

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**BAZI İNTEGRAL VE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM
MODELLERİNDE HYERS-ULAM KARARLILIK VE HYERS-ULAM-
RASSIAS KARARLILIK**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sibel DEMİREL
Danışman: Doç. Dr. Osman TUNÇ

VAN – 2024

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**BAZI İNTEGRAL VE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM
MODELLERİNDE HYERS-ULAM KARARLILIK VE HYERS-ULAM-
RASSIAS KARARLILIK**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sibel DEMİREL

Tez Savunma Sınavı Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Erdal KORKMAZ (Başkan)

Doç. Dr. Osman TUNÇ (Danışman)

Prof. Dr. Süleyman EDİZ (Üye)

VAN – 2024

KABUL VE ONAY SAYFASI

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Doç. Dr. Osman TUNÇ danışmanlığında, Sibel DEMİREL tarafından sunulan “Bazı İntegral ve İntegro-Diferansiyel Denklem Modellerinde Hyers-Ulam Kararlılık ve Hyers-Ulam-Rassias Kararlılık” başlıklı bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 03/06/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Erdal KORKMAZ

İmza:

Üye: Prof. Dr. Süleyman EDİZ

İmza:

Üye: Doç. Dr. Osman TUNÇ

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun /.... /..... tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İmza

Sibel DEMİREL



ÖZET

BAZI İNTEGRAL VE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM MODELLERİNDE HYERS-ULAM KARARLILIK VE HYERS-ULAM- RASSIAS KARARLILIK

DEMİREL, Sibel

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Osman TUNÇ

Haziran 2024, 85 sayfa

Bu tez, sekiz bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde tez konusu ile ilgili bilgiler verildi. Tezin ikinci bölümünde tez konusuyla ilgili literatürde yapılan bazı çalışmalar verildi. Tezin üçüncü bölümünde tezde kullanılacak materyal ve yöntem ve tez konusu ile ilgili bazı temel bilgiler verildi. Dördüncü bölümde lineer olmayan bir integro-diferansiyel denklem ve integral denklemin Hyers-Ulam kararlılığı incelendi. Beşinci bölümde, Volterra-integro diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı incelendi. Altıncı bölümde, lineer olmayan Volterra-integro diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı incelendi. Tezin yedinci bölümünde, lineer olmayan Volterra-integro diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı incelendi. Son bölümde ise bu tezde yaptığımız çalışmalara ilişkin tartışma ve sonuç kısmı bulunmaktadır.

Anahtar kelimeler: Bielecki metric, Chebyshev metrik, Hyers-Ulam kararlılık, Hyers-Ulam-Rassias kararlılık, İntegral denklem, İntegro-diferansiyel denklem, Picard operatörü, Sabit nokta teorisi

ABSTRACT

HYERS-ULAM STABILITY AND HYERS-ULAM-RASSIAS STABILITY IN SOME MODELS OF INTEGRAL AND INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

DEMİREL, Sibel

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Osman TUNÇ

June 2024, 85 pages

This thesis consists of eight chapters. In the first chapter of the thesis, background information with regard to the subject of the thesis is given. In Chapter 2 of this thesis, literature review, i.e. some works related to subject of the thesis are briefly summarized. In Chapter 3 of the thesis, the materials and methods used in the thesis are noted, and as basic information, some background definitions, the theorems, a lemma, etc., which are related to the subject of the thesis, are given. In Chapter 4 of thesis, the Hyers-Ulam stability of a nonlinear integro-differential equation and an integral equation are investigated. In Chapter 5 of the thesis, the Hyers-Ulam and Hyers-Ulam-Rassias stability of a Volterra-integro differential equation with a variable delay is discussed and some examples are give as applications of the results. In Chapter 6 of the thesis, the Hyers-Ulam and Hyers-Ulam-Rassias stability of a nonlinear Volterra-integro differential equation with a variable delay is investigated. In particular cases, examples are provided for illustrations. In Chapter 7 of the thesis, the Hyers-Ulam and Hyers-Ulam-Rassias stability of a nonlinear Volterra-integro differential equation are presented. In particular cases, two examples are presented for illustrations. The last chapter includes the discussion and conclusion of the work we have done in this thesis.

Keywords: Bielecki metric, Chebyshev metric, Fixed point theory, Hyers-Ulam stability, Hyers-Ulam-Rassias stability, Integral equation, Integro-differential equation, Picard operator



TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında, her adımda bilgisi, sabrı, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Osman TUNÇ'a teşekkür ederim. Yaptığı akademik çalışmalarla büyük başarılarla sahip olan, bizlerden çalışmalarımız esnasında yardımını ve bilgilerini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Cemil TUNÇ'a sonsuz teşekkür ederim. Hayatımın her alanında desteği, sabrı, her türlü ilgisini esirgemeyen değerli annem Gülsüm DEMİREL'e ve her zaman arkamda duran değerli ağabeyim ve yengem Selim DEMİREL'e ve Suzan DEMİREL'e teşekkür ederim.

2024

Sibel DEMİREL



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	3
3. MATERYAL YÖNTEM, TEMEL TANIM VE TEOREMLER	13
4. LİNEER OLMAYAN BİR VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM VE İNTEGRAL DENKLEMİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI	17
4.1 (4.1) İntegro-Diferansiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı	18
4.2 (4.2)İntegro-Diferansiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı	23
5. LİNEER OLMAYAN DEĞİŞKEN GECİKMELİ BİR İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMİ İÇİN HYERS-ULAM VE HYERS-ULAM RASSIAS KARARLILIKLARI	27
5.1 Sonlu Aralıkta (5.1) Denklemi için Hyers-Ulam-Rassias Kararlılık	28
5.2 Sonlu Aralıkta (5.1) Denklemi için Hyers-Ulam Kararlılık.....	31
5.3 Sonsuz Aralıkda (5.1) Denklemi için Hyers-Ulam-Rassias Kararlılık	34
6. LİNEER OLMAYAN (6.1) DEĞİŞKEN GECİKMELİ İNTEGRO- DİFERANSİYEL DENKLEMİ İÇİN HYERS-ULAM RASSIAS KARARLILIK. 43	
6.1 Sonlu Aralıkta (6.1) Volterra-İntegro Diferansiyel Denkleminin Hyers-Ulam- Rassias Kararlılığı	46
6.2 Bazı Özel Durumlar.....	52
7 (7.1) LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMİ İÇİN HYERS-ULAM VE HYERS-ULAM RASSIAS KARARLILIK	65
7.1 (7.1) Lineer Olmayan Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemi için Hyers-Ulam Kararlılık	66
7.2 (7.1) Lineer Olmayan Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemi için Hyers- Ulam-Rassias Kararlılık	73
8. TARTIŞMA VE SONUÇ	79
KAYNAKLAR.....	81
ÖZ GEÇMİŞ.....	85



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamalarıyla aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
ADD	Adi diferansiyel denklem
$\mathbb{C}$	Banach uzayı
FDD	Fonksiyonel diferansiyel denklem
H-U	Hyers-Ulam
H-U-R	Hyers-Ulam-Rassias
ID	İntegral denklem
IDD	İntegro-diferansiyel denklem
KDD	Kısmi diferansiyel denklem
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar

1. GİRİŞ

Matematik literatüründe diferansiyel denklemler ile ilgili araştırmaların kurucusu ve öncüsü olarak Isaac Newton bilinmektedir. Sonraki süreçlerde, Leibnitz, Bernoulli, Euler ve Cauchy gibi birçok bilim adamı diferansiyel denklemlerin geliştirilmesine ve bu denklemlerin çözümleri ile ilgili matematiksel yapıların kurulmasına katkı sağlamışlardır.

Günümüzde matematik, mühendislik, fizik, kimya, biyoloji, tıp ve ekonomi gibi birçok uygulama alanına sahip olan ADD'ler, FDD'ler, IDD'ler, ID'ler vb. denklemlerle ilgili çalışmalar devam etmektedir. Bu çalışmalar denklemin çözümlerinin niteliksel davranışlarının ve yaklaşık değerinin belirlenmesi şeklinde sınıflandırılabilirler.

Her denklemin çözümleri kolaylıkla elde edilemediğinden verilen denklemi çözmeden denklemin çözümlerinin niteliksel davranışlarını incelemek mümkündür. Bu bağlamda çözümlerin, kararlılığını, asimptotik kararlılığını, kararsızlığını integrallenebilirliğini, sınırlılığını, salınımlılığını gibi birçok niteliksel davranışlar hakkında yorum yapılabilmektedir. Belirtilen niteliksel davranışları incelemek için matematik literatüründe sabit nokta teoremleri etkin bir şekilde kullanılmaktadır.

1940 yılında Stanislaw Ulam, Wisconsin Üniversitesi matematik kulübüne verdiği meşhur konuşmasında homomorfizmaların kararlılığı ile ilgili olarak “ G_1 bir grup ve G_2 $d(.,.)$ metriği ile verilmiş bir metrik grup olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Eğer bir $h: G_1 \rightarrow G_2$ dönüşümü $\forall x, y \in G_1$ için

$$d(h(x, y), h(x)h(y)) < \delta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman her $x \in G_1$ için $d(h(x), H(x)) < \varepsilon$ ile bir $H: G_1 \rightarrow G_2$ homomorfizması var olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var mıdır? “ şeklinde bir soru ortaya atılmıştır.

Bu problem fonksiyonel denklemlerin kararlılık teorisinin başlangıç noktası olmuştur.

Bu soru, Hyers (1941) tarafından Banach uzayları için yanıtlanmıştır. Ulam'ın probleminin bir genelleştirmesi olarak fonksiyonel denklemlerin yerine diferansiyel denklemlerin kullanılmasıyla birlikte yeni bir çalışma alanı ortaya çıkmıştır. Diferansiyel

denklemlerin H-U ve H-U-R kararlılığını araştırmak için sabit nokta metodu ile birlikte geliştirilmiş metrik, Chebyshev normu, Bielecki normu, Picard operatörü vb. temel araçlar olarak kullanılmaktadır. $\mathbb{S} \neq \emptyset$ ve T ifadesi ise $\mathbb{S}$ den $\mathbb{S}$ e bir dönüşüm olsun. Bu durumda $T(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ koşulu sağlanırsa $\mathcal{G} \in \mathbb{S}$ noktası T dönüşümünün bir sabit noktası olarak adlandırılır. Matematiğin farklı dallarında, farklı uzaylar üzerinde sabit noktaların varlığı ve tekliği ile ilgili çalışmalar önem kazanmıştır. Tam metrik uzaylarda sabit nokta teoremi ilk kez 1922 yılında Stefan Banach tarafından daralma dönüşümü kavramı ile çalışılmıştır. Banach daralma prensibi (dönüşümü) adını alan teoremin koşullarının sağlanması durumunda sabit bir noktanın varlığı garanti altına alınır. Üstelik bu dönüşüm sabit noktanın tekliğini ve bulunması kuralını gösterir. Sabit noktanın bulunması için Picard'ın çalışmasına bakılabilir (Rus,2009). $\mathbb{S}$ 'deki herhangi bir başlangıç noktası yardımı ile elde edilen Picard iterasyonu T 'nin sabit noktasına yakınsar. Buradan Picard operatörü kavramı ortaya çıkmıştır. Kısacası, tam metrik uzaydan kendisine tanımlı her daralma dönüşümü bir Picard operatörüdür. Bu tez çalışmasında ele alınacak denklem modellerinin H-U ve H-U-R kararlılığı sabit nokta metodu ve yukarıda belirtilen araçlar yardımıyla incelenmektedir.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Obloza (1993), $D \subset \mathbb{R}^2$ ve $f \in C(D, \mathbb{R})$ olmak üzere aşağıdaki birinci basamaktan

$$x' = f(t, x), (t, x) \in D \times \mathbb{R}^2$$

lineer diferansiyel denklemini ele aldı ve bu denklemin H-U kararlılığını inceledi.

Daha sonradan Alsina ve Ger (1998) tarafından elde edilen sonuçlar, Miura vd. (2001), Miura (2002) ve Takahasi vd. (2002) gibi araştırmacılar tarafından göz önüne alınarak yeni sonuçlar elde edildi. Miura vd. (2003), Miura vd. (2004), Jung (2004; 2005; 2006) ve Li ve Huang (2013) ise çeşitli diferansiyel denklemlerin H-U kararlılığını incelediler.

Jung (2006),

$$\frac{d\vartheta}{dt} + g(t)\vartheta(t) = -h(t)$$

ile verilen birinci mertebeden lineer diferansiyel denkleminin H-U kararlılığını inceledi.

Jung (2007),

$$\vartheta(x) = \int_c^x f(\tau, \vartheta(\tau)) d\tau$$

Volterra ID'inin çözümlerinin tekliğini ve H-U-R kararlılığını daralma dönüşümü yardımı ile inceledi.

Castro ve Ramos (2009),(2010),

$$\vartheta(x) = \int_a^x f(x, \tau, \vartheta(\tau)) d\tau$$

ve $f(\dots) = f(x, \tau, \mathcal{G}(\tau), \mathcal{G}(\alpha(\tau)))$ olmak üzere

$$\mathcal{G}(x) = \int_a^x f(\dots) d\tau$$

ile verilen sırasıyla gecikmesiz ve gecikmeli lineer olmayan Volterra ID türlerinin H-U ve H-U-R kararlılıklarını inceledi.

Li ve Hua (2009)

$$x^n + \alpha x + \beta = 0$$

ile verilen polinom denkleminin H-U kararlılığını daralma dönüşümü yardımı ile inceledi.

Li ve Shen (2009),

$$\mathcal{G}'' + p(x)\mathcal{G}' + q(x)\mathcal{G} = -r(x)$$

ile verilen aşağıdaki ikinci mertebeden lineer diferansiyel H-U kararlılığını daralma dönüşümü yardımı ile incelediler.

Li (2010), $y \in C^2[a, b]$, $\lambda > 0$ olmak üzere ikinci mertebeden

$$\frac{d^2 \mathcal{G}}{dt^2} = \lambda^2 \mathcal{G}$$

lineer diferansiyel denkleminin H-U kararlılığını inceledi.

Li ve Shen (2010), $y \in C^2[a, b]$, $f \in C[a, b]$, α ve β sabitler olmak üzere, ikinci mertebeden lineer homojen

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$$

ve lineer homojen olmayan

$$y'' + \alpha y' + \beta y = f(x)$$

diferansiyel denklemlerinin H-U kararlılığını incelediler.

Gavruta vd. (2011) ise $\mathcal{G} \in C^2[a, b]$, $\beta(x) \in C[a, b]$, olmak üzere,

$$\frac{d^2 \mathcal{G}}{dx^2} + \beta(x) \mathcal{G} = 0$$

$$\mathcal{G}(a) = \mathcal{G}(b) = 0$$

sınır değer ve

$$\frac{d^2 \mathcal{G}}{dx^2} + \beta(x) \mathcal{G} = 0$$

$$\mathcal{G}(a) = \mathcal{G}'(a) = 0$$

başlangıç değer problemlerinin H-U kararlılığını araştırdılar.

Javadian vd. (2011), $f, p, q \in C[a, b]$ olmak üzere,

$$\frac{d^2 \mathcal{G}}{dx^2} + p(x) \frac{d\mathcal{G}}{dx} + q(x) \mathcal{G} = f(x)$$

diferansiyel denkleminin H-U kararlılığını incelediler.

Ghaemi vd. (2012), $p_0(x) \neq 0$ ve $\forall x \in I$ için $p_0, p_1, p_2, f : I \rightarrow R$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere sonlu bir aralıkta

$$p_0(x) \frac{d^2 \mathcal{G}}{dx^2} + p_1(x) \frac{d\mathcal{G}}{dx} + p_2(x) \mathcal{G} = -f(x)$$

diferansiyel denklemin H-U kararlılığını ispatladılar.

Castro ve Guerra (2013),

$$\mathcal{G}(x) = g(x) + \psi \left(\int_a^x f(t, \mathcal{G}(t), \mathcal{G}(\alpha(t))) dt \right),$$

Volterra ID'inin H-U-R kararlılığını Banach sabit nokta teoremi yardımı ile gösterdiler.

Janfada ve Sadeghi (2013), $G(\dots) = g(t, x(t)) + \int_0^t K(t, s, x(s)) ds$ olmak üzere,

$$x'(t) = G(\dots)$$

IDD'inin ve

$$x(t) = G(\dots)$$

ID'inin H-U kararlılığını yeter koşullar altında gösterdiler.

Rezai vd. (2013),

$$\rho^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \rho^{(k)} = f(t)$$

şeklindeki n . mertebeden bir lineer diferansiyel denkleminin H-U kararlılığını Laplace dönüşümü metodu ile incelediler.

Otrocol ve Ilea (2013), $f(\dots) = f(\xi, x(\xi), x(g(\xi)))$ alınmak kaydıyla

$$x' = f(\dots)$$

gecikmeli diferansiyel denkleminin H-U ve H-U-R kararlılıklarıyla ilgili yeter koşullar elde ettiler.

Alqifiary ve Jung (2014), Gronwall's eşitsizliğini kullanarak

$$u'' + (1 + \psi(t))u = 0, \quad u(t_0) = u'(t_0) = 0$$

başlangıç değer probleminin H-U kararlılığını ispatladılar.

Xue (2014), α ve β sabitler olmak üzere

$$\sigma'' + \alpha\sigma' + \beta\sigma = 0$$

$$\sigma'' + \alpha\sigma' + \beta\sigma = f(x)$$

biçimindeki diferansiyel denklemlerin H-U kararlılığını yeter koşullar altında gösterdi.

$$\text{Abbas ve Benchohra (2015), } F(\dots) = f\left(\zeta, u(\zeta)\right) \int_0^\zeta k(\zeta, s) g(s, u(s)) ds \text{ olmak}$$

üzere

$$u(\zeta) = F(\dots)$$

ID'inin çözümlerinin varlığı ve tekliği ile birlikte H-U-R kararlılığını da incelemiştir.

Choi ve Jung (2015), ikinci mertebeden

$$\delta'' + f(x)\delta' + g(x)\delta = r(x)$$

lineer diferansiyel denkleminin genelleştirilmiş H-U kararlılığını incelediler.

Huang vd. (2015), $n \in N^+$ olmak üzere bir I sonlu aralığı üzerinde

$$\theta^{(n)} = F\left(\xi, \theta, \theta', \dots, \theta^{(n-1)}\right)$$

formundaki diferansiyel denklemin H-U kararlılığını Lipschitz şartı ve sabit nokta teoremi yardımıyla incelediler.

Mortici vd. (2015), homojen olmayan

$$x^2 \frac{d^2 g}{dx^2} + \alpha x \frac{dg}{dx} + \beta g = f(x)$$

Euler diferansiyel denkleminin H-U kararlılığını integrasyon yöntemini kullanarak ispatladılar.

Tunç ve Biçer (2015), $F(.) = F(\eta, \theta, \theta(\eta - \tau))$ olmak üzere

$$\theta'(\eta) = F(.)$$

ile verilen birinci mertebeden sabit gecikmeli diferansiyel denkleminin H-U ve H-U-R kararlılıklarını sabit nokta teoremini kullanarak gösterdiler.

