

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN BAZI q -DENKLEM SİSTEMLERİNİN
ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ

Nihan TURAN

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

TEMMUZ 2024

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN BAZI q -DENKLEM SİSTEMLERİNİN
ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ

Nihan TURAN

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin BAŞARIR

TEMMUZ 2024

Nihan Turan tarafından hazırlanan “Lineer Olmayan Bazı q - Denklem Sistemlerinin Çözümleri ” adlı tez çalışması 05.07.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı **Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi** Bilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı : Prof. Dr. Metin BAŞARIR (Danışman)
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyesi : Prof Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Aynur ŞAHİN
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Fuat USTA
Düzce Üniversitesi



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “LİNEER OLMAYAN BAZI q -DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, etik kurul onay belgesi aldığımı, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

31/05/2024

(imza)

Nihan Turan





Aileme ve üzerimde emeği olan tüm hocalarıma...



TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim süresince tecrübe ve bilgilerinden faydalandığım çok değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Metin Başarır'a ve ihtiyaç duyduğumda bana vaktini esirgemeyerek her türlü konuda fikirleriyle yol gösteren hocam sayın Doç. Dr. Aynur Şahin'e yardım ve desteklerinden dolayı en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Ayrıca bugünlere kadar gelmeme vesile olan ve üzerimde emeği olan tüm hocalarıma da teşekkürü bir borç bilirim. Hayatım boyunca maddi, manevi desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

YÖK tarafından bir müddet desteklendiğim Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik alanında 100/2000 Doktora Burs Programına teşekkür ederim.

Nihan TURAN



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	v
TEŞEKKÜR	ix
İÇİNDEKİLER	xi
SİMGELER	xiii
ÖZET.....	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı	1
1.2. Literatür Araştırması	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1. q -Analiz İle İlgili Temel Kavram ve Bilgiler.....	5
2.2. p, q -Analiz İle İlgili Yardımcı Teorem ve Bilgiler	8
2.3. Zaman Ölçeği	11
2.4. Diğer Temel Kavramlar.....	13
3. LİNEER OLMAYAN q -FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ.....	19
3.1. Yardımcı Lemma ve Sonuçlar.....	19
3.2. Çözümlerin Varlığı ve Tekliği	23
4. İKİNCİ MERTEBEDEN p, q -FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ	37
4.1. İkinci Dereceden p, q -Fark Denkleminin Çözümlerinin Varlığı ve Tekliği ...	37
4.2. İkinci Dereceden p, q -Fark Denkleminin Çözümlerinin Salınımlılığı.....	42
Eğer (4.1) denkleminde	42
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	53
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ.....	59



SİMGELER

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$q^{\bar{\mathbb{N}}}$	: $\{q^n: n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
S	: $[0, T] \cap q^{\bar{\mathbb{N}}}$
S^*	: $(0, T) \cap q^{\bar{\mathbb{N}}}$
$L^1(S)$	: İntegrallenebilen fonksiyonların uzayı
$L^1(S^*)$	: $\ L\ _{L^1} = \int_0^T L(t) d_q t$ normu ile tanımlı bir Banach uzayı
$ u _1$	: $u = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ için $ u_1 + \dots + u_n $
$\mathcal{C}(S; \mathbb{R}^n)$	: $\ x\ _{\mathcal{C}(S; \mathbb{R}^n)} = \max_{0 \leq t \leq T} x(t) _1$ alışılmış normu ile tanımlı Banach uzayı
$\mathcal{C}^1(S; \mathbb{R}^n)$	: $\ x\ _{\mathcal{C}^1(S; \mathbb{R}^n)} = \ x\ _{\mathcal{C}(S; \mathbb{R}^n)} + \ x'\ _{\mathcal{C}^1(S; \mathbb{R}^n)}$ normu ile tanımlı Banach
$\mathcal{C}_{[a,b]}$	: $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli reel fonksiyonların uzayı
$\mathbb{F}$	: $\mathbb{R}$ reel sayılar veya $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi
$\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{X})$	: $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{F}$ sürekli fonksiyonlarının uzayı
$\mathbb{T}$	: Zaman Ölçeği
$\mathbb{T}_0$	: $\mathbb{T} \cup \{0\}$
$[0, T]_{\mathbb{T}_0}$	: $[0, T] \cap \mathbb{T}_0$



LİNEER OLMAYAN BAZI q -DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

ÖZET

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Tez çalışmasının birinci bölümünde önce çalışmanın amacı ve hedefi belirtilmiştir. Daha sonra ise tez çalışmasını oluşturan konularla ilgili literatürde yapılan çalışmalardan bahsedilmiş ve ayrıca konuların tarihçesi ve neden önemli olduğunu vurgulamak amacıyla yapılan çalışmaların literatürdeki yerinin incelenmesi yapılmıştır.

Tez çalışmasının ikinci bölümü dört alt başlıktan oluşmaktadır. Birinci alt başlıkta limitsiz hesap olarak bilinen q -analiz ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Ek olarak, bazı yerlerde örnekler ile konu açıklanmaya çalışılmıştır. Bu kavramlar çalışmanın ilk orijinal kısmını oluşturan üçüncü bölüm için temel teşkil etmektedir.

İkinci alt başlıkta q -analiz'in bir genelleştirilmesi olan ve bu tez çalışmasının ikinci orijinal kısmını oluşturan dördüncü bölüm için ihtiyaç duyulan (p, q) -analiz ile ilgili temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir. (p, q) -türev tanımı örnek verilerek açıklanmıştır. Ayrıca, (p, q) -analiz de zincir kuralı için herhangi bir genel türev olmadığı bir örnekle vurgulanmıştır. Son olarak çalışmanın ikinci orijinal kısmında çok sık kullanılacak olan (p, q) -integral tanımı ve ilgili bazı temel teoremler verilmiştir.

Üçüncü alt başlıkta tez çalışmasının dördüncü bölümünde karşılaşılabilecek olan zaman ölçeği kavramının tanımı verilmiş ve örneklerle açıklanmıştır.

Son alt başlıkta, sabit nokta tanımı örneklerle açıklanmış ve daralma dönüşümü kavramı tanıtılmıştır. Schaefer sabit nokta teoremi, Krasnoselskii sabit nokta teoremi ve Banach sabit nokta teoremi ele alınmıştır. Ayrıca üçüncü bölümde karşılaşılabilecek olan, $\mathcal{K}_n$ kümesi n . merbeden matrislerin kümesini göstermek üzere, öncelikle $\mathcal{K}_n^+$ koniği tanımlanmıştır.

Çalışmanın üçüncü bölümü tezin ilk orijinal kısmını oluşturmaktadır ve q -analiz üzerinde birinci mertebeden başlangıç değer probleminin çözümlerinin varlığı ve tekliği araştırılmaktadır. Schaefer sabit nokta teoremi, Krasnoselskii sabit nokta teoremi ve Banach sabit nokta teoremleri kullanılarak üç ana teoremin ispatı verilmektedir.

Çalışmanın dördüncü bölümü tezin ikinci orijinal kısmını oluşturmaktadır ve q -analiz'in bir genelleştirilmesi olan (p, q) -analiz üzerinde ikinci mertebeden bir (p, q) -fark denkleminin çözümleri farklı metodlarla incelenmiştir.

Tez çalışmasının beşinci bölümünde elde edilen sonuçlar ve yapılan genelleştirmelere yer verilmiş ve yapılabilecek çalışmalar için öneriler sunulmuştur.



THE SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR q -DIFFERENCE EQUATIONS SYSTEMS

SUMMARY

This thesis mainly consists of five chapters.

The first part of the thesis consists of two subsections. In the first subsection, the purpose and focus of the study is stated. In the second subsection, the studies carried out in the literature on the subjects that constitute the thesis study are mentioned and it is also aimed to examine the place of the studies in the literature in order to emphasize the history of the subjects and why they are important. On the other hand, this section is intended to be a resource for examining the studies that have been done as well as for a better understanding of the studies that can be done.

The second part of the thesis consists of four subsections.

In the first subsection, basic definitions and theorems about q -calculus, known as unlimited calculus, are given. Additionally, in some places the subject has been tried to be explained with examples. These concepts form the basis for the third chapter, which constitutes the first original part of the study. Therefore, in this subsection, firstly, the q -analogue of any natural number n and the q -analogue of the factorial of any natural number n are defined and explained with examples. In addition, the definitions of the q -analogues of the exponential function e^t , which will be used frequently in the first original part of the work, and some connections between these definitions are given. Finally, q -derivative, q -integral, and some basic theorems are included.

In the second subsection, it is aimed to include the basic definitions, theorems and concepts related to (p, q) -calculus, which is a generalization of q -calculus and needed for the fourth chapter, which constitutes the second original part of this thesis study. Therefore, first of all, the (p, q) -analogue and (p, q) -factorial of any natural number n are defined. The definition of (p, q) -derivative is explained by giving an example. Additionally, it is emphasized with an example that there is no general derivation for the chain rule in (p, q) -calculus. Finally, the definition of (p, q) -integral, which will be used frequently in the second original part of the study, and some related basic theorems are given.

In the third subsection, the definition of the concept of time scale, which will be encountered in the fourth chapter of the thesis, is given and explained with examples. In the last subsection, before talking about fixed point theory, definitions of metric space, Cauchy sequence, convergence, completeness, continuity, uniform continuity, sequential continuity, equicontinuity, compact set, relatively compact set, normed space and Banach space are given. The connection between metric space and normed space is emphasized. Fundamental theorems such as the Arzela-Ascoli theorem and Lebesgue limited convergence theorem are included. Then, the definition of fixed point is explained with examples and the concept of contraction transformation is

introduced. Finally, Schaefer fixed point theorem, Krasnoselskii fixed point theorem and Banach fixed point theorem are discussed. In addition, the initial condition of the initial value problem, which will be defined in the third section, consists of a matrice, and the inequality $C > 0$ must be defined if C is any matrice. However, unlike two real numbers, two matrices cannot be directly compared. Therefore, it is defined the following cone in $\mathcal{K}_n$

$$\mathcal{K}_n^+ = \{C = (c_{ij}) \in \mathcal{K}_n : c_{ij} \geq 0, \forall i, j = \overline{1, n}\}$$

where $\mathcal{K}_n$ is the set of matrices of type $n \times n$. Then, a partial ordering relation is defined on this $\mathcal{K}_n^+$ cone consisting of matrices.

The third part of the study constitutes the first original part of the thesis and investigates the existence and uniqueness of solutions to the first-order initial value problem on q -calculus. For this reason, first of all, the problem is defined in q -calculus. Then, an auxiliary theorem is proven, stating that the system of equations defined using the initial conditions and the properties of the q -integral is equivalent to the solution of a system of integral equations. This equivalent solution is rewritten by constructing an appropriate Green's function.

In the next stage, in order to prove the existence and uniqueness of the solutions of the given equation, a U operator was defined as $U(x, y) = (x, y)$ and the problem was transformed into a fixed point problem. As a result, the proof of three main theorems is given using Schaefer fixed point theorem, Krasnoselskii fixed point theorem and Banach fixed point theorem.

The fourth part of the study consists of two subsections and the solutions of a second-order (p, q) -difference equation on (p, q) -calculus, which is a generalization of q -calculus, are examined with different methods.

In the first part of the fourth chapter, it is considered the following second order (p, q) -difference equation with non-local and (p, q) -integral boundary conditions

$$\begin{cases} D_{p,q}^2 x(t) = \varphi(t, x^\sigma(qt)), & t \in \left[0, \frac{T}{p^2 \cdot q^2}\right]_{\mathbb{T}_0} \\ x(0) = x_0 + k(x), & x(T) = \delta \int_0^T x(s) d_{p,q}s \end{cases}$$

where $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and $T \in \mathbb{T}$ is a fixed constant. Solutions of this second-order (p, q) -difference equation are investigated using Banach fixed point theorem and an example is given.

In the second part of the fourth chapter, the equation defined above is transformed into a second-order (p, q) -difference equation of the form

$$D_{p,q}^2 x(t) + \rho(t) \cdot x^\sigma(qt) = 0,$$

without boundary conditions, by taking the φ function as $\varphi(t, x^\sigma(qt)) = -\rho(t) \cdot x^\sigma(qt)$. Then, the second-order derivative of the $x(t)$ function and the first order derivative of the $x(qt)$ function are found. An Euler-Cauchy-like (p, q) -difference equation is reached as

$$qt \cdot \sigma(t) \cdot D_{p,q}^2 x(t) + at \cdot D_{p,q} x(qt) + b \cdot x(q^2 t) = 0$$

when the derivatives are substituted. Therefore, the solution method of the Euler-Cauchy-like q -difference equation is applied to the new equation obtained. Additionally, the oscillation of the solutions is examined. Finally, some results available in the literature on q -calculus have been generalized to (p, q) -calculus.

In the fifth chapter of the thesis, the results obtained and the generalizations made are included and suggestions are presented for further studies.





1. GİRİŞ

1.1. Tezin Amacı

Quantum Analiz ya da q -analiz olarak adlandırılan teori matematiğin pek çok alt bilim dalında çalışılmıştır. Ayrıca q -analiz'in bir genelleştirilmesi olan (p, q) -analiz de son zamanlarda pek çok matematikçinin dikkatini çekmiştir ve farklı alanlara uygulanmaya başlamıştır. Bu alt alanlardan biri başlangıç değer problemleri ve sınır değer problemleridir. Bu konularda çalışmalar yapılmıştır ve yapılmaya devam edilmektedir. Ancak bununla birlikte hala çalışılmaya değer pek çok denklem vardır.

Bu tez çalışmasının temeli q -analiz ve (p, q) -analiz de bazı denklemlerin çözümlerinin sabit nokta teoremlerini kullanarak varlığını ve tekliğini araştırmaktır ve denklemlerin çözümlerinin davranışlarını incelemektir. Ayrıca, literatürde yapılan çalışmaların q -analiz ve (p, q) -analize bir genelleştirilmesi yapılarak literatüre katkı sağlanması hedeflenmektedir.

1.2. Literatür Araştırması

Doğada ayırık zamanlarda meydana gelen olayları modelleyebilmek için diferensiyel denklemlerin ayırık benzeri olan fark denklemlerine matematikçiler ve fizikçiler tarafından büyük ilgi duyulmaktadır. Diğer taraftan, quantum calculus (veya q -analiz) teorisi limitsiz hesap olarak bilinmektedir. Ayrıca q -türev kullanılarak elde edilen q -fark denklemleri de bir çok doğa olaylarının ve problemlerin yaklaşık olarak çözülmesine yardım etmektedir. Bu nedenle q -fark denklemleri matematik, fizik, mühendislik bilimlerinde son zamanlarda sık sık çalışılan bir alan olmuştur. q -analiz teorisi ilk olarak Euler tarafından sonsuz serileri incelemek amacıyla başlatılmıştır. 1910 yılında q -türev ve q -integral operatörlerinin tanıtılmasıyla Jackson [1-2] tarafından sistemleştirilerek matematiğe kazandırılmıştır. Lineer quantum fark denklemlerinin genel teorisi Carmichael [3] tarafından 1912 yılında verilmiştir. Daha sonra Mason [3], Adams [5] ve Trjitzinsky [6] gibi pek çok araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. q -analiz ile ilgili temel kavram ve methodların genel teorisi ise Kac ve Cheung [7] tarafından 2001 yılında not haline getirilmiştir. Ek olarak bir çok

araştırmacı tarafından kombinatorik, sayı teorisi, kesirli mertebeden fark denklemleri ve dizi uzayları gibi matematiğin pek çok alt bilim dalında q -analiz çalışılmıştır [8-11]. q -analiz üzerinde sınır değer problemleri ve başlangıç değer problemleri sık sık incelenmektedir. Örneğin, Ahmad ve Ntouyas [12] lokal olmayan ve integral sınır şartları ile bir q -sınır değer probleminin çözümlerini incelemiştir. Thiramanus ve Tariboon [13] üç-noktalı sınır şartları ile lineer olmayan ikinci mertebeden q -fark denkleminin çözümlerinin varlığını ve tekliğini araştırmışlardır. Ma ve Yang [14] standart sabit nokta teoremlerini kullanarak çok-noktalı sınır şartları ile lineer olmayan ikinci mertebeden çözümlerin varlığını ve tekliğini ele almışlardır. Daha fazla çalışma için [15-20] çalışmalarına bakılabilir.

Son zamanlarda Ngoc ve Long [21] tarafından

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = \sum_{j=1}^N C_j y(T_j) + \int_0^T K(t) \cdot y(t) dt \end{cases} \quad (1.1)$$

çok-noktalı ve integral başlangıç şartları ile birlikte

$$\begin{cases} x'(t) = g(t, x(t), y(t)), & t \in (0, T), \\ y'(t) = h(t, x(t), y(t)), & t \in (0, T), \end{cases} \quad (1.2)$$

(1.1)-(1.2) sisteminin çözümlerinin varlığı ve tekliği sabit nokta teoremleri kullanılarak ispatlandı ve ayrıca pozitif çözümlerin varlığı incelendi.

Diğer yandan, q -analiz ile ilgili çalışmaların başlamasıyla birlikte q sayısının yanında p sayısı da kullanılarak (p, q) -analize genelleştirildi. (p, q) -analiz kavramı ilk olarak 1991 yılında Chakrabarti ve Jagannathan [22] tarafından quantum cebirlerinde incelenmeye başlanmıştır. Bu çalışmadan sonra (p, q) -analiz teorisi gelişti ve pek çok çalışmalar yapıldı. Örneğin, Sadjang [23] polinomlar için (p, q) -Taylor formüllerini verdi ve (p, q) -analiz için temel teoremi ispatladı. (p, q) -anlamında denklemlerin çözümlerinin davranışı ise Kamsrisuk ve ark. tarafından [24] nolu çalışmada incelendi. Gençtürk [25], (p, q) -analizde bir sınır değer probleminin çözümleri için bazı yeni varlık sonuçlarını elde etti. (p, q) -analiz ile ilgili daha detaylı çalışmalar için [26-32] yayınlarına bakılabilir.

Diferensiyel denklemler matematik, fizik, mühendislik gibi bir çok disiplinde uygulamalara sahiptir. Bu nedenle denklemlerin çözümleri araştırma konusu olmuştur.

Fakat her zaman denklemlerin açık çözümü elde edilememektedir. Bu durum araştırmacıları veya bilim insanlarını çözümleri bulmadan çözümlerin varlığını ve davranışlarını incelemeye yöneltmiştir. Bu yönelme diferensiyel denklemlerde kalitatif teori olarak bilinmektedir. Özellikle aşağıdaki denklemler için karşılaştırma-tipi salınımlılık ve salınımlı olmama durumu sürekli ve ayrık durumlarda çalışılmıştır.

