

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖZEL BİR LİNEER GRUP İÇİN YÖRÜNGESEL GRAFLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KÜBRA OYMAK

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2024

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



ÖZEL BİR LİNEER GRUP İÇİN YÖRÜNGESEL GRAFLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KÜBRA OYMAK

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2024

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

KÜBRA OYMAK

ÖZET

**ÖZELBİR LINEER GRUP İÇİN YÖRÜNGESEL GRAFLAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
KÜBRA OYMAK
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. MURAT BEŞENK)

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2024

Bu çalışmada $SL(3, \mathbb{Z})$ lineer grubun özel bir kongrüans alt grubu olan $SL^*(3, \mathbb{Z})_0$ grubu için sonsuz bloğu üzerinde alt yörüngesel graflar incelendi.

Birinci bölümde konuyla ilgili olarak Topolojik Gruplar, Hiperbolik Geometri, Riemann Yüzeyleri, Möbius Dönüşümleri ve Graf Teori ile ilgili genel kavramlar ve açıklayıcı örnekler verildi.

İkinci bölümde $SL^*(3, \mathbb{Z})_0$ grubunun alt yörüngesel graflarında kenar olma şartları ve kendisiyle eşleşmiş kenar olma durumları araştırıldı. Ayrıca alt yörüngesel grafların bir devre içermesi için gerek ve yeterli şartlar elde edildi.

ANAHTAR KELİMELEER:Yörüngesel Graflar, İmprimitif Hareket, Yörünge, Sabitleyen, Devre

ABSTRACT

**ORBITAL GRAPHS FOR A SPECIAL LINEAR GROUP
MSC THESIS
KÜBRA OYMAK
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS**

(SUPERVISOR: PROF. DR. MURAT BEŞENK)

DENİZLİ, AUGUST 2024

In this study suborbital graphs on the infinite block for the $SL^*(3, \mathbb{Z})_0$ group, a special congruence subgroup of the $SL(3, \mathbb{Z})$ are investigated.

In the first chapter, about the subject general concepts and revealing examples dealing with Topological Groups, Hyperbolic Geometry, Riemann Surfaces, Möbius Transformations and Graph Theory are given.

In the second chapter, edge conditions in suborbital graphs of the congruence subgroup $SL^*(3, \mathbb{Z})_0$ and cases for being self paired edge are investigated. Also necessary and sufficient conditions for the suborbital graphs to contain a circuit are obtained.

KEYWORDS: Orbital Graphs, Imprimitve Action, Orbit, Stabilizer, Circuit

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ.....	vi
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1 Topolojik Gruplar	1
1.2 Hiperbolik Geometri.....	7
1.2.1 Hiperbolik Geometrinin Üst Yarı Düzlem Modeli	8
1.3 Graf Teori	10
1.4 Genel Möbius Grubu	20
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	25
2.1 Modüler Grup	25
2.2 $PSL(2, \mathbb{Z})$ Modüler Grubunun $\hat{Q}$ Üzerindeki Hareketi.....	26
2.3 $PSL(2, \mathbb{Z})$ Modüler Grubun Kongrüans Alt Grupları	28
2.4 İmpirimitif Hareket.....	29
2.5 Alt Yörüngesel Graflar.....	30
2.6 $SL^*(3, \mathbb{Z})$ Lineer Grubunun $\hat{\mathbb{Z}}$ Üzerinde Hareketi.....	33
2.7 $SL^*(3, \mathbb{Z})$ Lineer Grubunun $\hat{\mathbb{Z}}$ Üzerindeki Yörüngesel Grafları.....	36
2.8 Alt Graf.....	39
3. SONUÇ VE ÖNERİLER	44
4. KAYNAKLAR.....	45
5. ÖZGEÇMİŞ.....	47

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.2.1: Üst yarı düzlemde hiperbolik doğrular	8
Şekil 1.2.2: Üst yarı düzlemde paralel hiperbolik doğrular	8
Şekil 1.3.1: Bir elektrik ağı	10
Şekil 1.3.2: Bir kavşakta kesişen yollar	10
Şekil 1.3.3: Graf	10
Şekil 1.3.4: Basit graf	11
Şekil 1.3.5: Genel graf	11
Şekil 1.3.6: İzomorf graf	12
Şekil 1.3.7: Etiketlenmemiş graf	12
Şekil 1.3.8: $G_1 \cup G_2$ grafi	13
Şekil 1.3.9: Üç bileşenli bağlı olmayan graf	13
Şekil 1.3.10: Derecesi 2 olan köşeler ve uç köşe	13
Şekil 1.3.11: Farklı derecelere sahip köşeler ve uç köşe	14
Şekil 1.3.12: Graftaki köşeler	14
Şekil 1.3.13: $G - S$ grafi	15
Şekil 1.3.14: $G \setminus e$ grafi	15
Şekil 1.3.15: N_4 grafi	16
Şekil 1.3.16: K_4 ve K_5 grafi	16
Şekil 1.3.17: C_6, P_6 ve W_6 grafları	16
Şekil 1.3.18: Petersen grafi	17
Şekil 1.3.19: İki parçalı graf	17
Şekil 1.3.20: $K_{1,3}, K_{2,3}, K_{3,3}$ ve $K_{4,3}$ grafları	18
Şekil 1.3.21: Yönlendirilmiş graf	18
Şekil 1.3.22: Alta yatan graf	18
Şekil 1.3.23: Yürüyüş	19
Şekil 1.3.24: Bağlantılı graf	19
Şekil 1.3.25: Bağlantısız graf	19
Şekil 2.5.1: Devreler ve kendisiyle eşleşmiş kenar	30
Şekil 2.8.1: $F_{1,3}$ grafi	42
Şekil 2.8.2: $F_{1,2}$ grafi	43

SEMBOL LİSTESİ

Gx	: x noktasının G yörüngesi
G_x	: x noktasının G grubundaki sabitle
Γ	: Modüler grup
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\hat{\mathbb{Q}}$	: Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{H}$	: Üst yarı düzlem
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\hat{\mathbb{Z}}$	: $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$ kümesi
∞	: Sonsuz
Γ_0	: Sıfır noktasının Modüler gruptaki sabitleyeni
$PSL(2, \mathbb{R})$	: Reel katsayılı lineer kesirli dönüşümlerin grubu
$PSL(2, \mathbb{Z})$	: Katsayıları tamsayı olan lineer kesirli dönüşümlerin grubu
$[\alpha]$	: α bloğu
$SL(3, \mathbb{Z})$	: Katsayıları tamsayı olan 3×3 matrislerden oluşan grup
$O(a, b)$	: (a, b) ikilisinin yörüngesi
$G_{u,n}$	: $O(u, n)$ alt yörüngeye karşılık gelen alt yörüngesel graf
$F_{u,n}$	: Köşeleri sonsuz bloğu üzerinde olan alt yörüngesel graf

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programında hazırlanmıştır.

Bu tezin konusunun belirlenmesinde, çalışmanın planlanmasında ve çalışma süresince desteklerini esirgemeyen çok değerli Sayın Prof. Dr. Murat BEŞENK hocama teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca tüm eğitim hayatım boyunca desteğini esirgemeyen aileme ve değerli hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

KÜBRA OYMAK

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Topolojik Gruplar

Tanım 1.1.1. $G \neq \emptyset$ herhangi bir küme olmak üzere $*$: $G \times G \rightarrow G$, $(g_1, g_2) \rightarrow g_1 * g_2$ şeklinde tanımlanan her fonksiyona G kümesi üzerinde bir ikili işlem denir. Üzerinde en az bir ikili işlem tanımlanmış ve boş olmayan bir kümeye de cebirsel yapı denir ve $(G, *)$ ikilisi ile gösterilir. (Asar, Arıkan 2009).

Tanım 1.1.2. " $*$ " işlemi $G \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlanmış bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(G, *)$ ikilisine bir grup adı verilir:

- i) $\forall x, y \in G$ için $x * y \in G$ (kapalılık özelliği)
- ii) $\forall x, y, z \in G$ için $x * (y * z) = (x * y) * z$ (birleşme özelliği)
- iii) $\exists e \in G$ öyle ki $\forall x \in G$ için $e * x = x * e = x$ (birim eleman özelliği)
- iv) $\forall x \in G$ için $\exists x' \in G$ öyle ki $x * x' = x' * x = e$ (ters eleman özelliği)

Burada $x * y$ yerine kısaca xy yazılacaktır (Asar, Arıkan 2009).

Tanım 1.1.3. G bir grup, $\emptyset \neq H \leq G$ olsun. Eğer H, G üzerinde tanımlanan ikili işleme göre bir grup ise H ye G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir. Açıkça $H \leq G$ ise $e_G \in H$ dir. Dolayısıyla $\{e\}$ ve G, G grubunun alt gruplarıdır. Bu alt gruplara aşikar alt gruplar adı verilir. Bir grubun aşikar gruptan farklı alt gruplarına ise öz alt grup denir (Asar, Arıkan 2009).

Önerme 1.1.1. G bir grup, $\emptyset \neq H \leq G$ olsun. Bu durumda $H \leq G \Leftrightarrow \forall h_1, h_2 \in H$ için

- i) $h_1, h_2 \in H$
- ii) $h_1^{-1} \in H$ dır (Asar, Arıkan 2009).

Önerme 1.1.2. G bir grup, $\emptyset \neq H \leq G$ olsun. Buradan $H \leq G \Leftrightarrow \forall h_1, h_2 \in H$ için $h_1 h_2^{-1} \in H$ dır (Asar, Arıkan 2009).

Tanım 1.1.4. G bir grup ve A ile B ise G grubunun alt grupları olsun. $A = gBg^{-1}$ olan bir $g \in G$ varsa A ile B eşlenik alt gruplar denir (Tsuzuku 1982).

Tanım 1.1.5. G bir grup $H \leq G$ olsun. Ayrıca G grubu üzerinde bir " $\equiv$ " bağıntısı $a \equiv b(H) \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ olarak tanımlansın. Bu durumda tanımlanan bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır ve bir a elemanının denklik sınıfı $\bar{a} = \{ah: h \in H\} = aH$ alt kümesidir. aH alt kümesine $a \in G$ elemanının sol yan sınıfı denir. Benzer şekilde bir b elemanının denklik sınıfı $\bar{b} = \{hb: h \in H\} = Hb$ alt kümesidir. Hb alt kümesine $b \in G$ elemanın sağ yan sınıfı denir (Rose 1988).

Tanım 1.1.6. G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bu takdirde $H \leq G$ alt grubuna göre sağ ve sol yan sınıflarının sayısı birbirine eşittir. Bu sayıya H alt grubunun G grubu içindeki indeksi denir ve $|H:G|$ ile gösterilir (Rose 1988).

Tanım 1.1.7. G bir grup $H \leq G$ olsun. Eğer H alt grubunun G grubundaki bütün sağ ve sol kümeleri birbirine eşitse, yani $\forall x \in G$ için $xH = Hx$ oluyorsa H alt grubuna G grubunun normal alt grubu denir (Keskin 2006).

Teorem 1.1.1. G bir grup ve $H \leq G$ alt grubu verilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- i) $\forall g \in G$ ve $\forall h \in H$ için $ghg^{-1} \in H$
- ii) $\forall g \in G$ için $ghg^{-1} \subset H$
- iii) $\forall g \in G$ için $ghg^{-1} = H$
- iv) $\forall g \in G$ için $gH = Hg$

Tanım 1.1.8. $X \neq \emptyset$ verilen herhangi bir küme ve $P(X)$, X kümesinin güç kümesi olmak üzere $\tau \subset P(X)$ olsun. Bu takdirde τ ailesine aşağıdaki şartları sağlanıyor ise X üzerinde bir topoloji adı verilir:

- i) $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$
- ii) $\forall U, V \in \tau$ için $U \cap V \in \tau$
- iii) Her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise $\cup_{i \in I} U_i \in \tau$

Ayrıca (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

Tanım 1.1.9. $(G,*)$ ikilisi bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay olsun. Eğer,

$$\text{i) } M: G \times G \rightarrow G, M(g, h) = g * h$$

$$\text{ii) } m: G \rightarrow G, m(g) = g^{-1}$$

dönüşümleri sürekli ise bu durumda G ye bir topolojik grup denir (Beardon 1983).

Örnek 1.1.1.

i) $(\mathbb{R}, +)$ ikilisi bir topolojik gruptur. M ve m dönüşümlerinin sürekli olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

ii) N herhangi bir grup olsun. Eğer N grubu üzerinde bir ayrık topoloji varsa bu takdirde N topolojik bir gruptur.

iii) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ kümesini alalım. Bu küme üzerinde yapılan kompleks sayıların çarpma işlemine göre bir topolojik oluşur yani $(S^1, \cdot)$ bir topolojik gruptur.

Tanım 1.1.10. G topolojik grup ve τ herhangi bir topolojik uzay olsun. Eğer

$$\xi: G \times \tau \rightarrow \tau, \xi(g, x) = gx \text{ şeklinde tanımlanan } \xi \text{ dönüşümü sürekli ve } \forall x \in \tau,$$

$$\forall g_1, g_2 \in G \text{ için}$$

$$\text{i) } g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$$

$$\text{ii) } e \xi x = x$$

koşulları sağlanıyor ise (G, τ, ξ) üçlüsüne bir topolojik dönüşüm grubu denir. Bu durumda G topolojik grubuna τ üzerinde hareket ediyor veya G topolojik grubu τ üzerinde bir hareket grubu denir. Kolaylık olması açısından (G, τ, ξ) yerine kısaca $[G, \tau]$ ile gösterilir (Beardon 1983).

Tanım 1.1.11. $[G, X]$ topolojik dönüşüm grubu ve $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : y = gx$ olarak tanımlanırsa " $\sim$ " bağıntısı X kümesi üzerinde bir denklik bağlantısıdır. Bu " $\sim$ " bağıntısının her bir denklik sınıfına hareketin yörüngeleri denir. Ayrıca $x \in X$ noktasını içeren yörüngeye x noktasının yörüngesi denir ve Gx ile gösterilir. Açık olarak $Gx = \{gx : g \in G\}$ dir (Beardon 1983).

Tanım 1.1.12. G grubu X kümesi üzerinde hareket etsin ve $x, y \in X$ keyfi iki nokta olsun. Bu takdirde $gx = y$ olacak şekilde $g \in G$ varsa G grubuna X kümesi üzerinde transitif olarak hareket eder denir (Jones, Singerman 1987).