Li vd. (2016),

$$\sum_{i=0}^n \beta_{n-i}(\nu) \eta^{(n-i)}(\nu) = \alpha(\nu)$$

ve

$$\eta^{(n)}(\nu) + \sum_{i=0}^n \theta_{n-i} \eta^{(n-i)}(\nu) = f(\nu)$$

denklemlerinin H-U kararlılıklarını sabit nokta teoremi yardımıyla ispatladılar.

Popa ve Pugna (2016),

$$x^n \eta^{(n)} x + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \eta^{(j)}(x) = f(x)$$

şeklinde verilen n . mertebeden homojen olmayan Euler lineer diferansiyel denkleminin genelleştirilmiş H-U kararlılığını incelediler.

Onitsuka ve Shoji (2017), α sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere

$$x' - ax = 0$$

ile verilen birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemin H-U kararlılığı ile ilgili yeter koşullar elde ettiler.

Castro ve Simoes (2018),

$$f(\dots) = f\left(\zeta, \gamma(\zeta), \gamma(\alpha(\zeta)), \int_a^\zeta k(\zeta, \tau, \gamma(\tau), \gamma(\beta(\tau))) d\tau\right)$$

olmak üzere

$$\gamma'(\zeta) = f(\dots)$$

Volterra IDD'inin H-U, H-U-R, σ - H-U kararlılıklarını inceledi.

$$\text{Akkouchi (2019) } F(\dots) = F(r, \theta, \int_{0^+}^t K(r, s, \theta(r), \theta(s))) ds \text{ olmak kaydıyla}$$

$$\theta'(t) = F(\dots), \quad \theta(0^+) = 0,$$

lineer olmayan ID'inin sabit nokta metodu yardımı ile H-U-R kararlılığını inceledi.

$$\text{Castro ve Simoes (2019), } f(\dots) = f\left(\zeta, \lambda(\zeta), \int_a^\zeta k(t, \tau, \lambda(\tau), \lambda(\alpha(\tau))) d\tau\right) \text{ olmak}$$

üzere

$$\lambda'(\zeta) = f(\dots), \quad y(\alpha) = c \in \mathbb{R},$$

Volterra IDD'inin H-U ve H-U-R kararlılıklarını inceledi.

Kucche ve Shikhare (2019)

$$f(\dots) = f\left(\sigma, \theta, \theta(g(\sigma)), \int_0^\sigma h(\sigma, s, \theta(s), \theta(g(s))) ds\right)$$

olmak üzere

$$\theta'(\sigma) = f(\dots), \quad t \in I,$$

$$\theta(\sigma) = \phi(\sigma), \quad \sigma \in [-r, 0],$$

lineer olmayan Volterra IDD'inin Ulam kararlılığını gösterdiler.

$$\text{Ciplea ve Lungu (2020), } f(\dots) = h(x, y) + \int_0^x \int_0^y f(s, t, u(s, t)) ds dt \text{ olmak üzere}$$

$$u(x, y) = f(\dots)$$

ID'inin H-U ve H-U-R kararlılığı Banach sabit nokta teoremi yardımı ile incelediler.

$$\text{Vu ve Hoa (2020), } f(\dots) = f(t, \mu(t)) + \int_a^t g(t, s, \mu(s)) ds, \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{cases} \mu'(t) = f(\dots), & t \in J \\ \mu(a) = \mu_0 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin H-U ve H-U-R kararlılığıyla ilgili sonuçlar elde etti.

$$\text{Ege vd. (2021), } f(\dots) = f(x) + \int_a^x \mathcal{G}(x-t)K(x, t, \varphi(t))dt \text{ olmak üzere}$$

$$\varphi(x) = f(\dots)$$

singüler çekirdekli Volterra ID'inin H-U kararlılığını sabit nokta metodu yardımı ile inceledi.

Graef vd. (2023)

$$F(\dots) = F(\mu, x, f(x), f(x(\mu - r_1))), \int_0^t H(\mu, s, x(s), h(x(s)), h(x(s - r_2))) ds \text{ olarak verilmek}$$

üzere lineer olmayan sabit çoklu gecikmeli

$$\frac{dx}{d\mu} = F(\dots) + G(\mu, x, g(x(\mu)), g(\mu - r_3)),$$

IDD'inin H-U ve H-U-R kararlılığın sonlu kapalı olarak verilen bir aralıkta Banach sabit nokta teoremi, Picard operatörü ve Pachpatte eşitsizliği yardımı ile inceledi.

Tunç ve Tunç (2023a),

$$H(\dots) = F(t, z^{[1]}(t), \dots, z^{[m]}(t)) + \int_a^t H(t, \tau, z^{[1]}(\tau), \dots, z^{[m]}(\tau)) d\tau \text{ olmak üzere}$$

$$z'(t) = H(\dots)$$

IDD'inin sabit nokta teoremi yardımı ile çözümlerinin varlığını, tekliğini, H-U ve H-U-R kararlılıklarını inceledi.

Tunç ve Tunç (2023b)

$$f(\cdot) = f(x, y(x), y(\tau(x))) \int_a^x g(x, \tau) h(\tau, y(\tau) y(\vartheta(t))) d\tau + p(x)$$

olmak üzere

$$y(x) = f(\cdot)$$

gecikmeli Hammerstein ID'inin H-U ve H-U-R kararlılıklarını sabit nokta teoremi yardımı ile araştırdı.

$$\text{Öğrekçi vd. (2023), } R(\dots) = g(t, x(t)) + \int_0^t K(t, s, x(s)) ds \text{ olmak üzere}$$

$$x(t) = R(\dots)$$

Volterra ID'inin H-U ve H-U-R kararlılığını sabit nokta teoremi yardımı ile inceledi.

$$\text{Tunç vd. (2024), } F(\dots) = f\left(t, x(t), g(x(t)), \int_0^t h(t, \tau, x(\tau), p(x(\tau))) d\tau\right),$$

$$R(\dots) \int_0^t r(t, \tau, x(\tau), \ell(x(\tau))) d\tau + q(t, x(t), \gamma(x(t))) \text{ ve } Q(\dots) = q(t, x(t), \gamma(x(t))) \text{ olarak}$$

verilmek üzere

$$x'(t) = F(\dots) + R(\dots) + Q(\dots)$$

Volterra IDD'inin ve

$$x(t) = F(\dots) + R(\dots) + Q(\dots)$$

ID'nin H-U ve H-U-R kararlılıklarını sabit nokta metodu yardımıyla incelediler.

Benzer biçimde ikinci mertebeden diferansiyel denklemler ve belli formdaki fonksiyonel denklemlerin Ulam türünden kararlılıkları için sırasıyla Biçer ve Tunç (2023) ve Cadariu ve Radu (2004), Radu (2003) çalışmalarına bakılabilir.

Yukarıda verilen bilgiler dikkate alındığında, farklı ADD modelleri, ID'ler, IDD'ler, KDD'ler FDD'ler vb. matematiksel modellerin H-U ve H-U-R kararlılıklarının çok sayıda araştırmacı tarafından incelendiği görülmektedir. Bu denklem modellerinin H-U ve H-U-R kararlılık davranışlarının Banach sabit nokta teoremi yardımı ile incelendiği görülmektedir. Bu incelmeler sırasında tam metrik uzay kavramı, , Gronwall eşitsizliği, Chebyshev normu, Bielecki normu vb. kavramların kullanıldığı görülmektedir.

3. MATERYAL YÖNTEM, TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu tezde belli formdaki çeşitli ID ve IDD'lerin niteliksel davranışları ile ilgili literatürde mevcut bulunan kitaplar, bazı makaleler, bilimsel toplantılarda konu ile ilgili sunulan bildiriler vb. dokümanlar tezin materyali olarak dikkate alınmaktadır. Yöntem olarak ise, Banach sabit nokta teoremi, Bielecki, Chebyshev vb. normlar ve Picard operatörü yardımıyla temel eşitsizlikler kullanılarak ele alınan denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği ve denklemlerin Ulam tipi kararlılıkları incelenmektedir.

Tanım 3.1 N bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ gösterelim. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\|\cdot\|$ ye N de norm denir:

- (i) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dir;
- (ii) $\|ax\| = |a|\|x\|$ dir;
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Bayraktar, 1987).

Tanım 3.2 X boş olmayan bir cümle olsun ve bir $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa d 'ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

- (i) $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$;
- (ii) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Bayraktar, 1987).

Tanım 3.3 X boş olmayan bir küme olsun. $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyor ise, bu fonksiyona X kümesi üzerinde genelleştirilmiş metrik uzay denir:

- (i) $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$;
- (ii) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Castro ve Simoes, 2019)

Genelleştirilmiş metrik ile bilinen metrik arasındaki tek fark genelleştirilmiş metriğin değer kümesinin sonsuzu içermesidir (Jung, 2010).

Tanım 3.4 (Sabit Nokta) X boş olmayan bir ve $T: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. $Tx = x$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ elemanına T nin sabit noktası denir (Berinde, 2007).

Tanım 3.5 (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir fonksiyonu olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ olacak şekilde bir α pozitif sayısı ($\alpha < 1$) varsa T ye bir daralma dönüşümü denir (Burton, 1985).

Teorem 3.1 (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir daralma dönüşümü ise, T dönüşümünün X uzayında bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir (Burton, 1985).

Teorem 3.2 (X, d) genelleştirilmiş bir tam metrik uzay olsun. $L < 1$ Lipschitz sabiti olmak üzere $\Lambda : X \rightarrow X$ dönüşümü kuvvetli bir daralma operatörü olsun. Eğer negatif olmayan bir k tamsayısı var öyle ki her $x \in X$ için $d(\Lambda^{(k+1)}x, \Lambda^k x) < 1$ eşitsizliği sağlanıyor ise, bu takdirde aşağıdaki şartlar doğrudur:

- (a) $\{\Lambda^n x\}$ dizisi Λ 'nın sabit bir x^* noktasına yakınsar;
- (b) x^* noktası,

$$X^* = \{y \in X : d(\Lambda^k x, y) < \infty\}$$

cümlesinde Λ 'nın bir tek sabit noktasıdır;

- (c) Eğer $y \in x^*$ ise, $d(y, x^*) \leq \frac{1}{1-L} d(\Lambda y, y)$ dir (Diaz ve Margolits, 1968).

Tanım 3.6 (X, d) bir tam metrik olmak üzere $T : X \rightarrow X$ e bir daralma fonksiyonu ise o zaman

- (i) T nin bir ve yalnız bir sabit $x \in X$ noktası vardır.
- (ii) Herhangi $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi, T nin bu sabit noktasına yakınsar (Berinde, 2007).

Teorem 3.3 (Banach Sabit Nokta Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir daralma dönüşümü olsun, yani her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde bir $\alpha \in [0, 1)$ sayısı var olsun. Bu durumda T 'nin bir tek sabit noktası, $Ta = a$ olacak şekilde en az bir $a \in X$ vardır. (Burton, 1985).

Tanım 3.7 (X, d) bir metrik uzay ve $A: X \rightarrow X$ operatörü verilsin. Eğer bir $x^* \in X$ sabiti var ve aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise, A operatörüne bir Picard operatörü denir:

(i) $F_A = \{x^*\}$ dır. Burada $F_A = \{x \in X : A(x) = x\}$ cümlesi A 'nın sabit noktalarının cümlesidir.

(ii) $(A^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi her $x_0 \in X$ için x^* sabitine yakınsar (Rus, 2009).

Lemma 3.1 (Gronwall lemması) $(X, d, \leq)$ sıralı bir metrik uzay ve artan bir Picard operatörü $(F_A = x_A^*)$ olsun. Bu takdirde $x \in X$ için $x \leq A(x)$ eşitsizliği $x \leq x_A^*$ eşitsizliğini ve $x \geq A(x)$ eşitsizliği ise $x \geq x_A^*$ eşitsizliğini gerektirir (Rus, 2009).

Teorem 3.4 (Pachpatte's eşitsizliği) $u(t)$, $f(t)$ ve $q(t)$ $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlanan negatif olmayan sürekli fonksiyonlar ve $n(t)$ ise, $t \in \mathbb{R}_+$ için tanımlı pozitif azalmayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$u(t) \leq n(t) + \int_0^t f(s) \left[u(s) + \int_0^s u\tau d\tau \right] ds,$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda her $t \in \mathbb{R}_+$ için

$$u(t) \leq n(t) \left[1 + \int_0^t f(s) \exp \left(\int_0^s |f(\tau) + q(\tau)| d\tau \right) ds \right],$$

eşitsizliği sağlanır (Pachpatte, 1998).

Uyarı 3.1 $x \in [a, b]$ ve $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere Bielecki metriği

$$d(u, v) = \sup_{x \in [a, b]} \frac{|u(x) - v(x)|}{\sigma(x)}$$

ile tanımlanır. Burada $\sigma: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ azalmayan sürekli bir fonksiyondur ve ayrıca

$(C^1([a, b]), d)$ tam bir metrik uzaydır (Castro ve Simoes, 2019).

Tanım 3.8 Reel veya kompleks değerli $[a, b]$ aralığında sürekli ve sınırlı f fonksiyonu için $\|f(x)\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ şeklinde tanımlanan norma Chebyshev normu denir (Ross ve Belford, 1976).



4. LİNEER OLMAYAN BİR VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM VE İNTEGRAL DENKLEMİN HYERS-ULAM KARARLIĞI

Bu bölümde Janfada ve Sadeghi (2013) tarafından H-U kararlılığı incelenen lineer olmayan bir IDD ve ID kararlılık sonuçları sırasıyla ele alınacaktır. Janfada ve Sadeghi (2013) yaptığı çalışmada ilk olarak

$$x'(t) = G(...) \quad (4.1)$$

Volterra IDD'ini göz önüne aldı. Burada $G(...) = g(t, x(t)) + \int_0^t K(t, s, x(s)) ds$ olarak tanımlanmaktadır. Bu denklemin H-U kararlılığını $t \in [0, T]$, $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$, aralığında sabit nokta metodu yardımıyla inceledi.

Aynı çalışmada, Janfada ve Sadeghi (2013)

$$x(t) = G(...) \quad (4.2)$$

Volterra ID'ini göz önüne aldı. Bu denklemin H-U kararlılığını $t \in [0, T]$, $T > 0$, aralığında sabit nokta metodu yardımıyla inceledi.

Tanım 4.1 $\phi(t) \geq 0$ bir fonksiyon ve $x(t)$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

Ayrıca $x(t)$ fonksiyonu her $t \in [0, T]$, $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$, için

$$\|x'(t) - G(...)\| \leq \phi(t)$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer (4.1) denkleminin bir $y(t)$ çözümü var öyle ki $C > 0$ sabiti için

$$\|x(t) - y(t)\| \leq C \phi(t)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, bu takdirde (4.1) denkleminde H-U kararlıdır denir. Bu eşitsizlik (4.1) ile verilen IDD'nin analitik çözümüyle yaklaşık çözümü arasındaki farkın normunun $C\phi(t)$ den küçük kaldığı anlamına gelir (Janfada ve Sadeghi, 2013).

Benzer biçimde H-U kararlılık tanımı (4.2) ile verilen Volterra ID'i için de verilebilir.

4.1 (4.1) İntegro-Diferansiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı

Bu kesimde Janfada ve Sadeghi'nin (2013) çalışmasında ele aldığı ve (4.1) ile verilen Volterra IDD'nin H-U kararlılığı incelenecektir.

Janfada Sadeghi (2013), çalışmalarında (4.1) Volterra IDD'nin H-U kararlılığı ile ilgili yeter koşullar içeren aşağıdaki teoremi ispatladılar.

Teorem 4.2 X bir Banach uzayı, L, L_1, L_2 , ve T pozitif birer sabit olmak üzere

$$0 < L_1 + (L_1 + L_2)L + L_2TL < 1$$

eşitsizliği sağlansın. $K : [0, T] \times [0, T] \times X \rightarrow X$, $g : [0, T] \times X \rightarrow X$, ve $\phi : [0, T] \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonları sürekli olsun ve bu fonksiyonlar her $0 \leq s, t \leq T$ ve $x, y \in X$ için aşağıdaki şartları sağlasın:

$$\|K(t, s, x) - K(t, s, y)\| \leq L_2 \|x - y\|,$$

$$\|g(t, x) - g(t, y)\| \leq L_1 \|x - y\| \quad (4.3)$$

ve

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq L\phi(t).$$

Eğer $f : [0, T] \rightarrow X$ fonksiyonu türevlenebilir ve

$$\left\| f'(t) - g(t, f(t)) - \int_0^t K(t, s, f(s)) ds \right\| \leq \phi(t), t \in [0, T], \quad (4.4)$$

eşitsizliğini sağlar ise, bu takdirde $\forall t \in [0, T]$ için, bir tek türevlenebilir $f_0 : [0, T] \rightarrow X$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$f'_0(t) = g(t, f_0(t)) + \int_0^t K(t, s, f_0(s)) ds, \quad (4.5)$$

ve

$$\|f'(t) - f'_0(t)\| + \|f(t) - f_0(t)\| \leq \frac{1+L}{1-L_1 + (L_1 + L_2)L + L_2 TL} \phi(t) \quad (4.6)$$

dır (Janfada Sadeghi, 2013).

İspat.

$$M := \{x : [0, T] \rightarrow X : x \text{ türevlenebilirdir}\}$$

cümlesi ve d metriği ise $M \times M$ den $[0, \infty]$ 'a aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$d(x, y) = \inf \{C \in [0, \infty] : \|x' - y'\| + \|x - y\| \leq C\phi(t), 0 \leq t \leq T\}.$$

Şimdi ise (M, d) 'nin genelleştirilmiş bir tam metrik uzay olduğu gösterilecektir. Burada tanımlanan metriğin üçgen eşitsizliğini sağladığını ve (M, d) 'nin ise bir tam metrik uzay olduğu ispatlanacaktır. Tersine d metriğinin üçgen eşitsizliğini sağlamadığını kabul edelim. Bu durumda en az bir $x, y, z \in M$ için,

$$d(x, y) > d(x, z) + d(z, y)$$

eşitsizliğinin sağlandığı kabul edilebilir. Bu takdirde, $t_0 \in [0, T]$ noktası vardır öyle ki

$$\|x'(t_0) - y'(t_0)\| + \|x(t_0) - y(t_0)\| > (d(x, z) + d(z, y))\phi(t_0) \quad (4.7)$$

dır. d metriğinin tanımı dikkate alındığında,

$$\begin{aligned} \|x'(t_0) - y'(t_0)\| + \|x(t_0) - y(t_0)\| &> \|x'(t_0) - z'(t_0)\| + \|x(t_0) - z(t_0)\| \\ &+ \|z'(t_0) - y'(t_0)\| + \|z(t_0) - y(t_0)\| \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde yukarıdaki kabul sağlanmaz.

Şimdi (M, d) uzayının bir tam metrik uzay olduğunu gösterelim.

