TEMMUZ 2024 Yüksek Lisans Tezi- Matematik RABİYA TUTAR

**TÜRKİYE CUMHURİYETİ**

**GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# HEMEN HEMEN SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLARIN *RF* (SATIRCA-İNDİRGENMİŞ) - MATRİSLERİYLE İNCELENMESİ

**MATEMATİK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**RABİYA TUTAR**

**TEMMUZ 2024**

# HEMEN HEMEN SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLARIN *RF* (SATIRCA-İNDİRGENMİŞ) - MATRİSLERİYLE İNCELENMESİ

**Gaziantep Üniversitesi**

**Matematik**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman**

**Prof. Dr. Belgin ÖZER**

**Rabiya TUTAR**

**Temmuz 2024**

**İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.**

**Rabiya TUTAR**

## ABSTRACT

**OF ALMOST CYMETRIC NUMERICAL SEMIGROUPS ANALYSIS WITH RF (ROW-REDUCED) – MATRICES**

**TUTAR, Rabiya**
**M.Sc. in Mathematics**
**Supervisor: Prof. Dr. Belgin ÖZER**
**July 2024**
**46 pages**

Almost symmetric numerical semigroups, a natural generalization of symmetric numerical semigroups, were defined by Barucci and Fröberg and have remarkable properties. RF-matrices are derived by using elements from pseudo-Frobenious sets of numerical semigroups. These matrices were first studied by Alessio Moscariello in 2016. RF-matrices of the obtained almost symmetric numerical semigroups are found. By decomposing these RF-matrices into row vectors, generator sets of ideals of almost symmetric numerical semigroups are obtained. In this study, almost symmetric numerical semigroups are analyzed and these numerical semigroups and RF- matrices are considered separately. By using RF- matrices, their contribution to the formation of almost symmetric numerical semigroups is given. The main idea is to analyze almost symmetric numerical semigroups with their matrices and draw attention to the relations between them.



**KeyWords:** Numerical Semigroup, Pseudo-Frobenious, Almost Symmetric, $RF-$ Matrix, Ideal.

## ÖZET

## HEMEN HEMEN SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLARININ $RF$ (SATIRCA İNDİRGENMİŞ) – MATRİSLERİYLE İNCELENMESİ

**TUTAR, Rabiya**
**Yüksek Lisans Tezi, Matematik**
**Danışman: Prof. Dr. Belgin ÖZER**
**Temmuz 2024**
**46 sayfa**

Simetrik sayısal yarıgrupların doğal bir genellemesi olan hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar, Barucci ve Fröberg tarafından tanımlanmıştır ve dikkat çekici özelliklere sahiptirler. RF-matrisler, sayısal yarıgrupların sözde Frobenyus kümelerindeki elemanlar kullanılarak üretilen matrislerdir. Bu matrislerle ilgili çalışmaları ilk olarak Alessio Moscariello 2016 yılında gerçekleştirmiştir. Elde edilen hemen hemen simetrik sayısal yarıgrupların RF-matrisleri bulunmuştur. Bu RF-matrisler, satır vektörlerine ayrılarak hemen hemen simetrik sayısal yarıgrupların ideallerinin üreteç kümeleri elde edilmiştir. Bu çalışmada hemen hemen simetrik sayısal yarıgrupları incelenmiş ve bu sayısal yarıgruplarla $RF -$ matrisleri ayrı ayrı ele alınmıştır. RF- matrisleri kullanılarak hemen hemen simetrik sayısal yarıgrupların oluşumundaki katkıları görülmüştür. Temel fikir, hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplarını, $RF-$matrisleriyle inceleyip aralarındaki bağıntılara dikkat çekmektir.

**Anahtar Kelimeler:** Sayısal Yarıgrup, Sözde- Frobenyus, Hemen Hemen Simetrik, $RF-$Matris, İdealler.

*''Canum aileme''*

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak, benden; desteğini, sabrını, zamanını ve bilgisini esirgemeyen değerli danışman hocam; Prof. Dr. Belgin ÖZER'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca her türlü desteklerinden dolayı ve özellikle bugünlere gelmemi sağlayan *CANIM AİLEME* teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

## SEMBOLLER LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{Z}$ | Tam sayılar kümesi |
| $\boldsymbol{N}$ | Doğal sayılar kümesi (Negatif olmayan tam sayılar kümesi) |
| $\boldsymbol{R}$ | Sayısal Yarıgrup |
| $\langle \boldsymbol{r_1}, \ldots, \boldsymbol{r_n} \rangle$ | $\{r_1, \ldots, r_n\}$ tarafından üretilen bir sayısal yarıgrup |
| $\boldsymbol{m(R)}$ | $R'$nin katlılığı |
| $\boldsymbol{e(R)}$ | $R'$nin gömme boyutu |
| $\boldsymbol{g(R)}$ | $R'$nin cinsi (Boşluk kümesinin eleman sayısı) |
| $\boldsymbol{G(R)}$ | $R'$nin boşluk kümesi |
| $\boldsymbol{t(R)}$ | $R'$nin tipi (Sözde − Frobenyus'un eleman sayısı) |
| $\boldsymbol{F(R)}$ | $R'$nin Frobenyus sayısı |
| $\boldsymbol{PF(R)}$ | $R'$nin Sözde − Frobenyus sayısı |
| $\boldsymbol{PF'}(\boldsymbol{R})$ | Sözde-Frobenyus – Frobenyus $(PF(R) - F(R))$ |
| $\boldsymbol{Ap}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{x})$ | $x$ sayısına göre Apery kümesi |
| $\#(\boldsymbol{R})$ | Bir kümenin eleman sayısı |

# BÖLÜM 1
# GİRİŞ

Son yıllarda, cebir alanında sayısal yarıgruplar öne çıkmıştır ve özellikle cebirsel geometri ile bilgisayar bilimleri gibi alanlarda geniş uygulama potansiyeline sahiptir. Sayısal yarıgruplar, basitçe doğal sayıların sonlu bir alt kümesidir ve her elemanın tümleyeni de bu kümede yer alır. Bu yapılar değişmeli monoidlerdir ve bu özelliğiyle sayısal monoidler olarak bilinirler.

Sayısal yarıgruplar, Ferdinand Frobenyus ve James Joseph Sylvester tarafından 19. yüzyılda incelenmeye başlanmıştır. Tarihte, "Frobenyus'un para takası problemi" olarak da bilinen ve aynı zamanda "Frobenyus'un lineer diyafont denklemi" olarak da adlandırılan bu durum, "ortak bir bölene sahip olmayan bozuk paraları kullanarak elde edilmeyen en büyük miktar para nedir?" sorusuyla ortaya çıkmıştır. Frobenyus problemi, temelde "$a$ ve $b$ negatif olmayan tamsayılar, $p$ ve $q$ ise 1'den büyük ve aralarında asal olan sayılardır. Bu durumda, lineer kombinasyonu olarak ifade edilemeyen en büyük $F(R)$ sayısı nedir?" sorusunu ele alır. İki adet sayı için, p ve q gibi, bu problemi çözmenin formülü $F(R) = pq - p - q$ şeklindedir. Sylvester, 1884 yılında "Educational Times" dergisinde, iki sayı için $[0, F(R)]$ aralığındaki sayıların p ve q'nun lineer kombinasyonu olarak yazılabilen ve yazılamayan sayıların eşit ve tam olarak $(F(R) + 1)/2$ adet olduğuyla ilgili teoremin ispatını sunmuştur.

Sayısal yarıgrupların minimal üreteç kümesinin ne olacağı ve bu kümenin nasıl belirleneceği, bu alanda yapılan çalışmaların odak noktalarından biridir. Bu konudaki araştırmalar, yeni tanımların ortaya çıkmasına ve sayısal yarıgruplar hakkındaki anlayışımızın derinleşmesine katkı sağlamıştır. Sonradan tanımlanan Frobenyus, Sözde-Frobenyus ve hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup çeşitleri, sayısal yarıgruplara yeni bir eleman eklendiğinde veya bir eleman çıkarıldığında elde edilen yeni kümelerin sayısal yarıgrup koşullarını sağlama şartlarının ne olduğu gibi konular, bu alanda geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Bu çalışmalar, temel boşluklardan yola çıkarak sayısal yarıgrupların yapısal özelliklerini daha derinlemesine anlamamıza katkı sağlamaktadır.

Sayısal yarıgruplarla ilgili çalışmalar, sadece burada bahsedilen konularla sınırlı değildir. Bu konudaki araştırmalar, birçok alanda devam etmektedir ve matematik, bilgisayar bilimi, kriptografi ve optimizasyon gibi farklı disiplinlerde geniş bir yelpazeye yayılmıştır.

Barucci ve Fröberg [1] tarafından tanımlanan hemen hemen simetrik yarıgruplar, simetrik sayısal yarıgrupların doğal bir genellemesidir ve oldukça ilginç özelliklere sahiptirler. Bu yarıgruplar, Nari [2] tarafından keşfedilen sözde-Frobenyus sayılarının simetrisi ile ayrılırlar.

RF-matrisler, sayısal yarıgrupların sözde Frobenyus kümelerindeki elemanları kullanılarak üretilen matrislerdir. Bu konudaki ilk çalışmaları Alessio Moscariello 2016 yılında gerçekleştirmiştir.

Tezde, hemen hemen simetrik sayısal yarıgrupların RF-matrislerinin oluşumundaki durumları ele alınacaktır. RF-matrisleri, ilk olarak Alessio Moscariello tarafından incelenmiştir. T. Numata da hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar üzerinde çalışmıştır.

Tezin ikinci bölümünde, ihtiyaç duyulan temel tanımlar ve teoremlerden bahsedilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar ele alınmıştır.

Tezin dördüncü bölümünde, $RF-$ matrisleri ve bu matrislerden yola çıkarak hemen hemen simetrik sayısal yarıgrubun idealleri elde edimiştir.

Tezin beşinci bölümünde, hemen hemen sayısal yarıgrupların $RF-$matrisleriyle ile incelenmesi ile ilgili edilen teorem ve sonuçlar verilmiştir.

Tezin altıncı bölümünde ise sonuçlar ve önerilerden bahsedilmiştir.

## BÖLÜM 2

## TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde gerekli temel tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir.

**Tanım 2.1**

R $\neq \emptyset$ bir küme ve $'' \circ ''$ bir ikili işlem olsun.

i) $\forall\, x, y, z \in R$ için

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$$

ise $(R,\circ)$ ikilisine bir yarıgrup,

ii) $R$ bir yarıgrup ve $\forall x \in R$ için

$$x \circ e = e \circ x = x$$

olacak şekilde $e \in R$ birim elemanı varsa, $R$ yarıgrubuna bir monoid,

iii) $R$ bir monoid ve $\forall x \in R$ için

$$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$$

olacak şekilde $x^{-1} \in R$ ters elemanı var ise , $R$ monoidine grup adı verilir.