Sürekli ve ayrık durumlarda ileri sıçrama operatörü; her $t \in \mathbb{R}$ için,

$$x^\sigma(t) = x(\sigma(t)) = x(t + 1)$$

her $t \in \mathbb{Z}$ için,

$$\Delta x(t) = x^\sigma(t) - x(t)$$

olmak üzere, sırasıyla $t \in \mathbb{R}$ için

$$x''(t) + \rho(t).x(t) = 0 \quad (1.3)$$

her $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\Delta^2 x(t) + \rho(t).x^\sigma(t) = 0$$

denklemleri çalışılmıştır. (1.3) denkleminin karşılaştırma tipi salınımlılık kriterleri ilk olarak 1836 yılında Sturm [33] tarafından incelenerek, salınımlılık için $\rho(t) \geq \rho_0 > 0$ olduğu ve salınımlı olmadığı durum için $\rho(t) \leq 0$ olduğu ispatlandı. Ancak bununla birlikte Sturm'un çalışmasının önemi Bocher tarafından yapılan [34-35] çalışmalarına kadar fark edilmedi.

Bir diğer iyi bilinen kıyaslama kriteri, Kneser tarafından yapılan [36] nolu çalışmada $t^2.\rho(t) \leq \frac{1}{4}$ iken salınımlı olmama durumu ; bazı $\varepsilon > 0$ için $t^2.\rho(t) \geq \frac{1+\varepsilon}{4}$ iken salınımlı olma durumu ispatlandı. Daha sonra Fite [37] ve Hille [38] Kneser'in sonucunu genelleştirdi. Daha fazla çalışmalara için [39-41] kaynaklarına bakılabilir. Buraya kadar salınımlılıkla ilgili bahsedilen çalışmaların temeli, aşağıda ifade edilen iki teoreme dayanmaktadır.

$x''(t) + \frac{b}{t.\sigma(t)}.x^\sigma(t) = 0$ diferensiyel denkleminin salınımlı olması için gerek ve yeter şart $b > \frac{1}{4}$ olmasıdır (bkz. [42]).

$\Delta^2 x(t) + \frac{b}{t.\sigma(t)}.x^\sigma(t) = 0$ fark denkleminin salınımlı olması için gerek ve yeter şart $b > \frac{1}{4}$ olmasıdır (bkz. [43]).

Bohner ve Ünal [44] nolu çalışmada q -analizde ikinci mertebeden fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için bazı kriterler üzerine çalışarak, $q > 1$ ve $t \in \mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0} = \{q^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ olmak üzere

$$D_q^2 x(t) + \rho(t).x^\sigma(t) = 0$$

denklemini çalışarak, aşağıdaki q - fark teoremini ispatladı.

Teorem 1.2.1.

$$D_q^2 x(t) + \frac{b}{t.\sigma(t)}.x^\sigma(t) = 0$$

q -fark denkleminin salınımlı olması için gerek ve yeter şart

$$b > \frac{1}{(\sqrt{q} + 1)^2}$$

olmasıdır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm dört alt başlıktan oluşmaktadır ve bu başlıklarda, q -analiz, (p, q) -analiz, sabit nokta, konik ve zaman ölçeği ile ilgili temel tanımlar ve özellikler verilmiştir.

2.1. q -Analiz İle İlgili Temel Kavram ve Bilgiler

Tanım 2.1.1. [7] Herhangi bir n doğal sayısının q -benzeri

$$[n] = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

olarak tanımlanır ve “[n]” ile gösterilir. $q \rightarrow 1$ iken limit alındığında q -sayıları alışılmış anlamda sayılara indirgenir.

Örnek 2.1.2.

$$[1] = \frac{1 - q^1}{1 - q} = \frac{1 - q}{1 - q} = 1$$

$$[2] = \frac{1 - q^2}{1 - q} = \frac{(1 - q)(1 + q)}{1 - q} = 1 + q$$

$$[3] = \frac{1 - q^3}{1 - q} = \frac{(1 - q)(1 + q + q^2)}{1 - q} = 1 + q + q^2$$

dir.

Tanım 2.1.3. [7] n doğal sayısının faktöriyelinin q -benzeri

$$[n]! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ [1] \times [2] \times \dots \times [n], & n \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.4. [7] e^t üstel fonksiyonunun q -benzeri

$$e_q^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{[n]!} = \frac{1}{(1 - (1 - q)t)_q^{\infty}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.5. [7] e^t üstel fonksiyonunun bir diğer q -benzeri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$E_q^t = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n.(n-1)/2} \frac{t^n}{[n]!} = (1 + (1 - q)t)_q^{\infty}.$$

Uyarı 2.1.6. Klasik üstel fonksiyonlar için $e^t e^s = e^s e^t$ iken q -üstel fonksiyonlar için bu eşitlik geçerli değildir. Bu eşitlik eğer $st = qts$ ise $e_q^t e_q^s = e_q^{t+s}$ dir. Burada t ve s 'nin simetrik olmayan bu değişme ilişkisinden dolayı genellikle $e_q^t e_q^s \neq e_q^s e_q^t$ dir.

Ayrıca, e_q^t üstel fonksiyonu ile E_q^t üstel fonksiyonu arasında

$$e_q^t \cdot E_q^{-t} = 1$$

eşitliği vardır ve yukarıdaki tanımlardan kolaylıkla $e_q^{-t} \cdot E_q^t = 1$ eşitliği de elde edilir.

Tanım 2.1.7. [7] (q -türev) Herhangi bir x fonksiyonunun q -türevi

$$(D_q x)(0) = \lim_{t \rightarrow 0} (D_q x)(t)$$

olmak üzere

$$(D_q x)(t) = \frac{x(t) - x(qt)}{(1 - q)t}, \quad t \neq 0, 0 < q < 1$$

şeklinde tanımlanır ve burada $\lim_{q \rightarrow 1^-} D_q x(t) = x'(t)$ dir.

Uyarı 2.1.8. D_q türev operatörü lineerdir. Yani a ve b herhangi bir sabit olmak üzere

$$D_q(a \cdot x(t) + b \cdot y(t)) = a D_q x(t) + b D_q y(t)$$

özellği vardır.

Örnek 2.1.9. n bir pozitif tamsayı olmak üzere $x(t) = t^n$ fonksiyonunun q -türevi,

$$D_q x(t) = D_q t^n = \frac{(qt)^n - t^n}{(q - 1)t} = \frac{q^n - 1}{q - 1} t^{n-1} = [n] \cdot t^{n-1}$$

dir.

Tanım 2.1.10. x, y herhangi iki fonksiyon olmak üzere bu iki fonksiyonun çarpımının q -türevi,

$$D_q(x(t) \cdot y(t)) = x(qt) D_q x(t) + y(t) D_q y(t) \quad (2.1)$$

dir ve x ile y fonksiyonlarının rolleri değiştirilirse bu durumda eş değer olarak çarpımın q -türevi,

$$D_q(x(t).y(t)) = x(t)D_qy(t) + y(qt)D_qx(t) \quad (2.2)$$

olur.

Tanım 2.1.11. Eğer

$$y(t). \frac{x(t)}{y(t)} = x(t)$$

fonksiyonunun q -türevi için (2.1) kuralı kullanılırsa x ve y fonksiyonunun bölümünün q -türevi

$$D_q \left(\frac{x(t)}{y(t)} \right) = \frac{y(t)D_qx(t) - x(t)D_qy(t)}{y(t)y(qt)}$$

dir. Eğer (2.2) kuralı kullanılırsa bu durumda bölüm kuralı

$$D_q \left(\frac{x(t)}{y(t)} \right) = \frac{y(qt)D_qx(t) - x(qt)D_qy(t)}{y(t)y(qt)}$$

olur. Formüllerin her ikisi de geçerlidir.

Uyarı 2.1.12. Klasik analizde e^t üstel fonksiyonunun türevi kendisine eşittir. Fakat q -analizde durum böyle değildir. e_q^t üstel fonksiyonunun q -türevi $D_qe_q^t = e_q^t$ iken $D_qE_q^t = E_q^{qt}$ olur.

Tanım 2.1.13. [7] (q -antitürev) Eğer $D_qX(t) = x(t)$ ise $X(t)$ fonksiyonuna, $x(t)$ fonksiyonunun q -antitürevi denir ve

$$\int x(t)d_qt$$

ile gösterilir.

Tanım 2.1.14. [7] (q -integral) $[a, b]$ aralığı üzerinde bir x fonksiyonunun q -integrali

$$\int_a^t x(s)d_qs = \sum_{n=0}^{\infty} (1-q)q^n [t.x(tq^n) - a.x(aq^n)], \quad t \in [a, b]$$

olarak tanımlanır. $a = 0$ için bu tanım

$$\int_0^t x(s)d_qs = \sum_{n=0}^{\infty} t.(1-q).q^n.x(tq^n)$$

dir. Bu tanımlardaki integrallerin var olması için eşitliklerin sağ tarafındaki seriler yakınsak olmalıdır.

Not 2.1.15. $a \in [0, b]$ ve x fonksiyonu $[0, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ise bu durumda q -integrali

$$\int_a^b x(t) d_q t = \int_0^b x(t) d_q t - \int_0^a x(t) d_q t$$

dir.

Teorem 2.1.16. [7] (q -Analizin Temel Teoremi) Eğer $X(t)$ fonksiyonu $x(t)$ fonksiyonunun anti-türevi ve $X(t)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli ise bu durumda $0 \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere

$$\int_a^b x(t) d_q t = X(b) - X(a)$$

dır.

Not 2.1.17. Kısmi q -integrasyon kuralı

$$\int_0^s y(t) \cdot D_q x(t) d_q t = y(t) \cdot x(t) \Big|_0^s - \int_0^s D_q y(t) \cdot x(qt) d_q t$$

şeklindedir.

Not 2.1.18. İntegrasyon sırasının değişimi

$$\int_0^t \int_0^s x(r) d_q r d_q s = \int_0^t \int_{qr}^s x(r) d_q s d_q r.$$

dir.

2.2. (p, q) -Analiz İle İlgili Yardımcı Teorem ve Bilgiler

Tanım 2.2.1. [22, 23] Herhangi bir n doğal sayısının (p, q) -benzeri

$$[n]_{p,q} = \frac{p^n - q^n}{p - q}$$

şeklindedir ve $[n]_{p,q} = [n]_{q,p}$ dir

Örnek 2.2.2.

$$[1]_{p,q} = \frac{p^1 - q^1}{p - q} = \frac{p - q}{p - q} = 1$$

$$[2]_{p,q} = \frac{p^2 - q^2}{p - q} = \frac{(p - q)(p + q)}{p - q} = p + q$$

$$[3]_{p,q} = \frac{p^3 - q^3}{p - q} = \frac{(p - q)(p^2 + pq + q^2)}{p - q} = p^2 + pq + q^2$$

dir.

Tanım 2.2.3. [22, 23] n doğal sayısının faktöriyelinin (p, q) -benzeri

$$[n]_{p,q}! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ [1]_{p,q} \times [2]_{p,q} \times \cdots \times [n]_{p,q}, & n \geq 1 \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.4. [22, 23] Herhangi bir x fonksiyonunun (p, q) -türevi; x fonksiyonu $t = 0$ noktasında diferensiyellenebilir olmak üzere

$$(D_{p,q}x)(0) = \lim_{t \rightarrow 0} (D_{p,q}x)(t)$$

$$(D_{p,q}x)(t) = \frac{x(pt) - x(qt)}{(p - q)t}, \quad t \neq 0,$$

şeklinde tanımlanır. Burada $p = 1$ olarak alınırsa (p, q) -türev,

$$(D_qx)(t) = \frac{x(t) - x(qt)}{(1 - q)t}$$

q -türevine indirgenir.

Not 2.2.5. Eğer, $q \rightarrow p = 1$ iken limit alınırsa bu durumda (p, q) -türev alışılmış türeve indirgenir. (p, q) -türev operatörü lineer bir operatördür (bkz. [30]). Yani a ve b herhangi iki sabit sayı olmak üzere

$$D_{p,q}(a \cdot x(t) + b \cdot y(t)) = a \cdot D_{p,q}x(t) + b \cdot D_{p,q}y(t)$$

dir.

Not 2.2.6. $x(t)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden (p, q) -türevi ise

$$D_{p,q}^2 x(t) = \frac{(D_{p,q}x)(pt) - (D_{p,q}x)(qt)}{(p - q)t} = \frac{q \cdot x(p^2t) - (p + q) \cdot x(pqt) + p \cdot x(q^2t)}{(p - q)^2 pqt^2}$$

dir.

Örnek 2.2.7. n bir pozitif tamsayı olmak üzere $x(t) = t^n$ fonksiyonunun (p, q) -türevi

$$D_{p,q}x(t) = D_{p,q}t^n = \frac{(pt)^n - (qt)^n}{(p-q)t} = \frac{p^n - q^n}{p-q}t^{n-1} = [n]_{p,q} \cdot t^{n-1}$$

dir.

Tanım 2.2.8. $x(t)$ ve $y(t)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere bu iki fonksiyonun çarpımının (p, q) -türevleri

$$\begin{aligned} D_{p,q}(x(t) \cdot y(t)) &= x(pt)D_{p,q}y(t) + y(qt)D_{p,q}x(t) \\ &= y(pt)D_{p,q}x(t) + x(qt)D_{p,q}y(t) \end{aligned}$$

dir ve bu iki fonksiyonunun bölümünün (p, q) -türevleri ise

$$\begin{aligned} D_{p,q}\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right) &= \frac{y(qt)D_{p,q}x(t) - x(qt)D_{p,q}y(t)}{y(pt)y(qt)} \\ &= \frac{y(pt)D_{p,q}x(t) - x(pt)D_{p,q}y(t)}{y(pt)y(qt)} \end{aligned}$$

olur (bkz. [23]).

Uyarı 2.2.9. (p, q) -analizde herhangi bir genel zincir kuralından bahsedilemez. Ancak bununla birlikte özel bir durum için zincir kuralı uygulanabilir. m ve n sabitler olsun. $y(t) = mt^n$ olmak üzere $x(y(t))$ fonksiyonunun (p, q) -türevi

$$D_{p,q}(x(y(t))) = (D_{p^n, q^n}x) \cdot (y(t)) \cdot D_{p,q}y(t)$$

olur (bkz. [30]).

Örnek 2.2.10. $y(t) = qt$ olsun. Bu durumda zincir kuralının özel durumu uygulanabilir. Kurala göre $m = q$ ve $n = 1$ dir. $x(y(t)) = x(qt)$ fonksiyonunun (p, q) -türevi

$$D_{p,q}(x(y(t))) = (D_{p,q}x) \cdot (y(t)) \cdot D_{p,q}y(t) = \frac{x(pqt) - x(q^2t)}{(p-q)t}$$

olur.

Tanım 2.2.11. [23] $((p, q)$ -integral) $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ($T > 0$) herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda $x(t)$ fonksiyonunun (p, q) -integrali eğer

$$\left| \frac{p}{q} \right| < 1$$

ise

$$\int_0^t x(s) d_{p,q} s = (q - p) \cdot t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{q^{n+1}} x\left(\frac{p^n}{q^{n+1}} t\right),$$

olur, eğer

$$\left|\frac{p}{q}\right| > 1$$

ise

$$\int_0^t x(s) d_{p,q} s = (p - q) \cdot t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{p^{n+1}} x\left(\frac{q^n}{p^{n+1}} t\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.12. [23] $((p, q)$ -Analizin Temel Teoremi) $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ($T > 0$) sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_0^t D_{p,q} x(s) d_{p,q} s = x(t) - x(0)$$

dir.

Teorem 2.2.13. [25] $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, ($T > 0$) bir sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda, $t \in [0, p^2 T]$ için

$$\int_0^t \int_0^s x(r) d_{p,q} r d_{p,q} s = \frac{1}{p} \int_0^t (t - qs) x\left(\frac{s}{p}\right) d_{p,q} s$$

dir.

2.3. Zaman Ölçeği

Zaman ölçeği teorisi sürekli ve ayırık analizi birleştirmek amacıyla ilk olarak 1988 yılında Stefan Hilger [45] tarafından doktora tezinde tanıtılmıştır. Bu konu hakkındaki ilk çalışmalar Hilger [46], Albach ve Hilger [47] tarafından yapılmıştır. Bu bölümde çalışmaya temel teşkil eden bazı tanım ve kavramlar verilecektir.

Tanım 2.3.1. [45] Bir zaman ölçeği; $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin boştan farklı ve kapalı alt kümesi olarak tanımlanır ve genel olarak “ $\mathbb{T}$ ” ile gösterilir.

Örnek 2.3.2. Reel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar ve negatif olmayan tamsayılar yani; sırasıyla $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}_0$ kümeleri zaman ölçeğine örnek olarak verilebilir. Ayrıca $[0,1] \cup [2,3]$, $[0,1] \cup \mathbb{N}$ ve Cantor kümesi gibi kümeler de zaman ölçeğine örnek olarak verilebilir. Rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, kompleks sayılar ve $(0,1)$ açık aralığı gibi kümeler ise zaman ölçeği olmayan örneklerdir.

Tanım 2.3.3. [48, 49] $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü ,

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımdan herhangi bir $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) \geq t$ olduğu görülür.

Tanım 2.3.4. [48, 49] $t \in \mathbb{T}$ için $\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ geri sıçrama operatörü,

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımdan herhangi bir $t \in \mathbb{T}$ için $\rho(t) \leq t$ olduğu görülür.

Örnek 2.3.5. [48, 49]

1) $q > 1$ için $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0}$ gözönüne alınırsa,

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}: s > q^k\} = q^{k+1} = q \cdot q^k = qt$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}: s < q^k\} = q^{k-1} = q^{-1}q^k = \frac{t}{q}$$

olur.

2) $0 < p < 1$ için $\mathbb{T} = p^{\mathbb{N}_0} \cup \{0\}$ gözönüne alınırsa,

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}: s > p^k\} = p^{k-1} = p^{-1} \cdot p^k = \frac{t}{p}$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}: s < p^k\} = p^{k+1} = p \cdot p^k = pt$$

dir.

Tanım 2.3.6. [48, 49] $x: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verildiğinde, herhangi bir $t \in \mathbb{T}$ için $x^\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ileri sıçrama operatörü $x^\sigma = x \circ \sigma$,

$$x^\sigma(t) = x(\sigma(t))$$

olur.

2.4. Diğer Temel Kavramlar

Tanım 2.4.1. $\mathcal{X} \neq \emptyset$ olsun. $d: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü eğer

$$d1) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d2) \text{ Her } x, y \in \mathcal{X} \text{ için } d(x, y) = d(y, x)$$

$$d3) \text{ Her } x, y, z \in \mathcal{X} \text{ için } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

şartlarını sağlıyorsa d dönüşümüne $\mathcal{X}$ üzerinde bir metrik ve $(\mathcal{X}, d)$ ikilisine metrik uzay denir.

