biçimindedir. Üstelik, eğer $\alpha = \alpha^{\tilde{c}}$ ise $\mathcal{A}_{\alpha} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \alpha\}$ biçimindedir.

Örnek 3.15. $\tilde{\lambda} \in FPFS(U)$ olsun. O halde, $\mathcal{A}_{\tilde{\lambda}} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}^{\tilde{c}}\}$ biçimindedir. Ek olarak, $\mathcal{A}_{\tilde{0.5}} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0.5}\}$ biçimindedir.

Önerme 3.16. $fpfs$ - σ -cebirlerin keyfi kesişimi bir $fpfs$ - σ -cebirdir.

KANIT. J indis kümesi verilsin ve her $j \in J$ için $\mathcal{A}_j \in \mathcal{A}_{\sigma}(U)$ olsun. O halde, her

$j \in J$ için $\tilde{I} \in \mathcal{A}_j$ biçimindedir. Böylece, $\tilde{I} \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j$ sağlanır. Her $\alpha \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j$ için $\alpha \in \mathcal{A}_j$ biçimindedir. Buradan, her $j \in J$ için $\alpha^{\tilde{c}} \in \mathcal{A}_j$ sağlanır. Dolayısıyla, $\alpha^{\tilde{c}} \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j$ elde edilir. $I \subseteq J$ olmak üzere her $i \in I$ için $\alpha_i \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j$ iken $\alpha_i \in \mathcal{A}_j$ biçimindedir. Böylece, her $j \in J$ için $\bigcup_{i \in I} \alpha_i \in \mathcal{A}_j$ elde edilir. Buradan, $\bigcup_{i \in I} \alpha_i \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j$ sağlanır. Sonuç olarak, $\bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j \in \mathcal{A}_\sigma(U)$ biçimindedir. \square

Not 3.17. İki *fpfs*- σ -cebirin birleşimi her zaman bir *fpfs*- σ -cebir olmayabilir. Örneğin, $E = \{x\}$ ve $U = \{u\}$ olsun. O halde, $\alpha = \{(0.3x, \{0.4u\})\}$ ve $\beta = \{(0.2x, \{0.5u\})\}$ için Not 3.14'ten

$$\mathcal{A}_\alpha = \{\tilde{0}, \tilde{I}, \{(0.3x, \{0.4u\})\}, \{(0.7x, \{0.6u\})\}\}$$

ve

$$\mathcal{A}_\beta = \{\tilde{0}, \tilde{I}, \{(0.2x, \{0.5u\})\}, \{(0.8x, \{0.5u\})\}\}$$

iki *fpfs*- σ -cebirdir. Böylece,

$$\mathcal{A}_\alpha \cup \mathcal{A}_\beta = \{\tilde{0}, \tilde{I}, \{(0.3x, \{0.4u\})\}, \{(0.7x, \{0.6u\})\}, \{(0.2x, \{0.5u\})\}, \{(0.8x, \{0.5u\})\}\}$$

biçimindedir. Ancak

$$\{(0.3x, \{0.4u\})\} \cup \{(0.2x, \{0.5u\})\} = \{(0.3x, \{0.5u\})\} \notin \mathcal{A}_\alpha \cup \mathcal{A}_\beta$$

olduğundan $\mathcal{A}_\alpha \cup \mathcal{A}_\beta$ bir *fpfs*- σ -cebir değildir.

Önerme 3.18. $\emptyset \neq A \subseteq FPFS(U)$ olsun. O halde, A 'yı içeren en küçük *fpfs*- σ -cebir vardır.

KANIT. $\mathcal{A}^* = \{A \in \mathcal{A}_\sigma(U) : A \subseteq \mathcal{A}\}$ olsun. $A \subseteq FPFS(U)$ ve $FPFS(U) \in \mathcal{A}_\sigma(U)$ olduğundan $FPFS(U) \in \mathcal{A}^*$ biçimindedir. Yani, $\mathcal{A}^* \neq \emptyset$ biçimindedir. Böylece, $A \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}^*} A$ elde edilir. Önerme 3.16'dan $\bigcap_{A \in \mathcal{A}^*} A \in \mathcal{A}_\sigma(U)$ biçimindedir. Böylece, $\bigcap_{A \in \mathcal{A}^*} A \in \mathcal{A}^*$ sağlanır. Sonuç olarak, $\bigcap_{A \in \mathcal{A}^*} A$, A 'yı içeren en küçük *fpfs*- σ -cebirdir. \square

Tanım 3.19. \mathcal{P} , U üzerindeki *fpfs*-kümelerin boştan başka bir koleksiyonu olsun.

Eğer \mathcal{P} , sonlu $fpfs$ -kesişim altında kapalı ise \mathcal{P} 'ye U üzerinde bir $fpfs$ - π -sistem denir.

Tanım 3.20. \mathcal{D} , U üzerindeki $fpfs$ -kümelerin evrensel $fpfs$ -kümeyi içeren bir koleksiyonu olsun. Eğer \mathcal{D} , üst kümeye göre $fpfs$ -tümleyen ve sayılabilir artan $fpfs$ -birleşim altında kapalı ise \mathcal{D} 'ye U üzerinde bir $fpfs$ -Dykin-sistem veya $fpfs$ - λ -sistem denir.

Bu çalışma boyunca, U üzerindeki tüm $fpfs$ - π -sistem ve tüm $fpfs$ - λ -sistemlerin kümesi sırasıyla $\pi(U)$ ve $\lambda(U)$ ile gösterilir.

Örnek 3.21. $\{\tilde{0}\}, \{\tilde{0}, \tilde{1}\}, FPFS(U) \in \pi(U)$ biçimindedir. Ayrıca $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, FPFS(U) \in \lambda(U)$ biçimindedir.

Örnek 3.22. $E = \{x\}$ ve $U = \{u_1, u_2\}$ olmak üzere

$$\mathcal{P} = \left\{ \left\{ \left({}^{0.1}x, \left\{ {}^{0.6}u_1, {}^{0.4}u_2 \right\} \right) \right\}, \left\{ \left({}^{0.2}x, \left\{ {}^{0.9}u_1, {}^{0.3}u_2 \right\} \right) \right\}, \left\{ \left({}^{0.1}x, \left\{ {}^{0.6}u_1, {}^{0.3}u_2 \right\} \right) \right\} \right\}$$

U üzerinde bir $fpfs$ - π -sistemdir. Gerçekten, $\alpha_1 = \left\{ \left({}^{0.1}x, \left\{ {}^{0.6}u_1, {}^{0.4}u_2 \right\} \right) \right\}$, $\alpha_2 = \left\{ \left({}^{0.2}x, \left\{ {}^{0.9}u_1, {}^{0.3}u_2 \right\} \right) \right\}$ ve $\alpha_3 = \left\{ \left({}^{0.1}x, \left\{ {}^{0.6}u_1, {}^{0.3}u_2 \right\} \right) \right\}$ olmak üzere

$\tilde{\cap}$	α_1	α_2	α_3
α_1	α_1	α_3	α_3
α_2	α_3	α_2	α_3
α_3	α_3	α_3	α_3

biçimindedir. İşlem tablolarından da görüleceği üzere \mathcal{P} , $fpfs$ -kesişim altında kapalıdır.

Örnek 3.23. $E = \{x\}$ ve $U = \{u\}$ olmak üzere

$$\mathcal{D} = \left\{ \tilde{0}, \tilde{0.2}, \tilde{0.4}, \tilde{0.6}, \tilde{0.8}, \tilde{1} \right\}$$

U üzerinde bir $fpfs$ - λ -sistemdir. Gerçekten, $\tilde{1} \in \mathcal{D}$,

üst kümeye göre $fpps$ -tümleyen	$\tilde{0}$	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.4}$	$\tilde{0.6}$	$\tilde{0.8}$	$\tilde{1}$
$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.4}$	$\tilde{0.6}$	$\tilde{0.8}$	$\tilde{1}$
$\tilde{0.2}$	–	$\tilde{0}$	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.4}$	$\tilde{0.6}$	$\tilde{0.8}$
$\tilde{0.4}$	–	–	$\tilde{0}$	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.4}$	$\tilde{0.6}$
$\tilde{0.6}$	–	–	–	$\tilde{0}$	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.4}$
$\tilde{0.8}$	–	–	–	–	$\tilde{0}$	$\tilde{0.2}$
$\tilde{1}$	–	–	–	–	–	$\tilde{0}$

ve

artan $fpps$ -birleşim	$\tilde{0}$	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.4}$	$\tilde{0.6}$	$\tilde{0.8}$	$\tilde{1}$
$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.4}$	$\tilde{0.6}$	$\tilde{0.8}$	$\tilde{1}$
$\tilde{0.2}$	–	$\tilde{0.2}$	$\tilde{0.4}$	$\tilde{0.6}$	$\tilde{0.8}$	$\tilde{1}$
$\tilde{0.4}$	–	–	$\tilde{0.4}$	$\tilde{0.6}$	$\tilde{0.8}$	$\tilde{1}$
$\tilde{0.6}$	–	–	–	$\tilde{0.6}$	$\tilde{0.8}$	$\tilde{1}$
$\tilde{0.8}$	–	–	–	–	$\tilde{0.8}$	$\tilde{1}$
$\tilde{1}$	–	–	–	–	–	$\tilde{1}$

biçimindedir. İşlem tablolarından da görüleceği üzere \mathcal{D} , üst kümeye göre $fpps$ -tümleyen ve artan $fpps$ -birleşim altında kapalıdır.

Önerme 3.24. Her $fpps$ -cebiri ve her $fpps$ -halka bir $fpps$ - π -sistemdir.

Önerme 3.25. $\mathcal{D} \in \lambda(U)$ olsun. O halde, aşağıdakiler geçerlidir:

i. $\tilde{0} \in \mathcal{D}$

ii. Her $\alpha \in \mathcal{D}$ için $\alpha^c \in \mathcal{D}$

iii. Her $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$ için $\alpha \tilde{\subseteq} \beta \Rightarrow \alpha \tilde{\Delta} \beta \in \mathcal{D}$

KANIT. $\mathcal{D} \in \lambda(U)$ olsun. O halde, $\tilde{\mathbb{I}} \in \mathcal{D}$ biçimindedir. Böylece, $\tilde{\mathbb{I}} \tilde{\mathbb{I}} = \tilde{\mathbb{O}} \in \mathcal{D}$ elde edilir. Ayrıca her $\alpha \in \mathcal{D}$ için $\tilde{\mathbb{I}} \alpha = \alpha^{\tilde{c}} \in \mathcal{D}$ biçimindedir. Her $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$ için eğer $\alpha \tilde{\subseteq} \beta$ ise $\alpha \tilde{\cap} \beta = \alpha \in \mathcal{D}$, $\alpha \tilde{\cup} \beta = \beta \in \mathcal{D}$ ve dolayısıyla, $\alpha \tilde{\cap} \beta \tilde{\subseteq} \alpha \tilde{\cup} \beta$ olduğundan

$$(\alpha \tilde{\cup} \beta) \tilde{\setminus} (\alpha \tilde{\cap} \beta) = \alpha \tilde{\Delta} \beta \in \mathcal{D}$$

biçimindedir. □

Önerme 3.26. $\mathcal{D} \in \lambda(U)$ ve $i \leq k$ iken $\alpha_i \tilde{\subseteq} \alpha_k$ veya $\alpha_k \tilde{\subseteq} \alpha_i$ olmak üzere her $i, k \in I$ için $\alpha_i \in \mathcal{D}$ olsun. O halde, $\tilde{\bigcap}_{i \in I} \alpha_i \in \mathcal{D}$ biçimindedir.