$\emptyset \neq T$, $R$'nin bir alt kümesi olsun. $\forall x, y \in T$ için

$$x \circ y^{-1} \in T$$

ise , $T$ kümesine $R$'nin alt grubu denir.

**Tanım 2.2.**

$(R,\circ)$ bir monoid ve $T \subset R$ olsun.

i) $e \in T$,

ii) $\forall x, y \in T$ için $x \circ y \in T$

ise $T$' ye $R$' nin alt monoidi denir

**Örnek 2.3**

$Z - \{0\}$ kümesi çarpma işlemine göre bir yarıgruptur. 1 elemanı çarpmaya göre birim eleman olduğundan $Z - \{0\}$ kümesi çarpma işlemine göre bir monoiddir.

**Örnek 2.4**

$Z$ tamsayılar kümesi toplama işlemine göre bir yarıgruptur.

**Tanım 2.5**

$N$ doğal sayılar kümesi ve R $\subset N$ olsun.

i) $0 \in R$

ii) $\forall\, x, y \in R$ için $x + y \in R$

iii) $N \setminus R$ sonlu bir küme

kurallarını sağlayan $R$ alt monoidine bir sayısal yarıgrup denir.

**Örnek 2.6**

$R = \langle 2, 3 \rangle = \{\, 2x_1 + 3x_2 \mid x_1, x_2 \in N\}$ kümesinin bir sayısal yarıgrup olup olmadığını inceleyelim.

i) $x_1 = x_2 = 0 \in N$ ve $0 = 2.0 + 3.0$ olduğundan $0 \in R$' dir.

ii) $x, y \in R$ olsun. Bu durumda,

$x = 2x_1 + 3x_2$

$y = 2y_1 + 3y_2$

olacak şekilde $x_1, x_2, y_1, y_2 \in N$ vardır.

$$x + y = 2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2)$$

$x_1 + y_1 = x' \in N$ , $x_2 + y_2 = y' \in N$

olduğundan $x + y \in R$' dir.

iii) $R = \langle 2, 3 \rangle = \{\, 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, \dots \}$ olduğundan

$N \setminus R = \{\, 1 \,\}$ kümesi olur ki, bu sonlu bir kümedir.

Böylece $R$ kümesi, bu üç koşullarını sağladığı için bir sayısal yarıgruptur.

**Tanım 2.7**

$R$ bir yarıgrup olsun. $T'$ de $R$'nin boştan farklı bir alt kümesi ise $R$'nin $T'$yi kapsayan en küçük alt yarıgrubuna $T'$nin *ürettiği yarıgrup* denir. O halde $T$ kümesine $R$

kümesinin üreteç kümesi denir. $R = \langle T \rangle$ ile gösterilir. Eğer $T$ üreteç kümesinden daha küçük bir üreteç kümesi bulunamıyorsa o zaman $T$ kümesi $R$'nin *minimal üreteç* kümesi olur.

**Örnek 2.8**

$R = \langle 3, 7 \rangle = \{ \quad 3x_1 + 7x_2 \mid x_1, x_2 \in N \} = \{ 0, 3, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15, \rightarrow \}$ kümesini alalım,

i) $0 \in R$

ii) $\forall\, x, y \in R$ için $x = 3x_1 + 7x_2$ ve $y = 3y_1 + 7y_2$ olacak şekilde, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in N$ vardır ve $x + y = 3(x_1 + y_1) + 7(x_2 + y_2) \in R$ dir.

iii) $N \setminus R = \{1,2,4,5,8,11\}$ şartlarını sağladığı için R sayısal yarıgruptur.

**Lemma 2.9**

$\emptyset \neq R \subset N$ ve $R = \{r_1, r_2 \dots, r_n\}$ kümesi için ;

$R = \langle r_1, r_2 \dots, r_n \rangle = \{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i : x_i \in N\}$ bir sayısal yarıgruptur ancak ve ancak $ebob(r_1, r_2 \dots, r_n) = 1$'dir.

**İspat**

$d = ebob(\langle R \rangle)$ olsun. Açıktır ki, eğer $r$, $\langle R \rangle$'ye aitse, o zaman $d|r$. $\langle R \rangle$ sayısal bir yarıgrubu, $N \setminus \langle R \rangle$ sonludur ve dolayısıyla $d|r$ olacak şekilde pozitif bir $x$ tam sayısı vardır ve $d|x + 1$. Buradan da $d$ , 1 olmalıdır.

Tersi için, $N \setminus \langle R \rangle$'nin sonlu olduğunu kanıtlamak yeterlidir. $ebob(\langle R \rangle) = 1$ olduğundan, $z_1, \dots, z_n$ ve $a_1, \dots, a_n \in R$ tam sayılarının $k_1 a_1 + \cdots + k_n a_n = 1$ olacak şekilde kümede olduğunu varsayalım. Burada $k_i$ negatif terimlerini sağ tarafa alırsak, $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, n\}$ olmak üzere,

$$k_{i_1} a_{i_1} + \cdots + k_{i_k} a_{i_k} = 1 - k_{j_1} a_{j_1} - \cdots - k_{j_1} a_{j_1}$$

eşitliği elde edilir.

Dolayısıyla $r + 1 \in \langle R \rangle$ olacak şekilde $r \in \langle R \rangle$ vardır. $n \in \langle R \rangle$ olduğundan,

$$n \geq (r-1)r + (r-1)$$

eşitsizliği ispatlanmalıdır.

$0 \leq x < r$ iken $n = q.r + x$ olacak şekilde $q, x \in Z$ olsun. Bu durumda,

$q \geq r - 1 \geq x$ olduğunda, $n \geq (r-1)r + (r-1)$ olduğu sonucuna varılır.

Buradan,

$$n = (xr + x) + (q - x) = x(r+1) + (q-x)r \in \langle R \rangle$$

elde edilir.

**Örnek 2.10**
$R = \langle 3,4,5 \rangle = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \rightarrow\}$ bu küme için $ebob(3,4,5) = 1$
$N \setminus R = \{1,2\}$ olduğundan, $R$ bir sayısal yarıgruptur.

**Örnek 2.11**
$R = \langle 2,3,7 \rangle = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \rightarrow\}$ olup
$N \setminus R = \{1\}$ sonlu kümedir $\leftrightarrow ebob(2,3,7) = 1$

**Tanım 2.12**
$G(R) = N \setminus R$ kümesi boş olmayan sonlu bir kümedir. Bu kümenin elemanlarına, $R$' nin boşlukları denir. $G(R)$' nin eleman sayısına $R$'nin cinsi denir ve $g(R)$ ile gösterilir.

**Tanım 2.13**
Bir üreteç kümesinin en küçük elemanına sayısal yarıgrubunun katlılığı denir ve $m(R)$ ile gösterilir. Aynı zamanda sayısal yarıgrubu üreten minimal üreteç kümesinin eleman sayısına, sayısal yarıgrubun gömme boyutu denir ve $e(R)$ ile gösterilir.

**Tanım 2.14**
$R$' nin boşluğundaki en büyük sayıya, $R$' nin Frobenyus sayısı denir ve $F(R)$ ile gösterilir.

**Örnek 2.15**

$R = \langle 5,9,11\rangle = \{ 5x_1 + 9x_2 + 11x_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in N \}$

$= \{ 0, 5,9,10,11,14,15, 16,18,19,20, 21, 22, \rightarrow \}$

sayısal yarıgrubuna bakılırsa; $R$'nin boşluklarının kümesi,

$$G(R) = N/R = \{1,2,3,4,6,7,8,12,13,17\} \quad , \quad g(R) = 10$$

$R$' nin Frobenyus sayısı

$$F(R) = maks(N\backslash R) = 17$$

olarak bulunur.

**Tanım 2.16**

$R = \langle r_1, r_2 \ldots r_t\rangle$ bir sayısal yarıgrup ve $f \in N\backslash R$ olsun. $\forall\, i = 1, 2, \ldots, t$ için $f + r_i \in R$ ise, $f$ elemanına bir sözde - Frobenyus sayısı denir. Sözde - Frobenyus sayılarının kümesi $PF(R)$ ile gösterilir. Bu küme,

$$PF(R) = \{ f \notin R \mid f + r_i \in S, \forall i = 1, 2, \ldots, t \}$$

olarakta yazılabilir. $R$' nin Frobenyus sayısı $F(R)$' yi alalım. $F(R) = maks(N\backslash R)$ olduğundan,

$\forall i = 1, 2, \ldots, t$ için $F(R) + r_i \in R$ olur. Bu Frobenyus sayısının bir sözde-Frobenyus sayısı olduğunu gösterir.

$f$ , $R$' nin sözde - Frobenyus sayısı olsun. Tanım 2.12' den $f \in G(R)$ dir.

**Örnek 2.17**

$R = \langle 5, 9,21\rangle = \{0, 5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 23 \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu ele alalım.

$R$' nin sözde - Frobenyus sayılarını bulalım.

$R$' nin boşlukları,

$G(R) = N \setminus R = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 17, 22 \}$ kümesidir.

Bu kümenin eleman sayısı

$$g(R) = |G(R)| = 13$$

$R$' nin Frobenyus sayısı,

$$F(R) = maks(N\backslash R) = 22$$

olarak bulunur.

Diğer elemanlar için;

$$1 + 5 = 6 \notin R$$

$$2 + 5 = 7 \notin R$$

$$3 + 5 = 8 \notin R$$

$$4+9 = 13 \notin R$$

$$6 + 5 = 11 \notin R$$

$$7 + 5 = 12 \notin R$$

$$8 + 5 = 13 \notin R$$

$$11 + 5 = 16 \notin R$$

$$12 +5 = 17 \notin R$$

$$13 + 9 = 22 \notin R$$

$$16 + 5 = 21 \in R$$

$$16 + 9 = 25 \in R$$

$$16 + 21 = 37 \in R$$

$17 + 5 = 22 \notin R$ olduğundan sözde-Frobenyus sayısı olamaz.

$16 \in PF(R)$ 'dir. Ayrıca $F(R) = 22 \in PF(R)$ olduğu bilinir.
Bu durumda,

$$PF(R) = \{16, 22\}$$

olarak elde edilir.

**Önerme 2.18**

$t$ ve $s$ pozitif tam sayılar kümesinin bir elemanı ve aralarında asal sayılar olmak üzere**,**

$$F(\langle t, s \rangle) = ts - t - s$$

$$g(\langle t, s \rangle) = \frac{ts-t-s+1}{2} = \frac{F(\langle t,s \rangle)+1}{2}$$

ifadeleri elde edilir.

**İspat:** Bakınız[9].

**Örnek 2.19**

$$R = \langle 5,8 \rangle$$

sayısal yarıgrubunun Frobenyus sayısını ve cinsini yukarıdaki önermeden faydalanarak bulalım.