Örnek 2.4.2. $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için $d(x, y) = |x - y|$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe doğal (alışılmış) metrik ya da mutlak değer metriği denir.

Tanım 2.4.3.[50]

- 1) Yakınsaklık: $(\mathcal{X}, d)$ bir metrik uzay, $\{x_n\}$ dizisi $\mathcal{X}$ de bir dizi ve $x \in \mathcal{X}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olacak şekilde her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x) = |x_n - x| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine yakınsak dizi denir.

- 2) Cauchy Dizisi: $(\mathcal{X}, d)$ bir metrik uzay, $\{x_n\}$ dizisi $\mathcal{X}$ de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ olacak şekilde her bir $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

- 3) Tamlık: $(\mathcal{X}, d)$ bir metrik uzay ve $\mathcal{X}$ uzayındaki her Cauchy dizisi $\mathcal{X}$ uzayında yakınsak ise bu durumda $(\mathcal{X}, d)$ metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.4.4. [51] $(\mathcal{X}, d_1)$ ve $(\mathcal{Y}, d_2)$ iki metrik uzaylar ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon ve $x \in \mathcal{X}$ olsun.

- a) Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $y \in \mathcal{X}$ için

$$d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı (δ sayısı hem $x \in \mathcal{X}$ 'e hem de ε 'a bağlıdır) varsa f ye x noktasında süreklidir denir.

b) Eğer f fonksiyonu $\mathcal{X}$ 'in her noktasında sürekli ise f ($\mathcal{X}$ üzerinde) süreklidir denir.

c) Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı (δ sayısı $x, y \in \mathcal{X}$ den bağımsızdır) varsa f ye ($\mathcal{X}$ üzerinde) düzgün süreklidir denir .

Teorem 2.4.5. [51] $(\mathcal{X}, d_1)$ ve $(\mathcal{Y}, d_2)$ iki metrik uzay, $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ bir fonksiyon olsun. f , $x \in \mathcal{X}$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart $(\mathcal{X}, d_1)$ içinde $x_n \rightarrow x$ şeklindeki her $\{x_n\}$ dizisi için $(\mathcal{Y}, d_2)$ içindeki $\{f(x_n)\}$ dizisi $f(x_n) \rightarrow f(x)$ olmasıdır. Bu teoremdaki süreklilik kavramına dizisel süreklilik denilir. Metrik uzaylarda süreklilik ile dizisel süreklilik kavramları denktir.

Tanım 2.4.6. [51] $(\mathcal{X}, d)$ bir metrik uzay ve $M, C_{\mathbb{F}}(\mathcal{X})$ in boştan farklı bir alt kümesi ve $x_0 \in \mathcal{X}$ olsun. Eğer verilen her bir $\varepsilon > 0$ ve her $f \in M$ için $d(x, x_0) < \delta$ iken $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ var ise M , x_0 noktasında eşsüreklidir denir.

Tanım 2.4.7. [52] Bir kümenin her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse kompakttır denir. Metrik uzayda her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse dizisel kompakttır denir. Metrik uzaylarda kompaktlık ile dizisel kompaktlık kavramları denktir. Sonlu boyutlu lineer uzaylarda kompaktlık kavramı kapalılık ve sınırlılığa karşılık gelir.

Tanım 2.4.8. [51] $(\mathcal{X}, d)$ bir metrik uzay olsun. Bir $M \subset \mathcal{X}$ kümesi verildiğinde $\bar{M}$ kapanışı kompakt ise M ye relatif (göreceli) kompakt denir.

Tanım 2.4.9. [53] $\mathcal{X}$ bir reel (kompleks) vektör uzayı olsun. Eğer $\|\cdot\|: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü

$$n1) \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$n2) \text{ herhangi bir } x \in \mathcal{X} \text{ ve herhangi bir } \alpha \text{ skaleri için } \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$n3) \text{ her } x, y \in \mathcal{X} \text{ için } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartlarını sağlıyorsa bir norm olarak adlandırılır ve $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ ikilisine ise normlu (lineer) vektör uzayı denir.

Örnek 2.4.10. [53] $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir normlu vektör uzayı olsun. $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

ile tanımlı $d: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathcal{X}$ üzerinde bir metriktir.

Uyarı 2.4.11. [51, 53] Eğer $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir normlu vektör uzayında $d(x, y) = \|x - y\|$ ile tanımlı d metriğine $\|\cdot\|$ normu tarafından indirgenen (genelleştirilen, üretilen) metrik adı verilir.

Tanım 2.4.12. [51] Tam normlu uzaylara Banach uzayı denir.

Tanım 2.4.13. [51] $(\mathcal{X}, d)$ bir kompakt metrik uzay ve $C_{\mathbb{F}}(\mathcal{X})$ üzerinde bir metrik, $x, y \in C_{\mathbb{F}}(\mathcal{X})$ için

$$d_{\infty}(x, y) = \sup\{|x(t) - y(t)|: t \in \mathcal{X}\}$$

ile tanımlanır. Bu metrik düzgün (supremum veya uniform) metrik olarak adlandırılır.

Teorem 2.4.14. [51] (Arzela-Ascoli Teoremi) $(\mathcal{X}, d)$ bir kompakt metrik uzay ve $M, (C_{\mathbb{F}}(\mathcal{X}), d_{\infty})$ tam uzayının kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

- a) M kompakttır.
- b) M sınırlıdır ve $\mathcal{X}$ üzerinde eşsüreklidir.

Teorem 2.4.15. [54] (Arzela) $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı φ sürekli fonksiyonlarının bir Φ ailesinin $C_{[a,b]}$ de relatif kompakt olması için gerek ve yeter şart Φ 'nin düzgün sınırlı ve eşsürekliliğidir.

Teorem 2.4.16. [51] (Lebesgue Sınırlı Yakınsaklık Teoremi) $L^1(S)$ içindeki $x_n: S \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir $\{x_n\}$ dizisi verilsin ve $n \rightarrow \infty$ için $x_n(t) \rightarrow x(t)$ (h.h.h) olsun. Eğer her n ve hemen hemen her t için

$$x_n(t) \leq y(t)$$

olacak şekilde bir $y \in L^1(S)$ fonksiyonu varsa o zaman $n \rightarrow \infty$ için S üzerinde $\int x_n dm \rightarrow \int x dm$ dir.

Tanım 2.4.17. [53] $\mathcal{X} \neq \emptyset$ bir küme ve $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm ve $x \in \mathcal{X}$ olsun. Eğer

$$T(x) = x$$

ise bu eşitliği sağlayan x noktasına T 'nin sabit noktası denir. T 'nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ veya F_T ile gösterilir.

Örnek 2.4.18. [53] Eğer $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ve $T(x) = x^2 + 5x + 4$ ise $F_T = \{-2\}$ dir.

Eğer $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ve $T(x) = x$ ise bu durumda $F_T = \mathbb{R}$ dir.

Eğer $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ve $T(x) = x + 2$ ise bu durumda $F_T = \emptyset$ dir.

Tanım 2.4.21. [55] $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\|$$

olacak şekilde bir $0 < k < 1$ sabiti varsa T dönüşümüne daralma dönüşümü denir.

Teorem 2.4.23. [56] (Schaefer Sabit Nokta Teoremi) $\mathcal{X}$ bir Banach uzayı, $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ tamamen (completely) sürekli operatör ve $\Delta = \{t \in \mathcal{X}: t = \beta.T(t), 0 < \beta < 1\}$ kümesi sınırlı olsun. Bu durumda $T, \mathcal{X}$ uzayında bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 2.4.24. [57] (Krasnoselskii Sabit Nokta Teoremi) M , bir $\mathcal{X}$ Banach uzayının boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Kabul edelimki her $u, v \in M$ için

$$\mathcal{V}(u) + \Gamma(v) \in M$$

olacak şekilde $\mathcal{V}: M \rightarrow \mathcal{X}$ bir daralma operatörü ve $\Gamma: M \rightarrow \mathcal{X}$ bir kompakt operatörü olsun. Bu durumda $\mathcal{V} + \Gamma, M$ de bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 2.4.25. [58] (Banach Sabit Nokta Teoremi) $\mathcal{X}$ bir Banach uzayı, $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Eğer herhangi bir $u, v \in \mathcal{X}$ için

$$\|T(u) - T(v)\| \leq \theta \|u - v\|$$

olacak şekilde $\theta \in [0,1)$ mevcutsa bu durumda T dönüşümü $\mathcal{X}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Tanım 2.4.26. [59] E bir reel Banach uzayı olsun. E nin bir P alt kümesi

- i) $P \neq \emptyset, P \neq \{0\}$ ve P kapalı
- ii) $a, b \geq 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $u, v \in P$ için $a \cdot u + b \cdot v \in P$
- iii) Eğer $u \in P$ ve $-u \in P$ ise bu durumda $u = 0$

şartlarını sağlıyorsa P ye bir konik (cone) denir.

Örnek 2.4.27. $\mathbb{R}^n = \{u = (u_1, \dots, u_n)^T : u_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, n}\}$ kümesi üzerinde,

$\mathbb{R}_+^n = \{u = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n : u_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}\}$ kümesi bir koniktir

ve

$\mathcal{K}_n = \{C = (c_{ij}) : C, n. \text{ mertebeden kare matris, } c_{ij} \in \mathbb{F}\}$ kümesi üzerinde,

$\mathcal{K}_n^+ = \{C = (c_{ij}) \in \mathcal{K}_n : c_{ij} \geq 0, \forall i, j = \overline{1, n}\}$ kümesi bir koniktir.

Ayrıca P koniği ile bir “ $\leq$ ” kısmi sıralama bağıntısı $u \leq v \Leftrightarrow v - u \in P$ şeklinde tanımlanır (bkz. [60]).

Açıklama 2.4.28. $\mathbb{R}^n$ ve $\mathcal{K}_n$ içinde

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n, u \leq v \Leftrightarrow v - u \in \mathbb{R}_+^n$$

ve

$$\forall C, D \in \mathcal{K}_n, C \leq D \Leftrightarrow D - C \in \mathcal{K}_n^+$$

özellikleri birer sıralama bağıntısıdır. Buna göre her bir $u \in \mathbb{R}^n$ için $u > 0 \Leftrightarrow u \geq 0$ ve $u \neq 0$ dir ve benzer şekilde her bir $C \in \mathcal{K}_n$ için $C > 0 \Leftrightarrow C \geq 0$ ve $C \neq 0$ olur.

Son olarak (4.13) fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili tanımlar aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.4.29.

- i) Eğer $x(t) = 0$ ise bu durumda t noktasında (4.13) denkleminin $x(t)$ çözümü bir genelleştirilmiş sıfıra sahiptir denir. Eğer $x(qt).x^\sigma(t) < 0$ ise bu durumda $x(t)$ çözümü $(qt, \sigma(t))$ aralığında bir genelleştirilmiş sıfıra sahiptir denir.
- ii) Eğer $[a, b]$ aralığında iki (veya daha fazla) genelleştirilmiş sıfır ile (4.13) denkleminin aşikar olmayan hiçbir çözümü yoksa, (4.13) denklemi $[a, b]$ aralığı üzerinde non-conjugate (eşlenik değildir) denir.
- iii) Her $a < b$ için $[a, b]$ aralığı üzerinde (4.13) denklemi non-conjugate olacak şekilde bir $a \in [\zeta, \infty]$ varsa bu durumda (4.13) denkleminin $[\zeta, \infty]$ aralığı üzerinde non-oscillatory (yani salınımlı olmadığı) olduğu söylenir. Diğer durumlarda (4.13) denkleminin $[\zeta, \infty]$ aralığı üzerinde salınımlı (oscillatory) olduğu anlaşılır.
- iv) Eğer bazı $T > 0$ için $[T, \infty]$ aralığı üzerinde $x(qt).x^\sigma(t) > 0$ ise (4.13) denkleminin bir $x(t)$ çözümü salınımlı değildir denir. Aksi durumda $[T, \infty]$ aralığı üzerinde $x(t)$ çözümü salınımlıdır denilir.

3. LİNEER OLMAYAN q -FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

3.1. Yardımcı Lemma ve Sonuçlar

Bu kısımda

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = \sum_{j=1}^N C_j y(T_j) + \int_0^T K(t) \cdot y(t) d_q t \end{cases} \quad (3.1)$$

çok noktalı ve q -başlangıç şartları ile birlikte

$$\begin{cases} D_q x(t) = g(t, x(t), y(t)), & t \in S^* \\ D_q y(t) = h(t, x(t), y(t)), & t \in S^* \end{cases} \quad (3.2)$$

şeklindeki (3.1)-(3.2) lineer olmayan q -fark denklem sisteminin çözümü incelenecektir.

Bu sistemde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bir başlangıç noktası, $j = 1, \dots, N$ için $C_j \in \mathcal{K}_n$ ve $0 < T_1 < \dots < T_N = T$, $T \in q^{\mathbb{N}}$ olacak şekilde sabitler, $K: [0, T] \cap q^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{K}_n$ sürekli fonksiyon ve $g, h \in C([0, T] \cap q^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca her bir n . mertebeden $C = (c_{ij}) \in \mathcal{K}_n$ kare matrisinin normu

$$\|C\|_1 = \sup_{0 \neq u \in \mathbb{R}^n} \frac{|Cu|_1}{|u|_1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |c_{ij}|$$

şeklindedir. $\lambda, \gamma \geq 0$ olmak üzere

$$g_\gamma(t, x, y) = g(t, x, y) + \gamma \cdot x(qt)$$

ve

$$h_\lambda(t, x, y) = h(t, x, y) + \lambda \cdot y(qt)$$

alalım. Ayrıca

$$\sigma_{\lambda,q} = I - \sum_{j=1}^N C_j \cdot E_q^{-\lambda T_j} - \int_0^T K(\tau) \cdot E_q^{-\lambda \tau} d_q \tau$$

olsun (Bu bölümde kullanılan σ dördüncü bölümde aynı gösterime sahip olan sıçrama operatörü ile aynı değildir).

(3.1)-(3.2) denklem sisteminin (3.3)-integral denklem sisteminin çözümüne denk olduğunu ifade eden aşağıdaki Lemmayı verelim.

Lemma 3.1.1. Kabul edelimki $\det \sigma_{\lambda,q} \neq 0$ olsun. Bu durumda $(x, y) \in C(S; \mathbb{R}^n) \times C(S; \mathbb{R}^n)$ nin (3.1)-(3.2) denklem sisteminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart (x, y) nin aşağıdaki (3.3) integral denklem sisteminin bir çözümü olmasıdır.

$$\begin{cases} x(t) = E_q^{-\gamma t} \cdot x_0 + \int_0^t E_q^{-\gamma t} \cdot e_q^{-\gamma \tau} \cdot g_\gamma(s, x(s), y(s)) d_q s, \\ y(t) = \int_0^t E_q^{-\lambda t} \cdot e_q^{\lambda s} \cdot h_\lambda(s, x(s), y(s)) d_q s \\ + E_q^{-\lambda t} \cdot \sigma_{\lambda,q}^{-1} \int_0^T \left(\int_{q^s}^T E_q^{-\lambda \tau} \cdot e_q^{\lambda s} \cdot K(\tau) d_q \tau \right) \cdot h_\lambda(s, x(s), y(s)) d_q s \\ + E_q^{-\lambda t} \cdot \sigma_{\lambda,q}^{-1} \sum_{j=1}^N C_j \int_0^{T_j} E_q^{-\lambda T_j} \cdot e_q^{\lambda s} \cdot h_\lambda(s, x(s), y(s)) d_q s. \end{cases} \quad (3.3)$$

İspat. $(x, y) \in C(S; \mathbb{R}^n) \times C(S; \mathbb{R}^n)$ (3.1)-(3.2) probleminin bir çözümü olsun. Açıkça $(x, y) \in C^1(S; \mathbb{R}^n) \times C^1(S; \mathbb{R}^n)$ dir ve (x, y) , (3.1)-(3.2) problemini sağlar. Her bir $\lambda, \gamma \geq 0$ için (3.1) sistemi

$$\begin{cases} D_q x(t) + \gamma \cdot x(qt) = g_\gamma(t, x, y), & t \in S^* \\ D_q y(t) + \lambda \cdot x(qt) = h_\lambda(t, x, y), & t \in S^* \end{cases} \quad (3.4)$$

şeklindeki bir eş değer forma dönüştürülebilir. (3.4) deki denklemler sırasıyla $e_q^{\gamma t}$ ve $e_q^{\lambda s}$ üstel fonksiyonları ile çarpılır ve 0 dan t ye kadar q -integrali alınırsa

$$x(t) = E_q^{-\gamma t} \cdot x_0 + \int_0^t E_q^{-\gamma t} \cdot e_q^{-\gamma s} \cdot g_\gamma(s, x(s), y(s)) d_q s \quad (3.5)$$

ve

$$y(t) = E_q^{-\lambda t} \cdot y(0) + \int_0^t E_q^{-\lambda t} \cdot e_q^{\lambda s} \cdot h_\lambda(s, x(s), y(s)) d_q s \quad (3.6)$$

denklemleri elde edilir. (3.6) denkleminde

$$\int_0^T K(\tau) \cdot y(\tau) d_q \tau = y(0) \int_0^T K(\tau) \cdot E_q^{-\lambda \tau} d_q \tau$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T K(\tau) \left(\int_0^\tau E_q^{-\lambda\tau} \cdot e_q^{\lambda s} h_\lambda(s, x(s), y(s)) d_q s \right) d_q \tau \\
& = y(0) \int_0^T K(\tau) \cdot E_q^{-\lambda\tau} d_q \tau \\
& + \int_0^T \left(\int_{qs}^T E_q^{-\lambda t} \cdot e_q^{\lambda s} K(\tau) d_q \tau \right) h_\lambda(s, x(s), y(s)) d_q s
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\sum_{j=1}^N C_j \cdot y(T_j) - y(0) \sum_{j=1}^N C_j \cdot E_q^{-\lambda T_j} = \sum_{j=1}^N C_j \int_0^{T_j} E_q^{-\lambda T_j} \cdot e_q^{\lambda s} \cdot h_\lambda(s, x(s), y(s)) d_q s$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned}
y(0) & = \sum_{j=1}^N C_j \cdot y(T_j) + \int_0^T K(t) \cdot y(t) d_q t \\
& = y(0) \sum_{j=1}^N C_j \cdot E_q^{-\lambda T_j} + \sum_{j=1}^N C_j \int_0^{T_j} E_q^{-\lambda T_j} \cdot e_q^{\lambda s} \cdot h_\lambda(s, x(s), y(s)) d_q s \\
& + y(0) \int_0^T K(\tau) E_q^{-\lambda\tau} d_q \tau \\
& + \int_0^T \left(\int_{qs}^T E_q^{-\lambda\tau} \cdot e_q^{\lambda s} \cdot K(\tau) d_q \tau \right) \cdot h_\lambda(s, x(s), y(s)) d_q s
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& y(0) \cdot \left(I - \sum_{j=1}^N C_j \cdot E_q^{-\lambda T_j} - \int_0^T K(\tau) \cdot E_q^{-\lambda\tau} d_q \tau \right) \\
& = \sum_{j=1}^N C_j \int_0^{T_j} E_q^{-\lambda T_j} \cdot e_q^{\lambda s} \cdot h_\lambda(s, x(s), y(s)) d_q s \\
& + \int_0^T \left(\int_{qs}^T E_q^{-\lambda\tau} \cdot e_q^{\lambda s} \cdot K(\tau) d_q \tau \right) \cdot h_\lambda(s, x(s), y(s)) d_q s
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}
y(0) = & \sigma_{\lambda,q}^{-1} \sum_{j=1}^N C_j \int_0^{T_j} E_q^{-\lambda T_j} \cdot e_q^{\lambda s} \cdot h_\lambda(s, x(s), y(s)) d_q s \\
& + \sigma_{\lambda,q}^{-1} \int_0^T \left(\int_{qs}^T E_q^{-\lambda \tau} \cdot e_q^{\lambda s} \cdot K(\tau) d_q \tau \right) \cdot h_\lambda(s, x(s), y(s)) d_q s
\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.3), (3.4) ve (3.5) eşitliklerini kullanarak (x, y) nin (3.1) sistemini sağladığı görülür.