KANIT. $\mathcal{D} \in \lambda(U)$ ve $i \leq k$ iken $\alpha_i \tilde{\subseteq} \alpha_k$ veya $\alpha_k \tilde{\subseteq} \alpha_i$ olmak üzere her $i, k \in I$ için $\alpha_i \in \mathcal{D}$ olsun. Eğer her $i, k \in I$ için $i \leq k$ iken $\alpha_i \tilde{\subseteq} \alpha_k$ ise \mathbb{N} iyi sıralı bir küme olduğundan $\tilde{\bigcap}_{i \in I} \alpha_i = \alpha_{\min I} \in \mathcal{D}$ biçimindedir. Benzer biçimde, her $i, k \in I$ için $i \leq k$ iken $\alpha_k \tilde{\subseteq} \alpha_i$ ise her $i, k \in I$ için $i \leq k$ iken $\alpha_i^{\tilde{c}} \tilde{\subseteq} \alpha_k^{\tilde{c}}$ ve $\alpha_i^{\tilde{c}} \in \mathcal{D}$ olduğundan $\tilde{\bigcup}_{i \in I} \alpha_i^{\tilde{c}} \in \mathcal{D}$ elde edilir. O halde,

$$\left(\tilde{\bigcup}_{i \in I} \alpha_i^{\tilde{c}} \right)^{\tilde{c}} = \tilde{\bigcap}_{i \in I} \alpha_i \in \mathcal{D} \text{ biçimindedir.} \quad \square$$

Tanım 3.27. \mathcal{S}, U üzerindeki *fpfs*-kümelerin boştan başka bir koleksiyonu olsun ve evrensel *fpfs*-kümeyi içersin. Eğer \mathcal{S} , *fpfs*-fark ve sayılabilir *fpfs*-birleşim altında kapalı ise \mathcal{S} 'ye U üzerinde bir *fpfs*-süper-cebir (kısaca *fpfs*-*s*-cebir) denir.

Bu çalışma boyunca, U üzerindeki tüm *fpfs*-*s*-cebirlerin kümesi $\mathcal{S}(U)$ ile gösterilir.

Örnek 3.28. $\{\tilde{\mathbb{O}}, \tilde{\mathbb{I}}\}, FPFS(U) \in \mathcal{S}(U)$ biçimindedir.

Örnek 3.29. $E = \{x\}$ ve $U = \{u\}$ olmak üzere $\mathcal{S} = \{\tilde{\mathbb{O}}, \tilde{\mathbb{I}}, \tilde{\mathbb{O}}.5\}$ kümesi U üzerinde bir *fpfs*-*s*-cebirdir. Gerçekten, $\tilde{\mathbb{I}} \in \mathcal{S}$,

$\tilde{\setminus}$	$\tilde{\mathbb{O}}$	$\tilde{\mathbb{I}}$	$\tilde{\mathbb{O}}.5$
$\tilde{\mathbb{O}}$	$\tilde{\mathbb{O}}$	$\tilde{\mathbb{O}}$	$\tilde{\mathbb{O}}$
$\tilde{\mathbb{I}}$	$\tilde{\mathbb{I}}$	$\tilde{\mathbb{O}}$	$\tilde{\mathbb{O}}.5$
$\tilde{\mathbb{O}}.5$	$\tilde{\mathbb{O}}.5$	$\tilde{\mathbb{O}}$	$\tilde{\mathbb{O}}$

ve

$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\widetilde{0.5}$
$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\widetilde{0.5}$
$\tilde{1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{1}$
$\widetilde{0.5}$	$\widetilde{0.5}$	$\tilde{1}$	$\widetilde{0.5}$

biçimindedir. İşlem tablolarından da görüleceği üzere \mathcal{S} , *fpfs*-fark ve *fpfs*-birleşim altında kapalıdır.

Önerme 3.30. $\mathcal{S} \in \mathcal{S}(U)$ olsun. O halde, her $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ için

i. $\alpha^{\tilde{c}} \in \mathcal{S}$

ii. $\tilde{0} \in \mathcal{S}$

iii. $\alpha \tilde{\Delta} \beta \in \mathcal{S}$

iv. $i \in I$ olmak üzere her $\alpha_i \in \mathcal{S}$ için $\tilde{\bigcap}_{i \in I} \alpha_i \in \mathcal{S}$

biçimindedir.

KANIT. $\mathcal{S} \in \mathcal{S}(U)$ olsun. O halde, $\tilde{1} \in \mathcal{S}$ biçimindedir. Böylece, her $\alpha \in \mathcal{S}$ için $\tilde{1} \tilde{\setminus} \alpha = \alpha^{\tilde{c}} \in \mathcal{S}$ olur. Buradan, $\tilde{1}^{\tilde{c}} = \tilde{0} \in \mathcal{S}$ sağlanır. Her $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ için $\alpha \tilde{\setminus} \beta, \beta \tilde{\setminus} \alpha \in \mathcal{S}$ olduğundan

$$(\alpha \tilde{\setminus} \beta) \tilde{\cup} (\beta \tilde{\setminus} \alpha) = \alpha \tilde{\Delta} \beta \in \mathcal{S}$$

biçimindedir. Ayrıca $i \in I$ olmak üzere her $\alpha_i \in \mathcal{S}$ için $\alpha_i^{\tilde{c}} \in \mathcal{S}$ olduğundan $\tilde{\bigcup}_{i \in I} \alpha_i^{\tilde{c}} \in \mathcal{S}$ sağlanır. Buradan,

$$\left(\tilde{\bigcup}_{i \in I} \alpha_i^{\tilde{c}} \right)^{\tilde{c}} = \tilde{\bigcap}_{i \in I} \alpha_i \in \mathcal{S}$$

elde edilir. □

Önerme 3.31. *fpfs*-*s*-cebirlerin keyfi kesişimi bir *fpfs*-*s*-cebirdir.

KANIT. J indis kümesi verilsin ve her $j \in J$ için $\mathcal{S}_j \in \mathcal{S}(U)$ olsun. O halde, her $j \in J$ için $\tilde{1} \in \mathcal{S}_j$ biçimindedir. Böylece, $\tilde{1} \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{S}_j$ sağlanır. Her $\alpha, \beta \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{S}_j$ için $\alpha, \beta \in \mathcal{S}_j$ elde edilir. Böylece, her $j \in J$ için $\alpha \setminus \beta \in \mathcal{S}_j$ sağlanır. Buradan, $\alpha \setminus \beta \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{S}_j$ biçimindedir. $I \subseteq J$ olmak üzere her $i \in I$ için $\alpha_i \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{S}_j$ ise her $j \in J$ için $\alpha_i \in \mathcal{S}_j$ biçimindedir. Böylece, her $j \in J$ için $\bigcup_{i \in I} \alpha_i \in \mathcal{S}_j$ elde edilir. Buradan, $\bigcup_{i \in I} \alpha_i \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{S}_j$ biçimindedir. Sonuç olarak, $\bigcap_{j \in J} \mathcal{S}_j \in \mathcal{S}(U)$ sağlanır. \square

Önerme 3.32. $\emptyset \neq S \subseteq FPFS(U)$ olsun. O halde, S 'yi içeren en küçük *fpfs-s-cebir* vardır.

KANIT. $S^* = \{S \in \mathcal{S}(U) : S \subseteq S\}$ olsun. $S \subseteq FPFS(U)$ ve $FPFS(U) \in \mathcal{S}(U)$ olduğundan $S^* \neq \emptyset$ biçimindedir. Böylece, $S \subseteq \bigcap_{S \in S^*} S$ sağlanır. Önerme 3.31'den $\bigcap_{S \in S^*} S \in \mathcal{S}(U)$ elde edilir. Buradan, $\bigcap_{S \in S^*} S \in S^*$ biçimindedir. Sonuç olarak, $\bigcap_{S \in S^*} S, S$ 'yi içeren en küçük *fpfs-s-cebirdir*. \square

Tanım 3.33. $\emptyset \neq S \subseteq FPFS(U)$ olsun. O halde, S 'yi içeren en küçük *fpfs-s-cebir*, S tarafından üretilen *fpfs-s-cebir* olarak adlandırılır ve \mathcal{S}_S ile gösterilir. $\alpha \in FPFS(U)$ olmak üzere eğer $S = \{\alpha\}$ ise \mathcal{S}_S notasyonu yerine \mathcal{S}_α notasyonu kullanılır.

Not 3.34. İki *fpfs-s-cebirin* birleşimi her zaman bir *fpfs-s-cebir* olmayabilir. Örneğin, $E = \{x\}$ ve $U = \{u\}$ olsun. O halde,

$$\mathcal{S}_{0.4} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0.2}, \tilde{0.4}, \tilde{0.6}, \tilde{0.8}\}$$

ve

$$\mathcal{S}_{0.5} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0.5}\}$$

iki *fpfs-s-cebirdir*. Buradan,

$$\mathcal{S}_{0.4} \cup \mathcal{S}_{0.5} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{0.2}, \tilde{0.4}, \tilde{0.5}, \tilde{0.6}, \tilde{0.8}\}$$

elde edilir. Ancak

$$\tilde{0.5} \setminus \tilde{0.4} = \tilde{0.1} \notin \mathcal{S}_{0.4} \cup \mathcal{S}_{0.5}$$

olduğundan $\mathcal{S}_{0.4} \cup \mathcal{S}_{0.5}$ bir *fpfs-s-cebir* değildir.

Önerme 3.35. Her $fpfs$ - s -cebir bir $fpfs$ - σ -halka, bir $fpfs$ - σ -cebir ve bir $fpfs$ - λ -sistemdir.

Önerme 3.4, 3.9, 3.24 ve 3.35'ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.36. Aşağıdaki kapsamalar geçerlidir:

i. $\mathcal{S}(U) \subseteq \mathcal{R}_\sigma(U) \subseteq \mathcal{R}(U) \subseteq \pi(U)$

ii. $\mathcal{S}(U) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(U) \subseteq \mathcal{A}(U) \subseteq \pi(U)$

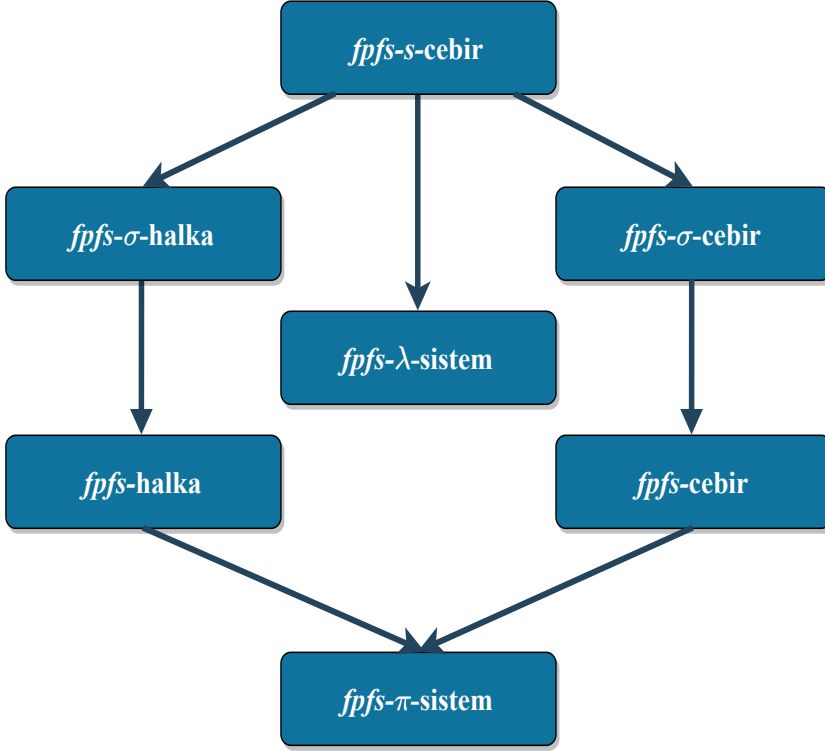
iii. $\mathcal{S}(U) \subseteq \lambda(U)$

Çizelge 2'de yukarıda tanımlanan kavramların özellikleri sunuldu. Burada, \checkmark yapının tanımından gelen özellikleri ve $+$ bunlar yoluyla elde edilen özellikleri belirtir.

