



**KARDİYOVASKÜLER AKIŞLARDA YAPAY VİSKOZİTE
KARARLILAŞTIRMASININ ETKİSİ**

Hilal KARADAVUT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

NİSAN 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hilal KARADAVUT

02/04/2024

KARDİYOVASKÜLER AKIŞLARDA YAPAY VİSKOZİTE
KARARLILAŞTIRMASININ ETKİSİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Hilal KARADAVUT

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2024

ÖZET

Bu tezde, kardiyovasküler sistemdeki akışı modellemek için kullanılan Navier-Stokes denklemlerinin (NSD) Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) ile sayısal çözümleri incelenmiştir. NSD'nin yarı ayrık ve tam ayrık çözüm şeması ve bu şemanın kararlılık ve hata analizleri sunulmuştur. Ayrıca oluşturulan tam ayrık şemaya, gerçek akış yapısını daha iyi modellemek ve fiziksel olmayan salınımları gidermek için yapay viskozite kararlaştırılması eklenmiştir. Kullanılan şema için algoritmaların etkinliğini gösteren sayısal testler sunulmuştur. Ateroskleroz ve anevrizma gibi kardiyovasküler hastalık durumunda akış yapısını inceleyen benzetimler ayrıca detaylı olarak verilmiştir.

Bilim Kodu : 20406

Anahtar Kelimeler : Kardiyovasküler hastalıklar, Navier-Stokes denklemleri, sonlu elemanlar yöntemi, yapay viskozite

Sayfa Adedi : 75

Danışman : Prof. Dr. Aytekin Bayram ÇIBIK

THE EFFECT OF ARTIFICIAL VISCOSITY STABILIZATION ON
CARDIOVASCULAR FLOWS

(M. Sc. Thesis)

Hilal KARADAVUT

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

April 2024

ABSTRACT

In this thesis, numerical solutions of Navier-Stokes equations (NSE) used to model the flow in the cardiovascular system are investigated by the Finite Element Method (FEM). Semi-discrete and fully discrete solutions of NSE scheme and its stability and error analysis are presented. Furthermore, artificial viscosity stabilization is added to the fully discrete scheme in order to capture fluid structure better and damp non-physical oscillations. Numerical tests demonstrating the effectiveness of the algorithms are presented. Simulations concerning the the flow structure in case of cardiovascular diseases such as atherosclerosis and aneurysms are also given in detail.

Science Code : 20406

Key Words : Cardiovascular diseases, Navier-Stokes
equations, finite element method, artificial viscosity

Page Number : 75

Supervisor : Prof. Dr. Aytekin Bayram ÇIBIK

TEŞEKKÜR

Tezimin planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendirmeme yardımcı olan, engin bilgi ve tecrübeleri ile beni aydınlatan lisansüstü öğrenim sürecimde her yönden yardımcı olan ve kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum danışman hocam Sayın Prof. Dr. Aytekin Bayram ÇİBİK'a, çalışmalarım sırasında manevi desteğini her zaman hissettiğim değerli arkadaşım Gülnur HAÇAT YILMAZOĞLU'na, hayatım boyunca her an yanımda olan, beni hep destekleyen ve mutluluk sebeplerim olan kıymetli ailem; annem Nurcan KARADAVUT'a, babam Mehmet KARADAVUT'a ve kardeşim Hatice KARADAVUT'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak bu süreçte BİDEB 2210-A Programı ile burs desteği sağlayan TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. KARDİYOVASKÜLER SİSTEM.....	5
2.1. Kan.....	5
2.2. Kalp.....	6
2.3. Damar.....	8
3. KARDİYOVASKÜLER HASTALIKLAR.....	11
3.1. Ateroskleroz.....	11
3.2. Anevrizma.....	12
4. KARDİYOVASKÜLER SİSTEMİN MATEMATİKSEL OLARAK İNCELENMESİ.....	15
5. GÖSTERİMLER VE MATEMATİKSEL ÖN HAZIRLIKLAR	19
6. NAVİER STOKES DENKLEMLERİ VE SAYISAL ANALİZİ.....	29
6.1. Yarı-Ayrık Yaklaşım ile Sayısal Analiz	29
6.1.1. Kararlılık analizi	30
6.1.2. Hata analizi.....	32
6.2. Tam-Ayrık Yaklaşım ile Sayısal Analiz	36

	Sayfa
6.2.1. Kararlılık analizi	37
6.2.2. Hata analizi.....	39
7. SAYISAL DENEYLER	49
7.1. Boğumlu Damarlarda Sayısal Deneyler.....	51
7.1.1. Çift boğumlu damarlarda sayısal deneyler	51
7.1.2. Tek boğumlu damarlarda sayısal deneyler	63
7.2. Beyin Anevrizmasında Duvar Kayma Gerilimi (WSS).....	66
8. SONUÇ VE ÖNERİLER	71
KAYNAKLAR	73
ÖZGEÇMİŞ	75

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Sistemik damarların bazı özellikleri.....	9
Çizelge 2.2. Pulmoner damarların bazı özellikleri.....	10
Çizelge 4.1. Farklı damarlardaki Reynolds sayıları	17
Çizelge 7.1. Yakınsama testi sonuçlarındaki hız hataları ve oranları.....	50
Çizelge 7.2. Farklı zaman aralıklarındaki hız hataları ve oranları.....	50
Çizelge 7.3. $\alpha = 0$ için Re sayılarına göre hatalar	51
Çizelge 7.4. $\alpha = 0,01$ için Re sayılarına göre hatalar	51

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Kalbin dört odası ve bunları birbirine bağlayan damarlar	7
Şekil 2.2. Sistolik ve diastolik kan basıncı (a: Sistolik evre - Kalbin kasılması, b: Diastolikevre - Kalbin gevşemesi).....	8
Şekil 3.1. Plak oluşumuna bağlı olarak aterosklerozun ilerleyişi	12
Şekil 3.2. Sakküler anevrizma ve Fusiform anevrizma	13
Şekil 7.1. Farklı Reynolds değerleri için α kararlılaştırma teriminin çift boğumlu damardaki kan akış hızına etkisinin karşılaştırılması	52
Şekil 7.2. Farklı Reynolds değerleri için α kararlılaştırma teriminin çift boğumlu damardaki kan basıncına etkisinin karşılaştırılması	53
Şekil 7.3. $Re = 500$ değeri için farklı α değerlerinde hata	54
Şekil 7.4. $Re = 500$ değeri için çift boğumlu damardaki kan akış hızı	55
Şekil 7.5. $Re = 500$ değeri için çift boğumlu damardaki kan basıncı	55
Şekil 7.6. Farklı Reynolds değerleri için çift boğumlu bir damarın alt duvarındaki WSS	56
Şekil 7.7. Farklı Reynolds değerleri için çift boğumlu bir damarın üst duvarındaki WSS	57
Şekil 7.8. $Re = 500$ değeri için karşılıklı boğumlu damardaki kan akış hızı	58
Şekil 7.9. $Re = 500$ değeri için karşılıklı boğumlu damardaki kan basıncı	59
Şekil 7.10. Farklı Reynolds değerleri için karşılıklı boğumlu bir damarın alt duvarındaki WSS	59
Şekil 7.11. Farklı Reynolds değerleri için karşılıklı boğumlu bir damarın üst duvarındaki WSS	60
Şekil 7.12. $Re = 500$ değeri için karşılıklı boğumlu damardaki kan akış hızı	61
Şekil 7.13. $Re = 500$ değeri için karşılıklı boğumlu damardaki kan basıncı	62
Şekil 7.14. Farklı Reynolds değerleri için karşılıklı boğumlu bir damarın alt duvarındaki WSS	62
Şekil 7.15. Farklı Reynolds değerleri için karşılıklı boğumlu bir damarın üst duvarındaki WSS	63

Sayfa

Şekil 7.16. $Re = 500$ değeri için tek boğumlu damardaki kan akış hızı	64
Şekil 7.17. $Re = 500$ değeri için tek boğumlu damardaki kan basıncı	64
Şekil 7.18. Farklı Reynolds değerleri için tek boğumlu bir damarın alt duvarındaki WSS	65
Şekil 7.19. Farklı Reynolds değerleri için tek boğumlu bir damarın üst duvarındaki WSS	65
Şekil 7.20. Beyinde meydana gelen Sakküler anevrizmanın simülasyonu	66
Şekil 7.21. $f2$ bölgesine ait grafik	67
Şekil 7.22. $f7$ bölgesine ait grafik	67
Şekil 7.23. $f3$ bölgesine ait grafik	68
Şekil 7.24. $f1$ bölgesine ait grafik	69
Şekil 7.25. $f8$ bölgesine ait grafik	69
Şekil 7.26. $f9$ bölgesine ait grafik	70

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

Hz

Hertz

kg/m³

Kilogram/metreküp

kPa

Kilopascal

L/dk

Litre/dakika

$L^2(\Omega)$

$\{p: \Omega \rightarrow R: \int_{\Omega} |p|^2 dx < \infty\}$

mm

Milimetre

mm/s

Milimetre/saniye

p

Akışkanın basıncı

Pa

Paskal

Pa.s

Paskal.saniye

$Q^h \subset Q$

Basınç sonlu eleman alt uzayları

u

Akışkanın hızı

$(u^h, p^h) \in (X^h, Q^h)$

Hız ve basınç yaklaşık çözümleri

ν

Viskozite

V

Test uzayı

$X^h \subset X$

Hız sonlu eleman alt uzayları

$\|v\|$

v vektörünün $L^2(\Omega)$ normu

$^{\circ}C$

Celcius

$(.,.)$

$L^2(\Omega)$ uzayında tanımlı iç çarpım

Ω

Damar alanı

σ

Cauchy gerilim tensörü

Kısaltmalar**Açıklamalar****ALE**

Arbitrary- Lagrangian-Eulerian

HAD

Hesaplama Akışkanlar Dinamiği

KDD

Kısmi Diferensiyel Denklem

LBB

Ladyzenskaya-Brezzi-Babuska

NSD

Navier Stokes Denklemleri

SEY

Sonlu Elemanlar Metodu

Re

Reynolds Sayısı

WSS

Duvar Kayma Gerilimi



1.GİRİŞ

Akışkanlar dinamiği, durgun ve hareket halindeki gazların ve sıvıların davranışlarını inceleyen, uygulamalı bir bilim dalıdır [1]. Akışkanlar dinamiği, vücut kan damarlarındaki kanın akışının incelenmesi, uçaklar üzerindeki kuvvet ve momentlerin hesaplanması, boru hattındaki petrolün kütle akış oranının belirlenmesi, hava tahmini, yıldızlararası ortamda bulunan bulutsuların anlamaya çalışılması ve fisyon silahlarının patlamalarının modellenmesi gibi çok geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir [2-3].

Bir akışkanlar dinamiği probleminin çözümü; akışkanın hız, basınç, yoğunluk ve sıcaklık gibi çeşitli özelliklerini uzay ve zaman fonksiyonları olarak hesaplamayı içermektedir. Bu durumda akışkanın hareket ve davranışlarını incelenmek için birinci mertebe diferansiyel denklem olarak verilen Euler denklemleri veya Navier-Stokes denkleminin (NSD) kullanılması gerekmektedir.

NSD; sıvının konumu, basıncı ve yoğunluğunun nasıl bağlantılı olduğunu açıklamak için Claude-Louis Navier ve George Gabriel Stokes tarafından türetilmiş denklemlerdir. Bu denklemler çözümlerin varlığı, tekliği ve kararlılığı açısından çok karmaşık denklemlerdir. Bu denklemin çözülmesi çok zordur ve çok dar aralıkta analitik çözümlere izin verdiği için sayısal çözümlere ihtiyaç duyulmuştur. Sayısal algoritmanın gelişmesi ve bilgisayar sistemlerindeki gelişmelerle artık bu denklemler birçok karmaşık alanda ve sınır koşullarında çözülebilmektedir. NSD'nin yanı sıra, birçok kısmi diferansiyel denklemin sayısal çözümü için en yaygın yöntem, alanı elemanlara bölmeyi ve çözüme bu öğeler üzerindeki temel fonksiyonların doğrusal bir kombinasyonu olarak yaklaşmayı içeren sonlu elemanlar yöntemidir (SEY) [4]. Bu yöntem, bir bölge üzerinde tanımlı bir problemin nümerik çözümünü veren bir yöntemdir ve sonsuz boyutlu bir fonksiyon uzayındaki fonksiyonları, sonlu boyutlu bir fonksiyon uzayındaki fonksiyonlara ve ardından sayısal yöntemlerle vektör uzayında izlenebilen vektörlere dönüştürme işlemidir [5].

NSD, akışkan içerisindeki birim kütleyle etki eden momentum değişimlerinin, basınç değişimleri ve sürtünme kayıplarına neden olan viskoz kuvvetlerin toplamına eşit olduğunun doğruluğunu ortaya koymaktadır. Bu viskoz kuvvetler moleküller arası

etkileşimlerden meydana gelmekte ve akışkanın akmaya ne kadar dirençli (viskoz) olduğunu göstermektedir.

Bu formülasyonda, bazı akışkan özelliklerindeki büyük değişiklikler sayısal yöntemlerin kararlılığını olumsuz yönde etkileyebilir. Dolayısıyla yapay viskozite yöntemi bu gibi durumlarda stabilizasyonu sağlamak için kullanılan bir tekniktir. Bu yöntemde kullanılan α parametresi düşük seçilirse yapay viskozite etkisi daha az olur ve daha doğru sonuçlar elde edilebilir. Ancak α parametresi yüksek seçilirse akışta daha fazla yapay viskozite etkisi oluşur ve çözüm daha kararlı hale gelir ancak aynı zamanda daha fazla fiziksel akış detayı kaybolabilir. Bu nedenle doğru sonuçlara ulaşmak için α parametresinin dengeli seçilmesi önemlidir. Yapay viskozite, akışkan yapısını stabilize ederek dalgalanmaları kontrol eder ve sayısal çözümün stabilitesini arttırmaktadır. Yapay viskozite teknikleri, Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği (HAD) simülasyonlarının daha doğru sonuçlar üretmesine ve gerçek dünyadaki akışkan dinamiğine daha yakın tahminler üretmesine yardımcı olmaktadır.

Bu tezde, NSD'nin SEY ile nümerik analizi yapılmakta ve bu denklemlerin kardiyovasküler sistem üzerindeki uygulanabilirliği incelenmektedir. Aynı zamanda kardiyovasküler sistemdeki bazı işlev bozuklukları ile meydana gelen hastalıklar durumunda kan akışının nasıl etkilendiği araştırılmakta ve kan akışını modellemek için NSD kullanılmaktadır. İstenilen modellerin daha doğru ve gerçeğe yakın elde edilebilmesi için NSD'ye yapay viskoziteyi temsil eden kararlılaştırma terimi eklenmektedir.

Kan akışının matematik modelleri Newtonyen modeller ve Newtonyen olmayan modeller olarak ayrılabilir. Newtonyen modeller, kayma incelemesi ve viskoelastik etkileri ihmal eden ve büyük damarlara uygulanabilen modellerdir. Aort gibi damarlar, damar büyüklüğü ve kan akış davranışı ile Newtonyen modellere örnek verilebilmektedir. Newtonyen olmayan modeller ise viskoelastik etkilerin dikkate alındığı ve çapı 1 mm'den küçük olan damarlara uygulanabilen modellerdir. Newtonyen olmayan davranış viskoziteyi kayma hızına bağlı hale getirdiğinden hesaplama maliyetini artırmaktadır bu yüzden kolay olması adına genellikle Newton modelleri kullanılmaktadır.

Kardiyovasküler sistem; kalp, damar ve kan bileşenlerinin birbiri ile uyumlu çalışmasını ve işlevlerin devamlılığını sağlamaktır. Kardiyovasküler hastalıklar ise kalp, damar ve

kandaki fonksiyon bozuklukları olarak tanımlanabilir. Bu vakalar damarların daralması, tıkanması, zayıflaması veya genişlemesi, kalp yetmezliği ve felci içermektedir. Dünya Sağlık Örgütü verilerine göre kalp-damar hastalıkları dünya genelinde ölümlerin önde gelen nedenlerinden biri olmuştur [6-7]. Her yıl 17,9 milyon insan ölmektedir ve bu dünya çapındaki tüm ölümlerin %31'ine tekabül etmektedir [7-8]. Bunun başlıca nedenlerinde tütün ve alkol kullanımı, hareketsiz yaşam tarzı ve sağlıksız beslenme alışkanlıkları yer almaktadır.

Kardiyovasküler hastalıklara ilişkin istatistikler, gerçekleri açıkça gösterse de kardiyovasküler sistemin daha iyi anlaşılması önemli bir gerekliliktir. NSD'nin sayısal çözümleri kan akışının dinamiklerini, damar duvarlarındaki basınç değişikliklerini ve akış hızlarını anlamak için kullanılır. Algoritmalar ve simülasyonlar, bazı davranışları gözde canlandırabilmek için oldukça faydalıyken; matematiksel modellemeler de bazı durumların matematiksel kavramlar açısından tanımlanması için oldukça kullanışlıdır. Kan akışının matematiksel modellenmesi ve simülasyonu, kardiyovasküler hastalıklar durumunda sistemin işleyişini etkileyen koşulların daha iyi anlaşılmasını amaçlamaktadır.

Bu tezin iki ana amacı vardır. Bunlardan birincisi NSD'yi çözerek sayısal olarak kararlı bir şema oluşturmaktır. Diğer amaç ise elde edilen çözümün kardiyovasküler sistemde ne kadar etkili olduğunu araştırmaktır. Bunu doğru bir şekilde araştırmak için bölümlerde nasıl bir yol izlendiği aşağıda ifade edilmiştir.

Bölüm 2: Bu bölümde, konunun tamamının anlaşılmasına yönelik olarak kardiyovasküler sistem ile ilgili bazı kavramlar sunulmuştur.

Bölüm 3: Bu bölümde, daha sonra FreeFem++ programı ile analiz edilecek olan bazı kardiyovasküler hastalıklar tanıtılmıştır.

Bölüm 4: Bu bölümde, kardiyovasküler sistemi matematikle ilişkilendirmek amacıyla kardiyovasküler sistemin matematiği anlatılmıştır.

Bölüm 5: Bu bölümde, önerilen şemanın kararlılık ve hata analizlerinde sıklıkla kullanılan bazı tanımlar, teoremler, lemmalar ve açıklamalar sunulmuştur.

Bölüm 6: Bu bölümde, Navier-Stokes denklemleri sunulmuş ve önerilen şemaların kararlık ve hata analizleri yapılmıştır.

Bölüm 7: Bu bölümde, teorik sonuçları doğrulamak için sayısal testler ve kardiyovasküler sistemdeki ateroskleroz ve anevrizma gibi bazı kardiyovasküler hastalıkların simülasyonları sunulmuştur. Ayrıca kan akışının davranışı ve pulsatil doğası araştırılmıştır.

Bölüm 8: Bu bölümde, tez boyunca yapılan çalışmalar ve araştırmalar ile elde edilen bazı sonuçlar sunulmuştur.



2. KARDİYOVASKÜLER SİSTEM

Bu tezde daha çok kardiyovasküler sistem akışlarının matematiksel olarak incelenmesi ile ilgilenilecektir. Ancak konunun tamamının anlaşılmasına yönelik olarak bu bölümde kardiyovasküler sistem ile ilgili bazı kavramlar fazla detaya girilmeden tanıtılacaktır.

Kardiyovasküler sistemin görevi; oksijeni, besin maddelerini ve hormonları vücut hücrelerine ve dokularına iletip hücreler tarafından üretilen atık maddeler ile karbondioksidi aynı yoldan uzaklaştırarak işlevlerin devamlılığını sağlamaktır. Bu sistemin işleyişinde meydana gelen aksamalar damar tıkanıklığı, anevrizma gibi çeşitli hastalıklara sebep olur. Bu da kardiyovasküler sisteminin patolojisi ile ilgilidir [9].

Anatomi, fizyoloji ve patoloji tıbbın dallarıdır. Anatomi bilimi canlıların yapıları ile bu yapıyı meydana getiren çeşitli organları ve sistemleri araştırırken; fizyoloji bilimi bunların işleyişi ve aralarındaki ilişkiyi inceler. Patoloji ise hastalıklar hakkında bilgi sağlayan bilim dalıdır, hastalığın nedenini, yapısını ve hastalığın vücutta meydana getirdiği etkileri inceler. Kardiyovasküler sistemin bu üç dalda incelenmesi, arkasındaki mekanizmanın anlaşılması ve daha doğru model ve çözümlerin ortaya konması açısından önemlidir.

Kardiyovasküler sistem kan, kanı vücuda pompalayan kalp ve pompalanan kanı vücuda dağıtan damarlar olmak üzere üç ana bileşenden oluşmaktadır. Şimdi sırasıyla bu üç bileşen anlatılacaktır.

2.1. Kan

Kan, atardamar, toplardamar ve kılcal damarlardan oluşan damar ağının içinde dolaşan, sürekli hareket halinde olan hayati bir sıvıdır. Bu hayati sıvının; vücudun enfeksiyonlardan korunması, vücut ısısının ve pH seviyesinin dengede kalması, proteinler - karbonhidratlar gibi hayati öneme sahip maddelerin doku ve hücrelere taşınması, oksijenin akciğerlerden vücuda taşınması, vücutta oluşan karbondioksitin akciğere taşınarak vücuttan atılması gibi önemli görevleri bulunmaktadır. Normal bir erişkinde ortalama 5 litre kan bulunmaktadır [10]. Kanın %40-50'si kan hücrelerinden (alyuvarlar, akyuvarlar ve trombositler), %50-

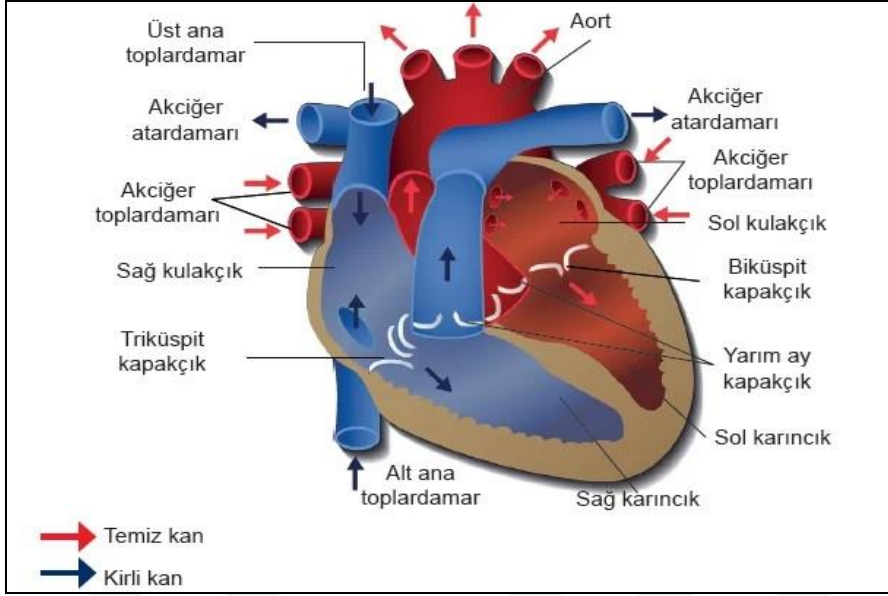
60'ı plazmadan oluşmaktadır. Plazmanın ise %90-92'si sudan oluşurken geriye kalan kısmı organik (çoğunlukla proteinler) ve inorganik (elektrolitler) maddelerden oluşur [11].

2.2. Kalp

Kalp, yaklaşık 300 gram ağırlığında olan kaslı yapıda hayati bir organdır. Bu organ, sternum olarak adlandırılan göğüs kafesi kemiğinin arkasında, akciğer lobları arasında ve diyafram kası üzerinde yer alıp, üçte ikisi orta hattın sol tarafında, üçte biri orta hattın sağ tarafında bulunmaktadır.

Metabolizma eylemleri sonucunda oluşan atık ürünlerin vücuttan uzaklaştırılması, vücut ısısının düzenlenmesi, asit-baz dengesinin korunması, hormonlar ve enzimlerin vücudun gerekli bölgelerine taşınması gibi görevlere sahip olan kalbin temel görevi kanı vücuda pompalamak ve kanın dolaşım sistemi boyunca sürekli olarak dolaşması için gereken basınç eğimini korumaktır.