Tersine $(x, y) \in C(S; \mathbb{R}^n) \times C(S; \mathbb{R}^n)$, (3.1) sisteminin bir çözümü olsun. Bu durumda $(x, y) \in C^1(S; \mathbb{R}^n) \times C^1(S; \mathbb{R}^n)$ olduğu kolayca görülür. (x, y) , (3.1)-(3.2) problemini sağlar. Böylece Lemma'nın ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.1.2. $S = [0, T]$ olsun. Eğer e_q^t , q -üstel fonksiyonunun yerine klasik e^t üstel fonksiyonu kullanılırsa $q \rightarrow 1$ iken Lemma literatürdeki klasik Lemma ya indirgenir (bkz. [21]).

Ayrıca Lemma 3.1.1 den Green fonksiyonu yardımıyla $y(t)$ fonksiyonu yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir.

Sonuç 3.1.3. Green fonksiyonu, Lemma 3.1.1 yardımıyla

$$\begin{aligned}
G_q(t, s) = & \begin{cases} E_q^{-\lambda t} \cdot e_q^{\lambda s} \cdot I, & 0 \leq s \leq t \leq T, \quad t \in S \\ 0, & 0 \leq s \leq t \leq T, \quad t \in S \end{cases} \\
& + E_q^{-\lambda t} \cdot e_q^{\lambda s} \cdot \sigma_{\lambda,q}^{-1} \int_{qs}^T E_q^{-\lambda \tau} \cdot K(\tau) d_q \tau \\
& + E_q^{-\lambda t} \cdot e_q^{\lambda s} \cdot \sigma_{\lambda,q}^{-1} \begin{cases} \sum_{j=1}^N E_q^{-\lambda T_j} \cdot C_j, & 0 \leq s \leq T_1, \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=k}^N E_q^{-\lambda T_j} \cdot C_j, & T_{k-1} \leq s \leq T_k, \\ \vdots & \vdots \\ E_q^{-\lambda T} \cdot C_N, & T_{N-1} \leq s \leq T_N = T \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda (3.1) deki $y(t)$ fonksiyonu (3.8) in yardımıyla

$$y(t) = \int_0^T G_q(t, s) \cdot h_\lambda(s, x(s), y(s)) d_q s \tag{3.9}$$

şeklinde yazılır.

Uyarı 3.1.4. C herhangi bir kare matris olsun. $C > 0$ olması $C^{-1} > 0$ olmasını garanti etmez. $C, 0_{2,2} \in \mathcal{K}_n$ ve $C > 0$ olsun. Ayrıca C terslenebilir bir matris olsun. $C > 0$ olması için gerek ve yeter şart $C \neq 0$ ve $C - 0 = C \in \mathcal{K}_n^+$ olmasıdır. Buna göre örneğin

$$C = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} > 0$$

olsun. Bu durumda

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

olup $C^{-1} > 0$ değildir.

Şimdi Green fonksiyonu ile ilgili aşağıdaki Lemma verilebilir.

Lemma 3.1.5. Kabul edelim ki her $t \in S$ için $K(t) \geq 0$ ve her $j = 1, \dots, N - 1$ için $C_j \geq 0$ ve $C_N > 0$ ve $\det \sigma_{\lambda,q} \neq 0$ olsun. Ayrıca her $i, j = 1, \dots, n - 1$ için $d_{ij} > 0$ ile $\sigma_{\lambda,q}^{-1} > 0$ ve $\sigma_{\lambda,q}^{-1} \cdot C_N = d_{ij}$ alalım. Bu durumda her $s, t \in S$ için

$$E_q^{-\lambda T} \cdot \sigma_{\lambda,q}^{-1} \cdot C_N \cdot E_q^{-\lambda t} \cdot e_q^{\lambda s} \leq G_q(t, s) \leq \sigma_{\lambda,q}^{-1} \cdot E_q^{-\lambda t} \cdot e_q^{\lambda s}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Green fonksiyonunun tanımı yardımıyla doğrudan hesaplamayla

$$G_q(t, s) \geq E_q^{-\lambda T} \cdot \sigma_{\lambda,q}^{-1} \cdot C_N \cdot E_q^{-\lambda t} \cdot e_q^{\lambda s} \quad (3.10)$$

elde edilir ve ters eşitsizlik ise

$$\begin{aligned} G_q(t, s) &\leq \left[I + \sigma_{\lambda,q}^{-1} \cdot \left(\int_0^T E_q^{-\lambda \tau} \cdot K(\tau) d_q \tau + \sum_{j=1}^N C_j \cdot E_q^{-\lambda T_j} \right) \right] E_q^{-\lambda t} \cdot e_q^{\lambda s} \\ &= [I + \sigma_{\lambda,q}^{-1} \cdot (I - \sigma_{\lambda,q})] \cdot E_q^{-\lambda t} \cdot e_q^{\lambda s} \\ &= \sigma_{\lambda,q}^{-1} \cdot E_q^{-\lambda t} \cdot e_q^{\lambda s} \end{aligned} \quad (3.11)$$

şeklinde elde edilir. (3.10) ve (3.11) dan istenilen bulunur.

3.2. Çözümlerin Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde (3.1)-(3.2) ile verilen denklem sisteminin çözümlerinin varlığı ve tekliği ispatlanacaktır. Bunu yapabilmek için $U(x, y) = (x, y)$ olacak şekilde bir U operatörü tanımlanarak (3.1)-(3.2) problemi sabit nokta problemine dönüştürülecektir. Bu durumda $\mathcal{A} = C(S; \mathbb{R}^n) \times C(S; \mathbb{R}^n)$ uzayı,

$$\|(x, y)\|_{\mathcal{A}} = \|x\|_{C(S; \mathbb{R}^n)} + \|y\|_{C(S; \mathbb{R}^n)} \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlanan norm ile bir Banach uzayı olur.

$\gamma = \lambda = 0$ için

$$\sigma_q = I - \sum_{j=1}^N C_j - \int_0^T K(\tau) d_q \tau$$

ve Green fonksiyonu

$$G_q(t, s) = \begin{cases} I & s \leq t \quad t \in S \\ 0 & t \leq s \quad t \in S \end{cases} + \sigma_q^{-1} \int_{qs}^T K(\tau) d_q \tau$$

$$+ \sigma_q^{-1} \begin{cases} \sum_{j=1}^N C_j, & 0 \leq s \leq T_1, \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=k}^N C_j, & T_{k-1} < s \leq T_k \\ \vdots & \vdots \\ C_N, & T_{N-1} < s \leq T_N = T \end{cases} \quad (3.13)$$

şeklinde elde edilir.

Böylece bir $U: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ operatörü

$$U_1(x, y)(t) = x_0 + \int_0^t g(s, x(s), y(s)) d_q s$$

$$U_2(x, y)(t) = \int_0^T G_q(t, s) \cdot h(s, x(s), y(s)) d_q s \quad (3.14)$$

olacak şekilde

$$U: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(x, y) \rightarrow (U_1(x, y), U_2(x, y))$$

şeklinde tanımlı olsun.

Aşağıdaki teoremda (3.1)-(3.2) sisteminin çözümlerinin varlığını Schaefer sabit nokta teoremini kullanarak elde ederiz.

Teorem 3.2.1. U operatörü (3.14) de tanımlandığı gibi olsun. Aşağıdaki şartların var olduğunu kabul edelim.

- a) Her $t \in S$ ve $x(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$ için $|g(t, x(t), y(t))|_1 \leq k_1(t)$ olacak şekilde bir $k_1(t) \in C(S; \mathbb{R}^+)$ fonksiyonu var olsun.
- b) Her $t \in S$ ve $x(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$ için $|h(t, x(t), y(t))|_1 \leq k_2(t)$ olacak şekilde bir $k_2(t) \in C(S; \mathbb{R}^+)$ fonksiyonu var olsun.

Bu durumda (3.1)-(3.2) problemi S üzerinde en az bir çözüme sahiptir.

İspat. Teorem dört adımda ispatlanacaktır.

Adım 1: U operatörü sürekli midir? Bunu gösterebilmek için $\mathcal{A}$ da $(x_k, y_k) \rightarrow (x, y)$ olacak şekilde bir yakınsak $\{(x_k, y_k)\}$ dizisi alınsın. Lebesgue sınırlı yakınsaklık teoremi ile g ve h fonksiyonlarının sürekliliği kullanılarak $k \rightarrow +\infty$ iken

$$\int_0^t |g(t, x_k(t), y_k(t)) - g(t, x(t), y(t))|_1 d_q t \rightarrow 0 \quad (3.15)$$

ve $k \rightarrow +\infty$ iken

$$\int_0^T |h(t, x_k(t), y_k(t)) - h(t, x(t), y(t))|_1 d_q t \rightarrow 0 \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.15) ve (3.16) kullanılarak $k \rightarrow +\infty$ iken

$$\begin{aligned} & |U_1(x_k, y_k)(t) - U_1(x, y)(t)|_1 \\ & \leq \int_0^t |g(t, x_k(t), y_k(t)) - g(t, x(t), y(t))|_1 d_q t \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

ve $k \rightarrow +\infty$ iken

$$\begin{aligned} & |U_2(x_k, y_k)(t) - U_2(x, y)(t)|_1 \\ & \leq \|\sigma_q^{-1}\|_1 \int_0^T |h(t, x_k(t), y_k(t)) - h(t, x(t), y(t))|_1 d_q t \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

eşitsizliklerine ulaşılır. (3.17) ve (3.18) ile U operatörünün sürekliliğini veren

$\|U(x_k, y_k) - U(x, y)\|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$ sonucu çıkar. Bu şekilde ilk adım tamamlanır.

Adım 2: U operatörü $\mathcal{A}$ daki sınırlı kümeleri $\mathcal{A}$ daki sınırlı kümelere dönüştürür mü? Bunun için her bir $(x, y) \in B_\rho = \{(x, y) \in \mathcal{A} : \|(x, y)\|_{\mathcal{A}} \leq \rho\}$ ve herhangi bir $\rho > 0$ için $\|U(x, y)\|_{\mathcal{A}} \leq \omega$ olduğunu göstermek yeterlidir.

(a) ve (b) şartları ile

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |U_1(x, y)(t)|_1 \leq |x_0|_1 + T \cdot \|k_1\|_{C(S; \mathbb{R}^+)} \quad (3.19)$$

ve

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |U_2(x, y)(t)|_1 \leq \|\sigma_q^{-1}\|_1 \cdot T \cdot \|k_2\|_{C(S; \mathbb{R}^+)} \quad (3.20)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(3.19) ve (3.20) kullanılarak

$$\|U(x, y)\|_{\mathcal{A}} \leq |x_0|_1 + T \cdot [\|k_1\|_{C(S; \mathbb{R}^+)} + \|\sigma_q^{-1}\|_1 \cdot \|k_2\|_{C(S; \mathbb{R}^+)}] = \omega$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda ikinci adım tamamlanır.

Adım 3: U operatörü sınırlı kümeleri $\mathcal{A}$ nın eşsürekli kümelerine dönüştürür mü?

B_ρ kümesi adım 2 deki gibi tanımlanan sınırlı bir küme olsun. $t_1, t_2 \in S$ ve $t_1 < t_2$ alalım. Ek olarak $(x, y) \in B_\rho$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |U_1(x, y)(t_2) - U_1(x, y)(t_1)|_1 &\leq \int_{t_1}^{t_2} |g(s, x(s), y(s))|_1 d_q s \\ &\leq k_1 |t_2 - t_1| \end{aligned} \quad (3.21)$$

ve

$$\begin{aligned} |U_2(x, y)(t_2) - U_2(x, y)(t_1)|_1 &\leq \int_0^T |G_q(t_2, s) - G_q(t_1, s)|_1 \cdot |h(s, x(s), y(s))|_1 d_q s \\ &\leq k_2 |t_2 - t_1|. \end{aligned} \quad (3.22)$$

$t_1 \rightarrow t_2$ iken (3.21) ve (3.22) eşitsizliklerinin sağ tarafı sıfıra yaklaşır. Bu sebeple adım 3 tamamlanır. Son olarak adım 1-3 ve Arzela-Ascoli teoremi beraber düşünüldüğünde U operatörünün tamamen (completely) sürekli olduğu görülür.

Adım 4: Bazı $0 < \beta < 1$ için $\Delta = \{(x, y) \in \mathcal{A} : (x, y) = \beta \cdot U(x, y)\}$ kümesi sınırlı mıdır?

Kabul edelim ki $(x, y) \in \mathcal{A}$ olsun. Buna göre bazı $0 < \beta < 1$ için $(x, y) = \beta \cdot U(x, y)$ dir. Buradan her bir $t \in S$ için

$$x(t) = \beta \cdot x_0 + \beta \cdot \int_0^t g(s, x(s), y(s)) d_q s$$

ve

$$y(t) = \beta \cdot \int_0^T G_q(t, s) \cdot h(s, x(s), y(s)) d_q s$$

eşitlikler yazılabilir. Eşitliklerden (a) ve (b) şartlarından yararlanılarak (adım 2 deki gibi benzer işlemler yapılarak) her bir $t \in S$ için

$$|U_1(x, y)(t)|_1 \leq |x_0|_1 + T \cdot \|k_1\|_{C(S; \mathbb{R}^+)}$$

ve

$$|U_2(x, y)(t)|_1 \leq \|\sigma_q^{-1}\|_1 \cdot T \cdot \|k_2\|_{C(S; \mathbb{R}^+)}$$

eşitsizliklerine ulaşılır. Son olarak bu eşitsizlikler kullanılarak her $t \in S$ için

$$\|(x, y)\|_{\mathcal{A}} \leq \omega$$

olur. Bu nedenle Δ kümesi sınırlıdır.

Böylece Schaefer sabit nokta teoreminin şartları sağlanır. Dolayısıyla Schaefer sabit nokta teoreminin bir sonucu olarak U operatörü bir sabit noktaya sahiptir ve bu sabit nokta (3.1)-(3.2) probleminin bir çözümüdür. O halde (3.1)-(3.2) problemi S üzerinde bir çözüme sahiptir.

Sonuç 3.2.2. $S = [0, T]$ olsun. Eğer $q \rightarrow 1$ iken limit alınırsa, bu durumda problem (1.1)-(1.2), Schaefer sabit nokta teoreminin bir sonucu olarak en azından bir çözüme sahiptir.

Açıklama 3.2.3. $\mathcal{V}, \Gamma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ operatörleri sırasıyla

$$U_1(x, y)(t) = x_0 + \int_0^t g(s, x(s), y(s)) d_qs$$

olmak üzere

$$\mathcal{V}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(x, y) \rightarrow (U_1(x, y), 0),$$

ve

$$U_2(x, y)(t) = \int_0^T G_q(t, s) \cdot h(s, x(s), y(s)) d_qs$$

olmak üzere

$$\Gamma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(x, y) \rightarrow (0, U_2(x, y))$$

şeklinde tanımlı olsunlar. Burada açıkça $U = \mathcal{V} + \Gamma$ olduğu görülür.

Aşağıdaki teoremlerle (3.1)-(3.2) sisteminin çözümünün varlığı Krasnoselskii sabit nokta teoremi kullanılarak elde edilir.

Teorem 3.2.4. Kabul edelimki aşağıdaki şartlar sağlansın.

a) $0 < \int_0^T \|K(t)\|_1 d_q t + \sum_{j=1}^N \|C_j\|_1 < 1$ olacak şekilde $K \in \mathcal{C}(S; \mathcal{K}_n)$ ve $C_j \in \mathcal{K}_n$ olsun.

b) Her $(t, x, y), (t, \bar{x}, \bar{y}) \in S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için

$$|g(t, x(t), y(t)) - g(t, \bar{x}, \bar{y})|_1 \leq L_g(t)(|x - \bar{x}|_1 + |y - \bar{y}|_1)$$

olacak şekilde bir pozitif $L_g \in L^1(S^*)$ fonksiyonu var olsun.

c) Her $(t, x, y) \in S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için

$$|h(t, x(t), y(t))|_1 \leq h_1(t)(|x|_1 + |y|_1) + h_2(t)$$

olacak şekilde iki pozitif $h_1, h_2 \in L^1(S^*)$ fonksiyonları var olsun.

Ek olarak

$$L_1 = \|L_g\|_{L^1(S^*)} + \|\sigma_q^{-1}\|_1 \|h_1\|_{L^1(S^*)} < 1$$

olsun. Bu durumda (3.1)-(3.2) problemi en azından bir çözüme sahiptir.

İspat. Teoremin ispatı üç adımda yapılacaktır.

Adım 1: Her $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in B_R = \{(x, y) \in \mathcal{A} : \|(x, y)\|_{\mathcal{A}} \leq R\}$ için

$$\mathcal{V}(x, y) + \Gamma(\bar{x}, \bar{y}) \in B_R \quad (3.23)$$

olacak şekilde bir pozitif $R > 0$ sabiti var mıdır? Bunu ispatlayabilmek için $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in B_R$ olsun. Bu durumda

$$R > \frac{|x_0|_1 + g_* T + \|h_2\|_{L^1(S^*)} \|\sigma_q^{-1}\|_1}{(1-L_1)} \quad (3.24)$$

olacak şekilde yeterince büyük $R > 0$ seçimi ile

$$\begin{aligned} |U_1(x, y)|_1 &\leq |x_0|_1 + \int_0^t |g(s, x(s), y(s))|_1 d_q s \\ &\leq |x_0|_1 + \|L_g\|_{L^1(S^*)} R + g_* T \end{aligned} \quad (3.25)$$

ve

$$\begin{aligned} |U_2(\bar{x}, \bar{y})|_1 &\leq \|\sigma_q^{-1}\|_1 \int_0^T |h(s, \bar{x}(s), \bar{y}(s))|_1 d_q s \\ &\leq \|\sigma_q^{-1}\|_1 [\|h_1\|_{L^1(S^*)} R + \|h_2\|_{L^1(S^*)}] \end{aligned} \quad (3.26)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.24), (3.25) ve (3.26) eşitsizlikleri kullanılarak (3.23) elde edilir.