Çizelge 2
 $fpfs$ -küme sınıfları ve $fpfs$ -küme işlemleri arasındaki ilişkiler

$fpfs$ -sınıflar	$fpfs$ -fark	$fpfs$ -birleşim	$fpfs$ -tümleyen	$fpfs$ -kesişim	$fpfs$ -simetrik fark	\bar{I}	$\bar{0}$
$\mathcal{R}(U)$	\checkmark	Sonlu \checkmark		Sonlu $+$	$+$		$+$
$\mathcal{R}_\sigma(U)$	\checkmark	Sayılabilir \checkmark		Sonlu $+$	$+$		$+$
$\mathcal{A}(U)$		Sonlu \checkmark	\checkmark	Sonlu $+$		\checkmark	$+$
$\mathcal{A}_\sigma(U)$		Sayılabilir \checkmark Sayılabilir Artan $+$	\checkmark	Sayılabilir $+$ Sayılabilir Azalan $+$ Sayılabilir Artan $+$		\checkmark	$+$
$\pi(U)$				Sonlu \checkmark			
$\lambda(U)$		Sayılabilir Artan \checkmark	$+$ Üst Kümelerdeki Alt Kümeler \checkmark	Sayılabilir Azalan $+$ Sayılabilir Artan $+$	Artan $+$	\checkmark	$+$
$\mathcal{S}(U)$	\checkmark	Sayılabilir \checkmark Sayılabilir Artan $+$	$+$ Üst Kümelerdeki Alt Kümeler $+$	Sayılabilir $+$ Sayılabilir Azalan $+$ Sayılabilir Artan $+$	$+$	\checkmark	$+$

Şekil 2'de yukarıda tanımlanan kavramların aralarındaki ilişkiler sunuldu.



Şekil 2. *fpfs*-küme sınıfları arasındaki ilişkiler

Tanım 3.37. $\alpha \in FPFS(U)$ olsun. O halde, $\{\beta \in FPFS(U) : \beta \check{\subseteq} \alpha\}$ kümesine α *fpfs*-kümesinin *fpfs*-kuvvet kümesi denir ve $\tilde{P}(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 3.38. H , *fpfs*-kümelerin boştan başka bir sınıfı ve $\beta \in FPFS(U)$ olsun. Eğer her $\alpha \in H$ için $\beta \check{\subseteq} \alpha$ iken $\beta \in H$ oluyorsa H 'ye kalıtsaldır denir.

Örnek 3.39. $\tilde{P}(\tilde{0.2})$ ve $FPFS(U)$ kalıtsal kümelerdir.

Teorem 3.40. H kalıtsal olsun. O halde, H bir *fpfs*- π -sistemdir.

KANIT. H kalıtsal olsun. Her $\alpha, \beta \in H$ için $\alpha \tilde{\cap} \beta \check{\subseteq} \alpha$ ve H kalıtsal olduğundan $\alpha \tilde{\cap} \beta \in H$ biçimindedir. Dolayısıyla, H bir *fpfs*- π -sistemdir. \square

Teorem 3.41. H kalıtsal olsun. Eğer H sayılabilir *fpfs*-birleşim altında kapalı ise H bir *fpfs*- σ -halkadır.

KANIT. H kalıtsal olsun ve H sayılabilir *fpfs*-birleşim altında kapalı olsun. Her

$\alpha, \beta \in H$ için $\alpha \tilde{\beta} \subseteq \alpha$ ve H kalıtsal olduğundan $\alpha \tilde{\beta} \in H$ biçimindedir. Böylece, H bir *fpfs*- σ -halkadır. \square

Lemma 3.42. H kalıtsal bir küme ve $\tilde{I} \in H$ olsun. O halde, $H = FPFS(U)$ biçimindedir.

Sonuç 3.43. $FPFS(U)$ kalıtsal / *fpfs*-halka / *fpfs*- σ -halka / *fpfs*-cebir / *fpfs*- σ -cebir / *fpfs*- λ -sistem / *fpfs*- π -sistem / *fpfs*- s -cebirdir.



DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

BULANIK PARAMETRELİ BULANIK ESNEK ÖLÇÜ

Bu bölümde, *fpfs*-ölçü kavramı önerildi ve bazı temel özellikleri verildi.

Tanım 4.1. $\mathcal{S} \in \mathcal{S}(U)$ olsun. O halde, (U, \mathcal{S}) sıralı ikilisine bir *fpfs*-ölçülebilir uzay ve \mathcal{S} 'nin her elemanına \mathcal{S} -*fpfs*-ölçülebilir küme (kısaca *fpfs*-ölçülebilir küme) denir.

Örnek 4.2. $FPFS(U)$ bir *fpfs*-*s*-cebiri olduğundan $(U, FPFS(U))$ sıralı ikilisi bir *fpfs*-ölçülebilir uzay ve $FPFS(U)$ 'nin her elemanı *fpfs*-ölçülebilir kümedir.

Örnek 4.3. $\mathcal{S}_{0,4}$ bir *fpfs*-*s*-cebiri olduğundan $(U, \mathcal{S}_{0,4})$ sıralı ikilisi bir *fpfs*-ölçülebilir uzay ve $\mathcal{S}_{0,4}$ 'nin her elemanı *fpfs*-ölçülebilir kümedir.

Tanım 4.4. $R \in \mathcal{R}(U)$ ve $m_0 : R \rightarrow [0, \infty]$ bir fonksiyon olsun. Eğer

i. $m_0(\tilde{0}) = 0$

ii. her $i \in I$ için $\alpha_i \in R$ kümeleri karşılıklı ayrık iken $m_0\left(\bigcup_{i \in I} \alpha_i\right) = \sum_{i \in I} m_0(\alpha_i)$

şartları sağlanıyorsa m_0 'a \mathcal{R} üzerinde bir *fpfs*-ön ölçü denir.

Örnek 4.5. $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ bir *fpfs*-halkadır. O halde,

$$m_0(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha = \tilde{0} \\ 1, & \alpha = \tilde{1} \end{cases}$$

ile tanımlı $m_0 : \{\tilde{0}, \tilde{1}\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ üzerinde bir *fpfs*-ön ölçüdür.

Tanım 4.6. (U, \mathcal{S}) bir *fpfs*-ölçülebilir uzay ve $m : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

i. $m(\tilde{0}) = 0$

ii. her $\alpha \in \mathcal{S}$ için $m(\alpha) \geq 0$

iii. her $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ için $\alpha \subseteq \beta$ iken $m(\alpha) \leq m(\beta)$

iv. her $i \in I$ için α_i *fpfs*-ölçülebilir kümeleri karşılıklı ayırık iken $m\left(\bigcup_{i \in I} \alpha_i\right) = \sum_{i \in I} m(\alpha_i)$

şartları sağlanıyorsa m 'ye (U, \mathcal{S}) üzerinde bir *fpfs*-ölçü ve (U, \mathcal{S}, m) sıralı üçlüsüne bir *fpfs*-ölçü uzayı denir.

Önerme 4.7. Her *fpfs*-ölçü bir *fpfs*-ön ölçüdür.

Örnek 4.8. $(U, FPFS(U))$ bir *fpfs*-ölçülebilir uzaydır. Ayrıca $m(\alpha) = 0$ ile tanımlı $m : FPFS(U) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $(U, FPFS(U))$ üzerinde bir *fpfs*-ölçüdür. Böylece, $(U, FPFS(U), m)$ bir *fpfs*-ölçü uzayıdır.

Örnek 4.9. (U, \mathcal{S}) bir *fpfs*-ölçülebilir uzay olsun. O halde,

$$m(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha = \tilde{0} \\ \infty, & \alpha \neq \tilde{0} \end{cases}$$

ile tanımlı $m : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu (U, \mathcal{S}) üzerinde bir *fpfs*-ölçüdür. Böylece, (U, \mathcal{S}, m) bir *fpfs*-ölçü uzayıdır.

Örnek 4.10. (U, \mathcal{S}) bir *fpfs*-ölçülebilir uzay, m_1 ve m_2 (U, \mathcal{S}) üzerinde iki *fpfs*-ölçü ve $k, l \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ olsun. O halde,

$$m(\alpha) = km_1(\alpha) + lm_2(\alpha)$$

ile tanımlı $m : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu (U, \mathcal{S}) üzerinde bir *fpfs*-ölçüdür.

Sonuç 4.11. Bir *fpfs*-ölçü fonksiyonunun negatif olmayan bir katı da bir *fpfs*-ölçüdür.

Örnek 4.12. (U, \mathcal{S}) bir *fpfs*-ölçülebilir uzay olsun. O halde,

$$m(\alpha) = \sum_{x \in E} \mu(x) + \sum_{x \in E} \sum_{u \in U} \alpha\left(\mu^{(x), x}\right)(u)$$

ile tanımlı $m : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu (U, \mathcal{S}) üzerinde bir *fpfs*-ölçüdür. Burada, Tanım 4.6'daki

i.-iii. şartlarının sağlandığı açıktır. *iv.* şartı kanıtlamak için α_i *fffs*-ölçülebilir kümelerinin karşılıklı ayrık olduğu kabul edilsin. O halde, $i \neq k$ olmak üzere her $i, k \in I$, her $x \in E$ ve her $u \in U$ için

$$\min\{\mu_i(x), \mu_k(x)\} = 0$$

ve

$$\min\left\{\alpha_i\left(\mu_i(x)_x\right)(u), \alpha_k\left(\mu_k(x)_x\right)(u)\right\} = 0$$

biçimindedir. Diğer bir deyişle, her $i, k \in I$ için

$$(\mu_i(x) \neq 0 \wedge \mu_k(x) \neq 0) \Rightarrow i = k$$

ve

$$\left(\alpha_i\left(\mu_i(x)_x\right)(u) \neq 0 \wedge \alpha_k\left(\mu_k(x)_x\right)(u) \neq 0\right) \Rightarrow i = k$$

biçimindedir. Böylece, her $x \in E$ ve her $u \in U$ için

$$\max_{i \in I} \{\mu_i(x)\} = \begin{cases} \mu_k(x), & \exists k \in I \ni \mu_k(x) \neq 0 \\ 0, & \forall k \in I, \mu_k(x) = 0 \end{cases} = \begin{cases} \sum_{i \in I} \mu_i(x), & \exists k \in I \ni \mu_k(x) \neq 0 \\ \sum_{i \in I} \mu_i(x), & \forall k \in I, \mu_k(x) = 0 \end{cases} = \sum_{i \in I} \mu_i(x)$$

ve

$$\begin{aligned} \max_{i \in I} \left\{ \alpha_i \left(\mu_i(x)_x \right) (u) \right\} &= \begin{cases} \alpha_k \left(\mu_k(x)_x \right) (u), & \exists k \in I \ni \alpha_k \left(\mu_k(x)_x \right) (u) \neq 0 \\ 0, & \forall k \in I, \alpha_k \left(\mu_k(x)_x \right) (u) = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{i \in I} \alpha_i \left(\mu_i(x)_x \right) (u), & \exists k \in I \ni \alpha_k \left(\mu_k(x)_x \right) (u) \neq 0 \\ \sum_{i \in I} \alpha_i \left(\mu_i(x)_x \right) (u), & \forall k \in I, \alpha_k \left(\mu_k(x)_x \right) (u) = 0 \end{cases} \\ &= \sum_{i \in I} \alpha_i \left(\mu_i(x)_x \right) (u) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} m \left(\tilde{\cup} \alpha_i \right) &= \sum_{x \in E} \max_{i \in I} \{\mu_i(x)\} + \sum_{x \in E} \sum_{u \in U} \max_{i \in I} \left\{ \alpha_i \left(\mu_i(x)_x \right) (u) \right\} \\ &= \sum_{x \in E} \sum_{i \in I} \mu_i(x) + \sum_{x \in E} \sum_{u \in U} \sum_{i \in I} \alpha_i \left(\mu_i(x)_x \right) (u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in I} \left(\sum_{x \in E} \mu_i(x) + \sum_{x \in E} \sum_{u \in U} \alpha_i \left(\mu_i(x)_x \right) (u) \right) \\
&= \sum_{i \in I} m(\alpha_i)
\end{aligned}$$

sağlanır. Böylece, *iv.* şart geçerlidir.

Örnek olarak, $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ için

$$\beta = \left\{ \left(0.3 x_1, \{0.8 u_1, 0.5 u_2, 0.2 u_3\} \right), \left(0.9 x_2, \{0.4 u_1, 0.6 u_2, 0.1 u_3\} \right), \left(0.5 x_3, \{0.7 u_1, 0.2 u_2, 0.3 u_3\} \right) \right\}$$

*f*pf*s*-kümesinin ölçüsü

$$\begin{aligned}
m(\beta) &= (0.3 + 0.9 + 0.5) + ((0.8 + 0.5 + 0.2) + (0.4 + 0.6 + 0.1) + (0.7 + 0.2 + 0.3)) \\
&= 1.7 + 3.8 \\
&= 5.5
\end{aligned}$$

biçimindedir.