Septum olarak adlandırılan kas duvarı kalbi sağ ve sol olmak üzere 2 kısma ayırır. Bu kısımlar da kendi içlerinde atriyumlar (kulakçıklar) ve ventriküllerden (karıncıklar) oluşarak kalbin 4 odasını oluşturur. Sağ atriyum ve sol atriyum kanın alındığı düşük basınç noktaları olan üst odacıklardır. Sağ ventrikül ve sol ventrikül ise kanın boşaltıldığı yüksek basınç noktaları olan alt odacıklardır. Ventriküller yüksek basınç noktaları olduklarından kalın duvarlara sahiptirler ve bu odacıkların boşaltılması daha fazla kas aktivitesi gerektirir [12-13]. Atriyum vücudun farklı bölgelerinden gelen kirli kanı alırken, ventrikül temizlenmiş kanı vücut dokularına geri gönderir. Kalbin dört odası ve bunları birbirine bağlayan damarlar Şekil 2.1'de gösterilmektedir. Kalp, kanın yüksek basınç bölgelerinden (ventriküller) alçak basınç bölgelerine (atriyumlar) doğru hareket edebilmesi için bir basınç gradyanı oluşturur.

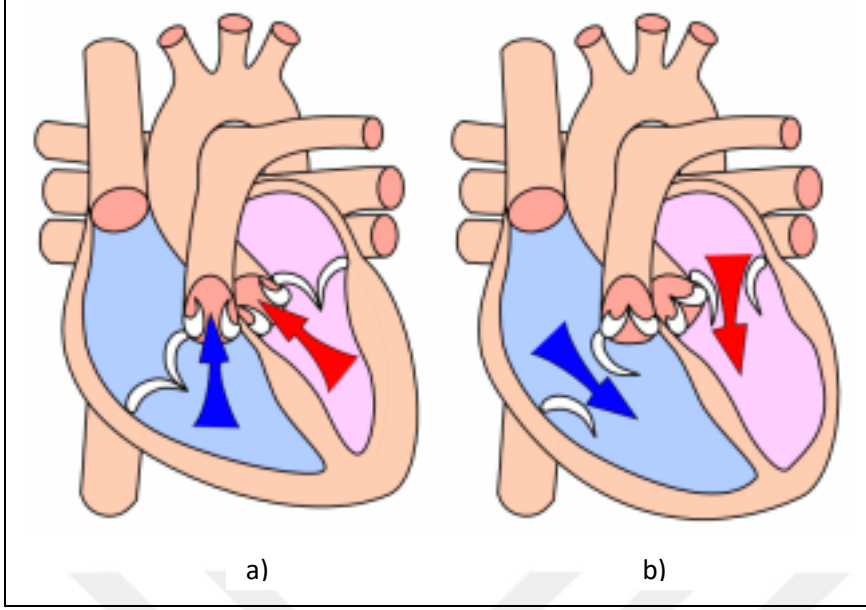


Şekil 2.1. Kalbin dört odası ve bunları birbirine bağlayan damarlar

Kalbin odacıklarını birbirinden ayıran dört kapağı vardır. Bu kapaklar; Triküspid kapak, Pulmoner kapak, Mitral kapak ve Aort kapağı olarak adlandırılmaktadırlar. Kanın dolaşımı esnasında kapaklar geri akışı önleyerek odacıklardaki düşük ve yüksek basıncın korunması için kalbe yardımcı olmaktadır bu yüzden basınç gradyanını korurlar.

Pulmoner ve aort kapakları kapanıp, triküspit ve mitral kapaklar açıldığında ventriküller gevşer ve kan almaya hazır olur. Ventriküllerin kanla dolmasıyla sonuçlanan bu gevşeme durumuna diyastol adı verilir. Mitral ve triküspit kapaklar kapanınca ventriküller basınç oluşturmak ve kanı vücuda pompalamak için kasılır, daha sonra pulmoner ve aort kapakçıkları açılır. Bu kasılma durumuna sistol denir [12, 14-16].

Kan basıncını anlamak kardiyovasküler sistemin mekaniğini araştırmak açısından önemlidir. Kan basıncı, kanın damar duvarlarında yaptığı basınç olarak tanımlanır. Ventriküller gevşediğinde (diyastol) damarların içinde kalan kan basıncı diyastolik kan basıncı olarak tanımlanırken, kasılan ventriküller (sistol) tarafından üretilen en yüksek basınca sistolik kan basıncı denir.



Şekil 2.2. Sistolik ve diastolik kan basıncı (a:Sistolik evre-Kalbin kasılması, b: Diastolik evre-Kalbin gevşemesi)

Kalp debisi, kalp atış hızı ve atım hacmi, kalp fizyolojisini ve kalp mekaniğini anlamak için 3 önemli kavramdır. Kalp atış hızı, kalbin dakikadaki atım sayısı olarak tanımlanırken; atım hacmi, kalbin atım başına pompaladığı kan hacmi olarak tanımlanır. Son olarak kalp debisi, kalbin belirli bir zaman aralığında pompaladığı kanın hacmi olarak tanımlanır. Kalp debisi kalp hızı ve atım hacminin çarpımı ile hesaplanır [12, 17]. Genç bir yetişkinin kalp atış hızı tipik olarak 75 atım/dk (1,25 Hz) ve atım hacmi tipik olarak 80 mL/atım olduğu düşünülürse kalp debisi yaklaşık 6 L/dk 'dir [12]. Kalp debisinin anormal ölçümü bir kardiyovasküler hastalığın göstergesi olabilir.

2.3. Damarlar

Kardiyovasküler sisteminin organlarından olan kan damarları, vücutta kanı taşıyan kanallardır. Kan damarlarının, kanı vücudun farklı bölümlerine taşımak ve organların ihtiyacı olan oksijeni taşımak gibi görevleri vardır.

Kanı vücuda taşıyan damarlara atardamar (arter) ve vücuttan kalbe geri getiren damarlara toplardamar (ven) denir. Arterler oksijenli kanı kalpten alıp vücudun farklı bölümlerine taşırken, venler oksijeni giderilmiş kanı vücudun farklı bölümlerinden kalbe taşırlar.

Kan damarları 3 katmandan oluşmaktadır. En dıştaki katman Tunika Adventisya veya Tunika Externa olarak adlandırılır. Bu katman kollejen ve elastik liflerden oluşup basınca karşı direnç sağlamaktadır. Ortada bulunan ikinci katmana Tunika Media denir. Tunika Media en kalın tabakadır, damar tipine göre elastik lif veya düz kas yapıya sahiptir. Bu yapısıyla birlikte damarların taşınması gereken kan hacmine göre genişlemesini ve daralmasını sağlar. Son olarak Tunika İntima en içteki katman olup kanla ilk teması sağlayan endotel hücrelerden oluşur [12].

Endotel hücreler kardiyovasküler sistemin temel bileşenlerinde biridir. Kan damarının iç kısmı lümen olarak adlandırılır. Damar lümenini içten saran endotel hücrelerinin birçok önemli fonksiyonu vardır. Endotel hücrelerinin can alıcı fonksiyonu trombosit yapışmasını ve pıhtılaşmayı önleyen antitrombotik bir yüzey sağlayarak kan akımını kolaylaştırmaktır. Endotel hücreleri, sadece dolaşım ve çevre dokular arasında yapısal bir bariyer değildir. Aynı zamanda kan akımı değişikliklerine, gerilmeye ve inflamasyon mediyatörlerine yanıt olarak çeşitli maddeler salgılayarak kan akımını düzenler [13]. Endotel hücreler akışın büyüklüğüne ve yönüne bağlı olarak yönlerini değiştirirler. Damar üzerindeki akışa bağlı olarak endotel hücrelerin şekli dairesel (düşük akışlı) veya geniş (yüksek ve tek yönlü akış için) olabilmektedir. Bu aynı zamanda kardiyovasküler sistemin araştırılması açısından da oldukça önemlidir. Örneğin, endotel hücrenin akış yönünde hizalanmaması nedeniyle ateroskleroz oluşumu olasılığı artabilmektedir.

Damarların sayısı, büyüklüğü ve basıncındaki değişiklikleri anlamak için önemli damarların bazı özellikler Çizelge 2.1 ve Çizelge 2.2’de verilmiştir.

Çizelge 2.1. Sistemik damarların bazı özellikleri [12]

Damar	Lümen Çapı (mm)	Duvar Kalınlığı (mm)	Ortalama Basınç (kPa)	Damarların Sayısı
Aort	25	2	12.5	1
Büyük Arterler	1 – 10	1	12	50
Küçük Arterler	.5 – 1	1	12	10 ³
Arteriol	.01 – .5	0.03	7	10 ⁴
Kılcal Damar	.006 – .01	0.001	3	10 ⁶
Toplar Damarcık	.01 – .5	0.003	1.5	10 ⁴
Toplar Damar	.5 – 15	0.5	1	10 ³
Ana Geniş Toplardamar	30	1.5	0.5	2

Çizelge 2.2. Pulmoner damarların bazı özellikleri [12]

Lümen Çapı (mm)	Damarların Sayısı	Ortalama Hız (mm/s)
30	1	110
8 – 30	10	155
1 – 8	10^3	104
0.1 – 1	0.25×10^6	44
0.02 – 0.1	0.20×10^6	23
0.01	300×10^6	2

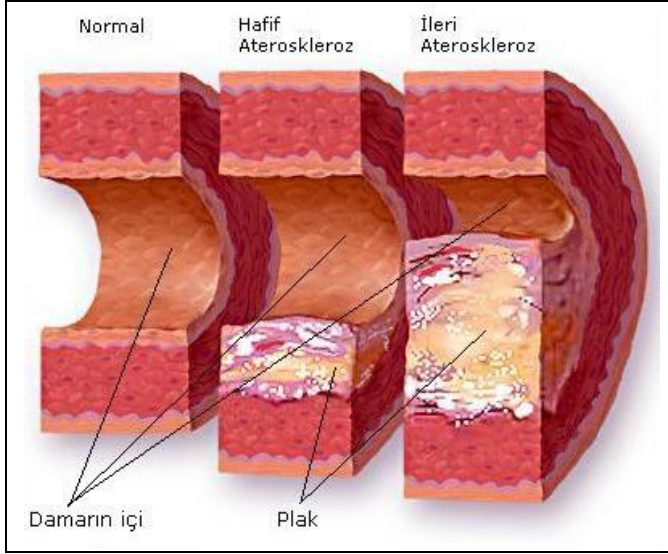
3. KARDİYOVASKÜLER HASTALIKLAR

Bu bölümde daha sonra FreeFem++ programı ile benzetim yapıp incelenecek olan bazı kardiyovasküler hastalıklar tanıtılacaktır.

Kardiyovasküler sistemdeki fonksiyon bozukluklarına (damarlarda, damar duvarlarında meydana gelen morfolojik değişikliklere veya hipertansiyon gibi mekanik değişikliklere) kalp damar hastalıkları denir. Bu hastalıklar dünya çapında ölümlerin en büyük nedenidir [6]. Kalp krizi, kalp yetmezliği, kalp kapak hastalığı, kalp kası hastalığı (kardiyomiyopati) ve damar hastalıkları bazı önemli kardiyovasküler hastalıklardır. Ateroskleroz (damar sertliği) ve anevrizma en sık görülen damar hastalıklarından ikisidir ve literatürde bu sorunlarla ilgili pek çok çalışma mevcuttur. Şimdi bu hastalıklar kısaca tanıtılacaktır.

3.1. Ateroskleroz

Atar damarların iç tabakalarında yağ, kolestrol, kalsiyum veya diğer maddelerin birikmesi ile plak olarak adlandırılan yapısal bozukluklar meydana gelmektedir. Ateroskleroz, plak oluşması sonucu atar damarın esnekliğini kaybederek sertleşmesi olarak tanımlanmaktadır. Plak ilk başlarda iyi huylu olup kendiliğinden normale dönme eğiliminde olsa da büyüdükçe damar lümenini istila edip kan akım hızını yavaşlatmaktadır. Kanın akışının yavaşlayarak sınırlanması, kanın gerekli doku ve organlara zamanında ve yeterli miktarda ulaşmamasına neden olur. Bunun sonucu olarak felç, kalp krizi, beyin kanaması gibi ölümcül hastalıklar meydana gelebilmektedir. Bunlar ise gelişmiş ülkelerdeki tüm ölümlerin yaklaşık yarısını oluşturmaktadır. Aterosklerozun gelişim aşamaları Şekil 3.1'de verilmiştir.

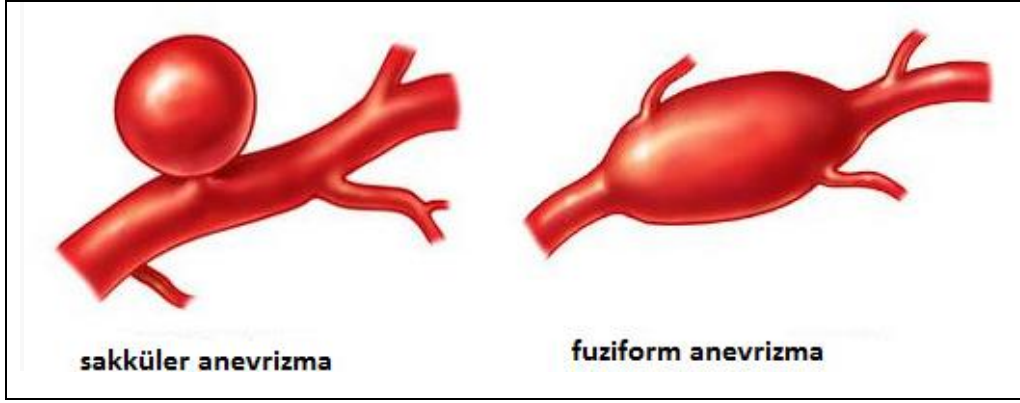


Şekil 3.1. Plak oluşumuna bağlı olarak aterosklerozun ilerleyişi

3.2. Anevrizma

Anevrizma, damar duvarlarının bazı nedenlere bağlı olarak zayıflaması sonucu damarın bir balon gibi genişlemesi olarak tanımlanmaktadır. Anevrizmanın duvarı, normal bir damar duvarına göre çok daha ince ve zayıf yapıdadır.

Anevrizmalar, gelişim şekillerine göre sakküler anevrizma ve fusiform anevrizma olarak ikiye ayrılırlar (Şekil 3.2.). Damar duvarının sadece bir tarafının zayıflaması sonucu genişlemenin tek tarafa doğru meydana geldiği ve nispeten kese biçiminde olan anevrizmalara, sakküler anevrizma denir. Hızlı bir şekilde gelişen, yırtılmaya ve kanamaya meyilli olan bu anevrizma genellikle beyinde görülmektedir. Bu anevrizmanın yırtılması ölümcül hastalıklara neden olabilmektedir. Damar duvarının simetrik bir şekilde zayıflaması ile genişlemenin her iki tarafa doğru meydana geldiği ve iğ biçiminde olan anevrizmalara ise fusiform anevrizma denir. Bu tür anevrizmalar sakküler anevrizmalara göre daha yavaş gelişim göstermektedir ve kanamalar da daha azdır.



Şekil 3.2. Sakküler anevrizma ve Fusiform anevrizma





4. KARDİYOVASKÜLER SİSTEMİN MATEMATİKSEL OLARAK İNCELENMESİ

Bu bölümde, kardiyovasküler sistemle ilgili bazı matematiksel hususlar tanıtılacaktır.

Bir olgunun modellenmesi gözlemlenen bir problemten kaynaklanır. Problemi anlamak için bir matematiksel modelin kurulması gerekir. Kurulacak model için uygun geometri tanımlanmalı, uygun denklem seçmeli ve uygun sayısal yöntemler uygulanmalıdır. Aynı zamanda bu model, sonuçları gerçek deneysel verilerle karşılaştırmak için simüle etmeyi de içermelidir.

Kardiyovasküler sistemin modellenmesinde gerçek deneysel verilerle karşılaştırıldığında iki tür veri vardır. Bu verilerden biri gerçek hastalardan alınan, daha güvenilir sonuçlar veren ancak maliyeti yüksek ve zaman alıcı olan in vivo yöntemi iken, diğeri kontrollü bir ortamdan üretilen, daha az kesinlik içeren ancak daha az maliyetli ve zaman tasarrufu sağlayan in vitro yöntemidir. Bu türlerden herhangi birini kullanan bir araştırmacı, modelin güvenilir olup olmadığını anlayabilir aksi takdirde modelin değiştirilmesi gerekir.

Özelden genele doğru, tek arterdeki sıvının incelenmesine lokal akış analizi adı verilirken, sıvının arteriyel deformasyon ile etkileşiminin incelenmesine ise sıvı yapı etkileşimi adı verilmektedir. Tek bir arterin modellenmesinden tüm sistemin davranışının anlaşılmasına, geometrik çok ölçekli modelleme denir ve küresel bir senaryonun anlaşılması matematiksel modellemenin arzu edilen amacıdır.

Sıvı alanının tek bir arter temsilini modellemeden önce uygun yaklaşımı araştırmak önemlidir. Lagrangian gösterimi, kardiyovasküler sistemin karmaşık yapısı nedeniyle uygun olmayan tek bir sıvı parçacığını takip etmeyi amaçlamaktadır. Euler yaklaşımı arterin belirli bir kısmındaki sıvı parçacıklarının, arterin deformasyonunu gözden kaçıran davranışını araştırmayı amaçlamaktadır. Çok yaygın bir yaklaşım ise arterin belirli bir alanının giriş ve çıkışını sabitleyen ve duvarların deforme olmasına izin veren Arbitrary-Lagrangian-Eulerian (ALE) yaklaşımıdır. Bu yaklaşım diğer iki gösterimi birleştirmektedir. Modellemelerin doğru sonuçlar verebilmesi için en uygun yaklaşım seçilerek kanın ve damarın yapısı incelenmelidir.

Kan, temel olarak su ve kan hücrelerinden oluşan bir plazmadır. Bu plazmanın belirgin özelliği, kayma gerilimi altında viskozitesi azalan akışkanların davranışı olan kayma incelmesidir. Bu etki, artan deformasyon hızıyla daha akışkan hale gelerek kanın vücuda nüfuz etmesini sağlar. Özellikle damar çapı küçüldükçe, kayma inceltme etkisi daha belirgin hale gelir. Bu durumun arkasındaki en önemli bileşen ise kırmızı kan hücreleridir, çünkü onlar kanın kayma inceltme özelliği ile doğrudan ilişkilidirler.

Damar çapı küçüldükçe kayma inceltme etkisi artar [12]. Çapı 1 mm'den küçük damarlarda kanın viskozitesi azalır ve damar çapına bağlı hale gelir. Bu kadar küçük damarlarda, plazma damar duvarına temas eder ve eritrositler damarın merkezinden kolaylıkla hareket eder. Bu nedenle viskozite aniden azalır. Bu durum Fahraeus-Lindqvist etkisi olarak bilinmektedir. Üstelik eritrositler en küçük kılcal damarlardan bile daha büyük olmalıdır. Bu noktada eritrositler deformasyona uğrar ki bu da kanın araştırılması gereken bir diğer viskoelastik davranışdır. Bu durumda kan sürekli bir sıvı olarak değerlendirilemeyebilir. Bu özelliklerin anlaşılmasıyla, kan akışının matematik modelleri Newtonyen modeller ve Newtonyen olmayan modeller olarak ayrılabilir. Newtonyen modeller, kayma incelemesi ve viskoelastik etkileri ihmal eden ve büyük damarlara uygulanabilen modellerdir. Newtonyen olmayan modeller ise viskoelastik etkilerin dikkate alındığı ve çapı 1 mm'den küçük olan damarlara uygulanabilen modellerdir. Newtonyen olmayan davranış viskoziteyi kayma hızına bağlı hale getirdiğinden hesaplama maliyetini artırır bu yüzden kolay olması adına genellikle Newton modelleri kullanılır.

Kan akışını yöneten sıkıştırılamaz Navier-Stokes denklemleri şu şekilde verilmektedir:

$$\begin{aligned}
u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p &= f, & (0, T] \times \Omega \\
\nabla \cdot u &= 0 & (0, T] \times \Omega \\
u(x, 0) &= u_0(x) & x \in \Omega \text{ için} \\
u &= 0 & \Gamma_{wall} \\
n \cdot \sigma &= 0 & \Gamma_{out} \\
u &= c & \Gamma_{in}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Burada u akışkanın hızını, p basıncını, f sıvının birim kütlesi başına olan dış kuvveti, ν viskoziteyi ve σ Cauchy gerilim tensörünü temsil etmektedir. Ω ile damar alanı

verilmektedir. Γ_{in} kalbe yakın olduğu için yakın sınır olarak adlandırılırken Γ_{out} kalpten daha uzak olduğu için uzak sınır olarak adlandırılmaktadır. Γ_{wall} üzerinde, $n \cdot \sigma$ uzak sınırında normal gerilim ve kaymaz sınır koşulu ile sabit olduğu varsayılmaktadır. $\nabla \cdot u_0 = 0$ eşitliğinin sağlanması gerektiğinden hızın başlangıç koşulunun akıllıca belirlenmesi gerekir. Yanlış başlangıç verilerinin etkisini azaltmak için çok yaygın bir yaklaşım, sabit Stokes problemini çözmek ve çözümleri NSD'de başlangıç koşulu olarak kullanmaktır [12].

(4.1) denkleminde $(u \cdot \nabla)u$ konvektif terimi kardiyovasküler sistemde küçük ölçeklerde oluşabilecek türbülans gibi değişkenliklere-kararsızlıklara neden olabilir. Reynolds sayısı (Re) akış özellikleri açısından çok önemlidir. Akış geometrisine de bağlı olarak, $Re < 1000$ olan bir akışın kararlı kalması gerekir ve buna laminar akış rejimi denir. Daha yüksek Reynolds sayıları türbülansa neden olabilir. Reynolds sayısının kardiyovasküler sistemdeki ölçeğini daha net anlamak için farklı damarlardaki Reynolds sayıları Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Farklı damarlardaki Reynolds sayıları [10]

Damar	Reynolds Sayısı
Ascending Aort	4000
Torasik Aort	2500
Brakiyal Arter	1000
Karotis Arter	800
LAD Koroner Arter	400
Küçük Arter	100
Kılcal Damar	0.003
Büyük Damar	1700

Aort çıkışında sistolik fazda bazı dengesizlikler oluşsa da kardiyovasküler sistemde tam kapsamlı bir türbülans oluşmaz [18]. Diğer olası türbülans durumları ise kalp atış hızının artması, darlık oluşumu, implant, anevrizma varlığı, arterlerin dallanması ve anemi gibi özel durumlarda viskozitenin azalması olacaktır.

Kardiyovasküler sistemde bir diğer önemli hesaplama,kanın damar duvarına sürtünmesinin veya endotel yüzeydeki gerilimin teğetsel bileşeninin neden olduğu birim alan başına

karşılık gelen duvar kayma gerilimidir (WSS). Bu gerilim ile ateroskleroz oluşumunun önemli bir ilişkisi olduğu iyi bilinmektedir [19]. WSS değeri şu şekilde formüle edilebilir:

$$WSS = \nu \frac{du}{dy}$$

Navier-Stokes denklemleri basınç ve hız hakkında bilgi içerir ve in vitro kayma gerilimi değerlerinin hesaplanmasına olanak tanır. 0,5 ile 1,2 Pa arası WSS değerleri normal kabul edilirken bu aralığın dışındaki değerler düşük ve yüksek duvar kayma gerilimi değerleri olarak kabul edilir. Laminer akış rejimine sahip düz geometride pulsatil akış durumunda WSS değerleri 1,7-7 Pa arasında değişmektedir [20]. Burada Pulsatil akım, akıştaki periyodik değişikliklere maruz kalan akım olarak tanımlanabilmektedir.

Vücut sıcaklığındaki yerel değişikliklerde akış düzenlerini etkileyebilir. Büyük ve orta boy damarlarda etkilerin daha az olması gerekirken, daha küçük damarlarda kanın viskozitesi sıcaklık değişikliklerinden etkilenebilir. Normalde sıcaklık değişimini tanımlamak için NSD ile birleştirilmiş başka bir KDD gerekir [12].