Tanım 1.1.13. G, X kümesi üzerinde hareket etsin ve $x \in X$ keyfi olsun. $G_x = \{ g \in G : gx = x \}$ x noktasının G deki sabitleyeni denir (Jones, Singerman 1991).

Önerme 1.1.3. $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve X bir Hausdorff uzayı olsun. Bu takdirde $G_x = \{ g \in G : gx = x \}$ sabitleyeni G grubunun kapalı bir alt grubudur.

İspat. Öncelikle $G_x \leq G$ olduğunu gösterelim. $G_x \leq G \Leftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G_x$ için $g_1, g_2^{-1} \in G_x$ şeklindedir. Buradan $\forall g_1, g_2 \in G_x$ için $g_1 x = x, g_2 x = x$ olup $g_2^{-1} x = x$ ve $g_1 g_2^{-1} x = g_1 (g_2^{-1} x) = g_1 x = x \Rightarrow g_1 g_2^{-1} \in G_x$ elde edilir. Şimdi G_x sabitleyeninin G grubunun bir kapalı alt kümesi olduğunu gösterelim. $x \in X$ keyfi fakat sabit bir nokta olsun. Bu durumda $T_0 : G \rightarrow X, T_0(g) = gx$ dönüşümü sürekli ve X Hausdorff uzayı olduğundan $T_0^{-1}(\{x\}) = G_x$ kapalıdır. Böylece $G_x \leq G$ ve G_x sabitleyeni kapalıdır.

Önerme 1.1.4. $[G, X]$ ikilisi bir topolojik dönüşüm grubu veya $y_0 \in G_x$ keyfi fakat sabit bir nokta olsun. Bu durumda $K = \{g \in G : y_0 = gx\}$ kümesi G_x sabitleyenin bir yan sınıfıdır.

İspat. $y_0 \in G_x$ olduğundan $\exists g_0 \in G : y_0 = g_0 x$ şeklindedir. Buradan yola çıkarak $g_0 G_x = K$ olduğunu gösterelim. $a \in g_0 G_x$ keyfi fakat sabit bir nokta olsun. Bu durumda $a = g_0 g_1$ olacak şekilde $g_1 \in G_x$ mevcuttur. Açıkça $ax = g_0 g_1 x = g_0 x = y_0$ dir. Dolayısıyla bu durum $a \in K$ olduğunu gösterir. Buradan $g_0 G_x \subset K$ dir. Şimdi $g \in K$ alalım. Bu ise $gx = y_0$ olur. Böylelikle $gx = y_0 = g_0 x \Rightarrow g_0^{-1} gx = x \Rightarrow g_0^{-1} g \in G_x$ olup açıkça $g \in g_0 G_x$ elde edilir. Yani $K \subset g_0 G_x$ olur. O halde sonuç olarak $g_0 G_x \subset K$ ve $K \subset g_0 G_x$ olduğundan $K = g_0 G_x$ bulunur.

Önerme 1.1.5. $[G, X]$ ikilisi bir topolojik dönüşüm grubu olsun. Bu durumda $x \in X$ keyfi sabit bir nokta olmak üzere $\tau : G / G_x \rightarrow G_x, \tau(gG_x) = gx$ dönüşümü birebir ve örtendir.

İspat. Önce $\tau : G / G_x \rightarrow G_x, \tau(gG_x) = gx$ dönüşümün birebir olduğunu gösterelim. Cebirden biliyoruz ki iki yan sınıf ya çakışır ya da ayrık iki küme biçimindedir. $\tau(g_1 G_x) = \tau(g_2 G_x)$ olsun.

Buradan $g_1x = g_2x \Rightarrow g_1^{-1}g_2x = x \Rightarrow g_1^{-1}g_2 \in G_x$ olup $g_2 \in g_1G_x$ dir. Böylece $g_2 \in g_2G_x$ ise $g_1G_x = g_2G_x$ elde edilir. $a \in G_x$ ve $a \in G_y \Rightarrow G_x = G_y$ eşitliği elde edilir.

Şimdi τ dönüşümünün örten bir dönüşüm olduğunu gösterelim. $h \in G_x$ keyfi olsun. Bu durumda $\exists g_0 \in G : h = g_0x$ dir. $\tau(g_0G_x) = g_0x = h \in G_x \Rightarrow g_0G_x \in G/G_x$ olup τ dönüşümü örtendir.

Önerme 1.1.6. $[G, X]$ ikilisi bir topolojik dönüşüm grubu ve $y = gx$ keyfi bir nokta olsun. Bu takdirde $G_y = gG_xg^{-1}$ dir. Yani bir yörüngedeki farklı iki elemanın sabitleyenleri eşlenik alt gruplardır.

İspat. $g_0 \in G_y$ keyfi bir nokta olsun. Bu durumda $G_y = \{g \in G : gy = y\}$ şeklinde olduğundan $g_0y = y$ dir. Böylece $y = gx$ ifadesinden $g_0gx = gx \Rightarrow g^{-1}g_0gx = x$ olup $g^{-1}g_0g \in G_x \Rightarrow g_0g \in gG_x$ elde edilir. Yani $g_0 \in gG_xg^{-1}$ olup $G_y \subset gG_xg^{-1}$ dir. Tersine $h \in gG_xg^{-1}$ olsun. Buradan $\exists g_0 \in G_x : h = gg_0g^{-1}$ yazılabilir. Şimdi hy ifadesini açalım. $hy = gg_0g^{-1}y = gg_0x = gx = y \Rightarrow h \in G_y$ bulunur. Dolayısıyla $gG_xg^{-1} \subset G_y$ elde edilir. Sonuç olarak $G_y = gG_xg^{-1}$ dir.

Örnek 1.1.2.

1) G herhangi bir topolojik grup olsun. $[G, X]$ ikilisi $\forall g \in G$ ve $\forall x \in X$ için aşağıdaki gibi üç değişik şekilde bir topolojik dönüşüm grubu olarak tanımlanabilir:

i) $g \wedge x = gx$ (sol gösterim) **ii)** $g \wedge x = xg^{-1}$ (sağ gösterim)

iii) $gx = gxg^{-1}$ (birleşik gösterim)

2) G herhangi bir topolojik grup ve $H \leq G$ kapalı bir alt grup olsun.

i) $[G, X]$ ikilisi $h \wedge g = hg$ kuralı ile bir topolojik dönüşüm grubudur.

Özel olarak $G = (\mathbb{C}, +)$ ve $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ için $[H, G]$ topolojik dönüşüm grubudur.

ii) $[G, G/H], g_1 \wedge g_2H$ ile bir topolojik dönüşüm grubudur.

3) $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}_\infty$ Riemann küresi verilsin. $\mathbb{C}_\infty$ üzerindeki Euclid topolojisi ile birlikte sonsuzun bütün komşulukları kompleks düzlemdeki tüm kompakt alt kümelerin bütünleyenlerini oluştururlar. Fonksiyonların bileşke işlemine göre $\mathbb{C}_\infty$ uzayından $\mathbb{C}_\infty$ uzayına tanımlanan $G = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ ve } ad - bc \neq 0 \right\}$ otomorfizmlerin grubudur ve $PGL(2, \mathbb{C})$ ile gösterilir. G üzerindeki topoloji $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ kompleks sayıları ile tanımlanır. G grubunun her bir elemanı $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ olarak göz önüne alınırsa ve ayrıca burada $(-a, -b, -c, -d)$ ile (a, b, c, d) elemanları birbirleriyle denkleştirilirse G üzerinde özdeşleştirme ile topoloji tanımlanabilir. Bu durumda için $[PGL(2, \mathbb{C}), \mathbb{C}_\infty]$ bir topolojik dönüşüm grubudur.

Tanım 1.1.14. $X \neq \emptyset$ herhangi küme ve $S(X) = \{f \mid f: X \rightarrow X \text{ birebir ve örten}\}$ olsun. $(S(X), \circ)$ işlemine göre açıkça bir gruptur ve bu grubun elemanlarına permütasyonlar denir. $(S(X), \circ)$ grubunun alt gruplarına permütasyon grubu adı verilir (Neumann 1977).

G grubu X kümesi üzerinde bir permütasyon grubu olsun. Bu takdirde G grubu X üzerinde hareket eder. Gerçekten $g \in G$ ise bu durumda $g: X \rightarrow X$ birebir ve örten bir dönüşümdür. Böylece $gx = g(x)$ olarak alınırsa buradan açıkça görülebilir ki $(g_1 g_2)x = g_1(g_2)x$ ve $1x = x$ olur. Dolayısıyla bu harekete G grubunun X kümesi üzerindeki doğal hareketi adı verilir. Böylelikle " (G, X) permütasyon grubu" ifadesi kullanılır. Ayrıca G grubu X kümesi üzerinde geçişli olarak hareket ediyorsa " (G, X) transitif permütasyon grubu" ifadesi kullanılır.

Tanım 1.1.15. $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $1 \leq a < n$ ve $(a, n) = 1$ olan tam sayıların sayısı $\varphi(n)$ ile gösterilir. Bu fonksiyona Euler fonksiyonu adı verilir. Eğer $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} p_3^{r_3} \dots p_s^{r_s}$ ise bu takdirde

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) \text{dir (Jones, Singerman, Wicks 1991).}$$

1.2 Hiperbolik Geometri

Hiperbolik Geometrinin ortaya çıkış esasına bakıldığında Euclid'in beş temel postulatının beşincisine dayandığı görülmektedir. Bu postulatlar şunlardır:

- 1) İki noktadan sadece bir doğru geçer.
- 2) Doğru parçalar her iki ucu sonsuza kadar aynı yönde bir doğru boyunca uzatılabilir.
- 3) Merkezi ve yarıçapı verildiğinde bir çember çizilebilir.
- 4) Düzlemdeki tüm dik açılar birbirine denktir.
- 5) Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebilir.

İlk dört postulat verildiği zaman açıkça beşincisinin aşağıda verilen paralellik postulatına denk olduğu kolaylıkla görülmektedir. Beşinci postulat deyimi yerine sıklıkla paralellik postulatı da kullanılmaktadır.

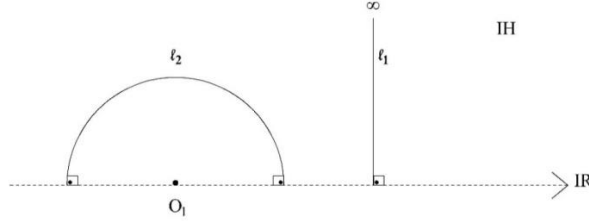
Paralellik Postulatı: Düzlemde bir nokta ve bu noktayı üzerinde bulundurmeyen bir doğru verildiği zaman bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel tek doğru geçer.

Euclid olmayan geometrilere biri olan hiperbolik geometri "bir doğruya dışındaki bir noktadan sonsuz çoklukta paralel doğru çizilebilir" şeklindeki paralellik aksiyomunu kullanır.

Matematikte tasarlanan her geometri kendisine uygun çalışma alanı olması açısından modeller seçer. Hiperbolik geometride kendisine paralellik aksiyomu nedeniyle pek çok model edilmiştir. Bu modeller arasında en çok kullanılan kompleks üst yarı düzlem modeli ve Poincare daire modelidir.

1.2.1 Hiperbolik Geometrinin Üst Yarı Düzlem Modeli

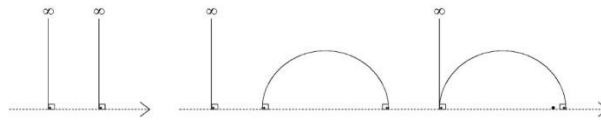
Tanım 1.2.1.1. $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}: \text{Im } z > 0\}$ kümesine üst yarı düzlem denir. (Beardon 1979). Çalışmamızda hiperbolik geometri için üst yarı düzlem modelini kullanacağız.



Şekil 1.2.1. Üst yarı düzlemde hiperbolik doğrular

Tanım 1.2.1.2. $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde $\mathbb{R}$ reel eksene dik Euclid doğrularının $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemle arakesiti olan yarı Euclid doğrularına ve $\mathbb{R}$ reel eksene dik Euclid çemberlerinin $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemle arakesitlerine hiperbolik doğrular denir. Kısaca $\mathbb{R}$ eksenine dik olan çemberlerin $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemde kalan yay parçalarına hiperbolik doğrular denir. Burada reel eksene dik $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemde kalan yarı doğruları sonsuz yarıçaplı çemberler veya merkezi sonsuzda olan çemberler olarak alınmaktadır (Beardon 1979).

Tanım 1.2.1.3. l_1 ve l_2 iki hiperbolik doğru olsun. Eğer $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ ise bu takdirde l_1 ve l_2 hiperbolik doğrularına paralel hiperbolik doğrular denir (Beardon 1979).



Şekil 1.2.2. Üst yarı düzlemde paralel hiperbolik doğrular

Tanım 1.2.1.4. $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş kompleks düzlem olmak üzere n tane hiperbolik doğru parçası tarafından sınırlanan ve $\mathbb{H}$ üst yarı düzleminin $\mathbb{C}_\infty$ uzayındaki kapanışında bulunan bir kapalı kümeye n kenarlı hiperbolik bir poligon adı verilir. Üç kenarlı poligonlara hiperbolik üçgen denir. Eğer bir hiperbolik poligonda herhangi iki hiperbolik doğru parçası kesişiyorsa bu kesim noktasına köşe denir (Beardon 1979).

Örnek 1.2.1.1. $PSL(2, \mathbb{R}) = \{T: z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}$ bileşke işlemine göre bir gruptur. $PSL(2, \mathbb{R})$ kümesi $\mathbb{R}^4$ uzayının bir alt kümesi olarak düşünülebilir. Dolayısıyla $T: z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ ise açıkça bu dönüşümün katsayıları reel olup $a, b, c, d \in \mathbb{R}^4$ şeklindedir. Buradan $(a, b, c, d) \sim (-a, -b, -c, -d)$ alınırsa yani bir özdeşlik kurulursa bu durumda $PSL(2, \mathbb{R})$ üzerindeki topoloji bir bölüm topolojisi olarak $\{a, b, c, d \in \mathbb{R}^4 : ad - bc = 1\} / \sim$ üzerindeki topoloji şeklinde tanımlanabilir. Böylece bu topoloji ile birlikte $PSL(2, \mathbb{R})$ bir topolojik gruptur. Ayrıca üst yarı düzlem düşünülürse $\mathbb{H} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}, b > 0\}$ için $[PSL(2, \mathbb{R}), \mathbb{H}]$ ikilisi de bir topolojik dönüşüm grubudur.