$\{x_n\}$, (M, d) uzayında bir Cauchy dizisi olsun. d metriğinin ve Cauchy dizisinin tanımı dikkate alındığında, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall m, n \geq N_\varepsilon$, $0 \leq t \leq \infty$ için

$$\|x'_n - x'_m\| + \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon \phi(t) \quad (4.8)$$

eşitsizliği yazılabilir. Buna bağlı olarak ϕ fonksiyonu $[0, T]$ kapalı aralığında sürekli olduğundan $\{x_n\}$ ve $x'_n(t)$ dizileri $[0, T]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır. Bu durumda türevlenebilir bir x fonksiyonu vardır öyle ki $\{x_n\}$ ve $x'_n(t)$ dizileri düzgün olarak sırasıyla x ve x' fonksiyonlarına yakınsar. Böylece $x \in M$ olduğu görülür. (4.8) eşitsizliğinden, $m \rightarrow \infty$ için limit alındığında $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall m, n \geq N_\varepsilon$, $\forall t \in [0, T]$ için

$$\|x'_n - x'\| + \|x_n - x\| \leq \varepsilon \phi(t)$$

elde edilir. Sonuç olarak $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall m, n \geq N_\varepsilon$, için $d(x_n, x) \leq \varepsilon$ olduğu sonucuna varılır. Buna bağlı olarak (M, d) metrik uzayının bir tam metrik uzay olduğu görülür.

Şimdi $\Lambda : M \rightarrow M$ operatörünü

$$\Lambda(x(t)) = \int_0^t g(\tau, x(\tau)) d\tau + \int_0^t \int_0^t K(\tau, s, x(s)) ds d\tau \quad (4.9)$$

olarak tanımlayalım (Janfada ve Sadeghi, 2013).

Burada, Λ operatörünün kuvvetli bir daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir. Şimdi $x, y \in M$, $C_{xy} \in [0, \infty]$ ve $d(x, y) \leq C_{xy}$ olsun. Böylece $\forall t \in [0, T]$ için $d(x, y)$ metriğinin tanımından

$$\|x' - y'\| + \|x - y\| \leq C_{xy} \phi(t)$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.3) eşitsizliği dikkate alındığında

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{d}{dt} (\Lambda x(t) - \Lambda y(t)) \right\| + \|\Lambda x(t) - \Lambda y(t)\| \\ & \leq L_1 \|x - y\| + L_2 \int_0^t \|x(\tau) - y(\tau)\| d\tau \\ & + L_1 \int_0^t \|x(\tau) - y(\tau)\| d\tau + L_2 T \int_0^t \|x(s) - y(s)\| ds \\ & \leq (L_1 + (L_1 + L_2)L + L_2 TL) C_{xy} \phi(t) \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece yukarıdaki işlemler dikkate alındığında

$$d(\Lambda x, \Lambda y) \leq [L_1 + (L_1 + L_2)L + L_2 TL] d(x, y) \quad (4.10)$$

elde edilir. Buna bağlı olarak Λ operatörü

$$0 < L_1 + (L_1 + L_2)L + L_2 TL < 1$$

olmak kaydıyla, kuvvetli bir daralma dönüşümüdür. Öte yandan $f \in M$ olduğu açıktır.

Ayrıca (4.4) eşitsizliği dikkate alındığında

$$\left\| \frac{d}{dt}(\Lambda f - f) \right\| + \|\Lambda f - f\| \leq \phi(t) + \int_0^t \phi(s) ds = (1+L)\phi(t)$$

elde edilir. Buna bağılı olarak

$$d(\Lambda f, f) \leq 1+L < \infty \quad (4.11)$$

yazılabilir. Diaz ve Margolits (1968)'de bulunan Teorem 3.2'nin (a) şartı dikkate alındığında bir tek

$$f_0 \in M^* = \{y \in M : d(\Lambda f, y) < \infty\}$$

sabit noktası vardır öyle ki $\Lambda f_0 = f_0$ olur veya eşdeğer olarak

$$f_0(t) = \int_0^t g(\tau, f_0(\tau)) d\tau + \int_0^t \int_0^t K(\tau, s, f_0(s)) ds d\tau$$

yazılabilir. Burada f_0 türevlenebilir ve g, K fonksiyonları sürekli olduğundan

$$f_0'(t) = g(t, f_0(t)) + \int_0^t K(t, s, f_0(s)) ds$$

elde edilir. O halde Teorem 3.2' nin (c) şartı ve yukarıdaki bağıntı göz önüne alındığında

$$d(f, f_0) \leq \frac{1}{1 - (L_1 + (L_1 + L_2)L + L_2TL)} d(\Lambda f, f) \leq \frac{(1+L)}{1 - (L_1 + (L_1 + L_2)L + L_2TL)}$$

sonucuna varılır. d metriğinin tanımından, (4.6) eşitsizliğinin $\forall t \in [0, T]$ için sağlandığı sonucuna varılır.

Şimdi ise

$$\theta = \frac{(1+L)}{1-(L_1+(L_1+L_2)L+L_2TL)}$$

olarak seçilsin. Ayrıca h fonksiyonu (4.5), (4.6) bağıntılarını sağlayan başka bir türevlenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda $f \in M$ için $d(f, h) < \theta$ olmak üzere

$$h'(t) = g(t, h(t)) + \int_0^t K(t, s, h(s)) ds \quad (4.12)$$

bağıntıları sağlanır. f_0 'ın tekliğini ispatlamak için h fonksiyonunun Λ 'nın sabit bir noktası ve $h \in M^*$ olduğunu göstermek yeterlidir.

(4.12) eşitliği kullanılarak $\Lambda h = h$ olduğu görülebilir. Şimdi $d(\Lambda f, h) < \infty$ olduğunu gösterelim. (4.12) bağıntısı ve $d(\Lambda f, h) < \theta$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{d}{dt}(\Lambda f(t) - h(t)) \right\| + \|\Lambda f(t) - h(t)\| \\ & \leq L_1 \|f - h\| + L_2 \int_0^t \|f(s) - h(s)\| ds + T \left(L_1 \|f - h\| + L_2 \int_0^t \|f(s) - h(s)\| ds \right) \\ & \leq (L_1 + L_2)(1+T)\theta\phi(t) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $d(\Lambda f, h) \leq (L_1 + L_2 T)\theta < \infty$ olduğu görülür. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

4.2 (4.2) İntegral Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı

Bu kesimde Janfada ve Sadeghi'nin (2013) çalışmasında ele alınan ve (4.2) ile verilen Volterra ID'inin H-U kararlılığı incelenecektir.

Janfada ve Sadeghi'nin (2013), (4.2) Volterra ID'inin H-U kararlılığı ile ilgili yeter koşullar içeren aşağıdaki teoremi ispatladılar.

Teorem 4.3 X bir Banach uzayı olmak üzere, L, L_1, L_2 ve T sabitleri için $0 < (L_1 + L_2)L < 1$ eşitsizliği sağlansın. $g \in C([0, T] \times X, X)$, $K \in C([0, T] \times [0, T] \times X, X)$, ve $\phi \in C([0, T], (0, \infty))$ fonksiyonları sürekli, $\forall x, y \in X$ ve $s, t \in [0, T]$ için

$$\|g(t, x) - g(t, y)\| \leq L_1 \|x - y\|$$

$$\|K(t, s, x) - K(t, s, y)\| \leq L_2 \|x - y\| \quad (4.13)$$

ve

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq L\phi(t)$$

eşitsizlikleri sağlansın. Eğer $f : [0, T] \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu

$$\left\| f(t) - g(t, f) - \int_0^t K(t, s, f(s)) ds \right\| \leq \phi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.14)$$

eşitsizliğini sağlar ise, o zaman bir tek sürekli $f_0 : [0, T] \rightarrow X$ fonksiyonu vardır öyle ki;

$$\left\| f - g(t, f) - \int_0^t K(t, s, f(s)) ds \right\| \leq \phi(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$f_0 = g(t, f_0) + \int_0^t K(t, s, f_0(s)) ds \quad (4.15)$$

ve

$$\|f(t) - f_0(t)\| \leq [1 - (L_1 + L_2)L]^{-1} \phi(t) \quad (4.16)$$

dir (Janfada ve Sadeghi, 2013).

İspat. $M := \{x : [0, T] \rightarrow X : x \text{ sürekli} \}$ olmak üzere, d metriği ise $M \times M$ den $[0, \infty]$ 'a aşağıdaki biçimde tanımlansın:

$$d(x, y) = \inf \{C \in [0, \infty] : \|x - y\| \leq C\phi(t), 0 \leq t \leq T\}.$$

Bir önceki teoremden verilen işlemler dikkate alındığında, (M, d) uzayının genelleştirilmiş bir tam metrik uzay olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca bir önceki teoremden verilen M uzayı ve Λ operatörü göz önüne alındığında her $x, y \in M$ için,

$$d(\Lambda x, \Lambda y) \leq (L_1 + L_2) L d(x, y)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

$0 < (L_1 + L_2) L < 1$ olması nedeniyle Λ 'nın kuvvetli bir daralma dönüşümü olduğu sonucuna varılır. Ayrıca (4.14) bağıntısı kullanıldığında $d(\Lambda f, f) \leq 1 < \infty$ elde edilir. Böylece Teorem 3.2'den, Λ operatörünün

$$M^* := \{y \in M : d(\Lambda f, y) < \infty\}$$

cümlesinde bir tek f_0 sabit noktaya sahip olduğu sonucuna varılır. Şimdi ise h fonksiyonunun (4.15) ve (4.16) bağıntılarını sağlayan başka bir sürekli fonksiyon olsun. Buna bağlı olarak her $f \in M$ için

$$d(f, h) < \frac{1}{1 - (L_1 + L_2) L}$$

ve

$$h = g(t, h) + \int_0^t K(t, s, h(s)) ds$$

elde edilir. h fonksiyonunun tekliğini göstermek için, bu fonksiyonun Λ operatörünün bir sabit noktası ve $h \in M^*$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. (4.15) bağıntısı kullanılarak $\Lambda h = h$ yazılabilir. Ayrıca

$$d(f, h) < \frac{1}{1 - (L_1 + L_2)L}$$

bağıntısı kullanıldığında

$$\|\Lambda f(t) - h(t)\| \leq \frac{(L_1 + L_2)}{1 - (L_1 + L_2)L} \phi(t)$$

elde edilir. Bu bağıntıdan ise $d(\Lambda f, h) < \infty$ olduğu görülür ve böylece teoremin ispatı tamamlanır (Janfada ve Sadeghi, 2013)

5. LİNEER OLMAYAN DEĞİŞKEN GECİKMELİ BİR İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMİ İÇİN HYERS-ULAM VE HYERS-ULAM RASSIAS KARARLILIKLARI

Bu bölümde Castro ve Simoes (2019) tarafından

$$y'(x) = f(...) \quad (5.1)$$

ele alınan Volterra IDD'i için oluşturulan H-U ve H-U-R kararlılık sonuçları ele alınacaktır. Burada $f(...) = f\left(x, y(x), \int_a^x k(x, \tau, y(\tau), y(\alpha(\tau)))d\tau\right)$ dır. Ayrıca $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$, $\mathbb{C}$ bir Banach uzayı, $y \in C^1([a, b])$, $y(a) = c$, $c \in \mathbb{R}$, olmak üzere, $f \in C([a, b] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \mathbb{C})$ ve $k \in C([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \mathbb{C})$ dır. Ayrıca $\alpha \in C([a, b], [a, b])$ ise s gecikme fonksiyonu ve her $a \leq \tau \leq b$ için $\alpha(\tau) \leq \tau$ dır.

Castro ve Simoes (2019), (5.1) denkleminin H-U ve H-U-R kararlılığını Bielecki metriği yardımıyla incelediler.

(5.1) Volterra IDD'i için Ulam anlamında kararlılık tanımları aşağıda verilmektedir.

Tanım 5.1 y fonksiyonu

$$|y'(x) - f(...)| \leq \theta, \quad x \in [a, b] \quad (5.2)$$

eşitsizliğini sağlasın. (5.2) denkleminin bir çözümü var öyle ki $C > 0$ sabiti y ve y_0 'dan bağımsız olmak üzere, her $a \leq x \leq b$ için

$$|y(x) - y_0(x)| \leq C\theta$$

eşitsizliği sağlanıyor ise (5.1) denklemi H-U kararlıdır denir. Burada $\theta \geq 0$ gerçel bir sabittir.

Tanım 5.2 y fonksiyonu

$$|y'(x) - f(\dots)| \leq \sigma(x), \quad x \in [a, b]$$

eşitsizliğini sağlasın. (5.1) denkleminin bir çözümü var öyle ki, σ negatif olmayan bir fonksiyon ve $C > 0$ sabiti y ve y_0 dan bağımsız olmak üzere, her $a \leq x \leq b$ için

$$|y(x) - y_0(x)| \leq C\sigma(x)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa ise (5.1) Volterra IDD' i H-U-R kararlıdır denir.

5.1 Sonlu Aralıkta (5.1) Denklemi için Hyers-Ulam-Rassias Kararlılık

Bu kesimde Castro ve Simoes (2019) tarafından (5.1) IDD' inin H-U-R kararlılığı için verilen sonuç ele alınacaktır.

Castro ve Simoes (2019), H-U-R kararlılığı ile ilgili aşağıdaki teoremi ispatladı.

Teorem 5.1 Her $a \leq t \leq b$ için $\alpha \in C([a, b], [a, b])$, $\alpha(t) \leq t$ olmak üzere, bir gecikme fonksiyonu ve $\sigma : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ azalmayan sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca bir $\beta \in [0, 1)$ sayısı vardır öyle ki her $x \in [a, b]$ için

$$\int_a^x \sigma(\tau) d\tau \leq \beta \sigma(x)$$

eşitsizliği sağlansın. İlave olarak $f \in C([a, b] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \mathbb{C})$ sürekli bir fonksiyon ve bu fonksiyon $M > 0$ olmak üzere

$$|f(x, u, g) - f(x, v, h)| \leq \frac{M}{(|u - v| + |g - h|)^{-1}}$$

Lipschitz şartını sağlasın. Bununla birlikte $k : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ çekirdeği ise $L > 0$ olmak üzere

$$\left| k(x, t, u, u(\alpha(t))) - k(x, t, v, v(\alpha(t))) \right| \leq \frac{L}{(|u(\alpha(t)) - v(\alpha(t))|)^{-1}}$$

Lipschitz şartını sağlasın. Eğer $y \in C^1([a, b])$ fonksiyonu

$$|y' - f(\dots)| \leq \sigma(x), \quad a \leq x \leq b$$

eşitsizliğini sağlar ve

$$M(\beta + L\beta^2) < 1$$

ise, bu takdirde bir $y_0 \in C^1([a, b])$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$y'_0 = f\left(x, y_0, \int_a^x k(x, \tau, y_0, y_0(\alpha(\tau))) d\tau\right)$$

ve her $a \leq x \leq b$ için

$$|y - y_0| \leq \frac{\beta}{1 - M(\beta + L\beta^2)} \sigma(x) \quad (5.3)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda (5.1) IDD'i H-U-R kararlıdır (Castro ve Simoes (2019)).

İspat.

$$y'(x) = f(\dots)$$

IDD'ini yeniden göz önüne alalım. Bu denklem a dan x e integrallendiğinde, $y(a) = c$, $c \in \mathbb{R}$, başlangıç koşulu kullanıldığında

$$y(x) = c + \int_a^x f(\dots)ds$$

elde edilir. Burada $f(\dots) = f\left(s, y(s), \int_a^s k(s, \tau, y(\tau), y(\alpha(\tau)))d\tau\right)$ dır.

Her $a \leq x \leq b$ ve $u \in C^1([a, b])$ için T operatörü ise $C^1([a, b])$ den kendisine tanımlı olmak üzere,

$$(Tu)(x) = c + \int_a^x f(\dots)ds \quad (5.4)$$

şeklinde tanımlansın Ayrıca u fonksiyonu sürekli olduğundan Tu operatörü de sürekli dir.

Yukarıda verilen (5.4) operatörü yeniden göz önüne alındığında, kolaylıkla

$$|(Tu)(x) - (Tu)(x_0)| = \left| \int_a^x f(\dots)ds - \int_a^{x_0} f(\dots)ds \right| = \left| \int_{x_0}^x f(\dots)ds \right| \rightarrow 0$$

elde edilir. Buna bağlı olarak $x \rightarrow x_0$ iken

$$|(Tu)(x) - (Tu)(x_0)| \rightarrow 0$$

elde edilir.

Şimdi ise mevcut koşullar altında T operatörünün Bielecki metriğine göre kuvvetli bir daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir. Yukarıda verilen metrik, operatör ve koşullar kullanıldığında u, v kapalı bir aralıkta sürekli türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned} d(Tu, Tv) &= \sup \left[\sigma^{-1}(x) |(Tu)(.) - (Tv)(.)| \right] \\ &\leq M \sup \left[\sigma^{-1}(x) \int_a^x |u(s) - v(s)| ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +M \sup \frac{1}{\sigma(x)} \int_a^x \int_a^s \left[\left| k(s, \tau, u(\tau), u(\alpha(\tau))) - k(s, \tau, v(\tau), v(\alpha(\tau))) \right| \right] d\tau ds \\
& \leq M \sup_{s \in [a, b]} \frac{|u(s) - v(s)|}{\sigma(s)} \sup_{x \in [a, b]} \frac{1}{\sigma(x)} \int_a^x \sigma(s) ds \\
& +ML \sup_{\tau \in [a, b]} \frac{|u(\tau) - v(\tau)|}{\sigma(\tau)} \sup_{x \in [a, b]} \frac{1}{\sigma(x)} \int_a^x \int_a^s \sigma(\tau) d\tau ds \\
& \leq M (\beta + L\beta^2) d(u, v)
\end{aligned}$$

elde edilir. $M (\beta + L\beta^2) < 1$ olması nedeniyle T operatörünün bir daralma dönüşümü olduğu sonucuna varılır.

Şimdi (5.1) IDD'nin H-U-R kararlılığına ait ispatı tamamlamak için Banach daralma dönüşümü kullanılacaktır.

$$d(y, y_0) \leq \left[1 - M (\beta + L\beta^2) \right]^{-1} d(Ty, y)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

d metriğinin tanımı ve yukarıdaki veriler dikkate alındığında

$$\sup_{x \in [a, b]} \left[\sigma^{-1}(x) |y - y_0| \right] \leq \beta \left[1 - M (\beta + L\beta^2) \right]^{-1}$$

bulunur. Buna bağlı olarak da (5.3) eşitsizliği, yani

$$|y - y_0| \leq \beta \sigma(x) \left[1 - M (\beta + L\beta^2) \right]^{-1}$$

sonucuna varılır. Dolayısıyla, ispat tamamlanır.

5.2 Sonlu Aralıkda (5.1) Denklemi için Hyers-Ulam Kararlılık

Bu kesimde, Castro ve Simoes (2019) tarafından (5.1) IDD'nin H-U kararlılığı

için verilen sonuç ele alınacaktır.