$F(\langle 5,8\rangle) = 5.8 - 5 - 8 = 27\ , F(R) = 27$

$g(R) = \frac{5.8-5-8+1}{2} = 14\ ,$

$R$ sayısal yarıgrubunun sözde-Frobenyus kümesinin eleman sayısı 14 tür.

**Lemma 2.20**

$R$ bir sayısal yarı grup olsun. O zaman;

$$g(R) \geq \frac{F(R)+1}{2}$$

Dolayısıyla, eşitliğin geçerli olduğu sayısal yarıgruplar, mümkün olan "en az" sayıda boşluğa sahip sayısal yarıgruplardır. [5]

**Tanım 2.21**

$PF(R)$ kümesinin eleman sayısına, $R$' nin tipi denir ve $t(R)$ ile gösterilir.

**Örnek 2.22**

$R = \langle 5, 9, 21\rangle = \{0, 5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 23 \rightarrow\}$

$PF(R) = \{16, 22\}$

olduğundan $t(R) = 2$ olur.

**Örnek 2.23**

$R = \langle 4, 7, 9\rangle = \{0, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 \rightarrow\}$

- $e(R) = 3$
- $m(R) = 4$
- $G(R) = N\backslash S = \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$
- $F(R) = maks(N\backslash R) = 10$

- $g(R) = |G(R)| = 6$
- $PF(R) = \{5,10\}$
- $t(R) = 2$

Sayısal yarıgruplar teorisinde Apery kümeleri önemli araçlardan birisidir. $R$ sayısal yarıgrubu ikiden fazla eleman tarafından üretildiginde, bu grupların Frobenyus sayılarını ve cinslerini veren genel bir formül bilinmemektedir. Bununla birlikte, yarıgrubun sıfır olmayan bir elemanının Apery kümesi biliniyor ise Frobenyus sayısı ve cinsi hesaplanabilmektedir.

**Tanım 2.24**

$R$ sayısal yarıgrup ve $k \neq 0 \in R$ olmak üzere,

$$Ap(R,k) = \{r \in R : r - k \notin R\}$$

şeklinde ifade edilen kümeye $R$'nin *Apery kümesi* denir ve $Ap(R,k)$ ile gösterilir.

**Örnek 2.25**

$R = \langle 3,4,7 \rangle = \{0,3,4,6,\rightarrow\}$

sayısal yarıgrup olsun,

- $r = 3 \in R$ için
  $Ap(R,3) = \{r \in R : r - 3 \notin R\}$ kümesini bulalım:

$$0 - 3 \notin R \Longrightarrow 0 \in Ap(R,3)$$
$$3 - 3 \in R \Longrightarrow 3 \notin Ap(R,3)$$
$$4 - 3 \notin R \Longrightarrow 4 \in Ap(R,3)$$
$$6 - 3 \in R \Longrightarrow 6 \notin Ap(R,3)$$
$$7 - 3 \in R \Longrightarrow 7 \notin Ap(R,3)$$
$$8 - 3 \notin R \Longrightarrow 8 \in Ap(R,3)$$

8'den büyük olan tüm tam sayılar $R$ sayısal yarıgrubunun elemanı olacaktır. O halde,

$$Ap(R,3) = \{0,4,8\}$$

olur.

$R$ sayısal yarıgrubunun diğer tüm elemanları için aynı işlemler yapılarak Apery kümeleri yazılabilir.

**Yardımcı Teorem 2.26**

$y \in R \setminus \{0\}$ için $Ap(R, y)$kümesinin eleman sayısı $y$ tanedir.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü üzere $Ap(R, 5)$kümesinin eleman sayısı 5 tir.

$R$ bir sayısal yarıgrup ve $y \in R$ olsun. Her $i \in 1, 2, \ldots, y$ için, $w(i)$,

$$w(i) \equiv i(mod\, y)$$

olacak şekilde $R$'nin en küçük elemanı olsun. Bu durumda,

$$Ap(R, y) = \{0 = w(0), w(1), \ldots, w(y - 1)\}$$

olur.

**İspat:**

$0 \leq i \leq y - 1$ olsun. Tanımdan, $w(i) \in R$ ve

$w(i) \equiv i(mod\, y)$

$\Rightarrow y|(w(i) - i)$

$\Rightarrow w(i) - i = y.k, k \in (Z)$

$\Rightarrow w(i) - i = y + y(k - 1), k \in (Z)$

$\Rightarrow w(i) - y = i + y(k - 1), k \in (Z)$

$\Rightarrow w(i) - y \equiv i(mod\, y)$

elde edilir. $w(i)$, $R$ sayısal yarıgrubunun

$$w(i) \equiv i(mod\, y)$$

olan en küçük elemanı olduğundan, bu

$$w(i) \notin R$$

anlamına gelir. Böylece $Ap(R, y)$'nin tanımından,

$$w(i) \in Ap(R, y)$$

elde edilir. Şimdi $m, n \in Ap(R, y)$ olsun. $Ap(R, y)$'nin tanımından,

$$m - y \notin R$$

$$n - y \notin R$$

olur. $m, n \in R$ ve $R$ yarıgrup olmasından $m + n \in R$.

$$m \equiv n(mod\ y)$$

olduğunu varsayalım.

$\Rightarrow y|(m - n)$

$\Rightarrow m = n + y \cdot k, k \in Z$

$\Rightarrow m = n + y + y \cdot (k - 1), k \in Z$

$\Rightarrow m - y = n + y \cdot (k - 1)$

$n \in R, m \in R$ ve son eşitlikten, $m - y \in R$

olur. Bu $m \in Ap(R, y)$ olması ile çelişir.

Böylece $Ap(R, y)$ kümesi içinde $m \equiv n(mod\ y)$

olacak şekilde $m, n \in Ap(R, y)$ elemanları yoktur.

## BÖLÜM 3

## HEMEN HEMEN SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLAR

Simetrik sayısal yarıgruplar, oldukça kullanışlı özelliklere sahip olmalarından dolayı üzerinde çalışılmaktadır. Simetrik sayısal yarıgrupların doğal bir genellemesi olan hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplarında çok ilginç özellikleri vardır.

**Tanım 3.1**

$R$ sayısal yarıgrup olsun. Her $h \in R$ için $R$' nin her boşluğu, $F(R) - h$ formunda ise, $R$' ye simetrik sayısal yarıgrup denir.

Bir başka deyişle,

$R$ simetriktir $\Leftrightarrow$ $\{a \in R \Leftrightarrow F(R) - a \in R\}$

ve buradan,

$R$ simetriktir $\Leftrightarrow$ $g(R) = |\{h \in R \mid h < F(R)\}|$

elde edilir.

**Teorem 3.2**

$R$ bir sayısal yarıgrup olsun.

$R$ simetriktir $\Leftrightarrow$ $g(R)$ tek sayı ve $2g(R) = F(R) + 1$

**İspat:**

$t(R)$ , $R$ sayısal yarıgrubunun tipi olmak üzere,

$$2g(R) \geq F(R) + t(R)$$

olduğu biliniyor, Teorem 3.2' den dolayı, $t(R) = 1$ olan sayısal yarıgruplar simetriktir. [5]

**Önerme 3.3**

$R$ bir sayısal yarıgrup ve $r \in R$ olsun,

$$Ap(R,r) = \{x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{\alpha-1}\}$$

olsun.

$R$ sayısal yarıgrubunun simetrik olması için gerek ve yeter koşul,

$\forall i \in \{0,1,2,\dots,r-1\}$ için ,

$$x_i + x_{r-1-i} = x_{r-1}$$

olmasıdır.

**İspat:**

$\Rightarrow$ $R$'nin bir sayısal yarıgrup olduğunu kabul edelim. Selmer Formülün'den

$$F(R) = max(Ap(R,r)) - r$$

olduğu biliniyor. Böylece, $F(R) = a_{r-1} - r$

olur. $0 \leq i \leq r-1$ için, $a_i \in Ap(R,r)$ ve Apery kümesi tanımından,

$a_i - r \notin R$

$\Rightarrow a_i - r \in Z \backslash R$

$R$ simetrik olduğundan,

$F(R) - (a_i - r) = F(R) - a_i + r$

$= a_{r-1} - r - a_i + r$

$= a_{r-1} - a_i \in R$

elde edilir. $a_{r-1} - a_i = t \in R$ diyelim.

$\Rightarrow a_{r-1} = a_i + t \in Ap(R,r)$

$t \in Ap(R,r)$

elde edilir. Bu durumda,

$t = a_j$ olacak şekilde $j \in 0,\dots.(r - 1)$ bulunabilir.

Her $0 \leq i \leq r-1$ için bu doğru olduğundan

$$j = r - 1 - i$$

elde edilir. Her $i \in 0,\dots,(r - 1)$ için, $a_i + a_{r-1-i} = a_{r-1}$

olduğunu varsayalım. Hipotezden, $max \leq_R t\, Ap(R,r) = a_{r-1}$ olur.

$R$'nin simetrikligini ispatlamak için, $\forall x \in Z \backslash R \Rightarrow F(R) - x \in R$

olduğunu görelim. $R'$

$PF(R) = \{w - r \mid w \in max \leq_R Ap(R,r)\}$

$= \{a_{r-1} - r\}$

$= max(Ap(R,r)) - r$ dir.

Selmer Formüllerinden,

$$PF(R) = F(R)$$

bulunur.

$$PF(R) = max \leq_R (N \backslash R) = F(R)$$

olur.

$x \in Z \backslash R \Rightarrow x \notin R$

$\Rightarrow x \leq_R F(R)$

$\leq_R$ sıralama bağıntısının tanımından, $F(R) - x \in R$ elde edilir.

**Örnek 3.4**

$$R = \langle 5,8 \rangle = \{0,5,8,10,13,15,16,18,20,21,23,24,25,26,28 \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrubunun simetrik olup olmadığını Önerme 3.3 yardımı ile gösterelim.

$8 \in R$ için Apery kümesini bulalım

$$0 - 8 = -8 \notin R$$

$$5 - 8 = -3 \notin R$$

$$10 - 8 = 2 \notin R$$

$$15 - 8 = 7 \notin R$$

$$20 - 8 = 12 \notin R$$

$$25 - 8 = 17 \notin R$$

$$30 - 8 = 22 \notin R$$

$$35 - 8 = 27 \notin R$$

$$Ap(R,8) = \{0,5,10,15,20,25,30,35\}$$

$$\#\big(\, Ap(R,8)\big) = 8$$

$x_0 = 0, x_1 = 5,\ x_2 = 10,\ x_3 = 15,\ x_4 = 20,\ x_5 = 25\ , x_6 = 30, x_7 = 35$

$i = 0$ için, $x_0 + x_{8-1-0} = x_{8-1}$

$$0 + 35 = 35$$

$i = 1$ için, $x_1 + x_{8-1-1} = x_{8-1}$

$$5 + 30 = 35$$

$i = 2$ için, $x_2 + x_{8-1-2} = x_{8-1}$

$$10 + 25 = 35$$

$i = 3$ için, $x_3 + x_{8-1-3} = x_{8-1}$

$$15 + 20 = 35$$

$i = 4$ için, $x_4 + x_{8-1-4} = x_{8-1}$

$$20 + 15 = 35$$

$i = 5$ için, $x_5 + x_{8-1-5} = x_{8-1}$

$$25 + 10 = 35$$

$i = 6$ için, $x_6 + x_{8-1-6} = x_{8-1}$

$$30 + 5 = 35$$

$i = 7$ için, $x_7 + x_{8-1-7} = x_{8-1}$

$$35 + 0 = 35$$

Bütün $i$ ler için şartımız sağlandığından $R$ simetrik sayısal yarıgruptur.