Ayrıca $m_1(\alpha) = 5m(\alpha)$ ile tanımlı $m_1 : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *f*pf*s*-ölçüsü göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
m_1(\beta) &= 5((0.3 + 0.9 + 0.5) + ((0.8 + 0.5 + 0.2) + (0.4 + 0.6 + 0.1) + (0.7 + 0.2 + 0.3))) \\
&= 5(1.7 + 3.8) \\
&= 27.5
\end{aligned}$$

biçimindedir.

Örnek 4.13. (U, \mathcal{S}, m) bir *f*pf*s*-ölçü uzayı, $\beta \in \mathcal{S}$ ve $m_1 : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $m_1(\alpha) = m(\alpha \tilde{\cap} \beta)$ ile tanımlı bir fonksiyon olsun. m bir *f*pf*s*-ölçü olduğundan her $\alpha, \gamma \in \mathcal{S}$ için

$$i. m_1(\tilde{0}) = m(\tilde{0} \tilde{\cap} \beta) = m(\tilde{0}) = 0$$

$$ii. m_1(\alpha) = m(\alpha \tilde{\cap} \beta) \geq 0$$

$$iii. \alpha \tilde{\subseteq} \gamma \Rightarrow m_1(\alpha) = m(\alpha \tilde{\cap} \beta) \leq m(\gamma \tilde{\cap} \beta) = m_1(\gamma)$$

iv. $i \in I$ olmak üzere her karşılıklı ayrık α_i *f*pf*s*-ölçülebilir kümeleri için $\alpha_i \tilde{\cap} \beta$ *f*pf*s*-ölçülebilir

ve karşılıklı ayırık olduğundan

$$\begin{aligned}
m_1 \left(\tilde{\cup}_{i \in I} \alpha_i \right) &= m \left(\left(\tilde{\cup}_{i \in I} \alpha_i \right) \tilde{\cap} \beta \right) \\
&= m \left(\tilde{\cup}_{i \in I} (\alpha_i \tilde{\cap} \beta) \right) \\
&= \sum_{i \in I} m(\alpha_i \tilde{\cap} \beta) \\
&= \sum_{i \in I} m_1(\alpha_i)
\end{aligned}$$

biçimindedir. Böylece, $m_1 (U, \mathcal{S})$ üzerinde bir *fpps*-ölçüdür.

Sonuç 4.14. Örnek 4.8-4.13'ten sonsuz çoklukta *fpps*-ölçü var olduğu görülür.

Önerme 4.15. (U, \mathcal{S}, m) bir *fpps*-ölçü uzayı olsun. O halde, her $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ için

- i. $m(\alpha \tilde{\setminus} \beta) \leq m(\alpha)$
- ii. $m(\alpha \tilde{\setminus} \beta) \leq m(\alpha \tilde{\cap} \beta^c)$
- iii. $m(\alpha \tilde{\setminus} \beta) + m(\beta \tilde{\setminus} \alpha) \leq m(\alpha) + m(\beta)$
- iv. $m(\alpha \tilde{\setminus} \beta) + m(\beta \tilde{\setminus} \alpha) \leq 2m(\alpha \tilde{\Delta} \beta)$
- v. $m(\alpha \tilde{\cap} \beta) \leq \frac{m(\alpha) + m(\beta)}{2} \leq m(\alpha \tilde{\cup} \beta)$
- vi. $m(\alpha) + m(\beta) - m(\alpha \tilde{\cap} \beta) \leq 2m(\alpha \tilde{\cup} \beta)$

biçimindedir.

KANIT. (U, \mathcal{S}, m) bir *fpps*-ölçü uzayı ve $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ olsun.

i. Önerme 2.33 (xii.)'den açıktır.

ii. Önerme 2.33 (xiii.)'ten açıktır

iii. Önerme 2.33 (xii.)’den $m(\alpha \tilde{\setminus} \beta) \leq m(\alpha)$ ve $m(\beta \tilde{\setminus} \alpha) \leq m(\beta)$ biçimindedir. O halde, $m(\alpha \tilde{\setminus} \beta) + m(\beta \tilde{\setminus} \alpha) \leq m(\alpha) + m(\beta)$ elde edilir.

iv. Önerme 2.33 (i. ve xxvi.)’den $m(\alpha \tilde{\setminus} \beta) \leq m(\alpha \tilde{\Delta} \beta)$ ve $m(\beta \tilde{\setminus} \alpha) \leq m(\alpha \tilde{\Delta} \beta)$ biçimindedir. Böylece, $m(\alpha \tilde{\setminus} \beta) + m(\beta \tilde{\setminus} \alpha) \leq 2m(\alpha \tilde{\Delta} \beta)$ elde edilir.

v. Önerme 2.33 (i.)’den $m(\alpha \tilde{\cap} \beta) \leq m(\alpha) \leq m(\alpha \tilde{\cup} \beta)$ ve $m(\alpha \tilde{\cap} \beta) \leq m(\beta) \leq m(\alpha \tilde{\cup} \beta)$ biçimindedir. Böylece, $m(\alpha \tilde{\cap} \beta) \leq \frac{m(\alpha) + m(\beta)}{2} \leq m(\alpha \tilde{\cup} \beta)$ elde edilir.

vi. Önerme 2.33 (i.)’den $m(\alpha) + m(\beta) \leq 2m(\alpha \tilde{\cup} \beta)$ biçimindedir. Dolayısıyla, $m(\alpha) + m(\beta) - m(\alpha \tilde{\cap} \beta) \leq 2m(\alpha \tilde{\cup} \beta)$ elde edilir.

□

Örnek 4.16. $E = \{x\}$ ve $U = \{u_1, u_2\}$ olmak üzere

$$\alpha = \left\{ \left({}^{0.7}x, \left\{ {}^{0.3}u_1, {}^{0.6}u_2 \right\} \right) \right\} \quad \text{ve} \quad \beta = \left\{ \left({}^{0.4}x, \left\{ {}^{0.8}u_1, {}^{0.2}u_2 \right\} \right) \right\}$$

fpfs-kümeleri ve Örnek 4.12’deki *fpfs*-ölçü fonksiyonu verilsin. Burada,

$$\alpha \tilde{\setminus} \beta = \left\{ \left({}^{0.3}x, \left\{ {}^{0.4}u_2 \right\} \right) \right\}$$

$$\beta \tilde{\setminus} \alpha = \left\{ \left({}^0x, \left\{ {}^{0.5}u_1 \right\} \right) \right\}$$

$$\alpha \tilde{\cup} \beta = \left\{ \left({}^{0.7}x, \left\{ {}^{0.8}u_1, {}^{0.6}u_2 \right\} \right) \right\}$$

$$\alpha \tilde{\cap} \beta = \left\{ \left({}^{0.4}x, \left\{ {}^{0.3}u_1, {}^{0.2}u_2 \right\} \right) \right\}$$

$$\alpha \tilde{\cap} \beta^c = \left\{ \left({}^{0.6}x, \left\{ {}^{0.2}u_1, {}^{0.6}u_2 \right\} \right) \right\}$$

ve

$$\alpha \tilde{\Delta} \beta = \left\{ \left({}^{0.3}x, \left\{ {}^{0.5}u_1, {}^{0.4}u_2 \right\} \right) \right\}$$

biçimindedir. O halde,

i. $m(\alpha \tilde{\setminus} \beta) = 0.7 \leq 1.6 = m(\alpha)$

ii. $m(\alpha \tilde{\setminus} \beta) = 0.7 \leq 1.4 = m(\alpha \tilde{\cap} \beta^c)$

iii. $m(\alpha \tilde{\setminus} \beta) + m(\beta \tilde{\setminus} \alpha) = 0.7 + 0.5 = 1.2 \leq 3 = 1.6 + 1.4 = m(\alpha) + m(\beta)$

$$iv. m(\alpha \tilde{\vee} \beta) + m(\beta \tilde{\vee} \alpha) = 0.7 + 0.5 = 1.2 \leq 2.4 = 2m(\alpha \tilde{\Delta} \beta)$$

$$v. m(\alpha \tilde{\cap} \beta) = 0.9 \leq 1.5 = \frac{m(\alpha) + m(\beta)}{2} \text{ ve } \frac{m(\alpha) + m(\beta)}{2} = 1.5 \leq 2.1 = m(\alpha \tilde{\cup} \beta)$$

$$vi. m(\alpha) + m(\beta) - m(\alpha \tilde{\cap} \beta) \leq 1.6 + 1.4 - 0.9 = 2.1 \leq 4.2 = 2m(\alpha \tilde{\cup} \beta)$$

sağlanır.

Tanım 4.17. (U, \mathcal{S}, m) bir *fpfs*-ölçü uzayı olsun. O halde,

i. Her $\alpha \in \mathcal{S}$ için eğer $m(\alpha) \in \mathbb{R}$ ise m 'ye bir sonlu *fpfs*-ölçü denir

ii. $\bigcup_{i \in I} \alpha_i = \tilde{1}$ olacak biçimde bir $\{\alpha_i \in \mathcal{S} \mid m(\alpha_i) \in \mathbb{R} \wedge i \in I\}$ ailesi varsa m 'ye bir s -sonlu *fpfs*-ölçü denir

iii. Eğer $m(\tilde{1}) = 1$ ise m 'ye bir *fpfs*-olasılık ölçüsü denir

Örnek 4.18. E ve U sonlu kümeler olmak üzere Örnek 4.12'de verilen *fpfs*-ölçü fonksiyonu bir sonlu *fpfs*-ölçüdür.

Örnek 4.19. $E = U = \mathbb{N}$ olmak üzere Örnek 4.12'de verilen *fpfs*-ölçü fonksiyonu göz önüne alındığında $\{(i, \{j\}) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ ailesi için $\bigcup_{i, j \in \mathbb{N}} \{(i, \{j\})\} = \tilde{1}$ biçimindedir ve her $i, j \in \mathbb{N}$ için $m(\{(i, \{j\})\}) = 2 \in \mathbb{R}$ olduğundan m bir s -sonlu *fpfs*-ölçüdür. Burada, $\{(^1 i, \{^1 j\})\}$ yerine kısalık için $\{(i, \{j\})\}$ yazıldığına dikkat edilmelidir.

Örnek 4.20. $n, m \in \mathbb{Z}^+$ için $|E| = n$ ve $|U| = m$ olmak üzere Örnek 4.12'de verilen *fpfs*-ölçü fonksiyonu göz önüne alınsın. m 'nin sonlu ölçü olduğu ve maksimum değerinin $m(\tilde{1}) = n + nm$ olduğu dikkate alındığında Sonuç 4.11'den $m_1(\alpha) = \frac{m(\alpha)}{n + nm}$ ile tanımlı $m_1 : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu bir *fpfs*-ölçüdür. Buradan, $m_1(\tilde{1}) = 1$ elde edilir. Dolayısıyla, (U, \mathcal{S}, m_1) bir *fpfs*-olasılık ölçü uzayıdır.

Tanım 4.21. (U, \mathcal{S}) bir *fpfs*-ölçülebilir uzay ve $f : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon olsun. O halde, her $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ ve $i \in I$ olmak üzere her $\alpha_i \in \mathcal{S}$ için

i. $\alpha \tilde{\cap} \beta = \tilde{0}$ iken $f(\alpha \tilde{\cup} \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ oluyorsa f 'ye toplamsaldır denir

ii. α_i $fpfs$ -ölçülebilir kümeleri karşılıklı ayrık iken $f\left(\tilde{\bigcup}_{i=1}^n \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)$ oluyorsa f 'ye sonlu toplamsaldır denir

iii. α_i $fpfs$ -ölçülebilir kümeleri karşılıklı ayrık iken $f\left(\tilde{\bigcup}_{i \in I} \alpha_i\right) = \sum_{i \in I} f(\alpha_i)$ oluyorsa f 'ye sayılabilir toplamsaldır denir

iv. $f(\beta) = 0$ iken $f(\alpha \tilde{\cup} \beta) = f(\alpha)$ oluyorsa f 'ye sıfır toplamsaldır denir

v. $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ iken $f(\alpha \tilde{\cup} \beta) = 0$ oluyorsa f 'ye zayıf-sıfır toplamsaldır denir

vi. $f(\alpha \tilde{\cup} \beta) \leq f(\alpha) + f(\beta)$ oluyorsa f 'ye alt toplamsaldır denir

vii. $f(\alpha \tilde{\cup} \beta) \geq f(\alpha) + f(\beta)$ oluyorsa f 'ye üst toplamsaldır denir

viii. $\beta \tilde{\subseteq} \alpha$ ve $f(\beta) \in \mathbb{R}$ iken $f(\alpha \tilde{\setminus} \beta) = f(\alpha) - f(\beta)$ oluyorsa f 'ye farktsaldır denir

ix. $\beta \tilde{\subseteq} \alpha$ ve $f(\beta) = 0$ iken $f(\alpha \tilde{\setminus} \beta) = f(\alpha)$ oluyorsa f 'ye sıfır farktsaldır denir

Önerme 4.22. (U, \mathcal{S}) bir $fpfs$ -ölçülebilir uzay ve $f : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon olsun. O halde, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i. f sayılabilir toplamsal ise sonlu toplamsaldır

ii. f sonlu toplamsal ise toplamsaldır

iii. f sıfır toplamsal ise zayıf sıfır toplamsaldır

iv. f alt toplamsal ve üst toplamsal ise sonlu toplamsaldır

v. f farktsal ise sıfır farktsaldır

KANIT. Tanım 4.21'den açıktır. □

Önerme 4.23. (U, \mathcal{S}) bir $fpfs$ -ölçülebilir uzay, $f_1, f_2 : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ iki fonksiyon ve $k, l \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer f_1 ve f_2 toplamsal (sırasıyla sonlu toplamsal, sayılabilir toplamsal ve farksal) ise $f = kf_1 + lf_2$ toplamsal (sırasıyla sonlu toplamsal, sayılabilir toplamsal ve farksal) dır.