Castro ve Simoes (2019) (5.1) denkleminin H-U kararlılığı ile ilgili aşağıdaki teoremi ispatladı.

Teorem 5.2 Her $t \in [a, b]$ için $\alpha(t) \leq t$ olmak üzere α ise $C^1([a, b])$ den kendisine sürekli bir gecikme fonksiyonu ve $\sigma: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ azalmayan sürekli bir fonksiyon ve $\beta \in [0, 1)$ olmak üzere her $x \in [a, b]$ için

$$\int_a^x \sigma(\tau) d\tau \leq \beta \sigma(x)$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Ayrıca $f: [a, b] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu sürekli ve bu fonksiyonun, $M > 0$ olmak üzere,

$$|f(x, u, g) - f(x, v, h)| \leq \frac{(|u - v| + |g - h|)}{M^{-1}}$$

Lipshitz şartını sağladığını ve $k: [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli çekirdek fonksiyonun ise, $L > 0$ olmak üzere,

$$|k(x, t, u, u(\alpha(t))) - k(x, t, v, v(\alpha(t)))| \leq \frac{L}{(|u(\alpha(t)) - v(\alpha(t))|)^{-1}}$$

Lipshitz şartını sağladığını kabul edelim.

Eğer $y \in C^1([a, b])$ ve $\theta > 0$ ve $M(\beta + L\beta^2) < 1$ olmak üzere

$$\left| y' - f\left(x, y, \int_a^x k(x, \tau, y(\tau), y(\alpha(\tau))) d\tau\right) \right| \leq \theta, \quad a \leq x \leq b \quad (5.5)$$

eşitsizliği sağlanır ise, bu takdirde tek bir $y_0 \in C^1([a, b])$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$y'_0 = f\left(x, y_0, \int_a^x k(x, t, y_0(t), y_0(\alpha(t))) dt\right)$$

ve her $a \leq x \leq b$ için

$$|y - y_0| \leq \left[1 - M(\beta + L\beta^2)\right]^{-1} \frac{(b-a)\sigma(b)}{\sigma(a)} \theta \quad (5.6)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $y_0 \in C^1([a, b])$ fonksiyonu (5.1) denkleminin bir çözümüdür.

Yukarıda verilen bilgiler dikkate alındığında verilen teoremdaki şartların sağlanması durumunda (5.1) IDD'i H-U kararlı olur (Castro ve Simoes, 2019).

Bu teoremin ispatlaması için Castro ve Simoes (2019)

T dönüşümü $C^1([a, b])$ den kendisine olmak üzere her $a \leq x \leq b$ ve $u \in C^1([a, b])$ için

$$(Tu)(x) = c + \int_a^x f\left(s, u(s), \int_a^s k(s, \tau, u(\tau), u(\alpha(\tau))) d\tau\right) ds \quad (5.7)$$

operatörünü tanımladı. Burada $M(\beta + L\beta^2) < 1$ koşulu dikkate alınıp Bielecki metriği ve Banach sabit nokta teoremi kullanılarak (5.7) operatörünün bir daralma dönüşümü olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Gerçekten (5.5) eşitsizliğinden her $a \leq x \leq b$ için

$$-\theta \leq y'(x) - f\left(x, y(x), \int_a^x k(x, \tau, y(\tau), y(\alpha(\tau))) d\tau\right) \leq \theta \quad (5.8)$$

yazılabilir. (5.8) eşitsizliği integrallendiğinde

$$\left|y - c - \int_a^x f\left(s, y(s), \int_a^s k(s, \tau, y(\tau), y(\alpha(\tau))) d\tau\right) ds\right| \leq \int_a^x \theta d\tau$$

elde edilir. Buna bağlı olarak her $a \leq x \leq b$ için

$$|y - (Ty)(x)| \leq \frac{\theta}{(b-a)^{-1}}$$

sonucuna varılır. Bu eşitsizliğin sonucu olarak Teorem 5.2 deki ispat yöntemi izlenerek kolaylıkla (5.6) eşitsizliği elde edilebilir (Castro ve Simoes,2019).

5.3 Sonsuz Aralıkda (5.1) Denklemi için Hyers-Ulam-Rassias Kararlılık

Bu kesimde, Castro ve Simoes (2019) tarafından (5.1) IDD'nin H-U kararlılığıyla ilgili olarak sonsuz aralıkta elde edilen sonuç verilecektir. Castro ve Simoes (2019) $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[a, b]$ sonlu aralığının yerine $[a, \infty)$ sonsuz aralığı üzerinde aşağıda verilen IDD'nin H-U-R kararlılığını incelediler. Castro ve Simoes (2019)

$$y' = f\left(x, y, \int_a^x k(x, \tau, y(\tau), y(\alpha(\tau))) d\tau\right), y(a) = c \in \mathbb{R} \quad (5.9)$$

başlangıç değer problemini yeniden göz önüne aldı. Burada $y \in C^1([a, \infty))$ ve $x \in [a, \infty)$ olarak verilmek üzere, $f : [a, \infty) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ve $k : [a, \infty) \times [a, \infty) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonlar ve her $\tau \in [a, \infty)$ için $\alpha(\tau) \leq \tau$ olmak üzere $\alpha : [a, \infty) \rightarrow [a, \infty)$ fonksiyonu sürekli gecikme fonksiyonudur. Ayrıca her $\varepsilon, \omega > 0$ için $\sigma : [a, \infty) \rightarrow (\varepsilon, \omega)$ sürekli azalmayan bir fonksiyon olmak üzere $C_b^1([a, \infty))$ ise sınırlı türevlenebilir fonksiyonların uzayı ve bu uzayla ilgili metrik

$$d_b(u, v) = \sup_{x \in [a, \infty)} \left[\sigma^{-1}(x) |u(x) - v(x)| \right]$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Şimdi Castro ve Simoes (2019) konuyla ilgili olarak aşağıdaki teoremi ispatladı.

Teorem 5.3 Her $\alpha(t) \leq t$ olmak üzere her $t \in [a, \infty)$ için $\alpha : [a, \infty) \rightarrow [a, \infty)$ sürekli bir gecikme fonksiyonu, her $\varepsilon, \omega > 0$ için $\sigma : [a, \infty) \rightarrow (\varepsilon, \omega)$ azalmayan sürekli bir fonksiyon, $\beta \in [0, 1)$ olmak üzere her $x \in [a, \infty)$ için

$$\int_a^x \sigma(\tau) d\tau \leq \beta \sigma(x)$$

eşitsizliği ve $f : [a, \infty) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonu, $M > 0$ olmak üzere

$$|f(x, u, g) - f(x, v, h)| \leq \frac{M}{(|u - v| + |g(x) - h|)^{-1}}$$

Lipshitz şartını sağlasın. İlave olarak $k : [a, \infty) \times [a, \infty) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ çekirdek fonksiyonu sürekli olsun öyle ki herhangi sınırlı ve sürekli bir z fonksiyonu için $\int_a^x k(x, \tau, z(\tau), z(\alpha(\tau))) d\tau$ integrali sınırlı ve sürekli bir fonksiyon, $L > 0$ olmak üzere k çekirdeği

$$|k(x, t, u, u(\alpha)) - k(x, t, v, v(\alpha))| \leq \frac{L}{[|u(\alpha) - v(\alpha)|]^{-1}}$$

Lipshitz şartını sağlasın. Eğer $y \in C_b^1([a, \infty))$ fonksiyonu

$$\left| y' - f\left(x, y, \int_a^x k(x, \tau, y(\tau), y(\alpha(\tau))) d\tau\right) \right| \leq \sigma(x), \quad x \in [a, \infty)$$

eşitsizliğini sağlar ve

$$M(\beta + L\beta^2) < 1$$

ise, bu takdirde bir tek $y_0 \in C_b^1([a, \infty))$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$y'_0 = f\left(x, y_0, \int_a^x k(x, \tau, y_0(\tau), y_0(\alpha(\tau)))d\tau\right) \quad (5.10)$$

ve her $x \in [a, \infty)$ için

$$|y(x) - y_0(x)| \leq \beta \left[1 - M(\beta + L\beta^2)\right]^{-1} \sigma(x) \quad (5.11)$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu sonuç ise yukarıdaki şartlar altında (5.9) denkleminin H-U-R kararlı olduğu anlamına gelir (Castro ve Simoes (2019)).

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ için $I_n = [a, a+n]$ aralığını tanımlayalım. Teorem 5.1. den dolayı bir tek sınırlı ve türevlenebilir $y_{0,n} : I_n \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu vardır öyle ki her $x \in I_n$ için

$$y_{0,n} = c + \int_a^x f\left(s, y_{0,n}(s), \int_a^s k(s, \tau, y_{0,n}(\tau), y_{0,n}(\alpha(\tau)))d\tau\right)ds \quad (5.12)$$

ve

$$|y - y_{0,n}| \leq \beta \left[1 - M(\beta + L\beta^2)\right]^{-1} \sigma(x)$$

bağıntıları sağlanır. $y_{0,n}$ fonksiyonu tek olduğundan, eğer $x \in I_n$ ise, bu takdirde

$$y_{0,n} = y_{0,n+1} = y_{0,n+2} = \dots \quad (5.13)$$

yazılabilir.

Herhangi bir $x \in [a, \infty)$ için, $n(x) \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $n(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : x \in I_n\}$

ve $y_0 : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu

$$y_0 = y_{0,n(x)} \quad (5.14)$$

olarak tanımlansın.

Herhangi bir $x_1 \in [a, \infty)$ için $n_1 = n(x_1)$ olsun. Bu takdirde $x_1 \in I_{n_1+1}$ ve bir $\varepsilon > 0$ vardır, buna bağlı olarak da her $x \in (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)$ için $y_0(x) = y_{0,n_1+1}(x)$ yazılabilir. Teorem 5.1.'den bilindiği üzere y_{0,n_1+1} fonksiyonu x_1 noktasında süreklidir. Buna bağlı olarak y_0 fonksiyonu da bu noktada süreklidir.

Şimdi y_0 fonksiyonunun

$$y_0(x) = c + \int_a^x f\left(s, y_0(s), \int_a^s k(s, \tau, y_0(\tau), y_0(\alpha(\tau))) d\tau\right) ds$$

ID'ini ve (5.11) eşitsizliğini sağladığı doğrulanacaktır.

$x \in [a, \infty)$ için $x \in I_{n(x)}$ olacak şekilde bir $n(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. (5.12) ve (5.14) bağıntıları dikkate alındığında

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_{0,n(x)}(x) \\ &= c + \int_a^x f\left(s, y_0(s), \int_a^s k(s, \tau, y_0(\tau), y_0(\alpha(\tau))) d\tau\right) ds \end{aligned} \quad (5.15)$$

yazılabilir.

Herhangi bir $\tau \in I_{n(x)}$ için $n(\tau) \leq n(x)$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca (5.13) bağıntısından $y_0(\tau) = y_{0,n(\tau)}(\tau) = y_{0,n(x)}(\tau)$ olduğu görülebilir. Buna bağlı olarak (5.15) eşitliği sağlanır.

(5.11), (5.12) ve (5.14) bağıntılarının sağlandığını ispatlamak için her $x \in [a, \infty)$ için

$$|y - y_0| = |y - y_{0,n(x)}| \leq \beta \left[1 - M(\beta + L\beta^2)\right]^{-1} \sigma(x)$$

kolaylıkla elde edilebilir.

Bu bağıntı ise teoremde istenen sonuçtur. Şimdi ise y_0 'ın tekliğini gösterelim. Her $x \in [a, \infty)$ için (5.10) ve (5.11) denklemlerini sağlayan sınırlı ve türevlenebilir başka

bir y_1 fonksiyonunu göz önüne alalım. Herhangi bir $n(x) \in \mathbb{N}$ için $I_{n(x)}$ üzerinde çözümün tekliğinden dolayı $y_{0|I_{n(x)}} = y_{0,n(x)}$ elde edilir ve her $x \in I_{n(x)}$ için $y_{1|I_{n(x)}}$ fonksiyonu (5.10) ve (5.11) bağıntılarını sağlar. Böylece

$$y_0(x) = y_{0|I_{n(x)}}(x) = y_{1|I_{n(x)}}(x) = y_1(x)$$

elde edilir. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanır.

(5.1) IDD'nin özel durumlarında yukarıda verilen teoremlerin şartlarının sağlandığına dair örnekler verilecektir (Castro ve Simoes, 2019).

Örnek 5.1 $y: \left[0, \frac{2}{5}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki IDD'ini göz önüne alalım:

$$y' = 1 + 2x - y + \int_0^x \frac{x(1+2x)y(\tau)}{\exp[-\tau(x-\tau)]} d\tau, \quad 0 \leq x \leq \frac{2}{5}. \quad (5.16)$$

Ayrıca $\sigma: \left[0, \frac{2}{5}\right] \rightarrow (0, \infty)$ olmak üzere $\sigma(x) = 3e^x$ fonksiyonunu ve $\alpha: \left[0, \frac{2}{5}\right] \rightarrow \left[0, \frac{2}{5}\right]$ olmak üzere $\alpha(x) = x$ sürekli gecikme fonksiyonunu ele alalım. Şimdi Teorem 5.1.'in koşullarının sağlandığını gösterelim.

$$\int_a^x \sigma(\tau) d\tau = \int_0^x 3e^\tau d\tau \leq \frac{3}{2} e^x = \beta \sigma(x), \quad x \in \left[0, \frac{2}{5}\right]$$

$$\beta = \frac{1}{2}, \quad \sigma(x) = 3e^x$$

olduğu görülür. Ayrıca, (5.16) denklemi ile (5.1) denklemi karşılaştırıldığında

$f: \left[0, \frac{2}{5}\right] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$f(x, y, g(.)) = 1 + 2x - y + g(.)$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak her $x \in \left[0, \frac{2}{5}\right]$ için

$$|f(x, u(.), g(.)) - f(x, v(.), h(.))| \leq |u(.) - v(.)| + |g(.) - h(.)|$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece Teorem 5.1’de M sabiti $M = 1$ olarak alınabilir.

İlave olarak $k: \left[0, \frac{2}{5}\right] \times \left[0, \frac{2}{5}\right] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ çekirdeğinin ise

$$k(x, t, y, y(\alpha(.))) = \frac{x(1+2x)y}{\exp(-t(x-t))}$$

ile verildiği ve sürekli olduğu görülür. Buna bağlı olarak $t \in [0, x]$ ve $x \in \left[0, \frac{2}{5}\right]$ için

$$|k(x, t, u, u(\alpha(.))) - k(x, t, v, v(\alpha(.)))| \leq \frac{18}{25} e^{\frac{1}{25}} |u(\alpha(.)) - v(\alpha(.))|$$

yazılabilir. Teorem 5.1’deki veriler dikkate alındığında

$$L = \frac{18}{25} e^{\frac{1}{25}}$$

ve

$$M(\beta + L\beta^2) = \frac{1}{2} + \frac{9}{50} e^{\frac{1}{25}} < 1$$

olarak elde edilir.

$y(x) = \frac{e^{x^2}}{0.3}$ yaklaşık çözüm olarak alınabilir. Öte yandan, $x \in \left[0, \frac{2}{5}\right]$ için

$$\left| y' - f\left(x, y, \int_a^x k(x, \tau, y(\tau), y(\alpha(\tau))) d\tau\right) \right| = |3^{-1}.7 + 3^{-1}.14x| \leq \sigma(x)$$

elde edilir. Bu sonuçlar ise yukarıda verilen (5.16) IDD'inin H-U-R kararlı olduğunu gösterir.

Yukarıdaki işlemlere ilave olarak söz konusu kararlılık sonucu yaklaşık çözüm ve analitik çözüm dikkate alınarak da gösterilebilir. Gerçekten $y_0(x) = e^{x^2}$ fonksiyonunun (5.16) denkleminin bir çözümü olduğu kolaylıkla görülebilir. Buna bağlı olarak her $x \in \left[0, \frac{2}{5}\right]$ için gerçek çözümle yaklaşık çözüm arasındaki farkın mutlak değeri alındığında

$$|y(x) - y_0(x)| = \left| \frac{e^{x^2}}{0.3} - e^{x^2} \right| \leq \frac{3e^x}{1 - \frac{9}{25}e^{\frac{1}{25}}} = \frac{\beta}{1 - M(\beta + L\beta^2)} \sigma(x)$$

elde edilir. Böylece (5.16) IDD'inin H-U-R kararlı olduğu sonucuna varılır (Castro ve Simoes, 2019).

Örnek 5.2 Şimdi ise $y: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere her $x \in [0,1]$ için

$$y'(x) = (-2x - 4)e^{\frac{x}{2}} + 5y(x) + e^{\frac{x}{2}} \int_0^x ((\tau - x)y(\alpha(\tau))) d\tau \quad (5.17)$$

IDD'ini göz önüne alalım (Castro ve Simoes, 2019).

(5.17) denkleminin H-U kararlı olduğunu gösterelim. $\sigma: [0,1] \rightarrow (0, \infty)$ olmak üzere $\sigma(x) = 1.1e^{10x}$ sürekli fonksiyonunu ve $\alpha: [0,1] \rightarrow \left[0, \frac{1}{2}\right]$ olmak üzere $\alpha(x) = \frac{x}{2}$ sürekli gecikme fonksiyonunu ele alalım. $\alpha(x) \leq x$ olduğu açıktır. Ayrıca $\beta = \frac{1}{10}$ için $\sigma(x) = 1.1e^{10x}$ olmak üzere $\sigma(x) = 1.1e^{10x}$ fonksiyonunun integrali alındığında

$$\int_0^x 1.1e^{10\tau} d\tau \leq \frac{1.1}{10} e^{10x} = \beta\sigma(x), \quad x \in [0,1]$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca $f : [0,1] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu ise

$$f(x, y(x), g(x)) = (-2x - 4)e^{\frac{x}{2}} + 5y(x) + e^{\frac{x}{2}}g(x)$$

ile verilmektedir ve bu fonksiyon süreklidir. Ayrıca bu fonksiyon her $x \in [0,1]$ için

$$|f(x, u, g) - f(x, v, h)| \leq 5(|u - v| + |g - h|)$$

Lipschitz şartını sağlar.

Süreklili $k : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ çekirdeği

$$k(x, t, y, y(\alpha(t))) = \frac{y(\alpha(t))}{(t - x)^{-1}}$$

ile tanımlanır. Her $t \in [0, x]$ ve her $x \in [0,1]$ için çekirdek fonksiyonu

$$|k(x, t, u, u(\alpha(t))) - k(x, t, v, v(\alpha(t)))| \leq |u(2^{-1}t) - v(2^{-1}t)|$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $L = 1$ olarak alınabilir. Böylece $M(\beta + L\beta^2) = \frac{11}{20} < 1$ elde edilir.