**Tanım 3.5**

$R$ bir sayısal yarıgrup olsun. Eger,

$$2g(R) = F(R) + t(R)$$

eşitliği var ise $R$' ye hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup denir.

**Örnek 3.6**

$R = \langle 6, 7, 9, 10 \rangle$ sayısal yarıgrubunu ele alalım.

$R = \langle 6, 7, 9, 10 \rangle = \{0, 6, 7, 9, 10, 12, \rightarrow\}$ olarak yazılır.

R'nin boşluklarını oluşturduğu küme;

$$G(R) = N \setminus S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 8, 11\}$$

olarak bulunur.

$$g(R) = |G(R)| = 7$$

$F(R) = 11$ 'dir.

$$PF(R) = \{3, 8, 11\}$$

olduğundan $t(R) = 3$' dir.

$$2g(R) = 2.7 = 11 + 3 = F(R) + t(R)$$

olduğuna göre; R, hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur denir.

**Örnek 3.7**

$R = \langle 4, 9, 14 \rangle$ sayısal yarıgrubunu ele alalım.

$$R = \langle 4, 9, 14 \rangle = \{0, 4, 8, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20, \rightarrow\}$$

olarak yazılır.

$R$'nin boşluklarını oluşturduğu küme;

$$G(R) = N \setminus R = \{ 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 15, 19\}$$

olarak bulunur.

$$g(R) = |G(R)| = 10$$

$F(R) = 19$ 'dir.

$PF(R) = \{19\}$ olduğundan $t(R) = 1$' dir.

$$2g(R) = 2.10 = 19 + 1 = F(R) + t(R)$$

olduğuna göre; $R$, hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

**Yardımcı Teorem 3.8**

$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{t-1}$ olmak üzere

$$PF(R) = \{ x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{t-1}, F(R) \}$$

olsun.

Bu durumda,

$R$' nin hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup olması için gerekli ve yeterli koşul $i = 1, 2, \ldots, t - 1$ için $x_i + x_{i-1} = F(R)$ olmasıdır.

**Ispat:** Bakınız [5]

**Önerme 3.9**

R simetrik bir sayısal yarıgrup ise hemen hemen simetriktir.

**İspat:**

$R$ simetrik sayısal yarıgrup ise $PF(R) = \{F(R)\}$ olduğunu göstermeliyiz. Yani; $R$ simetrik sayısal yarıgrubunun Frobenyus sayısından başka Sözde-Frobenyus sayısı olmadığını göstermeliyiz.

Kabul edelim ki; $F(R) \neq t \in PF(R)$ olsun.

$t \in G(R)$ ve $R$ simetrik sayısal yarıgrup olduğundan $F(R) - t \in R$ olmalıdır.
$t \in PF(R)$ ve $R$ nin sıfırdan farklı her elamanıyla toplamı $R$ sayısal yarıgrubunun elemanı olmalıdır. Öyleyse; $R$ nin sıfırdan farklı elemanı olarak $F(R) - t$ elemanını seçelim.

$$t + (F(R) - t) = x + F(R) - x = F(R) \in R$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla; $R$ simetrik sayısal yarıgrubunun Frobenyus sayısından başka Sözde-Frobenyus sayısı olmadığından hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup olma şartı gösterilmiş olur.

**Örnek 3.10**

Yukarıdaki yardımcı teoremi 3.8'i örnek üzerinden incelersek,
$R = \langle 6, 7, 9, 10 \rangle$ örneğini ele alalım. Örnek 3.6 'ten $R$'nin Frobenyus sayısının $F(R) = 11$ ve sözde - Frobenyus sayılarının $PF(R) = \{3, 8, 11\}$ olduğu biliniyor.
$x_1 = 3$ ve $x_2 = 8$ olacak şekilde,
$i = 1$ için

$$x_1 + x_{3-1} = x_1 + x_2 = 3 + 8 = 11 = F(R)$$

$i = 2$ için

$$x_2 + x_{3-2} = x_2 + x_1 = 8 + 3 = 11 = F(R)$$

Elde edilir. Dolayısıyla $R$ hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

**Lemma 3.11**

$a \in R$ ve $r \in Ap(a, R)$ olsun. O zaman aşağıdakiler geçerlidir:

i) Eğer $r, r^{\iota} \in R$ ve eğer $r + r^{\iota} \in Ap(a, R)$ ise, o zaman $r, r^{\iota} \in Ap(a, R)$.

ii) $R$'nin hemen hemen simetrik olduğunu varsayalım. Eğer $r \in Ap(a, R)$ ise, o zaman ya $\left(r + F(R)\right) - r \in Ap(a, R)$ ya da $r - a \in PF^{\iota}(R)$ İkinci durumda, $\left(r + F(R)\right) - r \in PF(R)$.

**İspat:**

Eğer $(a + F(R)) - r \notin R$ ise, bazı $r^{\iota} \in R$ vardır ve $f \in PF(R)$ Öyle ki;

$$f = \left(a + F(R)\right) - r + r^{\iota}.$$

$r - a \notin R$ olduğundan $f \neq F(R)$.

$$f^{\iota} = F(R) - f = F(R) - \left[\left(a + F(R)\right) - r + r^{\iota}\right]$$
$$= (r - a) - r^{\iota} \in PF\,(R).$$

Varsayım gereği $r - a \notin R$ olduğundan, $r = 0$ ve $r - a \in PF^{\iota}(R)$ olmalıdır.

$R = \langle n_1, n_2, n_3, \ldots n_t \rangle$ en az $t$ eleman tarafından üretilen bir sayısal yarıgrup olsun. $Her\ i$, $1 \leq i \leq t$ için, $\alpha_i$'yi minimum pozitif tamsayı olarak tanımlıyoruz, öyle ki

$$\alpha_i n_i = \sum_{j=!\ J \neq i}^{t} \alpha_i n_j$$

Ancak $\alpha_i$'nin minimallik özelliği şu anlama gelir, $\alpha_i$ 'nin genel olarak tekil olarak belirlenmediğini unutulmamalıdır.

**Önerme 3.12**

$R$, $g$ cinsine sahip bir sayısal yarı grup olsun ve $F$, $2F(R)$'den büyük bir pozitif tamsayı olsun.

$$G = \{1, \ldots, F\} \setminus \{F - a \mid a \in N \setminus R\}$$

'$F$' Frobenyus ile hemen hemen simetrik bir sayısal yarıgrubun boşluk kümesidir,

$F - 2g$ tipi ve $F - f$ çokluğu,

$PF(N \setminus G) = \{a \in R \mid 0 < a \leq F(R)\} \cup \{F(R) + 1, \ldots, F - F(R) - 1\}$

$\cup \{F - a \mid a \in R \cap \{0, \ldots F(R)\}$.

**İspat:**

$f = F(R)$ olarak alalım. Öncelikle şunu gözlemleyelim.

$$G = \{1, \ldots, F - f - 1\} \cup \{F - a \mid a \in R \cap \{0, \ldots f\}.$$

$G$'nin aslında bir boşluk kümesi olduğunu görelim.

Bunu yapmak için

$r\ ve\ t \in N \setminus \{0\}$ ile $r + t \in G$; özellikle, $r + t \leq F$ .

Şimdi, eğer; $r \leq F - f - 1$ veya $t \leq F - f - 1$, elde edilir.

$r \geq F - f$ ve $t \geq F - f$ olduğunu varsayalım;

bu durumda, $r + t \geq 2F - 2f = F + (F - 2f)$

ve $(F - 2f) > 0$ olduğundan,

$r + t > F$ sonucuna varırız ki bu $r + t \in G$ koşulu ile çelişkidir.

$R', N \setminus G$ sayısal yarı grubu olsun; $F(R') = F$ olduğundan

$r \in G$ verildiğinde, $F - r \in R'$ ise,

$$F = r + (F - r) \notin R'$$

yani $r \notin PF(R')$ olur.

Dolayısıyla, $R'$ 'nin hemen hemen simetrik olduğunu görmek için, $F - r \in R$ olmak üzere $r \in G$ verildiğinde, $r \in PF(R')$ olduğunu kanıtlamamız gerekir.

O halde, $r \in G$ olsun ki $F - r \in G$ olsun, $r \in R$ olduğunu iddia edilir;

gerçekten, eğer $F - r \leq F - f - 1$

ise, o zaman $r \geq f + 1$ ve dolayısıyla $r \in R$ olur. Aksi takdirde,

$$F - r \in \{F - f, \ldots, F\} \cap \{F - r \mid r \in R\}$$

ve açıkça, $r \in R$ olur.

Şimdi, $t \in R' \setminus \{0\}$ olsun ve $r + t \in R$ olduğunu ispatlayalım.

Eğer $r + t > F$ ise, kanıtlanacak bir şey yoktur. Aksi takdirde,

bazı $s \in N$ için

$r + t = F - s$

olur.

$r + t \notin R'$ ise,

$F - s \in G$

olur.

Yukarıdaki gibi tartışarak, $s \in R$ olduğunu kanıtlayabiliriz.

Böylece, $r + s \in R$ olduğundan, $t \in R$ ile çelişkili olarak

$$t = F - (r + s) \in G$$

sonucuna varılır.

Dolayısıyla, $R' = N\backslash G$ nin hemen hemen simetrik bir sayısal yarıgrup olduğunu söyleyebiliriz.

Ayrıca, $g(R') = \#G = F - g$ ve $R$ hemen hemen simetrik olduğundan, elimizde

$$t(R') = 2\,g(R') - F = F - 2g$$

eşitliği olur.

Ayrıca en küçük pozitif değerin $G$ de olmayan tamsayı $F - f$ dir, dolayısıyla $R$ nin çokluğu $F - f$ dir.

Son olarak, şunu görelim;

$PF(R') = \{r \in S \,|\, 0 < r \leq f\} \cup$

$\{f + 1, \ldots, F - f - 1\} \cup \{F - r \,|\, r \in R \cap \{0, \ldots f\}$

İlk olarak, sağ tarafın kardinaliteye sahiptir

$(f - g) + (F - 2f - 1) + (f + 1 - g) = F - 2g$ .