Yukarıda $[PSL(2, \mathbb{R}), \mathbb{H}]$ ikilisinin bir topolojik dönüşüm grubu olduğu ifade edildi. Buradan $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun herhangi bir elemanın $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemi $\mathbb{H}$ üst yarı düzleme resmettiğini göstermemiz gerekir. Bunun için öncelikle bir dönüşüm alalım. z noktası $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemde herhangi bir nokta ve $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ keyfi olsun. O halde

$$T(z) = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2}$$

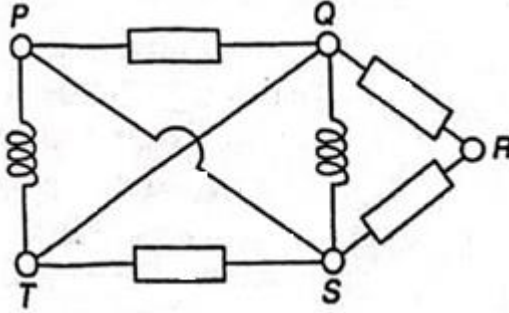
ifadesi sanal ve reel kısımlara ayrıldığında üst yarı düzlem için sadece sanal kısmı incelenirse

$$\text{Im}(T(z)) = \frac{(ad - bc)y}{|cz + d|^2} = \frac{y}{|cz + d|^2} > 0$$

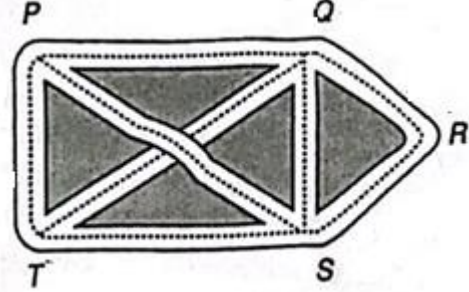
olduğu ortaya çıkar. Çünkü $z = x + iy \in \mathbb{H}$ ise $y > 0$ dır. Böylece her bir $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ dönüşümü $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemi $\mathbb{H}$ üst yarı düzlem üzerine resmeder.

1.3 Graf Teori

Bir yol haritasının bir kısmının ve bir elektrik ağının bir kısmının gösteren şekil 1.3.1, şekil 1.3.2 ve şekil 1.3.3 ü inceleyerek başlayalım.

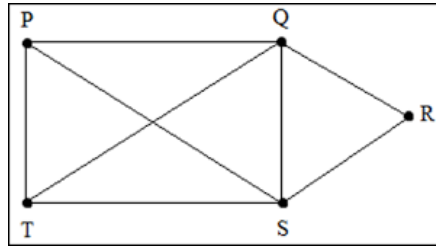


Şekil 1.3.1. Bir elektrik ağı



Şekil 1.3.2. Bir kavşakta kesişen yollar

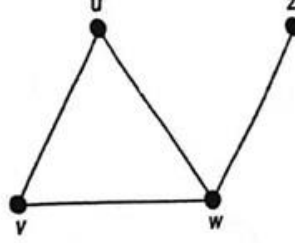
Bu durumlardan herhangi biri şekil 1.3.3'deki gibi noktalar ve çizgiler vasıtasıyla şematik P, Q, R, S ve T noktalarına köşeler, çizgilere kenarlar ve tüm şemaya da graf denir. PS ve QT çizgiler kesişimini bir kavşağı ya da iki telin birleşmesine karşılık gelmediği bir köşe olmadığına dikkat edilir. Bir köşenin derecesi o köşenin uçta olduğu kenarların sayısıdır. Şekil 1.3.2'de bir kavşaktaki kesişen yolların sayısına karşılık gelir. Örneğin P köşesinin derecesi 3'tür ve Q köşesinin derecesi 4'tür.



Şekil 1.3.3. Graf

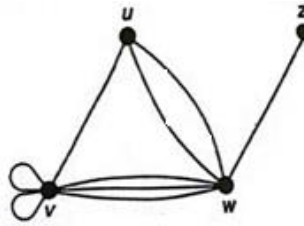
Tanım 1.3.1. Basit bir G grafi elemanlarına köşe adı verilen boştan farklı sonlu bir $V(G)$ kümesi ve kenar (veya çizgi) adı verdiğimiz $V(G)$ kümesinin birbirinden farklı ikililerinin bir koleksiyonu olan $E(G)$ kümesinden oluşmaktadır. $V(G)$ ve $E(G)$ kümelerine sırasıyla G grafının köşe ve kenar kümeleri denir (Wilson 2022).

Bir $\{v, w\}$ kenarı için v ve w köşelerine birleştirir denir ve kısaca vw ile gösterilir. Örneğin şekil 1.3.4'teki köşe kümesi $V(G) = \{u, v, w, z\}$ ve elemanları uv, uw, vw ve wz olan $E(G)$ kenar kümesinden oluşan basit bir G grafi temsil edilir.



Şekil 1.3.4. Basit graf

Tanım 1.3.2. Herhangi bir basit grafta verilen bir köşe ikilisini birbirine birleştiren en fazla bir kenar vardır. Basit graflar için verilen birçok sonuç aynı zamanda iki köşe noktasını birleştiren birden fazla kenarlara sahip daha genel yapılar içinde geçerlidir. Bu tür kenarlara çoklu kenarlar denir. Sadece bir kenarın iki ayrı köşeyi birleştirmesi gerektiği kısıtlamaları kaldırılabilir ve ilmeklere bir kenarın bir köşeyi kendisine bağlamasına izin verilir. İlmeklere ve çoklu kenarlara izin verilmesi sonucu ile ortaya çıkan graflara genel graf ya da graf adı verilir. Şekil 1.3.5'te verilmiştir. Her basit graf aynı zamanda bir graftır ancak her graf bir basit graf değildir (Wilson 2022).



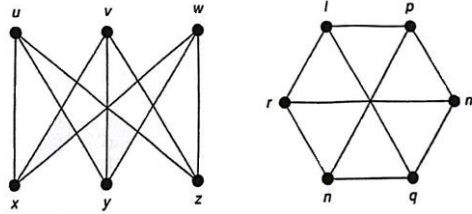
Şekil 1.3.5. Genel graf

Tanım 1.3.3. Bir G grafi elemanları köşe olarak adlandırılan boş olmayan sonlu bir $V(G)$ kümesi ve kenarlar olarak adlandırılan $V(G)$ kümesinin elemanlarının sırasız ikililer sonlu bir ailesi $E(G)$ kümesinden oluşur. Burada aile kelimesinin kullanılması çoklu kenarların varlığına izin verilmektedir.

$V(G)$ 'ye G grafinin köşe kümesi ve $E(G)$ ' ye G kümesinin kenar ailesi adı verilir. Bir $\{v, w\}$ kenarı için v ve w kenarlarını birleştirir denir ve yine kısaca vw ile gösterilir. (Wilson 2022).

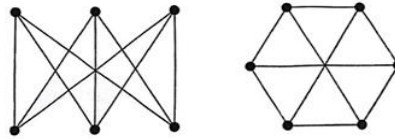
Tanım 1.3.4. Eğer G_1 grafinin herhangi iki köşesini birleştiren kenarların sayısı, G_2 grafinin karşılık gelen köşelerini birleştiren kenarların sayısına eşit şekilde birebir bir eşleme varsa G_1 grafi G_2 grafına izomorftur denir. Örneğin şekil 1.3.6'daki iki graf aşağıda verilen eşleme şartı altında izomorftur. (Wilson 2022).

$$u \leftrightarrow l, v \leftrightarrow m, w \leftrightarrow n, x \leftrightarrow p, y \leftrightarrow q, z \leftrightarrow r$$



Şekil 1.3.6. İzomorf graflar

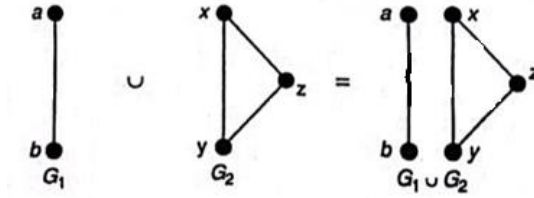
Birçok problem için köşelerdeki etiketler gereksizdir ve bunlar kullanılmayacaktır. O halde eğer köşeleri etiketlenmiş iki grafin köşelerini izomorf olacak şekilde etiketleyebilirsek o zaman bu graflar izomorfturlar. Örneğin şekil 1.3.7'deki graflar şekil 1.3.6'daki etiketlenmemiş halleri izomorf olduklarından izomorfturlar. Etiketli ve etiketsiz graflar arasındaki fark saymaya çalışıldığında daha belirgin hale gelir.



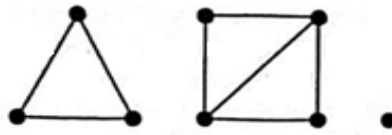
Şekil 1.3.7. Etiketlenmemiş graflar

Tanım 1.3.5. Daha büyük graflar iki grafi birbiriyle birleştirebiliriz. G_1 ve G_2 grafları onların $V(G_1)$ ve $V(G_2)$ köşe kümeleri ise bunların birleşimi olan $G_1 \cup G_2$ grafi köşe kümesi $V(G_1) \cup V(G_2)$ ve kenar ailesi $E(G_1) \cup E(G_2)$ olan bir graftır. Şekil 1.3.8'de gösterilmiştir. Graf grafların birleşimi olarak ifade edilemiyorsa bağlantılı graf, eğer ifade edilebiliyorsa bağlantılı olmayan graftır denir.

Açıkça herhangi bir bağlantılı olmayan G grafi her birine G grafinin bir bileşeni adı verilen bağlantılı grafların bir bileşimi olarak yazılabilir. Üç bileşenli bağlı olmayan bir graf şekil 1.3.9’da gösterilmektedir (Wilson 2022).



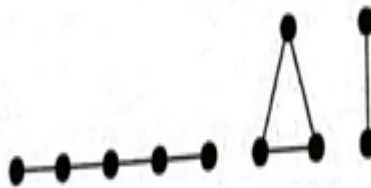
Şekil 1.3.8. $G_1 \cup G_2$ grafi



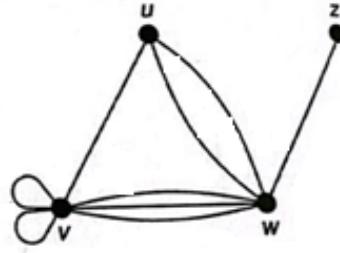
Şekil 1.3.9. Üç bileşenli bağlı olmayan graf

Tanım 1.3.6. Bir grafın v ve w köşeleri için onları birleştiren bir vw kenarı var ise bu köşelerin komşu olduğu ve vw ile kenar ile bitişik olduğu söylenir. Ayrıca birbirinden farklı e ve f kenarlarının ortak bir köşe noktasına sahip olmaları durumunda bu kenarlarında komşu olduğu söylenir (Wilson 2022).

Tanım 1.3.7. Bir v köşesinin derecesi, v ile bitişik olan kenarların sayısıdır ve $der(v)$ ile gösterilir; v köşesinin derecesi hesaplanırken genellikle v ’deki bir ilmeğin dereceye olan katkısı 2 olarak kabul edilir. Derecesi 0 olan bir köşeye izole köşe ve derecesi 1 olan köşeye ise uç-köşe denir. Böylelikle şekil 1.3.10’daki her iki gratta iki adet uç-köşe ve üç adet derecesi 2 olan köşeye sahip iken şekil 1.3.11’de verilen graf bir adet uç-köşe, bir adet derecesi 3 olan köşe, bir adet derecesi 6 olan köşe ve son olarak bir adet derecesi 8 olan köşeye sahiptir (Wilson 2022).



Şekil 1.3.10. Derecesi 2 olan köşeler ve uç köşeler

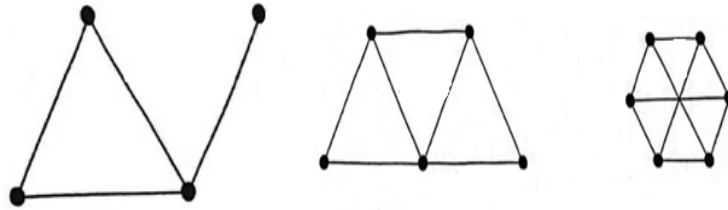


Şekil 1.3.11. Farklı derecelere sahip köşeler ve uç köşe

Bir grafın derece dizisi gerektiğinde tekrara düşerek artan sırada yazılmış derecelerden oluşur. Örneğin şekil 1.3.10 ve 1.3.11'deki grafların derece dizileri (1,1,2,2,2) ve (1,3,6,8) dir.

Teorem 1.3.1. Herhangi bir grafta köşe derecelerini tamamının toplamı çifttir.

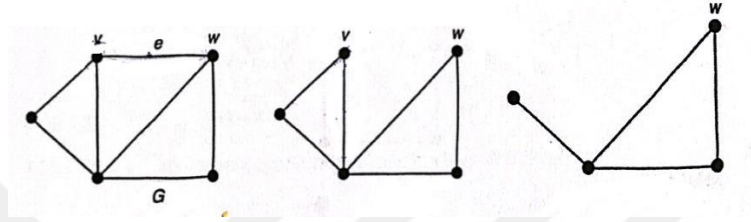
Sonuç 1.3.1. Herhangi bir grafta tek dereceye sahip köşelerin sayısı çifttir. Eğer bir H grafının köşelerinin her biri $V(G)$ ' ye ve kenarlarının her biri $E(G)$ 'ye ait ise o zaman H grafına G grafının bir alt grafı denir. Şekil 1.3.12'deki graf şekil 1.3.13'deki grafın bir alt grafı olmasına rağmen şekil 1.3.14'deki graf herhangi bir üçgen içermediğinden bu grafın bir alt grafı değildir.