Eğer yaklaşık çözüm $y(x) = \frac{100}{99}e^x$ olarak seçilirse, bu takdirde her $x \in [0,1]$ için

$$\left| y' - f\left(x, y, \int_a^x k(x, \tau, y(\tau), y(\alpha(\tau))) d\tau\right) \right| = \left| \left(-\frac{2}{99}x - \frac{4}{99}x\right)e^{\frac{x}{2}} \right| \leq \theta$$

elde ederiz. Burada $\theta = 0.1$ olarak alınmaktadır. Dolayısıyla Teorem 5.2.'nin tüm şartları sağlanır ve (5.17) IDD'inin H-U kararlı olduğu sonucuna varılır.

İlave olarak $y_0(x) = e^x$ fonksiyonunun (5.17) IDD'inin bir çözümü olduğu gösterilebilir. Her $x \in [0,1]$ için gerçek çözüm ve yaklaşık çözüm dikkate alınarak

$$|y - y_0| = \left| \frac{100}{99} \exp(x) - \exp(x) \right| \leq \frac{2}{9} \exp(10x) = \frac{(b-a)\sigma(b)}{\left[1 - M(\beta + L\beta^2)\right]\sigma(a)} \theta$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece (5.17) denkleminin H-U kararlı olduğu görülür (Castro ve Simoes, 2019).

6. LİNEER OLMAYAN (6.1) DEĞİŞKEN GECİKMELİ İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMİ İÇİN HYERS-ULAM-RASSIAS KARARLILIK

Kucche ve Shikhare (2019) aşağıda verilen lineer olmayan değişken gecikmeli

$$x'(t) = f(...), \quad t \in I, \quad (6.1)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad -r \leq t \leq 0 \quad (6.2)$$

lineer olmayan değişken gecikmeli Volterra IDD'ini ele aldı. Burada

$$f(...) = f\left(t, x, x(g(.)), \int_0^t h(t, s, x(s), x(g(s))) ds\right) \quad \text{ve} \quad \phi \in C([-r, 0], \mathbb{R}) \quad \text{başlangıç}$$

fonksiyonudur. Kucche ve Shikhare (2019) yaptığı çalışmada Pachpatte eşitsizliği, Picard operatörü, ve Gronwall lemmasını kullanarak bu denklemin H-U-R kararlılığını inceledi ve özel durumlarda bazı uygulamalar verdi. Şimdi söz konusu çalışmanın sonuçlarını vermeden önce hazırlık bilgileri niteliğindeki aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 6.1 $x \in C([-r, b], \mathbb{R}) \cap C'([0, b], \mathbb{R})$ olmak üzere (6.1) ve (6.2) denklemlerini sağlayan x fonksiyonuna (6.1), (6.2) başlangıç değer probleminin çözümü denir.

Şimdi ise $\varepsilon > 0$ sayısı ve pozitif azalmayan sürekli bir ψ fonksiyonu verilmek üzere aşağıdaki eşitsizlikler sağlansın:

$$|y' - f(...)| \leq \varepsilon, \quad t \in I, \quad (6.3)$$

$$|y' - f(...)| \leq \psi(t), \quad t \in I, \quad (6.4)$$

$$|y' - f(...)| \leq \varepsilon \psi(t), \quad t \in I \quad (6.5)$$

Burada $f(...) = f\left(t, y, y(g(.)), \int_0^t h(t, s, y(s), y(g(s))) ds\right)$ olarak alınmaktadır (Kucche ve Shakhare, 2019).

Tanım 6.2 Eğer bir $C > 0$ sabiti var öyle ki her $\varepsilon > 0$ ve (6.3) eşitsizliğinin her bir $y \in C'([-r, b], \mathbb{R})$ çözümü için (6.1) denkleminin bir $x \in C'([-r, b], \mathbb{R})$ çözümü var öyle ki her $-r \leq t \leq b$ için

$$|y - x| \leq C\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, bu takdirde (6.1) denkleminin H-U kararlıdır denir (Kucche ve Shakhare, 2019).

Tanım 6.3 Eğer bir $\theta_f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $\theta_f(0) = 0$, fonksiyonu var öyle ki (6.3) eşitsizliğinin her bir $y \in C'([-r, b], \mathbb{R})$ çözümü için (6.1) denkleminin bir $x \in C'([-r, b], \mathbb{R})$ çözümü var ve her $t \in [-r, b]$ için

$$|y - x| \leq \theta_f(\varepsilon)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, bu takdirde (6.1) denkleminin genelleştirilmiş H-U kararlıdır denir (Kucche ve Shakhare, 2019).

Tanım 6.4 Eğer bir $C_\psi > 0$ sabiti var öyle ki her $\varepsilon > 0$ ve (6.5) eşitsizliğinin her bir $y \in C'([-r, b], \mathbb{R})$ çözümü için (6.1) denkleminin bir $x \in C'([-r, b], \mathbb{R})$ çözümü vardır ve her $-r \leq t \leq b$ için

$$|y - x| \leq C_\psi \varepsilon \psi(t)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, bu takdirde (6.1) denkleminin pozitif azalmayan sürekli $\psi : [-r, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonuna göre H-U-R kararlıdır denir (Kucche ve Shakhare, 2019).

Tanım 6.5 Eğer bir $C_\psi > 0$ sabiti var öyle ki (6.4) eşitsizliğinin her bir $y \in C'([-r, b], \mathbb{R})$ çözümü için (6.1) denkleminin bir $x \in C'([-r, b], \mathbb{R})$ çözümü var ve her $-r \leq t \leq b$ için

$$|y - x| \leq C_\psi \psi(t)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, bu takdirde (6.1) denklemine pozitif azalmayan sürekli $\psi : [-r, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonuna göre genelleştirilmiş H-U-R kararlıdır denir (Kucche ve Shakhare, 2019).

Uyarı 6.1 Eğer sadece y 'ye bağlı bir $q_y \in C(I, \mathbb{R})$ fonksiyonu var öyle ki aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise, bu takdirde $y \in C'(I, \mathbb{R})$ fonksiyonu (6.3) eşitsizliğinin bir çözümü olur:

$$(i) \quad |q_y(t)| \leq \varepsilon, \quad t \in I;$$

$$(ii) \quad y' = f(\dots) + q_y, \quad t \in I.$$

Benzer ifadeler (6.4) ve (6.5) eşitsizlikleri için de geçerlidir (Kucche ve Shakhare, 2019).

Uyarı 6.2 Eğer $y \in C'(I, \mathbb{R})$ fonksiyonu (6.3) eşitsizliğini sağlıyorsa, y fonksiyonu aşağıdaki eşitsizliğinin de bir çözümüdür:

$$\left| y - y(0) - \int_0^t f(\dots) ds \right| \leq \varepsilon t, \quad t \in I. \quad (6.6)$$

Gerçekten $y \in C'(I, \mathbb{R})$ fonksiyonu (6.3) eşitsizliğini sağlıyor ise, o zaman Uyarı 6.1'e göre

$$y'(t) = f(\dots) + q_y(t), \quad t \in I$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak bu denklem için integral hesaplandığında

$$\left| y(t) - y(0) - \int_0^t f(\dots) ds \right| = \left| \int_0^t q_y(s) ds \right| \leq \varepsilon t, \quad t \in I$$

elde edilir (Kucche ve Shakhare, 2019).

(6.4) ve (6.5) eşitsizlikleri için de benzer sonuçlar elde edilebilir.

6.1 Sonlu Aralıkta (6.1) Volterra-Integro Diferansiyel Denkleminin Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı

(6.1) denklemi için aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

(H1) $f \in C([0, b] \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $h \in C([0, b] \times [0, b] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $g \in C([0, b], [-r, b])$ ve her $t \in I$ için $g(t) \leq t$ dir.

Ayrıca $L_f, L_h > 0$ sabitleri vardır öyle ki her $t, s \in I$, $u_i, v_i \in \mathbb{R}$, $(i=1, 2, 3)$, için

$$|f(t, u_1, \dots, u_3) - f(t, v_1, \dots, v_3)| \leq \frac{L_f}{(|u_1 - v_1| + \dots + |u_3 - v_3|)^{-1}};$$

$$|h(t, s, u_1, u_2) - h(t, s, v_1, v_2)| \leq \frac{L_h}{(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|)^{-1}}$$

dir.

(H2) $\psi : [-r, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ pozitif, azalmayan ve sürekli bir fonksiyon ve $\lambda > 0$ olmak üzere her $t \in [0, b]$ için

$$\int_0^t \psi(s) ds \leq \psi(t) \lambda$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 6.1 (6.1) denklemindeki f ve h fonksiyonlarının (H1) ve (H2) şartlarını sağladığını kabul edelim. Bu takdirde $bL_f |2 + L_h b| < 1$ olmak üzere aşağıdaki sonuçlar doğrudur.

- (i) (6.1), (6.2) başlangıç değer problemi bir tek $x \in C([-r, b], \mathbb{R}) \cap C'([0, b], \mathbb{R})$ çözümüne sahiptir.
- (ii) (6.1) denklemi, ψ fonksiyonuna göre H-U-R kararlıdır (Kucche ve Shakhare, 2019).

İspat.

(i) (H1) şartı göz önüne alındığında, (6.1) denkleminin $[0, t]$ aralığında integral alındığında (6.1), (6.2) başlangıç değer problemi aşağıdaki probleme

$$x(t) = \phi(0) + \int_0^t f(\dots) ds, \quad t \in I,$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0]$$

eşdeğer olur.

$X = C([-r, b], \mathbb{R})$ Banach uzayını ve $\|\cdot\|_C$ Chebyshev normunu göz önüne alalım.

Ayrıca $B_f : X \rightarrow X$ operatörünü

$$B_f(x)(t) = \phi(0) + \int_0^t f(\dots) ds, \quad t \in I,$$

$$B_f(x)(t) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0]$$

şeklinde tanımlayalım.

Şimdi daralma dönüşümü yardımıyla B_f operatörünün sabit bir noktaya sahip olduğunu gösterelim.

$$|B_f(x)(t) - B_f(y)(t)| = |\phi(t) - \phi(t)| = 0, \quad x, y \in C([-r, b], \mathbb{R}), t \in [-\tau, 0] \quad (6.7)$$

olduğu açıktır. Ayrıca $\forall t \in I$ için,

$$\begin{aligned} & |B_f(x)(t) - B_f(y)(t)| \\ & \leq \int_0^t L_f \left\{ 2\|x - y\|_C + 2 \int_0^s L_h \|x - y\|_C d\tau \right\} ds \leq bL_f (2 + L_h b) \|x - y\|_C \end{aligned} \quad (6.8)$$

eşitsizliği elde edilir. (6.7) ve (6.8) ifadeleri dikkate alındığında,

$$\|B_f(x) - B_f(y)\|_C \leq bL_f(2 + L_h b)\|x - y\|_C, \quad x, y \in C([-r, b], \mathbb{R}),$$

yazılabilir. $bL_f(2 + L_h b) < 1$ olduğundan, B_f operatörü X tam uzayında bir daralma dönüşümüdür. Bu nedenle Banach daralma dönüşümüne göre B_f operatörü sabit bir $x^* : [-r, b] \rightarrow \mathbb{R}$ noktasına sahiptir ve bu sabit nokta ise (6.1), (6.2) probleminin bir çözümüdür.

(ii) $y \in C([-r, b], \mathbb{R}) \cap C'([0, b], \mathbb{R})$ fonksiyonu (6.5) eşitsizliğinin bir çözümü olsun.

$x \in C([-r, b], \mathbb{R}) \cap C([0, b], \mathbb{R})$ olmak üzere, x fonksiyonu ise

$$x'(t) = f(...), t \in I$$

$$x(t) = y(t), \quad t \in [-r, 0],$$

probleminin bir çözümü olsun. Burada

$$f(...) = f\left(t, x, x(g(t)), \int_0^t h(t, s, x(s), x(g(s))) ds\right) \text{ olarak tanımlanmaktadır. Buna bağlı}$$

olarak da

$$x(t) = y(0) + \int_0^t f(...) ds, \quad t \in I \tag{6.9}$$

$$x(t) = y(t), \quad t \in [-r, 0], \tag{6.10}$$

kolaylıkla yazılabilir.

Eğer $y \in C([-r, b], \mathbb{R}) \cap C([0, b], \mathbb{R})$ fonksiyonu (6.5) eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman (H2) şartı ve Uyarı 6.1 ve 6.2 kullanılarak,

$$\left| y(t) - y(0) - \int_0^t f(...) ds \right| \tag{6.11}$$

$$\leq \int_0^t \varepsilon \psi(s) ds \leq \lambda \varepsilon \psi(t), \quad t \in I$$

elde edilir. Öte yandan $t \in [-r, 0]$ için $|y(t) - x(t)| = 0$ olduğu açıktır. Buradan, $\forall t \in I$ için (H2) şartı, (6.9) ID'i ve (6.11) kullanıldığında,

$$\begin{aligned} |y - x| &= \left| y - y(0) - \int_0^t f(\dots) ds \right| \\ &\leq \left| y - y(0) - \int_0^t f(\dots) ds \right| \\ &\quad + \int_0^t \left| f \left(s, y, y(g(.)), \int_0^s h(s, \tau, y(\tau), y(g(\tau))) d\tau \right) \right. \\ &\quad \left. - f \left(s, x, x(g(.)), \int_0^s h(s, \tau, x(\tau), x(g(\tau))) d\tau \right) \right| ds \\ &\leq \varepsilon \lambda \psi(t) + \int_0^t L_f \left\{ |y(s) - x(s)| + |y(g(s)) - x(g(s))| \right. \\ &\quad \left. + \int_0^s L_h \left[|y(\tau) - x(\tau)| + |y(g(\tau)) - x(g(\tau))| \right] d\tau \right\} ds \end{aligned} \tag{6.12}$$

bakılabilir. Bu takdirde (6.12) ifadesine göre $A: C([-r, b], \mathbb{R}_+) \rightarrow C([-r, b], \mathbb{R}_+)$ olmak üzere A operatörü

$$A(u)(t) = 0, \quad t \in [-r, 0],$$

$$A(u)(t) = \varepsilon \lambda \psi(t) + L_f \int_0^t \left\{ u(s) + u(g(s)) + L_h \int_0^s [u(\tau) + u(g(\tau))] d\tau \right\} ds, \quad t \in [0, b]$$

şeklinde tanımlanabilir. Şimdi ise A 'nın bir Picard operatörü olduğunu gösterelim. Bu amaçla, her $t \in [-r, 0]$ için $|A(u)(.) - A(v)(.)| = 0$ olmak üzere $\forall u, v \in C([-r, b], \mathbb{R}_+)$ için (H1) şartı kullanıldığında $\forall t \in I$ için,

$$\begin{aligned} & |A(u)(t) - A(v)(t)| \\ & \leq \int_0^t L_f \left\{ 2\|u - v\|_C + 2 \int_0^s L_h \|u - v\|_C d\tau \right\} ds \leq bL_f (2 + L_h b) \|u - v\|_C \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\forall u, v \in C([-r, b], \mathbb{R}_+)$ için

$$\|A(u) - A(v)\|_C \leq bL_f (2 + L_h b) \|u - v\|_C$$

sonucuna varılır. $bL_f (2 + L_h b) \leq 1$ olması nedeniyle A dönüşümü $C([-r, b], \mathbb{R}_+)$ uzayında bir daralma dönüşümüdür. Banach daralma dönüşümü kullanarak, A 'nın bir Picard operatörü ve $F_A = \{u^*\}$ olduğu sonucuna varılır. Ayrıca $t \in I$ için,

$$u^* = \varepsilon \lambda \psi + L_f \int_0^t \left\{ u^* + u^*(g(.)) + L_h \int_0^s [u^*(\tau) + u^*(g(\tau))] d\tau \right\} ds$$

yazılabilir. u^* , I aralığı üzerinde artandır ve $(u^*)' \geq 0$ dır. Bu nedenle $g(t) \leq t$ ve $t \in I$ için $u^*(g(t)) \leq u^*(t)$ olur. Dolayısıyla,

$$u^*(t) \leq \varepsilon \lambda \psi(t) + \int_0^t 2L_f \left(u^*(s) + \int_0^s L_h u^*(\tau) d\tau \right) ds$$

elde edilir. Buna bağlı olarak, Pachpatte eşitsizliğini kullanıldığında

$$\begin{aligned}
u^* &\leq \varepsilon \lambda \psi(t) \left[1 + \int_0^t 2L_f \exp\left(\int_0^s [2L_f + L_h] d\tau\right) ds \right] \\
&\leq \varepsilon \lambda \psi(t) \left\{ 1 + 2L_f \left(\exp(2L_f + L_h)b - 1 \right) (2L_f + L_h)^{-1} \right\}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$C_\psi = \lambda \left\{ 1 + 2L_f \left(\exp(2L_f + L_h)b - 1 \right) (2L_f + L_h)^{-1} \right\}$$

olsun. (6.13) eşitsizliğinden, $t \in [-r, b]$ için

$$u^*(t) \leq C_\psi \varepsilon \psi(t)$$

elde edilir. $u(t) = |y(t) - x(t)|$ için (6.12) eşitsizliğinden $u(t) \leq A(u)(t)$ sonucuna varılır.

Böylece $u \in C([-r, b], \mathbb{R}_+)$, $u(t) \leq A(u)(t)$ ve $F_A = \{u^*\}$ olmak üzere $C([-r, b], \mathbb{R}_+)$ den $C([-r, b], \mathbb{R}_+)$ ye tanımlı A operatörünün artan bir Picard operatörü olduğunu ispatlandı.

Dolayısıyla, soyut Gronwall lemmasını uygulayarak, $u(t) \leq u^*(t)$, $t \in [-r, b]$ elde ederiz. Buna bağlı olarak da her $t \in [-r, b]$ için

$$|y - x| \leq C_\psi \varepsilon \psi(t) \tag{6.14}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece (6.1) denklemi ψ fonksiyonuna göre H-U-R kararlıdır. Teorem 6.1 ispatlanmış olur.

Sonuç 6.1 (6.1) denklemindeki f ve h fonksiyonları (H1) ve (H2) şartının da sağlandığını kabul edelim. Eğer $bL_f(2 + L_h b) < 1$ ise, bu takdirde (6.1), (6.2) problemi bir tek çözüme sahiptir ve (6.1) denklemi ψ fonksiyonuna göre genelleştirilmiş H- U-R kararlıdır (Kucche ve Shikhare, 2019).

İspat. Teorem 6.1'in ispatındaki (6.14) eşitsizliğinde $\varepsilon = 1$ alınırsa, $-r \leq t \leq b$ için

$$|y - x| \leq C_\psi \psi(t)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ise (6.1) denkleminin ψ fonksiyonuna göre genelleştirilmiş H-U-R kararlı olduğunu gösterir.

Ayrıca Teorem 6.1'in ispatı dikkate alınarak, benzer işlemler kullanılarak, (6.1) denkleminin H-U kararlılığı da ispatlanabilir.

Her $t \in [-r, b]$ olmak üzere $\psi(t) = 1$ için (H2) şartının geçerli olduğu göz önüne alınarak, Teorem 6.1 için aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 6.2 (6.1) denklemindeki f ve h fonksiyonları (H1) şartını sağlasın. Eğer $bL_f(2 + L_h b) < 1$ ise, o zaman (6.1), (6.2) probleminin bir tek çözümü vardır ve (6.1) denklemi H-U kararlıdır (Kucche ve Shikhare, 2019).