Dolayısıyla, sağ taraftaki tüm elemanların $PF(R')$ içinde olduğunu görmek yeterlidir.

Sağ taraftaki her $r$ için $r \notin R'$ ve ayrıca $F - r \notin R'$ olduğundan hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup tanımı gereği $r \in PF(R')$ olur.

## 3.1 Sayısal Yarıgrupların İçindeki İdealler

**Tanım 3.1.1**

Bir $k$ sonsuz cismi üzerindeki $M$ vektör uzayı, $\forall x, y, z \in M$ ve $\alpha, \beta \in k$ için,

i) $xy = yx$
ii) $x(yz) = (xy)z$
iii) $x(y + z) = xy + xz$
iv) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$
v) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

özelliklerini sağlıyorsa, $M$'ye değişmeli $k - cebiri$ denir.

**Tanım 3.1.2**

$M$ ve $N$, bir $k\ cismi$ üzerinde $k - cebirleri$ ve $f: M \longrightarrow N$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in M$ ve $c \in k$ için,

i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$
ii) $f(x.y) = f(x).f(y)$
iii) $f(c.x) = c.f(x)$

özelliklerini sağlayan $f$ fonksiyonuna $k - cebir$ homomorfizması denir.[18]

$t$, $k$ cismi üzerinde bir bilinmeyen olsun. $R = \langle n_1, \ldots, n_e \rangle$ sayısal yarıgrubunun $k[R]$ yarıgrup halkası,

$$k[R] \coloneqq k[t^{n_1}, \ldots, t^{n_e}] \subset k[t]$$

olarak tanımlanır.

$k[x_1, \ldots, x_e]$, $k\ cismi$ üzerinde $x_1, \ldots, x_e$ bilinmeyenli polinom halkası olsun.

$$\tau: k[x_1, x_2, \ldots, x_e] \to k[R]$$

$$x_i \to t^{n_1}, i = 1,2, \ldots, e$$

bir örten $k - cebiri$ homomorfizmasıdır.

$$çek\tau = \{f \in k[x_1, \dots, x_e] | \tau(f) = 0\}$$

ideali, $çek\tau = I_R$ olarak gösterilir.

**Tanım 3.1.3.** $I_R$ idealine $F[R]$ halkasının tamamlayıcı ideali denir. $I_R$ homojen bir idealdir ve binomlar tarafından üretilir.

**Not:** $\phi = \prod_{i=1}^{e} x_i^{\alpha_i} - \prod_{i=1}^{e} x_i^{\beta_i}$ binomunu alalım.

$\phi \in I_R \iff \phi \in çek\tau$

$\iff \tau(\phi) = 0_{k[R]}$

$\iff \tau(x_1^{\alpha_1} \dots x_e^{\alpha_e} - x_1^{\beta_1} x_e^{\beta_e} = 0$

$\iff (t^{n_1})^{\alpha_1} \dots (t^{n_e})^{\alpha_e} - (t^{n_1})^{\beta_1} \dots (t^{n_e})^{\beta_e} = 0$

$\iff t^{n_1\alpha_1 + \dots + n_e\alpha_e} = t^{n_1\beta_1 + \dots + n_e\beta_e}$

$\iff \sum_i^e n_i\alpha_i = \sum_1^e n_i\beta_i$

burada, $\phi$'nin derecesi,

$$der(\phi) = \sum_i^e n_i\alpha_i$$

olur.

**Örnek 3.1.4**

$R = \langle 4,10,11,13 \rangle$ sayısal yarıgrubunu alalım. Burada,

$n_1 = 4$ , $n_2 = 10$ , $n_3 = 11$ , $n_4 = 13$ olur.

$I_R$ idealinin elemanları

$$\phi \in I_R \iff \sum_i^4 n_i\alpha_i = \sum_1^4 n_i\beta_i$$

şeklinde bulunur.

$1.4 + 2.11 = 0.10 + 2.13$

eşitliğinden,

$$n_1\alpha_1 + n_3\alpha_3 = n_2\beta_2 + n_4\beta_4$$

elde edilir. Bu,

$$\phi = x_1^{\alpha_1}x_3^{\alpha_3} - x_2^{\beta_2}x_4^{\beta_4}$$

$$\phi = x_1^1x_3^2 - x_2^0x_4^2$$

demektir. Böylece,

$$\phi = x_1^1x_3^2 - x_4^2 \in I_R$$

bulunur. Aynı şekilde diğer polinomlar da elde edilebilir. Elde edilen bu polinomlar verilen sayısal yarıgrubun ideal kümesinin üreteçlerini oluşturur.

# BÖLÜM 4

## $RF -$ MATRİSLERİ

Bu bölümde, sayısal yarıgrub için, A.Moscariello [11] tarafından verilen ve hemen hemen simetrik sayısal yarıgrupların sınıflandırılmasında oldukça kullanışlı olan $RF$ −matrisler kavramı açıklanacaktır.

**Tanım 4.1**

$f \in PF(R)$ olsun. $f$' nin $RF - matrisi$, her $i\ için\ a_{ii} = -1$, her $i \neq j$ için, $a_{ij} \in N$ ve her $i = 1, \dots, t$ için

$$\sum_{j=1}^{t} a_{ij} n_j = f$$

olarak tanımlanan bir $txt$- boyutlu $A = (a_{ij})$ matrisidir.

**Örnek 4.2**

$R = \langle 6, 7, 9, 10 \rangle$ sayısal yarıgrubunu ele alalım.

$R = \langle 6, 7, 9, 10 \rangle = \{0, 6, 7, 9, 10, 12, \rightarrow\}$ olarak yazılır. Böylece $F(R) = 11$'dir.

R'nin sözde-Frobenyus sayılarının kümesi,

$$PF(R) = \{f \notin R | f + n_i \in R, \forall i = 1,2,3,4\}$$

olduğunu biliyoruz.

$R$'nin boşlukları kümesi,

$G(R) = N \backslash R = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 8, 11 \}$ kümesidir.

$n_1 = 6\ ,\ n_2 = 7\ ,\ n_3 = 9\ ,\ n_4 = 10'$ dur.

$f = 1$ olsun

$$1 + 7 = 8 \notin R \Rightarrow f = 1 \notin PF(R)$$

$f = 2$ olsun

$$2 + 6 = 8 \notin R \Rightarrow f = 2 \notin PF(R)$$

$f = 3$ için

$$f + 6 = 9 \in R$$
$$f + 7 = 10 \in R$$
$$f + 9 = 12 \in R$$
$$f + 10 = 13 \in R$$

olduğundan $f = 3$ $PF(R)$'dir.

Benzer şekillerle $f = 8 \in PF(R)$ ve $F(R) = 11$ $PF(R)$ dir.

$$PF(R) = \{3, 8, 11\}$$

elde edilir.

$f = 8 \in PF(R)$ yi ele alalım. $a_{11} = -1$ olmak üzere;

$$8 = a_{11}.6 + a_{12}.7 + a_{13}.9 + a_{14}.10$$

olacak şekilde $a_{12}, a_{13}, a_{14} \in N$sayılarını bulalım.

$$8 = (-1).6 + 2.7 + 0.9 + 0.10$$

eşitliğinden $a_{12} = 2$, $a_{13} = 0$, $a_{14} = 0$ bulunabilir.

Böylelikle $f = 8 \in PF(R)$ elemanı için $RF$ −matrisinin ilk satırını elde edilmiş olur.

Yine $a_{22} = -1$ olmak üzere;

$8 = a_{21}.6 + a_{22}.7 + a_{23}.9 + a_{24}.10$

$8 = 1.6 + (-1).7 + 1.9 + 0.10$

oldığundan $a_{21} = 1$, $a_{23} = 1$, $a_{24} = 0$ bulunur.

$a_{33} = -1$ için

$8 = a_{31}.6 + a_{32}.7 + a_{33}.9 + a_{34}.10$

$8 = 0.6 + 1.7 + (-1).9 + 1.10$

olduğundan $a_{31} = 0$, $a_{32} = 1$, $a_{34} = 1$

$a_{44} = -1$

$8 = a_{41}.6 + a_{42}.7 + a_{43}.9 + a_{44}.10$

$8 = 0.6 + 0.7 + 2.9 + (-1).10$

$a_{41} = 0$, $a_{42} = 0$, $a_{43} = 2$ bulunur.

Böylelikle $f = 8 \in PF(R)$ için $RF -$ matrisi;

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak yazılır.

$f = 8 \ \in PF(R)$ için,

$$8 \ = \ 3.6 \ + \ 0.7 \ + \ 0.9 \ + \ (-1).10$$

eşitliğinden $a_{41} = 3,\ a_{42} = 0,\ a_{43} = 0$ alınabilir.

Böylece $f = 8 \ \in PF(R)$ için $RF -$ matrisi;

$$\text{A=} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak da yazılabilir. Bu bize, $f = 8 \ \in PF(R)$ için $RF\ -$matrislerinin tek olmadığını göstermektedir.

**Lemma 4.3**

$R$ hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup ve $e = 4$ alalım.

$f \in PF(R)$ olsun,

$f = F(R)$ ve $A = (a_{ij}) = RF(f)$.

O zaman her $i$ ve $j$ için $a_{ij} > 0$ olacak şekilde $i = j$ vardır.

Yani, A'nın herhangi bir sütunu bazı pozitif bileşenler içermelidir.

**İspat:**

$a_{ij} = \ 0$ olduğunu varsayalım $i \ = \ 2,3,4.$ $\quad d \ = \ gcd(n_2,\ n_3,\ n_4)$ olsun.

$$f \ = \ -n_2 \ + \ a_{23}n_{\ 3} + \ a_{24}n_4$$

denkleminden $d|f$ elde edilir.

$$f \ = \ -n_1 \ + \ a_{12}n_{\ 2} + \ a_{13}n_{\ 3} + \ a_{14}n_4$$

denkleminden $d|n_1$ elde edilir.

Buradan $d = 1$ olur. Dolayısıyla $R_1 = \langle n_2, n_3, n_4 \rangle$ sayısal bir yarıgruptur ve son üç sütun $A$'nın $f \in PF(R_1)$ olduğunu gösterir. $R_1$ üç eleman tarafından üretildiğinden, $t(R_1) \leq 2$ , ve $F(R_1) \geq F(R) > f$ olduğundan,

$$PF(R_1) = \{f, F(R_1)\}$$

olduğu sonucuna varılır.

Dolayısıyla $F(R_1) - f \notin R_1$ ve $F(R_1) - f \leq R_1$ ya da

$$F(R_1) - f \leq R_1 . F(R_1).$$

İkinci durum gerçekleşemez, çünkü aksi takdirde $f \in R_1$ olur. Böylece

$F(R_1) - f \leq R_1 . f$ olur. Öte yandan,

$$F(R) \notin R_1 \text{ ve } f < F(R) \leq F(R_1)$$

olduğundan, $F(R) - f \leq R_1$ elde edilir $F(R_1) - f \leq R_1\ f$ .