Tez boyunca kanın homojen bir sıvı olduğu varsayılmıştır. Kan, 0,0035 Pa.s sabit viskoziteye sahip olup Newtonyen akış tipindedir ve damar yarıçapı 1 mm' den büyük olacak şekilde seçilmiştir. Ayrıca kan yoğunluğu 1060 kg/m³ şeklinde seçilmiş olup genel vücut sıcaklığı ortalama 37°C olarak ele alınmıştır.

5. GÖSTERİMLER VE MATEMATİKSEL ÖN HAZIRLIKLAR

Bu bölümde, tezin matematiksel analiz kısmında kullanılacak bazı önemli tanımlardan, lemmalardan ve teoremlerden bahsedilecektir.

5.1. Tanım ($L^p(\Omega)$ Uzayı): $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir, $u(x)$ reel veya kompleks değerli Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere eğer $|u(x)|^p$ fonksiyonu Ω üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebiliyor ise yani

$$L^p(\Omega) = \left\{ u: \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

şartı sağlanıyorsa $L^p(\Omega)$ uzayına aittir denir [21].

$L^p(\Omega)$ uzayında norm,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitliği ile sağlanır.

5.1. Açıklama: Bu tezde genel olarak $L^2(\Omega)$ uzayı kullanılacaktır. Bu uzayda norm,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği ile sağlanırken, iç çarpım

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$$

olarak ele alınacaktır.

5.2. Tanım ($L^\infty(\Omega)$ Uzayı): L^∞ uzayı Ω üzerinde hemen hemen her yerde sınırlı fonksiyonların uzayıdır.

$$L^\infty = \{u: |u(x)| \leq K \text{ } \Omega \text{ da hemen hemen her yerde}\}$$

biçiminde ifade edilir [21]. $L^\infty(\Omega)$ uzayında norm,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

eşitliği ile sağlanır.

5.3. Tanım (Sobolev Uzayı): $1 \leq p \leq \infty, k$ negatif olmayan tam sayı ve $|\alpha| \leq k$ olmak üzere, $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ k . mertebeden zayıf manada türevleri $L^p(\Omega)$ uzayına ait olan fonksiyonların uzayına Sobolev uzayı denir ve $W^{k,p}(\Omega)$ ile gösterilir [21].

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega): D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}$$

olup bu u uzayının normu,

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır [21].

5.2. Açıklama: $p = 2$ olması halinde $W^{k,2}(\Omega)$ Sobolev uzayı bir Hilbert uzayı yapısı taşımakta olup ve $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ notasyonlarıyla ifade edilir. Bu en çok kullanılan uzaylardan biridir. O halde

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega): D^1 u \in L^2(\Omega)\}$$

olarak tanımlanır. Buradan norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (u^2 + |\nabla u|^2) dx$$

şeklinde yazılabilir.

5.4. Tanım (Banach Uzayı): Eğer bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı tam ise yani X 'deki her bir Cauchy dizisi bir noktaya yakınsıyor ise, buna bir Banach uzayı denir.

5.5. Tanım (Hilbert Uzayı): Eğer bir iç çarpım uzayı iç çarpımdan elde edilen norma göre tam ise yani aynı uzaydaher bir Cauchy dizisi bir noktaya yakınsıyor ise, bu uzaya Hilbert uzayı denir.

5.3. Açıklama: Sınırlandırılmış Hilbert uzayı,

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

olarak tanımlanabilir.

5.1. Teorem (Divergens Teoremi): $\Omega \subset R^d$ ve $\partial\Omega$, Ω bölgesinin sınırı olsun. \hat{n} , $\partial\Omega$ 'ya birim dış normaldir, ds yüzey alan elemanıdır ve u yeterince düzgündür, o zaman

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \hat{n} \, ds$$

eşitliği sağlanır.

5.6. Tanım: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$, birçok indisli olmak üzere negatif olmayan kısmı α_i olarak gösterilsin. O halde,

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$$

olup, kısmi türevi

$$D^\alpha = \prod_{i=1}^{|\alpha|} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{\alpha_i}$$

olarak tanımlanır [21].

5.7. Tanım (Zayıf Türev): Lokal integrallenebilir fonksiyonların uzayı

$L^1_{loc} = \{v: v \in L^1(K), \forall K \subset \Omega\}$ olmak üzere, $u, w \in L^1_{loc}$ ve α , bir çok indisli olsun. Eğer her $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ test fonksiyonu için,

$$\int_{\Omega} u \cdot D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w \cdot \phi dx,$$

eşitliği sağlanıyorsa w 'ye u 'nun α . dereceden zayıf türevi denir ve

$$D^\alpha u = w$$

olarak yazılır [21].

5.8. Tanım (Dual Norm): $f \in L^2(\Omega)$ fonksiyonunun $H^{-1}(\Omega)$ dual uzayında tanımlanmış normu

$$\|f\|_{-1} := \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{(f, v)}{\|\nabla v\|}$$

şeklindedir ve dual norm adı verilir.

5.2. Teorem (Hölder Eşitsizliği): $u \in L^p(\Omega)$ ve $v \in L^q(\Omega)$ ile $p, q \in [0, \infty]$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. O halde,

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitliği sağlanır [21]. Buradan,

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^q \right)^{1/q}$$

eşitliği yazılabilir.

5.4. Açıklama: (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği): Teorem 5.2'de $p = q = 2$ alınırsa Cauchy-Schwarz eşitsizliği elde edilir.

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

5.9. Tanım (Young Eşitsizliği): $a, b, \varepsilon \geq 0$, $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. O halde

$$ab \leq \frac{\varepsilon^{-p} a^p}{p} + \frac{\varepsilon b^q}{q}$$

eşitsizliğine Young eşitsizliği denir [21]. Ayrıca, Young eşitsizliğinin en sık kullanılan hali $p = q = 2$ durumudur:

$$ab \leq \frac{1}{2\varepsilon} a^2 + \frac{\varepsilon}{2} b^2$$

5.1. Lemma (Poincaré Eşitsizliği): $u \in H_0^1$ ise, C pozitif sabit olmak üzere

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

eşitsizliğine Poincaré Eşitsizliği denir.

5.2. Lemma (Gronwall Eşitsizliği): $f(t), g(t), \lambda(t) > 0$ ve $[0, T]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar olsun öyleki $f(t)$ hemen hemen her t için,

$$\frac{df}{dt} \leq \lambda(t)f(t) + g(t)$$

diferensiyel eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda hert $\in [0, T]$ için

$$f(t) \leq \exp \left\{ \int_0^t \lambda(s) ds \right\} \left\{ f(0) + \int_0^t g(s) ds \right\}$$

sağlanır.

5.3. Lemma (Ayrık Gronwall Eşitsizliği): $n \geq 0$ ve a_n, b_n, c_n, d_n, e_n negatif olmayan tam sayılar olsun öyleki

$$a_{N+1} + \Delta t \sum_{n=0}^{N+1} b_n \leq \Delta t \sum_{n=0}^{N+1} a_n d_n + \Delta t \sum_{n=0}^{N+1} c_n + H, \quad N \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır ve $\forall n$ için $ke_n < 1$ varsayılırsa,

$$a_{N+1} + \Delta t \sum_{n=0}^{N+1} b_n \leq \exp \left(\Delta t \sum_{n=0}^{N+1} \frac{e_n}{1 - ke_n} \right) \left(\Delta t \sum_{n=0}^{N+1} c_n + H \right), \quad N \geq 0$$

olur [19].

5.4. Lemma: $u \in H^1(\Omega)$ için,

$$\|\nabla \cdot u\| \leq \sqrt{d} \|\nabla u\|$$

eşitsizliği yazılabilir [22].

5.10. Tanım: Kararlılık ve hata analizinde sonlu elemanlar yöntemi kullanıldığından dolayı hız alanı ve basınç uzayları için standart fonksiyon uzayları aşağıdaki gibi seçilmektedir:

$$X = H_0^1(\Omega),$$

$$Q = L_0^2(\Omega)$$

X' in zayıf bir alt uzayı V olsun, o halde

$$V := \{v \in X, (\nabla \cdot q, v) = 0, \forall q \in Q\}$$

şeklinde tanımlanır.

Uzaysal ayrıklaştırmada sonlu elemanlar yönteminin uygulanması nedeniyle Ω alanının π_h şeklinde ince bir ağının oluşturulmasına ihtiyaç duyulur. π_h ise tanımlanan sonlu elemanlar uzayları ile aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$X_h \subset X,$$

$$Q_h \subset Q.$$

5.5. Lemma: Hız ve basınç uzaylarının uygun sonlu eleman uzaylarının ayrık inf-sup koşulunu yani Ladyzenskaya-Brezzi-Babuska (LBB) koşulunun sağladığı varsayılır. Örneğin, β bir sabit olmak üzere,

$$\inf_{v \in X_h} \sup_{q \in Q_h} \frac{(q, \nabla \cdot v)}{\|\nabla v\| \|q\|} \geq \beta > 0$$

şartı sağlanır [22].

Aynı zamanda hız ve basınç sonlu eleman uzayları aşağıdaki iyi bilinen yaklaşım özelliklerini sağladığı varsayılır [22].

$$\inf_{v \in X_h} \|u - v\| \leq Ch^{k+1} |u|_{k+1}, \quad u \in H^{k+1}(\Omega),$$

$$\inf_{v \in X_h} \|\nabla(u - v)\| \leq Ch^k |u|_{k+1}, \quad u \in H^{k+1}(\Omega),$$

$$\inf_{q \in Q_h} \|p - q\| \leq Ch^{s+1} |p|_{s+1}, \quad p \in H^{s+1}(\Omega).$$

5.6. Lemma (Skew Simetri): Eğer $\partial\Omega$ üzerinde $u \cdot n = 0$, $u, \nabla u \in L^2(\Omega)$ ve $\nabla \cdot u = 0$ ise u, v, w için

$$\int_{\Omega} u \cdot v \cdot w \, dx = - \int_{\Omega} u \cdot w \cdot v \, dx$$

olur.

Tanım 5.11. (Skew-simetrik trilinear form): $b: X \times X \times X \rightarrow R$ ve $u, v, w \in X$ olmak üzere skew-simetrik trilinear form şu şekilde tanımlanır:

$$b(u, v, w) := \frac{1}{2}((u \cdot \nabla)v, w) - \frac{1}{2}((u \cdot \nabla)w, v)$$

Aşağıda b 'nin daha sonra hata analizinde kullanılacak bazı özellikleri verilmiştir.

5.7. Lemma: $u, v, w \in X$ için trilinear terim b aşağıdaki gibi sınırlandırılabilir:

$$|b(u, v, w)| \leq C_0(\Omega) \|\nabla u\| \|\nabla v\| \|\nabla w\|,$$

$$|b(u, v, w)| \leq C_0(\Omega) \|u\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\| \|\nabla w\|.$$

İspat: Üç fonksiyon için genelleştirilmiş Hölder eşitsizliğinden yararlanılır:

$$\int_{\Omega} |u| |v| |w| \leq \|u\|_{L^q} \|v\|_{L^p} \|w\|_{L^r}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 \leq p, q, r \leq \infty.$$

İlk eşitsizlik için $q = 2$ ve $p = r = 4$ olan genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği kullanılır.

$q = 4$, $p = \frac{1}{2}$ ve dolayısıyla $m = \frac{3}{4}$ ile Sobolev gömme teoremini ve ardından $s_1 = 0$,

$s_2 = 1$ ve $\Theta = \frac{1}{4}$ ile enterpolasyon eşitsizliği kullanılarak, L^4 -normları için bir tahmin elde edilir:

$$\|u\|_{L^4} \leq C \|u\|_{H^{\frac{3}{4}}} \leq C \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|u\|_{H^1}^{\frac{3}{4}}.$$

Poincaré eşitsizliği nedeniyle, H^1 normu ve $\|\nabla v\|_{L^2}$, H_0^1 ' da eşdeğerdir. Değerleri yerleştirilirse;

$$\begin{aligned}
|b(u, v, w)| &\leq \|u\|_{L^4} \|\nabla v\|_{L^2} \|w\|_{L^4} + \|u\|_{L^4} \|\nabla w\|_{L^2} \|v\|_{L^4} \\
&\leq C \|u\|_{L^4}^{\frac{1}{4}} \|\nabla u\|_{L^4}^{\frac{3}{4}} \|\nabla v\|_{L^2} \|w\|_{L^4}^{\frac{1}{4}} \|\nabla w\|_{L^4}^{\frac{3}{4}} + \|u\|_{L^4}^{\frac{1}{4}} \|\nabla u\|_{L^4}^{\frac{3}{4}} \|\nabla w\|_{L^2} \|v\|_{L^4}^{\frac{1}{4}} \|\nabla v\|_{L^4}^{\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

olur.

Poincaré eşitsizliğinin gradyan içermeyen terimlere bir kez daha uygulanması, istenen sonucu vermiştir. Son eşitsizlik için genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği kullanılır ve $p = 3, q = 2$ ve $r = 6$ olarak alınır. $q = 3, p = 2$ ve dolayısıyla $m = \frac{1}{2}$ ile Sobolev gömme teoremini ve ardından $s_1 = 0, s_2 = 1$ ve $\theta = \frac{1}{2}$ ile enterpolasyon eşitsizliği kullanarak, L^3 - normu için

$$\|u\|_{L^3} \leq C \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq C \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}$$

ve $q = 6, p = 2$ ve dolayısıyla $m = 1$ olan Sobolev gömme teoremini kullanarak L^6 -normu için

$$\|u\|_{L^6} \leq C \|u\|_{H^1}$$

elde edilir.

Yine yukarıda belirtilen normların denkleğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
|b(u, v, w)| &\leq \|u\|_{L^3} \|\nabla v\|_{L^2} \|w\|_{L^6} + \|u\|_{L^3} \|\nabla w\|_{L^2} \|v\|_{L^6} \\
&\leq C(\Omega) \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^2}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.



6. NAVIER-STOKES DENKLEMİ VE SAYISAL ANALİZİ

Bu bölümde, öncelikle kullanılacak olan zamana bağlı Navier Stokes denklemi ve kullanılacak olan şemalar verilecektir ve bu denklemin yarı-ayrık (semi-discrete) ve tam-ayrık (fully-discrete) yaklaşımlarının çözümlerinin kararlı olduğu gösterilecektir. Kararlılık özelliğinin bir sonucu olarak çözümlerin varlığından ve tekliğinden bahsedilecektir. Daha sonra aynı denklemin yarı-ayrık (semi-discrete) ve tam-ayrık (fully-discrete) yaklaşımlarının hata analizleri sunulacaktır.

Navier Stokes Denklemleri, çözümlerin varlığı, tekliği ve kararlılığı açısından çok karmaşık denklemlerdir. Bu denklemleri analitik olarak çözmek çok zordur ve analitik çözümleri sınırlı olduğu için sayısal çözümlere ihtiyaç duyulmuştur. Bilgisayar sistemlerindeki ilerlemeler ve sayısal algoritmalarındaki gelişmeler ile birlikte çözümlere daha rahat ulaşılabilir.

X ve Q , hız ve basınç uzayları, V uzayı X 'in alt uzayı olmak üzere şu şekilde tanımlanırlar:

$$X := H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$Q := L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx = 0 \right\}$$

$$V := \{v \in X : (q, \nabla \cdot v) = 0, \forall q \in Q\}$$

O halde $(v, q) \in (X, Q)$ için, kullanılacak olan Navier Stokes denkleminin zayıf hali aşağıda verilmiştir:

$$(u_t, v) + \nu(\nabla u, \nabla v) + b(u, u, v) - (p, \nabla \cdot v) + (\nabla \cdot u, q) = (f, v) \quad (6.1)$$

(6.1) denkleminde genel homojen dirichlet sınır şartları göz önüne alınarak analiz yapılmıştır.

6.1. Yarı Ayrık Yaklaşım ile Sayısal Analiz

Tanım 5.10'da verildiği şekilde π_h üçgenlemesi için,

$X^h \subset X, Q^h \subset Q$ ve $V^h := \{v^h \in X^h: (q^h, \nabla \cdot v^h) = 0, \forall q^h \in Q^h\}$ olsun.

Bu yaklaşım için kullanılacak şema,

$$(u_t^h, v^h) + \nu(\nabla u^h, \nabla v^h) + b(u^h, u^h, v^h) - (p^h, \nabla \cdot v^h) = (f, v^h) \quad (6.2)$$

$$(\nabla \cdot u^h, q^h) = 0 \quad (6.3)$$

şeklinde formüle edilir.

X^h üzerinde verilen şema (6.2) ve (6.3) olmak üzere, V^h üzerindeki eşdeğer formülasyonu;

$$(u_t^h, v^h) + \nu(\nabla u^h, \nabla v^h) + b(u^h, u^h, v^h) = (f, v^h) \quad (6.4)$$

şeklindedir.

6.1.1. Kararlılık analizi

6.1.1. Teorem (Çözümün Kararlılığı): $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ olsun, şema (6.2) koşulsuz olarak kararlıdır ve bulunan çözüm herhangi bir $h > 0$ ve $u^h, v^h \in X^h; p^h, q^h \in Q^h$ için aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\|u^h(T)\|^2 + \nu \|\nabla u^h\|_{L^2(0, T, L^2)}^2 \leq \nu^{-1} \|f\|_{L^2(0, T, H^{-1})}^2 + \|u^h(0)\|^2 \quad (6.5)$$

İspat: (6.4) eşitliğinde $v^h \rightarrow u^h$ alınırsa, $b(u^h, u^h, u^h) = 0$ olacağından,

$$(u_t^h, u^h) + \nu(\nabla u^h, \nabla u^h) = (f, u^h) \quad (6.6)$$

elde edilir.

(6.6) eşitliğindeki terimler ayrı ayrı incelenir:

- $(u_t^h, u^h) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^h\|^2$

- $\nu(\nabla u^h, \nabla u^h) = \nu \|\nabla u^h\|^2$
- Öncelikle Dual norm tanımı daha sonra Young eşitsizliği uygulanmıştır:

$$\begin{aligned}
 (f, v^h) &= \frac{(f, v^h)}{\|\nabla u^h\|} \|\nabla u^h\| \leq \|f\|_{-1} \|\nabla u^h\| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u^h\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{-1}^2 \\
 &\leq \frac{\nu}{2} \|\nabla u^h\|^2 + \frac{1}{2\nu} \|f\|_{-1}^2 \quad (\varepsilon = \nu \text{ için})
 \end{aligned}$$

Hesaplanan yeni terimlerin (6.6) eşitliğinde yerinde yazılmasıyla,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^h\|^2 + \nu \|\nabla u^h\|^2 &\leq \frac{\nu}{2} \|\nabla u^h\|^2 + \frac{1}{2\nu} \|f\|_{-1}^2 \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^h\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla u^h\|^2 &\leq \frac{1}{2\nu} \|f\|_{-1}^2
 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin 2 ile çarpılması sonucu

$$\frac{d}{dt} \|u^h\|^2 + \nu \|\nabla u^h\|^2 \leq \nu^{-1} \|f\|_{-1}^2$$

olur. Son olarak eşitsizliğin her iki tarafına $[0, T]$ üzerinden integral uygulanır:

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} \|u^h\|^2 + \nu \|\nabla u^h\|^2 \right) dt \leq \int_0^T \nu^{-1} \|f\|_{-1}^2 dt$$

$$\Rightarrow \|u^h(T)\|^2 - \|u^h(0)\|^2 + \nu \|\nabla u^h\|_{L^2(0,T,L^2)}^2 \leq \nu^{-1} \|f\|_{L^2(0,T,H^{-1})}^2$$

$$\Rightarrow \|u^h(T)\|^2 + \nu \|\nabla u^h\|_{L^2(0,T,L^2)}^2 \leq \nu^{-1} \|f\|_{L^2(0,T,H^{-1})}^2 + \|u^h(0)\|^2.$$

O halde istenilen (6.5) eşitsizliği elde edilmiş olur.

6.1.1. Sonuç: Yukarıda ispatlanan enerji kararlılığı teoreminin bir sonucu olarak sunulan NSD sisteminin zayıf çözümlerinin varlığı ve tekligi de dolaylı olarak gösterilmiştir [23].

6.1.2. Hata analizi

6.1.2. Teorem: (u, p) , (4.1) Navier Stokes denkleminin bir çözümü olsun. O zaman şema (6.2)'nin $e = u - u^h$ şeklinde tanımlanan hatası aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\begin{aligned} \|e\|^2 + \nu \int_0^T \|\nabla e\|^2 &\leq C e^{\int_0^T \|\nabla u(t)\|^4 dt} \cdot [\|e(0)\|^2 \\ &+ \int_0^T (h^{2k+2} \nu^{-1} \|u_t\|_{-1}^2 + h^{2k} \|\Delta u\|_{k+1}^2 + h^{2k} \|\nabla u\|^2 \|\Delta u\|_{k+1}^2 \\ &+ h^{2k} \|\nabla u^h\| \|\Delta u\|_{k+1}^2 + h^{2s} \nu^{-1} \|p\|_s^2) dt] \end{aligned} \quad (6.7)$$

İspat: Doğru çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki fark hesaplanarak hata için bir üst sınır elde edilmeye çalışılır. O halde (6.2) ve (6.4) denklemlerinin farkı hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} ((u - u^h)_t, v^h) + \nu (\nabla(u - u^h), \nabla v^h) - (p - q^h, \nabla \cdot v^h) \\ + b(u, u, v^h) - b(u^h, u^h, v^h) = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

elde edilir. Teoremde verilen $e = u - u^h$ hata tanımını (6.8) de yerine yazılır:

$$(e_t, v^h) + \nu (\nabla e, \nabla v^h) + b(u, u, v^h) - b(u^h, u^h, v^h) - (p - q^h, \nabla \cdot v^h) = 0 \quad (6.9)$$

Burada hata $\tilde{u} \in V^h$ interpolasyonu ile ayrıştırılırsa,

$$e = u - u^h = u - \tilde{u} + \tilde{u} - u^h = \mu - \phi^h; \quad u - \tilde{u} = \mu, \quad \tilde{u} - u^h = -\phi^h \quad (6.10)$$

elde edilir. $v^h \rightarrow \phi^h$ seçilerek ve (6.10) eşitliği kullanılarak (6.8) eşitliği,

$$\begin{aligned} (\mu_t, \phi^h) - (\phi_t^h, \phi^h) + \nu (\nabla \mu, \nabla \phi^h) - \nu (\nabla \phi^h, \nabla \phi^h) + b(u, u, \phi^h) - b(u^h, u^h, \phi^h) \\ - (p - q^h, \nabla \cdot \phi^h) = 0 \end{aligned}$$

şeklinde yeniden formüle edilir. Gerekli düzenlemeler ile,

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\phi_t^h, \phi^h) + \nu(\nabla\phi^h, \nabla\phi^h) \\ = (\mu_t, \phi^h) + \nu(\nabla\mu, \nabla\phi^h) + b(u, u, \phi^h) - b(u^h, u^h, \phi^h) - (p - q^h, \nabla \cdot \phi^h) \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin sol tarafı norm yardımıyla düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\phi^h\|^2 + \nu \|\nabla\phi^h\|^2 \\ = (\mu_t, \phi^h) + \nu(\nabla\mu, \nabla\phi^h) + b(u, u, \phi^h) - b(u^h, u^h, \phi^h) \\ - (p - q^h, \nabla \cdot \phi^h) \end{aligned} \quad (6.11)$$

eşitliği elde edilir. Burada eşitliğin sağ kısmının düzenlenebilmesi için terimler ayrı ayrı incelenmelidir.

1. terim için; Tanım 5.8 ve Tanım 5.9 yardımıyla gerekli düzenlemeler yapılır:

$$\frac{(\mu_t, \phi^h)}{\|\nabla\phi\|} \|\nabla\phi\| = \sup \frac{(\mu_t, \phi^h)}{\|\nabla\phi^h\|} \|\nabla\phi^h\| = \|\mu_t\|_{-1} \|\nabla\phi^h\| = \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla\phi^h\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\mu_t\|_{-1}^2 \quad (6.12)$$

2. terim için; Tanım 5.9'daki Young Eşitsizliği yardımıyla gerekli düzenlemeler yapılır:

$$\nu(\nabla\mu, \nabla\phi^h) = \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla\phi^h\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \nu \|\nabla\mu\|^2 \quad (6.13)$$

3. ve 4. terimler için; doğrusal olmayan bu terimlere $b(u^h, u, \phi^h)$ eklenip çıkarılır.

$$\begin{aligned} b(u, u, \phi^h) - b(u^h, u^h, \phi^h) \\ = b(u, u, \phi^h) - b(u^h, u, \phi^h) + b(u^h, u, \phi^h) - b(u^h, u^h, \phi^h) \\ = b(u - u^h, u, \phi^h) + b(u^h, u - u^h, \phi^h) \\ = b(\mu - \phi^h, u, \phi^h) + b(u^h, \mu - \phi^h, \phi^h) \\ = b(\mu, u, \phi^h) - b(\phi^h, u, \phi^h) + b(u^h, \mu, \phi^h) - b(u^h, \phi^h, \phi^h) \end{aligned}$$

Yapılan işlemlerin sonucunda elde edilen terimler sırasıyla düzenlenecektir.