İspat. Her $t \in [-r, b]$ için Teorem 6.1'in ispatındaki (6.13) eşitsizliğinde $\psi(t) = 1$ alınırsa, $|y(t) - x(t)| \leq C_\psi \varepsilon$ elde edilir. Buna bağlı olarak (6.1) denkleminin H-U kararlı olduğu sonucuna varılır (Kucche ve Shikhare, 2019).

Sonuç 6.3 (6.1) denklemindeki f ve h fonksiyonları (H1) şartını sağlasın. $bL_f(2 + L_h b) < 1$ ise, o zaman (6.1), (6.2) probleminin bir tek çözümü vardır ve (6.1) denklemi genelleştirilmiş H-U kararlıdır (Kucche ve Shikhare, 2019).

İspat. Eğer Sonuç 6.2 de $\theta_f(\varepsilon) = C\varepsilon$ alınır ise, ispat tamamlanır (Kucche ve Shikhare, 2019).

6.2 Bazı Özel Durumlar

Bu kesimde, (6.1), (6.2) probleminin bazı önemli özel durumları ele alınmaktadır (Kucche ve Shikhare, 2019). $r > 0$ olsun ve $g_1(t) = t - r$, $t \in [0, b]$ olarak tanımlansın. Bu durumda (6.1), (6.2) probleminin özel bir hali olan aşağıdaki problem elde edilir;

$$x'(t) = f_1(...), 0 \leq t \leq b \quad (6.15)$$

$$x(t) = \phi(t), -r \leq t \leq 0. \quad (6.16)$$

Burada $f_1(...) = f_1\left(t, x, x(t-r), \int_0^t h_1(t, s, x(s), x(s-r)) ds\right)$ ile tanımlanmaktadır. İhtiyaç

duyulduğunda x yerine y de alınabilmektedir. Aşağıdaki eşitsizliği göz önüne alalım;

$$|y'(t) - f_1(...)| \leq \varepsilon \psi(t), t \in [0, b].$$

Burada, ε , ψ ve ϕ ifadeleri yukarıda tanımlanmaktadır. Teorem 6.1' in bir uygulaması olarak, (6.15), (6.16) problemi için aşağıdaki teorem verilmektedir.

Teorem 6.2 Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

(A1)

(i) $f_1 \in C([0, b] \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $h_1 \in C([0, b] \times [0, b] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $g_1 \in C([0, b], [-r, b])$

ve $g_1(t) \leq t$ dir.

(ii) $L_{f_1}, L_{h_1} > 0$ sabitleri vardır öyle ki her $t, s \in [0, b]$, $u_i, v_i \in \mathbb{R}$, $(i=1, 2, 3)$

$$|f_1(t, u_1, ..., u_3) - f_1(t, v_1, ..., v_3)| \leq \frac{L_{f_1}}{(|u_1 - v_1| + ... + |u_3 - v_3|)^{-1}},$$

$$|h_1(t, s, u_1, u_2) - h_1(t, s, v_1, v_2)| \leq \frac{L_{h_1}}{(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|)^{-1}}$$

dır.

(A2) $\lambda > 0$ ve $\psi: [-r, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ pozitif azalmayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$t \in [0, b] \text{ için } \int_0^t \psi(s) ds \leq \lambda \psi(t)$$

eşitsizliği sağlanır.

(A3) $bL_{f_1} |2 + L_{h_2} b| < 1$ dir.

O zaman (6.15), (6.16) problemi bir tek $x \in C([-r, b], \mathbb{R}) \cap C'([0, b], \mathbb{R})$ çözümüne sahiptir ve (6.15) denklemi ψ fonksiyonuna göre H-U-R kararlıdır. (6.1), (6.2) probleminin bir diğer özel durumu $g_2(t) = t^2, t \in I = [0, 1]$ alınarak aşağıdaki başlangıç değer problemi elde edilir:

$$x'(t) = f_2(...), t \in I = [0, 1], \quad (6.17)$$

$$x(t) = \phi(t), t \in [-r, 0]. \quad (6.18)$$

Ayrıca,

$$|y'(t) - f_2(...)| \leq \varepsilon \psi(t), t \in [0, 1],$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Burada ε, ψ, ϕ yukarıda tanımlanmıştır ve

$$f_2(...) = f_2\left(t, x, x(t^2), \int_0^t h_2(t, s, x(s), x(s^2)) ds\right) \text{ veya } x \text{ yerine } y \text{ de alınabilmektedir.}$$

Teorem 6.1'in bir uygulaması olarak, (6.17), (6.18) problemi için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.3 Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

(B1) $f_2 \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}), h_2 \in C([0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ve $g_2 \in C([0, 1], [-r, 1])$

olmak üzere $g_2(t) \leq t$ dir.

$L_{f_2}, L_{h_2} > 0$ sabitleri vardır öyle ki bütün $t, s \in [0, 1], u_i, v_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, 3)$ için

$$|f_2(t, u_1, ..., u_3) - f_2(t, v_1, ..., v_3)| \leq \frac{L_{f_2}}{(|u_1 - v_1| + ... + |u_3 - v_3|)^{-1}};$$

$$|h_2(t, s, u_1, u_2) - h_2(t, s, v_1, v_2)| \leq \frac{L_{h_2}}{(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|)^{-1}}$$

dır.

(B2) $\lambda > 0$ ve $\psi : [-r, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ pozitif azalmayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$t \in [0, 1] \text{ için } \int_0^t \psi(s) ds \leq \lambda \psi(t)$$

eşitsizliği sağlanır.

(B3) $L_{f_2} |2 + L_{h_2}| < 1$ dir.

O halde (6.17), (6.18) başlangıç değer probleminin $x \in C([-r, 1], \mathbb{R}) \cap C'([0, 1], \mathbb{R})$ olacak şekilde bir tek x çözümü vardır ve (6.17) denklemi ψ fonksiyonuna göre H-U-R kararlıdır (Kucche ve Shakhare, 2019).

Benzer biçimde (6.15) ve (6.17) denklemleri için diğer Ulam tipi kararlılık sonuçları, Bölüm 6.1'deki ilgili sonuçlar kullanılarak elde edilebilir.

Bu kesimde, Bölüm 6.1'de elde edilen sonuçların özel durumlarda uygulamalarını göstermek için aşağıdaki örnekler verilecektir.

Örnek 6.1 Aşağıdaki lineer olmayan gecikmeli Volterra IDD'ini göz önüne alalım;

$$\begin{aligned} x'(t) = & 1 + \frac{t \cos(x(t))}{140} - \frac{3x(t)}{140} + \frac{t \cos(x(g(t)))}{70} \\ & + \frac{1}{20} \int_0^t \frac{t}{70} \{ \sin(x(s)) - \sin(x(g(s))) \} ds, t \in [0, 5], \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$x(t) = 0, t \in [-1, 0]. \quad (6.20)$$

(6.19) denklemi (6.1) denklemi ile karşılaştıralım. $g(t) = 2^{-1}t$, $t \in [0, 5]$ dir. $g(t) \leq t$, $t \in [0, 5]$ olduğu açıkça görülmektedir.

(i) $h: [0, 5] \times [0, 5] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ise

$$h(t, s, x, x(g(s))) = \frac{t}{70} [\sin(x(s)) - \sin(x(g(s)))], t, s \in [0, 5]$$

olarak elde edilir. Bu durumda, h fonksiyonu her $t, s \in [0, 5]$ ve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ için,

$$|h(t, s, x_1, y_1) - h(t, s, x_2, y_2)| \leq \frac{t}{70} \{|\sin x_1 - \sin y_1| + |\sin x_2 - \sin y_2|\} \leq \frac{5}{70} \{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\}$$

Lipschitz şartını sağlar.

(ii) $f: [0, 5] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} & f\left(t, x, x(g(t)), \int_0^t h(t, s, x(s), x(g(s))) ds\right) \\ &= 1 + \frac{t \cos(x(t))}{140} - \frac{3x(t)}{140} + \frac{t \cos(x(g(t)))}{70} + \frac{1}{20} \int_0^t \frac{t}{70} [\sin(x(s)) - \sin(x(g(s)))] ds \\ &= 1 + \frac{t \cos(x(t))}{140} - \frac{3x(t)}{140} + \frac{t \cos(x(g(t)))}{70} + \frac{1}{20} \int_0^t h(t, s, x(s), x(g(s))) ds, t \in [0, 5] \end{aligned}$$

olur. Buna bağlı olarak, her $t, s \in [0, 5]$ ve $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ için kolaylıkla

$$\begin{aligned} & |f(t, x_1, \dots, x_3) - f(t, y_1, \dots, y_3)| \\ & \leq \left\{ \frac{t}{140} |\cos x_1 - \cos y_1| + \frac{3}{140} |x_1 - y_1| \right\} + \frac{t}{70} |\cos x_2 - \cos y_2| + \frac{1}{20} |x_3 - y_3| \end{aligned}$$

elde edilir. İlave olarak, herhangi bir $x, y \in \mathbb{R}$ ve $x < y$ için, ortalama değer teoremi kullanıldığında

$$\frac{\cos x - \cos y}{x - y} = -\sin p \Rightarrow |\cos x - \cos y| \leq |x - y|$$

olacak şekilde bir p vardır öyle ki $x < p < y$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned} & |f(t, x_1, \dots, x_3) - f(t, y_1, \dots, y_3)| \\ & \leq \left\{ \frac{5}{140}|x_1 - y_1| + \frac{3}{140}|x_1 - y_1| \right\} + \frac{5}{70}|x_2 - y_2| + \frac{1}{20}|x_3 - y_3| \\ & \leq \frac{5}{70} \{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla, yukarıda verilen f ve h fonksiyonları, $L_f = \frac{5}{70}, L_h = \frac{5}{70}, b = 5$ olmak üzere, (H1) şartını sağlar. Ayrıca,

$$bL_f(2 + bL_h) = 5 \frac{5}{70} \left[2 + \frac{5}{70} 5 \right] = 0.84183673 < 1 \text{ olduğu açıktır. Bu nedenle, Sonuç}$$

6.2'ye göre, (6.19), (6.20) problemi $[-1, 5]$ aralığı üzerinde tek bir çözüme sahiptir ve (6.19) denklemi $[0, 5]$ aralığı üzerinde H-U kararlıdır. Benzer biçimde, H-U-R ve genelleştirilmiş H-U kararlılık türleri de (6.19) denklemi için gösterilebilir.

Öte yandan,

$$x(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 5] \\ 0, & t \in [-1, 0] \end{cases} \quad (6.21)$$

fonksiyonu (6.19), (6.20) probleminin tek çözümüdür. Gerçekten, $t \in [0, 5]$ için $x(t) = t$, $g(t) = 2^{-1}t$, olmak üzere,

$$1 + \frac{t \cos(x(t))}{140} - \frac{3x(t)}{140} + \frac{t \cos(x(g(t)))}{70} + \frac{1}{20} \int_0^t \frac{t}{70} \left[\sin(x(s)) - \sin(x(g(s))) \right] ds$$

$$= 1 + \frac{t \cos(t)}{140} - \frac{3t}{140} + \frac{t \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{70} + \frac{1}{140} \int_0^t \left[\sin(s) - \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right] ds = 1 = x'(t)$$

bağıntısını sağladığı açıktır.

Şimdi ise, $g(t) = \frac{t}{2}$, $t \in [0, 5]$ olmak üzere (6.19) denkleminin H-U kararlılığı incelenecektir. $\varepsilon > 0$ ve $y(t)$ aşağıda verilen eşitsizliklerin çözümleri olmak üzere, problemin $x(t)$ çözümü yardımıyla inceleme yapılacaktır.

$$(i) \quad \varepsilon = 0.7 \text{ ve } y_1(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & t \in [0, 5] \\ 0, & t \in [-1, 0] \end{cases} \text{ olsun. Buradan } t \in [0, 5] \text{ için,}$$

$$\begin{aligned} & \left| y_1'(t) - \left(1 + \frac{t \cos(y_1(t))}{140} - \frac{3y_1(t)}{140} + \frac{t \cos(y_1(g(t)))}{70} \right) \right| \\ & \left| y_1'(t) - \left(1 + \frac{t \cos(y_1(t))}{140} - \frac{3y_1(t)}{140} + \frac{t \cos(y_1(g(t)))}{70} \right) \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{2} - 1 - \frac{t \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{140} + \frac{3\frac{t}{2}}{140} - \frac{t \cos\left(\frac{t}{4}\right)}{70} - \frac{1}{140} \int_0^t \left[\sin\left(\frac{s}{2}\right) - \sin\left(\frac{s}{4}\right) \right] ds \right| \leq 0.667499 \end{aligned}$$

elde edilir. (6.19), (6.20) probleminin (6.21) ile verilen $x(t)$ çözümü ve $C = 4$ sabiti için,

$$|y_1 - x| = |2^{-1}t - t| \leq 2.5 < C\varepsilon, \quad t \in [0, 5]$$

ve

$$|y_1 - x| = 0, \quad t \in [-1, 0]$$

dır. Böylece $|y_1(t) - x(t)| < C\varepsilon$, $t \in [-1, 5]$ elde edilir.

(ii) $t \in [-1, 5]$ olmak üzere $y_2(t) = 0$ ve $\varepsilon = 1.2$ olsun. Buradan $t \in [0, 5]$ için

$$\begin{aligned}
& \left| y_2'(t) - \left(1 + \frac{t \cos(y_2(t))}{140} - \frac{3y_2(t)}{140} + \frac{t \cos(y_2(g(t)))}{70} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{20} \int_0^t \frac{t}{70} [\sin(y_2(s)) - \sin(y_2(g(s)))] ds \right) \right| \\
&= \left| y_2'(t) - 1 - \frac{t \cos(y_2(t))}{140} + \frac{3y_2(t)}{140} - \frac{t \cos(y_2(g(t)))}{70} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{20} \int_0^t \frac{t}{70} [\sin(y_2(s)) - \sin(y_2(g(s)))] ds \right| \\
&= \left| -1 - \frac{t}{140} - \frac{t}{70} \right| \leq \frac{155}{140} < 1.2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. (6.19) (6.20) probleminin (6.21) ile verilen $x(t)$ çözümü ve $C = 6$ sabiti için $t \in [0, 5]$ olmak üzere $|y_2(t) - x(t)| = |0 - t| \leq 5 < C\varepsilon$ dir. Ayrıca, $t \in [-1, 0]$ olmak üzere $|y_2(t) - x(t)| = 0 < C\varepsilon$ yazılabilir. Bu nedenle $y_2(t) = 0$, $t \in [-1, 5]$ ve $\varepsilon = 1.2$ 'ye karşılık gelen (6.19) (6.20) probleminin (6.21) ile verilen $x(t)$ çözümü ve $C = 6$ sabiti için $|y_2(t) - x(t)| < C\varepsilon$, $t \in [-1, 5]$ dir.

(iii) Benzer biçimde $\varepsilon = 1.5$ ve $y_3(t) = \begin{cases} \frac{t}{10}, & t \in [0, 5] \\ 0, & t \in [-1, 0] \end{cases}$ için

$$\begin{aligned}
& \left| y_3' - \left(1 + \frac{t \cos(y_3)}{140} - \frac{3y_3}{140} + \frac{t \cos(y_3(g(t)))}{70} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{20} \int_0^t \frac{t}{70} [\sin(y_3(s)) - \sin(y_3(g(s)))] ds \right) \right| \\
&= \left| y_3' - 1 - \frac{t \cos(y_3)}{140} + \frac{3y_3}{140} - \frac{t \cos(y_3(g(t)))}{70} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{20} \int_0^t \frac{t}{70} [\sin(y_3(s)) - \sin(y_3(g(s)))] ds \right| \leq 1.0557 < \varepsilon
\end{aligned}$$

olduğu görülür. (6.19), (6.20) probleminin (6.21) ile verilen $x(t)$ çözümü ve $C = 3$ sabiti için, $|y_3(t) - x(t)| \leq 4.5 = C\varepsilon$, $t \in [-1, 5]$ elde edilir.

(iv) $\varepsilon = 10$ ve $y_4(t) = \begin{cases} t^2, & t \in [0, 5] \\ 0, & t \in [-1, 0] \end{cases}$ alalım. Buradan $t \in [0, 5]$ için,

$$\begin{aligned} & \left| y_4'(t) - \left(1 + \frac{t \cos(y_4(t))}{140} - \frac{3y_4(t)}{140} + \frac{t \cos(y_4(g(t)))}{70} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{20} \int_0^t \frac{t}{70} [\sin(y_4(s)) - \sin(y_4(g(s)))] ds \right) \right| \\ &= \left| y_4'(t) - 1 - \frac{t \cos(y_4(t))}{140} + \frac{3y_4(t)}{140} - \frac{t \cos(y_4(g(t)))}{70} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{20} \int_0^t \frac{t}{70} [\sin(y_4(s)) - \sin(y_4(g(s)))] ds \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

dır. Ayrıca, (6.19), (6.20) probleminin (6.21) ile verilen $x(t)$ çözümü ve $C = 2$ sabiti için, $|y_4(t) - x(t)| \leq 20 = C\varepsilon$, $t \in [-1, 5]$ dir.

(v) Son olarak $\varepsilon = 77$ ve $y_5(t) = \begin{cases} t^3, & t \in [0, 5] \\ 0, & t \in [-1, 0] \end{cases}$ alalım.

$$\begin{aligned} & \left| y_5'(t) - \left(1 + \frac{t \cos(y_5(t))}{140} - \frac{3y_5(t)}{140} + \frac{t \cos(y_5(g(t)))}{70} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{20} \int_0^t \frac{t}{70} [\sin(y_5(s)) - \sin(y_5(g(s)))] ds \right) \right| \\ &= \left| y_5'(t) - 1 - \frac{t \cos(y_5(t))}{140} + \frac{3y_5(t)}{140} - \frac{t \cos(y_5(g(t)))}{70} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{20} \int_0^t \frac{t}{70} [\sin(y_5(s)) - \sin(y_5(g(s)))] ds \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. (6.19), (6.20) probleminin (6.21) ile verilen $x(t)$ çözümü ve $C = 2$ sabiti için, $|y_5(t) - x(t)| \leq 120 < C\varepsilon$, $t \in [-1, 5]$ dir. O halde (i)-(v) deki seçimler için (6.19) denklemi H-U kararlıdır.

Uyarı 6.3 $y(t)$ fonksiyonu

$$\left| y'(t) - \left(1 + \frac{t \cos(y(t))}{140} - \frac{3y(t)}{140} + \frac{t \cos(y(g(t)))}{70} \right) + \frac{1}{20} \int_0^t \frac{t}{70} [\sin(y(s)) - \sin(y(g(s)))] ds \right| < \varepsilon,$$

eşitsizliğin bir çözümü ve $x(t)$, (6.19), (6.20) başlangıç değer probleminin bir tam çözümü ise, bu takdirde $t \in [-1, 5]$, $|y(t) - x(t)| \leq C\varepsilon$ eşitsizliğinden $\varepsilon \rightarrow 0$ için $y(t) \rightarrow x(t)$ olduğu sonucuna varılır (Kucche ve Shikhare, 2019).