Ayrıca, $F(R) - f \in PF(R)$ olduğundan, $F(R) - f = f$ sonucuna varılır.

Önceki argümanlar $F(R) = F(R_1)$ olduğunu ve $R_1$'in sözde simetrik olduğunu göstermektedir.

İkincisi, $g(R_1) = F(R_1)/2 + 1$ anlamına gelir. Bu nedenle,

$$g(R) \leq g(R_1) - 1 = \frac{F(R_1)}{2} = \frac{F(R)}{2}$$

çünkü $R \supset R_1 \cup \{n_1\}$. Bu bir çelişkidir.

Eğer $e = 5$ ise, Lemma 4.3 doğru değildir.

**Sonuç 4.4**

R'nin hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup olduğunu varsayalım ve $f \in PF(R)$ alalım.

O zaman her satırın en az bir 0'ı vardır.

Dahası, her $i$ için, $RF(f)$'nin $(i,j)$ bileşeni herhangi bir $RF(f)$ seçimi için 0 olacak şekilde $j = i$ vardır.

**Yardımcı Teorem 4.3**

$f, f^{\iota} \in PF(R)\ ve\ f + f^{\iota} \notin R$ olsun.

$$PF(f) = A = (a_{ij}) ve\ RF(f^{\iota}) = B = (b_{ij})$$

olacak şekilde alalım. Böylelikle, her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ veya $b_{ij} = 0$ 'dır. Özellikle, $RF\left(\frac{F(R)}{2}\right) = (a_{ij})$ ise, her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ veya $b_{ij} = 0$ 'dır.

**İspat:**

$f \in PF(R)$ için, $f'$in RF-matrisi $A = (a_{ij})$ ise, Tanım 4.1'den $i = 1, \ldots, t$ ve

$$f = a_{i1}n_1 + a_{i2}n_2 + \cdots + a_{ii}n_i + \cdots + a_{it}n_t$$

ve her i için $a_{ii} = -1$ olduğundan,

$$f = a_{i1}n_1 + a_{i2}n_2 + \cdots + (-1)n_i + \cdots + a_{it}n_t$$

$$\Rightarrow f + n_i = a_{i1}n_1 + a_{i2}n_2 + \cdots + a_{(i-1)}n_{(i-1)} + a_{(i+1)}n_{(i+1)} + \cdots + a_{it}n_t$$

$$\Rightarrow f + n_i = \sum_{l \neq i}^{t} a_{il}n_l$$

elde edilmiş olur. Benzer şekilde, $f^{\iota} \in PF(R)$ için, $f^{\iota}{}'$in RF-matrisi $B = (b_{ij})$ ise, tanım 4.1'den ,

$$\Rightarrow f^{\iota} + n_j = \sum_{k \neq j}^{t} b_{jk}n_k \quad \text{bulunur.}$$

$a_{ij} \geq 1$ ve $b_{ij} \geq 1$ ise,

$$f = a_{i1}n_1 + a_{i2}n_2 + \cdots + (-1)n_i + \cdots + a_{it}n_t$$

$$f^{\iota} = b_{j1}n_1 + b_{j2}n_2 + \cdots + (-1)n_j + \cdots + b_{jt}n_t$$

Eşitliklerini taraf tarafa toplarsak;

$$f + f^{\iota} = (a_{i1} + b_{j1})n_1 + \cdots + (b_{ji} - 1)n_i \cdots + (a_{ij} - 1)n_j + \cdots + (a_{it} + b_{jt})n_t$$

$$f + f^{\iota} = (b_{ji} - 1)n_i + (a_{ij} - 1)n_j += \sum_{p \neq i,j}^{t} (a_{ip} + b_{jp})n_p$$

elde edilen eşitlik R'nin bir elemanı olur. Bu $f + f^{\iota} \notin R$ olması durumu ile çelişir. Böylelikle $a_{ij} \geq 1$ ve $b_{ij} \geq 1$ ise varsayımı yanlıştır.
Bu durumda her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ veya $b_{ij} = 0$ olur.

Eğer, $\frac{F(R)}{2} \in PF(R)$ ve , $RF\left(\frac{F(R)}{2}\right) = (a_{ij})$ ise , üstteki ifadede $f = \frac{F(R)}{2}$ ve $f^{\iota} = \frac{F(R)}{2}$ ve $RF(f) = RF\left(\frac{F(R)}{2}\right) = (a_{ij})$ , $RF(f^{\iota}) = RF\left(\frac{F(R)}{2}\right) = (b_{ij}) = (a_{ij})$ yazabiliyor olduğumuzdan her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ veya $b_{ij} = 0$ elde edilir.

**Not:** $PF'(R) = PF(R) - F(R)$

## 4.1. RF-Matrisler İle İdeallerin Bulunması ve $RF$ Bağıntıları

Bu kısımda, ideallerin minimal üreteç sistemlerini, ideallerin $RF -$ matrislerini kullanarak elde edeceğiz.

$I_R$ idealine $R$ sayısal yarıgrubunun idealinin üreteç kümesi diyeceğiz. Aşağıda bir sayısal yarıgrubun idealinin $RF -$ matrisleri ile üreteç kümesini elde etmek için gerekli tanım ve lemmalar verilmiştir.

**Tanım 4.1.1**

$r = (r_1, \dots, r_n) \in Z^n$ vektörü olmak üzere, $r^+$ vektörü $0 \geq i \geq n$ $i$ indis olmak üzere $r_i \geq 0$ için, $r^+$ vektörü;

$$r^+ = (0, \dots, 0, r_i, 0, \dots, 0)$$

olarak ve $r^-$ vektörü;

$$r^- = r^+ - r$$

olarak tanımlansın. O zaman,

$$r = r^+ - r^-$$

olur.

**Örnek 4.1.2**

$r = (2, -1, 3, 0, -5) \in Z^5$ vektörünün örneginde $r^+$ ve $r^-$ vektörlerini bulalım.

$r_1 = 2$ , $r_3 = 3$ , $r_4 \geq 0$ ve $r_2 = -1$ , $r_5 = -5 < 0$ olduğundan

$r^+ = (2, 0, 3, 0, 0)$ olarak bulunur.

$$\begin{aligned} r^- &= r^+ - r = (2, 0, 3, 0, 0) - (2, -1, 3, 0, -5) \\ &= (2 - 2, 0 - (-1), 3 - 3, 0 - 0, 0 - (-5)) \end{aligned}$$

$r^- = (0, 1, 0, 0, 5) \in N^5$

vektörüdür.

**Tanım 4.1.3**

$R = \langle r_1, r_2 \ldots r_t \rangle$ sayısal yarıgrup ve $f \in PF(R)$ olsun. $b_1, b_2 \ldots b_t$ vektörleri $RF(f)$ 'nin satır vektörleri ve $1 \leq i \leq j \leq t$ için $b_{ij} = b_i - b_j$ iken

$$\phi_{ij} = X^{b_{ij}^{+}} - X^{b_{ij}^{-}} \in I_R$$

formundaki binom bağıntısına $RF(f) -$ bağıntı veya $RF -$ bağıntı denir.

**Lemma 4.1.4**

$r, r, \ldots, r_e$ vektörleri $RF -$ matrisinin satır vektörleri olsun. Sayısal yarıgrubun üreteç kümesinin idealinin her elemanı aşağıdaki gibi sırasıyla bulunabilir.

$1 \leq i < j \leq e$ olacak şekilde $\forall i, j$ için,

$$r_{ij} = r_i - r_j,$$

$$\phi = X^{r_{ij}^{+}} - X^{r_{ij}^{-}} \in I_R$$

olur. Aynı zamanda $der(\phi_{ij}) \leq f + n_i + n_j$ ' dir.

**İspat**

$r, r, \ldots, r_e$ vektörleri $RF -$ matrisinin satır vektörleri olsun. Bu durumda,

$1 \leq i < j \leq e$ olacak şekilde $\forall i, j$ için,

$$f = r_{i1}n_1 + \cdots + r_{ii}n_i + \cdots + r_{ie}n_e$$

$$f = r_{j1}n_1 + \cdots + r_{jj}n_j + \cdots + r_{je}n_e$$

ve

$$r_i = (r_{i1}, r_{i2}, \ldots r_{ii}, \ldots r_{ij}, \ldots r_{ie})$$

$$r_j = (r_{j1}, r_{j2}, \ldots r_{ji}, \ldots r_{jj}, \ldots r_{je})$$

yazılabilir. $r_{ii} = -1$ $ve$ $r_{jj} = -1$ olduğundan,

$f = r_{i1}n_1 + \cdots + (-1)n_i + \cdots + r_{ie}n_e$

$\Rightarrow f + n_i = r_{i1}n_1 + \cdots + r_{i(i-1)}n_{i-1} + 0.n_i + r_{i(i+1)}n_{i+1} + \cdots + r_{ij}n_j$

$+ \cdots + r_{ie}n_e$

Bu eşitliğin her iki tarafını $n_j$ ile toplarsak,

$$\Rightarrow f + n_i + n_j = r_{i1}n_1 + \cdots + r_{i(i+1)}n_{i-1} + 0.n_i + r_{i(i+1)}n_{i+1} + \cdots + (r_{ij} + 1)n_j + \cdots + r_{ie}n_e$$

elde edilir. Böylece, $f + n_i + n_j$ ' nin bir faktorizasyonunun katsayı vektörü

$\left(r_{i1}, \ldots r_{i(i+1)}, 0, r_{i(i+1)}, \ldots r_{ij} + 1, \ldots r_{ie}\right)$

olarak yazılır. Şimdi, bu vektörün $r_i + e_i + e_j$ vektörüne eşit olduğunu görelim.