KANIT. (U, \mathcal{S}) bir $fpfs$ -ölçülebilir uzay, $f_1, f_2 : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ iki fonksiyon, $k, l \in \mathbb{R}$ ve f_1 ve f_2 toplamsal olsun. Her $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ için eğer $\alpha \tilde{\cap} \beta = \tilde{0}$ ise

$$\begin{aligned} f(\alpha \tilde{\cap} \beta) &= kf_1(\alpha \tilde{\cap} \beta) + lf_2(\alpha \tilde{\cap} \beta) \\ &= k(f_1(\alpha) + f_1(\beta)) + l(f_2(\alpha) + f_2(\beta)) \\ &= kf_1(\alpha) + lf_2(\alpha) + kf_1(\beta) + lf_2(\beta) \\ &= f(\alpha) + f(\beta) \end{aligned}$$

biçimindedir. Böylece, f toplamsaldır. Diğer kanıtlar da benzer biçimdedir. \square

Önerme 4.24. (U, \mathcal{S}) bir $fpfs$ -ölçülebilir uzay, $f : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon, $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ ve $f(\beta) = 0$ olsun. Eğer f sıfır farksal ve $\beta \tilde{\subseteq} \alpha$ ise $f(\alpha \tilde{\Delta} \beta) = f(\alpha)$ biçimindedir.

KANIT. (U, \mathcal{S}) bir $fpfs$ -ölçülebilir uzay, $f : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon, $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$, $f(\beta) = 0$, f sıfır farksal ve $\beta \tilde{\subseteq} \alpha$ olsun. O halde,

$$f(\alpha \tilde{\Delta} \beta) = f\left(\left(\alpha \tilde{\setminus} \beta\right) \tilde{\cap} \left(\beta \tilde{\setminus} \alpha\right)\right) = f\left(\left(\alpha \tilde{\setminus} \beta\right) \tilde{\cap} \tilde{0}\right) = f\left(\alpha \tilde{\setminus} \beta\right) = f(\alpha)$$

biçimindedir. \square

Önerme 4.25. (U, \mathcal{S}, m) bir $fpfs$ -ölçü uzayı olsun. O halde, m sayılabilir toplamsaldır.

KANIT. Tanım 4.6 (iv.)'ten açıktır. \square

Sonuç 4.26. (U, \mathcal{S}, m) bir $fpfs$ -ölçü uzayı olsun. O halde, m sonlu toplamsal ve toplamsaldır.

Önerme 4.27. (U, \mathcal{S}, m_1) ve (U, \mathcal{S}, m_2) iki $fpfs$ -ölçü uzayı ve $k, l \in \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer m_1 ve m_2 sıfır toplamsal (sırasıyla zayıf-sıfır toplamsal ve sıfır farksal) ise $m = km_1 + lm_2$

sıfır toplamsal (sırasıyla zayıf-sıfır toplamsal ve sıfır farksal) dır.

KANIT. (U, \mathcal{S}, m_1) ve (U, \mathcal{S}, m_2) iki *fpfs*-ölçülebilir uzay, $k, l \in \mathbb{R}^+$ ve m_1 ve m_2 sıfır toplamsal olsun. Her $\beta \in \mathcal{S}$ için

$$\begin{aligned} m(\beta) = 0 &\Rightarrow km_1(\beta) + lm_2(\beta) = 0 \\ &\Rightarrow km_1(\beta) = lm_2(\beta) = 0 \\ &\Rightarrow m_1(\beta) = m_2(\beta) = 0 \end{aligned}$$

biçimindedir. Böylece, her $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ için eğer $m(\beta) = 0$ ise

$$m(\alpha \dot{\cup} \beta) = km_1(\alpha \dot{\cup} \beta) + lm_2(\alpha \dot{\cup} \beta) = km_1(\alpha) + lm_2(\alpha) = m(\alpha)$$

sağlanır. Böylece, m sıfır toplamsaldır. Diğer kanıtlar da benzer biçimdedir. \square

Tanım 4.28. (U, \mathcal{S}, m) bir *fpfs*-ölçü uzayı ve $\beta \in FPFS(U)$ olsun. Eğer $\beta \subseteq \alpha$ ve $m(\alpha) = 0$ olacak biçimde bir $\alpha \in \mathcal{S}$ varsa β 'ya (U, \mathcal{S}, m) 'de bir m -boş küme denir.

Bu çalışma boyunca, (U, \mathcal{S}, m) 'deki tüm m -boş kümelerin kümesi $\mathcal{N}(U, \mathcal{S}, m)$ ya da kısaca \mathcal{N}_m ile gösterilir.

Örnek 4.29. $(U, \mathcal{S}_{0.5}^{\sim})$ *fpfs*-ölçülebilir uzayı verilsin. O halde,

$$m(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \tilde{1} \\ 1, & \alpha = \tilde{1} \end{cases}$$

ile tanımlı $m : \mathcal{S}_{0.5}^{\sim} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $(U, \mathcal{S}_{0.5}^{\sim})$ üzerinde bir *fpfs*-ölçüdür. $\tilde{0.4} \in FPFS(U)$ için $\tilde{0.4} \subseteq \tilde{0.5}$ ve $m(\tilde{0.5}) = 0$ olduğundan $\tilde{0.4}$ bir m -boş kümedir. Açıkça $\tilde{P}(\tilde{0.5})$ kümesinin her elemanı bir m -boş kümedir. Ek olarak, $\mathcal{S}_{0.5}^{\sim}$ *fpfs*-kapsamaya göre tam sıralı olduğundan *fpfs*-ölçünün tanımı göz önüne alındığında $\beta \not\subseteq \tilde{0.5}$ şartını sağlayan bir $\beta \in FPFS(U)$, m -boş küme olamaz. Dolayısıyla, $\mathcal{N}_m = \tilde{P}(\tilde{0.5})$ elde edilir.

Önerme 4.30. (U, \mathcal{S}, m) bir *fpfs*-ölçü uzayı ve $\beta \in \mathcal{S}$ olsun. O halde, $\beta \in \mathcal{N}_m$ olması için gerek ve yeter koşul $m(\beta) = 0$ olmasıdır.

Önerme 4.31. (U, \mathcal{S}, m) bir *fpfs*-ölçü uzayı olsun. O halde, aşağıdakiler geçerlidir:

i. $\tilde{0} \in \mathcal{N}_m$

ii. Her $\alpha \in \mathcal{N}_m$ ve her $\beta \in FPFS(U)$ için $\beta \tilde{\subseteq} \alpha$ iken $\beta \in \mathcal{N}_m$ biçimindedir

Sonuç 4.32. (U, \mathcal{S}, m) bir *fpfs*-ölçü uzayı olsun. O halde, aşağıdakiler geçerlidir:

i. Her $\alpha \in \mathcal{N}_m$ ve $\beta \in FPFS(U)$ için $\alpha \tilde{\cap} \beta \in \mathcal{N}_m$ biçimindedir

ii. Her $\alpha, \beta \in \mathcal{N}_m$ için $\alpha \tilde{\cap} \beta \in \mathcal{N}_m$ biçimindedir

iii. Her $\alpha \in \mathcal{N}_m$ ve $\beta \in FPFS(U)$ için $\alpha \tilde{\setminus} \beta \in \mathcal{N}_m$ biçimindedir

iv. Her $\alpha, \beta \in \mathcal{N}_m$ için $\alpha \tilde{\setminus} \beta \in \mathcal{N}_m$ biçimindedir

Sonuç 4.33. (U, \mathcal{S}, m) bir *fpfs*-ölçü uzayı olsun. O halde, \mathcal{N}_m kalıtsaldır ve bir *fpfs*- π -sistemdir.

Tanım 4.34. (U, \mathcal{S}, m) bir *fpfs*-ölçü uzayı olsun. Eğer \mathcal{S} , tüm m -boş kümeleri içeriyorsa (U, \mathcal{S}, m) 'ye bir tam *fpfs*-ölçü uzayı denir.

Örnek 4.35. $(U, FPFS(U))$ *fpfs*-ölçülebilir uzayı verilsin. O halde,

$$m(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha \tilde{\subseteq} \tilde{0.7} \\ \infty, & \alpha \not\tilde{\subseteq} \tilde{0.7} \end{cases}$$

ile tanımlı $m : FPFS(U) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu bir *fpfs*-ölçüdür. Açıkça, $\mathcal{N}_m = \tilde{P}(\tilde{0.7})$ biçimindedir. Dolayısıyla, $\tilde{P}(\tilde{0.7}) \subseteq FPFS(U)$ olduğundan $(U, FPFS(U), m)$ bir tam *fpfs*-ölçü uzayıdır.

BEŞİNCİ BÖLÜM

BULANIK PARAMETRELİ BULANIK ESNEK DIŞ ÖLÇÜ

Bu bölümde *fpfs*-dış ölçü kavramı önerildi ve temel özellikleri verildi.

Tanım 5.1. $m^* : FPFS(U) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

i. $m^*(\tilde{0}) = 0$

ii. her $\alpha \in FPFS(U)$ için $m^*(\alpha) \geq 0$

iii. her $\alpha, \beta \in FPFS(U)$ için $\alpha \tilde{\leq} \beta$ iken $m^*(\alpha) \leq m^*(\beta)$

iv. $i \in I$ olmak üzere her $\alpha_i \in \mathcal{S}$ için $m^*\left(\bigcup_{i \in I} \alpha_i\right) \leq \sum_{i \in I} m^*(\alpha_i)$

şartları sağlanıyorsa m^* 'a U üzerinde bir *fpfs*-dış ölçü ve (U, m^*) sıralı ikilisine bir *fpfs*-dış ölçü uzayı denir.

Not 5.2. Tanım 4.6 ve Tanım 5.1'den görüleceği üzere *fpfs*-ölçü ve *fpfs*-dış ölçü kavramları birbirini gerektirmez.

Örnek 5.3.

$$m^*(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha = \tilde{0} \\ 1, & \alpha \neq \tilde{0} \end{cases}$$

ile tanımlı $m^* : FPFS(U) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu U üzerinde bir *fpfs*-dış ölçüdür ancak bir *fpfs*-ölçü değildir.

Örnek 5.4.

$$m^*(\alpha) = \sum_{x \in E} \mu(x) + \sum_{x \in E} \sum_{u \in U} \alpha\left(\mu^{(x)}x\right)(u)$$

ile tanımlı $m^* : FPFS(U) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu U üzerinde bir *fpfs*-dış ölçüdür. Burada, Tanım 5.1'deki *i.*-*iii.* şartlarının sağlandığı açıktır. *iv.* şartı kanıtlamak için $\alpha_i \in FPFS(U)$ verilsin. O halde,

$$\begin{aligned}
m^* \left(\bigcup_{i \in I} \alpha_i \right) &= \sum_{x \in E} \max_{i \in I} \{ \mu_i(x) \} + \sum_{x \in E} \sum_{u \in U} \max_{i \in I} \left\{ \alpha_i \left(\mu_i^{(x)}(u) \right) \right\} \\
&\leq \sum_{i \in I} \sum_{x \in E} \mu_i(x) + \sum_{i \in I} \left(\sum_{x \in E} \sum_{u \in U} \alpha_i \left(\mu_i^{(x)}(u) \right) \right) \\
&= \sum_{i \in I} \left(\sum_{x \in E} \mu_i(x) + \sum_{x \in E} \sum_{u \in U} \alpha_i \left(\mu_i^{(x)}(u) \right) \right) \\
&= \sum_{i \in I} m^*(\alpha_i)
\end{aligned}$$

sağlanır. Böylece, iv. şart geçerlidir.