Adım 2: $\mathcal{V}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ operatörü bir daralma operatörü müdür?

(x, y) ve $(\bar{x}, \bar{y})$ elemanları $\mathcal{A}$ uzayında keyfi iki eleman olsun. Bu durumda $\mathcal{V}$ operatörünün tanımından

$$\begin{aligned} |U_1(x, y) - U_2(\bar{x}, \bar{y})|_1 &\leq \int_0^t |g(s, x(s), y(s)) - g(s, \bar{x}(s), \bar{y}(s))|_1 d_q s \\ &\leq \|L_g\|_{L^1(S^*)} \|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\|_{\mathcal{A}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir. $\|L_g\|_{L^1(S^*)} \leq L_1 < 1$ olduğundan $U_1: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}(S; \mathbb{R}^n)$ operatörü bir daralma dönüşümüdür. Dolayısıyla $\mathcal{V} = (U_1, 0): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ operatörü de bir daralma dönüşümüdür.

Adım 3: $\Gamma: B_R \rightarrow \mathcal{A}$ operatörü kompakt ve sürekli midir?

İlk olarak U_2 operatörünün sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için $k \rightarrow +\infty$ iken

$$\|(x_k, y_k) - (x, y)\|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$$

olacak şekilde $(x, y) \in B_R$ ve B_R kümesinde $\{(x_k, y_k)\}$ dizisi alınsın. Lebesgue sınırlı yakınsaklık teoremi ve h fonksiyonunun sürekliliği kullanılarak $k \rightarrow +\infty$ iken

$$\int_0^T |h(t, x_k(t), y_k(t)) - h(t, x(t), y(t))|_1 d_q t \rightarrow 0 \quad (3.28)$$

elde edilir. (3.28) dan $k \rightarrow +\infty$ iken

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq t \leq T} |U_2(x_k, y_k)(t) - U_2(x, y)(t)|_1 \\ &\leq \|\sigma_q^{-1}\|_1 \int_0^T |h(t, x_k(t), y_k(t)) - h(t, x(t), y(t))|_1 d_q t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece U_2 süreklidir.

Şimdi $U_2(B_R)$ nin göreceli (relatively) kompakt olduğunu gösterelim. h fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğundan her $t \in S$ ve her $(x, y) \in B_R$ için $|h(t, x(t), y(t))|_1 \leq k_R$ olacak şekilde $k_R > 0$ vardır. Bu neddenle $U_2(B_R)$, $\mathcal{C}(S; \mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır. Keyfi $(x, y) \in B_R$ alınarak ve $t_1, t_2 \in S$, $t_1 < t_2$ için

$$|U_2(x, y)(t_1) - U_2(x, y)(t_2)|_1 = \left| \int_{t_1}^{t_2} h(s, x(s), y(s)) d_q s \right|_1 \leq k_R |t_1 - t_2|$$

elde edilir. Böylece $U_2(B_R)$ eşsüreklidir. Arzela-Ascoli teoreminden $U_2(B_R)$ göreceli (relatively) kompakttır.

Sonuç olarak Krasnoselskii sabit nokta teoreminden $U = \mathcal{V} + \Gamma$ operatörü bir sabit noktaya sahiptir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.5. $S = [0, T]$ olsun. Bu durumda Teorem 3.2.4 [21] nolu çalışmadaki Teorem 3.5 e indirgenir.

Sonuç 3.2.6. Teorem 3.2.4 ün a) şartından

$$\left\| \int_0^T K(\tau) d_q \tau + \sum_{j=1}^N C_j \right\|_1 \leq \int_0^T \|K(t)\|_1 d_q t + \sum_{j=1}^N \|C_j\|_1 < 1$$

elde edilir. Dolayısıyla $\sigma_q = I - \sum_{j=1}^N C_j - \int_0^T K(\tau) d_q \tau$ matrisi terslenebilirdir ve

$$\|\sigma_q^{-1}\|_1 \leq \frac{1}{1 - \left\| \int_0^T K(\tau) d_q \tau + \sum_{j=1}^N C_j \right\|_1} \leq \frac{1}{1 - \int_0^T \|K(t)\|_1 d_q t - \sum_{j=1}^N \|C_j\|_1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.2.4 ün daha iyi anlaşılması için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 3.2.7. q -başlangıç değer problemi $t \in S^*$ için

$$\begin{cases} D_q x_1(t) = \frac{3}{100} E_q^{-t} |x(t)|_1, \\ D_q x_2(t) = \frac{7}{100} E_q^{-t} |y(t)|_1, \\ D_q y_1(t) = \frac{1}{136(E_q^2)^2} E_q^{-t} \left[x_1(t) \cdot \cos\left(\sqrt{y_1(t)}\right) + y_2(t) \right], \\ D_q y_2(t) = \frac{1}{136(E_q^2)^2} E_q^{-t} \left[y_1(t) \cdot \cos\left(\sqrt{y_2(t)}\right) + x_2(t) \right], \\ (x_1(0), x_2(0))^T = x_0 \in \mathbb{R}^2, \quad t \in S^* \\ y_1(0) = \frac{1}{4} y_1\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} y_1(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 E_q^{-t} \cdot y_1(t) d_q t, \\ y_2(0) = \frac{1}{4} y_1\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} y_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} y_2(1) \\ \quad + \frac{1}{4} \int_0^1 E_q^{-t} \cdot y_1(t) d_q t + \frac{1}{4} \int_0^1 E_q^{-t} \cdot y_2(t) d_q t \end{cases} \quad (3.29)$$

şekilde olsun. Dikkat edilirse (3.29) problemi, $n = 2$ olmak üzere $g(t, x, y) = (g_1(t, x, y), g_2(t, x, y))^T$ ve $h(t, x, y) = (h_1(t, x, y), h_2(t, x, y))^T$ fonksiyonları için (3-4) problemi olur. Burada

$$g_1(t, x, y) = \frac{3}{100} E_q^{-t} |x(t)|_1,$$

$$g_2(t, x, y) = \frac{7}{100} E_q^{-t} |y(t)|_1,$$

$$h_1(t, x, y) = \frac{1}{136(E_q^2)^2} E_q^{-t} [x_1(t) \cdot \cos(\sqrt{y_1(t)}) + y_2(t)],$$

$$h_2(t, x, y) = \frac{1}{136(E_q^2)^2} E_q^{-t} [y_1(t) \cdot \cos(\sqrt{y_2(t)}) + x_2(t)],$$

ve $N = 2$, $T_1 = \frac{1}{2}$, $T_2 = T = 1$ ve $q = \frac{1}{2}$ dir.

Ayrıca,

$$K(t) = \frac{1}{e_q^t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

şeklinde olsun. Bu durumda yukarıdaki matrislere göre $\|K(t)\|_1$, $\|C_1\|_1$ ve $\|C_2\|_1$ normları hesaplandığında

$$\int_0^T \|K(t)\|_1 d_q t + \|C_1\|_1 + \|C_2\|_1 < 1$$

olduğu görülür. O halde a) şartı elde edilir.

$$L_g(t) = 10^{-1} E_q^{-t}, h_1(t) = \max\left(\frac{1}{136(E_q^2)^2}, \frac{1}{272(E_q^2)^2}\right) \cdot E_q^{-t} \text{ ve } h_2(t) = 0$$

seçilirse,

$$|g(s, x(s), y(s)) - g(s, \bar{x}(s), \bar{y}(s))|_1 \leq 10^{-1} E_q^{-t} \cdot (|x - \bar{x}|_1 + |y - \bar{y}|_1)$$

ve

$$|h(t, x(t), y(t))|_1 \leq \frac{1}{136(E_q^2)^2} \cdot E_q^{-t} (|x|_1 + |y|_1)$$

elde edilir. Bu eşitsizliklerden b) ve c) şartları sağlanır.

Ayrıca

$$\sigma_q \equiv I - \int_0^1 K(t) d_q t - C_1 - C_2$$

$$\begin{aligned}
&= I - \frac{1}{2}(1 - e_q^{-2}) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_{11}^q & 0 \\ \sigma_{21}^q & \sigma_{22}^q \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olup buradan

$$\sigma_{11}^q = 1 - \frac{1 - e_q^{-2}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4E_q^2} + \frac{3}{8} > 0,$$

$$\sigma_{21}^q = -\frac{1 - e_q^{-2}}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8E_q^2} - \frac{3}{8} < 0,$$

$$\sigma_{22}^q = 1 - \frac{1 - e_q^{-2}}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{8E_q^2} + \frac{11}{16} > 0$$

dır. Bu durumda

$$\sigma_q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8E_q^2}{2 + 3E_q^2} & 0 \\ \frac{16E_q^2(3E_q^2 - 1)}{(3E_q^2 + 2)(11E_q^2 + 2)} & \frac{16E_q^2}{11E_q^2 + 2} \end{bmatrix} > 0$$

elde edilir. Buna göre normu da

$$\begin{aligned}
\|\sigma_q^{-1}\|_1 &= \max \left\{ \frac{8E_q^2}{2 + 3E_q^2} + \frac{16E_q^2(3E_q^2 - 1)}{(3E_q^2 + 2)(11E_q^2 + 2)}, \frac{16E_q^2}{11E_q^2 + 2} \right\} \\
&= \frac{136(E_q^2)^2}{(3E_q^2 + 2)(11E_q^2 + 2)}
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

Son olarak

$$\begin{aligned}
L_1 &= \|L_g\|_{L^1(S^*)} + \|h_1\|_{L^1(S^*)} \|\sigma_q^{-1}\|_1 \\
&= 10^{-1} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{E_q^2} \right) + \frac{1}{136(E_q^2)^2} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{E_q^2} \right) \cdot \frac{136(E_q^2)^2}{(3E_q^2 + 2)(11E_q^2 + 2)} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{E_q^2} \right) \left[10^{-1} + \frac{1}{(3E_q^2 + 2)(11E_q^2 + 2)} \right] < 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece Teorem 3.2.4'ün tüm şartları sağlanır. Dolayısıyla (3.29) problemi en az bir çözüm sahiptir.

Eğer Teorem 3.2.4 teki c) şartı d) şartı ile değiştirilirse, Banach sabit nokta teoremi kullanılarak çözümlerin varlığı ve tekliğini ispatlayan aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.2.8. a), b) ve aşağıda verilen d) şartının sağlandığını kabul edelim.

d) Her $(t, x, y), (t, \bar{x}, \bar{y}) \in S \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için

$$|h(t, x(t), y(t)) - h(t, \bar{x}, \bar{y})|_1 \leq L_h(t)(|x - \bar{x}|_1 + |y - \bar{y}|_1)$$

olacak şekilde bir pozitif $L_h \in L^1(S^*)$ fonksiyonu var olsun.

Ayrıca

$$L = \|L_g\|_{L^1(S^*)} + \|\sigma_q^{-1}\|_1 \cdot \|L_h\|_{L^1(S^*)} < 1 \quad (3.30)$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.1)-(3.2) problemi bir tek çözüme sahiptir.

İspat. g_* ve h_* aşağıdaki gibi alınsın.

$$g_* = \max_{0 \leq t \leq T} |g(t, 0, 0)|_1, \quad h_* = \max_{0 \leq t \leq T} |h(t, 0, 0)|_1.$$

Yeterince büyük $R > 0$ aşağıdaki gibi seçilsin.

$$R > \frac{|x_0|_1 + T(g_* + h_* \|\sigma_q^{-1}\|_1)}{1-L} \quad (3.31)$$

İlk olarak $U(B_R) \subset B_R$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için $B_R = \{(x, y) \in \mathcal{A} : \|(x, y)\|_{\mathcal{A}} \leq R\}$ olsun. Her $t \in S$ ve $(x, y) \in B_R$ için

$$\begin{aligned} |U_1(x, y)|_1 &\leq |x_0|_1 + \int_0^t |g(s, x(s), y(s)) - g(s, 0, 0)|_1 d_qs + \int_0^t |g(s, 0, 0)|_1 d_qs \\ &\leq |x_0|_1 + \|L_g\|_{L^1(S^*)} \cdot R + g_* T \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} |U_2(x, y)|_1 &\leq \|\sigma_q^{-1}\|_1 \left[\int_0^T |h(s, x(s), y(s)) - h(s, 0, 0)|_1 d_qs + \int_0^T |h(s, 0, 0)|_1 d_qs \right] \\ &\leq \|\sigma_q^{-1}\|_1 \cdot [\|L_h\|_{L^1(S^*)} \cdot R + h_* T] \end{aligned} \quad (3.33)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.32) ve (3.33) eşitsizliklerinden yararlanılarak ve (3.31) den

$U(B_R) \subset B_R$ bulunur. Bu durumda $U: B_R \rightarrow B_R$ operatörü iyi tanımlıdır.

Şimdi U nun bir daralma operatörü olduğu gösterilmelidir. $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in B_R$ için

$$\begin{aligned} |U_1(x, y)(t) - U_1(\bar{x}, \bar{y})(t)|_1 &\leq \int_0^t |g(s, x(s), y(s)) - g(s, \bar{x}(s), \bar{y}(s))|_1 d_qs \\ &\leq \|L_g\|_{L^1(S^*)} \cdot \|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\|_{\mathcal{A}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

ve

$$\begin{aligned} |U_2(x, y)(t) - U_2(\bar{x}, \bar{y})(t)|_1 &\leq \|\sigma_q^{-1}\|_1 \int_0^T |h(s, x(s), y(s)) - h(s, \bar{x}(s), \bar{y}(s))|_1 d_qs \\ &\leq \|\sigma_q^{-1}\|_1 \cdot \|L_h\|_{L^1(S^*)} \cdot \|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\|_{\mathcal{A}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.34), (3.35) ve (3.30) kullanılarak $U: B_R \rightarrow B_R$ operatörünün bir daralma operatörü olduğu sonucuna varılır.

Bu durumda Banach sabit nokta teoreminin şartlarından (3.1)-(3.2) probleminin bir tek çözümü vardır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.9. $S = [0, T]$ olsun. Bu durumda Teorem 3.2.8, $q \rightarrow 1$ iken limit alınır [21] nolu çalışmadaki Teorem 3.1 e indirgenir.

Teorem 3.2.8 nin daha iyi anlaşılması için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 3.2.10. Aşağıdaki q -başlangıç değer problemi göz önüne alınsın. $t \in S^*$ için

$$\begin{cases} D_q x_1(t) = \frac{6}{100} E_q^{-t} [\sin(|x(t)|_1) + \tan^{-1}(|y(t)|_1)], \\ D_q x_2(t) = \frac{4}{100} E_q^{-t} [\sin(|y(t)|_1) + \tan^{-1}(|x(t)|_1)], \\ D_q y_1(t) = \frac{7}{2720(E_q^2)^2} E_q^{-t} |x(t)|_1, \\ D_q y_2(t) = \frac{13}{2720(E_q^2)^2} E_q^{-t} |y(t)|_1, \\ (x_1(0), x_2(0))^T = x_0 \in \mathbb{R}^2, \quad t \in S^* \\ y_1(0) = \frac{1}{4} y_1\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} y_1(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 E_q^{-t} \cdot y_1(t) d_q t, \\ y_2(0) = \frac{1}{4} y_1\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} y_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} y_2(1) \\ \quad + \frac{1}{4} \int_0^1 E_q^{-t} \cdot y_1(t) d_q t + \frac{1}{4} \int_0^1 E_q^{-t} \cdot y_2(t) d_q t \end{cases} \quad (3.36)$$

olsun. Bu durumda (3.36) problemi $n = 2$, $g(t, x, y) = (g_1(t, x, y), g_2(t, x, y))^T$ ve $h(t, x, y) = (h_1(t, x, y), h_2(t, x, y))^T$ için (3.1)-(3.2) şeklindedir. Buna göre

$$g_1(t, x, y) = \frac{6}{100} E_q^{-t} [\sin(|x(t)|_1) + \tan^{-1}(|y(t)|_1)],$$

$$g_2(t, x, y) = \frac{4}{100} E_q^{-t} [\sin(|y(t)|_1) + \tan^{-1}(|x(t)|_1)],$$

$$h_1(t, x, y) = \frac{7}{2720(E_q^2)^2} E_q^{-t} |x(t)|_1,$$

$$h_2(t, x, y) = \frac{13}{2720(E_q^2)^2} E_q^{-t} |y(t)|_1,$$

olur ve ayrıca $N = 2, T_1 = \frac{1}{2}, T_2 = T = 1, q = \frac{1}{2}$ olmak üzere $K(t), C_1$ ve C_2 matrisleri Örnek 3.2.7 deki gibi;

$$K(t) = \frac{1}{e_q^t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$\int_0^T \|K(t)\|_1 d_q t + \|C_1\|_1 + \|C_2\|_1 < 1$$

olduğu aşıkardır. Diğer taraftan $L_g(t) = 10^{-1} E_q^{-t}$ ve $L_h(t) = \frac{1}{136(E_q^2)^2} E_q^{-t}$ olarak seçilirse o zaman

$$|g(s, x(s), y(s)) - g(s, \bar{x}(s), \bar{y}(s))|_1 \leq 10^{-1} E_q^{-t} \cdot (|x - \bar{x}|_1 + |y - \bar{y}|_1)$$

ve

$$|h(s, x(s), y(s)) - h(s, \bar{x}(s), \bar{y}(s))|_1 \leq \frac{1}{136(E_q^2)^2} \cdot E_q^{-t} \cdot (|x - \bar{x}|_1 + |y - \bar{y}|_1)$$

eşitsizliklerine ulaşılır. Böylece b) ve d) şartları sağlanır. Ayrıca

$$\|L_g\|_{L^1(S^*)} = 20^{-1} \left(1 - \frac{1}{E_q^2}\right),$$

$$\|L_h\|_{L^1(S^*)} = \frac{1}{272(E_q^2)^2} \left(1 - \frac{1}{E_q^2}\right)$$

ve

$$\|\sigma_q^{-1}\|_1 = \frac{136(E_q^2)^2}{(3E_q^2 + 2)(11E_q^2 + 2)}$$

olduğu için

$$\begin{aligned} L &= \|L_g\|_{L^1(S^*)} + \|L_h\|_{L^1(S^*)} \|\sigma_q^{-1}\|_1 \\ &= 20^{-1} \left(1 - \frac{1}{E_q^2}\right) + \frac{1}{272(E_q^2)^2} \left(1 - \frac{1}{E_q^2}\right) \cdot \frac{136(E_q^2)^2}{(3E_q^2 + 2)(11E_q^2 + 2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{E_q^2}\right) \left[10^{-1} + \frac{1}{(3E_q^2 + 2)(11E_q^2 + 2)}\right] < 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda Teorem 3.2.8'in tüm şartları sağlanır. O halde Banach sabit nokta teoremine göre (3.36) nın bir tek çözümü vardır.