- $b(\mu, u, \phi^h)$ terimi için Lemma 5.5 ve Tanım 5.9 kullanılır:

$$|b(\mu, u, \phi^h)| \leq C \|\nabla \mu\| \|\nabla u\| \|\nabla \phi^h\| \leq \varepsilon \|\nabla \phi^h\|^2 + C \|\nabla \mu\|^2 \|\nabla u\|^2$$

- $b(\phi^h, u, \phi^h)$ terimi için Lemma 5.5 ve $p = \frac{3}{4}$ ve $q = 4$ seçilerek Tanım 5.9 kullanılır:

$$\begin{aligned} |b(\phi^h, u, \phi^h)| &\leq C \|\phi^h\|^{1/2} \|\nabla \phi^h\|^{1/2} \|\nabla u\| \|\nabla \phi^h\| \leq C \|\phi^h\|^{1/2} \|\nabla \phi^h\|^{3/2} \|\nabla u\| \\ &\leq \varepsilon \|\nabla \phi^h\|^2 + C \|\nabla u\|^4 \|\phi^h\|^2 \end{aligned}$$

- $b(u^h, \mu, \phi^h)$ terimi için Lemma 5.5 ve Tanım 5.9 kullanılır:

$$|b(u^h, \mu, \phi^h)| \leq C \|u^h\|^{1/2} \|\nabla u^h\|^{1/2} \|\nabla \mu\| \|\nabla \phi^h\| \leq \varepsilon \|\nabla \phi^h\|^2 + C \|u^h\| \|\nabla u^h\| \|\nabla \mu\|^2$$

Kararlılık sınırından,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u^h\| + \|\nabla u^h\|_{L^2(0,T;L^2)} \leq C(f, u_0, \nu)$$

olup,

$$|b(u^h, \mu, \phi^h)| \leq \varepsilon \|\nabla \phi^h\|^2 + C \|\nabla u^h\| \|\nabla \mu\|^2$$

elde edilir.

- $b(u^h, \phi^h, \phi^h)$ terimi Lemma 5.4 yardımıyla,

$$|b(u^h, \phi^h, \phi^h)| = 0$$

olarak hesaplanır.

O halde (6.11) eşitliğindeki 3. ve 4. terimler,

$$\begin{aligned}
|b(u, u, \phi^h) - b(u^h, u^h, \phi^h)| & \\
& \leq \varepsilon \|\nabla \phi^h\|^2 + C \|\nabla \mu\|^2 \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \|\nabla \phi^h\|^2 + C \|\nabla u\|^4 \|\phi^h\|^2 + \varepsilon \|\nabla \phi^h\|^2 \\
& \quad + C \|\nabla u^h\| \|\nabla \mu\|^2 \\
& \leq 3\varepsilon \|\nabla \phi^h\|^2 + C \|\nabla \mu\|^2 \|\nabla u\|^2 + C \|\nabla u\|^4 \|\phi^h\|^2
\end{aligned} \tag{6.14}$$

şeklinde düzenlenir.

5. terim için; Tanım 5.9 kullanılır:

$$\begin{aligned}
|(p - q^h, \nabla \cdot \phi^h)| & \leq \|p - q^h\| \|\nabla \cdot \phi^h\| \\
& \leq \|p - q^h\| C \|\nabla \phi^h\| \\
& \leq \varepsilon \|\nabla \phi^h\|^2 + \frac{C}{\varepsilon} \|p - q^h\|^2
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Düzenlenen (6.12), (6.13), (6.14) ve (6.15) ifadeleri (6.11) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\phi^h\|^2 + \nu \|\nabla \phi^h\|^2 \\
& \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla \phi^h\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\mu_t\|_{-1}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla \phi^h\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \nu \|\nabla \mu\|^2 + 3\varepsilon \|\nabla \phi^h\|^2 \\
& \quad + C \|\nabla \mu\|^2 \|\nabla u\|^2 + C \|\nabla u\|^4 \|\phi^h\|^2 + C \|\nabla u^h\| \|\nabla \mu\|^2 + \varepsilon \|\nabla \phi^h\|^2 \\
& \quad + \frac{C}{\varepsilon} \|p - q^h\|^2 \\
\Rightarrow & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\phi^h\|^2 + (\nu - 5\varepsilon) \|\nabla \phi^h\|^2 \\
& \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|\mu_t\|_{-1}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \nu \|\nabla \mu\|^2 + C \|\nabla \mu\|^2 \|\nabla u\|^2 + C \|\nabla u\|^4 \|\phi^h\|^2 \\
& \quad + C \|\nabla u^h\| \|\nabla \mu\|^2 + \frac{C}{\varepsilon} \|p - q^h\|^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\varepsilon = \frac{\nu}{10}$ seçilirse,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\phi^h\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla \phi^h\|^2 \\ \leq \|\nabla u\|^4 \|\phi^h\|^2 + C\nu^{-1} \|\mu_t\|_{-1}^2 + C\|\nabla \mu\|^2 + C\|\nabla \mu\|^2 \|\nabla u\|^2 \\ + C\|\nabla u^h\| \|\nabla \mu\|^2 + C\nu^{-1} \|p - q^h\|^2 \end{aligned}$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafı 2 ile çarpılarak $[0, T]$ için Lemma 5.2'deki Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \|\phi^h\|^2 + \nu \int_0^T \|\nabla \phi^h\|^2 \leq C e^{\int_0^T \|\nabla u(t)\|^4 dt} \cdot [\|\phi^h(0)\|^2 \\ + \int_0^T (\nu^{-1} \|\mu_t\|_{-1}^2 + \|\nabla \mu\|^2 + \|\nabla \mu\|^2 \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u^h\| \|\nabla \mu\|^2) \\ + \nu^{-1} \|p - q^h\|^2) dt] \end{aligned}$$

elde edilir ve burada Lemma 5.5 uygulanır.

$$\begin{aligned} \|\phi^h\|^2 + \nu \int_0^T \|\nabla \phi^h\|^2 \leq C e^{\int_0^T \|\nabla u(t)\|^4 dt} \cdot [\|\phi^h(0)\|^2 \\ + \int_0^T (h^{2k+2} \nu^{-1} \|u_t\|_{-1}^2 + h^{2k} \|\Delta u\|_{k+1}^2 + h^{2k} \|\nabla u\|^2 \|\Delta u\|_{k+1}^2 \\ + h^{2k} \|\nabla u^h\| \|\Delta u\|_{k+1}^2 + h^{2s} \nu^{-1} \|p\|_s^2) dt] \end{aligned}$$

Son olarak yaklaşım özellikleri kullanılarak $\|e\| \leq \|\mu - \phi^h\| \leq \|\mu\| + \|\phi^h\|$ üçgen eşitsizliği hata terimlerine uygulanırsa Teorem 6.1.2'deki (6.7) eşitsizliği elde edilmiş olur.

6.2. Tam-Ayrık Yaklaşım ile Sayısal Analiz

Tanım 5.10'da verildiği şekilde π_h üçgenlemesi için,

$$X^h \subset X, Q^h \subset Q \text{ ve } V^h := \{v^h \in X^h: (q^h, \nabla \cdot v^h) = 0, \forall q^h \in Q^h\} \text{ olsun.}$$

Bu yaklaşım için kullanılacak şema,

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{\Delta t}, v^h \right) + \nu(\nabla u_{n+1}^h, \nabla v^h) + b(u_{n+1}^h, u_{n+1}^h, v^h) - (p_{n+1}^h, \nabla \cdot v^h) \\ + \alpha(\nabla u_{n+1}^h, \nabla v^h) = (f_{n+1}, v^h) \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$(\nabla \cdot u_{n+1}^h, q^h) = 0 \quad (6.17)$$

şeklinde formüle edilir. Burada $\alpha(\nabla u_{n+1}^h, \nabla v^h)$ terimi çözümün kararlılığını artıracak olan kararlılaştırma terimidir ve yapay viskoziteyi temsil etmektedir.

6.2.1. Kararlılık analizi

6.2.1. Teorem (Çözümün Kararlılığı): $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ olsun, şema (6.16) koşulsuz olarak kararlıdır ve bulunan çözüm herhangi bir $h > 0$ ve $u^h, v^h \in X^h$; $p^h, q^h \in Q^h$ için aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\|u_N^h\|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left(\frac{\nu}{2} + \alpha \right) \|\nabla u_{n+1}^h\|^2 \leq \|u_0^h\|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Delta t}{\nu} \|f_{n+1}\|_{-1}^2 \quad (6.18)$$

İspat: X^h üzerinde verilen şema (6.16) ve (6.17) olmak üzere, V^h üzerindeki eşdeğer formülasyonu;

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{\Delta t}, v^h \right) + \nu(\nabla u_{n+1}^h, \nabla v^h) + b(u_{n+1}^h, u_{n+1}^h, v^h) + \alpha(\nabla u_{n+1}^h, \nabla v^h) \\ = (f_{n+1}, v^h) \end{aligned} \quad (6.19)$$

şeklindedir.

(6.19) eşitliğinde $v^h \rightarrow u_{n+1}^h$ alınırsa Lemma 5.6'dan $b(u_{n+1}^h, u_{n+1}^h, u_{n+1}^h) = 0$ olacağından, denklem

$$\left(\frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{\Delta t}, u_{n+1}^h \right) + \nu(\nabla u_{n+1}^h, \nabla u_{n+1}^h) + \alpha(\nabla u_{n+1}^h, \nabla u_{n+1}^h) = (f_{n+1}, u_{n+1}^h)$$

halini alır. Burada öncelikle denklemin her iki tarafı Δt ile çarpılır ve sonra terimler düzenlenirse,

$$\begin{aligned} (u_{n+1}^h, u_{n+1}^h) - (u_n^h, u_{n+1}^h) + \Delta t v (\nabla u_{n+1}^h, \nabla u_{n+1}^h) + \Delta t \alpha (\nabla u_{n+1}^h, \nabla u_{n+1}^h) \\ = \Delta t (f_{n+1}, u_{n+1}^h) \\ \Rightarrow \|u_{n+1}^h\|^2 + \Delta t (v + \alpha) \|\nabla u_{n+1}^h\|^2 = (u_n^h, u_{n+1}^h) + \Delta t (f_{n+1}, u_{n+1}^h) \end{aligned} \quad (6.20)$$

olur.

(6.20) eşitliğindeki terimler ayrı ayrı incelenir:

- Sırasıyla Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizlikleri uygulanır:

$$(u_n^h, u_{n+1}^h) \leq \|u_n^h\| \|u_{n+1}^h\| \leq \frac{1}{2} \|u_n^h\|^2 + \frac{1}{2} \|u_{n+1}^h\|^2$$

- Öncelikle Dual Norm tanımı, daha sonra sırasıyla Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizlikleri uygulanır:

$$\begin{aligned} \Delta t (f_{n+1}, u_{n+1}^h) &= \frac{\Delta t (f_{n+1}, u_{n+1}^h)}{\|\nabla u_{n+1}^h\|} \|\nabla u_{n+1}^h\| \\ &\leq \Delta t \|f_{n+1}\|_{-1} \|\nabla u_{n+1}^h\| \\ &\leq \frac{\Delta t v}{2} \|\nabla u_{n+1}^h\|^2 + \frac{1}{2v} \Delta t \|f_{n+1}\|_{-1}^2 \end{aligned}$$

Hesaplanan terimler (6.20)'da yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}^h\|^2 + \Delta t (v + \alpha) \|\nabla u_{n+1}^h\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|u_n^h\|^2 + \frac{1}{2} \|u_{n+1}^h\|^2 + \frac{\Delta t v}{2} \|\nabla u_{n+1}^h\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2v} \Delta t \|f_{n+1}\|_{-1}^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \|u_{n+1}^h\|^2 + \Delta t \left(\frac{v}{2} + \alpha\right) \|\nabla u_{n+1}^h\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|u_n^h\|^2 + \frac{\Delta t}{2v} \|f_{n+1}\|_{-1}^2 \end{aligned} \quad (6.21)$$

eşitsizliği elde edilir.

(6.21) eşitsizliğinde $n = 0, 1, \dots, N - 1$ zaman aralığı için toplam alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_N^h\|^2 + \Delta t \left(\frac{\nu}{2} + \alpha \right) \|\nabla u_1^h\|^2 + \dots + \frac{\Delta t \nu}{2} \|\nabla u_N^h\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|u_0^h\|^2 + \frac{\Delta t}{2\nu} \|f_1\|_{-1}^2 \\ &+ \frac{\Delta t}{2\nu} \|f_2\|_{-1}^2 + \dots + \frac{\Delta t}{2\nu} \|f_N\|_{-1}^2 \\ \Rightarrow \|u_N^h\|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left(\frac{\nu}{2} + \alpha \right) \|\nabla u_{n+1}^h\|^2 &\leq \|u_0^h\|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Delta t}{\nu} \|f_{n+1}\|_{-1}^2 \end{aligned}$$

olur. O halde Teorem 6.2.1'de istenilen (6.18) eşitsizliği elde edilmiştir.

6.2.2. Hata analizi

Ayrık inf-sup koşulunun yanı sıra hız-basınç uzaylarının seçilebilmesi için Lemma 5.5'deki yaklaşımların da geçerli olduğu varsayılır. Ayrıca aşağıdaki normlar da kabul edilir.

$$\|v\|_{\infty, k} := \max_{0 \leq n \leq N_T} \|v_n\|_k$$

$$\|v\|_{p, k} := \left(\Delta t \sum_{n=0}^{N_T} \|v_n\|_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Düzenlilik varsayımları

$$u \in L^4(0, T; H^{k+1}(\Omega)) \cap L^4(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

$$p \in L^2(0, T; H^{s+1}(\Omega))$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

şeklindedir.

6.2.2. Teorem (Hata Analizi): (u, p) , (4.1) Navier Stokes denkleminin bir çözümü olsun. O zaman şema (6.16)'nın $e_{n+1} = u_{n+1} - u_{n+1}^h$ şeklinde tanımlanan hatası aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\begin{aligned}
& \|e_N\|^2 + \Delta t(\nu + \alpha) \sum_{n=0}^{N-1} \|e_{n+1}\|^2 \\
& \leq \left[C\nu^{-1}\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left((\Delta t)^{-1}h^{2k+2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_t\|_{k+1}^2 dt + h^{2k} \|\nabla u_{n+1}\|^2 \|u\|_{k+1}^2 \right. \right. \\
& \quad + h^{2k} \|\nabla u_{n+1}^h\|^2 \|u\|_{k+1}^2 + h^{2k} \|p_{n+1}\|_k^2 + (\Delta t)^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{tt}\|^2 dt \\
& \quad + (\Delta t)^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{tt}\|^2 dt (\|\nabla u_{n+1}\|^2 + \|\nabla u\|^2) + (\Delta t)^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|p_{tt}\|^2 dt \\
& \quad \left. + (\Delta t)^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|f_{tt}\|^2 dt \right) + C\nu\Delta t h^{2k} \|u\|_{k+1}^2 + C\nu(\Delta t)^4 \|\nabla u_{tt}\|^2 \\
& \quad \left. + \alpha\Delta t (h^{2k} \|u\|_{k+1}^2 + \|\nabla u_{n+1}\|^2) \right] \exp(C\nu^{-3}\Delta t \|\nabla u_{n+1}\|^4) \quad (6.22)
\end{aligned}$$

İspat: Gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki fark hesaplanarak hata için bir üst sınır elde edilmeye çalışılır. Navier Stokes denklemlerinin (6.1) gerçek çözümünde $t \rightarrow t_{n+1}$ yazılarak ve $\alpha(\nabla u_{n+1}, \nabla v^h)$ kararlaştırma terimi eklenip çıkarılarak,

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t}, v^h \right) + \nu(\nabla u_{n+1}, \nabla v^h) + b(u_{n+1}, u_{n+1}, v^h) - (p_{n+1}, \nabla \cdot v^h) + (\nabla \cdot u_{n+1}, q^h) \\
& \quad + \alpha(\nabla u_{n+1}, \nabla v^h) = (f_{n+1}, v^h) + \alpha(\nabla u_{n+1}, \nabla v^h) \quad (6.23)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

(6.23) eşitliğinden (6.16)'daki şema çıkarılır ve $e_{n+1} = u_{n+1} - u_{n+1}^h$ uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{e_{n+1} - e_n}{\Delta t}, v^h \right) + \nu(\nabla e_{n+1}, \nabla v^h) + b(u_{n+1}, u_{n+1}, v^h) - b(u_{n+1}^h, u_{n+1}^h, v^h) \\ & - (p_{n+1} - q^h, \nabla \cdot v^h) + \alpha(\nabla e_{n+1}, \nabla v^h) = \tau(u_n, v^h) \end{aligned} \quad (6.24)$$

elde edilir. Burada $\tau(u_n, v^h)$ terimi, artık terimlerden oluşan tutarlılık hatasını ifade etmektedir ve

$$\begin{aligned} \tau(u_n, v^h) &= \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} - u_t, v^h \right) - (p_{n+1} - p, \nabla \cdot v^h) + (f - f_{n+1}, v^h) \\ &+ \nu(\nabla(u_{n+1} - u_n), \nabla v^h) + b(u_{n+1} - u_n, u_{n+1}, v^h) + b(u, u_{n+1} - u, v^h) \\ &+ \alpha(\nabla u_{n+1}, \nabla v^h) \end{aligned}$$

şeklinde formüle edilir.

(6.24) eşitliğin sol tarafına $b(u_{n+1}^h, u_{n+1}, v^h)$ eklenip çıkarılırsa doğrusal olmayan terimler,

$$\begin{aligned} & b(u_{n+1}, u_{n+1}, v^h) - b(u_{n+1}^h, u_{n+1}, v^h) + b(u_{n+1}^h, u_{n+1}, v^h) - b(u_{n+1}^h, u_{n+1}^h, v^h) \\ &= b(e_{n+1}, u_{n+1}, v^h) - b(u_{n+1}^h, e_{n+1}, v^h) \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenir.

O halde (6.24) hata denkleminde $v^h \rightarrow \phi_{n+1}^h$ seçilmesi ve

$$e_{n+1} = u_{n+1} - u_{n+1}^h = u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1} + \tilde{u}_{n+1} - u_{n+1}^h = \mu_{n+1} - \phi_{n+1}^h$$

ayrıştırması ile denklem

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\phi_{n+1}^h - \phi_n^h}{\Delta t}, \phi_{n+1}^h \right) + \nu(\nabla \phi_{n+1}^h, \nabla \phi_{n+1}^h) + b(\phi_{n+1}^h, u_{n+1}, \phi_{n+1}^h) + (p_{n+1} - q^h, \nabla \cdot \phi_{n+1}^h) \\ &+ \alpha(\nabla \phi_{n+1}^h, \nabla \phi_{n+1}^h) \\ &= \left(\frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\Delta t}, \phi_{n+1}^h \right) + \nu(\nabla \mu_{n+1}, \nabla \phi_{n+1}^h) + b(\mu_{n+1}, u_{n+1}, \phi_{n+1}^h) \\ &+ b(u_{n+1}^h, \mu_{n+1}, \phi_{n+1}^h) + \alpha(\nabla \mu_{n+1}, \nabla \phi_{n+1}^h) + \tau(u_n, \phi_{n+1}^h) \end{aligned} \quad (6.25)$$

olur.

(6.25)'de elde edilen ilk terim için, $a^2 - ab = \frac{a^2 + (a-b)^2 - b^2}{2}$ eşitliği kullanılarak,

$$(\phi_{n+1}^h - \phi_n^h, \phi_{n+1}^h) = \frac{1}{2} \left(\|\phi_{n+1}^h\|^2 + \|\phi_{n+1}^h - \phi_n^h\|^2 - \|\phi_n^h\|^2 \right)$$

düzenlemesi yapılır. Yapılan bu düzenleme ve norm tanımı yardımı ile (6.25) denklemi,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} \left(\|\phi_{n+1}^h\|^2 + \|\phi_{n+1}^h - \phi_n^h\|^2 - \|\phi_n^h\|^2 \right) + \nu \|\nabla \phi_{n+1}^h\|^2 + \alpha \|\nabla \phi_{n+1}^h\|^2 \\ &= \left(\frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\Delta t}, \phi_{n+1}^h \right) + \nu (\nabla \mu_{n+1}, \nabla \phi_{n+1}^h) + b(\mu_{n+1}, u_{n+1}, \phi_{n+1}^h) \\ &+ b(u_{n+1}^h, \mu_{n+1}, \phi_{n+1}^h) - b(\phi_{n+1}^h, u_{n+1}, \phi_{n+1}^h) - (p_{n+1} - q^h, \nabla \cdot \phi_{n+1}^h) \\ &+ \alpha (\nabla \mu_{n+1}, \nabla \phi_{n+1}^h) + \tau(u_n, \phi_{n+1}^h) = T_1 + T_2 + \dots + T_8 \end{aligned} \quad (6.26)$$

halini alır. Eşitliğin sağ tarafında elde edilen terimler sırasıyla T_1, T_2, \dots, T_8 olarak adlandırılmıştır çünkü her terim ayrı ayrı incelenerek gerekli düzenlemeler yapılacaktır.