Örnek olarak, $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ ve $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ olsun. O halde,

$$\alpha = \left\{ \left(0.5_{x_1}, \{0.3_{u_1}, 0.1_{u_2}, 0.7_{u_3}\} \right), \left(0.4_{x_2}, \{0.2_{u_1}, 0.5_{u_2}, 0.6_{u_3}\} \right), \left(0.9_{x_3}, \{0.8_{u_1}, 0.1_{u_2}, 0.3_{u_3}\} \right) \right\}$$

kümesinin *fpfs*-dış ölçüsü

$$\begin{aligned}
m^*(\alpha) &= (0.5 + 0.4 + 0.9) + ((0.3 + 0.1 + 0.7) + (0.2 + 0.5 + 0.6) + (0.8 + 0.1 + 0.3)) \\
&= 1.8 + 3.6 \\
&= 5.4
\end{aligned}$$

biçimindedir.

Örnek 5.5.

$$m^*(\alpha) = \max_{x \in E} \{ \mu(x) \} + \sum_{x \in E} \sum_{u \in U} \alpha \left(\mu^{(x)}(u) \right)$$

ile tanımlı $m^* : FPF S(U) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu U üzerinde bir *fpfs*-dış ölçüdür. Örnek 5.4'te verilen α için

$$\begin{aligned}
m^*(\alpha) &= \max \{ 0.5, 0.4, 0.9 \} + ((0.3 + 0.1 + 0.7) + (0.2 + 0.5 + 0.6) + (0.8 + 0.1 + 0.3)) \\
&= 0.9 + 3.6 \\
&= 4.5
\end{aligned}$$

biçimindedir.

Örnek 5.6.

$$m^*(\alpha) = \sum_{x \in E} \sum_{u \in U} \alpha \left(\mu^{(x)}_x \right) (u)$$

ile tanımlı $m^* : FPFS(U) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu U üzerinde bir $fpfs$ -dış ölçüdür. Örnek 5.4'te verilen α için

$$\begin{aligned} m^*(\alpha) &= (0.3 + 0.1 + 0.7) + (0.2 + 0.5 + 0.6) + (0.8 + 0.1 + 0.3) \\ &= 3.6 \end{aligned}$$

biçimindedir.

Önerme 5.7. (U, m^*) bir $fpfs$ -dış ölçü uzayı olsun. O halde, m^* sıfır toplamsal, zayıf-sıfır toplamsal ve alt toplamsaldır.

KANIT. (U, m^*) bir $fpfs$ -dış ölçü uzayı ve $m^*(\beta) = 0$ olmak üzere $\alpha, \beta \in FPFS(U)$ olsun. O halde,

$$m^*(\alpha \tilde{\cup} \beta) \leq m^*(\alpha) + m^*(\beta) = m^*(\alpha)$$

biçimindedir. Ayrıca $\beta \tilde{\subseteq} \alpha \tilde{\cup} \beta$ olduğundan

$$m^*(\alpha) \leq m^*(\alpha \tilde{\cup} \beta)$$

elde edilir. Böylece, $m^*(\alpha \tilde{\cup} \beta) = m^*(\alpha)$ biçimindedir. Buradan, m^* sıfır toplamsaldır ve dolayısıyla Önerme 4.22 (iii)'ten zayıf sıfır toplamsaldır. Ayrıca Tanım 5.1 (iv)'ten alt toplamsal olduğu görülür. \square

Not 5.8. Önerme 4.15'teki eşitsizlikler $fpfs$ -dış ölçü için de geçerlidir.

Tanım 5.9. (U, m^*) bir $fpfs$ -dış ölçü uzayı ve $\alpha \in FPFS(U)$ olsun. Her $\beta \in FPFS(U)$ için

$$m^*(\beta) = m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha) + m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha^c)$$

oluyorsa α 'ya m^* $fpfs$ -dış ölçüsüne göre ölçülebilirdir (ya da kısaca m^* - $fpfs$ ölçülebilirdir) denir.

Örnek 5.10. Örnek 5.4'te verilen $fpfs$ -dış ölçü uzayı ve $\alpha \tilde{\cup} \alpha^c = \tilde{I}$ şartını sağlayan bir

$\alpha \in FPFS(U)$ verilsin. O halde, α m^* -*fdfs* ölçülebilirdir. Gerçekten, $\alpha \tilde{\cup} \alpha^c = \tilde{I}$ olduğundan her $x \in E$ ve her $u \in U$ için

$$\max\{\mu(x), 1 - \mu(x)\} = 1$$

ve

$$\max\left\{\alpha\left(\mu^{(x)}_x\right)(u), 1 - \alpha\left(\mu^{(x)}_x\right)(u)\right\} = 1$$

biçimindedir. Buradan, her $x \in E$ ve her $u \in U$ için

$$\mu(x) = 1 \vee \mu(x) = 0$$

ve

$$\alpha\left(\mu^{(x)}_x\right)(u) = 1 \vee \alpha\left(\mu^{(x)}_x\right)(u) = 0$$

elde edilir. $\beta \in FPFS(U)$ olsun. O halde, her $x \in E$ ve her $u \in U$ için

$$\rho_1(x) = \min\{v(x), \mu(x)\} = \begin{cases} v(x), & \mu(x) = 1 \\ 0, & \mu(x) = 0 \end{cases}$$

ve

$$\gamma_1\left(\rho_1^{(x)}_x\right)(u) = \min\left\{\beta\left(v^{(x)}_x\right)(u), \alpha\left(\mu^{(x)}_x\right)(u)\right\} = \begin{cases} \beta\left(v^{(x)}_x\right)(u), & \alpha\left(\mu^{(x)}_x\right)(u) = 1 \\ 0, & \alpha\left(\mu^{(x)}_x\right)(u) = 0 \end{cases}$$

ve

$$\rho_2(x) = \min\{v(x), 1 - \mu(x)\} = \begin{cases} 0, & \mu(x) = 1 \\ v(x), & \mu(x) = 0 \end{cases}$$

ve

$$\gamma_2\left(\rho_2^{(x)}_x\right)(u) = \min\left\{\beta\left(v^{(x)}_x\right)(u), 1 - \alpha\left(\mu^{(x)}_x\right)(u)\right\} = \begin{cases} 0, & \alpha\left(\mu^{(x)}_x\right)(u) = 1 \\ \beta\left(v^{(x)}_x\right)(u), & \alpha\left(\mu^{(x)}_x\right)(u) = 0 \end{cases}$$

biçimindedir. Buradan, her $x \in E$ ve her $u \in U$ için

$$\rho_1(x) + \rho_2(x) = \begin{cases} v(x), & \mu(x) = 1 \\ 0, & \mu(x) = 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & \mu(x) = 1 \\ v(x), & \mu(x) = 0 \end{cases} = \begin{cases} v(x), & \mu(x) = 1 \\ v(x), & \mu(x) = 0 \end{cases} = v(x)$$

ve

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \left(\rho_1^{(x)} \right) (u) + \gamma_2 \left(\rho_2^{(x)} \right) (u) &= \begin{cases} \beta \left(v^{(x)} \right) (u), & \alpha \left(\mu^{(x)} \right) (u) = 1 \\ 0, & \alpha \left(\mu^{(x)} \right) (u) = 0 \end{cases} \\
&+ \begin{cases} 0, & \alpha \left(\mu^{(x)} \right) (u) = 1 \\ \beta \left(v^{(x)} \right) (u), & \alpha \left(\mu^{(x)} \right) (u) = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \beta \left(v^{(x)} \right) (u), & \alpha \left(\mu^{(x)} \right) (u) = 1 \\ \beta \left(v^{(x)} \right) (u), & \alpha \left(\mu^{(x)} \right) (u) = 0 \end{cases} \\
&= \beta \left(v^{(x)} \right) (u)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha) + m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha^c) &= \sum_{x \in E} \rho_1(x) + \sum_{x \in E} \sum_{u \in U} \gamma_1 \left(\rho_1^{(x)} \right) (u) + \sum_{x \in E} \rho_2(x) + \sum_{x \in E} \sum_{u \in U} \gamma_2 \left(\rho_2^{(x)} \right) (u) \\
&= \sum_{x \in E} (\rho_1(x) + \rho_2(x)) + \sum_{x \in E} \sum_{u \in U} (\gamma_1 \left(\rho_1^{(x)} \right) (u) + \gamma_2 \left(\rho_2^{(x)} \right) (u)) \\
&= \sum_{x \in E} v(x) + \sum_{x \in E} \sum_{u \in U} \beta \left(v^{(x)} \right) (u) \\
&= m^*(\beta)
\end{aligned}$$

biçimindedir. Örneğin, $E = \{x_1, x_2\}$ ve $U = \{u_1, u_2\}$ olmak üzere

$$\alpha = \left\{ (x_1, \{u_1\}), ({}^0x_2, \{u_1, u_2\}) \right\} \in FPFS(U)$$

ve

$$\beta = \left\{ \left(v^{(x_1)} \right)_{x_1}, \left\{ \beta^{(v^{(x_1)}x_1)}(u_1) u_1, \beta^{(v^{(x_1)}x_1)}(u_2) u_2 \right\} \right\}, \left(v^{(x_2)} \right)_{x_2}, \left\{ \beta^{(v^{(x_2)}x_2)}(u_1) u_1, \beta^{(v^{(x_2)}x_2)}(u_2) u_2 \right\} \right\} \in FPFS(U)$$

için

$$\beta \tilde{\cap} \alpha = \left\{ \left(v^{(x_1)} \right)_{x_1}, \left\{ \beta^{(v^{(x_1)}x_1)}(u_1) u_1 \right\} \right\}, \left({}^0x_2, \left\{ \beta^{(v^{(x_2)}x_2)}(u_1) u_1, \beta^{(v^{(x_2)}x_2)}(u_2) u_2 \right\} \right) \right\}$$

ve

$$\beta \tilde{\cap} \alpha^c = \left\{ \left({}^0x_1, \left\{ \beta^{(v^{(x_1)}x_1)}(u_2) u_2 \right\} \right) \right\}, \left(v^{(x_2)} \right)_{x_2}, \mathbf{0}_U \right\}$$

olduğundan

$$m^*(\beta \tilde{\alpha}) = v(x_1) + \beta \left(v^{(x_1)} x_1 \right) (u_1) + \beta \left(v^{(x_2)} x_2 \right) (u_1) + \beta \left(v^{(x_2)} x_2 \right) (u_2)$$

ve

$$m^*(\beta \tilde{\alpha}^c) = v(x_2) + \beta \left(v^{(x_1)} x_1 \right) (u_2)$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} m^*(\beta \tilde{\alpha}) + m^*(\beta \tilde{\alpha}^c) &= v(x_1) + v(x_2) + \beta \left(v^{(x_1)} x_1 \right) (u_1) + \beta \left(v^{(x_1)} x_1 \right) (u_2) \\ &\quad + \beta \left(v^{(x_2)} x_2 \right) (u_1) + \beta \left(v^{(x_2)} x_2 \right) (u_2) \\ &= m^*(\beta) \end{aligned}$$

biçimindedir. Dolayısıyla, α bir m^* -*fpfs*-ölçülebilir kümedir.

Önerme 5.11. (U, m^*) bir *fpfs*-dış ölçü uzayı olsun. O halde, $\tilde{0}$ m^* -*fpfs*-ölçülebilirdir.