4. İKİNCİ MERTEBEDEN (p, q) -FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}_0 = \mathbb{T} \cup \{0\}$ ve $T \in \mathbb{T}$ olmak üzere $[0, T]_{\mathbb{T}_0}$ kümesi göz önüne alınacaktır.

4.1. İkinci Dereceden (p, q) -Fark Denkleminin Çözümlerinin Varlığı ve Tekliği

Dördüncü bölümün bu kısmında,

$$\begin{cases} D_{p,q}^2 x(t) = \varphi(t, x^\sigma(qt)), & t \in \left[0, \frac{T}{p^2 \cdot q^2}\right]_{\mathbb{T}_0} \\ x(0) = x_0 + k(x), & x(T) = \delta \int_0^T x(s) d_{p,q}s \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklindeki ikinci mertebeden (p, q) -fark denkleminin çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenecektir. Burada $\delta \neq 0$ herhangi bir sayı, $\delta \cdot T \neq p + q$ ve $\varphi \in C([0, T]_{\mathbb{T}_0} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ fonksiyonu $\left[0, \frac{T}{p \cdot q}\right]_{\mathbb{T}_0}$ üzerinde (p, q) -diferensiyellenebilir bir fonksiyondur.

$\mathcal{X} = C([0, T]_{\mathbb{T}_0}; \mathbb{R})$ uzayı;

$$\|x(t)\| = \sup\{|x(t)| : t \in [0, T]_{\mathbb{T}_0}\}$$

normu ile tanımlı tüm sürekli reel fonksiyonların uzayını gösterecektir. Ayrıca

$$k: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

herhangi bir sınırlı fonksiyondur.

Lemma 4.1.1. $\eta \in \mathcal{X}$ ve $\eta(t) = -\varphi(t, x^\sigma(qt))$ olsun. Bu durumda

$$\begin{cases} D_{p,q}^2 x(t) + \eta(t) = 0, & t \in \left[0, \frac{T}{p^2 \cdot q^2}\right]_{\mathbb{T}_0} \\ x(0) = x_0 + k(x), & x(T) = \delta \int_0^T x(s) d_{p,q}s \end{cases} \quad (4.2)$$

ile verilen sınır değer problemi

$$\begin{aligned} x(t) = (x_0 + k(x)) \cdot \frac{[(p+q) \cdot (T + t \cdot (\delta \cdot T - 1)) - \delta \cdot T^2]}{T \cdot (p+q - \delta \cdot T)} \\ + \frac{t \cdot (p+q)}{T \cdot p \cdot (p+q - \delta \cdot T)} \int_0^T (T - qs) \eta\left(\frac{s}{p}\right) d_{p,q}s - \frac{1}{p} \int_0^t (t - qs) \eta\left(\frac{s}{p}\right) d_{p,q}s \end{aligned}$$

$$-\frac{\delta.t.(p^2-q^2)}{T.p^3.(p+q-\delta.T)} \int_0^T (Ts - qs^2) \eta\left(\frac{s}{p^2}\right) d_{p,q}s$$

(p, q) -integral denklemine denktir.

İspat. (4.2) deki ilk denkleme (p, q) -integrali uygulanırsa, $t \in \left[0, \frac{T}{p.q}\right]_{\mathbb{T}_0}$ için

$$D_{p,q}x(t) = D_{p,q}x(0) - \int_0^t \eta(s) d_{p,q}s \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.3) denklemine tekrar (p, q) -integral uygulanırsa $t \in [0, T]_{\mathbb{T}_0}$ için

$$x(t) = x_0 + t.D_{p,q}x(0) - \frac{1}{p} \int_0^t (t - qs) \eta\left(\frac{s}{p}\right) d_{p,q}s \quad (4.4)$$

elde edilir. İşlemlerde kolaylık sağlaması amacıyla elde edilen (4.4) denkleminde $x(0) = c_0$ ve $D_{p,q}x(0) = c_1$ alınırsa bu durumda

$$x(t) = c_0 + c_1.t - \frac{1}{p} \int_0^t (t - qs) \eta\left(\frac{s}{p}\right) d_{p,q}s \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.5) denkleminde $t = 0$ yazılırsa

$$x(0) = c_0 = x_0 + k(x) \quad (4.6)$$

olur ve (4.6) denklemi (4.5) de yerine koyulursa

$$x(t) = x_0 + k(x) + c_1.t - \frac{1}{p} \int_0^t (t - qs) \eta\left(\frac{s}{p}\right) d_{p,q}s \quad (4.7)$$

elde edilir. İkinci sınır şartı kullanılırsa, bu durumda

$$c_1 = \frac{1}{T}(-x_0 - k(x)) + \frac{\delta}{T} \int_0^T x(s) d_{p,q}s + \frac{1}{T.p} \int_0^T (T - qs) \cdot \eta\left(\frac{s}{p}\right) d_{p,q}s$$

olarak bulunur. Elde edilen c_1 , (4.7) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_0 + k(x)) \left(\frac{T-t}{T}\right) + \frac{\delta.t}{T} \int_0^T x(s) d_{p,q}s + \frac{t}{T.p} \int_0^T (T - qs) \cdot \eta\left(\frac{s}{p}\right) d_{p,q}s \\ &\quad - \frac{1}{p} \int_0^t (t - qs) \cdot \eta\left(\frac{s}{p}\right) d_{p,q}s \end{aligned} \quad (4.8)$$

eşitliğine ulaşılır. Eğer (4.8)'in her iki tarafının integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^T x(s) d_{p,q}s &= (x_0 + k(x)) \frac{T.(p+q-1)}{p+q-\delta.T} \\ &\quad + \frac{T}{p(p+q-\delta.T)} \int_0^T (T - qs) \cdot \eta\left(\frac{s}{p}\right) d_{p,q}s \end{aligned}$$

$$-\frac{p^2-q^2}{p^3(p+q-\delta.T)} \int_0^T (Ts - qs^2) \cdot \eta\left(\frac{s}{p^2}\right) d_{p,q}s \quad (4.9)$$

bulunur. Son olarak elde edilen (4.9) eşitliği (4.8) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x(t) = & (x_0 + k(x)) \cdot \frac{[(p+q) \cdot (T+t \cdot (\delta.T-1)) - \delta.T^2]}{T \cdot (p+q-\delta.T)} \\ & + \frac{t \cdot (p+q)}{T \cdot p \cdot (p+q-\delta.T)} \int_0^T (T-qs) \eta\left(\frac{s}{p}\right) d_{p,q}s - \frac{1}{p} \int_0^t (t-qs) \eta\left(\frac{s}{p}\right) d_{p,q}s \\ & - \frac{\delta \cdot t \cdot (p^2-q^2)}{T \cdot p^3 \cdot (p+q-\delta.T)} \int_0^T (Ts - qs^2) \eta\left(\frac{s}{p^2}\right) d_{p,q}s \end{aligned}$$

olur. Böylece istenilen sonuca ulaşılır. İspat tamamlanır.

Açıklama 4.1.2. Bir $\mathcal{F}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ operatörü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}x)(t) = & (x_0 + k(x)) \cdot \frac{[(p+q) \cdot (T+t \cdot (\delta.T-1)) - \delta.T^2]}{T \cdot (p+q-\delta.T)} \\ & + \frac{t \cdot (p+q)}{T \cdot p \cdot (p+q-\delta.T)} \int_0^T (T-qs) \varphi(s, x(qs)) d_{p,q}s \\ & - \frac{1}{p} \int_0^t (t-qs) \varphi(s, x(qs)) d_{p,q}s \\ & - \frac{\delta \cdot t \cdot (p^2-q^2)}{T \cdot p^3 \cdot (p+q-\delta.T)} \int_0^T (Ts - qs^2) \varphi\left(s, x\left(\frac{qs}{p}\right)\right) d_{p,q}s. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Bu durumda Lemma 4.1.1 kullanılırsa (4.1) denkleminin bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{F}$ operatörünün bir sabit noktaya sahip olmasıdır. İşlemlerde kolaylık sağlanması amacıyla Ψ sabiti

$$\Psi = \left\{ \frac{T \cdot [(p+q+1) \cdot |\delta| + T]}{|p+q-\delta.T|} + \frac{T^2}{p+q} + \frac{T^3 \cdot |\delta| \cdot (p-q)}{p \cdot |p+q-\delta.T| \cdot (p^2+pq+q^2)} \right\} \quad (4.11)$$

olarak alınsın. Şimdi Banach sabit nokta teoremine dayanan aşağıdaki varlık ve teklik sonucunu verelim.

Teorem 4.1.3. $\varphi: \left[0, \frac{T}{p^2 \cdot q^2}\right]_{\mathbb{T}_0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon ve aşağıdaki şartlar mevcut olsun.

$$(A1) \quad \forall t \in \left[0, \frac{T}{p^2 \cdot q^2}\right]_{\mathbb{T}_0} \text{ ve } x(t), y(t) \in \mathbb{R} \text{ için}$$

$$|\varphi(t, x(t)) - \varphi(t, y(t))| \leq L_1 \cdot |x(t) - y(t)|$$

dir.

(A2) $\forall x, y \in \mathcal{X}$ için $|k(x) - k(y)| \leq L_2 \cdot \|x - y\|$ olacak şekilde $k: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu var olsun.

(A3) $L = \max\{L_1, L_2\}$ ve Ψ sabiti (4.11) deki gibi ve $L \cdot \Psi < 1$ dir.

Bu durumda (4.1) ile verilen problemin bir tek çözümü vardır.

İspat. Öncelikle (4.1) ile verilen problem, $\mathcal{F}$ operatörü (4.10) daki gibi olmak üzere $\mathcal{F}x = x$ olacak şekilde bir sabit nokta problemine dönüşür. Bu durumda kabul edelimki

$$\sup \left\{ |\varphi(t, 0)| : t \in \left[0, \frac{T}{p^2 \cdot q^2}\right]_{\mathbb{T}_0} \right\} = M_1$$

$$\sup\{|x_0 + k(x)| : k \in \mathcal{X}\} = M_2$$

ve

$$\max\{M_1, M_2\} = M$$

olsun. Ayrıca

$$R \geq \frac{M \cdot \Psi}{1 - L \cdot \Psi}$$

eşitsizliğini sağlayan bir R sabiti seçilsin. Bu durumda

$$\Omega_R = \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \leq R\}$$

olmak üzere $\mathcal{F}(\Omega_R) \subset \Omega_R$ olduğu gösterilmelidir. Herhangi bir $x \in \Omega_R$ için

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}x\| &\leq M_2 \cdot \sup_{t \in [0, T]_{\mathbb{T}_0}} \left| \frac{[(p+q) \cdot (T+t(\delta \cdot T - 1)) - \delta T^2]}{T \cdot (p+q - \delta \cdot T)} \right| \\ &\quad + \frac{T \cdot (p+q)}{T \cdot p \cdot |p+q - \delta \cdot T|} \cdot \sup_{t \in [0, T]_{\mathbb{T}_0}} \left| \int_0^T (T - qs) \cdot (L_1 \cdot \|x\| + M_1) d_{p,q}s \right| \\ &\quad + \frac{1}{p} \cdot \sup_{t \in [0, T]_{\mathbb{T}_0}} \left| \int_0^t (t - qs) \cdot (L_1 \cdot \|x\| + M_1) d_{p,q}s \right| \\ &\quad + \frac{|\delta| \cdot T \cdot (p^2 - q^2)}{T \cdot p^3 \cdot |p+q - \delta \cdot T|} \cdot \sup_{t \in [0, T]_{\mathbb{T}_0}} \left| \int_0^T (Ts - qs^2) \cdot (L_1 \cdot \|x\| + M_1) d_{p,q}s \right| \\ &\leq (L \cdot R + M) \left\{ \frac{T \cdot [(p+q+1) \cdot |\delta| + T]}{|p+q - \delta \cdot T|} + \frac{T^2}{p+q} \right. \\ &\quad \left. + \frac{T^3 \cdot |\delta| \cdot (p-q)}{p \cdot |p+q - \delta \cdot T| \cdot (p^2 + pq + q^2)} \right\} \end{aligned}$$

$$\leq (L.R + M). \Psi$$

$$\leq R$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathcal{F}(\Omega_R) \subset \Omega_R$ dir. Ayrıca $\mathcal{F}$ operatörünün bir daralma operatörü olduğu gösterilmelidir. Herhang bir $x, y \in \mathcal{X}$ ve $\forall t \in [0, T]_{\mathbb{T}_0}$ için

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}x - \mathcal{F}y\| &\leq \sup_{t \in [0, T]_{\mathbb{T}_0}} \left| (k(x) - k(y)) \frac{[(p+q).(T+t(\delta.T-1)) - \delta T^2]}{T.(p+q-\delta.T)} \right. \\ &\quad + \frac{t.(p+q)}{T.p.(p+q-\delta.T)} \cdot \int_0^T (T-qs). [\varphi(s, x(qs)) - \varphi(s, y(qs))] d_{p,q}s \\ &\quad - \frac{1}{p} \int_0^t (t-qs). [\varphi(s, x(qs)) - \varphi(s, y(qs))] d_{p,q}s \\ &\quad \left. - \frac{\delta.t.(p^2-q^2)}{T.p^3.(p+q-\delta.T)} \int_0^T (Ts - qs^2). \left[\varphi\left(s, x\left(\frac{qs}{p}\right)\right) - \varphi\left(s, y\left(\frac{qs}{p}\right)\right) \right] d_{p,q}s \right| \\ &\leq L_2. \|x - y\| \frac{(p+q+1).|\delta|.T}{|p+q-\delta.T|} \\ &\quad + L_1. \|x - y\| \left\{ \frac{T^2}{|p+q-\delta.T|} + \frac{T^2}{p+q} + \frac{T^3.|\delta|. (p-q)}{p.|p+q-\delta.T|. (p^2+pq+q^2)} \right\} \\ &\leq L. \Psi. \|x - y\| \end{aligned}$$

elde edilir. $L. \Psi < 1$ olduğu için $\mathcal{F}$ bir daralma operatörüdür.

Banach sabit nokta teoremi kullanılırsa ispat tamamlanır.

Örnek 4.1.4. (p, q) -sınır değer problemi aşağıdaki gibi olsun.

$$\begin{cases} D_{p,q}^2 x(t) = \frac{4t}{27 \times 10^5} \tan^{-1} x^\sigma(qt) + t.e^t, & t \in \left[0, \frac{T}{p^2.q^2}\right]_{\mathbb{T}_0} \\ x(0) = 2 + \frac{1}{10^5} x(t), & x(T) = \delta \int_0^T x(s) d_{p,q}s, \end{cases} \quad (4.12)$$

Ayrıca $T = 243, \delta = 1, p = 3, q = 2, L = L_1 = L_2 = \frac{1}{10^5}$ ve

$$\varphi(t, x^\sigma(qt)) = \frac{4t}{27 \times 10^5} \tan^{-1} x^\sigma(qt) + t.e^t$$

olsun. Bu durumda (4.12) problemi, (4.1) probleminin formundadır. $L_1 = \frac{1}{10^5}$ için

$$\begin{aligned} |\varphi(t, x(t)) - \varphi(t, y(t))| &\leq \frac{1}{10^5} |\tan^{-1} x(t) - \tan^{-1} y(t)| \\ &\leq \frac{1}{10^5} |x(t) - y(t)| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edildiği için (A1) şartı sağlanır. Benzer olarak (A2) şartı için $L_2 = \frac{1}{10^5}$ ile

$$|k(x) - k(y)| \leq L_2 \cdot \|x - y\|$$

olduğu açıktır. (4.11) eşitliğinden

$$\Psi = \frac{60507}{238} + \frac{59049}{5} + \frac{14348907}{13566} \approx 13121,742$$

elde edilir. Bu nedenle

$$L \cdot \Psi \approx 0,131 < 1$$

olur. Sonuç çıkar.

4.2. İkinci Dereceden (p, q) -Fark Denkleminin Çözümlerinin Salınımlılığı

Eğer (4.1) denkleminde

$$\varphi(t, x^\sigma(qt)) = -\rho(t) \cdot x^\sigma(qt)$$

olarak alınırsa bu durumda $p > q > 1$ ile $t \in \mathbb{T}$ için

$$D_{p,q}^2 x(t) + \rho(t) \cdot x^\sigma(qt) = 0 \quad (4.13)$$

şeklinde bir ikinci mertebeden (p, q) -fark denklemi elde edilir. Bu denklemde $\rho(t)$ fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\rho(t) = \frac{b}{q \cdot t \cdot \sigma(t)}.$$

Örnek 2.2.9 dan $x(qt)$ fonksiyonunun (p, q) -türevi kullanılırsa $t \in \mathbb{T}$ için

$$x^\sigma(qt) = x(\sigma(qt)) = x(pqt) = x(q^2t) + (p - q)t \cdot D_{p,q}x(qt) \quad (4.14)$$

eşitliği elde edilir. Eğer (4.14) eşitliği (4.13) denkleminde yerine yazılırsa bu durumda

$$\frac{p}{q} - a \left(\frac{p}{q} - 1 \right) + bq \left(\frac{p}{q} - 1 \right)^2 \neq 0 \quad (4.15)$$

ve $b \in \mathbb{R}$ için $a = b(p - q)$ olmak üzere (4.13) denklemi

$$qt \cdot \sigma(t) \cdot D_{p,q}^2 x(t) + at \cdot D_{p,q}x(qt) + b \cdot x(q^2t) = 0 \quad (4.16)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada dikkat edilirse (4.16) denkleminin [44] de verilen Euler-Cauchy q -fark denklemine benzediği görülmektedir. Bu nedenle (4.16) denklemi, *Euler-Cauchy-benzeri* (p, q) -fark denklemi olarak adlandırılacaktır.