T_1 : Sırasıyla Cauchy Schwarz ve Young eşitsizliği uygulanır.

$$\left(\frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\Delta t}, \phi_{n+1}^h \right) \leq \frac{1}{\Delta t} \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mu_t dt \right\| \|\phi_{n+1}^h\| \leq \frac{C\nu^{-1}}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mu_t\|^2 dt + \frac{\nu}{24} \|\nabla \phi_{n+1}^h\|^2$$

T_2 : Young eşitsizliği uygulanır.

$$\nu (\nabla \mu_{n+1}, \nabla \phi_{n+1}^h) \leq C\nu \|\nabla \mu_{n+1}\|^2 + \frac{\nu}{24} \|\nabla \phi_{n+1}^h\|^2$$

T_3 : Önce Lemma 5.5 sonra Young eşitsizliği uygulanır.

$$b(\mu_{n+1}, u_{n+1}, \phi_{n+1}^h) \leq C\nu^{-1} \|\nabla u_{n+1}\|^2 \|\nabla \mu_{n+1}\|^2 + \frac{\nu}{24} \|\nabla \phi_{n+1}^h\|^2$$

T_4 : Önce Lemma 5.5 sonra Young eşitsizliği uygulanır.

$$b(u_{n+1}^h, \mu_{n+1}, \phi_{n+1}^h) \leq C\nu^{-1} \|\nabla u_{n+1}^h\|^2 \|\nabla \mu_{n+1}\|^2 + \frac{\nu}{24} \|\nabla \phi_{n+1}^h\|^2$$

T_5 : Önce Lemma 5.5 sonra Young eşitsizliği uygulanır.

$$b(\phi_{n+1}^h, u_{n+1}, \phi_{n+1}^h) \leq C\nu^{-3} \|\phi_{n+1}^h\|^2 \|\nabla u_{n+1}\|^4 + \frac{\nu}{24} \|\nabla \phi_{n+1}^h\|^2$$

T_6 : Young eşitsizliği uygulanır.

$$(p_{n+1} - q^h, \nabla \cdot \phi_{n+1}^h) \leq C\nu^{-1} \|p_{n+1} - q^h\|^2 + \frac{\nu}{24} \|\nabla \phi_{n+1}^h\|^2$$

T_7 : Young eşitsizliği uygulanır.

$$\alpha(\nabla \mu_{n+1}, \nabla \phi_{n+1}^h) \leq C\alpha \|\nabla \mu_{n+1}\|^2 + \frac{\alpha}{4} \|\nabla \phi_{n+1}^h\|^2$$

T_8 : $\tau(u_n, \phi_{n+1}^h)$ ifadesinde verilen terimler S_1, S_2, \dots, S_7 olarak adlandırıp ayrı ayrı incelenir.

$$\begin{aligned} \tau(u_n, \phi_{n+1}^h) &= \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} - u_t, \phi_{n+1}^h \right) + \nu(\nabla(u_{n+1} - u_n), \nabla \phi_{n+1}^h) \\ &\quad + b(u_{n+1} - u_n, u_{n+1}, \phi_{n+1}^h) + b(u, u_{n+1} - u, \phi_{n+1}^h) \\ &\quad - (p_{n+1} - p, \nabla \cdot \phi_{n+1}^h) + (f - f_{n+1}, \phi_{n+1}^h) + \alpha(\nabla u_{n+1}, \nabla \phi_{n+1}^h) \\ &= S_1 + S_2 + \dots + S_7 \end{aligned}$$

S_1 : Taylor Seri açılımı ve Young eşitsizliği uygulanır.

$$\left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} - u_t, \phi_{n+1}^h \right) \leq C\nu^{-1} (\Delta t)^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{tt}\|^2 dt + \frac{\nu}{24} \|\nabla \phi_{n+1}^h\|^2$$

S_2 : Taylor Seri açılımı ve Young eşitsizliği uygulanır.

$$\begin{aligned} v(\nabla(u_{n+1} - u_n), \nabla\phi_{n+1}^h) &\leq Cv\|\nabla(u_{n+1} - u_n)\|^2 + \frac{v}{24}\|\nabla\phi_{n+1}^h\|^2 \\ &\leq Cv(\Delta t)^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla u_{tt}\|^2 dt + \frac{v}{24}\|\nabla\phi_{n+1}^h\|^2 \end{aligned}$$

S_3 : Taylor Seri açılımı ve Young eşitsizliği uygulanır.

$$b(u_{n+1} - u_n, u_{n+1}, \phi_{n+1}^h) \leq Cv^{-1}(\Delta t)^3 \|\nabla u_{n+1}\|^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{tt}\|^2 dt + \frac{v}{24}\|\nabla\phi_{n+1}^h\|^2$$

S_4 : Taylor Seri açılımı ve Young eşitsizliği uygulanır.

$$b(u, u_{n+1} - u, \phi_{n+1}^h) \leq Cv^{-1}(\Delta t)^3 \|\nabla u\|^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{tt}\|^2 dt + \frac{v}{24}\|\nabla\phi_{n+1}^h\|^2$$

S_5 : Taylor Seri açılımı ve Young eşitsizliği uygulanır.

$$(p_{n+1} - p, \nabla \cdot \phi_{n+1}^h) \leq Cv^{-1}(\Delta t)^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|p_{tt}\|^2 dt + \frac{v}{24}\|\nabla\phi_{n+1}^h\|^2$$

S_6 : Taylor Seri açılımı ve Young eşitsizliği uygulanır.

$$\begin{aligned} (f - f_{n+1}, \phi_{n+1}^h) &\leq Cv^{-1}\|f - f_{n+1}\|^2 + \frac{v}{24}\|\nabla\phi_{n+1}^h\|^2 \\ &\leq Cv^{-1}(\Delta t)^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|f_{tt}\|^2 dt + \frac{v}{24}\|\nabla\phi_{n+1}^h\|^2 \end{aligned}$$

S_7 : Young eşitsizliği uygulanır.

$$\alpha(\nabla u_{n+1}, \nabla \phi_{n+1}^h) \leq C\alpha \|\nabla u_{n+1}\|^2 + \frac{\alpha}{4} \|\nabla \phi_{n+1}^h\|^2$$

Elde edilen bütün terimler (6.26) eşitliğinde yerlerine yazılarak ve eşitliğin sol tarafındaki negatif olmayan terim çıkarılarak düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} \|\phi_{n+1}^h\|^2 - \frac{1}{2\Delta t} \|\phi_n^h\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla \phi_{n+1}^h\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \phi_{n+1}^h\|^2 \\ & \leq C\nu^{-1} \left[(\Delta t)^{-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mu_t\|^2 dt + \|\nabla u_{n+1}\|^2 \|\nabla \mu_{n+1}\|^2 + \|\nabla u_{n+1}^h\|^2 \|\nabla \mu_{n+1}\|^2 \right. \\ & \quad + \|p_{n+1} - q^h\|^2 + (\Delta t)^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{tt}\|^2 dt \\ & \quad + (\Delta t)^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{tt}\|^2 dt (\|\nabla u_{n+1}\|^2 + \|\nabla u\|^2) + (\Delta t)^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|p_{tt}\|^2 dt \\ & \quad \left. + (\Delta t)^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|f_{tt}\|^2 dt \right] + C\nu \|\nabla \mu_{n+1}\|^2 + C\nu^{-3} \|\phi_{n+1}^h\|^2 \|\nabla u_{n+1}\|^4 \\ & \quad + C\alpha (\|\nabla \mu_{n+1}\|^2 + \|\nabla u_{n+1}\|^2) + C\nu (\Delta t^3) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla u_{tt}\|^2 dt \end{aligned} \quad (6.27)$$

olur. (6.27) eşitsizliği $2\Delta t$ ile çarpılıp Lemma 5.5 uygulanır:

$$\begin{aligned}
& \|\phi_{n+1}^h\|^2 - \|\phi_n^h\|^2 + \Delta t(\nu + \alpha)\|\nabla\phi_{n+1}^h\|^2 \\
& \leq C\nu^{-1}\Delta t \left[(\Delta t)^{-1}h^{2k+2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_t\|_{k+1}^2 dt + h^{2k}\|\nabla u_{n+1}\|^2\|u\|_{k+1}^2 \right. \\
& \quad + h^{2k}\|\nabla u_{n+1}^h\|^2\|u\|_{k+1}^2 + h^{2k}\|p_{n+1}\|_k^2 + (\Delta t)^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{tt}\|^2 dt \\
& \quad + (\Delta t)^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{tt}\|^2 dt (\|\nabla u_{n+1}\|^2 + \|\nabla u\|^2) + (\Delta t)^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|p_{tt}\|^2 dt \\
& \quad \left. + (\Delta t)^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|f_{tt}\|^2 dt \right] + C\nu\Delta th^{2k}\|u\|_{k+1}^2 + C\nu^{-3}\Delta t\|\phi_{n+1}^h\|^2\|\nabla u_{n+1}\|^4 \\
& \quad + \alpha\Delta t(h^{2k}\|u\|_{k+1}^2 + \|\nabla u_{n+1}\|^2) + C\nu(\Delta t^3)\Delta t \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla u_{tt}\|^2 dt \quad (6.28)
\end{aligned}$$

(6.28) eşitsizliğinde $n = 0, 1, \dots, N - 1$ zaman aralığı için toplam alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \|\phi_N^h\|^2 + \Delta t(\nu + \alpha) \sum_{n=0}^{N-1} \|\nabla\phi_{n+1}^h\|^2 \\
& \leq \left[C\nu^{-1}\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left((\Delta t)^{-1}h^{2k+2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_t\|_{k+1}^2 dt + h^{2k}\|\nabla u_{n+1}\|^2\|u\|_{k+1}^2 \right. \right. \\
& \quad + h^{2k}\|\nabla u_{n+1}^h\|^2\|u\|_{k+1}^2 + h^{2k}\|p_{n+1}\|_k^2 + (\Delta t)^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{tt}\|^2 dt \\
& \quad + (\Delta t)^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{tt}\|^2 dt (\|\nabla u_{n+1}\|^2 + \|\nabla u\|^2) + (\Delta t)^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|p_{tt}\|^2 dt \\
& \quad \left. \left. + (\Delta t)^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|f_{tt}\|^2 dt \right) + C\nu\Delta th^{2k}\|u\|_{k+1}^2 + C\nu(\Delta t)^4\|\nabla u_{tt}\|^2 \right. \\
& \quad \left. + \alpha\Delta t(h^{2k}\|u\|_{k+1}^2 + \|\nabla u_{n+1}\|^2) \right] \exp(C\nu^{-3}\Delta t\|\nabla u_{n+1}\|^4) \quad (6.29)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak yaklaşım özellikleri kullanılarak,

$\|e_{n+1}\| \leq \|\mu_{n+1} - \phi_{n+1}^h\| \leq \|\mu_{n+1}\| + \|\phi_{n+1}^h\|$ üçgen eşitsizliği hata terimlerine uygulanırsa Teorem 6.2.2'deki (6.22) eşitsizliği elde edilmiş olur.

6.2.1. Sonuç: Teorem 6.2.2'de elde edilen hata yaklaşımı optimal bir hata yaklaşımıdır. Örneğin $k = 2$ seçilecek olursa, (P^2, P^1) polinom seçimlerine göre hatanın mertebesi 2 olur ki bu da beklenen mertebedir. Ayrıca $h, \Delta t, \alpha \rightarrow 0$ iken $u \rightarrow u_h$ olduğu da teorem ifadesinden açıktır.





7. SAYISAL DENEYLER

Bu bölümde, teorik sonuçları doğrulamak için bazı simülasyonlar sunulmuştur. Sayısal test, ele aldığımız (6.16)'daki şemanın yakınsama davranışını ortaya çıkarmak ve Teorem 6.2.2'de elde edilen sonucu doğrulamak amacıyla yapılmıştır.

Stenoz (kanal darlığı) ve anevrizma gibi kardiyovasküler sistemin farklı tipteki patolojilerinin kan akışına olan etkisi Navier Stokes denklemleri yardımıyla araştırılarak modellenmiştir.

Bu tezde tüm simülasyonlar herkese açık lisanslı bir sonlu eleman yazılım paketi olan FreeFem++ [24] kullanılarak yapılmıştır.

Deneysel, kan ve vücut sıcaklığının sabit olduğu, kanın sıkıştırılmaz bir sıvı olduğu, kan yoğunluğunun (ρ), 1060 kg/m^3 ile sabit olduğu, kan viskozitesinin (ν), $0,0035 \text{ mPa.s}$ ile sabit olduğu, kanın Newtonyen bir sıvı olduğu varsayılmaktadır. Arter duvarlarında kaymaz sınır koşulu uygulanmaktadır. Giriş hızı $c = Rev/\rho l$ olarak alınmaktadır. Burada l lümen çapını, Re kontrol parametresi olan Reynolds sayısını ifade etmektedir.

İlk önce uzaysal hatanın mertebesi incelenmiştir. Burada Sonuç 6.2.1'de bahsedilen $k=2$ olduğunda hata için beklenen mertebeye 2 'dir. Model problem hesaplama bölgesi $\Omega = (0,1)^2$ dir. Hesap bölgesi, çeşitli kaba ağ çözünürlüğü ile üçgenlenmiştir. Farklı h seçimleri, yakınsama oranlarını doğrulamak ve modeller arasındaki hataları karşılaştırmak için yeterli olmuştur. Yakınsayan çözüm $[0,1]$ zaman aralığında hesaplanmıştır. Uzaysal hatanın etkisini en aza indirmek ve hata üzerindeki zamansal etkiyi tam olarak ortaya çıkarmak için $\Delta t = 0.000625$ alınmıştır. $\nu = 1$ ve $\alpha = 0,01$ için hatanın H_1 normları değerlendirilmiştir. Bu test problemi için gerçek hız ve basınç değişkenleri aşağıdaki gibi ele alınmıştır:

$$u = \begin{bmatrix} e^t \cos(y) \\ e^t \sin(x) \end{bmatrix}, p = (x - y)(1 + t).$$

Bu değerler (4.1)'de yerine yazılarak f fonksiyonu elde edilmiştir. f 'nin hesaplanmasında Wolfram Mathematica [25] programından faydalanılmıştır. Sayısal çözümün sonuçları farklı h değerleri için izelge 7.1'de verilmiştir.

Çizelge 7.1. Yakınsama testi sonuçlarındaki hız hataları ve oranları

h	$\ \nabla(u - u^h)\ $	Oran
2^{-1}	6,46611e-4	-
2^{-2}	1,57286e-4	2,03
2^{-3}	3,85477e-5	2,02
2^{-4}	9,56907e-6	2,01
2^{-5}	2,38566e-6	2,00
2^{-6}	5,96731e-7	2,00

Bu çizelgeden de görüldüğü üzere, uzaysal anlamda yakınsama derecesi 2'dir ve beklenen optimal yakınsama derecesidir.

Benzer şekilde zamansal hatanın derecesini bulmak için aynı bölgede aynı özel çözüm fonksiyonları ve sağ taraf kullanılarak bu kez sabit bir $h = 2^{-6}$ ağ kalınlığı alınmış ve $[0,1]$ zaman aralığında değişen Δt değerlerine göre hatalar kıyaslanarak zamansal hata ayırt edilmiştir. Elde edilen sonuçlar izelge 7.2'de sunulmuştur.

Çizelge 7.2. Farklı zaman aralıklarındaki hız hataları ve oranları

Δt	$\ \nabla(u - u^h)\ $	Oran
2^{-1}	1,98947e-1	-
2^{-2}	1,70164e-2	3,55
2^{-3}	2,91767e-3	2,54
2^{-4}	7,37701e-4	1,98
2^{-5}	2,17324e-4	1,76

Görüldüğü üzere zamansal boyutta da optimal hata derecesi olan 1'e fazlasıyla ulaşılmıştır.

Verilen çizelgelerden de görüldüğü üzere Teorem 6.2.2'de elde edilen teorik yakınsama oranları model bir problem üzerinde de doğrulanmış olup, çalışmada tanımlanan algoritmanın doğruluğu ve etkinliği sayısal olarak göz önüne konulmuştur.

Şimdi farklı Reynolds değerleri için hesaplanan hata oranlarına α kararlılaştırma teriminin etkisi Çizelge 7.3 ile Çizelge 7.4’de karşılaştırılacaktır.

Çizelge 7.3. $\alpha = 0$ için Re sayılarına göre hatalar

Reynolds Sayısı	Hata
100	0,0903558
200	0,140067
300	0,186865
400	0,233123
500	0,27908

Çizelge 7.4. $\alpha = 0,01$ için Re sayılarına göre hatalar

Reynolds Sayısı	Hata
100	0,0797131
200	0,11151
300	0,134197
400	0,151754
500	0,165875

Çizelge 7.3 ile Çizelge 7.4’ten anlaşılacağı üzere yapılan karşılaştırma sonucu yapay viskoziteyi temsil eden α parametresinin eklenmesi ile hatanın azaldığı görülmüştür. O halde sayısal deneylerde α parametresinin göz önüne alınmasının gerçeğe daha yakın ve doğru sonuçlar vereceği açıktır.

7.1. Boğumlu Damarlarda Sayısal Deneyler

Bölüm 3.1’de anlatılan kardiyovasküler sistem hastalıklarından olan Ateroskleroz (damar sertliği-tıkanıklığı), boğumlu damarlara örnek olarak verilebilir. Bu bölümde, çift boğumlu ve tek boğumlu damarlardaki kan akışı ayrı ayrı ele alınacaktır.

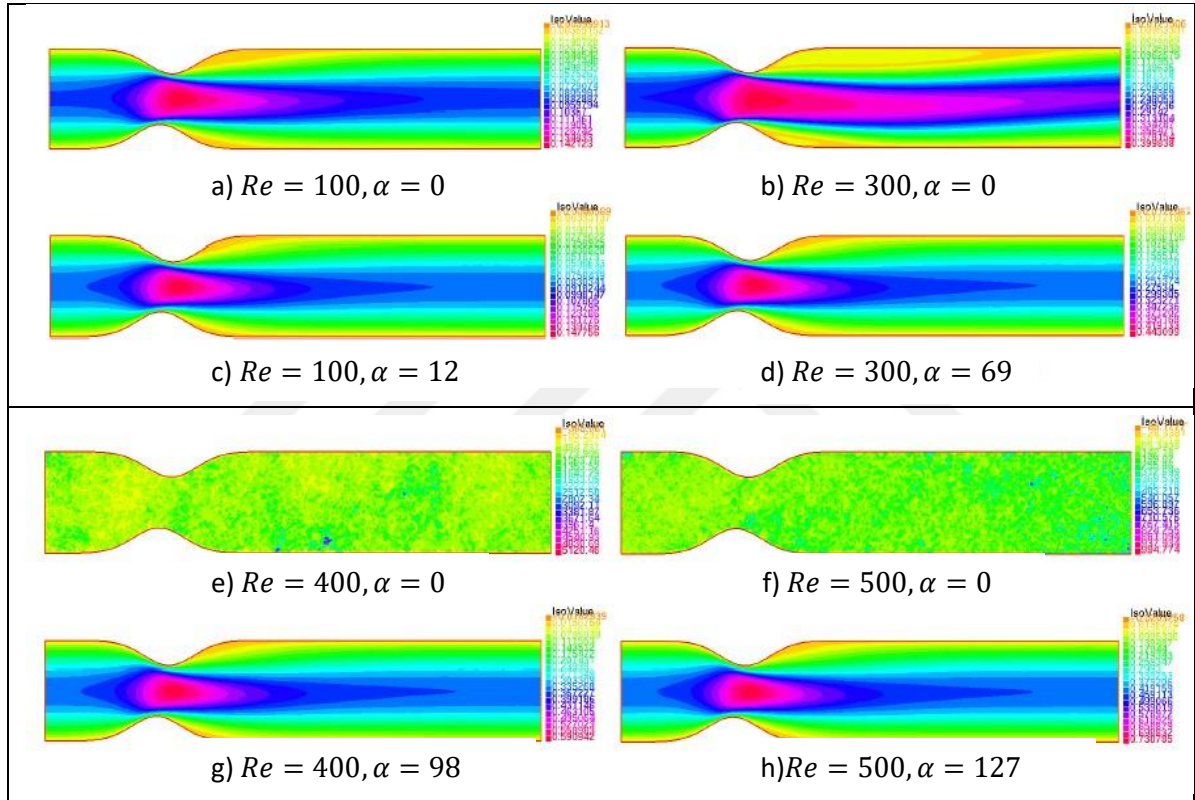
7.1.1. Çift boğumlu damarlarda sayısal deneyler

Damarda plak oluşumu sonucu damarın alt ve üst yüzeyinde karşılıklı veya karşılıklı olmayacak şekilde boğumlar yani sertlikler meydana gelebilir. Bu durum kan akışını olumsuz yönde etkilemektedir. Yapılan sayısal deneylerde kararlılaştırma terimi ile birlikte gerçek kan akışına en yakın ve en doğru çözümler elde edilmeye çalışılmıştır. Bunun için

farklı Reynolds değerlerine göre incelemeler yapılarak en doğru sonucu verecek α parametreleri seçilmiştir. Şimdi bazı durumlar ayrı başlıklar altında incelenecektir.

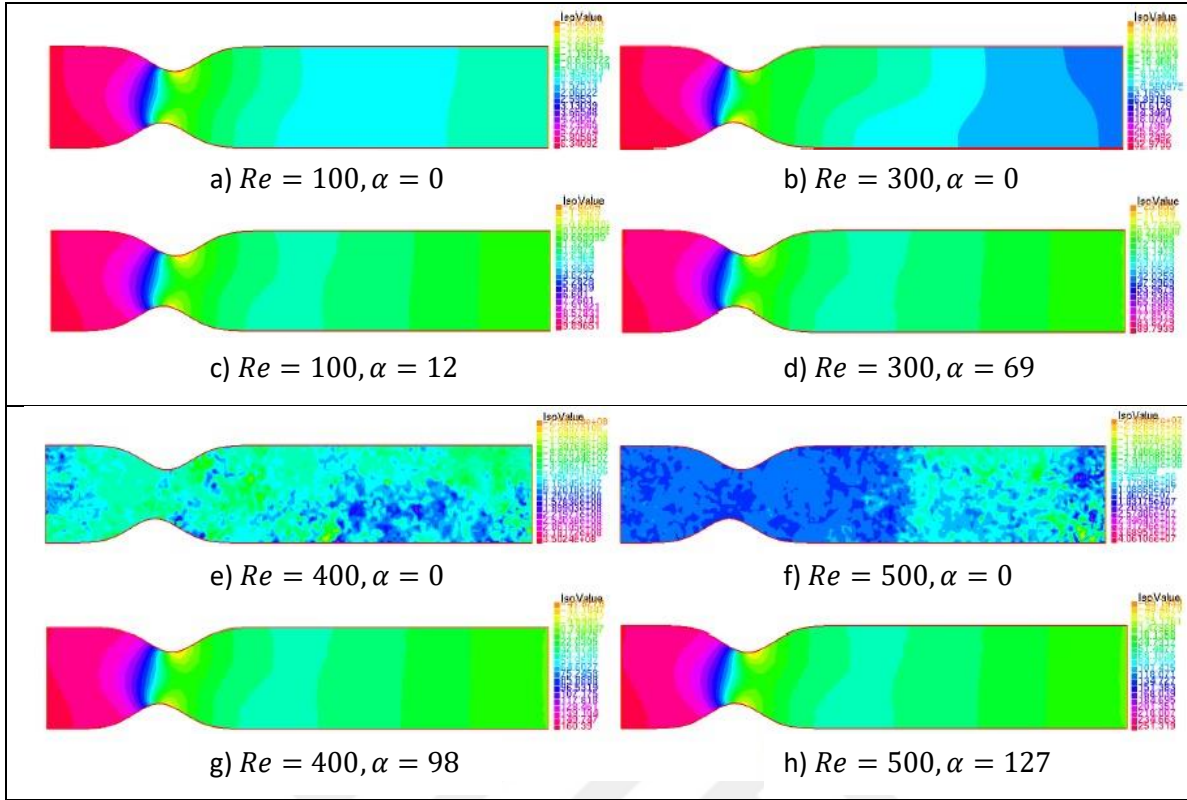
Çift boğumlu damarlarda kararlılaştırma teriminin etkisi:

Bu bölümde α kararlılaştırma teriminin, kan akışının hızını ve basıncını analiz etmek için yapılan çözümlerdeki etkisinden ve yine bu terimin nasıl seçildiğinden bahsedilecektir.



Şekil 7.1. Farklı Reynolds değerleri için α kararlılaştırma teriminin çift boğumlu damardaki kan akış hızına etkisinin karşılaştırılması

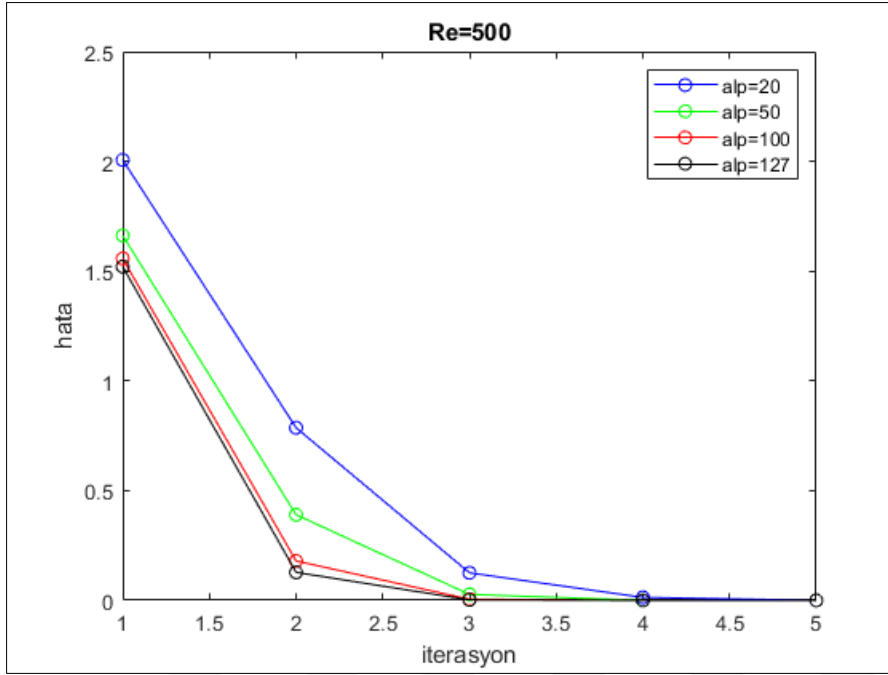
Şekil 7.1'den anlaşılacağı gibi α kararlılaştırma terimi kan akışının hızını analiz ederken çözüm üzerinde oldukça etkili olmaktadır. Reynolds sayısı 100 iken gerçek çözüm ve yapay viskozite ile kararlılaştırılmış çözüm arasında çok fazla fark görülmemektedir ancak Reynolds sayısı büyüdükçe çözüm doğru ve anlaşılır sonuçlar vermemeye başlamaktadır. Örneğin, Şekil 7.1'de belirtilen f) gösterimi, kararlılaştırılmamış bir çözümün doğru ve anlaşılır sonuçlar vermediğini gösterirken; h) gösterimi, aynı Reynolds sayısı üzerinde yapay viskozitenin nasıl etkili olduğunu aynı zamanda doğru, anlaşılır ve gerçeğe en yakın sonuçlar elde edildiğini göstermektedir.