Şekil 1.3.12. Graftaki köşeler

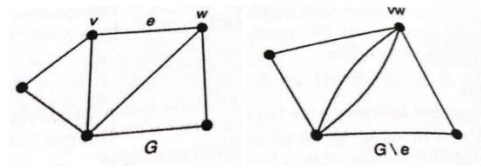
Kenarları ve köşeleri silerek bir grafın alt grafını elde edebiliriz. Eğer e kenarı G grafına ait ise G grafından e kenarının silinmesi ile elde edilen graf $G - e$ ile gösterilir. Daha genel olarak G grafının kenarlarının herhangi bir alt kümesi F olmak üzere G grafından F içindeki kenarların silinmesi ile elde edilen graf $G - F$ grafı ile gösterilir.

Benzer olarak eğer v, G 'nin bir köşesi ise G 'den v köşesinin ve v ile bitişik olan bütün kenarların silinmesi ile elde edilen graf $G - v$ ile gösterilir. Daha genel olarak G içindeki köşelerin bir kümesi S olmak üzere G grafından S içindeki köşelerin ve bu köşelerle bitişik olan bütün kenarların silinmesi ile elde edilen graf $G - S$ ile gösterilir. Şekil 1.3.13'de bir örnek gösterilmiştir.



Şekil 1.3.13. $G - S$ grafi

Ayrıca G grafından e kenarının çıkarılması ve bu kenarın büzülmesi ile elde edilen graf $G \setminus e$ ile gösterilir. Bu kenarın silinmesi ve bu kenarın uçlarındaki v ve w köşelerini birleşmesi ile olmaktadır. Dolayısıyla yeni oluşan köşe v ve w ile bitişik olan bütün kenarlarla (e hariç) bitişik durumdadır. Şekil 1.3.14'de gösterilmiştir.



Şekil 1.3.14. $G \setminus e$ grafi

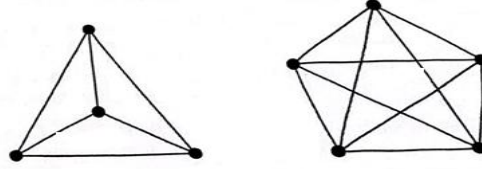
Bu kısımda bazı önemli graf türlerini inceleyeceğiz.

Tanım 1.3.8. Kenar kümesi boş olan graflar sıfır(boş) graflardır. Sıfır grafların her bir köşesi izole köşedir. n köşeli boş graflar N_n ile gösterilir. N_4 grafi şekil 1.3.15'de gösterilmektedir (Wilson, J., R., 2022).



Şekil 1.3.15. N_4 grafi

Tanım 1.3.9. Birbirinden farklı her bir köşe ikilisinin komşu olduğu basit bir graf bir tam grafdır. n köşeli tamgraflar K_n ile gösterilir. K_4 ve K_5 grafları şekil 1.3.16’da gösterilmektedir (Wilson 2022).

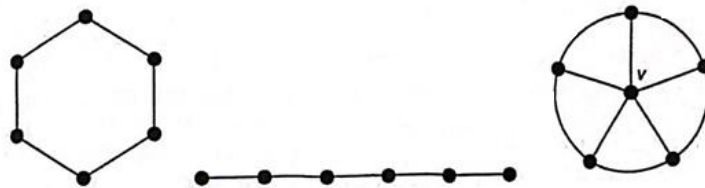


Şekil 1.3.16. K_4 ve K_5 grafları

Tanım 1.3.10. Her bir köşesinin derecesi 2 olan bağlantılı graf bir döngüsel graftır. n köşeli döngüsel bir graflar C_n ile gösterilir (Wilson 2022).

Tanım 1.3.11. C_n grafinin bir kenarının silinmesi ile elde edilen graf n köşeli yol grafidir. P_n ile gösterilir (Wilson 2022).

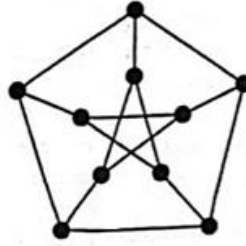
Tanım 1.3.12. C_{n-1} grafindaki her bir köşenin yeni bir v köşesine bağlanması ile elde edilen graf tekerlek graftır. W_n ile gösterilir. C_6 , P_6 ve W_6 grafları şekil 1.3.17’de gösterilmiştir (Wilson 2022).



Şekil 1.3.17. C_6 , P_6 ve W_6 grafları

Tanım 1.3.13. Bütün köşeleri aynı dereceye sahip olan bir graf düzenli bir graftır. Eğer her bir köşesinin derecesi r kadar ise o zaman graf r -düzenli ya da r dereceden düzenli graftır. Sıfır graf derecesi 0 olan düzenli graf, döngüsel graf derecesi 2 olan düzenli graf ve tam graf derecesi $n - 1$ olan düzenli graftır (Wilson 2022).

Tanım 1.3.14. 3. dereceden düzenli olan kübik graflar özel öneme sahiptir. Bir kübik graf örneği şekil 1.3.18’de gösterilen Petersen grafıdır (Wilson 2022).



Şekil 1.3.18. Petersen grafı

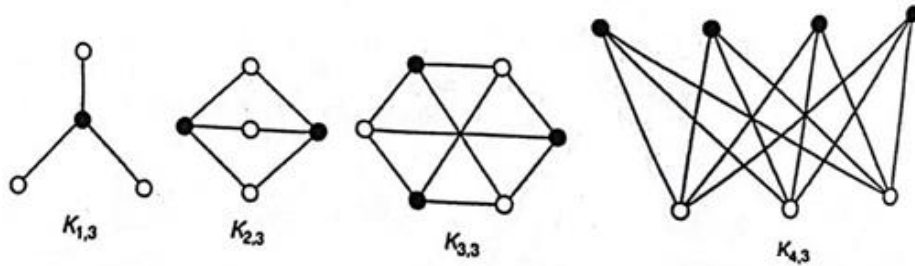
Tanım 1.3.15. Bir G grafının köşe kümesi G ’nin her bir kenarı A ’daki bir köşe ile B ’deki bir köşeyi birleştirecek şekilde iki ayrık küme olan A ve B kümelerine ayrılabiliriyorsa G grafı iki parçalı bir graftır denir. Şekil 1.3.19’da verilmiştir. İki parçalı bir graf köşeleri her bir kenarın bir siyah köşeyi sağdaki bir beyaz köşeye birleştirecek şekilde köşeleri siyah ve beyaz renge boyanabilen bir graftır. A ve B kümelerini özellikle belirtmek istersek $G = G(A, B)$ olarak yazılır (Wilson 2022).



Şekil 1.3.19. İki parçalı graf

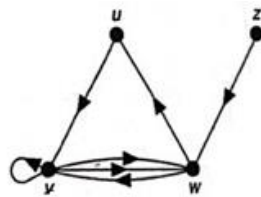
Bir tam iki parçalı graf A kümesindeki bir köşenin B kümesindeki her bir köşeye sadece bir kenar ile bağlandığı iki parçalı bir graftır. r tane siyah köşeli ve s tane beyaz köşeli tam iki parçalı graf $K_{r,s}$ ile gösterilir.

$K_{1,3}$, $K_{2,3}$, $K_{3,3}$ ve $K_{4,3}$ grafları şekil 1.3.20’de gösterilmektedir. $K_{r,s}$ grafinın $r + s$ adet köşeye ve rs adet kenara sahip olduğu kontrol edilebilir.

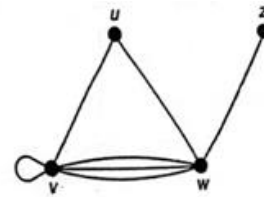


Şekil 1.3.20. $K_{1,3}$, $K_{2,3}$, $K_{3,3}$ ve $K_{4,3}$ grafları

Tanım 1.3.16. Yönlendirilmiş ya da yönlü D grafi elemanları köşeler olarak adlandırılan boştan farklı sonlu bir $V(D)$ kümesi ve yaylar ya da yönlendirilmiş kenarlar olarak adlandırılan $V(D)$ kümesinin elemanlarının sıralı ikililerinin sonlu bir $A(D)$ ailesinden oluşmaktadır. $V(D)$ ’ye köşe kümesi ve $A(D)$ ’ye yay ailesi denir. (v, w) yayı kısaca vw olarak gösterilir. Şekil 1.3.21’de $V(D)$ köşe kümesi $\{u, v, w, z\}$ ve $A(D)$ ailesi ise uv, vv, vw, wv, wu, zw yaylarından oluşmuştur. Yayı oluşturan köşelerin sırası bir ok ile gösterilerek yapılmıştır. D yönlü graf ise D ’den okları kaldırarak yani vw formundaki her yaya karşılık gelen bir kenar vw ile değiştirilerek elde edilen graf D grafinın alta yatan grafıdır. Şekil 1.3.22’de gösterilmiştir (Wilson 2022).



Şekil 1.3.21. Yönlendirilmiş graf



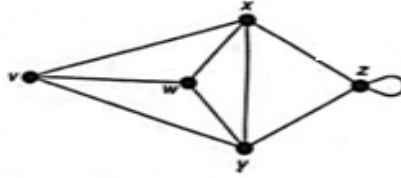
Şekil 1.3.22. Alta yatan graf

Tanım 1.3.17. G grafi içindeki yürüyüş, ardışık kenarların birbirinin komşusu ya da aynısı olduğu $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m$, ya da $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$ kenarların sonlu bir dizisidir. Yürüyüş $v_0, v_1, \dots, v_m$ köşelerinin dizisini belirler. v_0 ve v_m köşelerine sırasıyla yürüyüşün başlangıç ve bitiş köşesi denir ve v_0 ’dan v_m ’ye bir yürüyüştür.

Bir yürüyüş içindeki kenarların sayısına o yürüyüşün uzunluğu denir (Wilson 2022).

Örneğin şekil 1.3.23’de

$v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow z \rightarrow y \rightarrow w$ bir yürüyüştür.



Şekil 1.3.23. Yürüyüş

Bütün kenarları birbirinden farklı olan bir yürüyüşe iz denir. Eğer köşeleride birbirinden farklı ise bu ize bir yol denir. Bir yürüyüş, yol veya iz eğer $v_0 = v_m$ ise kapalıdır ve en az bir yola döngü denir. Örneğin,

$v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow z \rightarrow x$ bir iz,

$v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z$ bir yol,

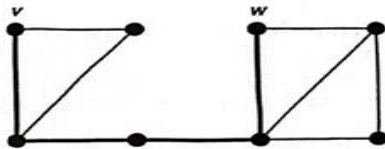
$v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow v$ bir kapalı iz,

$v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow v$ bir döngüdür.

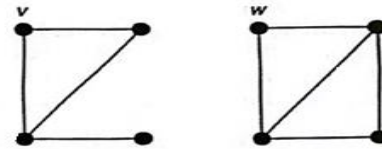
Bir ilmek uzunluğu 1 olan bir döngü ve bir çift çoklu kenar, uzunluğu 2 olan bir döngüdür.

$v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow v$

gibi 3 uzunluğundaki bir döngü ise bir üçgendir.



Şekil 1.3.24. Bağlantılı graf



Şekil 1.3.25. Bağlantısız graf

Teorem 1.3.2. Bir G grafının iki parçalı olması için gerek ve yeter şart G ’nin bütün döngülerinin uzunluğunun çift olmasıdır.

1.4 Genel Möbius Grubu

Tanım 1.4.1. $PGL(2, \mathbb{C}) = \{M: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty \mid M(z) = \frac{az+b}{cz+d}; a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0\}$ kümesi bileşke işlemine göre gruptur buna genel Möbius grubu denir (Jones, Singerman 1987).

Sonuç 1.4.1. Burada $ad - bc \neq 0$ ifadesi yerine $ad - bc = 1$ alınabilir.

İspat: $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ için $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius dönüşümünü keyfi alalım. $ad - bc \neq 0$ olduğuna göre $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ olacak şekilde $\frac{1}{\sqrt{ad-bc}}$ seçilirse;

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\lambda(az+b)}{\lambda(cz+d)} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{\frac{a}{\sqrt{ad-bc}}z + \frac{b}{\sqrt{ad-bc}}}{\frac{c}{\sqrt{ad-bc}}z + \frac{d}{\sqrt{ad-bc}}}$$

elde edilir. Bu dönüşümün determinanı;

$$\frac{a}{\sqrt{ad-bc}} \frac{d}{\sqrt{ad-bc}} - \frac{b}{\sqrt{ad-bc}} \frac{c}{\sqrt{ad-bc}} = \frac{ad-bc}{ad-bc} = 1$$

olur. Dolayısıyla Möbius dönüşümünün tanımında olan $ad - bc \neq 0$ yerine $ad - bc = 1$ alınabilir.

Tanım 1.4.2. $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere $M: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, $M(z) = \begin{cases} z + a, & z \neq \infty \\ \infty, & z = \infty \end{cases}$ olarak tanımlanan $M(z)$ dönüşümüne öteleme dönüşümü adı verilir (Jones, Singerman 1987).

Tanım 1.4.3. $M: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, $M(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \neq \infty \\ 0, & z = \infty \end{cases}$ tanımlanan $M(z)$ dönüşümüne tersleme dönüşümü denir. Açıkça bu dönüşüm homeomorfizmadır (Jones, Singerman 1987).

Tanım 1.4.4. $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere $M: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$,

$$M(z) = \begin{cases} \alpha z, & z \neq \infty \\ \infty, & z = \infty \end{cases} \text{ olarak tanımlanan } M(z) \text{ dönüşümüne çarpım}$$

dönüşümü adı verilir (Jones, Singerman 1987).

Teorem 1.4.1. Her $M \in PGL(2, \mathbb{C})$ olan $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius dönüşümü öteleme, tersleme ve çarpım dönüşümlerinin bileşkesi olarak yazılır (Jones, Singerman 1987).