KANIT. (U, m^*) bir *fpfs*-dış ölçü uzayı olsun. O halde, her $\beta \in FPFS(U)$ için

$$m^*(\beta \tilde{0}) + m^*(\beta \tilde{0}^c) = m^*(\tilde{0}) + m^*(\beta \tilde{1}) = 0 + m^*(\beta) = m^*(\beta)$$

biçimindedir. Böylece, $\tilde{0}$ m^* -*fpfs*-ölçülebilirdir. □

Sonuç 5.12. (U, m^*) bir *fpfs*-dış ölçü uzayı ve $\alpha, \beta \in FPFS(U)$ olsun. Eğer $\alpha \tilde{\subseteq} \beta$ ise $\alpha \tilde{\setminus} \beta$, m^* -*fpfs*-ölçülebilirdir.

Teorem 5.13. (U, m^*) bir *fpfs*-dış ölçü uzayı ve $\alpha \in FPFS(U)$ olsun. Eğer α , m^* -*fpfs* ölçülebilir ise α^c , m^* -*fpfs*-ölçülebilirdir.

KANIT. (U, m^*) bir *fpfs*-dış ölçü uzayı, $\alpha \in FPFS(U)$ ve α , m^* -*fpfs*-ölçülebilir olsun. O halde, her $\beta \in FPFS(U)$ için

$$m^*(\beta) = m^*(\beta \tilde{\alpha}) + m^*(\beta \tilde{\alpha}^c) = m^*(\beta \tilde{\alpha}^c) + m^*(\beta \tilde{\alpha}) = m^*(\beta \tilde{\alpha}^c) + m^*(\beta \tilde{(\alpha^c)^c})$$

biçimindedir. Böylece, α^c m^* -*fpfs*-ölçülebilirdir. □

Sonuç 5.14. (U, m^*) bir *fpfs*-dış ölçü uzayı olsun. O halde, \tilde{I} m^* -*fpfs*-ölçülebilirdir.

Not 5.15. (U, m^*) bir *fpfs*-dış ölçü uzayı ve $\alpha \tilde{\cup} \alpha^{\tilde{c}} = \tilde{I}$ olmak üzere $\alpha \in FPFS(U)$ olsun. Her $\beta \in FPFS(U)$ için

$$m^*(\beta) = m^*(\beta \tilde{\cap} \tilde{I}) = m^*(\beta \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\cup} \alpha^{\tilde{c}})) = m^*((\beta \tilde{\cap} \alpha) \tilde{\cup} (\beta \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}})) \leq m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha) + m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}})$$

olduğundan Tanım 5.9'daki eşitliği kanıtlamak için

$$m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha) + m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) \leq m^*(\beta)$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterlidir.

Teorem 5.16. (U, m^*) bir *fpfs*-dış ölçü uzayı olsun ve $\alpha \tilde{\cup} \alpha^{\tilde{c}} = \tilde{I}$ olacak biçimde bir $\alpha \in FPFS(U)$ verilsin. Eğer $m^*(\alpha) = 0$ veya $m^*(\alpha^{\tilde{c}}) = 0$ ise α , m^* -*fpfs*-ölçülebilirdir.

KANIT. (U, m^*) bir *fpfs*-dış ölçü uzayı ve $\alpha \tilde{\cup} \alpha^{\tilde{c}} = \tilde{I}$ olmak üzere $\alpha \in FPFS(U)$ ve $m^*(\alpha) = 0$ veya $m^*(\alpha^{\tilde{c}}) = 0$ olsun. Eğer $m^*(\alpha) = 0$ ise her $\beta \in FPFS(U)$ için $\beta \tilde{\cap} \alpha \tilde{\subseteq} \alpha$ ve $\beta \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}} \tilde{\subseteq} \beta$ olduğundan $m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha) \leq m^*(\alpha)$ ve $m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) \leq m^*(\beta)$ biçimindedir. Böylece,

$$m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha) + m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) \leq m^*(\alpha) + m^*(\beta) = m^*(\beta)$$

elde edilir. Not 5.15'ten

$$m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha) + m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) = m^*(\beta)$$

biçimindedir. O halde, α , m^* -*fpfs*-ölçülebilirdir. Diğer şart için de kanıt benzer biçimdedir. \square

Teorem 5.17. (U, m^*) bir *fpfs*-dış ölçü uzayı ve $\alpha \in FPFS(U)$ olsun. Eğer α , m^* -*fpfs*-ölçülebilirse $m^*(\alpha \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) = 0$ ve $m^*(\alpha \tilde{\cup} \alpha^{\tilde{c}}) = m^*(\tilde{I})$ biçimindedir.

KANIT. (U, m^*) bir *fpfs*-dış ölçü uzayı, $\alpha \in FPFS(U)$ ve α , m^* -*fpfs*-ölçülebilir olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
m^*(\alpha \tilde{\cap} \alpha^c) &= m^*(\alpha \tilde{\cap} \alpha^c \tilde{\cap} \alpha) + m^*(\alpha \tilde{\cap} \alpha^c \tilde{\cap} \alpha^c) \\
&= m^*(\alpha \tilde{\cap} \alpha^c) + m^*(\alpha \tilde{\cap} \alpha^c) \\
&= 2m^*(\alpha \tilde{\cap} \alpha^c)
\end{aligned}$$

biçimindedir. Buradan, $m^*(\alpha \tilde{\cap} \alpha^c) = 0$ elde edilir. Benzer biçimde,

$$\begin{aligned}
m^*(\alpha \tilde{\cup} \alpha^c) &= m^*((\alpha \tilde{\cup} \alpha^c) \tilde{\cap} \alpha) + m^*((\alpha \tilde{\cup} \alpha^c) \tilde{\cap} \alpha^c) \\
&= m^*(\alpha) + m^*(\alpha^c) \\
&= m^*(\tilde{1} \tilde{\cap} \alpha) + m^*(\tilde{1} \tilde{\cap} \alpha^c) \\
&= m^*(\tilde{1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $m^*(\alpha \tilde{\cup} \alpha^c) = m^*(\tilde{1})$ biçimindedir. \square

Teorem 5.18. (U, m^*) bir $fpfs$ -dış ölçü uzayı olsun ve $m^*(\alpha \tilde{\cap} \alpha^c) = 0$ ve $m^*(\alpha \tilde{\cup} \alpha^c) = m^*(\tilde{1})$ olacak biçimde bir $\alpha \in FPFS(U)$ verilsin. Eğer her $\beta, \gamma \in FPFS(U)$ için $m^*(\beta) + m^*(\gamma) = m^*(\beta \tilde{\cap} \gamma) + m^*(\beta \tilde{\cup} \gamma)$ oluyorsa α , m^* - $fpfs$ -ölçülebilirdir.

KANIT. (U, m^*) bir $fpfs$ -dış ölçü uzayı olsun, $m^*(\alpha \tilde{\cap} \alpha^c) = 0$ ve $m^*(\alpha \tilde{\cup} \alpha^c) = m^*(\tilde{1})$ olacak biçimde bir $\alpha \in FPFS(U)$ verilsin ve her $\beta, \gamma \in FPFS(U)$ için $m^*(\beta) + m^*(\gamma) = m^*(\beta \tilde{\cap} \gamma) + m^*(\beta \tilde{\cup} \gamma)$ olsun. Böylece, her $\beta \in FPFS(U)$ için

$$\begin{aligned}
m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha) + m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha^c) &= m^*((\beta \tilde{\cap} \alpha) \tilde{\cap} (\beta \tilde{\cap} \alpha^c)) + m^*((\beta \tilde{\cap} \alpha) \tilde{\cup} (\beta \tilde{\cap} \alpha^c)) \\
&= m^*(\beta \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\cap} \alpha^c)) + m^*(\beta \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\cup} \alpha^c))
\end{aligned} \tag{5.1}$$

elde edilir. Burada,

$$m^*(\beta \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\cap} \alpha^c)) \leq m^*(\alpha \tilde{\cap} \alpha^c) = 0$$

ve

$$m^*(\tilde{1}) = m^*(\alpha \tilde{\cup} \alpha^c) \leq m^*(\beta \tilde{\cup} (\alpha \tilde{\cup} \alpha^c)) \leq m^*(\tilde{1})$$

olduğundan $m^*(\beta \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\cap} \alpha^c)) = 0$ ve $m^*(\beta \tilde{\cup} (\alpha \tilde{\cup} \alpha^c)) = m^*(\tilde{1})$ biçimindedir. Ayrıca hipotezden

$$m^*(\beta) + m^*(\alpha \tilde{\cup} \alpha^c) = m^*(\beta \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\cup} \alpha^c)) + m^*(\beta \tilde{\cup} (\alpha \tilde{\cup} \alpha^c))$$

olduğundan

$$m^*(\beta) + m^*(\tilde{1}) = m^*(\beta \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\cup} \alpha^{\tilde{c}})) + m^*(\tilde{1})$$

biçimindedir. Buradan,

$$m^*(\beta) = m^*(\beta \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\cup} \alpha^{\tilde{c}}))$$

elde edilir. Böylece, her $\beta \in FPFs(U)$ için Denklem 5.1'den

$$m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha) + m^*(\beta \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) = m^*(\beta)$$

sağlanır. Dolayısıyla, α m^* - $fpfs$ -ölçülebilirdir. □

Teorem 5.19. (U, m^*) bir $fpfs$ -dış ölçü uzayı olsun ve $\alpha, \beta \in FPFs(U)$ verilsin. Eğer α ve β m^* - $fpfs$ -ölçülebilir ise $\alpha \tilde{\cap} \beta$ m^* - $fpfs$ -ölçülebilirdir.

KANIT. (U, m^*) bir $fpfs$ -dış ölçü uzayı olsun ve m^* - $fpfs$ -ölçülebilir olacak biçimde $\alpha, \beta \in FPFs(U)$ verilsin. O halde, her $\gamma \in FPFs(U)$ için

$$m^*(\gamma) = m^*(\gamma \tilde{\cap} \alpha) + m^*(\gamma \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) = m^*(\gamma \tilde{\cap} \alpha \tilde{\cap} \beta) + m^*(\gamma \tilde{\cap} \alpha \tilde{\cap} \beta^{\tilde{c}}) + m^*(\gamma \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}})$$

biçimindedir. Buradan,

$$m^*(\gamma \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\cap} \beta)) = m^*(\gamma) - m^*(\gamma \tilde{\cap} \alpha \tilde{\cap} \beta^{\tilde{c}}) - m^*(\gamma \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) \quad (5.2)$$

elde edilir. Ayrıca α , m^* - $fpfs$ -ölçülebilir olduğundan

$$\begin{aligned} m^*(\gamma \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\cap} \beta)^{\tilde{c}}) &= m^*((\gamma \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) \tilde{\cup} (\gamma \tilde{\cap} \beta^{\tilde{c}})) \\ &= m^*(\tilde{\cap} (\gamma \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) \tilde{\cup} (\gamma \tilde{\cap} \beta^{\tilde{c}})) + m^*(\tilde{\cap} (\gamma \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) \tilde{\cup} (\gamma \tilde{\cap} \beta^{\tilde{c}})) \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) \\ &= m^*(\tilde{\cap} (\gamma \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) \tilde{\cap} \alpha) \tilde{\cup} (\gamma \tilde{\cap} \beta^{\tilde{c}}) \tilde{\cap} \alpha) + m^*(\tilde{\cap} (\gamma \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) \tilde{\cup} (\gamma \tilde{\cap} \beta^{\tilde{c}}) \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}})) \end{aligned}$$

biçimindedir. Önerme 2.33 (i.), Tanım 5.1 (iii.) ve Önerme 5.17'den

$$m^*(\gamma \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}})) \leq m^*(\alpha \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) = 0$$

biçimindedir. m^* sıfır toplamsal olduğundan ve Önerme 2.33 (i.)’den

$$m^*(\gamma \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\cap} \beta)^{\tilde{c}}) = m^*(\gamma \tilde{\cap} \beta^{\tilde{c}} \tilde{\cap} \alpha) + m^*(\gamma \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) \quad (5.3)$$

elde edilir. O halde, Denklem 5.2 ve 5.3’ten

$$\begin{aligned} m^*(\gamma \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\cap} \beta)) + m^*(\gamma \tilde{\cap} (\alpha \tilde{\cap} \beta)^{\tilde{c}}) &= m^*(\gamma) - m^*(\gamma \tilde{\cap} \alpha \tilde{\cap} \beta^{\tilde{c}}) - m^*(\gamma \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) \\ &\quad + m^*(\gamma \tilde{\cap} \beta^{\tilde{c}} \tilde{\cap} \alpha) + m^*(\gamma \tilde{\cap} \alpha^{\tilde{c}}) \\ &= m^*(\gamma) \end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla, $\alpha \tilde{\cap} \beta$, m^* -*f*pf s -ölçülebilirdir. □

Sonuç 5.20. (U, m^*) bir *f*pf s -dış ölçü uzayı olsun ve $\alpha, \beta \in FPFS(U)$ verilsin. Eğer α ve β m^* -*f*pf s -ölçülebilir ise $\alpha \tilde{\cup} \beta$, m^* -*f*pf s -ölçülebilirdir.