Şekil 7.2. Farklı Reynolds değerleri için α kararlılaştırma teriminin çift boğumlu damardaki kan basıncına etkisinin karşılaştırılması

Şekil 7.1’de anlatılan kan akış hızı durumundaki gibi Şekil 7.2’de de kan akışının basıncını analiz ederken yapay viskozitenin çözüm üzerinde oldukça etkili olduğu görülmektedir. Reynolds sayısı 100 iken gerçek çözümle karşılaştırılmış çözüm arasında çok fazla fark görülmezken Reynolds sayısı büyüdükçe çözüm doğru ve anlaşılır sonuçlar vermemeye başlamaktadır. Örneğin, Şekil 7.2’de belirtilen f) gösteriminden karşılaştırılmamış bir çözümün doğru ve anlaşılır sonuçlar vermediği anlaşılırken; h) gösterimi ile aynı Reynolds sayısı üzerinde α kararlılaştırma teriminin nasıl etkili olduğu aynı zamanda doğru, anlaşılır ve gerçeğe en yakın sonuçlar elde edildiği görülmektedir.

Şekil 7.3’te, α kararlılaştırma teriminin etkisini açıklamak için farklı α değerlerinin $Re = 500$ ’deki hataları gösterilmiştir.



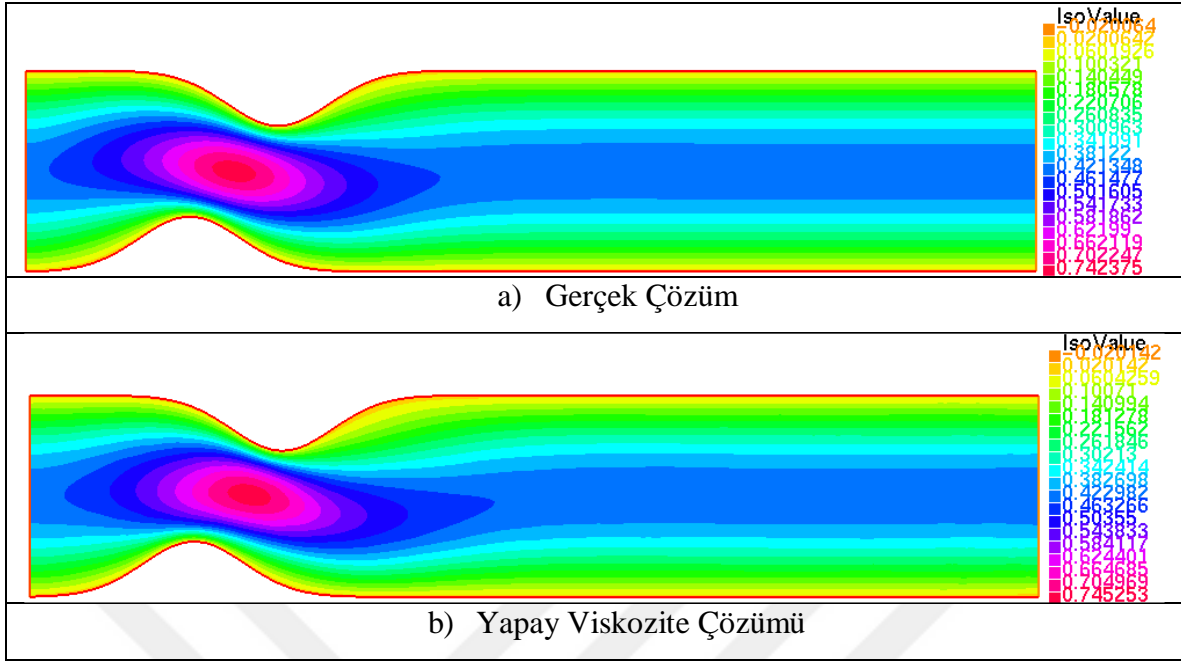
Şekil 7.3. $Re = 500$ için farklı α değerlerinde hata

Belirli bir Re sayısı için farklı α değerleri ile iterasyonlar elde edilir. Bu iterasyonlar sonucunda meydana gelen hata oranları göz önüne alınarak minimum hatayı verecek olan α değeri seçilir. Grafikten görüldüğü gibi $Re = 500$ için farklı yapay viskozite değerleri ele alınarak hata oranları hesaplanmış, minimum hatayı veren $\alpha = 127$ değeri seçilerek Şekil 7.1 ve Şekil 7.2'deki gibi gerekli analiz işlemleri yapılmıştır.

Çift boğumlu damarlarda duvar kayma gerilimi (WSS):

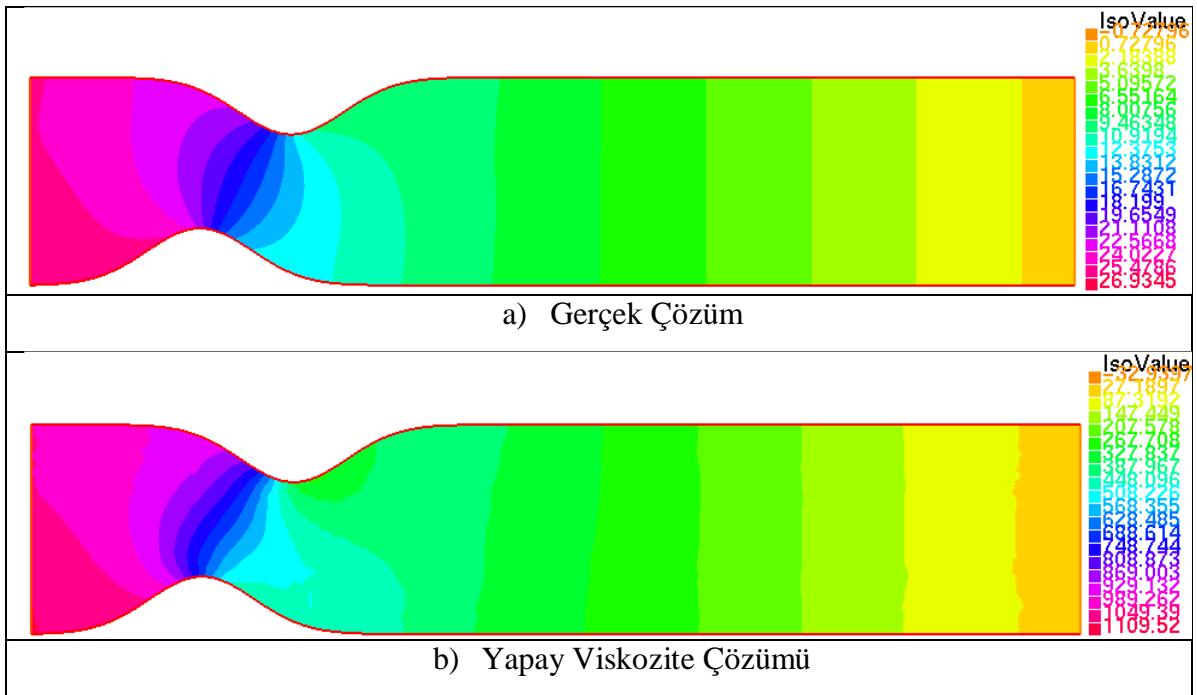
Bu bölümde öncelikle çift boğumlu bir damardaki kan akış hızı ve kan basıncı için gerçek çözüm ile yapay viskoziteli çözüm arasında karşılaştırma yapılacak daha sonra da duvar kayma geriliminden bahsedilecektir.

Bundan sonraki kısımlarda koordinat düzleminde verilen grafikler için; x ekseni damar uzunluğunu (m), y ekseni ise WSS (Pa) değerlerini belirtmektedir.



Şekil 7.4. $Re = 500$ değeri için çift boğumlu damardaki kan akış hızı

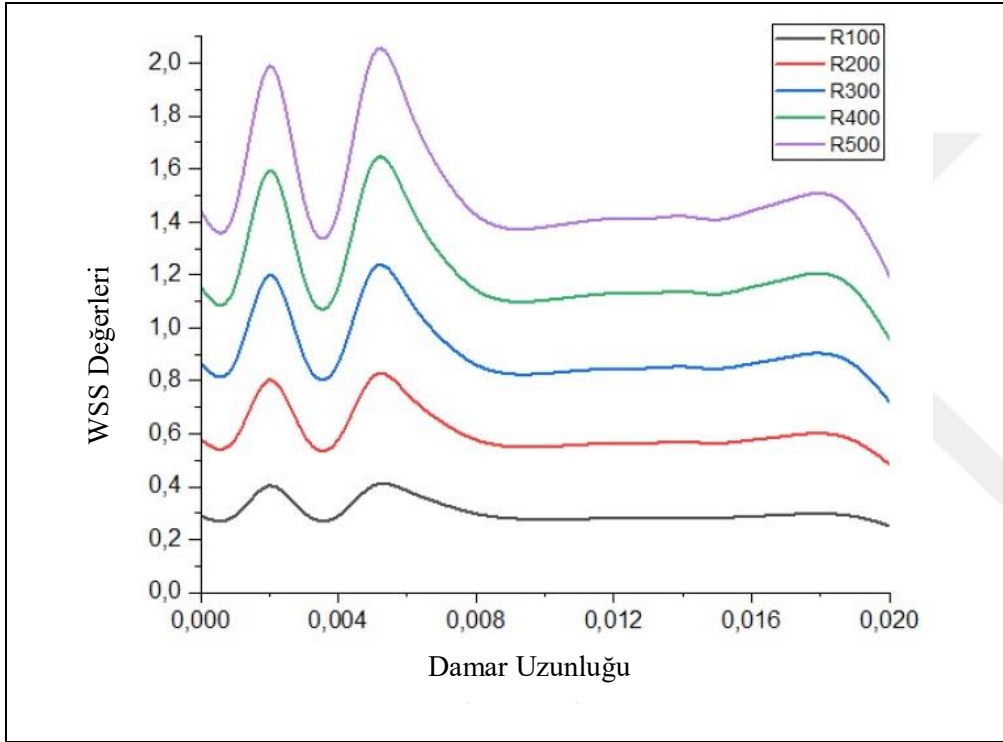
Şekil 7.4.'den anlaşılacağı üzere kan akış hızının simülasyonunda Reynolds sayısı 500 iken gerçek çözüm ile yapay viskozite ile kararlaştırılmış çözüm arasında çok fazla fark görülmemektedir. Bu durum yapay viskozitenin nasıl etkili olduğunu aynı zamanda doğru, anlaşılır ve gerçeğe en yakın sonuçlar verdiğini göstermektedir.



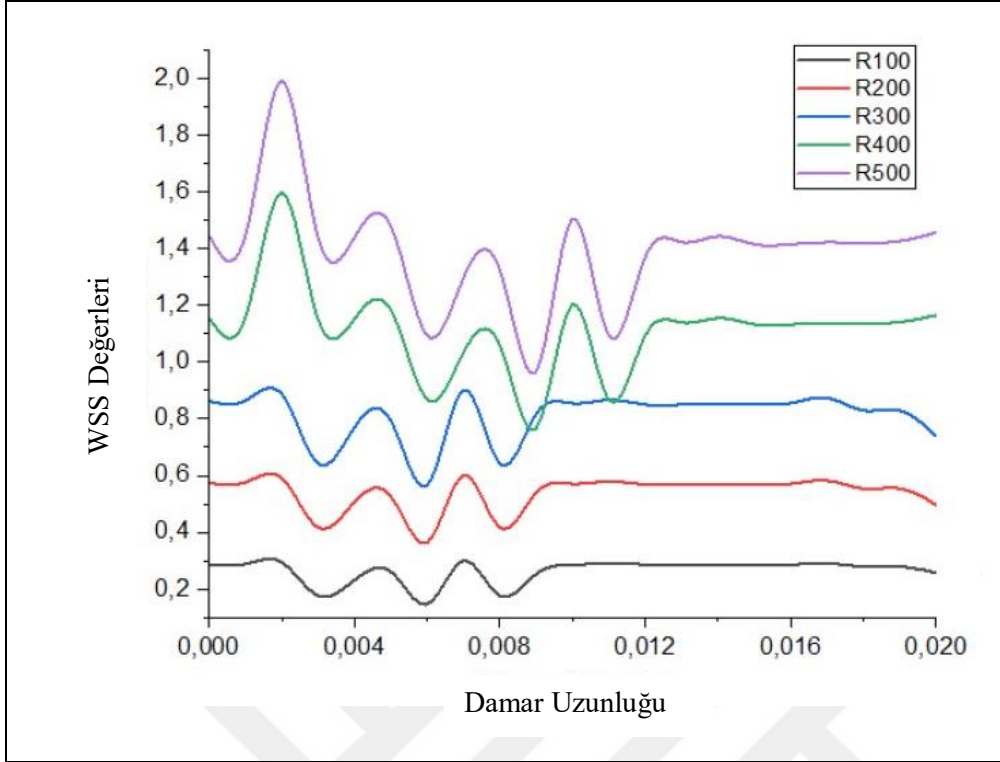
Şekil 7.5. $Re = 500$ değeri için çift boğumlu damardaki kan basıncı

Şekil 7.5’de görüldüğü üzere kan basıncının modellenmesinde Reynolds sayısı 500 iken gerçek çözüm ile yapay viskozite ile kararlaştırılmış çözüm arasında çok fazla fark görülmemektedir. Bu durum yapay viskozitenin nasıl etkili olduğunu aynı zamanda doğru, anlaşılır ve gerçeğe en yakın sonuçlar verdiğini göstermektedir.

Çift boğumlu bir damarın alt ve üst duvarındaki WSS değerleri Şekil 7.6 ve Şekil 7.7’de verilmiştir.



Şekil 7.6. Farklı Reynolds değerleri için çift boğumlu bir damarın alt duvarındaki WSS



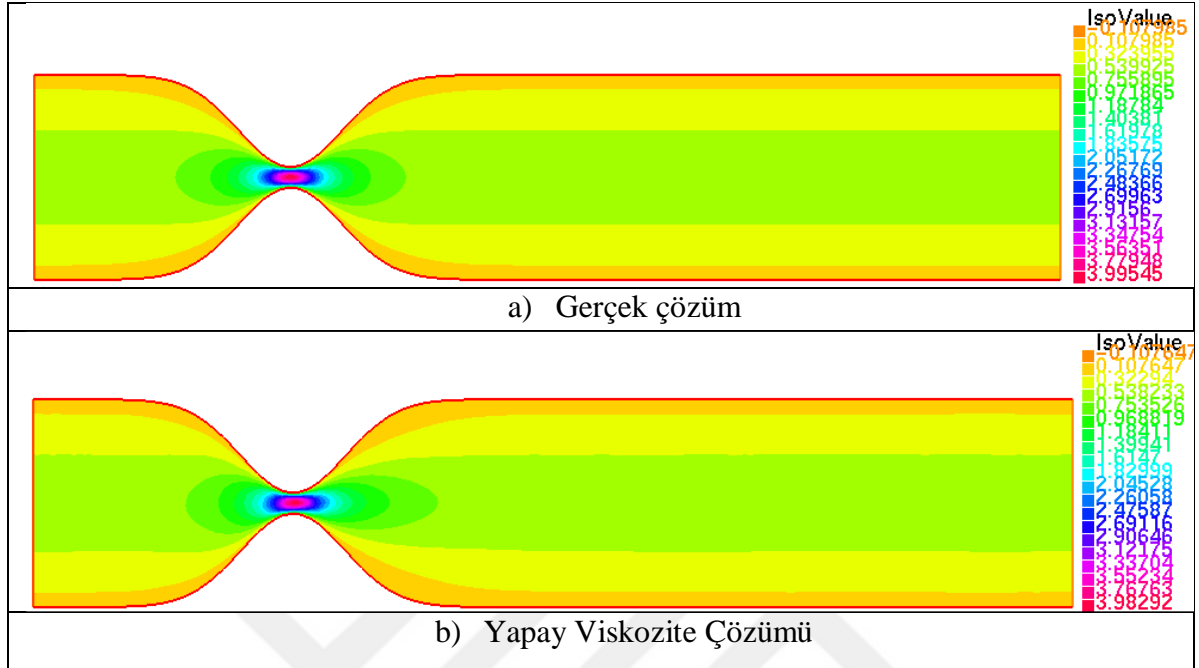
Şekil 7.7. Farklı Reynolds değerleri için çift boğumlu bir damarın üst duvarındaki WSS

WSS, damar duvarlarının üzerindeki akışkanın oluşturduğu kuvvetlerin bir ölçüsü olduğundan Re değeri arttıkça WSS değeri de artış göstermiştir. Şekil 7.7’de görüldüğü üzere WSS değerlerinin alt sınırdaki $L = 0,008$ değerinden ve Şekil 7.8’de görüldüğü üzere üst sınırdaki $L = 0,012$ değerinden sonra stabil hale gelmesi damar ile uyumlu bir davranış sergilediğini göstermektedir.

Karşılıklı boğumlu damarlarda duvar kayma gerilimi (WSS):

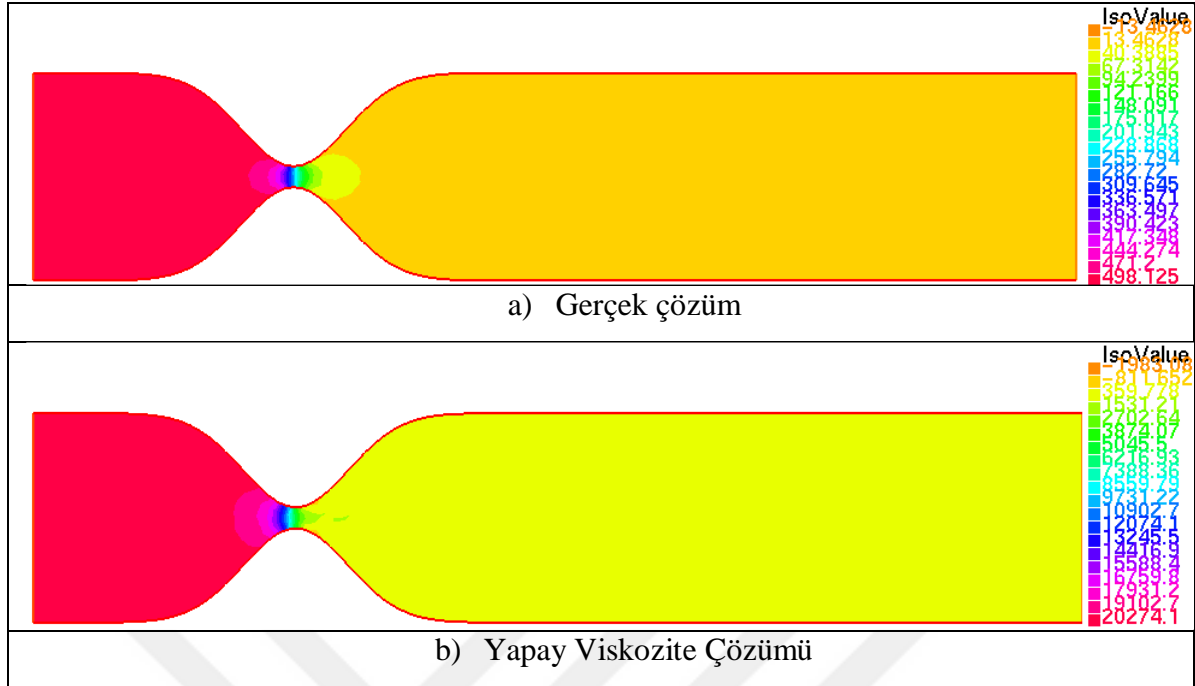
Bu bölümde öncelikle karşılıklı boğumlu bir damardaki kan akış hızı ve kan basıncı için gerçek çözüm ile yapay viskoziteli çözüm arasında karşılaştırma yapılacak daha sonra da duvar kayma geriliminden bahsedilecektir. Bu incelemeler iki farklı derinlik için ele alınacaktır.

0,0018 derinlik ile WSS:



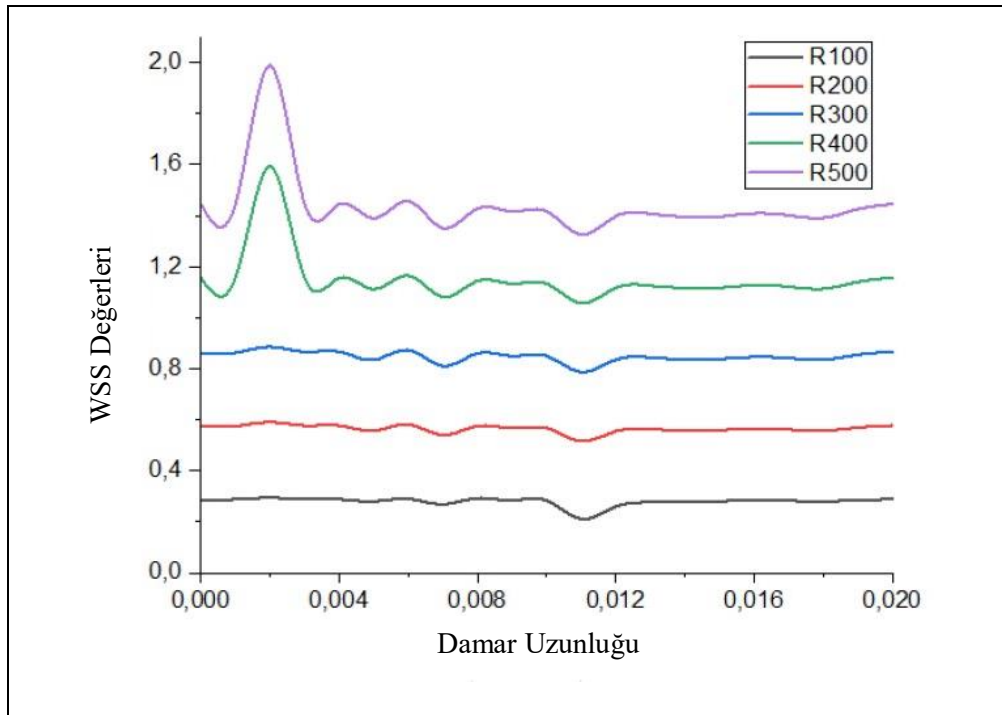
Şekil 7.8. $Re = 500$ değeri için karşılıklı boğumlu damardaki kan akış hızı

Kan akış hızının simülasyonunda Reynolds sayısı 500 iken gerçek çözüm ile yapay viskoziteli çözüm arasında çok fazla fark görülmediği Şekil 7.8'de açıktır. O halde yapay viskozite ile anlaşılır ve gerçeğe en yakın sonuçlar elde edildiği görülmektedir.