İspat: Önce $c = 0$ olsun. Bu durumda $M(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ ve $ad - bc \neq 0$ olduğundan $ad \neq 0$ olur. Buradan $M_1 = \frac{a}{d}z$ ve $M_2 = z + \frac{b}{d}$ olarak alınır, $M(z) = (M_2 \circ M_1)(z) = M_2\left(\frac{a}{d}z\right) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ elde edilir. Eğer $c \neq 0$ ise bu takdirde $M_1(z) = z + \frac{a}{c}$, $M_2(z) = z + \frac{d}{c}$, $M_3(z) = \frac{1}{z}$, $M_4(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z$ olarak alınır, açıkça $M = M_1 \circ M_4 \circ M_3 \circ M_2$ bileşkeleri şeklindedir. Gerçekten,

$$M(z) = (M_1 \circ M_4 \circ M_3 \circ M_2)(z) = (M_1 \circ M_4 \circ M_3)\left(z + \frac{d}{c}\right) = (M_1 \circ M_4)\left(\frac{1}{z + \frac{d}{c}}\right) = M_1\left(\frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}\right) = \frac{bc-ad}{c^2} \frac{c}{cz+d} + \frac{a}{c} = \frac{bc-ad}{c(cz+d)} + \frac{a}{c} = \frac{az+b}{cz+d} \text{ elde edilir. Ayrıca } z = -\frac{d}{c} \text{ olmak üzere } M\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \text{ olur. Gerçekten,}$$

$$\begin{aligned} M(z) &= (M_1 \circ M_4 \circ M_3 \circ M_2)(z) = (M_1 \circ M_4 \circ M_3 \circ M_2)\left(-\frac{d}{c}\right) \\ &= (M_1 \circ M_4 \circ M_3)(0) \\ &= (M_1 \circ M_4)(\infty) = M_1(\infty) = \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $z \in \mathbb{C}_\infty$ için $M = M_1 \circ M_4 \circ M_3 \circ M_2$ dir.

Teorem 1.4.2. $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ üç farklı sabit nokta olsun. Bu takdirde $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ ve $T(z_3) = \infty$ olacak şekilde tek bir Möbius dönüşümü vardır. Bu dönüşüm $T(z) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$ şeklindedir (Schoeneberg 1974).

Teorem 1.4.3. $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ şeklinde üç farklı noktayı $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ gibi üç farklı noktaya resmeden bir tek Möbius dönüşümü vardır (Schoeneberg 1974).

Sonuç 1.4.2 $PSL(2, \mathbb{R}) = \{M: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty | M(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ kümesi katsayıları reel olup $PGL(2, \mathbb{C})$ grubunun bir alt grubudur.

Tanım 1.4.5. $M \in PSL(2, \mathbb{R})$ ve $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $M(z) = z$ denklemini sağlayan noktalara M dönüşümünün sabit noktaları denir. Dolayısıyla $M(z) \neq I(z)$ olmak üzere $\frac{az+b}{cz+d} = z$ eşitliğinden $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ denklemi elde edilir. Buradaki M dönüşümünün en fazla iki sabit noktası vardır. Bu noktalar:

$$\Delta = (d-a)^2 + 4bc = d^2 + a^2 - 2ad + 4bc = d^2 + a^2 - 2(ad - bc) + 2bc$$

$$= d^2 + a^2 - 2 + 2bc = d^2 + a^2 - 2 + 2(ad - 1) = d^2 + a^2 + 2ad - 4$$

$$= (a+d)^2 - 4 \text{ olmak üzere}$$

$$z_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{|a+d|^2 - 4}}{2c}$$

olur. Böylece üç durum söz konusudur:

- I. $|a+d| = 2$ ise M dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta ∞ veya bir reel sayıdır.
- II. $|a+d| > 2$ ise M dönüşümünün farklı iki reel sayı olan iki sabit noktası vardır.
- III. $|a+d| < 2$ ise M dönüşümünün iki kompleks eşlenik sabit noktası vardır (Schoeneberg 1974).

Tanım 1.4.6. $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

- I) $|a+d| = 2$ ise M dönüşümüne parabolik dönüşüm,
- II) $|a+d| > 2$ ise M dönüşümüne hiperbolik dönüşüm,
- III) $|a+d| < 2$ ise M dönüşümüne eliptik dönüşüm adı verilir (Schoeneberg 1974).

Sonuç 1.4.3. $PSL(2, \mathbb{R})$ dönüşüm grubu

- I) $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemi $\mathbb{H}$ üst yarı düzlem üzerine,
- II) Geodezikleri yine geodeziklere,
- III) Çemberleri çemberlere resmederler.

Tanım 1.4.7. $\Lambda \leq PSL(2, \mathbb{R})$ alt grubu olmak üzere $U \cap \Lambda = \{I\}$ şartını sağlayan bir U komşuluğu varsa Λ alt grubuna $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun bir ayrık alt grubu denir (Shimura 1971).

Tanım 1.4.8. X bağlantılı bir Hausdorff topolojik uzayı olsun. $U \subset X$ açık alt kümesi ve $\zeta: U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ homeomorfizmasından meydana gelen (U, ζ) ikilisine X kümesinin bir koordinat komşuluğu adı verilir (Beardon 1983).

Tanım 1.4.9. X bağlantılı bir Hausdorff topolojik uzayı olsun. $U_1 \subset X, U_2 \subset X$ olmak üzere eğer $\zeta_1 \circ \zeta_2^{-1}: \zeta_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \zeta_1(U_1 \cap U_2)$ dönüşümü analitik ise (U_1, ζ_1) ve (U_2, ζ_2) koordinat komşuluklarına uyumludur denir (Beardon 1983).

Tanım 1.4.10. Herhangi bir bağlantılı Hausdorff topolojik uzayına bir kompleks yapıyla birlikte bir Riemann yüzeyi adı verilir (Jones, Singerman 1987).

Açıkça bağlantılı bir Hausdorff uzayının her noktasının bir komşuluğu $\mathbb{R}^2$ kompleks uzayının açık alt kümesine homeomorf olduğundan bir Riemann yüzeyi oluşturur. Benzer şekilde eliptik eleman içermeyen keyfi Λ ayrık alt grubu $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun bir alt grubu olarak $\mathbb{H}$ üst yarı düzlem üzerinde hareket eder ve bölüm topolojisi ile meydana gelen bölüm uzayı yine bir Riemann yüzeyidir. Ayrıca $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemdeki kompleks yapı eğer $\mathbb{H}/\Lambda$ yüzeyine transfer edilirse bir Riemann yüzeyi elde edilir. Sonuç olarak Λ eliptik eleman içeriyorsa bir Riemann yüzeyidir, ancak bu durumda $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Lambda$ izdüşümü dallanmıştır. Fakat oluşan yüzey kompakt değildir. Kompaktlığı sağlamak için $\mathbb{H}$ üst yarı düzlem yerine $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ alınır.

Teorem 1.4.4. Her basit yapılı Riemann yüzeyi aşağıdakilerden birine konform olarak eşdeğerdir:

- I. $\mathbb{C}_\infty$ Riemann küresi
- II. $\mathbb{C}$ kompleks düzlem
- III. $\mathbb{H}$ üst yarı düzlem

Bu Riemann yüzeylerinin otomorfizm grupları aşağıdaki gibidir ((Jones, Singerman 1987).

Teorem 1.4.5.

$$\text{I. } \text{Aut}(\mathbb{C}_\infty) = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$$

$$\text{II. } \text{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \rightarrow az + b : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$$

$$\text{III. } \text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \text{ (Jones, Singerman 1987).}$$

Tanım 1.4.11. Λ bir ayrık alt grup olsun. $r \in \widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ rasyonel noktası keyfi verildiğinde $\gamma(r) = r$ olacak şekilde bir $\gamma \in \Lambda$ parabolik elemanı varsa, bu noktaya Λ ayrık alt grubunun bir parabolik noktası veya cusp noktası adı verilir (Jones, Singerman 1987).

Teorem 1.4.6. $\{T: z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ ve } ad - bc = 1\}$ kümesi $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ grubunun bir alt grubudur (Jones, Singerman 1987).

Önerme 1.4.1.

i) $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ grubu $\mathbb{H}$ üst yarı düzleminde geçişli olarak hareket eder.

ii) $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ grubu $\mathbb{R}_\infty$ genişletilmiş reel eksen üzerinde ikili transitiftir.

İspat. i. $a > 0$ için $ai + b \in \mathbb{H}$ keyfi olmak üzere, $M(z) = \frac{\frac{a}{\sqrt{a}}z + \frac{b}{\sqrt{a}}}{\frac{1}{\sqrt{a}}}$ olarak tanımlayalım. $M \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ olduğu açıktır. $M(i) = ai + b$ olur. Dolayısıyla i noktasının yörüngesi bütün $\mathbb{H}$ üst yarı düzleme eşittir. $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ grubunun $\mathbb{H}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

ii. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a > b$ olsun. $K(z) = \frac{z-a}{z-b}$ olacak şekilde dönüşüm tanımlayalım. $K \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ olduğu açıktır. Çünkü normalleştirme işlemi yapılırsa $K(z) = \frac{\frac{z}{\sqrt{a-b}} - \frac{a}{\sqrt{a-b}}}{\frac{z}{\sqrt{a-b}} - \frac{b}{\sqrt{a-b}}}$ olur. Böylece K dönüşümü (a, b) çiftini $(0, \infty)$ çiftine resmeder. Ayrıca $z \rightarrow -\frac{1}{z}$ dönüşümü $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ grubunun elemanıdır ve $(0, \infty)$ çiftini $(\infty, 0)$ çiftine resmeder. $z \rightarrow z + b$ dönüşümü de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ grubunun elemanıdır ve $(0, \infty)$ ikilisini (b, ∞) ikilisine resmeder. Buradan $(0, \infty)$ ikilisinin yörüngesi $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ grubunun hareketi altında $a, b \in \mathbb{R}_\infty, a \neq b$ olmak üzere (a, b) ikililerinden meydana gelir. Dolayısıyla $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ grubu $\mathbb{R}_\infty$ genişletilmiş reel eksen üzerinde ikili transitiftir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Modüler Grup

Tanım 2.1.1. $\Gamma = \{T \mid T: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty, T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ ve } ad - bc = 1\}$ grubuna Modüler grup denir.

Katsayıları reel sayı olan $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun üzerinde en çok çalışılan alt grubu olan Modüler grubunu göz önüne alalım. Modüler grup ayrıca $PSL(2, \mathbb{Z})$ ile gösterilir. Bu grup aşağıdaki gibi 2×2 lik tam sayılar matrisiyle de temsil edilebilir:

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det L = 1$$

Dolayısıyla L ve $-L$ matrisleri aynı dönüşümü temsil ettiğinden söz konusu olan L matrisi negatif ile eş alınır. Çünkü gruptaki bileşke işlemiyle matrislerdeki çarpma işlemi arasında bağ vardır. Böylece matris ve dönüşüm arasında ayırım yapmaya gerek yoktur.

Teorem 2.1.1. $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ Modüler grubu $T^2 = S^3 = I$ bağıntısı ile verilen

$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matris elemanları tarafından üretilir. Açıkça $\Gamma = \langle T, S \rangle$ dir. Burada I birim dönüşümdür.

Şimdi Modüler grubun sabit noktalarını inceleyelim. $PSL(2, \mathbb{Z})$ grubunun parabolik nokta kümesi genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi olan $\hat{\mathbb{Q}}$ dir. Gerçekten;

$A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ olmak üzere A elemanının sabit noktaları $\frac{az+b}{cz+d} = z$ denkleminde $z_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{|a+d|^2 - 4}}{2c}$ şeklindedir. Parabolik dönüşümde $|a+d| = 2$ olduğundan $z = \frac{a-d}{2c}$ dir. Buradan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ olduğundan $z = \frac{a-d}{2c} \in \hat{\mathbb{Q}}$ olduğu açıktır.

2.2. $PSL(2, \mathbb{Z})$ Modüler Grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Hareketi

$x, y \in \mathbb{Z}$ ve $(x, y) = 1$ olmak üzere $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ kümesinden alınan her bir eleman $\frac{x}{y}$ indirgenmiş kesri olarak yazılabilir. Dolayısıyla $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ olduğundan verilen bu gösterim tek türlü değildir. Sonsuz ifadesi $\infty = \frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$ şeklinde temsil edilecektir.

$PSL(2, \mathbb{Z})$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \rightarrow \frac{ax+by}{cx+dy}$ şeklindedir.

Burada $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ olmak üzere;

$$A\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{a\frac{x}{y}+b}{c\frac{x}{y}+d} = \frac{\frac{ax+by}{y}}{\frac{cx+dy}{y}} = \frac{ax+by}{cx+dy} \quad \text{ve} \quad A\left(\frac{-x}{-y}\right) = \frac{a\frac{-x}{-y}+b}{c\frac{-x}{-y}+d} = \frac{\frac{-ax-by}{y}}{\frac{-cx-dy}{y}} = \frac{-ax-by}{-cx-dy} = \frac{ax+by}{cx+dy}$$

olduğundan $A\left(\frac{x}{y}\right) = A\left(\frac{-x}{-y}\right)$ dir. Buradan $PSL(2, \mathbb{Z})$ Modüler grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin iyi tanımlı olduğu söylenebilir.

$(x, y) = 1$ ve $ad - bc = 1$ alınır. $\frac{ax+by}{cx+dy}$ şeklindeki kesir indirgenmiş formdadır. Göstermek için aksini varsayalım. $\frac{ax+by}{cx+dy}$ indirgenmiş formda olmasın.

Böylece $n|ax + by$ ve $n|cx + dy$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}$ tam sayısı vardır. $k, l \in \mathbb{Z}$ tam sayıları için $ax + by = kn$ ve $cx + dy = ln$ yazılabilir. Eşitliğin birincisi d ile ve ikincisi $-b$ ile çarpılırsa $adx + bdy = knd$ ve $-bcx - bdy = -bln$ eşitlikleri elde edilir. Eşitlikler taraf tarafa toplanırsa $(ad - bc)x = (kd - bl)n$ bulunur.

Buradan, $(ad - bc)x = (kd - bl)n \xrightarrow{ad-bc=1} x = (kd - bl)n$ elde edilir. Verilen eşitliklerde birinci eşitlik $-c$ ile ve ikinci eşitlik a ile çarpılırsa $-acx - bcy = -knc$ ve $acx + ady = aln$ elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$(ad - bc)y = (al - ck)n \xrightarrow{ad-bc=1} y = (al - ck)n$$

elde edilir. Böylece son eşitliklerden $n|x$ ve $n|y$ olduğu görülür. Bu ise çelişkidir. Bu çelişki $(ax + by, cx + dy) = n > 1$ olduğunu kabul etmemizden kaynaklıdır.

Yani $(ax + by, cx + dy) = 1$ dir.

Teorem 2.2.1. $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ Modüler grubunun genişletilmiş rasyonel sayılar kümesindeki grup hareketi geçişlidir.