Not 2.2.5 ve Uyarı 2.2.8 kullanılarak (4.14) deki denklemde

$$\rho = \gamma \frac{\left[\left(\frac{p}{q}+1\right)-a\left(\frac{p}{q}-1\right)\right]}{2} \quad (4.17)$$

ve

$$\ell = \gamma^2 \left[\left(\frac{a-1}{2} \right)^2 - bq \right] \left(\frac{p}{q} - 1 \right)^2 \quad (4.18)$$

olmak üzere ayrıca (4.17) ve (4.18) deki eşitliklere ek olarak

$$\rho = \gamma \left[1 - \frac{(a-1) \left(\frac{p}{q} - 1 \right)}{2} \right]$$

ve

$$\rho^2 - \ell = \gamma^2 \left[\frac{p}{q} - a \left(\frac{p}{q} - 1 \right) + bq \left(\frac{p}{q} - 1 \right)^2 \right] \quad (4.19)$$

dir. Bu durumda (4.14) denklemi,

$$x(p^2 t) - 2\rho \frac{1}{\gamma} x(pqt) + (\rho^2 - \ell) \frac{1}{\gamma^2} x(q^2 t) = 0 \quad (4.20)$$

olur.

Lemma 4.2.1. ρ ve ℓ sabitleri (4.17) ve (4.18) deki gibi olsun. $\gamma = \lambda^{\log_p q}$ alalım. Ayrıca (4.15) in mevcut olduğunu kabul edelim. Eğer

$$\lambda^2 - 2\rho\lambda + \rho^2 - \ell = 0 \quad (4.21)$$

ise bu durumda (4.16) denkleminin çözümü $t \in \mathbb{T}$ için

$$x_\lambda(t) = \lambda^{\log_p qt}$$

şeklindedir.

İspat.

$$x(pt) = \lambda^{\log_p q(pt)} = \lambda^{\log_p p + \log_p qt} = \lambda^{1 + \log_p qt} = \lambda \lambda^{\log_p qt} = \lambda x(t)$$

ve

$$x(qt) = \lambda^{\log_p q(qt)} = \lambda^{\log_p q + \log_p qt} = \lambda^{\log_p q + \log_p qt} = \lambda^{\log_p q} \lambda^{\log_p qt} = \gamma x(t)$$

olduğu için

$$x(p^2 t) = \lambda^{\log_p q(ppt)} = \lambda^{\log_p p^2 + \log_p qt} = \lambda^2 \lambda^{\log_p qt} = \lambda^2 x(t)$$

$$x(pqt) = \lambda x(qt) = \lambda \lambda^{\log_p q} x(t) = \gamma \lambda x(t)$$

$$x(q^2 t) = \gamma x(qt) = \gamma^2 x(t)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler kullanılarak $x = x_\lambda$ olmak üzere

$$x(p^2 t) - 2\rho \frac{1}{\gamma} x(pqt) + (\rho^2 - \ell) \frac{1}{\gamma^2} x(q^2 t) = (\lambda^2 - 2\rho\lambda + (\rho^2 - \ell))x(t) = 0$$

elde edilir. Böylece istenilen sonuca ulaşılır.

Burada $\lambda \neq 0$ olduğu için $x_\lambda(t)$

$$\begin{aligned} x_\lambda(t) &= \lambda^{\log_p qt} = [(\operatorname{sgn} \lambda)|\lambda|]^{\log_p qt} = (\operatorname{sgn} \lambda)^{\log_p qt} |\lambda|^{\log_p qt} \\ &= (\operatorname{sgn} \lambda)^{\log_p qt} (qt)^{\log_p |\lambda|} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Şimdi ℓ sabitinin değerine bağlı olarak (4.16) denkleminin genel çözümü verilebilir.

Teorem 4.2.2. ρ ve ℓ sabitleri (4.17) ve (4.18) deki gibi olsun ve (4.15) eşitliği var olsun. Bu durumda $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere (4.16) denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\text{i)} \quad \lambda_1 = \rho + \sqrt{\ell} \text{ ve } \lambda_2 = \rho - \sqrt{\ell} \text{ için eğer } \ell > 0 \text{ ise}$$

$$x(t) = c_1 \lambda_1^{\log_p qt} + c_2 \lambda_2^{\log_p qt}.$$

$$\text{ii)} \quad \lambda = \rho \text{ için eğer } \ell = 0 \text{ ise}$$

$$x(t) = (c_1 \ln t + c_2) \lambda^{\log_p qt}.$$

$$\text{iii)} \quad \lambda = \rho + i\sqrt{-\ell} \text{ için eğer } \ell < 0 \text{ ise}$$

$$\cos(\theta - \theta \cdot \log_p q) = \frac{\operatorname{Re} \lambda}{|\lambda|}$$

olmak üzere

$$x(t) = (c_1 \cos(\theta \cdot \log_p qt) + c_2 \sin(\theta \cdot \log_p qt)) |\lambda|^{\log_p qt}$$

dir.

İspat. (i) $\ell > 0$ iken λ_1 ve λ_2 , (4.21) denkleminin çözümleri olduğu için Lemma 4.2.1 den x_{λ_1} ve x_{λ_2} değerleri (4.16) denkleminin çözümleridir.

(ii) Eğer $\ell = 0$ ise Lemma 4.2.1 den dolayı (4.16) denkleminin çözümü x_λ dır. Burada $x(t) = x_\lambda(t)$ olarak tanımlanırsa bu durumda

$$x(pt) = \lambda [\lambda^{\log_p qt} \ln p + \lambda^{\log_p qt} \ln t] = \lambda [x(t) + x_\lambda(t) \ln p]$$

$$x(qt) = \lambda^{\log_p qt} [\ln t + \ln q] = \gamma x_\lambda(t) [\ln t + \ln q] = \gamma [x(t) + x_\lambda(t) \ln q]$$

$$x(pqt) = x(p(qt)) = \lambda [x(qt) + x_\lambda(qt) \ln p] = \lambda \gamma [x(t) + x_\lambda(t) \ln pq]$$

eşitlikleri elde edilir ve bu eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned} & x(p^2t) - 2\rho \frac{1}{\gamma} x(pqt) + (\rho^2 - \ell) \frac{1}{\gamma^2} x(q^2t) \\ &= x(p^2t) - 2\rho \frac{1}{\gamma} x(pqt) + \rho^2 \frac{1}{\gamma^2} x(q^2t) \\ &= \lambda^2 [x(t) + 2x_\lambda(t) \ln p] - 2\rho \frac{1}{\gamma} \lambda \gamma [x(t) + x_\lambda(t) \ln pq] \\ &\quad + \rho^2 \frac{1}{\gamma^2} \gamma^2 [x(t) + 2x_\lambda(t) \ln q] \\ &= (\lambda^2 - 2\rho\lambda + \rho^2)x(t) + [2\lambda^2 - 2\rho\lambda]x_\lambda(t) \ln p - 2\rho\lambda x_\lambda(t) \ln q + 2\rho^2 x_\lambda(t) \ln q \\ &= (\lambda^2 - 2\rho\lambda + \rho^2)x(t) + 2(\lambda - \rho)x_\lambda(t) [\lambda \ln p - \rho \ln q] \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. x 'in (4.16) denklemini sağladığı görülür.

(iii) Son olarak kabul edelimki $\ell < 0$ olsun. $\theta \in (0, \pi)$ olmak üzere

$$\cos(\theta - \theta \log_p q) = \frac{\operatorname{Re} \lambda}{|\lambda|} \in (-1, 1)$$

olsun. Ayrıca

$$u(t) = \cos(\theta \log_p qt)$$

$$v(t) = \sin(\theta \log_p qt)$$

olmak üzere

$$x(t) = x_{|\lambda|}(t) \cdot u(t)$$

ve

$$y(t) = x_{|\lambda|}(t) \cdot v(t)$$

olsun. Trigonometrik fonksiyonlarla ilgili formüller ve $u(t)$, $v(t)$ fonksiyonları kullanılarak

$$u(t) = u(pt) \cos \theta + v(pt) \sin \theta$$

$$v(t) = v(pt) \cos \theta - u(pt) \sin \theta$$

elde edilir ve bu yeni elde edilen fonksiyonlar tekrar kullanılarak $u(t)$ için

$$\begin{aligned} u(p^2t) &= u(pqt) [\cos \theta \cdot \cos(\theta \cdot \log_p q) + \sin \theta \cdot \sin(\theta \cdot \log_p q)] \\ &\quad + v(pqt) [\cos \theta \cdot \sin(\theta \cdot \log_p q) - \sin \theta \cdot \cos(\theta \cdot \log_p q)] \\ u(q^2t) &= u(pqt) [\cos \theta \cdot \cos(\theta \cdot \log_p q) + \sin \theta \cdot \sin(\theta \cdot \log_p q)] \\ &\quad - v(pqt) [\cos \theta \cdot \sin(\theta \cdot \log_p q) - \sin \theta \cdot \cos(\theta \cdot \log_p q)] \end{aligned}$$

ve $v(t)$ için

$$\begin{aligned} v(p^2t) &= v(pqt) [\sin \theta \cdot \sin(\theta \cdot \log_p q) + \cos \theta \cdot \cos(\theta \cdot \log_p q)] \\ &\quad + u(pqt) [\sin \theta \cdot \cos(\theta \cdot \log_p q) - \cos \theta \cdot \sin(\theta \cdot \log_p q)] \\ v(q^2t) &= v(pqt) [\sin \theta \cdot \sin(\theta \cdot \log_p q) + \cos \theta \cdot \cos(\theta \cdot \log_p q)] \\ &\quad - u(pqt) [\sin \theta \cdot \cos(\theta \cdot \log_p q) - \cos \theta \cdot \sin(\theta \cdot \log_p q)] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} x(p^2t) - 2\rho \frac{1}{\gamma} x(pqt) + (\rho^2 - \ell) \frac{1}{\gamma^2} x(q^2t) \\ &= x(p^2t) - 2\rho \frac{1}{\gamma} x(pqt) + |\lambda|^2 \frac{1}{\gamma^2} x(q^2t) \\ &= |\lambda|^2 \cdot x_{|\lambda|}(t) u(p^2t) - 2\rho |\lambda| x_{|\lambda|}(t) + |\lambda|^2 x_{|\lambda|}(t) u(q^2t) \\ &= 2|\lambda| x_{|\lambda|}(t) u(pqt) [|\lambda| (\cos \theta \cdot \cos(\theta \cdot \log_p q) + \sin \theta \cdot \sin(\theta \cdot \log_p q)) - \rho] \\ &= |\lambda| x_{|\lambda|}(t) u(pqt) [|\lambda| \cos(\theta - \theta \log_p q) - \rho] \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir ve benzer işlemler yapılarak

$$y(p^2t) - 2\rho \frac{1}{\gamma} y(pqt) + (\rho^2 - \ell) \frac{1}{\gamma^2} y(q^2t)$$

$$\begin{aligned}
&= |\lambda| x_{|\lambda|}(t) v(pqt) [|\lambda| \cos(\theta - \theta \log_p q) - \rho] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Böylece $x(t)$ ve $y(t)$, değerleri (4.16) denklemini sağlar. İspatı tamamlayabilmek için x ve y çözümlerinin lineer bağımsız oldukları gösterilmelidir. Bunun için (p, q) -analiz için Wronskian tanımı

$$W(x, y) = x(D_{p,q}y) - y(D_{p,q}x)$$

şeklindedir ve bu tanım kullanılarak her iki çözüm için $(p - q) \cdot t$. $W(x, y)$, sırasıyla

$$\ell > 0 \text{ için } \left[2\sqrt{\ell} - (\rho + \sqrt{\ell})^{\log_p q} + (\rho - \sqrt{\ell})^{\log_p q} \right] (\rho^2 - \ell)^{\log_p qt},$$

$$\ell = 0 \text{ için } \rho^{2 \log_p qt} [\rho \ln p - \ln q \rho^{\log_p q}],$$

ve

$$\ell < 0 \text{ için } (\rho^2 - \ell)^{2 \log_p qt} [(\rho^2 - \ell) \sin \theta - (\rho^2 - \ell)^{\log_p q} \sin(\theta \cdot \log_p q)]$$

elde edilir. Tüm durumlar düşünüldüğünde Wronskian ların sıfırdan farklı olduğu görülür. Böylece yukarıda bahsedilen üç durumdan her biri çözümlerin temel kümesini oluşturur.

Son olarak, $t_0 \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{cases} D_{p,q}^2 s(t) + \rho(t) \cdot s^\sigma(qt) = 0 \\ s(t_0) = s_0, \quad D_{p,q}s(t_0) = \tilde{s}_0 \end{cases}$$

ile verilen başlangıç değer probleminin $s(t)$ çözümü

$$s(t) = \frac{s_0 \cdot D_{p,q}y(t_0) - y(t_0) \cdot \tilde{s}_0}{W(x, y)(t_0)} x(t) + \frac{x(t_0) \cdot \tilde{s}_0 - s_0 \cdot D_{p,q}x(t_0)}{W(x, y)(t_0)} y(t)$$

olarak kolayca ifade edilebilir.

Uyarı 4.2.3. Bu teorem, [44] nolu çalışmadaki Teorem 4'ü (p, q) -analize genelleştirir. Yani Teorem 4.2.2, $p \rightarrow 1$ iken literatürdeki q -versiyonuna indirgenmektedir.

Teorem 4.2.4. (Sturm-type separation theorem)

(4.13) denkleminin bir çözümü salınımlı değildir (veya salınımlıdır) gerek ve yeter şart (4.13) denkleminin her çözümü salınımlı değildir (veya salınımlıdır).

İspat. Teoremi ispatlayabilmek için $x(t)$ çözümünün (4.13) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda tanımdan dolayı bazı $T > 0$

için $[T, \infty]$ aralığı üzerinde $x(qt).x^\sigma(t) > 0$ dır. Diğer taraftan $y(t)$ çözümü (4.13) denkleminin herhangi bir çözümü olsun. Ayrıca $x(t)$ ve $y(t)$ çözümleri lineer bağımsız olsun. $D_{p,q}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \neq 0$ dır. Bu durumda $y(t)/x(t)$ kesin olarak monotondur ve bu nedenle tek işarata sahiptir. Böylece

$$\frac{y(qt).y^\sigma(t)}{x(qt).x^\sigma(t)} = \left(\frac{y(qt)}{x(qt)}\right) \cdot \left(\frac{y^\sigma(t)}{x^\sigma(t)}\right)$$

pozitifdir ve buradan $y(qt).y^\sigma(t) > 0$ olur. Bu ise $y(t)$ çözümünün de salınımlı olmadığını gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.5.

$$D_{p,q}^2 x(t) + \frac{b}{q.t.\sigma(t)} x^\sigma(qt) = 0$$

şekilde tanımlanan ikinci mertebeden (p, q) -fark denkleminin salınımlı olması için gerek ve yeter şart

$$b > \frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2}$$

olmasıdır.

İspat. Teoremi ispatlayabilmek için teoremin ifadesindeki denklem

$$D_{p,q}^2 x(t) + \frac{b}{pqt^2} x(pqt) = 0 \quad (4.22)$$

şekilde yeniden yazılabilir. Eğer (4.14) denklemi kullanılırsa (4.22) denkleminde

$$pqt^2.D_{p,q}^2 x(t) + b(p-q)tD_{p,q}x(qt) + b.x(q^2t) = 0 \quad (4.23)$$

olarak Euler-Cauchy benzeri (p, q) -fark denklemi elde edilir. Dikkat edilirse (4.23) denklemi $a = b(p-q)$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere (4.16) denklemi şeklindedir. Diğer taraftan (4.17) ve (4.18) eşitlikleri kullanılarak ρ sabiti

$$\begin{aligned} \rho &= \gamma \frac{\left[\left(\frac{p+1}{q}\right) - a\left(\frac{p-1}{q}\right)\right]}{2} = \gamma \frac{\left[\frac{p+1}{q} - bq\left(\frac{p-1}{q}\right)^2\right]}{2} \\ &= \gamma \left[\sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{\left(\frac{p-1}{q}\right)^2}{2} q \left(b - \frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \gamma \left[-\sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{\left(\frac{p-1}{q}\right)^2}{2} q \left(b - \frac{1}{(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2} \right) \right] \quad (4.24)$$

olur ve ℓ sabiti ise

$$\begin{aligned} \ell &= \gamma^2 \left(\frac{p}{q} - 1 \right)^2 \left[\left(\frac{a-1}{2} \right)^2 - bq \right] \\ &= \gamma^2 \frac{\left(\frac{p-1}{q}\right)^2}{4} [b^2(p-q)^2 - 2b(p-q) + 1 - 4bq] \\ &= \gamma^2 \frac{\left(\frac{p-1}{q}\right)^2}{4} [b^2(p-q)^2 - 2b(p+q) + 1] \\ &= \gamma^2 q^2 \frac{\left(\frac{p-1}{q}\right)^2}{4} \left[b^2 - b \frac{2(p+q)}{(p-q)^2} + \frac{1}{(p-q)^2} \right] \\ &= \gamma^2 q^2 \frac{\left(\frac{p-1}{q}\right)^2}{4} \left[b - \frac{1}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2} \right] \left[b - \frac{1}{(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2} \right] \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Şimdi (4.22) denkleminin salınımlılığı ispatlanabilir. Bunu yapabilmek için Teorem 4.2.2 ve elde edilen ℓ sabitinden yararlanılacaktır.

Eğer $\ell = 0$ ise bu durumda $b \in \mathbb{R}$ sayısı ya

$$b = \frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2}$$

olur ya da

$$b = \frac{1}{(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2}$$

olur. Eğer $b = 1/(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2$ ise bu durumda (4.24) eşitliklerinden

$$\rho = \gamma \sqrt{\frac{p}{q}}$$

elde edilir. Teorem 4.2.2 (ii) ile birlikte (4.23) denkleminin iki çözümü

$$\left(\gamma \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{\log_p qt} = \sqrt{qt}$$

ve

$$\left(\gamma \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{\log_p qt} \cdot \ln t = \sqrt{qt} \cdot \ln t$$

salınımlı değildir ve bu nedenle (4.23) denklemi salınımlı değildir.

Eğer $b = 1/(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2$ ise bu durumda (4.24) eşitliği kullanılarak

$$\rho = -\gamma \sqrt{\frac{p}{q}}$$

olur ve bu sefer Teorem 4.2.2 (ii) den (4.23) denkleminin iki çözümü

$$\left(-\gamma \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{\log_p qt} = (-1)^{\log_p qt} \sqrt{qt}$$

ve

$$\left(-\gamma \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{\log_p qt} \cdot \ln t = (-1)^{\log_p qt} \sqrt{qt} \cdot \ln t$$

salınımlıdır ve bu nedenle (4.23) denklemi salınımlıdır.

Eğer $\ell > 0$ ise bu durumda $b \in \mathbb{R}$ sayısı ya

$$b < \frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2}$$

ya da

$$b > \frac{1}{(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2}$$

olur.

Eğer $b < 1/(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2$ ise bu durumda (4.24) den

$$\rho > \gamma \sqrt{\frac{p}{q}}$$

olur ve Teorem 4.2.2 (i) şıkkı düşünüldüğünde (4.23) denkleminin

$$(\rho + \sqrt{\ell})^{\log_p qt} = (qt)^{\log_p(\rho + \sqrt{\ell})}$$

çözümü salınımlı değildir ve bu nedenle (4.23) denklemini salınımlı değildir.