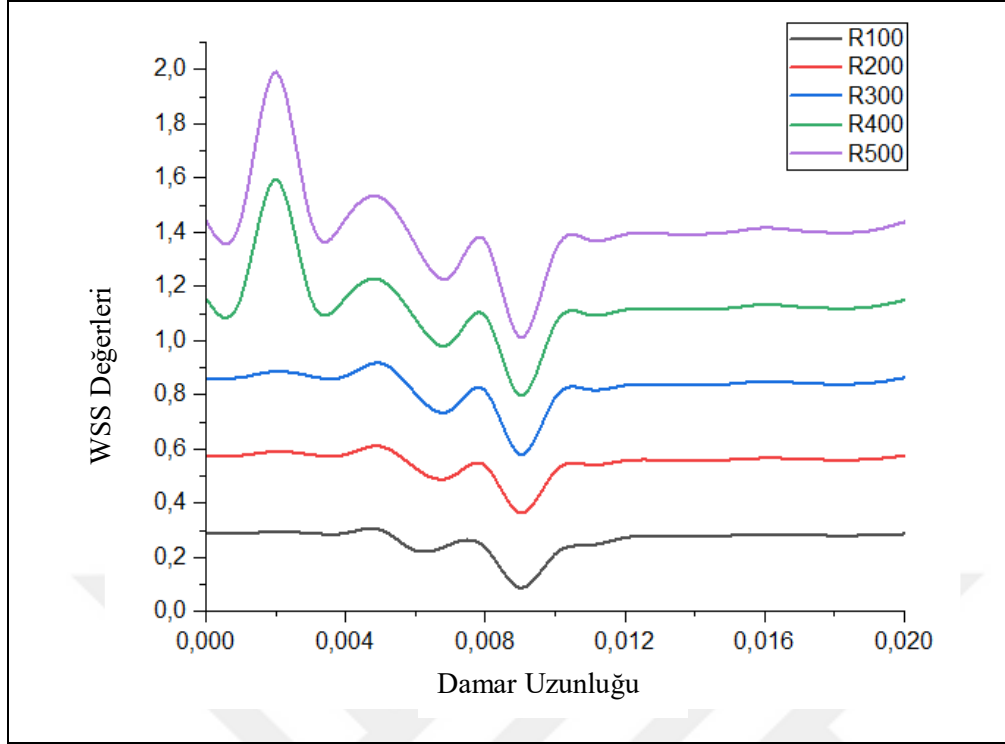


Şekil 7.9. $Re = 500$ değeri için karşılıklı boğumlu damardaki kan basıncı

Kan basıncının modellenmesinde Reynolds sayısı 500 iken gerçek çözüm ile yapay viskoziteli arasında çok fazla fark görülmemektedir. O halde yapay viskozite ile anlaşılır ve gerçeğe en yakın sonuçlar elde edildiği görülmektedir.



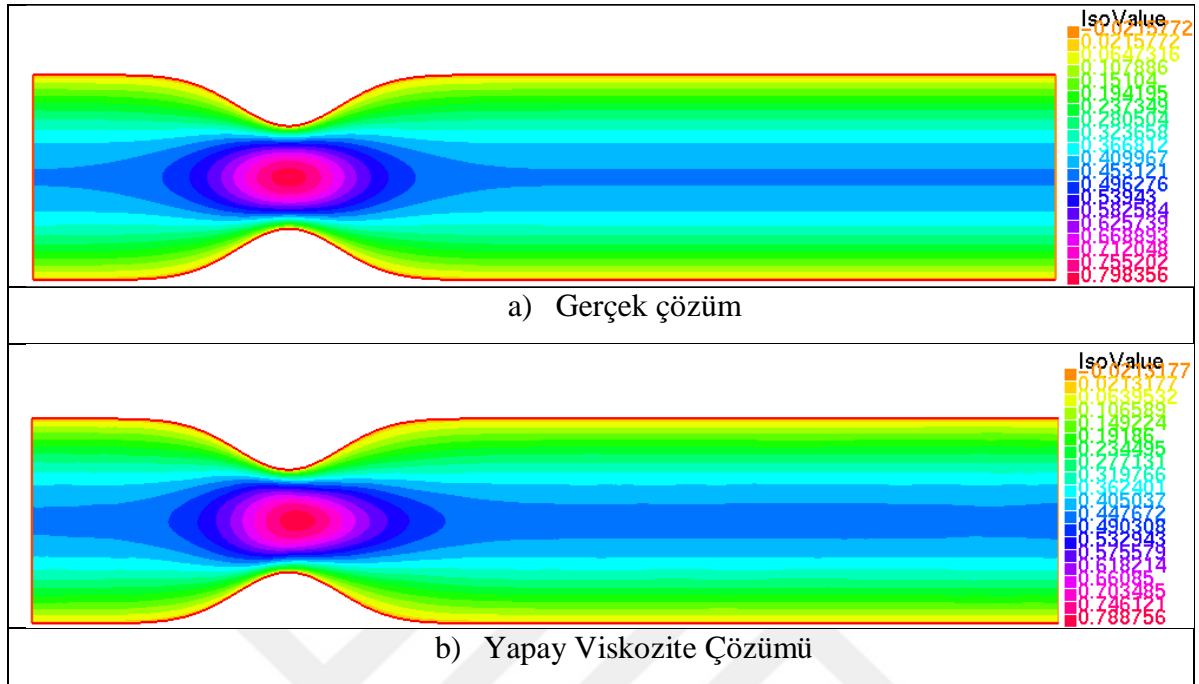
Şekil 7.10. Farklı Reynolds değerleri için karşılıklı boğumlu bir damarın alt duvarındaki WSS



Şekil 7.11. Farklı Reynolds değerleri için karşılıklı boğumlu bir damarın üst duvarındaki WSS

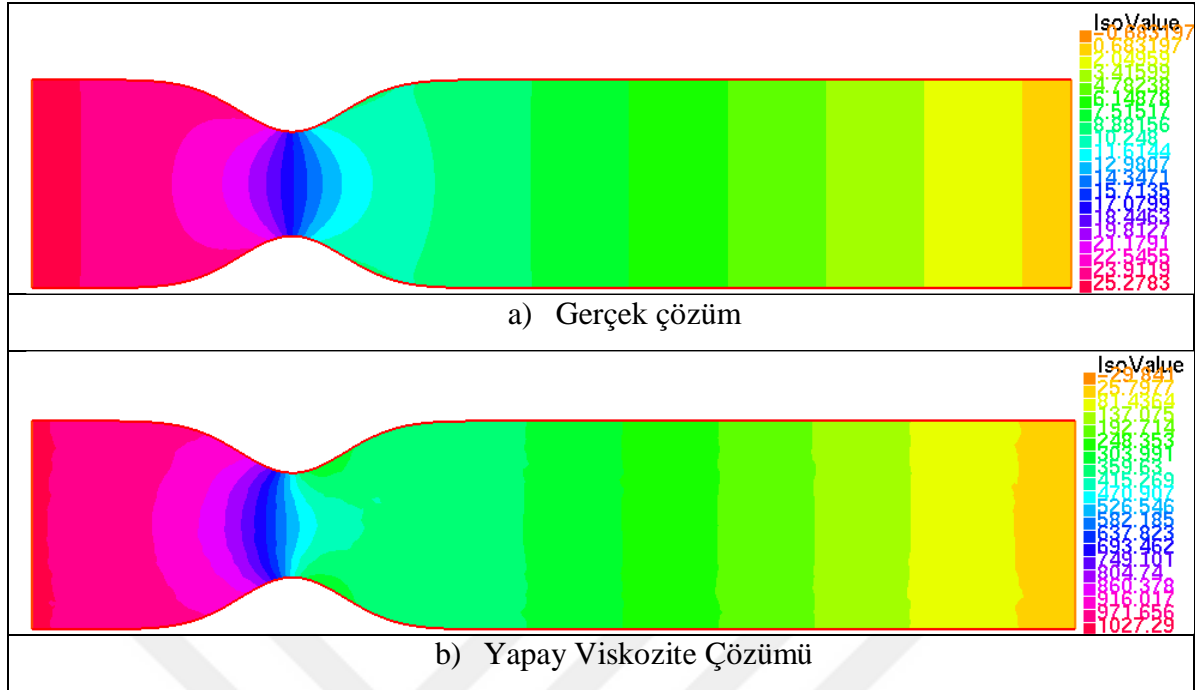
0,0018 derinliğe sahip karşılıklı boğumlu bir damarın alt ve üst duvarındaki WSS değerleri Şekil 7.10 ve Şekil 7.11’de verilmiştir. Re değeri arttıkça WSS değeri de artış gösterdiği açıktır. Elde edilen WSS değerlerinin damarın alt duvarında $L = 0,012$ ve üst duvarında $L = 0,010$ değerlerinden sonra stabil hale gelmesi damar ile uyumlu bir davranış sergilediğini göstermektedir.

0,0010 derinlik ile WSS:



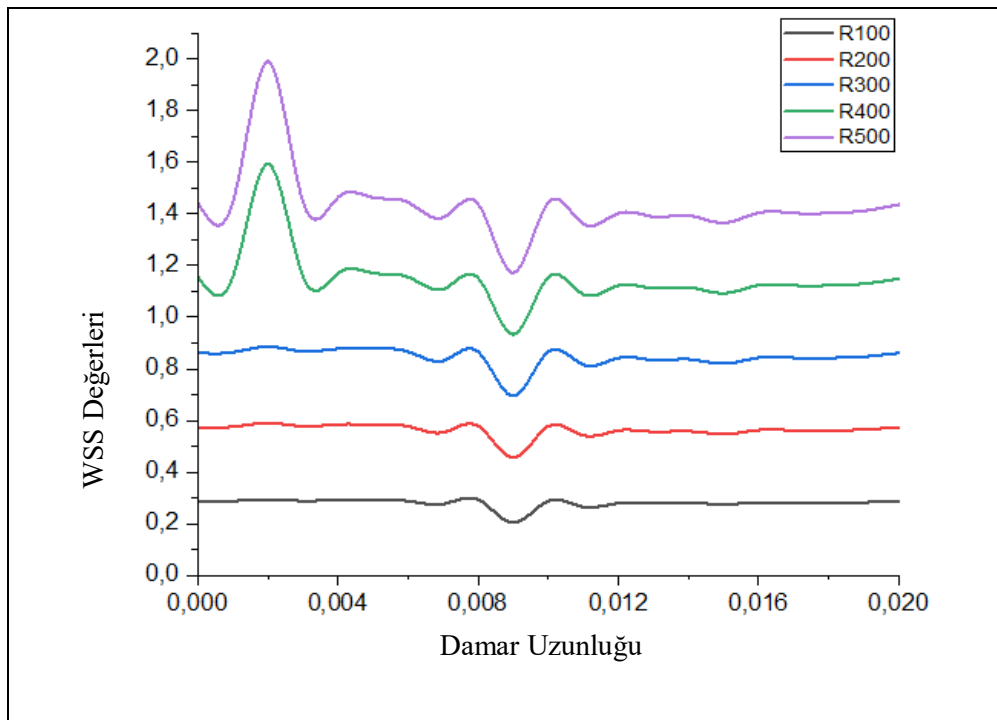
Şekil 7.12. $Re = 500$ değeri için karşılıklı boğumlu damardaki kan akış hızı

Şekil 7.12'de verilen kan akış hızının simülasyonunda gerçek çözüm ile yapay viskoziteli çözüm arasında çok fazla fark görülmemektedir. Sonuç olarak α kararlılaştırma terimi ile anlaşılır ve gerçeğe en yakın sonuçlar elde edildiği görülmektedir.

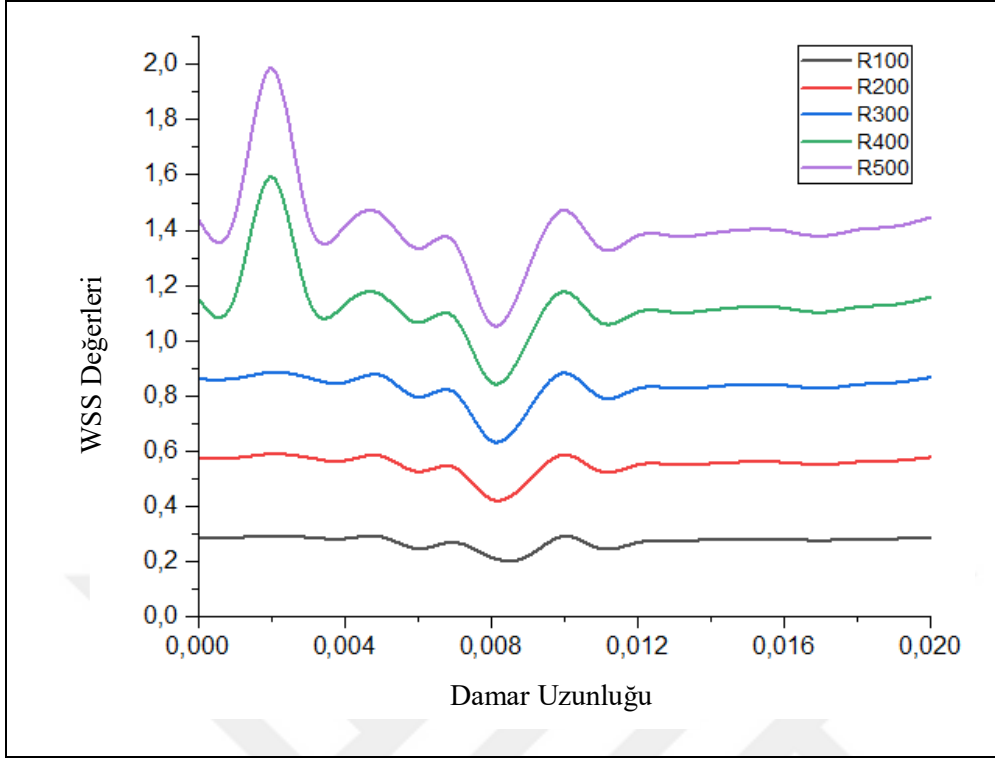


Şekil 7.13. $Re = 500$ değeri için karşılıklı boğumlu damardaki kan basıncı

Şekil 7.13'de verilen kan basıncının simülasyonunda gerçek çözüm ile yapay viskoziteli çözüm arasında çok fazla fark görülmemektedir. Yapay viskozite ile anlaşılır ve gerçeğe en yakın sonuçlar elde edildiği görülmektedir.



Şekil 7.14. Farklı Reynolds değerleri için karşılıklı boğumlu bir damarın alt duvarındaki WSS

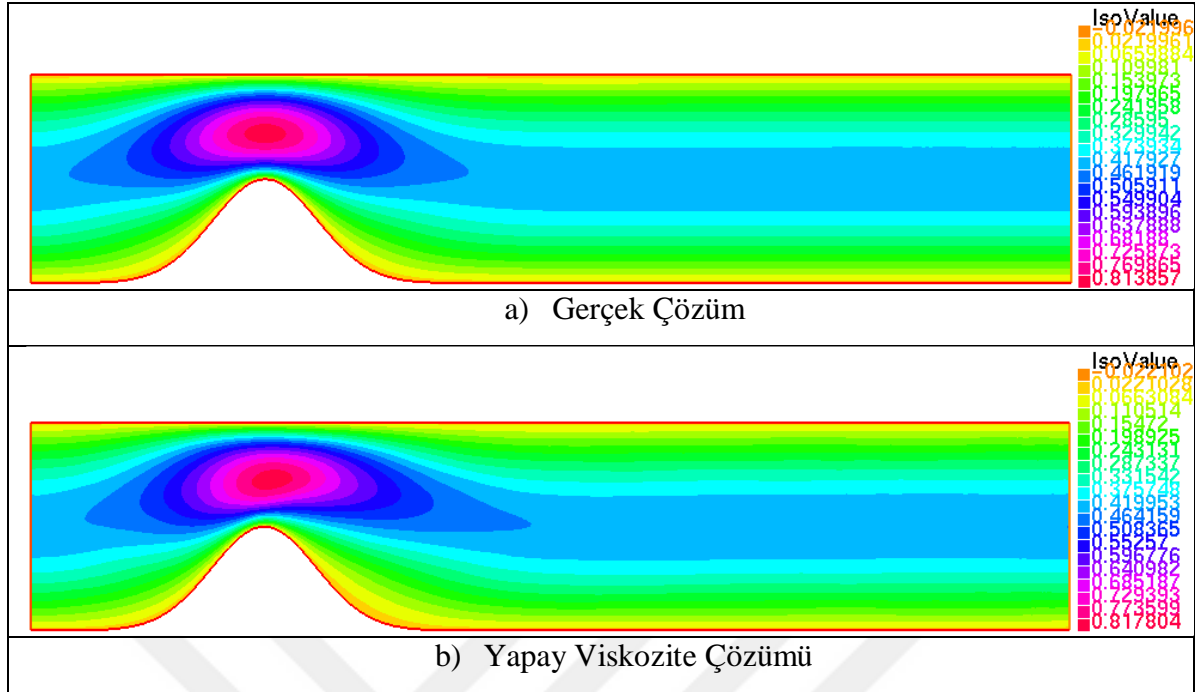


Şekil 7.15. Farklı Reynolds değerleri için karşılıklı boğumlu bir damarın üst duvarındaki WSS

Şekil 7.14 ve Şekil 7.15'te; 0,0010 derinliğe sahip karşılıklı boğumlu bir damarın alt ve üst duvarındaki WSS değerleri verilmiştir. Re değeri arttıkça WSS değeri de artış gösterdiği görülmektedir. Elde edilen WSS değerlerinin alt sınırda $L = 0,010$ ve üst sınırda $L = 0,012$ değerlerinden sonra stabil hale gelmesi damar ile uyumlu bir davranış sergilediğini göstermektedir.

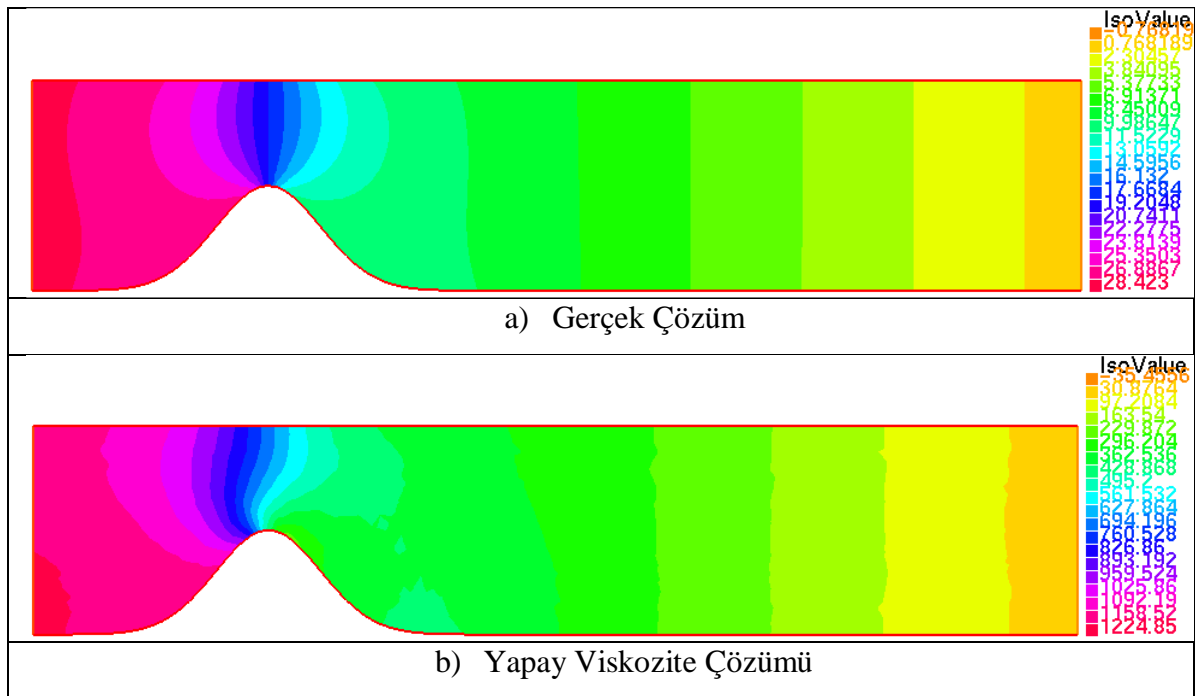
7.1.2. Tek boğumlu damarlarda sayısal deneyler

Tek duvarında meydana gelen yapısal bozukluklar ile damar, tek boğumlu damar olarak adlandırılabilir. Bu yapısal bozukluklar sonucu kan basıncı ve akış hızı etkilenmektedir. Tek boğumlu damarlarda böyle bir durumla karşılaşıldığındaki kan akışı incelenmiş ve simülasyonları verilmiştir.



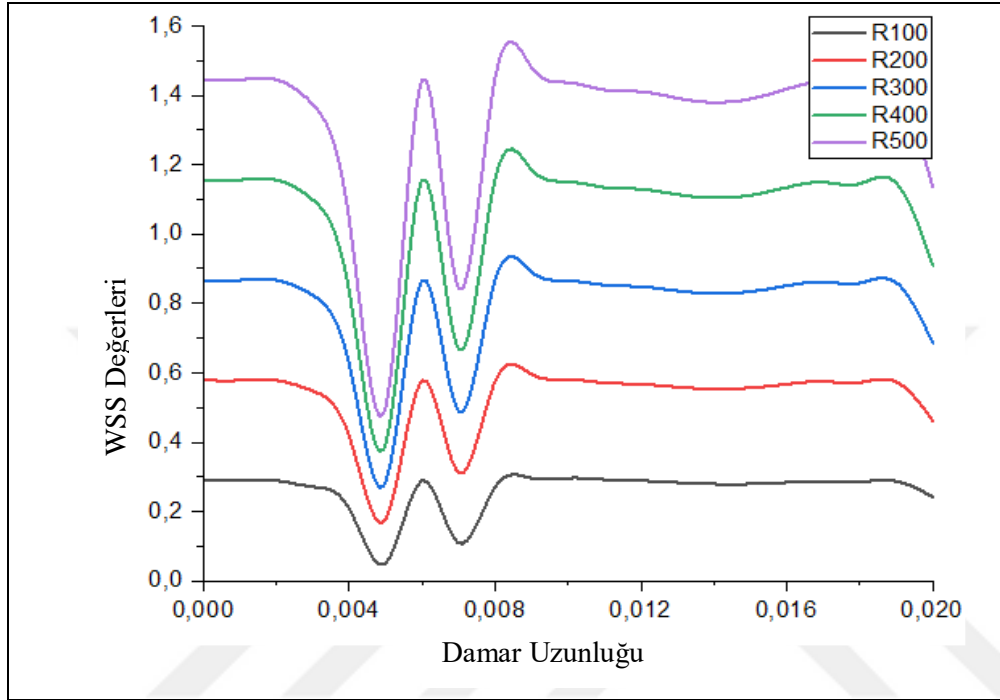
Şekil 7.16. $Re = 500$ değeri için tek boğumlu damardaki kan akış hızı

Şekil 7.16'daki kan akış hızının simülasyonunda görüldüğü üzere gerçek çözüm ile yapay viskoziteli çözüm arasında çok fazla fark görülmemektedir. O halde yapay viskozite ile anlaşılır ve gerçeğe en yakın sonuçlar elde edildiği açıktır.

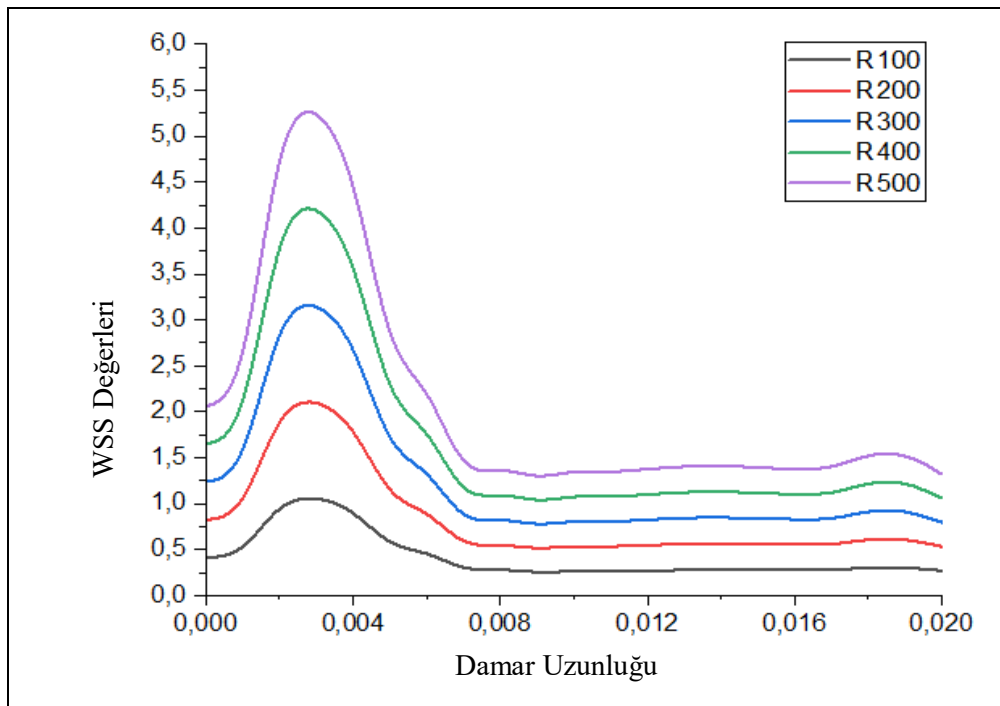


Şekil 7.17. $Re = 500$ değeri için tek boğumlu damardaki kan basıncı

Şekil 7.17'deki simülasyonunda görüldüğü üzere gerçek çözüm ile yapay viskoziteli çözüm arasında kan basıncı karşılaştırmasında çok fazla fark görülmemektedir. α kararlılaştırma terimi ile anlaşılır ve gerçeğe en yakın sonuçlar elde edildiği açıktır.