$r_i + e_i + e_j$

$= \left(r_{i1}, \ldots r_{i(i-1)}, -1, r_{i(i+1)}, \ldots r_{ij}, \ldots r_{ie}\right) + (0, \ldots, 1, \ldots, 0) + (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$

$= \left(r_{i1}, \ldots r_{i(i-1)}, -1 + 1, r_{i(i+1)}, \ldots r_{ij} + 1, \ldots r_{ie}\right)$

$= \left(r_{i1}, \ldots r_{i(i-1)}, 0, r_{i(i+1)}, \ldots r_{ij} + 1, \ldots r_{ie}\right)$

olarak bulunur. Benzer şekilde;

$f = r_{j1}n_1 + \cdots + r_{j1}n_i \cdots + r_{jj}n_j + \cdots + r_{je}n_e$

$\Rightarrow f + n_j = r_{j1}n_1 + \cdots + r_{ji}n_i + \cdots + r_{j(j-1)}n_{j-1} + 0.n_j + r_{j(j+1)}n_{j+1}$

$+ \cdots + r_{je}n_e$

Bu eşitliğin her iki tarafını $n_i$ ile toplarsak,

$\Rightarrow f + n_i + n_j = r_{j1}n_1 + \cdots + \left(r_{ji} + 1\right)n_i + \cdots + r_{j(j-1)}n_{j-1} + 0.n_j +$

$r_{j(j+1)}n_{j+1} + \cdots + r_{je}n_e$

Böylece, $f \; + \; n_i + n_j$ ’ nin bir faktorizasyonunun katsayı vektörü

$$\left(r_{j1}, \dots, r_{ji} + 1, \dots, r_{j(j-1)}, 0, r_{j(j+1)}, \dots r_{ji} + 1, \dots r_{je}\right)$$

olarak bulunur. Yine,

$r_j \; + \; e_i \; + \; e_j$

$= \left(r_{j1}, r_{j2}, \dots r_{ji}, \dots, -1, \dots r_{je}\right) + (0, \dots, 1, \dots, 0) + (0, \dots, 1, \dots, 0)$

$= \; \left(a_{j1}, \dots, a_{ji} \; + \; 1, \dots, -1 \; + \; 1, \dots, a_{je}\right)$

$= \; (a_{j1}, \dots, \; a_{ji} \; + \; 1, \dots, 0, \dots, a_{je})$

olduğundan $r_j \; + \; e_i \; + \; e_j$ vektörüde bu katsayı vektörüne eşit olur.

$\left(r_i \; + \; e_i \; + \; e_j\right) - \left(r_j \; + \; e_i \; + \; e_j\right) = r_i - r_j = r_{ij}$

$r_{ij} = \left(r_{i1}, r_{i2}, \dots, -1, \dots, r_{ij}, \dots, r_{ie}\right) - (r_{j1}, r_{j2}, \dots, r_{ji}, \dots, -1, \dots, r_{je})$

$= (r_{i1} - r_{j1}, r_{i2} - r_{j2}, \dots, -1 + r_{ji}, \dots, r_{ij} - 1, \dots, r_{ie} - r_{je}$ olur.

$(r_{i1} - r_{j1})n_1, (r_{i2} - r_{j2})n_2, \dots, (-1 + r_{ji})n_i, \dots, (r_{ij} - 1)n_j, \dots, (r_{ie} - r_{je})n_e$

$= \; (r_{i1}n_1 \; + \cdots \; +(-1)n_i \; + \cdots \; +r_{ie}n_e) - \left(r_{j1}n_1 \; + \cdots + r_{ji}n_i \; \cdots \; +(-1)n_j \; + \cdot\cdot \cdot \; +r_{je}n_e\right)$

$= f - f = 0$

olmasından $p_k = (r_{ik} - r_{jk})$ sayıları $r_{ij}$ vektörünün bileşenleri iken $\sum_{k=1}^{e} p_k n_k$ olan $r_{ij}$ vektörü elde edilir. Buradan;

$\Rightarrow \phi_{ij} = X^{r_{ij}^{+}} - X^{r_{ij}^{-}} \in I_R$

olur. Yine $f \; + \; n_i + n_j$ ‘nin iki faktorizasyonu olmasından,

$der(\phi_{ij}) \; \leq \; f \; + \; n_i + \; n_j$ elde edilir.

**Örnek 4.1.5**

$R = \langle 7, 12, 13, 22 \rangle$ sayısal yarıgrubunu örnek olarak ele alalım.

$R = \{ 0, 7, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 33 \ \rightarrow \}$ olduğundan

$PF(R) = \{15, 30\}$ olarak bulunur.

$f = 15 \in PF'(R)$ için $RF -$ matrisini bulalım.

$15 = (-1).7 + 0.12 + 0.13 + 1.22$

$15 = 2.7 + (-1).12 + 1.13 + 0.22$

$15 = 4.7 + 0.12 + (-1).13 + 0.22$

$15 = 0.7 + 2.12 + 1.13 + (-1).22$

olmasından,

$$RF(f = 15) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$RF -$ matrisinin satır vektörleri

$b_1 = (-1, 0, 0, 1)$ , $b_2 = (2, -1, 1, 0)$ , $b_3 = (4, 0, -1, 0)$ , $b_4 = (0, 2, 1, -1)$ vektörleridir.

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) = (x, y, z, w)$$

olarak düşünelim. $RF(15)$ matrisindeki birinci ve ikinci satırların farklarını alırsak,

$$b_{12} = b_1 - b_2 = (-1, 0, 0, 1) - (2, -1, 1, 0) = (-3, 1, -1, 1)$$

elde edilir.

$b_{12} = (-3, 1, -1, 1) \in Z^4$ vektörü için

$b_{12}^{+} = (0,1,0,1)$ olur.

$$b_{12}^{-} = b_{12}^{+} - b_{12}$$

$b_{12}^{-} = (0,1,0,1) - (-3,1,-1,1) = (3,0,1,0)$ olarak bulunur.

Bu durumda;

$$X^{b_{12}^{+}} = x^0y^1z^0w^1$$

$$X^{b_{12}^{-}} = x^3y^0z^1w^0$$

olduğundan,

$\phi_{12} = yw - x^3z \in I_R$ üretecini elde etmiş oluruz.

Aynı şekillerle diğer vektörlerden;

$b_{13} = b_1 - b_3 = (-1,0,0,1) - (4,0,-1,0) = (-5,0,1,1)$

$$b_{13}^{+} = (0,0,1,1)$$

$b_{13}^{-} = b_{13}^{+} - b_{13} = (0,0,1,1) - (-5,0,1,1) = (5,0,0,0)$ vektörlerinden,

$$\phi_{13} = zw - x^5 \in I_R$$

$b_{14} = b_1 - b_4 = (-1,0,0,1) - (0,2,1,-1) = (-1,-2,-1,2)$

$$b_{14}^{+} = (0,0,0,2)$$

$b_{14}^{-} = b_{14}^{+} - b_{14} = (0,0,0,2) - (-1,-2,-1,2) = (1,2,1,0)$

$$\phi_{14} = w^2 - xy^2z \in I_R$$

$b_{23} = b_2 - b_3 = (2,-1,-1,0) - (4,0,-1,0) = (-2,-1,2,0)$

$$b_{23}^{+} = (0,0,2,0)$$

$b_{23}^{-} = b_{23}^{+} - b_{23} = (0,0,2,0) - (-2,-1,2,0) = (2,1,0,0)$

$$\phi_{23} = z^2 - x^2y \in I_R$$

$$b_{24} = b_2 - b_4 = (2,-1,1,0) - (0,2,1,-1) = (2,-3,0,1)$$

$$b_{24}^{+} = (2,0,0,1)$$

$$b_{24}^{-} = b_{24}^{+} - b_{24} = (2,0,0,1) - (2,-3,0,1) = (0,3,0,0)$$

$$\phi_{24} = x^2w - y^3 \in I_R$$

$$b_{34} = b_3 - b_4 = (4,0,-1,0) - (0,2,1,-1) = (4,-2,-2,1)$$

$$b_{34}^{+} = (4,0,0,1)$$

$$b_{34}^{-} = b_{34}^{+} - b_{34} = (4,0,0,1) - (4,-2,-2,1) = (0,2,2,0)$$

$$\phi_{34} = x^4w - y^2z^2 \in I_R$$

Bu eşitliklerle üreteçleri elde etmiş olduk. Buradan,

$$\phi_{34} = x^4w - y^2z^2 \in I_R$$

üreteci,

$$\phi_{34} = x^4w - y^2z^2 = x^2(x^2w - y^3) - y^2(z^2 - x^2y) = x^2\phi_{24} - y^2\phi_{23}$$

Bu şekilde yazılabildiği için $\phi_{34}$ , $I_R$'in minimal üreteci değildir.

Böylelikle, $I_R$ ideali için 5 adet minimal üreteç elde edilmiş olur.

**Lemma 4.1.6**

$\phi_1, \ldots, \phi_s \in \mathrm{I}_R$ ve her $k$ için, $u$ ve $v$ monomları $x_i/u$ ve $x_j/v$ olacak şekilde

$\phi_k = u - v$ ve $\mathrm{der}(\phi_k) = f + n_i + n_j$ olacak şekilde $f \in PF(R)$ ve $i < j$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $I_R$, $RF -$ bağıntılar tarafindan üretilir.

**İspat:**

$\phi_k = u - v$ binomu, her $k$ için $u$ ve $v$ monomları $i < j$ için $x_i/u, x_j/v$ ve

$f \in PF'(R)$ için $\mathrm{der}(\phi_k) = f + n_i + n_j$ olacak şekilde tanımlansın. $u' = \frac{u}{x_j}$ olsun. Bu durumda,

$$\mathrm{der}(u') = \mathrm{der}\left(\frac{u}{x_i}\right) = \mathrm{der}(u) - \mathrm{der}(x_i)$$

olmasından $\mathrm{der}(u) = (f + n_j) + n_i$ ve $\mathrm{der}(u') = f + n_j$ olur. $\mathrm{der}(v') = f + n_i$ olan bir $v'$ binomu alalım.

$$\mathrm{der}(x_j \cdot v') = \mathrm{der}(x_j) + \mathrm{der}(v') = n_j + (f + n_i)$$

$\psi_k = u - x_j \cdot v'$ binomu için $\mathrm{der}(\psi_k) = (f + n_i) + n_j$ ve $\psi_k{}'$ nın yapısı Lemma5.3.3'deki binomların formunda olduğundan $\psi_k = u - x_j \cdot v'$ bir $RF -$ bağıntıdır.

$$\mathrm{der}\left(\frac{v}{x_j}\right) = f + n_i = \mathrm{der}(v')$$

olmasından dolayı,

$$\frac{v}{x_j} - v' \in I_R$$

elde edilir.

$$\psi_k + x_j\left(\frac{v}{x_j} - v'\right) = u - x_j v' + x_j\left(\frac{v}{x_j} - v'\right) = u - v = \phi_k$$

bulunur. Böylece, $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_e)$ maksimal ideal olmak üzere

$$\phi_k = \psi_k + x_j\left(\frac{v}{x_j} - v'\right) \in \psi_k + \mathfrak{m}I_R$$

bulunur. Buradan,

$$(\phi_1, \dots, \phi_m) + \mathfrak{m}\mathrm{I}_D = (\psi_1, \dots, \psi_m) + \mathfrak{m}I_R$$

yazabiliriz.

$$I_R = (\psi_1, \dots, \psi_m)$$

elde edilir.

# BÖLÜM 5

## HEMEN HEMEN SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLARIN $RF$ −MATRİSLERİYLE İNCELENMESİ

Bu bölümde hemen hemen simetrik sayısal yarıgrupların $RF -$ matrisleriyle incelenmesi verilmiştir.

**Teorem 5.1**

$R = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ hemen hemen simetrik bir sayısal yarıgrup olsun,
$f \in PF(R) \setminus \{F(R)\}$ ve bir sütununda hiç pozitif elemanı olmayan $f$ için
$M'$ $RF -$ matrisi olsun. Böylece,
$f = \frac{F(R)}{2}$ olur.