Örnek 6.2. Aşağıdaki gecikmeli Volterra integral diferansiyel denklemini göz önüne alalım;

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{17}{30} + \frac{1}{60} \sin(x(t)) - \frac{1}{15} \cos(x(g(t))) \\ &- \frac{1}{12} \int_0^t \frac{1}{10} [\cos(x(s)) + \sin(x(g(s)))] ds, \quad t \in [0, \infty) \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$x = 0, \quad t \in [-1, 0]. \quad (6.23)$$

Burada $g(t) = 4^{-1}t \leq t$, $t \in [0, \infty)$ dır.

(6.22) denklemi (6.1) denklemi ile karşılaştıralım.

(i) $h: [0, \infty) \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$h(t, s, x, x(g(s))) = \frac{1}{10} [\cos(x(s)) + \sin(x(g(s)))] , \quad t, s \in [0, \infty), \quad t \geq s$$

elde edilir. Bu durumda her $t, s \in [0, \infty)$ ve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} |h(t, s, \dots, x_2) - h(t, s, \dots, y_2)| &\leq \frac{1}{10} \{|\cos x_1 - \cos y_1| + |\sin x_2 - \sin y_2|\} \\ &\leq \frac{1}{10} \{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\} \end{aligned}$$

Lipschitz şartı sağlanır.

(ii) $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(\dots) = \frac{17}{30} + \frac{1}{60} \sin(x(t)) - \frac{1}{15} \cos(x(g(t))) - \frac{1}{12} \int_0^t [\cos(x(s)) + \sin(x(g(s)))] ds$$

yazılabilir. O halde herhangi bir $t, s \in [0, \infty)$ ve $x_1, \dots, x_3, y_1, \dots, y_3 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} |f(t, x_1, \dots, x_3) - h(t, y_1, \dots, y_3)| &\leq \frac{1}{60} |\sin x_1 - \sin y_1| + \frac{1}{15} |\cos x_2 - \cos y_2| \\ &\leq \frac{1}{12} \{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|\} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yukarıda tanımlanan f ve h fonksiyonları, $L_f = \frac{1}{12}$ ve $L_h = \frac{1}{10}$ için

(H1) ve (H2) şartlarını sağlar. Ayrıca,

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & t \in [0, \infty) \\ 0, & t \in [-1, 0] \end{cases}$$

fonksiyonunun (6.22), (6.23) başlangıç değer probleminin çözümü olduğu kolaylıkla görülebilir. Şimdi ise $\varepsilon > \frac{1}{2}$ ve

$$y(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & t \in [0, \infty) \\ 0, & t \in [-1, 0] \end{cases}$$

olarak alınsın. Buna bağlı olarak her $t \in [0, \infty)$ için,

$$\begin{aligned} & \left| y'(t) - \left(\frac{17}{30} + \frac{1}{60} \sin(y(t)) - \frac{1}{15} \cos(y(g(t))) - \frac{1}{12} \int_0^t \frac{1}{10} [\cos(y(s)) + \sin(y(g(s)))] ds \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} - \frac{17}{30} - \frac{1}{60} \sin\left(\frac{t}{3}\right) + \frac{1}{15} \cos\left(\frac{t}{12}\right) + \frac{1}{120} \int_0^t \left[\cos\left(\frac{s}{3}\right) + \sin\left(\frac{s}{12}\right) \right] ds \right| \leq \frac{19}{120} < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (6.22) denkleminin herhangi bir $x(t)$ çözümü için

$$|x(t) - y(t)| = \left| x(t) - \frac{t}{3} \right| \leq |x(t)| + \frac{t}{3}$$

yazılabilir. $t \rightarrow \infty$ $|x(t) - y(t)| \rightarrow \infty$ sonucuna varılır. Bu nedenle (6.22) denklemi

$I = [0, \infty)$ aralığında H-U kararlı değildir (Kucche ve Shikhare, 2019).



7. (7.1) LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMİ İÇİN HYERS-ULAM VE HYERS-ULAM-RASSIAS KARARILIK

Huang ve Li (2016)

$f(.) = f(t, u) + \int_a^t g(t, s, u(s)) ds$ olmak üzere aşağıdaki başlangıç değer problemini ele aldı:

$$\begin{cases} u'(t) = f(.), & t \in J \\ u(a) = u_0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Burada $J = [a, b]$ olmak üzere, f ve g sürekli fonksiyonlardır. Şimdi, bazı H-U kararlılık türlerinin tanımları verilecektir.

İlk olarak $\varepsilon > 0$, $\psi \in C(J, \mathbb{R}_+)$ ve $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(.)$ olsun.

$$\mathcal{P}(.) = f(t, v(t)) + \int_a^t g(t, s, v(s)) ds$$

olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlikleri göz önüne alalım:

$$|v' - \mathcal{P}(.)| \leq \varepsilon, \quad t \in J, \quad (7.2)$$

ve

$$|v' - \mathcal{P}(.)| \leq \varepsilon \psi(t), \quad t \in J. \quad (7.3)$$

Tanım 7.1 Eğer bir $K_f > 0$ sabiti var öyle ki her bir $\varepsilon > 0$ ve (7.2) nin her bir $v \in C^1(J, \mathbb{R})$ çözümü için (7.1) in bir u çözümü vardır öyle ki

$$|v(t) - u(t)| \leq K_f \varepsilon$$

oluyor ise, bu takdirde (7.1) problemi H-U kararlıdır denir (Vu ve Hoa 2020).

Tanım 7.2 Eğer bir $C_f > 0$ sabiti var öyle ki her bir $\varepsilon > 0$ ve (7.3)'ün her bir $v \in C^1(J, \mathbb{R})$ çözümü için (7.1) in bir u çözümü vardır öyle ki

$$|v(t) - u(t)| \leq C_f \varepsilon \psi(t)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, bu takdirde (7.1) problemi, $\psi \in C(J, \mathbb{R}_+)$ 'ye göre H-U-R kararlıdır.

7.1 (7.1) Lineer Olmayan Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemi için Hyers-Ulam-Kararlılık

Bu kesimde, ardışık yaklaşım yöntemini kullanarak, (7.1) için, H-U kararlılığı verilecektir.

Uyarı 7.1 Eğer v fonksiyonu (7.2)'nin bir çözümü ise J aralığı üzerinde sürekli bir $\delta(t)$ fonksiyonu vardır öyle ki $|\delta(t)| \leq \varepsilon$ ve $v'(t) = \mathcal{P}(\cdot) + \delta(t)$ sağlanır.

$f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : J \times J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

(H1) L_1, L_2 pozitif sabitleri var öyle ki her $(t, s) \in J \times J$ ve $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$|f(t, w_1) - f(t, w_2)| \leq L_1 |w_1 - w_2|,$$

$$|g(t, s, w_1) - g(t, s, w_2)| \leq L_2 |w_1 - w_2|.$$

(H2) $\psi \in C(J, \mathbb{R}_+)$ olsun. Pozitif bir $C > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$kC^k \leq \frac{C^{k-1}}{(b-a)^{-1}}, \quad \forall k \geq 1, \text{ ve } 0 < \frac{L}{c^{-1}} < 1 \text{ olmak kaydıyla her } t \in J \text{ için}$$

$$\int_a^t \psi(s) ds \leq C\psi(t)$$

eşitsizliği sağlanır (Huang ve Li, 2016).

Teorem 7.1 f ve g fonksiyonları (H1) şartını sağlasın. Bu takdirde her bir $\varepsilon > 0$ için eğer v fonksiyonu (7.2) eşitsizliğini sağlarsa, $u_0 = v_0$ olmak üzere, (7.1) denkleminin bir tek u çözümü vardır öyle ki bu çözüm

$$|u - v| \leq \frac{\varepsilon b}{\left[\exp((b-a)(1+L)) \right]^{-1}}$$

eşitsizliğini sağlar (Huang ve Li, 2016).

İspat. Her $\varepsilon > 0$ için v fonksiyonu (7.2) eşitsizliğini sağlar ise, bu takdirde Uyarı 7.1 dikkate alındığında, J aralığı üzerinde sürekli bir $\delta(t)$ fonksiyonu vardır öyle ki $|\delta(t)| \leq \varepsilon$ ve $v'(t) = \mathcal{P}(\cdot) + \delta(t)$ sağlanır. Buna bağlı olarak $v(t)$ fonksiyonu

$$v(t) = v_0 + \int_a^t \mathcal{P}(\cdot) ds + \int_a^t \delta(s) ds \quad (7.4)$$

ID'ini sağlar. Burada

$$\int_a^t \mathcal{P}(\cdot) ds = \int_a^t \left[f(s, v(s)) + \int_a^s g(s, \tau, v(\tau)) d\tau \right] ds$$

dir. Bir $(u_n)_{n \geq 0}$ dizisini $u_0(t) = v(t)$ ve $n \in N$ olmak üzere

$$u_n(t) = v_0 + \int_a^t \mathcal{P}_{n-1}(s) ds \quad (7.5)$$

şeklinde tanımlansın. Burada

$$\int_a^t \mathcal{P}_{n-1}(s) ds = \int_a^t \left[f(s, u_{n-1}(s)) + \int_a^s g(s, \tau, u_{n-1}(\tau)) d\tau \right] ds$$

dır. (7.4) ve (7.5) den $n=1$ için

$$|u_1 - u_0| \leq \frac{\varepsilon}{(t-a)^{-1}}, \forall t \in J \quad (7.6)$$

elde edilir. $n=1, 2, 3, \dots$, için (H1) şartı kullanıldığında

$$\begin{aligned} & |u_{n+1} - u_n| \\ & \leq L \int_a^t [|u_n(s) - u_{n-1}(s)|] ds + L \int_a^t \int_a^s [|u_n(r) - u_{n-1}(r)|] dr ds \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $L = \max\{L_1, L_2\}$ dir. Özel olarak $n=1$ için ve (7.6)'dan

$$|u_2 - u_1| \leq \varepsilon L \left(\frac{(t-a)^2}{2!} + \frac{(t-a)^3}{3!} \right)$$

elde ederiz. Ayrıca $n=2$ için

$$|u_3(t) - u_2(t)| \leq \varepsilon L^2 \int_a^t \left(\frac{(s-a)^2}{2!} + \frac{(s-a)^3}{3!} \right) ds + \varepsilon L^2 \int_a^t \int_a^s \left(\frac{(r-a)^2}{2!} + \frac{(r-a)^3}{3!} \right) dr ds$$

$$\leq 3\varepsilon L^2 \left(\frac{(t-a)^3}{3!} + \dots + \frac{(t-a)^5}{5!} \right)$$

olur. $n \geq 4$ için

$$|u_n - u_{n-1}| \leq \varepsilon n L^{n-1} \left(\frac{(t-a)^n}{n!} + \dots + \frac{(t-a)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \quad (7.7)$$

bulunur. Bu durumda (7.7) eşitsizliği aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} |u_n - u_{n-1}| &\leq \frac{\varepsilon (t-a) L (t-a)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \\ &\left(1 + \frac{(t-a)}{n+1} + \dots + \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)(n+2)\dots 2n(2n+1)} \right) \\ &\leq \varepsilon b \frac{(L(t-a))^{n-1}}{(n-1)!} \left(1 + \frac{(t-a)}{1!} + \frac{(t-a)^2}{2!} + \dots + \frac{(t-a)^n}{(n)!} + \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right) \\ &\leq \varepsilon b \frac{(L(t-a))^{n-1}}{(n-1)!} \exp(t-a). \end{aligned}$$

Buradan

$$|u_n - u_{n-1}| \leq \varepsilon b \frac{(L(t-a))^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{\exp(a-t)} \quad (7.8)$$

olduğunu kabul edelim. Bu kabul yardımıyla aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon b \frac{(L(t-a))^n}{(n-1)!} \frac{1}{\exp(a-t)}, \forall t \in J.$$

Buna bağlı olarak da yukarıdaki eşitsizliğin $n = 0$ dan sonsuza toplamı alındığında

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq \varepsilon b \exp(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(L(t-a))^n}{n!} \quad (7.9)$$

eşitsizliği elde edilir. (7.9) eşitsizliğinde eşitsizliğin sağındaki seri $\exp(L(t-a))$ fonksiyonuna yakınsak olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için $u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n+1} - u_n|$ serisinin de düzgün yakınsak olduğu sonucuna varırız.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon b \frac{(1+L)}{\exp(a-b)} \quad (7.10)$$

elde edilir.

$$\bar{u} = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n+1} - u_n| \quad (7.11)$$

ifadesini ele alalım. Dolayısıyla

$$u_j = u_0 + \sum_{n=0}^j |u_{n+1} - u_n| \quad (7.12)$$

ifadesi (7.11) serisinin j .kısım olur. (7.11) ve (7.12) ifadelerinden

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\bar{u} - u_j| = 0$$

elde ederiz. $\forall t \in J$ için $u(t) = \bar{u}(t)$ alalım. Burada dizinin limitinin

$$u = v_0 + \int_a^t \mathcal{P}(s) ds, \quad \forall t \in J \quad (7.13)$$

denkleminin bir çözümü olduğu görülür. Ayrıca

$$\mathcal{P}(\cdot) = f(t, u(t)) + \int_a^t g(t, s, u(s)) ds$$

dir. (7.5), (7.13) ve (H1) şartından

$$\begin{aligned} \left| u(t) - v_0 - \int_a^t \mathcal{P}(\cdot) ds \right| &= \left| \bar{u}(t) - (u_j(t) - \int_a^t \mathcal{P}_{j-1}(s) ds) - \int_a^t \mathcal{P}(\cdot) ds \right| \\ &\leq \left| \bar{u}(t) - u_j(t) \right| + \int_a^t \left| \mathcal{P}_{j-1}(s) - \mathcal{P}(\cdot) \right| ds \\ &\leq \left| \bar{u}(t) - u_j(t) \right| + \dots + L \int_a^t \int_a^s \left| u_{j-1}(r) - u(r) \right| dr ds \end{aligned} \quad (7.14)$$

ifadesini elde ederiz. (7.11) ve (7.12) birleştirildiğinde

$$\left| \bar{u} - u_j \right| \leq \sum_{n=j+1}^{\infty} \left| u_{n+1} - u_n \right|$$

yazılabilir. Burada (7.9) eşitsizliği göz önüne alındığında

$$\left| \bar{u}(t) - u_j(t) \right| \leq \varepsilon b \exp(b-a) \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{(L(t-a))^n}{n!} \quad \forall t \in J \quad (7.15)$$

elde edilir. Dolayısıyla (7.14) ve (7.15) eşitsizliklerinden aşağıdaki sonuca varılır.

$$\left| u(t) - v_0 - \int_a^t \mathcal{P}(s) ds \right| \quad (7.16)$$

$$\leq \varepsilon b e^{b-a} \left[\sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{(L(t-a))^n}{n!} + \sum_{n=j+1}^{\infty} L^{n+1} \left(\frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(t-a)^{n+2}}{(n+2)!} \right) \right].$$

$n \rightarrow \infty$ limit alınır sağ taraftaki serinin yakınsak olduğu görülür. Bu nedenle

$$\left| u(t) - v_0 - \int_a^t \mathcal{P}(s) ds \right| \leq 0, \quad \forall t \in J$$

sonucuna varılır. Buradan

$$u(t) = v_0 + \int_a^t \mathcal{P}(s) ds, \quad \forall t \in J \quad (7.17)$$

eşitliği elde edilir ki bu da (7.1) in bir çözümüdür. Ek olarak (7.10) dan

$$|u - v| \leq \varepsilon b \frac{(1+L)}{\exp(a-b)}$$

ifadesi elde edilir. Problemin (7.1) çözümünün tekliğini göstermek için, $\hat{u}(t)$ 'nin (7.1)' in formuna sahip başka bir çözümü olduğunu kabul edelim.

$$\hat{u}(t) - v_0 = \int_a^t \hat{\mathcal{P}}(s) ds, \quad t \in J.$$

Burada

$$\hat{\mathcal{P}}(\cdot) = f(t, \hat{u}) + \int_a^t g(t, s, \hat{u}(s)) ds$$

dir. (H1) şartını kullanarak

$$\gamma(t) \leq L \int_a^t \gamma(s) ds + L \int_a^t \int_a^s \gamma(r) dr ds, \forall t \in J$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\gamma(t) := |u(t) - \hat{u}(t)|$ dir. Daha sonra Gronwall lemması uygulanırsa J üzerinde $\gamma(t) = 0$ bulunur. Öyleyse $u(t) = \hat{u}(t)$ dir ve teoremin ispatı tamamlanır Oguntuase(2001).

7.2 (7.1) Lineer Olmayan Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemleri için Hyers-Ulam-Rassias Kararlılık

Bu kesimde bir önceki kesimdeki işlemlerin benzeri kullanılarak (7.1) denklemini H-U-R kararlılığı incelenecektir.

Uyarı 7.2 Eğer v fonksiyonu (7.3) 'ün bir çözümü ise, bu takdirde, J aralığı üzerinde sürekli bir $\xi(t)$ fonksiyonu vardır, öyle ki $|\xi(t)| \leq \varepsilon \psi(t)$ ve $v'(t) = P(\cdot) + \xi(t)$ dir,

$$v'(t) = P(\cdot) + \xi(t), \varepsilon > 0, u_0 = v_0, t \in J.$$

Teorem 7.2. (H1) ve (H2) şartları sağlansın. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için, v fonksiyonu (7.3) 'ü sağlarsa, $u_0 = v_0$ olmak üzere (7.1)'in tek bir u çözümü vardır ve bu çözüm $\forall t \in J$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlar;

$$|u - \hat{u}| \leq \psi(t) \varepsilon (b - a) (1 - CL)^{-1} (1 - C)^{-1}. \quad (7.18)$$

İspat. Her $\varepsilon > 0$ için v fonksiyonu (7.3) 'ü sağlasın. Bu takdirde yukarıda verilen uyarı dikkate alındığında, J üzerinde tanımlı sürekli bir $\xi(t)$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$|\xi(t)| \leq \varepsilon \psi(t)$$

ve

$$v'(t) = P(.) + \xi(t)$$

dır. Bu durumda v fonksiyonu

$$v(t) = u_0 + \int_a^t P(.) ds + \int_a^t \xi(s) ds \quad (7.19)$$

ile verilen ID'i sağlar. Burada

$$\int_a^t P(.) ds = \int_a^t \left[f(s, v(s)) + \int_a^s g(s, \tau, v(\tau)) d\tau \right] ds$$

ile verilmektedir. Teorem 7.1'in ispatına benzer şekilde, $u_0(t) = v_t \quad \forall t \in J$, olmak üzere (7.5) 'te verilen bağıntı ve (H2) şartı gözönüne alındığında dizisini yeniden ele alalım.