İspat. $v = \frac{a}{b}$, $w = \frac{c}{d} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ keyfi iki eleman olsun. Bu takdirde $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{c}{d}$ olan $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ gösterilmelidir. Her $v = \frac{a}{b}$ elemanının $\Gamma(\infty) = \{g(\alpha): g \in \Gamma\}$ yörüngesinde olduğunu göstermemiz yeterlidir. Çünkü $k(\infty) = \frac{a}{b}$ ve $l(\infty) = \frac{c}{d}$ olan $k, l \in PSL(2, \mathbb{Z})$ elemanları mevcut ise $L = lk^{-1}$ ile $L \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{c}{d}$ dir. $v = \frac{a}{b} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olsun. Bu durumda $(a, b) = 1$ olduğundan $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ öyle ki $ax - by = 1$ dir. Böylece $g = \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z})$ elde edilir. Ayrıca $\begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ olduğundan $g(\infty) = \frac{a}{b}$ dir. Dolayısıyla $\frac{a}{b}$ elemanı sonsuzun yörüngesindedir. Modüler grubun genişletilmiş rasyonel sayılar kümesindeki hareketi geçişlidir.

Teorem 2.2.2. $\widehat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin herhangi bir noktasının sabitleyeni sonsuz devirli bir gruptur.

İspat. $\widehat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin herhangi iki elemanının sabitleyenleri $PSL(2, \mathbb{Z})$ grubunda eşlenik olduklarından sonsuzun sabitleyeni olan Γ_∞ grubunu göz önüne almak yeterlidir. $\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ dir. Gerçekten; $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$ olsun. Buradan $L(\infty) = \infty$ olur. Çünkü,

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1 \text{ ve } c = 0$ dir ve ayrıca $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \subset PSL(2, \mathbb{Z})$ olduğundan $ad - bc = 1$ dir. $1 \cdot d - b \cdot 0 = 1 \Rightarrow d = 1$ dir.

O halde $L = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{Z}$ formundadır. Böylece $\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z} \right\}$ dir.

Sonuç olarak Γ_∞ grubu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanı ile üretilen sonsuz devirli bir gruptur.

Dolayısıyla $\widehat{\mathbb{Q}}$ da herhangi bir noktanın sabitleyeni sonsuz devirli bir grup olur.

2.3 $PSL(2, \mathbb{Z})$ Modüler Grubun Kongrüans Alt Grupları

Tanım 2.3.1. n pozitif bir tam sayı olmak üzere Γ Modüler grubun önemli bir alt grubu olan $\Gamma(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a \equiv d \equiv 1(mod n), b \equiv c \equiv 0(mod n) \right\}$ alt grubuna temel kongrüans alt grubu adı verilir. Γ Modüler grubunun $\Gamma(n)$ temel kongrüans alt grubunu içeren herhangi bir alt grubuna ise kongrüans alt grubu denir. Üzerinde en çok çalışılan bazı kongrüans alt grupları aşağıdaki gibidir:

$$\Gamma_1(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a \equiv d \equiv 1(mod n), c \equiv 0(mod n) \right\}$$

$$\Gamma^1(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a \equiv d \equiv 1(mod n), b \equiv 0(mod n) \right\}$$

$$\Gamma_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0(mod n) \right\}$$

$$\Gamma^0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid b \equiv 0(mod n) \right\}$$

$$\Gamma_0^0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid b \equiv c \equiv 0(mod n) \right\}$$

şeklindedir. Bu gruplar arasındaki ilişki ise $\Gamma(n) \leq \Gamma_1(n) \leq \Gamma_0^0(n) \leq \Gamma_0(n) \leq \Gamma$ ve $\Gamma(n) \leq \Gamma^1(n) \leq \Gamma_0^0(n) \leq \Gamma^0(n) \leq \Gamma$ biçimindedir. Ayrıca $\Gamma(n) \triangleleft \Gamma$ dır . Dolayısıyla $\Gamma(n)$, $\Gamma_0(n)$, $\Gamma_1(n)$ gruplarının da normal alt grubu olur. Ayrıca $\Gamma_1(n) \triangleleft \Gamma_0(n)$ dır. Buna göre indeksler $n > 2$ için;

$$|\Gamma : \Gamma_0(n)| = \psi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

$$|\Gamma : \Gamma_1(n)| = \psi(n) = \frac{n^2}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

$$|\Gamma : \Gamma(n)| = \psi(n) = \frac{n^3}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

dir.

2.4 İmpirimitif Hareket

Tanım 2.4.1. G, Ω kümesi üzerinde bir transitif hareket grubu ise bu durumda (G, Ω) ikilisine bir transitif permütasyon grubu denir.

Tanım 2.4.2. (G, Ω) ikilisi bir transitif permütasyon grubu ve $\approx \Omega$ kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Eğer $\alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta$ olduğunda , $\forall g \in G$ için $g(\alpha) \approx g(\beta)$ oluyorsa $\approx$ denklik bağıntısına Ω kümesi üzerinde G invariant denklik bağıntısı denir. Ayrıca $\approx$ denklik bağıntısının denklik sınıflarına ise blok denir. α 'yı içeren blok $[\alpha]$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre açıkça;

i) Özdeşlik Bağıntısı : " $\forall a, b \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ "

ii) Evrensel Bağıntı : " $\forall a, b \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta$ "

bağıntıları G invariant denklik bağıntılarıdır. Bu bağıntılara aşık bağıntılar denir. Eğer Ω üzerinde özdeşlik bağıntısından ve evrensel bağıntıdan farklı bir G invariant denklik bağıntısı varsa G grubunun Ω üzerindeki hareketine impirimitif hareket, sadece Ω üzerinde özdeşlik bağıntısı ve evrensel bağıntı varsa bu durumda oluşan grup hareketine primitif hareket denir.

Önerme 2.4.1. (G, Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu durumda, (G, Ω) primitiftir $\Leftrightarrow \forall a \in \Omega$ için $G_a = \{g \in G : ga = a\}$ sabitleyeni G grubunun bir maksimal alt grubudur.

Önerme 2.4.2. (G, Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu takdirde (G, Ω) grubu impirimitiftir $\Leftrightarrow \exists a \in \Omega$ ve $H < G$ öyle ki $G_a \not\leq H \not\leq G$ dir.

2.5 Alt Yörüngesel Graflar

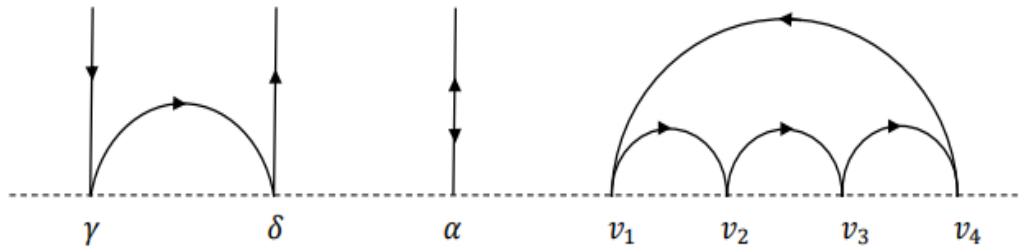
(G, Ω) ikilisi bir transitif permütasyon grubu olsun. G grubu kartezyen çarpım olan $\Omega \times \Omega = \Omega^2$ kümesi üzerinde $g: (a, b) \rightarrow (g(a), g(b))$ ile hareket eder. Bu hareketin yörüngelerine G grubunun alt yörüngeleri denir ve (a, b) çiftini içeren alt yörünge $O(a, b)$ ile gösterilir. $O(a, b)$ alt yörüngesinden bir $\mathcal{G}(a, b)$ alt yörüngesel grafinı aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

i) Grafın köşeleri Ω kümesinin elemanlarıdır.

ii) $(\gamma, \delta) \in O(a, b)$ ise bu durumda γ dan δ ya yönlendirilmiş bir kenar vardır denir ve $\gamma \rightarrow \delta$ ile gösterilir.

Açık olarak $O(a, b)$ ile $O(b, a)$ alt yörüngeleri ya eşittir ya da ayrıktır. Eğer ayrık iseler $\mathcal{G}(a, b)$ alt yörüngesel grafi $\mathcal{G}(b, a)$ alt yörüngesel grafinın sadece ters yönlendirilmiş hali olur. Böylece $\mathcal{G}(a, b)$ ile $\mathcal{G}(b, a)$ eşleşmiş yörüngesel graflar adı verilir. Bu alt yörüngeler eğer eşit ise $\mathcal{G}(a, b) = \mathcal{G}(b, a)$ alt yörüngesel grafi çift taraflı yönlendirilmiş kenarlardan meydana gelir. Bu durumda kendisiyle eşleşmiştir denir. Burada $n > 0$ için $v = \frac{u}{n}$ ve $(u, n) = 1$ biçimindedir. $O(\infty, v) = O\left(\frac{1}{0}, \frac{u}{n}\right)$ alt yörüngesini kısaca $O(u, n)$ ile ve bu alt yörüngeye karşılık gelen alt yörüngesel grafi ise $\mathcal{G}(u, n) = \mathcal{G}_{u,n}$ ile gösterilir.

Tanım 2.5.1. Bir grafta $m \geq 3$ olmak üzere $v_1, v_2, \dots, v_m$ farklı köşeler için $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m \rightarrow v_1$ ise bu durumda bu köşelerin oluşturduğu yapıya yönlendirilmiş devre denir. Özel olarak, $m = 3$ ise $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1$ bir üçgen devre, $m = 2$ ise $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_1$ kendisi ile eşleşmiş kenar denir. Hiçbir devre içermeyen grafa orman denir.



Şekil 2.5.1. Devreler ve kendisiyle eşleşmiş kenar

Önerme 2.5.1. (G, Ω) transitif permütasyon grubu için $\mathcal{G}$ bir alt yörüngesel graf olsun. Bu takdirde,

i) G grubu $\mathcal{G}$ grafının otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket eder.

ii) G grubu $\mathcal{G}$ grafının köşeleri üzerinden transitif olarak hareket eder.

iii) $\mathcal{G}$ kendisiyle eşleşmiş bir graf ise bu durumda G grubu $\mathcal{G}$ grafının ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerinde transitif olarak hareket eder.

iv) $\mathcal{G}$ grafının kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder.

İspat.

i) $g \in G$ olmak üzere $f_g: \mathcal{G}(a, b) \rightarrow \mathcal{G}(a, b)$, $f_g(x \rightarrow y) = g(x) \rightarrow g(y)$ dönüşümünün bir otomorfizma olduğu gösterilirse G grubu $\mathcal{G}$ alt yörüngesel grafının otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket ettiği gösterilir.

$x \rightarrow y$, $u \rightarrow v \in \mathcal{G}(a, b)$ kenarları için $f_g(x \rightarrow y) = f_g(u \rightarrow v)$ olsun. $g(x) \rightarrow g(y) = g(u) \rightarrow g(v)$ dir. G grup olduğundan $\exists g^{-1} \in G$ öyle ki $g^{-1}g(x) \rightarrow g^{-1}g(y) = g^{-1}g(u) \rightarrow g^{-1}g(v)$ elde edilir. Dolayısıyla $x \rightarrow y = u \rightarrow v$ dir. Yani f_g birebirdir.

Her $x \rightarrow y \in \mathcal{G}(a, b)$ kenarı için $g^{-1}(x) \rightarrow g^{-1}(y) \in \mathcal{G}(a, b)$ kenarı vardır öyle ki $f_g(g^{-1}(x) \rightarrow g^{-1}(y)) = g(g^{-1}(x)) \rightarrow g(g^{-1}(y)) = x \rightarrow y$ dir. Böylece f_g dönüşümü örtendir.

$x \rightarrow y$ kenarı $\mathcal{G}(a, b)$ alt yörüngesel grafında bir kenar olsun. $(x, y) \in O(a, b)$ dir. $O(a, b) = \{g(a, b): g \in G\}$ olduğundan $\exists h \in G$ öyle ki $(x, y) = h(a, b)$ dir. Diğer yandan $g \in G$ olmak üzere $g(x, y) = g(h(a, b)) = gh(a, b)$ ve böylece $gh(a, b) = g(x, y) = (g(x), g(y))$ elde edilir. Yani $g(x) \rightarrow g(y) \in \mathcal{G}(a, b)$ grafında bir kenardır. f_g dönüşümü yapı koruyan bir dönüşümdür.

ii) (G, Ω) çiftinin bir geçişli permütasyon grubu olduğu görülür.

iii) $\mathcal{G}(a, b)$ grafı kendisi ile eşleşmiş olsun. $O(a, b) = O(b, a)$ dir.

x ile y ardışık köşeler olsun. (x, y) veya $(y, x) \in O(a, b)$ dir. Dolayısıyla x ile y ve u ile v ardışık köşeler ise $(x, y) \in O(a, b)$ ve $(u, v) \in O(a, b)$ olduğunu kabul edebiliriz. Buradan $O(a, b) = \{g(x, y) : g \in G\}$ olduğundan $\exists g_1, g_2 \in G$ öyle ki $(x, y) = g_1(a, b)$ ve $(u, v) = g_2(a, b)$ şeklindedir. Sonuç olarak $g_1^{-1}(x, y) = (a, b)$ olur. Açıkça $(u, v) = g_2 g_1^{-1}(x, y)$ ve G grup olduğundan dolayı $h = g_2 g_1^{-1} g \in G$ elde edilir. Böylece G grubu $\mathcal{G}(a, b)$ alt yörüngesel grafının ardışık köşeleri üzerinde geçişli olarak hareket eder.

iv) $x \rightarrow y$ ve $a \rightarrow b$, $\mathcal{G}(a, b)$ alt yörüngesel grafında keyfi iki kenar olsun. Bu durumda $(x, y) \in O(a, b)$ ve $(u, v) \in O(a, b)$ olduğundan $S_1(a, b) = (x, y)$ ve $S_2(a, b) = (u, v)$ olacak şekilde $S_1, S_2 \in G$ vardır. Böylelikle $S_1^{-1}(x, y) = S_2^{-1}(u, v)$ elde edilir. Buradan $S_2(S_1(x, y)) = (u, v)$ sonucuna ulaşılır. Böylece G grubu $\mathcal{G}(a, b)$ alt yörüngesel grafının kenarları üzerinde geçişli olarak hareket eder.