Eğer $b > 1/(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2$ ise bu durumda (4.24) den

$$\rho < -\gamma \sqrt{\frac{p}{q}}$$

elde edilir ve Teorem 4.2.2 (i) şıkkı düşünüldüğünde (4.23) denkleminin

$$(\rho - \sqrt{\ell})^{\log_p qt} = (-1)^{\log_p qt} (qt)^{\log_p(\sqrt{\ell} - \rho)}$$

çözümü salınımlıdır ve dolayısıyla (4.23) denklemini salınımlıdır.

Eğer $\ell < 0$ ise bu durumda $b \in \mathbb{R}$ sayısı için

$$\frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} < b < \frac{1}{(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2}$$

eşitsizliği geçerlidir. Teorem 4.2.2 (iii) şıkkından (4.23) denkleminin

$$(\sqrt{qt})^{\log_p |\lambda|} \cos(\theta \cdot \log_p qt)$$

ve

$$(\sqrt{qt})^{\log_p |\lambda|} \sin(\theta \cdot \log_p qt)$$

şeklindeki iki çözümü salınımlıdır. Bu durumda $\rho \in (-\gamma\sqrt{p/q}, \gamma\sqrt{p/q})$,

$|\lambda| = \gamma\sqrt{p/q}$ ve

$$\cos(\theta(1 - \log_p q)) = \frac{\rho}{\gamma\sqrt{p/q}} = \frac{\left[\left(\frac{p}{q} + 1\right) - bq\left(\frac{p}{q} - 1\right)^2\right]}{2\sqrt{p/q}}$$

olmak üzere (4.23) denklemini salınımlıdır.

Yukarıda bahsedilen tüm durumlar birlikte düşünüldüğünde (4.23) denklemini ve dolayısıyla (4.22) denkleminin salınımlı olması için gerek ve yeter şart

$$b > \frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2}$$

olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 4.2.6. Teorem 4.2.7, $p \rightarrow 1$ iken Teorem 1.2.1'e indirgenir. Ayrıca $p \rightarrow 1$ ve $q \rightarrow 1$ iken [42] deki sürekli duruma indirgenir ve sürekli durumda $1/4$ olan sabitin (p, q) -analiz de $1/(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2$ olduğu görülür.

Teorem 4.2.7. $((p, q)$ -Kneser Teoremi)

i) Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \{q \cdot t \cdot \sigma(t) \cdot \rho(t)\} < \frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2}$$

ise bu durumda (4.13) denklemi $p^{\mathbb{N}_0}$ üzerinde salınımlı değildir.

ii) Eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \{q \cdot t \cdot \sigma(t) \cdot \rho(t)\} > \frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2}$$

ise bu durumda (4.13) denklemi $p^{\mathbb{N}_0}$ üzerinde salınımlıdır.

İspat. i) Şıkkını ispatlayabilmek için (4.22) denkleminin

$$b < \frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2}$$

için salınımlı olmadığına ispatlanması yeterlidir. ii) Şıkkının ispatı için ise (4.22) denkleminin

$$b > \frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2}$$

için salınımlı olduğunun gösterilmesi gerekir. Bu durumlar ise tekrar Teorem 4.2.5'in ispatından çıkarılabilir.

Uyarı 4.2.8. Teorem 4.2.7, $p \rightarrow 1$ iken [44] nolu çalışmadaki Teorem 6 ya indirgenir. Ayrıca q -analizde $1/(1 + \sqrt{q})^2$ olan sabitin, (p, q) -analizde $1/(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2$ olduğu görülür.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezin ilk orijinal kısmında; birinci mertebeden bir başlangıç değeri problemi çok noktalı ve integral sınır şartları ile birlikte q -analizde tanımlandı ve çözümlerinin varlığının ve tekliğinin araştırılabilmesi için uygun bir Green fonksiyonu oluşturuldu. Scahafer sabit nokta teoremi, Krasnoselskii sabit nokta teoremi ve Banach sabit nokta teoremleri kullanılarak denklemin çözümlerinin varlığı ve tekliği araştırıldı. Ayrıca bazı nümerik örnekler sunuldu. Elde edilen sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçların genelleştirilmesidir. $q \rightarrow 1$ olduğunda (3.1)-(3.2) sistemi (1.1)-(1.2) sistemine indirgenir.

Tez çalışmasının ikinci orijinal kısmında öncelikle integral sınır şartları ile tanımlanan ikinci mertebeden bir (p, q) -fark denkleminin çözümlerinin varlığı ve tekliği Banach sabit nokta teoremi kullanılarak ispatlandı. Ayrıca nümerik bir örnek verildi. Daha sonra $D_{p,q}^2 x(t) + \rho(t) \cdot x^\sigma(qt) = 0$ denklemi ele alındı. Bu denklem $\rho(t)$ fonksiyonun seçiminden dolayı yeniden düzenlendiğinde bir Euler-Cauchy benzeri (p, q) -denklemi olur. Elde edilen çözümlerin salınımlılığı araştırıldı. (p, q) -Kneser teoremi ve (p, q) -Sturm teoremi ile salınımlılıkla ilgili bazı sonuçlar bulundu. Böylece literatürdeki mevcut sonuçlar genelleştirildi.

Diğer yandan, sürekli ve ayrık (bkz. [42, 43]) durumlarda $1/4$ olan sabitin (p, q) -analizde $1/(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2$ olduğu görüldü. Ayrıca $p \rightarrow 1$ iken Teorem 4.2.5., Teorem 1.2.1 e indirgenir. Benzer olarak $p \rightarrow 1 = q$ iken Teorem 4.2.7. 'nin [42] nolu çalışmadaki sürekli durumuna indirgenir.

(p, q) -analiz ve q -analizde çalışılabilecek pek çok denklem ve konu vardır. Dolayısıyla bu tez çalışması gelecekte bu konuda yapılabilecek çalışmalara kaynak teşkil etmesi ümit edilmektedir.



KAYNAKLAR

- [1] Jackson, F. H. (1910). On q -difference integrals. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 41, 193–203.
- [2] Jackson, F. H. (1910). q -difference equations. *American Journal of Mathematics*, 32(4), 305–314.
- [3] Carmichael, R. D. (1912). The general theory of Linear q -difference equations. *The American Journal of Mathematics*, 34(2), 147–168.
- [4] Mason, T. E. (1915). On properties of the solutions of linear q -difference equations with the entire function coefficients. *American Journal of Mathematics*, 439–444.
- [5] Adams, C. R. (1929). On the linear ordinary q -difference equation. *Annals of Mathematics*, 30, 195–205.
- [6] Trjitzinsky, W. J. (1933). Analytic theory of linear q -difference equations. *Acta Mathematica*, 62(1), 167–226.
- [7] Kac V. and Cheung, P. (2002). *Quantum Calculus*. Springer. New York.
- [8] Floreanini, R. and Vinet, L. (1996). q -gamma and q -beta functions in quantum algebra representation theory. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 68, 57–68.
- [9] Vogel, M. (2010). *An introduction to the theory of numbers (6th Edition)*. Contemporary Physics. 51(3), 283.
- [10] Agarwal, R. P., Ahmad, B., Hutami, A., Alsaedi, A. (2023). Existence results for nonlinear multiterm impulsive fractional q -integro-difference equations with nonlocal boundary conditions. *American Institute of Mathematical Sciences*, 8(8), 19313–19333. doi: 10.3934/math.2023985
- [11] Yaying, T., Kara, M.İ., Hazarika, B., Kara, E. E. (2023). A study on q -analogue of Catalan sequence spaces. *Filomat*, 37(3), 839–850. <https://doi.org/10.2298/FIL2303839Y>
- [12] Ahmad, B. and Ntouyas, S.K. (2014). Boundary value problems for q -difference equations and inclusions with non-local and integral boundary conditions. *Mathematical Modelling Analysis*, 19(5), 647–663.
- [13] Thiramanus, P. and Tariboon, J. (2014). Nonlinear second-order q -difference equations with three-point boundary conditions. *Computational and Applied Mathematics*, 33(2), 385–397.
- [14] Ma, J. and Yang, J. (2011). Existence of solutions for multi-point boundary value problem of fractional q -difference equation. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2011(92), 1–10. <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2011.1.92>

- [15] Ahmad, B. and Nieto, J. J. (2012). On nonlocal boundary value problems of nonlinear q -difference equations. *Advances Difference Equations*, 2012(81), 1–10. <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-81>
- [16] Ahmad, B. Alsaedi, A., Ntouyas, S.K. (2012). A study of second-order q -difference equations with boundary conditions. *Advances Difference Equations*, 2012(35), 1–10. <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-35>
- [17] Guo, C. Guo, J., Kang, S., Li, H. (2020). Existence and uniqueness of positive solution for nonlinear fractional q -difference equation with integral boundary conditions. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 10(1), 153–164. <https://doi.org/10.11948/20190055>
- [18] Zhuang, H., Liu, W. (2017). Existence results for a second-order q -difference equation with only integral conditions. *UPB. Scientific Bulletin, series A: Applied Mathematics and Physics*, 79(4), 221–234.
- [19] Saengngammongkhon, T., Kaewwisetkul, B., Sitthiwiratham, T. (2015). Existence results for nonlinear second-order q -difference equations with q -integral boundary conditions. *Differential Equations and Application*, 7(3), 303–311. doi.org/10.7153/dea-07-17
- [20] Wang, J., Yu, C., Guo, Y. (2015). Positive solutions for a class of singular boundary value problems with fractional q -difference equations. *Journal of Applied Math*, 2015(763786), 1–8. <https://doi.org/10.1155/2015/418569>
- [21] Ngoc, L. T. P. and Long, N. T. (2023). Existence and multiplicity for positive solutions of a system of first order differential equations with multipoint and integral boundary conditions. *Turkish Journal of Mathematics*, 47(1), 159–184. [10.55730/1300-0098.3352](https://doi.org/10.55730/1300-0098.3352)
- [22] Chakrabarti, R. and Jagannathan, R. (1991). A (p, q) -oscillator realization of two-parameter quantum algebras. *Journal of Physics A Mathematical and General*, 24, 711–718.
- [23] Sadjang, P. N. (2018). On the fundamental theorem of (p, q) -calculus and some (p, q) -Taylor formulas. *Results in Mathematics*, 73, 39. <https://doi.org/10.1007/s00025-018-0783-z>
- [24] Kamsrisuk, N., Promsakon, C., Ntouyas, S. K., Tariboon, J. (2018). Nonlocal boundary value problems for (p, q) -difference equations, *Differential Equations and Application*, 10(2), 183–195. [dx.doi.org/10.7153/dea-2018-10-11](https://doi.org/10.7153/dea-2018-10-11)
- [25] Gençtürk, İ. (2022). Boundary value problems for a second-order (p, q) -difference equation with integral conditions. *Turkish. Journal of Mathematics*, 46(2), 499–515. <https://doi.org/10.3906/mat-2106-90>
- [26] Araci, S., Duran, U., Acikgoz, M., Srivastava, H. M. (2016). A certain (p, q) -derivative operator and associated divided differences. *Journal of Inequalities and Applications*, 301, 1-7. <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1240-8>
- [27] Hounkonnou, M. N. and Kyemba, J. D. B. (2013). $R(p, q)$ -calculus: differentiation and integration. *SUT Journal of Mathematics*, 49(2), 145–167.

- [28] Mursaleen, M., Nasiruzzaman, M., Khan, A., Ansari, K. J. (2016). Some approximation results on Bleimann-Butzer-Hahn operators defined by (p, q) -integers. *Filomat*, 30(3), 639–648. <https://doi.org/10.2298/FIL1603639M>
- [29] Promsakon, C., Kamsrisuk, N., Ntouyas, S. K., Tariboon, J. (2018). On the second-order quantum (p, q) -difference equations with separated boundary conditions, *Advances in Mathematical Physics*, 2018(9089865), 1-9. <https://doi.org/10.1155/2018/9089865>
- [30] Duran, U., Acikgoz, M., Araci, S. (2018). A study on some new results arising from (p, q) -calculus. *Preprints*.
- [31] Soontharanon, J. and Sitthiwiratham, T. (2021). On sequential fractional Caputo (p, q) -integrodifference equations via three-point fractional Riemann-Liouville (p, q) -difference boundary condition. *American Institute of Mathematical Sciences*, 7(1), 704–722. doi: 10.3934/math.2022044
- [32] Başarır, M. and Turan, N. (2024). The solutions of some equations in (p, q) -calculus, *Konuralp Journal of Mathematics*, 12(1), 21-27.
- [33] Sturm, C. (1836). Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1, 106–186.
- [34] Bôcher, M. (1898). The theorems of oscillation of Sturm and Klein. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 4, 295–313.
- [35] Bôcher, M. (1901). Non-oscillatory linear differential equations of the second order. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 7, 333–340.
- [36] Kneser, A. (1893). Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, 42, 409–435.
- [37] Fite, W. B. (1918). Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 19, 341–352.
- [38] Hille, E. (1948). Non-oscillation theorems, *Transactions of the American Mathematical Society*, 64, 234–252.
- [39] Wintner, A. (1957). On the comparison theorem of Kneser-Hille. *Mathematica Scandinavica*, 5, 255–260.
- [40] Hartman, P. (1952). On non-oscillatory linear differential equations of second order. *American Journal of Mathematics*, 74, 389–400.
- [41] Moore, R. A. (1955). The behavior of solutions of a linear differential equation of second order. *Pacific Journal of Mathematics*, 5, 125–145.
- [42] Li, H. J. (1955). Oscillation criteria for second order linear differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 194, 217–234.
- [43] Bohner, M. and Saker, S. H. (2004). Oscillation of second order nonlinear dynamic equations on time scales. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 34, 1239–1254.

- [44] Bohner, M. and Ünal, M. (2005). Kneser's theorem in q -calculus. *Journal of Physics A Mathematical and General*, 38, 6729–6739.
- [45] Hilger, S. (1988). *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*. [PhD thesis], Universität Würzburg.
- [46] Hilger, S. (1990). Analysis on measure chains-a unified approach to continuous and discrete calculus. *Results in Mathematics*, 18(1-2), 18-56.
- [47] Aulbach, B. and Hilger, S. (1990). Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale. In *Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems* (pp. 9-20). Akademie-Verlag, Berlin.
- [48] Bohner, M. and Georgiev, S.G. (2016). *Multivariable Dynamic Calculus on Time Scales*. (1nd ed.). Springer.
- [49] Bohner, M. and Peterson, A. (2001). *Dynamic Equations on Time Scales*. Boston. Birkhauser.
- [50] Lipschutz, S. (1965). *General topology*. Schaum's Outlines.
- [51] Soykan, Y. (2016). *Fonksiyonel Analiz*. (3. Baskı) Nobel Yayınları.
- [52] Morris, S.A. (2005). *Topology without tears*. University of Ballarat.
- [53] Berinde, V. (1912). *Iterative Approximation of Fixed Points*. Lecture Notes in Mathematics, Springer.
- [54] Kolmogorov, A. N. ve Fomin, S. V. (1975). *Introductory Real Analysis*. Dover Publications.
- [55] Ciesielski, K. (2007). On Stefan Banach and some of his results. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 1(1), 1-10.
- [56] Schaefer, H. (1955). Über die methode der a priori-schranken. *Mathematische Annalen*, 129, 415-416.
- [57] Zeidler, E. (1986). *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications*. Springer, New York.
- [58] Banach, S. (1922). Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux equations integrals. *Fundamenta Mathematicae*. 3, 133-181.
- [59] Aliprantice, C. D. and Tourky, R. (2007). *Cones and Duality*. American Mathematical Society, USA.
- [60] Deimling, K. (1985). *Nonlinear Functional Analysis*. Springer, USA.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Nihan TURAN

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2015, Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik
- **Yükseklisans** : 2018, Düzce Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2015-2016 yılları arasında Geyve Halk Eğitim Merkezi Ortaöğretim-Matematik Öğretmenliği.
- 2016 yılında Sakarya Bilim ve Sanat Merkezi Matematik Öğretmenliği.
- 2022- ... İstanbul Beykent Üniversitesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi.

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- Turan, N., Başarır, M., Şahin, A., 2024. On the Solutions of a Non-Linear System of q -Difference Equation. *Boundary Value Problems*, (Basım aşamasında).
- Turan, N., Başarır, M., Şahin, A., 2024. On the Solutions of the Second-Order (p, q) -Difference Equation With an Application to the Fixed-Point Theory. *American Institute of Mathematical Sciences (AIMS) Mathematics*, 9(5), 10679-10697.
- Turan, N., Başarır, M., (2024, 11-13, Mayıs). A Study On the Solutions of the q -Initial Value Problem With Fixed Point Theory. *7 th. International Antalya Scientific Research and Innovative Studies Congress*, Antalya, Türkiye (Tam Metin Bildiri).
- Turan, N., Başarır, M., (2023, 8-9, Şubat). Solution of the Second-Order (p, q) -Difference Equation and Oscillation of Solutions. *3. International İstanbul Scientific Research Congress*, İstanbul, Türkiye (Tam Metin Bildiri).

- Turan, N., Başarır, M., (2023, 4-8, Eylül). q -Diferensiyel Denklem Sisteminin İntegral Sınır Şartları ile Çözümlerinin Varlığı ve Tekliği. 35. *Ulusal Matematik Sempozyumu (TMD)*, Edirne, Türkiye (Özet Bildiri).

DİĞER ESERLER:

- Turan, N., Başarır, M., 2024. On the Solutions of Some Equations in (p, q) -Calculus. *Konuralp Journal of Mathematics*, 12(1), 21-27.
- Turan, N., Başarır, M., (2023, 19-21, Şubat). The Solutions of Motions, Laplace and Bernoulli's Equations in (p, q) -Calculus. 9 th. *International Zeugma Conference on Scientific Research*, Gaziantep, Türkiye (Tam Metin Bildiri).
- Turan, N., Başarır, M., (2022, 11-12 Aralık). On the Solutions of Some Equations In Post Quantum Calculus. 3. *International Cappodocia Scientific Research Congress*, Nevşehir, Türkiye (Özet Bildiri).
- Turan, N., Başarır, M., 2019. A Note On Quasi-Statistical Convergence of Order α in Rectangular Cone Metric Space. *Konuralp Journal of Mathematics*, 7(1), 91-96.
- Turan, N., Başarır, M., 2019. A Note On Δ_g -Statistical Convergence of the Function Defined Time Scale. *AIP Conference Proceedings*, 2183, 040017.
- Turan, N., Başarır, M., (2019, 4-8 Eylül). A Note On Δ_g -Statistical Convergence of the Function Defined Time Scale. *Third International Conference of Mathematical Sciences*, İstanbul, Türkiye (Özet Bildiri).