Şekil 7.18. Farklı Reynolds değerleri için tek boğumlu bir damarın alt duvarındaki WSS

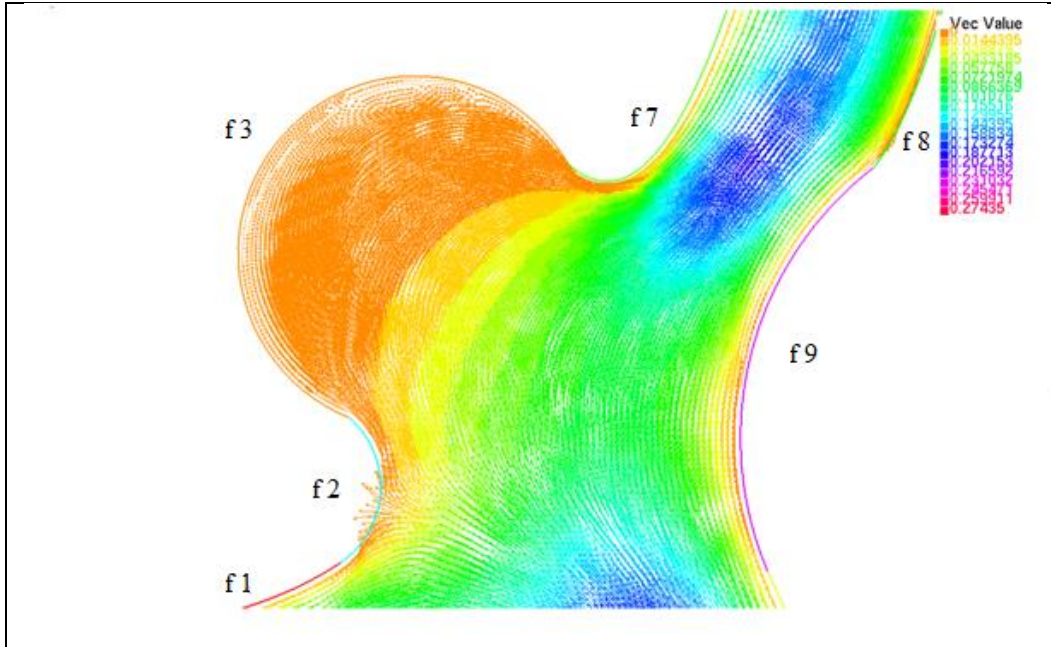


Şekil 7.19. Farklı Reynolds değerleri için tek boğumlu bir damarın üst duvarındaki WSS

Şekil 7.18 ve Şekil 7.19’da tek boğumlu bir damarın alt ve üst duvarındaki WSS değerleri farklı Reynolds değerleri için verilmiştir. WSS değerlerinin alt sınırdaki $L = 0,009$ değerinden ve üst sınırdaki $L = 0,008$ değerinden sonra stabil hale gelmesi damar ile uyumlu bir davranış sergilediğini göstermektedir.

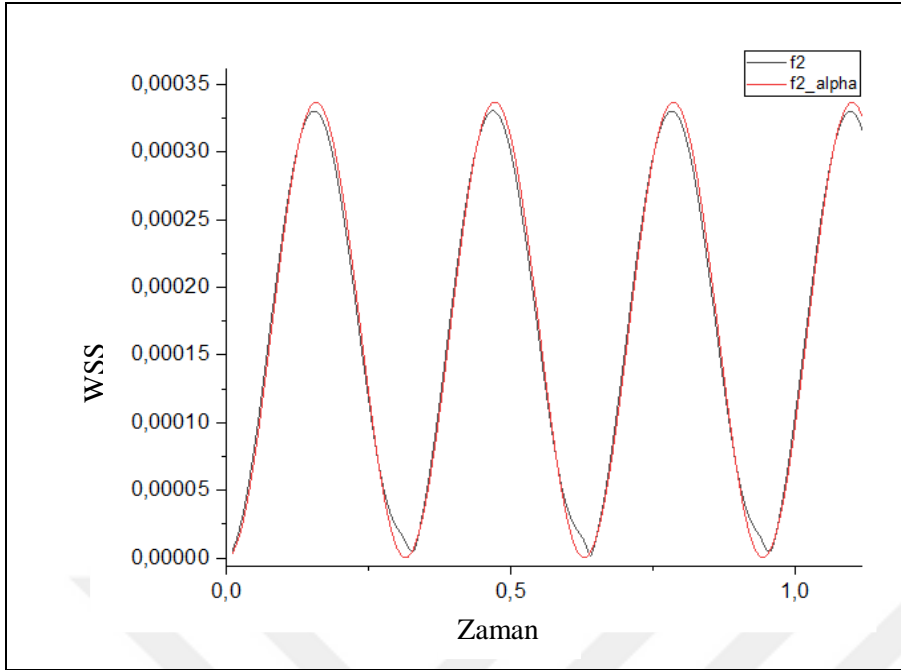
7.2. Beyin Anevrizmasında Duvar Kayma Gerilimi (WSS)

Aşağıdaki şekilde, tezde incelenen beyin arterine ait sakküler anevrizma modelinin akışı görülmekte ve her bölge isimlendirilmektedir.



Şekil 7.20. Beyinde meydana gelen Sakküler anevrizmanın simülasyonu

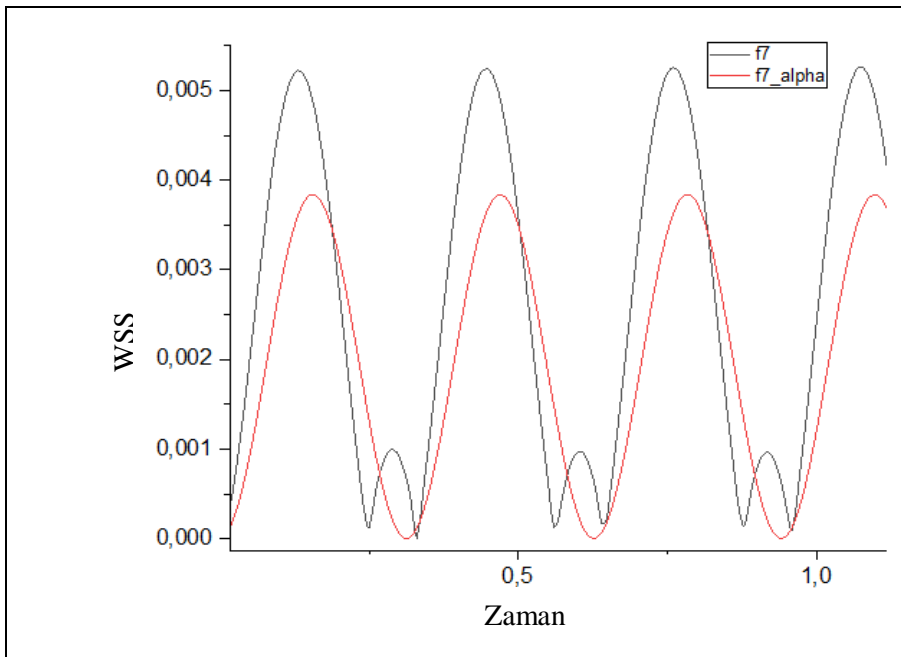
$Re = 200$ ve $\alpha = 205$ değerleri için bölgelere ait kararlılaştırılmış ve kararlılaştırılmamış grafikler aşağıda ayrı ayrı verilmiştir.



Şekil 7.21. f_2 bölgesine ait grafik

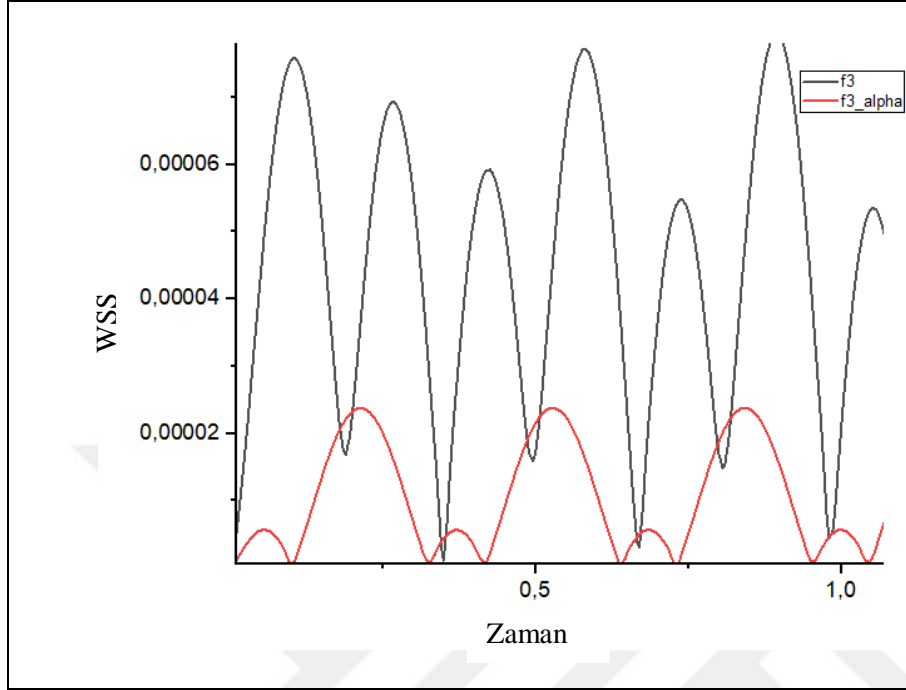
Bu bölgedeki maksimum WSS değeri yaklaşık $0,000355 \text{ Pa}$ olup $\alpha = 0$ değerine yakın sonuçlar vermiştir.

Beyin damarlarındaki akış genellikle pulsatil (dalgalı) bir şekle sahiptir. Bu, kalp atışlarıyla birlikte arterlerin genişleyip daralması nedeniyle oluşan bir olaydır. Bu durum, arterlerin iç duvarlarındaki kanın akış yönündeki değişimlere bağlı olarak ortaya çıkar.



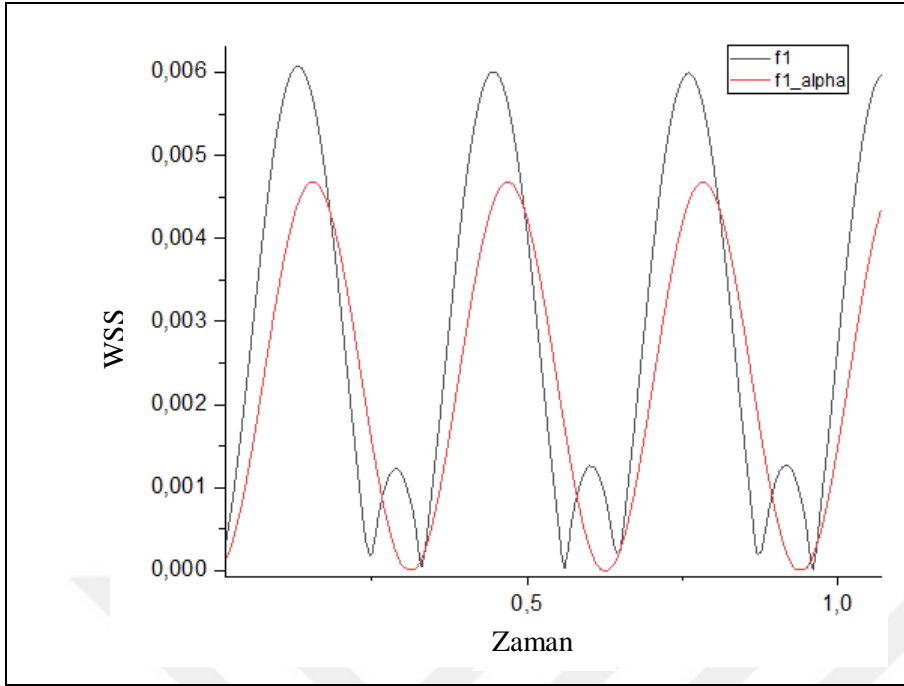
Şekil 7.22. f_7 bölgesine ait grafik

WSS değerinin en yüksek olduğu yani gerilimin en çok olduğu bölge $f7$ bölgesidir. Bunun sebebi akışın bu bölgede yoğunlaşması ve boğum noktasını barındırmasıdır.

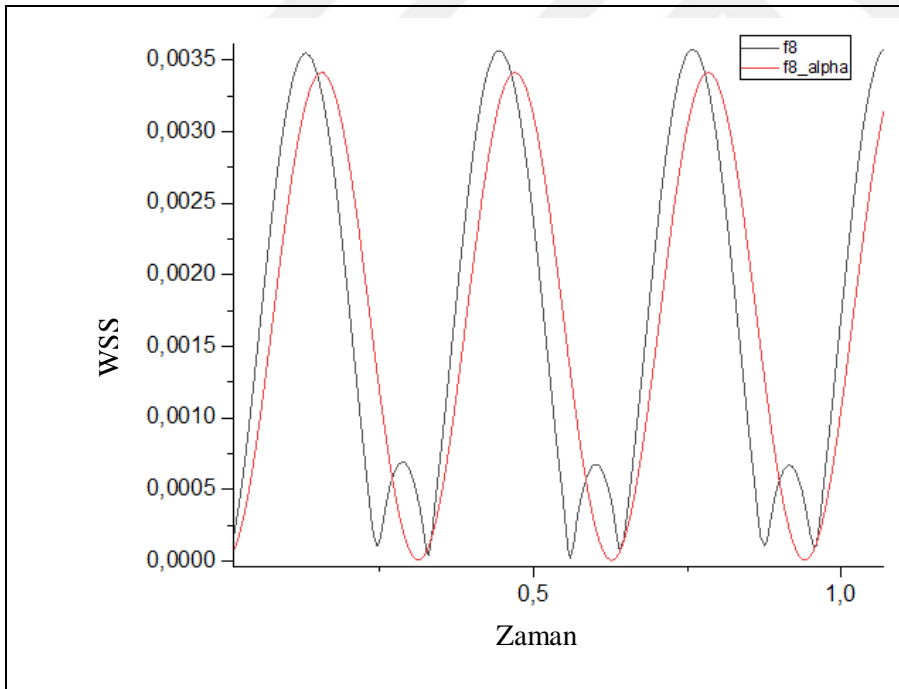


şekil 7.23. $f3$ bölgesine ait grafik

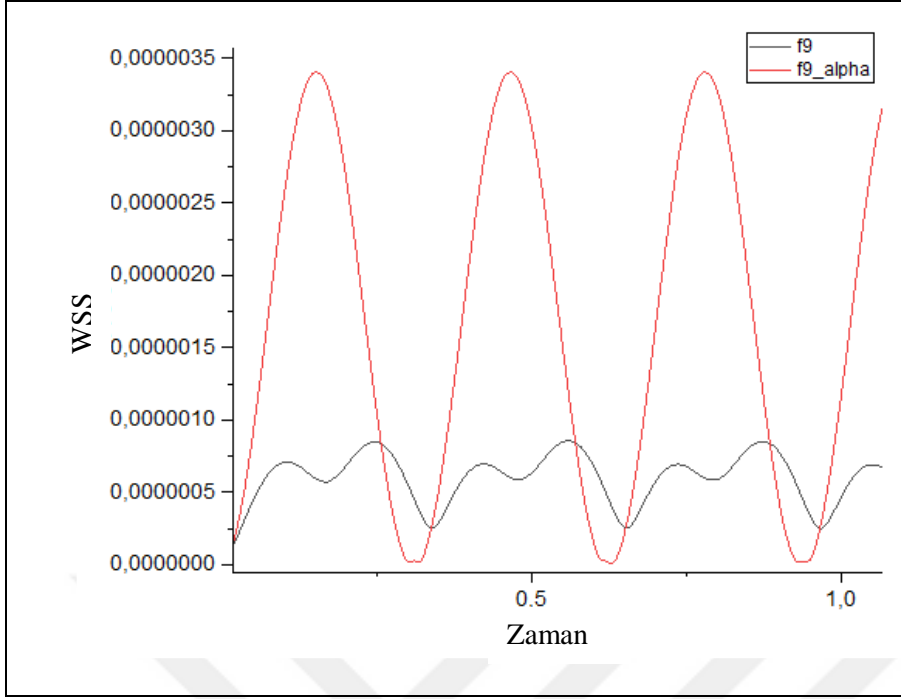
$f3$ bölgesine ait grafikte grldğu gibi kararlılaştırılma yapılmadığı zaman akışın genel yapısından daha uzak bir sonuç elde edildiği açıktır. Bu bölgedeki WSS değerinin $f2$ ve $f7$ 'ye göre daha az olmasının sebebi, modelden (şekil 7.22) görüleceği üzere bu bölgelerdeki akışın yavaşlamasından kaynaklanmaktadır.



Şekil 7.24. $f1$ bölgesine ait grafik



Şekil 7.25. $f8$ bölgesine ait grafik



Şekil 7.26. f_9 bölgesine ait grafik

f_1 , f_8 ve f_9 bölgelerine ait grafikleri incelediğimizde kararlılaştırma etkisini en çok göreceğimiz yer f_9 bölgesidir. Bunun sebebi akışın daha karmaşık bir durum içerisinde bulunmasıdır. f_9 grafiğinden de görüldüğü gibi yapay viskozite olduğu zaman WSS değerleri daha düzenli bir şekilde kan akışına uygun olarak sonuç vermiştir.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, kardiyovasküler hastalıklar sonucu damar akışında meydana gelen değişimler NSD modeli ile analiz edilmiştir. Oluşturulan yarı ayırık ve tam ayırık şemaların kararlılık ve hata analizleri yapılmış olup, kararlılık ve yakınsaklık özellikleri gösterilerek sayısal çözümün varlık ve teklik durumu ele alınmıştır. Tam ayırık sonlu elemanlar şemasında stabilizasyonu sağlamak için yapay viskoziteyi temsil eden $\alpha(\nabla u, \nabla v)$ kararlaştırma terimi kullanılmıştır. Teorik yakınsama oranlarını doğrulamak için önerilen şemanın etkinliğini gösteren sayısal yakınsama testleri sunulmuştur. Ayrıca bahsedilen kardiyovasküler hastalıklar sonucu kan akış hızının, kan basıncının ve damarda meydana gelen duvar kayma geriliminin nasıl etkilendiği FreeFem++ programı aracılığıyla modellenmiştir. Elde edilen modeller ile kararlılaştırmanın nasıl etkili olduğu ve bu terim yardımıyla doğru, anlaşılır ve gerçeğe en yakın sonuçlar elde edildiği gösterilmiştir.

Bu tezdeki çalışma, kardiyovasküler sağlık alanında yeni araştırma olanaklarını vurgulamaktadır. Mevcut çalışmanın ötesinde, kardiyovasküler hastalıkların genetik yatkınlığı, tedavi stratejilerinin karşılaştırmalı analizi, yaşam tarzı değişikliklerinin etkisi, yeni tedavi yöntemlerinin geliştirilmesi ve görüntüleme teknolojilerinin iyileştirilmesi gibi çeşitli araştırma alanları önerilmektedir. Bu öneriler, kardiyovasküler sağlık alanında bilgi derinleştirmeyi ve klinik uygulamalara katkı sağlamayı amaçlamaktadır. Ayrıca yapay viskozite dışındaki nümerik kararlılaştırma yöntemlerinin benzer yapıdaki damarlar üzerinde akışa etkisi ileride yapılabilecek araştırma konularından birisidir.



KAYNAKLAR

1. Tritton, D. J. (2012). *Physical fluid dynamics*. (1. Baskı). Newcastle: Springer Science-Business Media. 315-317.
2. Blazek, J. (2015). *Computational fluid dynamics: principles and applications*. (1. Baskı). Sankt Augustin: Butterworth-Heinemann. 80-81.
3. Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., Zang, T. A. (2007). *Spectral methods: evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics*. (1. Baskı). Berlin: Springer Science-Business Media. 58-69
4. Bassi, F., Rebay, S. (1997). A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier–Stokes equations. *Journal of computational physics*, 131(2), 267-279.
5. Johnson, C. (2012). *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. (1. Baskı). Cambridge: Courier Corporation. 112-115.
6. Nowbar, A. N., Gitto, M., Howard, J. P., Francis, D. P., Al-Lamee, R. (2019). Mortality from ischemic heart disease: Analysis of data from the World Health Organization and coronary artery disease risk factors From NCD Risk Factor Collaboration. *Circulation: cardiovascular quality and outcomes*, 12(6), e005375.
7. İnternet: World Health Organization. (2017, May 17). Cardiovascular diseases(CVDs). Web: [https://www.who.int/en/news-room/factsheets/detail/cardiovascular-diseases-\(cvds\)](https://www.who.int/en/news-room/factsheets/detail/cardiovascular-diseases-(cvds)). Son Erişim Tarihi: 20.02.2024
8. Smith Jr, S. C., Collins, A., Ferrari, R., Holmes Jr, D. R., Logstrup, S., McGhie, D. V., Zoghbi, W. A. (2012). Our time: a call to save preventable death from cardiovascular disease (heart disease and stroke). *Circulation*, 126(23), 2769-2775.
9. Chiu, J. J., Chien, S. (2011). Effects of disturbed flow on vascular endothelium: pathophysiological basis and clinical perspectives. *Physiological reviews*, 91(1), 327-387.
10. Maddaloni, M., Lolocono, N., Manton, W., Blum, C., Drexler, J., Graziano, J. (1998). Bioavailability of soilborne lead in adults, by stable isotope dilution. *Environmental Health Perspectives*, 106(suppl 6), 1589-1594.
11. Chen, R., Zhang, L., Zang, D., Shen, W. (2016). Blood drop patterns: Formation and applications. *Advances in colloid and interface science*, 231, 1-14.
12. Formaggia, L., Quarteroni, A., Veneziani, A. (2009). *Cardiovascular Mathematics Modeling and simulation of the circulatory system*. Milano: Springer-Verlag. 89-92.

13. Shaffer, F., McCraty, R., Zerr, C.L. (2014). A healthy heart is not a metronome: an integrative review of the heart's anatomy and heart rate variability. *Frontiers in Psychology*, 5(1040), 1-19.
14. Sotiropoulos, F., Le, T.B., Gilmanov, A. (2016). Fluid mechanics of heart valves and their replacements. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 48(1),259-283.
15. Hinton, R.B., Yutzey, K.E. (2011). Heart valve structure and function in development and disease. *Annual Review of Physiology*, 73, 29 – 46.
16. Magder, S. (2018). The meaning of blood pressure. *Crit Care*, 22, 257.
17. Vincent, J.L. (2008). Understanding cardiac output. *Crit Care*, 12:174-174.
18. Quarteroni, A. (2009). *Cardiovascular Mathematics*. Milano: Springer-Verlag. 451-467.
19. Arjmandi-Tash, O., Razavi, S.E., Zambouri, R. (2011). Possibility of atherosclerosis in an arterial bifurcation model. *Bioimpacts*, 1(4),225-8.
20. Dhawan, S.S., Nanjundappa, R.P.A., Branch, J.R., Taylor, W.R., Quyyumi, A.A., Jo, H., McDaniel M.C., Suo, J., Giddens D., Samady H. (2010). Shear stress and plaque development. *Expert Rev Cardiovasc Ther.* 8(4), 545-56.
21. Kaya M., Dinlemez Kantar Ü. (2018). *Sobolev Uzayları ve Eliptik Sınır Değer Problemlerine Giriş*. (1. Baskı). Ankara: Palme Yayınevi. 106.
22. Layton, W. (2008). *An Introduction to the Numerical Analysis of Incompressible Viscous Flows*. (1. Baskı). Pittsburgh: SIAM, Philadelphia. 233.
23. Galdi, G.P. (2000). *Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics*. (1. Baskı) Birkhäuser: Springer Basel AG. 293.
24. Hecht, F. (2012). New development in FreeFem++. *Journal of Numerical Mathematics*. 20, 251-266.
25. Çıbık, A.B., Karadavut, H. (2023). *Mathematica ile Diferensiyel Denklemler*. (1. Baskı). Ankara: Seçkin Yayınevi. 160.



Gazili olmak ayrıcalıktır