2.6 $SL^*(3, \mathbb{Z})$ Lineer Grubunun $\widehat{\mathbb{Z}}$ Üzerinde Hareketi

$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$ kümesini $\widehat{\mathbb{Z}}$ ile tanımlayalım. $SL(3, \mathbb{Z})$ ile kat sayıları tam sayı, determinantı 1 olan bütün matrislerin grubunu gösterelim. Bu $SL(3, \mathbb{Z})$ grubuna özel lineer grup denir. Yani,

$$SL(3, \mathbb{Z}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} : a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{Z} \text{ ve } \det A = 1 \right\} \quad \text{çarpma}$$

işlemine göre bir gruptur. Ayrıca

$$SL^*(3, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\} \text{ grubu } SL(3, \mathbb{Z}) \text{ grubunun}$$

bir alt grubudur. Yani $SL^*(3, \mathbb{Z}) \leq SL(3, \mathbb{Z})$ dir. $PSL(3, \mathbb{Z}) \cong SL(3, \mathbb{Z}) / \{\pm I\}$ dir.

Bu çalışmada $SL(3, \mathbb{Z})$ grubunun $\widehat{\mathbb{Z}}$ kümesi üzerindeki hareketini göz önüne alacağız. Yani permütasyon gruplarından esinlenerek hesaplama yapılacaktır. Ve hiperbolik geometrik kullanarak elde edilen graflar çizilmeye çalışılacaktır.

$\widehat{\mathbb{Z}}$ kümesinin herhangi bir elemanı $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ olarak temsil edilsin. Burada $x, y \in \mathbb{Z}$

dir. Ayrıca sonsuzda $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ olarak gösterebiliriz. $\widehat{\mathbb{Z}}$ kümesi üzerinde

$SL^*(3, \mathbb{Z})$ hareketi şu şekilde tanımlayalım:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

Teorem.2.6.1. $SL^*(3, \mathbb{Z})$ grubunun $\widehat{\mathbb{Z}}$ kümesi üzerindeki hareketi transitiftir.

İspat. Sonsuzu içeren yörüngenin $\widehat{\mathbb{Z}}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \in \widehat{\mathbb{Z}}$ ise bu

durumda $aa - b\beta = 1$ sağlayan $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ elemanları mevcuttur. Buradan

$$\begin{pmatrix} a & \beta & 0 \\ b & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \text{ eşitliğine ulaşılabilir.}$$

Şimdi $\alpha \in \Omega$ için $G_\alpha < H < G$ olduğunda G – invariant denklik bağıntısı aşıkâr durumlarından farklı olur. Transitiflikten dolayı G grubunun her elemanı $g \in G$ için $g(\alpha)$ formundadır. Böylece Ω üzerindeki G – invariant denklik bağıntısı aşıkâr olmayan bir bağıntıdır. Dolayısıyla $g, g' \in G$ olmak üzere $g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \in gH$ bağıntısı G – invariant denklik bağıntısıdır. Burada $G = SL^*(3, \mathbb{Z})$ ve $\Omega = \widehat{\mathbb{Z}}$ kümesi seçilecektir. Ayrıca $G_\alpha = SL^*(3, \mathbb{Z})_\infty$ alınacaktır.

Teorem 2.6.2. $SL^*(3, \mathbb{Z})$ grubu için sonsuzun sabitleyeni

$$SL^*(3, \mathbb{Z})_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{Z} \right\}$$

kümesidir.

İspat. $\widehat{\mathbb{Z}}$ kümesinde bir noktanın sabitleyeni sonsuz devirli gruptur. Transitif hareket olduğundan herhangi iki noktanın sabitleyeni birbirine eşleniktir. Bu yüzden $SL^*(3, \mathbb{Z})$ grubunda sonsuzun sabitleyenine bakmak yeterlidir. Şimdi $T \in SL^*(3, \mathbb{Z})$ olmak üzere $T(\infty) = \infty$ eşitliğine bakalım.

$$T(\infty) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ eşitliğinden } a = 1, c = 0 \text{ olup } \det T = 1$$

olduğundan $ad - bc = 1$ denkleminde $d = 1$ bulunur. Dolayısıyla $b = \lambda \in \mathbb{Z}$

şeklindedir. Böylece $T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dır. Yani $SL^*(3, \mathbb{Z})$ grubunda sonsuzun

sabitleyeni $\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ elemanı tarafından üretilen kümedir.

$SL^*(3, \mathbb{Z})_0 := \{T \in SL^*(3, \mathbb{Z}) | c \equiv 0 \pmod{n}, n \in \mathbb{Z}\}$ grubu $SL^*(3, \mathbb{Z})$ grubunun kongrüans alt grubudur.

Açıkça görülmektedir ki

$SL^*(3, \mathbb{Z})_\infty < SL^*(3, \mathbb{Z})_0 < SL^*(3, \mathbb{Z})$ dir. Şimdi $SL^*(3, \mathbb{Z})$ grubu ile $\widehat{\mathbb{Z}}$ üzerine indirgenen bir $\approx$ denklik bağıntısını inceleyelim.

$\begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \widehat{\mathbb{Z}}$ keyfi alalım. $T_1 = \begin{pmatrix} r & r_0 & 0 \\ s & s_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} x & x_0 & 0 \\ y & y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$T_1, T_2 \in SL^*(3, \mathbb{Z})$ dir. $T_1(\infty) = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $T_2(\infty) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ olduğu görülür. Burada

$\widehat{\mathbb{Z}}$ üzerindeki $SL^*(3, \mathbb{Z})_0$ invariant denklik bağıntısına bakalım. $T_1(\infty) \approx T_2(\infty) \Leftrightarrow T_1^{-1}T_2 \in SL^*(3, \mathbb{Z})_0$ dir. Gerçekten

$$T_1^{-1}T_2 = \begin{pmatrix} -s_0 & r_0 & 0 \\ s & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x_0 & 0 \\ y & y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0y - s_0x & r_0y_0 - x_0s_0 & 0 \\ sx - ry & sx_0 - ry_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan $T_1^{-1}T_2 \in SL^*(3, \mathbb{Z})_0$ olduğu görülür. Yani

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \pmod{n} \text{ dir.}$$

Buradaki blok sayısı $\psi(n) = |SL^*(3, \mathbb{Z}) : SL^*(3, \mathbb{Z})_0|$ dir.

Teorem 2.6.3. $|SL^*(3, \mathbb{Z}) : SL^*(3, \mathbb{Z})_0| = n \prod_{p|n} (1 + \frac{1}{p})$ indeksidir. Burada $p|n$ 'yi bölen asal sayılardır.

İspat. Genel olarak denklik sınıflarının sayısı $\approx_m$ altında $\psi(n) = |SL^*(3, \mathbb{Z}) : SL^*(3, \mathbb{Z})_0|$ ile verilir. $\psi(n)$ çarpımlı bir fonksiyondur. $n = lm$, $(l, m) = 1$ alalım. Buradan $v \approx_n w \Leftrightarrow v \approx_l w$ ve $v \approx_m w$ dir. Yani denklik sınıflarının sayısı $\psi(n) = \psi(l) \cdot \psi(m)$ dir. Ayrıca $n \rightarrow n \prod_{p|n} (1 + \frac{1}{p})$ fonksiyonunda çarpımsaldır.

Teoremi kanıtlamak için n 'nin bir asal p sayısının kuvveti olduğunu göstermek

yeterlidir. Eğer $v = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \in \widehat{\mathbb{Z}}$ alınırsa böylece mod n ye göre görülebilir ki $i \in \mathbb{Z}_n, j \in$

$\mathbb{Z}_n$ olmak üzere $\begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \approx_n \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \approx_n \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix}$ dir. Böylece $2n$ sınıfları farklıdır.

Euler fonksiyonu olan $\phi(n) = n \cdot (1 - \frac{1}{p})$ göz önüne alındığında farklı sınıfların sayısı $2n - \phi(n) = n \cdot (1 + \frac{1}{p})$ olduğu bulunur. Sonuç olarak

$$\psi(n) = |SL^*(3, \mathbb{Z}) : SL^*(3, \mathbb{Z})_0| = n \prod_{p|n} (1 + \frac{1}{p}) \text{ dir.}$$

2.7 $SL^*(3, \mathbb{Z})$ Lineer Grubunun $\widehat{\mathbb{Z}}$ Üzerindeki Yörüngesel Grafları

Teorem 2.7.1. $r, s, x, y \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere bu durumda aşağıdakilerden biri gerçekleşir:

I) $\begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix} -r \\ -s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $G_{u,n}$ de bir kenar vardır $\Leftrightarrow x \equiv -ur \pmod{n}$, $y \equiv -us \pmod{n}$ ve $ry - sx = -n$,

II) $\begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix} -r \\ -s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $G_{u,n}$ de bir kenar vardır $\Leftrightarrow x \equiv ur \pmod{n}$, $y \equiv us \pmod{n}$ ve $ry - sx = n$,

III) $\begin{pmatrix} -r \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix} r \\ -s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $G_{u,n}$ de bir kenar vardır $\Leftrightarrow x \equiv -ur \pmod{n}$, $y \equiv -us \pmod{n}$ ve $ry - sx = n$,

IV) $\begin{pmatrix} -r \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix} r \\ -s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $G_{u,n}$ de bir kenar vardır $\Leftrightarrow x \equiv ur \pmod{n}$, $y \equiv us \pmod{n}$ ve $ry - sx = -n$ dir.

İspat. $r, s, x, y \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Varsayalım ki ;

$\begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ $G_{u,n}$ de bir kenar olsun bu durumda $\left(\begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right) \in O_{u,n}$ dir. Böylece

$SL^*(3, \mathbb{Z})$ 'de bir T elemanı vardır öyle ki $T, \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ çiftini $\left(\begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

çiftine gönderir. Yani $T \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $T \begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ dir. Gerçekten

$T = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL^*(3, \mathbb{Z})$ keyfi olsun. Bu durumda

$T \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $T \begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bn \\ cu + dn \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ dir.

Buradan $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} =$
 $\begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} au + bn \\ cu + dn \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ dir. Böylece $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & u & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$
 $\begin{pmatrix} r & x & 0 \\ s & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ yazılır. Her iki taraftan da determinant alırsak $ry - sx = -n$ olur.

Böylece $x \equiv -ur \pmod{n}$, $y \equiv -us \pmod{n}$ ve $ry - sx = -n$ elde edilir. $au + bn = x \Rightarrow x = bn - ur \Rightarrow x \equiv -ur \pmod{n}$. $cu + dn = y \Rightarrow y = dn - us \Rightarrow y \equiv -us \pmod{n}$.

Tersine varsayalım ki $x \equiv -ur \pmod{n}, y \equiv -us \pmod{n}$ ve $ry - sx = -n$ olsun. Bu durumda $\exists b, d \in \mathbb{Z}$ öyle ki $x = -ur + bn, y = -us + dn$ olur. $a = -r$ ve $c = -s$ alınırsa $x = au + bn$ ve $y = cu + dn$ olur. Buradan yola

çıkarak $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & u & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x & 0 \\ s & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eşitliğini yazabiliriz. Yine $ry -$

$sx = -n$ olduğundan ve $ad - bc = 1$ olduğunu bildiğimizden $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in$

$SL^*(3, \mathbb{Z})$ dir. Böylelikle $\begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ kenarı $G_{u,n}$ grafındadır. $\begin{pmatrix} -r \\ -s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$ içinde

benzer şekilde gösterilebilir. Yine II, III, IV durumları için aynı yöntemle ispat yapılabilir.

Teorem 2.7.2. $G_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiştir $\Leftrightarrow u^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$.

İspat. $G_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiş olduğunu varsayalım. Eğer $\infty \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ bir kenar varsa

bu takdirde $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \infty$ olmak zorundadır. Yukarıdaki teoremden $\begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kenarından $1 \equiv -u^2 \pmod{n}$ kongrüans denklemi elde edilir. Çünkü $\begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ için $x \equiv -ur \pmod{n}$ idi. $r = u$ alırsak $x = 1$ için $1 \equiv -u^2 \pmod{n}$ dir.

Tersine $u^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ alalım. $\exists b \in \mathbb{Z}$ öyle ki $u^2 + 1 = bn$.

Buradan $T = \begin{pmatrix} u & -b & 0 \\ n & -u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alınırsa bu durumda $T(\infty) = \begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix}$, $T \begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix} = \infty$

olup, $\det T = 1$ dir. Yani, $T(\infty) = \begin{pmatrix} u & -b & 0 \\ n & -u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $T \begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} u & -b & 0 \\ n & -u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 - bn \\ un - un \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \infty$ olur. Böylece $G_{u,n}$ grafi kendisiyle

eşleşmiştir. Eğer $\begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} G_{u,n}$ de bir kenarsa bu durumda yukarıdaki teoremden

$ry - sx = n$ yazılabilir. Böylece $\begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ dir. $G_{u,n}$ grafının bağlantılı

bileşenlerinin her bir " $\approx$ " bağıntısı için tek bir blok oluşturur. Sayısı ise $\psi(n)$ kadardır.

2.8. Alt Graf

Her bir $G_{u,n}$, $\psi(n)$ tane alt grafın birleşimidir. Her bir alt grafın köşeleri tek bir bloktan oluşur. Bu bloklar $\approx$ denklik bağıntısıyla belirlenir. $SL^*(3, \mathbb{Z}), \widehat{\mathbb{Z}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden bu bloklar transitif olarak permüte olur. Böylece alt grafların hepsi birbirine izomorftur. Şimdi $G_{u,n}$ grafının bir alt grafı olan $F_{u,n}$ grafını alalım. $F_{u,n}$ grafı köşeleri sonsuz bloğu üzerinde olan graftır. Sonsuz bloğu ise şöyledir:

$$[\infty] := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ ve } y \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

Böylece $G_{u,n}$ grafı $\psi(n)$ tane $F_{u,n}$ grafının ayrık birleşimlerinden oluşur.