KANIT. Önerme 2.32 (xvii.) ve Teorem 5.13 ve 5.19’dan açıktır. □

ALTINCI BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın ilk bölümünde $fpfs$ -halka, $fpfs$ - σ -halka, $fpfs$ -cebiri, $fpfs$ - σ -cebiri, $fpfs$ - π -sistem ve $fpfs$ - λ -sistem kavramları tanımlandı. Ardından, $fpfs$ -ölçü kavramına olanak sağlayan $fpfs$ - s -cebiri kavramı ortaya atıldı. Ayrıca bir $fpfs$ -halka üzerinde $fpfs$ -ön ölçü tanımlandı. Daha sonra, $fpfs$ - s -cebiri temelli $fpfs$ -ölçü kavramı önerildi ve bazı temel özellikleri incelenerek örneklendirildi. Ek olarak, m -boş küme kavramı ve bu kavram yoluyla tam $fpfs$ -ölçü uzayı tanımlandı. Çalışmanın sonraki bölümünde, $fpfs$ -dış ölçü kavramı önerildi ve bazı temel özellikleri incelendi. Son olarak, m^* - $fpfs$ ölçülebilir küme kavramı tanımlandı ve temel özellikleri incelenerek örneklendirildi.

Bu çalışma, bulanık ve esnek kümelerin hibrit veya daha genel versiyonları aracılığıyla ölçü kavramını çalışacak araştırmacılar için bir kaynak niteliğindedir. Buradaki kavramlardan yararlanarak $fpfs$ -ölçülebilir fonksiyon kavramı ve buna bağlı olarak bir klasik kümenin veya $fpfs$ -kümenin $fpfs$ -integrali çalışılabilir. Ayrıca $fpfs$ reel sayılarla $fpfs$ - s -cebiri inşa etme, Carathéodory genişleme teoremi ve $fpfs$ -ölçüye göre yakınsaklık gibi konular da çalışmaya değerlidir. Üstelik, sezgisel bulanık kümeler, aralık değerli bulanık kümeler, aralık değerli sezgisel bulanık kümeler ve esnek kümelerin hibrit versiyonları aracılığıyla bu çalışmadaki kavramlar genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- Aktaş, H. ve Çağman, N. (2007). “Soft sets and soft groups”. *Information Sciences*, 177 (13), 2726–2735. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2006.12.008>
- Al-Mayahi, N. F. ve Hamzah, K. S. (2017). “On fuzzy measure on fuzzy sets”. *Journal of AL-Qadisiyah for Computer Science and Mathematics*, 9 (2), 7–12.
- Çağman, N., Çıtak, F. ve Enginoğlu, S. (2010). “Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications”. *Turkish Journal of Fuzzy Systems*, 1 (1), 21–35.
- Çağman, N., Çıtak, F. ve Enginoğlu, S., (2011). “FP-soft set theory and its applications”. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2 (2) 219–226.
- Çağman, N. ve Enginoğlu, S. (2010). “Soft set theory and uni–int decision making”. *European Journal of Operational Research*, 207 (2), 848–855. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.05.004>
- Çağman, N., Enginoğlu, S. ve Çıtak, F. (2011). “Fuzzy soft set theory and its applications”. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 8 (3), 137–147. <https://doi.org/10.22111/ijfs.2011.292>
- Çağman, N., Karataş, S. ve Enginoğlu, S. (2011). “Soft topology”. *Computers & Mathematics with Applications*, 62 (1), 351—358. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.05.016>
- Enginoğlu, S. (2012). Soft Matrices. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Tokat.
- Enginoğlu, S., Ay, M., Çağman, N. ve Tolun, V. (2019a). “Classification of the monolithic columns produced in Troad and Mysia Region ancient granite quarries in Northwestern Anatolia via soft decision-making”. *Bilge International Journal of Science and Technology Research*, 3 (Special Issue), 21–34. <https://doi.org/10.30516/bilgesci.646126>
- Enginoğlu, S., Aydın, T., Memiş, S. ve Arslan B. (2021). “Operability-oriented configurations of the soft decision-making methods proposed between 2013 and 2016 and their comparisons”, *Journal of New Theory*, (34) (2021), 82–114.

- Enginoğlu, S., Aydın, T., Memiş, S. ve Arslan B. (2021). “SDM methods’ configurations (2017-2019) and their application to a performance-based value assignment problem: A follow up study”. *Annals of Optimization Theory and Practice*, 4 (1), 41–85. <https://doi.org/10.22121/aotp.2021.287404.1069>
- Enginoğlu, S. ve ağman, N. (2020). “Fuzzy parameterized fuzzy soft matrices and their a application in decision-making”. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 10 (4), 1105–1115.
- Enginoğlu, S. ve Memiş, S. (2018a). “A configuration of some soft decision-making algorithms via fdfs-matrices”. *Cumhuriyet Science Journal*, 39 (4), 871–881. <https://doi.org/10.17776/csj.409915>
- Enginoğlu, S. ve Memiş, S. (2018b). “Comment on “Fuzzy soft sets” [The Journal of Fuzzy Mathematics 9(3), 2001, 14 589-602]”. *International Journal of Latest Engineering Research and Applications*, 3 (9), 1–9.
- Enginoğlu, S. ve Memiş, S. (2020). “A new approach to the criteria-weighted fuzzy soft max-min decision-making method and its application to a performance-based value assignment problem”. *Journal of New Results in Science*, 9 (1), 19–36.
- Enginoğlu, S., Memiş, S. ve Arslan, B., (2018a). “Comment (2) on soft set theory and uni-int decision-making [European Journal of Operational Research, (2010) 207, 848-855]”. *Journal of New Theory*, (25), 84–102.
- Enginoğlu, S., Memiş, S. ve ağman, N. (2019b). “A generalisation of fuzzy soft max-min decision-making method and its application to a performance-based value assignment in image denoising”. *El-Cezeri Journal of Science and Engineering*, 6 (3), 466–481. <https://doi.org/10.31202/ecjse.551487>
- Enginoğlu, S., Memiş, S. ve Karaaslan, F. (2019c). “A new approach to group decision-making method based on TOPSIS under fuzzy soft environment”. *Journal of New Results in Science*, 8 (2), 42–52.
- Enginoğlu, S., Memiş, S. ve ngel, T. (2018b). “Comment on soft set theory and uni-int decision-making [E European Journal of Operational Research, (2010) 207, 848-855]”. *Journal of New Results in Science*, 7 (3) 28–43.

- Enginoğlu, S. ve Öngel, T. (2020). “Configurations of several soft decision-making methods to operate in fuzzy parameterized fuzzy soft matrices space”. *Eskişehir Technical University Journal of Science and Technology A-Applied Sciences and Engineering*, 21 (1), 58–71. <https://doi.org/10.18038/estubtda.562578>
- Feng, F., Jun, Y. B. ve Zhao, X. (2008). “Soft semirings”. *Computers & Mathematics with Applications*, 56 (10), 2621–2628. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.05.011>
- Goldar, S. ve Ray, S. (2022). “On soft Lebesgue measure”. *Journal of Uncertain Systems*, 16 (03) 2350005. <http://dx.doi.org/10.20944/preprints202010.0374.v1>
- Gut, A. (2013). Probability: A araduate course second edition. George Casella, Stephen Fienberg ve Ingram Olkin (eds). New York: Springer.
- Halmos, P. R. (1974). Measure theory. Paul Halmos ve C. C. Moore (eds). New York: Springer.
- Khameneh, A. Z. ve Kılıçman, A. (2013). “On soft σ -algebras”. *Malaysian Journal of Mathematical Science*, 7 (1), 17–29.
- Klement, E. P. (1980). “Fuzzy σ -algebras and fuzzy measurable functions”. *Fuzzy Sets and Systems*, 4, 83–93.
- Maji, P. K., Biswas, R. ve Roy, A. R. (2001). “Fuzzy soft sets”. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 9 (3), 589–602.
- Majumdar, P. ve Samanta, S. K. (2008). “Similarity measure of soft sets”. *New Mathematics and Natural Computation* 4 (1), 1–12. <https://doi.org/10.1142/S1793005708000908>
- Memiş, S., Enginoğlu, S. ve Erkan, U. (2019). “A data classification method in machine learning based on normalised Hamming pseudo-similarity of fuzzy parameterized fuzzy soft matrices”. *Bilge International Journal of Science and Technology Research*, 3 (Special Issue), 1–8. <https://doi.org/10.30516/bilgesci.643821>
- Memiş, S., Enginoğlu, S. ve Erkan, U. (2021). “Numerical data classification via distance-based similarity measures of fuzzy parameterized fuzzy soft matrices”. *IEEE Access*, 9, 88583–88601. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3089849>
- Memiş, S., Enginoğlu, S. ve Erkan, U. (2022a). “A classification method in machine learning

based on soft decision-making via fuzzy parameterized fuzzy soft matrices”. *Soft Computing*, 26, 1165–1180. <https://doi.org/10.1007/s00500-021-06553-z>

Memiş, S., Enginoğlu, S. ve Erkan, U. (2022b). “A new classification method using soft decision-making based on an aggregation operator of fuzzy parameterized fuzzy soft matrices”. *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*, 30, 871–890. <https://doi.org/10.55730/1300-0632.3816>

Memiş, S., Enginoğlu, S. ve Erkan, U. (2022c). “Fuzzy parameterized fuzzy soft k -nearest neighbor classifier”. *Neurocomputing*, 500, 351–378. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2022.05.041>

Measiar, R. ve Piasecki, K. (1993). “Caratheodory’s measurability of fuzzy events”. *Busefal*, 56, 1–6.

Molodtsov, D. A. (1999). “Soft set theory – First results”. *Computers & Mathematics with Applications*, 37 (4–5), 19–31. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(99\)00056-5](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(99)00056-5)

Mukherjee, A., Saha, A. ve Das, A. K. (2015). “Measurable soft sets”. *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics*, 8 (4), 11–24. <http://dx.doi.org/10.12816/0023170>

Parmaksız, Z. P., Arslan, B., Memiş, S. ve Enginoğlu, S. (2022). “Diagnosing COVID-19, prioritizing treatment, and planning vaccination priority via fuzzy parameterized fuzzy soft matrices”. *Journal of New Theory*, (39), 54–83. <https://doi.org/10.53570/jnt.1128289>

Ralescu, D. ve Adams, G. (1980). “The fuzzy integral”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 75, 562–570. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(80\)90101-8](https://doi.org/10.1016/0022-247X(80)90101-8)

Rao, R. P. ve Srinivasa Kumar, V. (2018). “On the outer measure of soft sets”. *IJRAR-International Journal of Research and Analytical Reviews*, 5 (2), 1120–1124.

Riaz, M., Naeem, K. ve Ahmad, M. K. O. (2017). “Novel concepts of soft sets with applications”. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 12 (2), 239–251. <http://dx.doi.org/10.30948/afmi.2017.13.2.239>

Royden, H. L. ve Fitzpatrick, P. M. (2018). Real analysis fourth edition. Deirdre Lynch (ed). New York: Pearson.

- Shabir, M. ve Naz, M. (2011). “On soft topological spaces”. *Computers & Mathematics with Applications*, 61 (7), 1786–1799. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.02.006>
- Sugeno, M. (1974). *Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Tokyo Institute of Technology, Tokyo.
- Sun, Q. M., Zhang, Z. L. ve Liu, J. (2008). “Soft sets and soft modules”. *Rough Sets and Knowledge Technology, Lecture Notes in Computer Science*, 5009. May 17-19, Chengdu. 403–409.
- Ulucay, V., Sahin, M., Olgun, N., Oztekin, O. ve Emniyet, A. (2016). “Generalized fuzzy σ -algebra and generalized fuzzy measure on soft sets”. *Indian Journal of Science and Technology*, 9 (4), 1–7.
- Zadeh, L. A. (1965). “Fuzzy sets”. *Information and Control*, 8 (3), 338–353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)