**İspat:**

Genel $RF -$ matrisini kaybetmeden

$$RF(f) = \begin{bmatrix} -1 & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ 0 & -1 & k_{23} & k_{24} \\ 0 & k_{32} & -1 & k_{34} \\ 0 & k_{42} & k_{43} & -1 \end{bmatrix}$$

olduğunu düşünelim. $t = obeb(n_2, n_3, n_4)$ olsun.

$RF -$ matristen

$f = (-1)n_1 + k_{12}n_2 + k_{13}n_3 + k_{14}n_4$

$f = 0.n_1 + (-1)n_2 + k_{23}n_3 + k_{24}n_4$ yazabiliriz.

$t = obeb(n_2, n_3, n_4)$ olmasından ${}^{t}/_{n_2}$, ${}^{t}/_{n_3}$, ${}^{t}/_{n_4}$ ‘tür.

$\Rightarrow {}^{t}/(-1)n_2 + k_{23}n_3 + k_{24}n_4$

$\Rightarrow {}^{t}/_{f}$ olur.

Yine ;

$f = (-1)n_1 + k_{12}n_2 + k_{13}n_3 + k_{14}n_4$

$\Rightarrow n_1 = (k_{12}n_2 + k_{13}n_3 + k_{14}n_4) + (-1)f$ ve $t/_{k_{12}n_2 + k_{23}n_3 + k_{24}n_4}$ , $t/_f$

olmasından $t/_{n_1}$ elde edilir.

$t/_{n_1}$, $t/_{n_2}$, $t/_{n_3}$, $t/_{n_4}$ ve $ebob(n_1, n_2, n_3, n_4) = 1$ olmasından $t = 1$ olmalıdır.

$ebob(n_2, n_3, n_4) = t = 1$'den $R = \langle n_2, n_3, n_4 \rangle$ bir sayısal yarıgruptur.

$f \notin PF(R_1)$ olduğunu görelim.

$PF(R_1) = \{x \notin R_1 | x + n_i \in R_1 , i = 2,3,4\}$ olduğunu biliyoruz.

$f$'in $M\ RF -$ matrisinden

$f + n_2 = k_{23}n_3 + k_{24}n_4 \in R_1$ bulunur.

Benzer şekilde;

$f + n_3 = k_{32}n_2 + k_{34}n_4 \in R_1$

$f + n_4 = k_{42}n_2 + k_{43}n_3 \in R_1$ yazılır.

$f + n_2,\ f + n_3,\ f + n_4$ , $R_1$ 'in elemanları olduğundan $f \in PF(R_1)$ olur.

$R_1 \subseteq R \Rightarrow (N \backslash R) \subset (N \backslash R_1)$

$\Rightarrow max(N \backslash R) \leq (N \backslash R_1)$

$\Rightarrow F(R) \leq F(R_1)$ olacaktır.

$f \in PF(R) \backslash F(R)$ ve $F(R) \leq F(R_1)$'den $f \neq F(R_1)$'dir.

$R = \langle n_2, n_3, n_4 \rangle$ sayısal yarıgrubu üç üreteçlidir.

Bu durumda $R$'nin tipi en fazla 2'dir. [5]

$f \in PF(R_1)$ ve $F(R_1) \in PF(R_1)$ 'den $t(R_1) = 2$ olur.

Şimdi $F(R_1) - f$ 'i düşünelim.

$f \in PF(R_1)$ olduğundan $f \in PF(R_1)/\{F(R_1)\}$'dir.

$F(R_1) - f \in R_1$ olsaydı

$l_2, l_3, l_4$ negatif olmayan sayılar için;

$$F(R_1) - f = l_2n_2 + l_3n_3 + l_4n_4$$
$$F(R_1) = f + (l_2n_2 + l_3n_3 + l_4n_4)$$

olurdu.

$f \in PF(R_1)$ olmasından $x \in R_1/\{0\}$ için $f + x \in R_1$'dir.

$\Rightarrow (l_2n_2 + l_3n_3 + l_4n_4) \in R_1$'den

$\Rightarrow f + (l_2n_2 + l_3n_3 + l_4n_4) \in R_1$

$\Rightarrow F(R_1) \in R_1$

çelişkisi elde edilir. Böylelikle $F(R_1) - f \notin R_1$ 'dir.

Son olarak $R$ hemen hemen simetrik olduğundan,

$\Rightarrow F(R) - f \in PF(R)$

$\Rightarrow F(R) - f = f$

$\Rightarrow F(R) = 2f$

$\Rightarrow f = \frac{F(R)}{2}$

elde edilir.

**Not:** $R = \langle n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 \rangle$ olduğunda teorem 5.1 doğru değildir. Bu durumu bir örnekle açıklayalım.

**Örnek 5.2**

$R = \langle 10,11,15,16,28 \rangle$ sayısal yarıgrubu için bakalım. $R$'nin sözde-Frobenyus sayılarının kümesi $PF(R) = \{5,17,29,34\}$ tür. Böylece $R$ tipi 4 olan hemen hemen sayısal bir yarıgruptur.

$$f = 5 \in PF(R) \ için$$

$$5 = (-1).10 + 0.11 + 1.15 + 0.16 + 0.28$$

$$5 = 0.10 + (-1).11 + 0.15 + 1.16 + 0.28$$

$$5 = 2.10 + 0.11 + (-1).15 + 0.16 + 0.28$$

$$5 = 1.10 + 1.11 + 0.15 + (-1).16 + 0.28$$

$$5 = 0.10 + 3.11 + 0.15 + 0.16 + (-1).28$$

olduğundan

$$RF(f=5) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olur. Görüldüğü üzere $RF(f\ = 5)'in$ 5. Sütununda hiç pozitif bileşen yoktur ifadesiyle çelişir.

**Yardımcı Teorem 5.2**

$R\ =\ \langle n_1, n_2, n_3, n_4\rangle$ hemen hemen simetrik bir sayısal yarıgrup olsun.

$f \in PF(R), f\ \neq F(R)$ ve $M = RF(f) = \left(k_{ij}\right)$ alalım. Böylelikle her $j$ için $k_{ij} > 0$ olacak şekilde $i \neq j$ vardır. Bir başka deyişle $M$ matrisinin herhangi bir sütunu bir pozitif bileşen içermelidir.

**İspat:**

Genelliği bozmaksızın $i = 2{,}3{,}4$ için $n_{i1} = 0$ olduğunu düşünelim. Teorem 5.1'in ispatından $F(R) = F(R_1)$ ve $R_1$'in sözde simetrik olduğu görülür.

$R\ =\ \langle\ n_2, n_3, n_4\rangle$ sözde simetrik olduğundan,

$$g(R_1) = \frac{F(R_1)}{2} + 1$$

$$R \supset R_1 \cup \{n_1\}$$

olduğundan

$$g(R) \geq g(R_1) - 1 = \frac{F(R_1)}{2} = \frac{F(R)}{2}$$

Bu durum ise çelişki oluşturur. O halde varsayım yanlıştır. Böylelikle $M$ matrisinin 1. Sütununda mutlaka pozitif bileşen içermelidir.

# BÖLÜM 6

# SONUÇLAR

Bu çalışmada, sayısal yarıgrupların tanımı ve elde edilme yöntemleri üzerine bilgiler sunulmuştur. Elde edilen sayısal yarıgrupların belirli özellikleri açıklanmıştır. Herhangi bir sayısal yarıgrubunun hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup olabilmesi için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar, sayısal yarıgruplarda verilen özelliklerin hepsinin geçerli olduğu özel bir sınıftır. Hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplarla $RF-$Matrisleri elde edilmiştir. $RF-$Matrisleri sayısal yarıgrupların tipinin ispatında kullanılmıştır. $RF-$Matrisleri oluşturulurken sözde-Frebenyus elemanlarını kullanılmıştır. $RF-$Matrislerinden yararlanarak hemen hemen simetrik sayısal yarıgrupların idealleri elde edilmiştir. Son olarak, hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar $RF-$Matrisleriyle incelenmiştir.

## KAYNAKLAR


[1] Barucci, V., & Fröberg, R. (1997). One-dimensional almost Gorenstein rings. *Journal of Algebra*, *188*(2), 418-442.

[2] Branco, M. B., Ojeda, I., & Rosales, J. C. (2019). Almost symmetric numerical semigroups with given Frobenyus number and type. *Journal of Algebra and Its Applications*, *18*(11), 1950217.

[3] Garcia-Sanchez, P. A., & Ojeda, I. (2019). Almost symmetric numerical semigroups with high type. *Turkish Journal of Mathematics*, *43*(5), 2499-2510.

[4] Herzog, J. ve Watanabe, KI (2019, Haziran). Neredeyse simetrik sayısal yarı gruplar. *Semigroup Forum'da* ( Cilt 98, s. 589-630). Springer ABD.

[5] Çalışkan, A. (2020). *Hemen hemen Gorenstein tekterimli eğriler* (Master's thesis, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü).

[6] Şeran, B. (2016). *Simetrik sayısal yarı gruplar* (Master's thesis, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü).

[7] Süer, M., & Yeşil, M. (2024, March). Row-factorization matrices in Arf numerical semigroups and defining ideals. In *Semigroup Forum* (pp. 1-22). Springer US.

[8] Nari, H. (2013, February). Symmetries on almost symmetric numerical semigroups. In *Semigroup Forum* (Vol. 86, pp. 140-154). Springer-Verlag.

[9] Garcıa-Garcıa, J. I., & Branco, M. B. (2002). Rosales, JC (E-GRAN-AL); Garcıa-S ánchez, PA (E-GRAN-AL). *J. London Math. Soc.(2)*, *65*(3), 611-623.

[10] A. Moscariello, "On The Type of An Almost Gorenstein Monomial Curve", Journal of Algebra,vol. 456, pp. 266-277, 2016, doi : 10.1006/j.jalgebra.2016.02.019.

[11] Karakaş Hİ. Arf Numerical semigroups with multiplicity 9 and 10. In Proceedings of International Meeting on Numerical semigroups with Applications; Cortona, Italy; 2020. pp. 163-183.

[12] J. J. Sylvester, 1884, “Mathematical Questions with Their Solutions”, *Educaitonal Times*, 41, 171-178.

[13] J. C. Rosales and P. A. Garcia-Sanchez, Numerical Semigroups, 1st edition, Developments in Mathematics series, Vol. 20, Springer New York, NY, ix + 181 pages, (2009), DOI: 10.1007/978-1-4419-0160-6.

[14] Fröberg, R., Gottlieb, C., Haggkvist, R. 1987. On numerical semigroups.Semigroup Forum, 35:63-83.

[15] Assi and P. A. Garcia-Sanchez, Numerical Semigroups and Applications, 1st edition, RSME Springer Series, Springer (2016), DOI: 10.1007/978-3-319-4133