Teorem 2.8.1. $r, s, x, y \in \mathbb{Z}^+$ ve $\begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in [\infty]$. Bu takdirde,

$$\text{I)} \quad F_{u,n} \text{ grafında } \begin{pmatrix} (-1)^i r \\ (-1)^i s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (-1)^i x \\ (-1)^i y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bir kenardır} \Leftrightarrow$$

$x \equiv -ur \pmod{n}$ ve $ry - sx = -n$. Burada $i = 0$ veya $i = 1$ dir.

$$\text{II)} \quad F_{u,n} \text{ grafında } \begin{pmatrix} (-1)^i r \\ (-1)^i s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (-1)^j x \\ (-1)^j y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bir kenardır} \Leftrightarrow$$

$x \equiv ur \pmod{n}$ ve $ry - sx = n$. Burada $i = 0, j = 1$ veya $i = 1, j = 0$ dir.

$$\text{III)} \quad F_{u,n} \text{ grafında } \begin{pmatrix} (-1)^i r \\ (-1)^j s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (-1)^i x \\ (-1)^j y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bir kenardır} \Leftrightarrow$$

$x \equiv -ur \pmod{n}$ ve $ry - sx = n$. Burada $i = 1, j = 0$ veya $i = 0, j = 1$ dir.

$$\text{IV) } F_{u,n} \text{ grafında } \begin{pmatrix} (-1)^i r \\ (-1)^j s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (-1)^j x \\ (-1)^i y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bir kenardır} \Leftrightarrow$$

$x \equiv ur \pmod{n}$ ve $ry - sx = -n$. Burada $i = 1, j = 0$ veya $i = 0, j = 1$ dir.

$F_{u,n}$ grafının bir otomorfizmi sonsuz bloğundaki kenarları kenarlara resmeder.

İspat. Teorem 2.7.1 ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.8.2. $SL^*(3, \mathbb{Z})_0$ grubu $F_{u,n}$ grafının kenar ve köşelerini transitif olarak permüte eder.

İspat. Varsayalım ki $u, v \in [\infty]$ olsun. $SL^*(3, \mathbb{Z})$, $\widehat{\mathbb{Z}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $g(u) = v$ olacak şekilde $g \in SL^*(3, \mathbb{Z})$ vardır. $u \approx \infty$ ve $\approx SL^*(3, \mathbb{Z})$ invariant denklik bağıntısı olduğundan $g(u) \approx g(\infty)$ olur. Yani $v \approx g(\infty)$ olur. Böylece $v \approx g(\infty)$ olduğundan $g \in SL^*(3, \mathbb{Z})_0$ dir. Şimdi kenarların transitifliğini gösterelim. Varsayalım ki $v, w \in [\infty], k_1, k_2 \in [\infty]$ ve $v \rightarrow w, k_1 \rightarrow k_2 \in F_{u,n}$ olsun. Buradan $(v, w), (k_1, k_2) \in O(\infty, \begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix})$ dir. Böylece $S, T \in SL^*(3, \mathbb{Z})_0$ için, $S(\infty) = v, S\left(\begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix}\right) = w, T(\infty) = k_1, T\left(\begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix}\right) = k_2$ olacak şekilde dönüşümler vardır. Dolayısıyla $S, T \in SL^*(3, \mathbb{Z})_0$ dir. Çünkü $S(\infty), T(\infty) \in [\infty]$ dur. Üstelik $TS^{-1}(v) = k_1$ ve $TS^{-1}(w) = k_2$ dir. Yani $TS^{-1} \in SL^*(3, \mathbb{Z})_0$ dir.

Teorem 2.8.3. $F_{u,n}$ yönlendirilmiş üçgenler içerir $\Leftrightarrow u^2 + u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$.

İspat. $F_{u,n}$ yönlendirilmiş bir üçgen içerdiğini varsayalım. Transitif hareketten dolayı yönlendirilmiş üçgeni şöyle alabiliriz. $\infty \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 n \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \infty$. $\begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 n \\ 0 \end{pmatrix}$ kenarından $uy_0 - x_0 = -1$ ve $x_0 \equiv -u^2 \pmod{n}$ denklemi elde edilir.

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 n \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kenarından $y_0 = 1$ elde edilir. Böylece $x_0 = u + 1$ dir. Sonuç olarak $u^2 + u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ elde edilir.

Tersine $u^2 + u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ sağlansın. Kenar şartları veren teorem kullanıldığında $\infty \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \infty$ devresi $F_{u,n}$ grafında bir yönlendirilmiş üçgen devredir.

Sonuç 2.8.1. Aşağıdaki verilen dönüşümler $\Gamma_0(n)$ grubunun elemanlarıdır:

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} u & -\frac{u^2+u+1}{n} \\ n & -u-1 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} u & \frac{u^2+u+1}{n} \\ -n & -u-1 \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} -u & \frac{u^2+u+1}{n} \\ -n & u+1 \end{pmatrix}, \quad \phi_4 = \begin{pmatrix} -u & -\frac{u^2+u+1}{n} \\ n & u+1 \end{pmatrix}$$

ve burada $u^2 + u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ olup bu elemanlar 3. mertebeden eliptik elemandır. Ayrıca

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} u & -\frac{u^2+u+1}{n} & 0 \\ n & -u-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \varphi_1 = 1$$

Dönüşümü yardımıyla kolaylıkla görülebilir ki,

$$\varphi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 \begin{pmatrix} u \\ n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u-1 \\ -n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 \begin{pmatrix} -u-1 \\ -n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dir. Açıkça $-1 \leq i \leq 4$ olmak üzere φ_i dönüşümleri graftaki devreler ile gruptaki eliptik elemanlar arasında birebir ilişki kurar.

Örnek 2.8.1. $n = 3, u = 1$ olsun. Bu takdirde $F_{1,3}$ de sekiz tane üçgen devre vardır ve bunlar aşağıdaki şekildedirler:

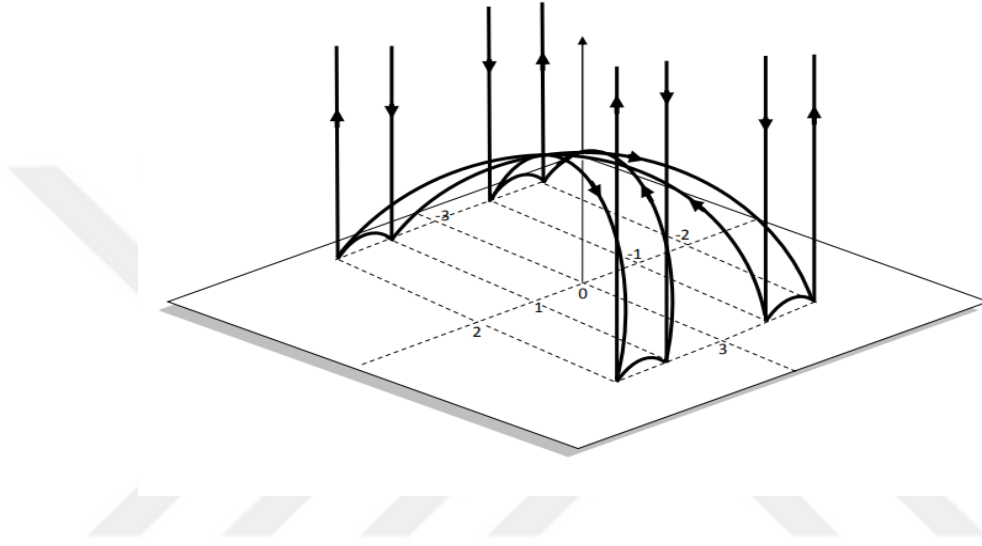
$$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dır.

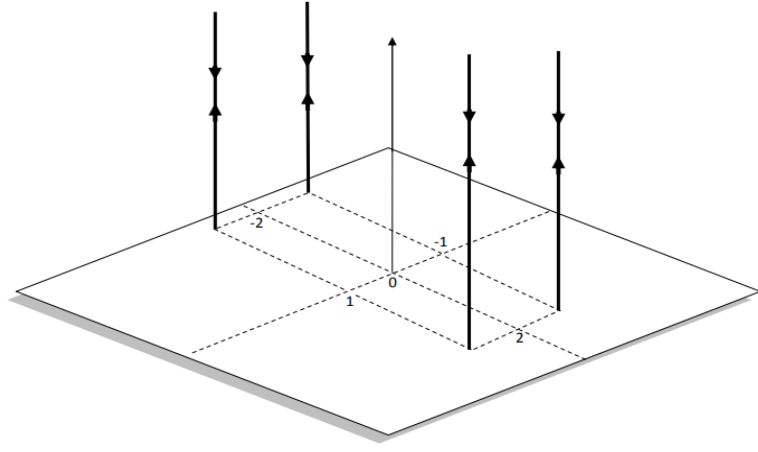


Şekil 2.8.1. $F_{1,3}$ grafi

Örnek 2.8.2. $n = 2, u = 1$ olsun. $u^2 + u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ geçerli olmadığı için $F_{1,2}$ de üçgen devre yoktur. Ama $F_{1,2}$ de 2-gen vardır. Bunlar ise

$$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Şekil 2.8.2. $F_{1,2}$ grafi

3. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada $SL(3, \mathbb{Z})$ grubunun kongrüans alt grubu olan $SL^*(3, \mathbb{Z})_0$ grubu incelenmiştir. Görüldü ki bu kongrüans alt grubu sadece 2. ve 3. mertebeden eliptik elemanlar içermesinden dolayı alt yörüngesel grafında ikigen ve üçgen devreler bulunmuştur. Burada kullanılan alt yörüngesel graflar aslında daha önce çalışılmış olan ve literatürde mevcut olan simge probleminin çözümü için çok önemli bir yöntemdir. Aslında bu konu ile ilgili yapılan çalışmalarda amaç graflardaki kapalı devreler ile ayrık gruplardaki üretici eliptik elemanların mertebeleri arasındaki bağ ilişkisi yardımıyla simge problemini çözmektir. Bu tez çalışması da kısmen bu probleme yöneliktir. Yapılan çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir:

- $SL^*(3, \mathbb{Z})$ kongrüans alt grubunun $\hat{\mathbb{Z}}$ kümesi üzerindeki hareketinin transitif olduğu Teorem 2.6.1. de gösterildi.
- $G_{u,n}$ alt yörüngesel grafında kenar olma şartları Teorem 2.7.1. ile elde edildi.
- $G_{u,n}$ alt yörüngesel grafının kendisiyle eşleşmiş graf olabilmesi için gerek ve yeter şart Teorem 2.7.2. de verildi.
- $F_{u,n}$ alt yörüngesel grafında kenar olma şartları Teorem 2.8.1. ile verildi.
- $SL^*(3, \mathbb{Z})_0$ kongrüans alt grubunun Teorem 2.8.2. ifadesinde $F_{u,n}$ grafının köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte ettiği gösterildi.
- $F_{u,n}$ alt yörüngesel grafının yönlendirilmiş üçgen devre içermesi için gerek ve yeter şart Teorem 2.8.3. te bulundu.

Yapılan çalışmada da görüldüğü üzere impirimitif hareketin durumunu seçilen $SL^*(3, \mathbb{Z})_0$ kongrüans alt grubu belirlemektedir. Dolayısıyla bu grup yerine farklı bir grup alınarak impirimitif hareketin oluşturacağı yeni durumlar incelenebilir. Böylece grup seçimindeki farklılıklar graflardaki devrelerin tipini değiştirebilir veya farklı kongrüans denklemleri ortaya çıkabilir. Elde edilen kongrüans denklemleri sayılar teorisi açısından da önemli olabilir. Ayrıca bulunan tüm sonuçların geometrik görselleri için yüzey döşemeleri açısından da değerlendirilebilir.

4. KAYNAKLAR

Akbaş, M., “On Suborbital Graphs For The Modular Group”, *Bull. London Math. Soc.* 33, 647-652, (2001).

Akbaş, M., Singerman D. “The Signature of The Normalizer of $\Gamma_0(N)$ ”, *Turkish Journal of Math.*,Tübitak, 20, 379-387, (1996).

Asar, A. O., Arıkan A., *Cebir*, Ankara : Eflatun Yayınevi (2009).

Beardon, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Springer Verlag, New York, (1983).

Beşenk, M., “Suborbital Graphs For a Special Subgroup of The $SL(3, \mathbb{Z})$ ”, *Filomat* 30:3, 593-602, (2016).

Biggs, N. L., White A. T., *Permutation Groups and Combinatorial Structures*, London Math. Soc. Lecture Notes 33, Cambridge University Pres, Cambridge, (1979).

Büyükköse, Ş., Kaya Gök G.,*Graf Teoriye Giriş* , Nobel Akademik Yayıncılık, Mayıs, (2018).

Çevirici Demirbaş, G., *Alt Yörüngesel Graflar*, Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Denizli, (2020).

Güler, B.Ö., Beşenk M., Değer A.H. and Kader S., “*Elliptic Elements and Statistics*” Vol. 40, No 2, 203-210, (2011).

Jones G. A., Singerman D. , *Complex Functions an Algebraic and Geometric Viewpoint*, Cambridge University Press, Cambridge, (1987).

Jones, G. A., Singerman D. and Wicks K., “The Modular Group and Generalized Farey Graphs”, *London Math. Soc. Lecture Notes*, CUP, Cambridge, 160, 316-318, (1991).

Keskin, R., “Suborbital Graphs for The Normalizer of $\Gamma_0(m)$ ”, *European Juornal of Combinatorics*, Vol 27, No 2, 193-206, (2006).

Lehner, J., Newman M., Weierstrass Points of $\Gamma_0(N)$, *Annals of Mathematics* Vol 79, No 2, March 360-368 , (1964).

Neumann, P.M., *Finite Permutation Groups, Edge-Coloured Graphs and Matrices*, Topics in Group Theory and Computation, Academic Press, London, (1977).

Newman, M., The Normalizer of Certain Modular Subgroups, *Can. J. Math* 8, 29-31, (1956).

Ogg, A. P., Modular Functions, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Vol 37, (1980).

Rose, H. E., *A Course in Number Theory*, Oxford University Press, Oxford, (1988).

Schoeneberg, B., *Elliptic Modular Functions*, Springer Verlag, Berlin, (1974).

Shimura, G., *Introduction to The Arithmetic Theory of Automorphic Functions* Princeton Univ. Press, (1971).

Sims, C. C., “*Graphs and Finite Permutation Groups*”, *Math Z.*, 95, 76-86, (1967).

Singerman, D., “Subgroups of Fuchsian Groups and Finite Permutation Groups”, *Bull. London Math. Soc.* 2, 319-323, (1970).

Tsuzuku, T., *Finite Groups and Finite Geometries*, Cambridge University Press, Cambridge, (1982).

Wilson, J. R., *Introduction to Graph Theory*, Pearson Education Limited, Edinburg, (2022).