Bu dizi, (H2) şartı ve (7.19) bağıntısı gözönüne alındığında $n = 1$ için

$$|u_1 - u_0| \leq \varepsilon C \psi(t), \quad t \in J$$

ifadesi elde edilir. Benzer biçimde $n = 1, 2, \dots$ için ve (H1) şartı kullanıldığında

$$|u_{n+1} - u_n| \leq L \int_a^t \left[|u_n(s) - u_{n-1}(s)| ds + \int_a^t |u_n(r) - u_{n-1}(s)| dr ds, \right]$$

ifadesi elde edilir. Burada $L = \max\{L_1, L_2\}$ dir. Özel durumda $n = 1$ alındığında yukarıdaki bağıntıdan

$$|u_2(t) - u_1(t)| \leq \varepsilon L C \int_a^t \psi(s) ds + \varepsilon L C \int_a^t \int_a^s \psi(r) dr ds = \varepsilon L (C^2 + C^3) \psi(t), \quad \forall t \in J$$

bulunur ve dolayısıyla $n = 2$ için

$$|u_3(t) - u_2(t)| \leq L \int_a^t |u_2(s) - u_1(s)| ds + L \int_a^t \int_a^s |u_2(r) - u_1(r)| dr ds \leq 3\varepsilon L^2 (C^3 + C^4 + C^5) \psi(t)$$

bulunur. $n \geq 4$ için $f\left(t, x, x(g(t)), \int_0^t h(t, s, x(s), x(g(s))) ds\right) = f(\cdot)$ alındığında

$$x'(t) = f(\cdot), t \in I, \quad (7.20)$$

kolaylıkla elde edilir. Benzer işlemler sürdürüldüğünde, (H2) şartı ile (7.7) eşitsizliği dikkate alındığında

$$|u_n - u_{n-1}| \leq \varepsilon (b-a) \left(\frac{1-C^{n+1}}{1-C} \right) (CL)^{n-1} \psi(t), \quad \forall t \in J$$

elde edilir. Buna bağlı olarak

$$|u_n - u_{n-1}| \leq \varepsilon (b-a) (1-C^{n+1}) (1-C)^{-1} (CL)^{n-1} \psi(t), \quad \forall t \in J \quad (7.21)$$

şartı sağlanır ise tümevarım yöntemiyle

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon (b-a) (1-C^{n+2}) (1-C)^{-1} (CL)^n \psi(t), \quad \forall t \in J$$

elde edilir. Her iki tarafın 0'dan ∞ 'a toplamı alınır ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n+1}(t) - u_n| \leq \varepsilon (b-a)(1-C)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (CL)^n \psi(t) \quad (7.22)$$

yazılabilir. (H2) şartı ve $0 < CL < 1$ şartları göz önüne alındığında $n \rightarrow \infty$ limit alınır ise

$\sum_{n=0}^{\infty} (CL)^n \rightarrow \frac{1}{1-CL}$ yakınsaması elde edilir. Buna bağlı olarak her $\varepsilon > 0$ için

$u_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n+1}(t) - u_n(t)|$ serisi J aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon (b-a) [(1-C)(1-CL)]^{-1} \psi(t), \quad \forall t \in J \quad (7.23)$$

elde edilir. Teorem 7.1 deki yöntem izlendiğinde, $u(t)$ fonksiyonunun (7.1) denkleminin bir çözümü olduğu kolaylıkla gösterilebilir ve bu çözüm

$$u(t) - v_0 = \int_a^t P(s) ds$$

ile verilir. Sonuç olarak

$$|u - v| \leq \varepsilon (b-a) [(1-C)(1-CL)]^{-1} \psi(t), \quad \forall t \in J,$$

eşitsizliği sağlanır. Bu takdirde (7.1) denkleminin H-U-R kararlı olduğu sonucuna varılır (Huang ve Li, 2016). Şimdi ise, sonuçlarımızı açıklamak için iki basit örnek sunulmuştur.

Örnek 7.1 Aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - 1 = \int_0^t v(s) ds, & 0 \leq t \leq 1, \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (7.24)$$

Burada $v(t) = 1, \quad \forall 0 \leq t \leq 1$ için

$$\left| v'(t) - 1 + \int_0^t v(s) ds \right| \leq 2$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi $u_0(t) = u(0) = 1$ olsun. Teorem 7.1'deki gibi ardışık yaklaşım yöntemini kullanarak, (7.24) denkleminin çözümü için aşağıdaki yaklaşımlar elde edilir:

$$u_0(t) = 1,$$

$$u_1(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!}$$

Bu takdirde $u(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!}$ ifadesi (7.24) denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca,

$$|v - u| \leq \frac{3}{2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi ise

$$u^*(t) = 1 + t + \dots + \frac{t^4}{4!}$$

fonksiyonu (7.24) 'in bir çözümü olarak tanımlayalım. Buna bağlı olarak

$$|v - u^*| \leq \frac{17}{24}$$

elde edilir. Bu nedenle bu son eşitsizlik, $u^*(t)$ fonksiyonunun $u(t)$ çözümüne daha iyi bir yaklaşım çözümü olduğu görülür (Huang ve Li, 2016).

Örnek 7.2 $t \in [0,1]$ olmak üzere, aşağıdaki IDD'ini göz önüne alalım:

$$\frac{du}{dt} = u(t) + \int_0^t u(s) [1 + u(s)]^{-1} ds. \quad (7.25)$$

(7.25) denklemi ile başlangıçta verilen denklem karşılaştırıldığında

$$g(t, s, u) = u [1 + u]^{-1}$$

olduğu görülür. Buna bağlı olarak

$$|f(t, w_1) - f(t, w_2)| = |w_1 - w_2|$$

ve

$$|g(t, s, w_1(s)) - g(t, s, w_2(s))| \leq |w_1 - w_2|$$

elde edilir. Böylece, Teorem 7.1'nin şartlarının sağladığı görülür. Dolayısıyla, (7.25) denklemi $[0,1]$ aralığı üzerinde bir tek çözüme sahip olur.

Ayrıca, eğer v fonksiyonu

$$\left| v'(t) - v(t) - \int_0^t v(s) [1 + v(s)]^{-1} ds \right| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlar ise, Teorem 7.1 dikkate alındığında (7.25) denklemin bir u çözümü vardır ve bu çözüm

$$|u - v| \leq \frac{\exp(2)}{\varepsilon^{-1}}, \quad \forall t \in [0,1]$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece (7.25) denklemi H-U kararlıdır (Huang ve Li, 2016).

8. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde literatürdeki dört farklı çalışmada ID'ler ve IDD'lerin çözümlerinin varlığı, tekliği ve söz konusu denklemlerin Ulam tipi karalılıkları ile elde edilen sonuçlar ve bu kavramlar ile ilgili verilen örnekler araştırmacıların dikkatlerine sunuldu. Burada ele alınan IDD'lerin bazıları değişken gecikmeli ve bazıları ise gecikmesizdir. Yapılan incelmelerde Banach daralma prensibi, ardışık yaklaşıklar yöntemi ve metrik kavramının sonuçları elde etmede etkin bir biçimde kullanıldığı izlendi. Ele alınan ID'ler ve IDD'lere ait niteliksel sonuçların ispatlanması için denklemlerin tipine bağlı olarak uygun operatörler tanımlandığı, daha sonra ise uygun metrik, norm tanımları, Pachpatte eşitsizliği, Picard operatörü, Gronwall eşitsizliği vb. kavramlar kullanılarak vb. amaca yönelik olarak uygun sonuçlar elde edildiği izlenildi. Tezdeki teoremlerin şartlarının, ispatlarda genelde Banach daralma prensibi kullanılması nedeni ile, ele alınan denklemlerdeki fonksiyonların Lipschitz şartını sağlayacak şekilde inşa edildiği gözlemlendi. Araştırmacılara yeni problem olarak tezdeki denklemlerin vektör ve kesir mertebeli formlarının çözümlerinin varlığı, tekliği ve Ulam karalılıklarının çalışabileceğini önermekteyiz.



KAYNAKLAR

- Abbas, S., Benchohra, M. (2015). Existence and Ulam stability results for quadratic integral equations. *Lib. Math.*, 35(2), 83-93.
- Akkouchi, M. (2019). On the Hyers-Ulam-Rassias stability of a nonlinear integral equation. *Appl. Sci.*, 21, 1-10.
- Alqifiary, Q. H., Jung, S.M. (2014). On the Hyers-Ulam stability of differential equations of second order. *Abstract and Applied Analysis*, 1-8.
- Bayraktar, M. (1987). **Fonksiyonel analiz**. Erzurum: Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.
- Biçer, E., Tunç, C. (2023). On the Hyers-Ulam stability of second order noncanonical equations with deviating argument. *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 14(2), 151-161.
- Berinde, V. (2007). **Iterative approximation of fixed points** (2. ed.). Springer: Berlin
- Burton, T.A. (1985). **Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations**. Academic Press Inc: Orlando, FL.
- Cădariu, L., Radu, V. (2004). A Hyers-Ulam-Rassias stability theorem for a quartic functional equation. *Automat. Comput. Appl. Math.*, 13(1), 31-39.
- Castro, L. P., Ramos, A. (2009). Hyers-Ulam-Rassias stability for a class of nonlinear Volterra integral equations. *Banach J. Math. Anal.*, 3(1), 36-43.
- Castro, L. P., Ramos, A. (2010). Hyers-Ulam and Hyers-Ulam-Rassias stability of Volterra integral equations with delay. **Integral methods in science and engineering** (Vol.1, pp. 85-94). Birkhäuser Boston Ltd: Boston, MA.
- Castro, L. P., Guerra, R. C. (2013). Hyers-Ulam-Rassias stability of Volterra integral equations within weighted spaces. *Lib. Math.*, 33(2), 21-35.
- Castro, L. P., Simões, A. M. (2018). Hyers-Ulam-Rassias stability of nonlinear integral equations through the Bielecki metric. *Math. Methods Appl. Sci.*, 41(17), 7367-7383.
- Castro, L. P., Simões, A. M. (2019). Hyers-Ulam and Hyers-Ulam-Rassias stability for a class of integro-differential equations. **Mathematical methods in engineering** (Vol. 23, pp. 81-94). Springer: Cham.
- Choi, G., Jung, S.M. (2015). Invariance of Hyers-Ulam stability of linear differential equations and its applications. *Advances in Difference Equations.*, 2015, 1-14.
- Ciplea, S. A., Lungu, N. (2020). Ulam stability of Volterra integral equation on a generalized metric space. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math*, 65(2), 303-308.
- Diaz, J., Margolits, B., (1968). A fixed point theorem of the alternative for contractions on a generalized complete metric space, *Bulletin of the American Mathematical Society*. 74, 305-309.
- Ege, O., Ayadi, S., Park, C. (2021). Ulam-Hyers stabilities of a differential equation and a weakly singular Volterra integral equation. *Journal of Inequalities and Applications*, 1-12.
- Găvruta, P., Jung, S.M., Li, Y. (2011). Hyers-Ulam stability for second-order linear differential equations with boundary conditions. *Electron. J. Differential Equations*, 1-5.
- Ghaemi, M., B., Gordji, M. E., Alizadeh, B., Park, C. (2012). Hyers-Ulam stability of exact second-order linear differential equations. *Adv. Difference Equ.*, 1-7.
- Graef, J. R., Tunç, C., Şengün, M., Tunç, O. (2023). The stability of nonlinear delay integro-differential equations in the sense of Hyers-Ulam. *Nonauton. Dyn. Syst.*, 10(1), 1-12

- Huang, J., Jung, S.M., Li, Y. (2015). On Hyers-Ulam stability of nonlinear differential equations. *Bull. Korean Math. Soc.*, 52(2), 685-697.
- Huang, J., Li, Y. (2016). Hyers-Ulam stability of delay differential equations of first order, *Math. Nachr.*, 289(1), 60-66.
- Hyers, D.H. (1941). On the Stability of the Linear Functional Equation. *Proc. Natl. Acad. Sci., U.S.A.*, 27, 222-224.
- Janfada, M. Sadeghi, Gh. (2013). Stability of the Volterra integro differential equation. *Folia Mathematica*, 18(1), 11-20.
- Javadian, A., Sorouri, E., Kim, G. H., Gordji, M. E. (2011). Generalized Hyers-Ulam stability of the second-order linear differential equations. *Journal of Applied Mathematics*, 1-10.
- Jung, S.M. (2004). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order. *Appl. Math. Lett.* 17(10), 1135-1140.
- Jung, S.M. (2005). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order. III. *J. Math. Anal. Appl.*, 311(1), 139-146.
- Jung, S.M. (2006). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order. *Appl. Math. Lett.* 19(9), 854-858.
- Jung, S.M. (2007). A fixed point approach to the stability of a Volterra integral equation. *Fixed Point Theory Appl.*, 1-9.
- Jung, S.M (2010). A fixed point approach to the stability of differential equations $y'=F(x,y)$. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (2), 33(1), 47-56.
- Kucche, K. D., Shikhare, P. U. (2019). Ulam stabilities for nonlinear Volterra delay integro-differential equations. *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.*, 54 (5), 27-43
- Li, Y., Hua, L. (2009). Hyers-Ulam stability of a polynomial equation. *Banach J. Math. Anal.*, 3(2), 86-90.
- Li, Y., Shen, Y. (2009). Hyers-Ulam stability of nonhomogeneous linear differential equations of second order. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1-7.
- Li, Y. (2010). Hyers-Ulam stability of linear differential equations $y'' = \lambda^2 y$. *Thai J. Math.*, 8(2), 215-219.
- Li, Y., Shen, Y. (2010). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of second order. *Appl. Math. Lett.*, 23(3), 306-309.
- Li, Y., Huang, J. (2013). Hyers -Ulam stability of linear second-order differential equations in complex Banach spaces. *Electron. J. Differential Equations*, 184, 1-7.
- Li, T., Zada, A., Faisal, S. (2016). Hyers-Ulam stability of nth order linear differential equations. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9(5), 2070-2075.
- Miura, T., Takahasi, S.E, Choda, H. (2001). On the Hyers-Ulam stability of real continuous function valued differentiable map. *Tokyo J. Math.*, 24, 467-476.
- Miura, T., Takahasi, S.E. (2002). On the Hyers-Ulam stability of a differentiable map. *Sci. Math. Jpn.*, 55(1), 17-24.
- Miura, T., Miyajima, S., Takahasi, S.E. (2003). Hyers-Ulam stability of linear differential operator with constant coefficients. *Math. Nachr.*, 258, 90-96.
- Miura, T., Miyajima, S., Takahasi, S.E. (2003). A characterization of Hyers-Ulam stability of first order linear differential operators, *J. Math. Anal. Appl.*, 286(1), 136-146.
- Miura, T., Jung, S.M, Takahasi, S.E. (2004). Hyers-Ulam-Rassias stability of the Banach space valued linear differential equations $y'=\lambda y$. *J. Korean Math. Soc.* 41(6), 995-1005.

- Mortici, C., Rassias, T. M., Jung, S.M. (2015). The inhomogeneous Euler equation and its Hyers-Ulam stability. *Appl. Math. Lett.*, 40, 23-28.
- Obłoz, M. (1993). Hyers stability of the linear differential equation. *Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat.*, 13, 259-270.
- Oguntuase, J. A. (2001). On an inequality of Gronwall. *JIPAM J. Inequal. Pure Appl. Math.* 2(1), 1-6.
- Onitsuka, M., Shoji, T. (2017). Hyers-Ulam stability of first-order homogeneous linear differential equations with a real-valued coefficient. *Applied Mathematics Letters An International Journal of Rapid Publication*, 63, 102-108.
- Otrocol, D., Ilea, V. (2013). Ulam stability for a delay differential equation. *Central European Journal of Mathematics*, 11(7), 1296-1303.
- Öğrekçi, S., Başcı, Y., Mısı, A. (2023). A fixed point method for stability of nonlinear Volterra integral equations in the sense of Ulam. *Math. Methods Appl. Sci.*, 46(8), 8437-8444.
- Pachpatte, B.G. (1998). ***Inequalities for differential and integral equations***. Academic Press, Inc: San Diego, CA.
- Popa, D., Pugna, G. (2016). Hyers-Ulam stability of Euler's differential equation. *Results Math.*, 69 (3-4), 317-325.
- Radu, V. (2003). The fixed point alternative and the stability of functional equations. *Fixed Point Theory*, 4(1), 91-96.
- Rezaei, H., Jung, S. M., Rassias, T. M. (2013). Laplace transform and Hyers -Ulam stability of linear differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 403(1), 244-251.
- Ross, M. D., Belford, G. G. (1976). Characterization of best Chebyshev approximations with prescribed norm. *J. Approximation Theory*, 16(4), 315-328.
- Rus, I. (2009). Gronwall lemmas: ten open problems, *Sci. Math. Jpn.*, 70(2), 221-228.
- Takahasi, S. E., Miura, T., Miyajima, S. (2002). On the Hyers-Ulam stability of the Banach space-valued differential equation $y'=\lambda y$. *Bull. Korean Math. Soc.*, 39(2), 309-315.
- Tunç, C., Biçer, E. (2015). Hyers-Ulam-Rassias stability for a first order functional differential equation. *J. Math. Fundam. Sci.*, 47(2), 143-153.
- Tunç, O., Tunç, C. (2023,a). Ulam stabilities of nonlinear iterative integro-differential equations. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 117(3), 1-18.
- Tunç O, Tunç C. (2023,b). On Ulam Stabilities of Delay Hammerstein Integral Equation. *Symmetry*, 15(9), 1736.
- Tunç, O., Tunç, C. (2024). G. Petrusel, and J.-C. Yao, On the Ulam stabilities of nonlinear integral equations and integro-differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 47(6), 4014-4028.
- Vu, H., Hoa, N. V., (2020). Ulam-Hyers stability for a nonlinear Volterra integro differential equation. *Hacet. J. Math. Stat.*, 49(4), 1261-1269.
- Xue, J. (2014). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of second order with constant coefficient. *Ital. J. Pure Appl. Math.*, 32, 419-424.



ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Sibel DEMİREL

Eğitim Bilgileri

Lisans

Üniversite : Süleyman Demirel Üniversitesi

Fakülte : Fen Edebiyat Fakültesi

Bölüm : Matematik Bölümü

Mezuniyet Yılı : 2002



VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih 02/07/2024

**Tez Başlığı: BAZI İNTEGRAL VE İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEM
MODELLERİNDE HYERS-ULAM VE HYERS-ULAM-RASSIAS KARARLILIK**

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın, kapak sayfası, giriş, ana bölümler ve sonuç bölümlerinden oluşan toplam 77 (yetmiş yedi) sayfalık kısmına ilişkin, 01/07/2024 tarihinde tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre tezimin benzerlik oranı %20 (yüzde yirmi) dır.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit match size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Sibel DEMİREL

Öğrenci No: 21910001152

Anabilim Dalı: Matematik Anabilim Dalı

Programı: Yüksek Lisans

Statüsü: (X) Yüksek lisans () Doktora

DANIŞMAN
UYGUNDUR

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR