

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MRLW DENKLEMİNİN
YAKLAŞIK NÜMERİK ÇÖZÜMÜ İÇİN
BİR SONLU FARK ŞEMASI



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Furkan AKÇAPINAR

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

AĞUSTOS 2024

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MRLW DENKLEMİNİN
YAKLAŞIK NÜMERİK ÇÖZÜMÜ İÇİN
BİR SONLU FARK ŞEMASI



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Furkan AKÇAPINAR
(36223614923)

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

AĞUSTOS 2024

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının başından sonuna kadar her adımında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, her zaman yanımda hissettiğim, bana yol göstererek yardımcı olan kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a, MATLAB programlarının yazılımında ve karşılaştığım birtakım sorunların çözülmesinde hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen sayın hocalarım Prof. Dr. Yusuf UÇAR, Prof. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU ve Doç. Dr. Berat KARAAĞAÇ'a ve tezin yazılım sürecinde karşılaştığım birtakım problemlerin halledilmesinde görüşlerinden oldukça yararlandığım sayın Prof. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e teşekkürlerimi bir borç bilirim. Ayrıca, bu tez çalışması boyunca bölümde bana her türlü imkanı sağlayan ve yardımlarını esirgemeyen başta bölüm başkanım sayın Prof. Dr. Alaattin ESEN olmak üzere bölümdeki diğer tüm öğretim üyesi hocamalarıma da en içten teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım süresince her daim manevi destek veren ve birçok fedakarlıklar yapan biricik aileme ve değerli arkadaşım Elif ATİK'e ve bu tezin tamamlanmasında vermiş oldukları maddi ve manevi destekten dolayı 2210-A Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı'na (BİDEB) da ayrıca çok teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “MRLW Denkleminin Yaklaşık Nümerik Çözümü için bir Sonlu Fark Şeması” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Furkan AKÇAPINAR



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	
ONUR SÖZÜ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÇİZELGELER DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ	1
2. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ VE BAZI ÖNEMLİ TANIMLAR	11
2.1 Sonlu Farklar Yöntemi ve Temel Unsurları.....	11
2.2 Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımı	12
2.3 Richtmyer Lineerleştirme Yaklaşımı	12
2.4 Lokal Kesme Hatası.....	13
2.5 Tutarlılık	13
2.6 Kararlılık.....	13
2.7 Yakınsaklık	14
2.8 Lax'ın Denklik Teoremi	14
3. MRLW DENKLEMİ İÇİN BİR SONLU FARK ŞEMASI	15
3.1 Crank-Nicolson Sonlu Fark Şeması	15
3.1.1 Şemanın kararlılık analizi.....	18
3.1.2 Şemanın lokal kesme hatası.....	20
4. ÖRNEK PROBLEMLER.....	23
4.1 Problem 1: Tek Soliter Dalga	23
4.2 Problem 2: İki Soliter Dalganın Etkileşimi	23
4.3 Problem 3: Üç Soliter Dalganın Etkileşimi	24
4.4 Problem 4: Maxwellian Başlangıç Koşullu Soliter Dalga.....	24
5. SAYISAL SONUÇLAR VE KARŞILAŞTIRMALAR.....	25
5.1 Nümerik Sonuçlar	27
5.1.1 Problem 1: Tek soliter dalga.....	27
5.1.1.1 Durum 1: $c = 1, x_0 = 40, [x_l, x_r] = [0, 100]$	27
5.1.1.2 Durum 2: $c = 0.3, x_0 = 40, [x_l, x_r] = [0, 100]$	34
5.1.1.3 Durum 3: $c = 0.1, x_0 = 40, [x_l, x_r] = [0, 100]$	40
5.1.2 Problem 2: İki soliter dalganın etkileşimi	46
5.1.2.1 Durum 1: $c_1 = 4, c_2 = 1, x_1 = 25, x_2 = 55, [x_l, x_r] = [0, 250]$	46
5.1.2.2 Durum 2: $c_1 = 1, c_2 = 0.5, x_1 = 20, x_2 = 30, [x_l, x_r] = [0, 100]$	52
5.1.2.3 Durum 3: $c_1 = 0.2, c_2 = 0.1, x_1 = 15, x_2 = 35, [x_l, x_r] = [0, 100]$	57
5.1.3 Problem 3: Üç soliter dalganın etkileşimi	65

5.1.3.1 Durum 1: $c_1 = 4, c_2 = 1, c_3 = 0.25, x_1 = 15, x_2 = 45, x_3 = 60,$ $[x_l, x_r] = [0, 250]$	65
5.1.3.2 Durum 2: $c_1 = 1, c_2 = 0.5, c_3 = 0.25, x_1 = 10, x_2 = 20, x_3 = 30,$ $[x_l, x_r] = [0, 100]$	69
5.1.3.3 Durum 3: $c_1 = 0.6, c_2 = 0.3, c_3 = 0.15, x_1 = 15, x_2 = 35, x_3 = 60,$ $[x_l, x_r] = [0, 100]$	75
5.1.4 Problem 4: Maxwellian başlangıç şartlı soliter dalga.....	84
5.1.4.1 Durum 1: $\mu = 1, x_0 = 40, [x_l, x_r] = [0, 100]$	84
5.1.4.2 Durum 2: $\mu = 0.5, x_0 = 40, [x_l, x_r] = [0, 100]$	84
5.1.4.3 Durum 3: $\mu = 0.1, x_0 = 40, [x_l, x_r] = [0, 100]$	84
6. SONUÇ ve ÖNERİLER	87
KAYNAKLAR.....	90
ÖZGEÇMİŞ	96

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1 : Problem 1 (Durum 1): $c = 1, x_0 = 40, k = 0.0125$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları ve $CPU(s)$ zamanları.	29
Çizelge 5.2 : Problem 1 (Durum 1): $c = 1, x_0 = 40, h = 0.05$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları ve $CPU(s)$ zamanları.	30
Çizelge 5.3 : Problem 1 (Durum 1): $c = 1, x_0 = 40, k = 0.025$ ve $h = 0.2$ için farklı $t=0(1)10$ zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ve $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.	31
Çizelge 5.4 : Problem 1 (Durum 1): $c = 1, x_0 = 40$ ve farklı $h = k$ 'lar için farklı t zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, yakınsaklık mertebesi ve $CPU(s)$ zamanları.	32
Çizelge 5.5 : Problem 1 (Durum 2): $c = 0.3, x_0 = 40, k = 0.0125$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları ve $CPU(s)$ zamanları.	35
Çizelge 5.6 : Problem 1 (Durum 2): $c = 0.3, x_0 = 40, h = 0.05$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları ve $CPU(s)$ zamanları.	36
Çizelge 5.7 : Problem 1 (Durum 2): $c = 0.3, x_0 = 40, k = 0.025$ ve $h = 0.2$ için farklı $t = 0(2)20$ zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ve $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.	37
Çizelge 5.8 : Problem 1 (Durum 2): $c = 0.3, x_0 = 40$ ve farklı $h = k$ 'lar için farklı t zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, yakınsaklık mertebesi ve $CPU(s)$ zamanları.	38
Çizelge 5.9 : Problem 1 (Durum 3): $c = 0.1, x_0 = 40, k = 0.0125$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları ve $CPU(s)$ zamanları.	41
Çizelge 5.10 : Problem 1 (Durum 3): $c = 0.1, x_0 = 40, h = 0.05$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları ve $CPU(s)$ zamanları.	42
Çizelge 5.11 : Problem 1 (Durum 3): $c = 0.1, x_0 = 40$, çeşitli h ve k için farklı t zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları.	43
Çizelge 5.12 : Problem 1 (Durum 3): $c = 0.1, x_0 = 40$ ve farklı $h = k$ 'lar için farklı t zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ve yakınsaklık mertebesi.	44
Çizelge 5.13 : Problem 2 (Durum 1): $c_1 = 4, c_2 = 1, x_1 = 25, x_2 = 55, k = 0.025$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.	47
Çizelge 5.14 : Problem 2 (Durum 1): $c_1 = 4, c_2 = 1, x_1 = 25, x_2 = 55, h = 0.2$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.	48
Çizelge 5.15 : Problem 2 (Durum 1): $c_1 = 4, c_2 = 1, x_1 = 25, x_2 = 55, k = 0.025$ ve $h = 0.2$ için farklı $t = 0(2)20$ zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları. ..	49
Çizelge 5.16 : Problem 2 (Durum 2): $c_1 = 1, c_2 = 0.5, x_1 = 20, x_2 = 30, k = 0.01$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.	52
Çizelge 5.17 : Problem 2 (Durum 2): $c_1 = 1, c_2 = 0.5, x_1 = 20, x_2 = 30, h = 0.1$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.	53

Çizelge 5.18: Problem 2 (Durum 2): $c_1 = 1, c_2 = 0.5, x_1 = 20, x_2 = 30, k = 0.01$ ve $h = 0.1$ için farklı $t = 0(2)20$ zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.....	54
Çizelge 5.19: Problem 2 (Durum 2): $c_1 = 1, c_2 = 0.5, x_1 = 20, x_2 = 30$ ve farklı $h = k$ 'lar için farklı mesh noktalarında hesaplanan yaklaşık sayısal sonuçlar ve yakınsaklık mertebesi.	55
Çizelge 5.20: Problem 2 (Durum 3): $c_1 = 0.2, c_2 = 0.1, x_1 = 15, x_2 = 35, k = 0.1$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.....	58
Çizelge 5.21: Problem 2 (Durum 3): $c_1 = 0.2, c_2 = 0.1, x_1 = 15, x_2 = 35, h = 0.1$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.....	59
Çizelge 5.22: Problem 2 (Durum 3): $c_1 = 0.2, c_2 = 0.1, x_1 = 15, x_2 = 35, k = 0.1$ ve $h = 0.1$ için farklı $t = 0(2)20$ zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.....	60
Çizelge 5.23: Problem 2 (Durum 3): $c_1 = 0.2, c_2 = 0.1, x_1 = 15, x_2 = 35$ ve farklı $h = k$ 'lar için farklı mesh noktalarında hesaplanan yaklaşık sayısal sonuçlar ve yakınsaklık mertebesi	61
Çizelge 5.24: Problem 3 (Durum 1): $c_1 = 4, c_2 = 1, c_3 = 0.25, x_1 = 15, x_2 = 45, x_3 = 60, k = 0.025$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.....	66
Çizelge 5.25: Problem 3 (Durum 1): $c_1 = 4, c_2 = 1, c_3 = 0.25, x_1 = 15, x_2 = 45, x_3 = 60, h = 0.2$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.....	66
Çizelge 5.26: Problem 3 (Durum 1): $c_1 = 4, c_2 = 1, c_3 = 0.25, x_1 = 15, x_2 = 45, x_3 = 60, k = 0.025$ ve $h = 0.2$ için farklı $t = 0(5)45$ zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.....	67
Çizelge 5.27: Problem 3 (Durum 2): $c_1 = 1, c_2 = 0.5, c_3 = 0.25, x_1 = 10, x_2 = 20, x_3 = 30, k = 0.01$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.....	70
Çizelge 5.28: Problem 3 (Durum 2): $c_1 = 1, c_2 = 0.5, c_3 = 0.25, x_1 = 10, x_2 = 20, x_3 = 30, h = 0.1$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.	71
Çizelge 5.29: Problem 3 (Durum 2): $c_1 = 1, c_2 = 0.5, c_3 = 0.25, x_1 = 10, x_2 = 20, x_3 = 30, k = 0.01$ ve $h = 0.1$ için farklı $t = 0(2)20$ zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.....	72
Çizelge 5.30: Problem 3 (Durum 2): $c_1 = 1, c_2 = 0.5, c_3 = 0.25, x_1 = 10, x_2 = 20, x_3 = 30$ ve farklı $h = k$ 'lar için farklı mesh noktalarında hesaplanan yaklaşık sayısal sonuçlar ve yakınsak mertebesi.	73
Çizelge 5.31: Problem 3 (Durum 3): $c_1 = 0.6, c_2 = 0.3, c_3 = 0.15, x_1 = 15, x_2 = 35, x_3 = 60, k = 0.1$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.	76
Çizelge 5.32: Problem 3 (Durum 3): $c_1 = 0.6, c_2 = 0.3, c_3 = 0.15, x_1 = 15, x_2 = 35, x_3 = 60, h = 0.1$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.	77
Çizelge 5.33: Problem 3 (Durum 3): $c_1 = 0.6, c_2 = 0.3, c_3 = 0.15, x_1 = 15, x_2 = 35, x_3 = 60, k = 0.1$ ve $h = 0.1$ için farklı $t = 0(2)20$ zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.....	78

Çizelge 5.34: Problem 3 (Durum 3): $c_1 = 0.6$, $c_2 = 0.3$, $c_3 = 0.15$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$, $x_3 = 60$ ve farklı $h = k$ 'lar için farklı mesh noktalarında hesaplanan yaklaşık sayısal sonuçlar ve yakınsaklık mertebesi.	79
Çizelge 5.35: Problem 4: $x_0 = 40$, $k = 0.01$, $h = 0.1$ ve farklı μ değerleri için farklı $t = 2(2)20$ zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.	85



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 5.1 : Problem 1 (Durum 1): $h = 0.05$ ve $k = 0.0125$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik (*) ve analitik (-) çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.....	33
Şekil 5.2 : Problem 1 (Durum 1): $h = 0.05$ ve $k = 0.0125$ için $t = 20$ 'de hesaplanan nümerik çözüm ve arkasında bıraktığı dalgacıkların büyütülmüş görseli.	33
Şekil 5.3 : Problem 1 (Durum 2): $h = 0.05$ ve $k = 0.0125$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik (*) ve analitik (-) çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.....	39
Şekil 5.4 : Problem 1 (Durum 2): $h = 0.05$ ve $k = 0.0125$ için $t = 20$ 'de hesaplanan nümerik çözüm ve arkasında bıraktığı dalgacıkların büyütülmüş görseli.	39
Şekil 5.5 : Problem 1 (Durum 3): $h = 0.05$ ve $k = 0.0125$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik (*) ve analitik (-) çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.....	45
Şekil 5.6 : Problem 1 (Durum 3): $h = 0.05$ ve $k = 0.0125$ için $t = 20$ 'de hesaplanan nümerik çözüm ve arkasında bıraktığı dalgacıkların büyütülmüş görseli.	45
Şekil 5.7 : Problem 2 (Durum 1): $h = 0.2$ ve $k = 0.025$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.	51
Şekil 5.8 : Problem 2 (Durum 2): $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.	57
Şekil 5.9 : Problem 2 (Durum 3): $h = 0.1$ ve $k = 0.1$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.	63
Şekil 5.10 : Problem 2 (Durum 3): $h = 0.1$, $k = 0.1$ ve $[x_l, x_r] = [0, 250]$ için $t = 0(30)150$ zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.....	64
Şekil 5.11 : Problem 3 (Durum 1): $h = 0.2$ ve $k = 0.025$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.	68
Şekil 5.12 : Problem 3 (Durum 2): $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.	74
Şekil 5.13 : Problem 3 (Durum 3): $h = 0.1$ ve $k = 0.1$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.	81
Şekil 5.14 : Problem 3 (Durum 3): $h = 0.1$, $k = 0.1$ ve $[x_l, x_r] = [0, 300]$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.....	83
Şekil 5.15 : Problem 4: μ 'nün farklı değerleri için $t = 10$ zamanında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.	86

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

IR	: Reel Sayılar Kümesi
N	: Doğal Sayılar Kümesi
KDD	: Kısmi Diferansiyel Denklem
h	: Konum Adım Uzunluğu
k	: Zaman Adım Uzunluğu
x	: Konum Değişkeni
t	: Zaman Değişkeni
$(\mathbf{x}_m, \mathbf{t}_n)$	: Mesh Noktası
$\mathbf{U}(\mathbf{x}_m, \mathbf{t}_n)$	: Analitik Çözüm
$\mathbf{u}_m^n$	: Yaklaşık Çözüm
CPU(s)	: Merkezi İşlem Birimi (Central Processing Unit)
KdV	: Korteweg-de Vries
BBM	: Benjamin-Bona-Mahony
RLW	: Düzenli Uzun Dalga (Regularized Long Wave)
MRLW	: Modifiye Edilmiş Düzenli Uzun Dalga (Modified Regularized Long Wave)
GRLW	: Genelleştirilmiş Düzenli Uzun Dalga (Generalized Regularized Long Wave)
L_2	: Ortalama Kare Hata Normu
L_∞	: Maksimum Hata Normu
I_M	: Kütle (Analitik)
I_Q	: Moment (Analitik)
I_E	: Enerji (Analitik)
$\tilde{I}_M$	: Kütle (Yaklaşık)
$\tilde{I}_Q$	: Moment (Yaklaşık)
$\tilde{I}_E$	: Enerji (Yaklaşık)
Mertebe (L_2)	: L_2 deki Yakınsaklık Mertebesi
Mertebe (L_∞)	: L_∞ deki Yakınsaklık Mertebesi

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MRLW DENKLEMİNİN YAKLAŞIK NÜMERİK ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR SONLU FARK ŞEMASI

FURKAN AKÇAPINAR

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

96+x sayfa

2024

Danışman: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

Çeşitli başlangıç ve sınır şartları ile verilen Modifiye Edilmiş Düzenli Uzun Dalga (MRLW) denkleminin yaklaşık nümerik çözümlerinin bulunmasını hedefleyen bu mevcut tez altı bölüm olarak planlandı.

Bölüm 1’de bu tezde ele alınacak MRLW denklemi ile birlikte alışılmış RLW ve Genelleştirilmiş RLW denkleminin analitik/yarı-analitik ve nümerik çözümleri üzerine literatürde mevcut olan çalışmalardan detaylı olarak bahsedildi.

Bölüm 2’de bu tezde kullanılacak olan sonlu fark yöntemi hakkında kısaca bahsedildi ve yine tezde geçen bazı tanımlar verildi.

Bölüm 3’de model problem olarak göz önüne alınacak olan MRLW denklemi ile verilen başlangıç ve sınır değer probleminin hem konum hemde zaman yönünde tamamen ayrıklaştırılmış Crank-Nicolson tipi sonlu fark şeması elde edildi. Burada denklemdaki lineer olmayan terim Richtmyer yaklaşımı ile lineerleştirildi. Bu bölümde şemanın kararlılığı von-Neumann yöntemiyle incelendi ve şartsız kararlı olduğu gösterildi. Ayrıca sunulan şemanın lokal kesme hatasının mertebesi hesaplandı.

Bölüm 4’de bazı sayısal hesaplamalar için MRLW denklemi ile verilen dört örnek problem kısaca tanıtıldı.

Bölüm 5’de sunulan şema her bir örnek probleme uygulandı. Sunulan şemadan elde edilen nümerik sonuçlar yardımıyla L_2 ve L_∞ hata normları, $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ korunum sabitleri, $Mertebe(L_2)$ ve $Mertebe(L_\infty)$ yakınsaklık mertebeleri ve $CPU(s)$ zamanları hesaplandı. Sunulan şemanın doğruluğunu ve güvenilirliğini göstermek için, aynı parametre değerleri kullanılarak, elde edilen nümerik sonuçlar analitik sonuçlarla (eğer mevcutsa) ve ayrıca mevcut literatürdeki diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla karşılaştırıldı.

Bu tez çalışmasının son bölümü olan Bölüm 6’da ise kısa bir sonuçla ile birlikte ileriki çalışmalar için yine kısa bir öneride bulunuldu.

Anahtar Kelimeler: MRLW Denklemi, Soliter Dalgalar, Crank-Nicolson Tipi Fark Yaklaşımı, Richtmyer Tipi Lineerleştirme, von-Neumann Kararlılık Testi

ABSTRACT

Master Thesis

A Finite Difference Scheme
for Approximate Numerical Solution
of the MRLW Equation

Furkan AKÇAPINAR

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

96+x pages

2024

Supervisor: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

The current thesis, which aims to find the approximate numerical solutions of the Modified Regular Long Wave (MRLW) equation given together with various initial and boundary conditions, is planned as six chapters.

In Chapter 1, the existing studies in the literature on the analytical/semi analytical and numerical solutions of the conventional RLW and Generalized RLW equation, as well as the MRLW equation to be discussed in this thesis, are mentioned in detail.

In Chapter 2, the finite difference method that is going to be used in this thesis is briefly explained and some definitions used in the thesis are given.

In Chapter 3, a completely discretized Crank-Nicolson finite difference scheme is obtained in both spatial and temporal direction of the initial and boundary value problem given by the MRLW equation, which will be considered as a model problem. Here, the nonlinear term in the equation is linearized by using the Richtmyer approach. In this chapter, the stability analysis of the scheme has been examined by the von-Neumann method and it has been shown that it is unconditionally stable. Additionally, the order of the local truncation error of the scheme is calculated.

In Chapter 4, four test problems given with the MRLW equation are briefly introduced in order to perform some numerical calculations.

In Chapter 5, the presented scheme has been applied to each model problem. With the help of the numerical results obtained from the presented scheme, the error norms L_2 and L_∞ , conservation constants $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ and $\tilde{I}_E$, order of convergences $Order(L_2)$ and $Order(L_\infty)$ and $CPU(s)$ times are calculated. To demonstrate the accuracy and reliability of the presented scheme, the numerical results obtained using the same parameter values are compared with analytical results (if available) and with those given by other researchers in the existing literature.

In Chapter 6, which is the last part of this thesis, together with a brief evaluation, again a brief suggestion for future studies are presented.

Keywords: MRLW Equation, Solitary Waves, Crank-Nicolson Type Difference Approach, Richtmyer Type Linearization, von-Neumann Stability Test

1. GİRİŞ

İçinde yaşadığımız evrende bir çok doğa olayı meydana gelir. Bunlar genellikle fiziksel, kimyasal ve biyolojik olaylardır. Bilim insanları geçmişten günümüze kadar bu olaylara odaklanmışlar ve bu olguları matematiksel denklemlerle modellemişlerdir. Bu yapıdaki denklemler çoğunlukla cebirsel, diferansiyel, integral denklemleri ve/veya denklem sistemleri olarak karşımıza çıkar. Bu denklemler içerisinde özellikle Kısmi Diferansiyel Denklemler (KDD'ler) pek çok olgunun matematiksel modelinin temelini oluşturur ve son zamanlarda bunların kullanımı ekonomik, finansal tahmin, görüntü işleme gibi diğer alanlara da yayılmıştır. Mühendislik ve uygulamalı bilimlerde pek çok olayın matematiksel modellenmesinde kullanılan KDD'ler genellikle lineer değildir, yani nonlinear (lineer olmayan) dir. Böyle denklemlerin çoğunun bazı özel dönüşümler ve sınırlı sayıda başlangıç ve sınır şartları haricinde analitik çözümleri literatürde mevcut değildir veya analitik çözümlerini hesaplamak son derece zahmetli ve hatta zordur. Bu sebeple bir çok araştırmacı doğrusal olmayan KDD'lerin tam çözümlerinden ziyade sayısal çözümleri ile ilgilenir.

Literatürde sıklıkla karşılaşılan bu tip denklemlerden biri $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$ fiziksel sınır şartlarını sağlayan

$$U_t + \alpha U_x + \beta (U^p)_x - \mu U_{xxt} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (1.0.1)$$

olarak verilen 1-boyutlu lineer olmayan dalga denklemdir. Burada $U(x,t)$ dalga yüksekliğini, $(U^p)_x$ nonlinearliği ve U_{xxt} ise dağılımı (dispersion) temsil eden terimler olup $\alpha, \beta, \mu > 0$ ve $p \geq 2$ keyfi sabitlerdir [1].

(1.0.1) ile verilen denkleme $p = 2$ için

$$U_t + \alpha U_x + \beta (U^2)_x - \mu U_{xxt} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

alışılmış Düzenli Uzun Dalga (RLW) denklemi veya diğer adıyla Benjamin-Bona-Mahony denklemi; $p = 3$ için

$$U_t + \alpha U_x + \beta (U^3)_x - \mu U_{xxt} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (1.0.2)$$

modifiye-edilmiş RLW (MRLW) denklemi ve $p \geq 4$ için de Genelleştirilmiş RLW (GRLW) denklemi denir.

RLW denklemi ilk olarak Peregrine [2] tarafından ardışık dalgaların (undular bores) gelişimini tanımlamak için ele alınmış ve daha sonra tek yönlü (uni-directionally) olarak

yayılan küçük genlikli uzun yüzey yer çekimi dalgalarını modellemek için Korteweg-de Vries (KdV) [3] denkleminin bir geliştirilmiş hali olarak Benjamin-Bona-Mahony (BBM) [4] tarafından incelenmiştir. Yazarlar ayrıca RLW denkleminin ve aynı zamanda BBM olarak bilinen denklemin çözümlerinin tekliği ve kararlılığı üzerinde çalışmışlardır. KdV denklemi sonsuz sayıda invaryantlara sahip iken, RLW ve MRLW denklemleri kütle, momentum ve enerji olarak bilinen üç tane değişmeze sahiptir. Bundan dolayı da bu denklemler KdV denklemine göre önemli teknik avantajlar sunar [4].

RLW ve MRLW denklemlerinin sınırlı sayıda başlangıç ve sınır şartları için analitik çözümleri vardır. Bundan ötürü bu ve benzeri denklemlerin çeşitli başlangıç ve sınır koşullarıyla incelenmesinde sayısal yöntemlere başvurulur. Literatür çalışması bu tür denklemlerin çözümü için çeşitli sayısal yöntemler olduğunu göstermektedir. Mevcut literatürdeki sayısal yöntemler içerisinde özellikle sonlu farklar ve sonlu elemanlarla birlikte bu yöntemlere dayalı pek çok sayısal teknik ve yöntem bu tip denklemlerin incelenmesinde oldukça popüler olmuştur.

Bilindiği üzere bir kısmi diferansiyel denklemle verilen herhangi bir başlangıç ve sınır değer probleminin uygun bir nümerik yöntemle çözülebilmesi için problemin çözüm bölgesinin sonlu olması gerekir. Bu tez çalışmasında (1.0.1) ile verilen denklem için ele alınacak başlangıç ve sınır değer problemleri sonlu farklar üzerine temellenmiş Crank-Nicolson tipi yaklaşımdan elde edilecek bir nümerik şema yardımıyla çözüleceğinden hesaplamaların yapılabilmesi için $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty)$ çözüm bölgesi yerine $(x, t) \in [x_l, x_r] \times [0, T]$ sonlu bölgesi alındı ve tüm hesaplamalar bu bölge üzerinde yapıldı.

Bu çalışmada,

$$U_t + U_x + \alpha(U^3)_x - \mu U_{xxt} = 0, (x, t) \in [x_l, x_r] \times [0, T] \quad (1.0.3)$$

olarak verilen 1-boyutlu nonlinear MRLW denklemini

$$U(x_l, t) = U(x_r, t) = 0, t \geq 0 \quad (1.0.4)$$

homojen Dirichlet sınır şartları ve

$$U(x, 0) = U_0(x), x \in [x_l, x_r] \quad (1.0.5)$$

başlangıç şartıyla göz önüne alınacaktır. Burada $[x_l, x_r] \subset \mathbb{R}$ olup $U_0(x)$ ise düzgün bir fonksiyondur.

RLW, MRLW ve GRLW denklemlerinin her birinin doğrusal olmaması ve dağıtıcı etkilerine sahip birer denklem olmaları birçok bilim insanının ilgisini çekmiştir. Bundan dolayı da pek çok

araştırmacı bu çeşit denklemlerin verilen uygun başlangıç veya başlangıç-sınır şartları altında analitik ve/veya yaklaşık sayısal çözümlerini hesaplamak için büyük çaba sarf etmişlerdir.

Bu çeşit denklemlerin analitik ve yarı-analitik çözümleriyle ilgili literatürde mevcut çalışmaların bazıları şunlardır: Bona vd. [5], GRLW denkleminin $p > 5$ durumunda kararlı ve kararsız soliter dalga çözümlerini araştırmak için Fourier spektral yöntemini kullandı. Kaya [6], başlangıç şartıyla verilen GRLW denklemini ele aldı ve $p \geq 2$ nin bazı değerleri için Adomian ayrıklaştırma yöntemi kullanarak problemin tek (single) soliter dalga hareketini simüle eden yarı-analitik çözümler sundu. Rafei vd. [7], alışılmış RLW denkleminin tek soliter dalga çözümlerini bulmak için yarı-analitik yöntem olarak bilinen ve He [8, 9] tarafından önerilen homotopi pertürbasyon yönteminin bir modifikasyonunu kullandılar. Khalifa vd. [10], MRLW denklemini bazı başlangıç koşulları altında Adomian ayrıklaştırma yöntemi ile sayısal olarak çözdüler. Achouri ve Omrani [11], uygun başlangıç şartları altında MRLW denklemi ile verilen tek soliter dalga, iki ve üç soliter dalganın etkileşimi problemlerinin bazı çözümlerini türetmek için homotopi pertürbasyon yöntemini kullandılar. Labidi ve Omrani [12], MRLW denkleminin çözümleri için He'nin varyasyonel iterasyon yönteminden yararlandılar. Yöntemi başarılı bir şekilde üç test probleme (single soliter dalga, iki ve üç soliter dalganın etkileşimi) uyguladılar. Khan vd. [13], MRLW denkleminin verilen dört belirli başlangıç koşullarıyla yaklaşık sayısal çözümünü homotopi analiz yöntemiyle buldular. Akram ve Sadaf [14], lineer olmayan sönümlü GRLW denkleminin soliter dalga çözümlerini homotopi analiz yönteminin bir farklı versiyonu ile elde ettiler. El-Bary vd. [15], GBBM denkleminin analitik ve sayısal çözümlerini analiz etmek için uyarlanabilir (adapted) hareketli mesh ve düzgün mesh yöntemlerini kullandılar. Karakoç vd. [16], GRLW denklemi ile verilen tek soliter dalga problemini göz önüne aldılar. Bu problemin tam çözümü için Riccati-Bernoulli sub-ODE yöntemini ve nümerik çözümü için Subdomain sonlu eleman yöntemini uyguladılar. Liu [17], GBBM denkleminin dalga çözümlerinin varlığını ve sayılarını araştırdı. Denklemin çingirak görünümlü (bell-shaped) ve kink soliter dalgalarının çözümleri ile birlikte periyodik çözümlerinin analitik davranışlarını elde etti.

RLW, MRLW ve GRLW denklemlerinin yaklaşık nümerik çözümleriyle ilgili literatürde mevcut çalışmaların bazıları ise şunlardır: Gardner vd. [18], MRLW denkleminin tek soliter dalga, iki soliter dalganın etkileşimi ve Maxwellian başlangıç koşullu soliter dalgaların gelişimi problemlerinin nümerik çözümleri için zaman yönünde ayrıklaştırmada dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi, konum yönünde ayrıklaştırmada ise sonlu elemanlar üzerine temellenmiş

beşinci dereceden B-spline kollokasyon yöntemi kullanan yeni bir nümerik şablon önerdiler. Zhang [19], belirli başlangıç ve sınır değerlerini sağlayan GRLW denkleminin yaklaşık sayısal çözümlerini elde etmek için enerji korunumlu bir sonlu fark şeması geliştirdi. Ramos [20], GRLW denklemini biri sadece zamana bağlı diğeri sadece konuma bağlı iki denklem olarak ayrıştırdıktan sonra üç noktalı, dördüncü mertebeden doğruluğa sahip kompakt fark denklemleriyle sonuçlanan bir yaklaşık yarı-lineer yöntem önerdi ve ikili (coupled) denklemin uygun başlangıç ve sınır şartları altında single soliter dalga, iki soliter dalga ve Gaussian başlangıç koşullu dalga çözümlerini inceledi. Khalifa vd. [21], MRLW denklemi için single soliter dalga, iki ve üç soliter dalganın etkileşimi problemleriyle birlikte Maxwellian başlangıç şartlı soliter dalgaların gelişimi problemini ele aldılar ve her bir örnek problemin nümerik sonuçlarını üreten sonlu farklar yaklaşımları esasına dayanan bir lineer nümerik şema sundular. Khalifa vd. [22], aynı zamanda MRLW denkleminin soliter dalga çözümlerini çalışmak için üçüncü dereceden B-spline kollokasyon tekniği kullanan bir nümerik şema geliştirdiler. Hassan ve Raslan [23], MRLW denkleminin soliter dalgalarının yaklaşık çözümleri için konum yönündeki türevleri ayrıştırmada ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci dereceden B-spline kollokasyon yöntemi kullandılar. İkinci ve üçüncü dereceden B-splinelarda zamana göre türevler sonlu fark yaklaşımı ile ayrıştırtılarak cebirsel denklem sistemi ile sonuçlanan, dördüncü ve beşinci dereceden B-spline'larda da dördüncü mertebeden Runge-Kutta algoritması yardımıyla kolayca çözülebilen bir adi diferansiyel denklem sistemi ile sonuçlanan iki nümerik şema sundular. Raslan [24], aynı zamanda MRLW denklemi ile verilen dört test problemin yaklaşık sayısal çözümlerini elde etmek için zaman integrasyonunu merkezi fark yaklaşımı tarzında bir yaklaşımla ayrıştıran ve konum integrasyonunu da ikinci dereceden B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle ayrıştıran üç zaman seviyeli yeni bir nümerik algoritma geliştirdi. Cai [25], MRLW denklemi ile verilen üç test problemin uzun zaman hesaplamalarında nümerik çözümlerini incelemek için 10 noktalı multi-simplektik metodunu kullanan başarılı bir nümerik teknik önerdi. Haq vd. [26], MRLW denkleminin doğrusal olmayan dağıtıcı tek (single) dalgalarının yayılımını araştırmak için dördüncü dereceden B-spline'lara dayanan kollokasyon yöntemi uyguladılar. Mokhtari ve Mohammadi [27], MRLW denklemi ile verilen single soliter dalga ve iki soliter dalganın etkileşimi problemlerinin nümerik çözümlerini bulmak için Sinc baz fonksiyonu kullanan global kollokasyon yöntemine dayalı bir nümerik yaklaşım verdiler. Raslan ve El-Danaf [28], MRLW denklemi ile verilen single soliter dalga, iki ve üç soliter dalganın etkileşimi ve Maxwellian başlangıç koşullu soliter dalga olarak bilinen dört test problemin doğru ve etkili nümerik çözümlerini üretmek için konum integrasyonunu

ayırıklaştırmada beşinci dereceden B-spline kollokasyon tekniği yardımıyla bir adi diferansiyel denklem sistemi ile sonuçlanan bir nümerik şema önerdiler ve kullandılar. Dereli [29], MRLW denklemiyle verilen üç test problemin (single soliter dalga, iki soliter dalga ve üç soliter dalga) yaklaşık sayısal çözümleri için multikvadrik, Gaussian, ters multikvadrik ve ters kvadrik radyal baz fonksiyonları kullanan kollokasyon yöntemine dayalı ağırsız bir nümerik teknik sundu. Garcia-Lopez ve Ramos [30], zaman ve konuma göre sırasıyla ikinci ve dördüncü mertebeden doğruluğa sahip zaman yönünde lineerleştirilmiş üç noktalı kompakt bir sonlu fark yöntemi önerdiler. Tek kuvvetli nonlinear terime sahip GRLW denklemi ile birlikte GLRW denkleminin modifiye edilmiş bir varyantının soliter dalgalarının etkileşimini ve yayılımını araştırmak için bağımlı değişkenle birlikte onun birinci ve ikinci mertebeden konum türevlerini kullandılar. Roshan [31], test fonksiyonu olarak beşinci dereceden B-spline fonksiyonunu ve trial baz fonksiyonu olarak da lineer hat fonksiyonunu kullanan Petrov-Galerkin yöntemini GRLW denklemi ile verilen single soliter dalga, iki soliter dalga'nın etkileşimi ve Maxwellian başlangıç koşullu soliter dalga problemlerine uyguladı ve bazı nümerik sonuçlar verdi. Lin [32], GRLW denkleminin single soliter dalga ve iki soliter dalga'nın etkileşimi problemlerinin nümerik çözümü için parametrik uyarlanabilir üçüncü dereceden spline fonksiyonları üzerine temellenen sayısal bir yöntem sundu. Dağ vd. [33], MRLW denkleminin sayısal çözümü için genişletilmiş üçüncü dereceden B-spline fonksiyonuna dayalı bir kollokasyon yöntemi tanıttılar ve yöntemi single soliter dalga ile iki soliter dalga'nın etkileşimi problemlerine uyguladılar. Karakoç ve Geyikli [34], MRLW denkleminin belirli başlangıç ve sınır şartlarına bağlı sayısal çözümlerini bulmak için eleman şekil (shape) fonksiyonları üçüncü dereceden, ağırlık fonksiyonları ise ikinci dereceden B-spline fonksiyonlar olan Petrov-Galerkin yöntemine dayalı bir sayısal yöntem sundular. Yağmurlu vd. [35], dört farklı başlangıç ve sınır şartları ile verilen MRLW denkleminin sayısal çözümünü beşinci dereceden B-spline baz fonksiyonları kullanan kollokasyon sonlu eleman yöntemi yardımıyla elde ettiler. Karakoç vd. [36], MRLW denkleminin yaklaşık sayısal çözümlerini dördüncü dereceden B-spline fonksiyonları kullanarak alt-bölge sonlu elemanlar yöntemiyle elde ettiler. Önerilen yöntem yardımıyla tek soliter dalga hareketini, iki ve üç soliter dalga'nın etkileşimini ve Maxwellian başlangıç koşullu soliter dalgaların gelişimini incelediler. Mokhtari ve Akbari [37], GRLW denklemini çözmek için yeni bir kompakt sonlu fark yöntemi geliştirdiler ve bu yöntemi single soliter dalga ile iki soliter dalga'nın etkileşimi problemlerine uyguladılar. Berikelashvili ve Mirianashvili [38], GRLW denkleminin single soliter dalga çözümlerini elde etmek için üç zaman seviyeli korunumlu bir sonlu fark yöntemi önerdiler. Liew vd. [39], GRLW denklemiyle verilen single soliter dalga, iki ve üç soliter dalga'nın

etkileşimi olarak bilinen üç test problemin sayısal çözümlerini analiz etmek için elementsiz kp-Ritz yöntemini kullandılar. Karakoç vd. [40], MRLW denkleminin sayısal çözümü için yedinci dereceden bir B-spline kollokasyon yöntemi sundular ve tek soliter ile birlikte iki ve üç soliter dalganın etkileşimini içeren üç test problemi incelediler. Mei vd. [41], MRLW denklemi ile tanımlanan single soliter dalga, iki ve üç soliter dalganın etkileşimi ve Maxwellian başlangıç şartlı soliter dalgaları içeren dört farklı test problemin sayısal çözümlerini incelemek için bir Galerkin sonlu eleman yöntemi geliştirdiler. Grajales [42], tüm reel eksen üzerinde tanımlanan GRLW denkleminin sayısal davranışlarını incelemek için Chebyshev rasyonel fonksiyonların bir L^2 ortogonal bazının kullanılmasıyla denklemi konum değişkeni yönünde ayırıklaştıran bir çözüm algoritması sundu. Mei ve Gao [43], üç farklı başlangıç ve sınır şartları ile verilen MRLW doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denkleminin dalga yayılımını sayısal olarak çözmek için açık çok adımlı bir Galerkin sonlu elemanlar yöntemi geliştirdiler. Mei ve Gao [44], aynı zamanda MRLW denkleminin nümerik çözümü için konum ayırıklaştırılmasında Galerkin sonlu elemanlar yöntemini ve zaman ayırıklaştırmada Crank-Nicolson ekstrapolasyonu ile birlikte açık lineer çok adımlı yaklaşımlar kullanan iki şema sundular. Hammad ve Azab [45], GRLW denklemi için single soliter dalga, iki ve üç soliter dalganın etkileşimi olarak bilinen üç başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde denklemi konum yönünde ayırıklaştıran ikinci mertebeden kompakt sonlu farklar yöntemi ve zaman yönünde ayırıklaştıran bir geri sonlu fark yöntemi kullanan nümerik şema verdiler. Garcia-Lopez ve Ramos [46], üstel ve kompakt operatör yaklaşımları yardımıyla viskoz ve viskoz olmayan GRLW denklemlerinde çingırak şeklindeki (bell-shaped) başlangıç koşulları tarafından üretilen soliter dalgaları çalıştılar. Pan vd. [47], GRLW denkleminin bir başlangıç-sınır değer problemini çözmek için sonlu farklar üzerine inşa edilen üç zaman seviyeli lineer-kapalı yüksek mertebeden kompakt korunumlu bir nümerik şema geliştirdiler. Mohammadi [48], iki farklı başlangıç ve sınır şartlarını sağlayan zamana bağlı GRLW denkleminin soliter dalgalarının davranışlarını incelemek için denklemi zamansal yönde Crank-Nicolson tipi sonlu fark yaklaşımı ile konumsal yönde de üstel B-spline kollokasyon yaklaşımı ile ayırıklaştıran bir sayısal şema sundu. Li vd. [49], GRLW denkleminin single soliter dalga çözümünü bulmak için dördüncü mertebeden enerji korunumlu kompakt bir yeni sonlu fark şeması önerdiler. Hammad ve Azab [50], GRLW denkleminin single soliter dalga, iki ve üç soliter dalganın etkileşimleri problemlerini ele aldılar. Bu problemlerin yaklaşık nümerik çözümlerini hesaplamak için Kronecker ve Hadamard çarpımları üzerine inşa edilen bir Chebyshev-Chebyshev spektral kollokasyon yöntemini sundular. Zeybek ve Karakoç [51], GRLW denkleminin üç farklı başlangıç ve sınır koşullarıyla soliter dalga

çözümlerini iki farklı lineerleştirme tekniğinden yararlanarak yedinci dereceden B-spline kollokasyon metoduyla elde ettiler. Pan ve Zhang [52], MRLW denkleminin single soliter dalga problemini çözmek için konum yönünde dördüncü mertebeden kompakt bir sonlu fark yaklaşımı ve zaman yönünde leap-frog şemasının bir versiyonunu içeren etkili bir sayısal algoritma geliştirdiler. Ramos [53], Gaussian başlangıç şartına bağlı GRLW denkleminin ortaya çıkardığı soliter dalgaların davranışlarını analiz etmek için zaman yönünde ikinci mertebeden doğruluğa, konum yönünde ise ikinci ve dördüncü mertebeden doğruluğa sahip iki kapalı sonlu fark yöntemi ile birlikte konuma göre ikinci mertebeden doğrulukta olan üç Runge-Kutta algoritması sundu. Zeybek ve Karakoç [54], GRLW denklemini içeren üç farklı başlangıç ve sınır değer problemlerinin sayısal çözümlerini incelemek için üçüncü dereceden B-splinelar kullanan bir lumped Galerkin yaklaşımı verdiler. Garcia-Lopez ve Ramos [55], viskoz olmayan GRLW denkleminin dinamiklerini analiz etmek için zaman ve konuma göre sırasıyla ikinci ve dördüncü mertebeden doğruluğa sahip olan dört farklı zaman-lineerleştirme yöntemi sundular. Kaplan ve Dereli [56], MRLW denklemini üç farklı başlangıç ve sınır şartlarıyla göz önüne aldılar. Denklemin soliter dalga çözümlerini üretmek için hareketli en küçük kareler kollokasyon metodu kullandılar. Salih vd. [57], MRLW denkleminde oluşan tek soliter dalgaların çözümünü incelemek için üçüncü dereceden bir trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi verdiler. Mei ve Li [58], GRLW denklemi için yerel momentum korunum yasalarından elde edilen ikisi açık ikisi kapalı dört farklı algoritma sundular ve bunları tek soliter dalga, iki ve üç soliter dalganın etkileşimi problemlerini içeren üç farklı test probleme uyguladılar. Rohila ve Mittal [1], farklı başlangıç ve sınır şartları ile verilen RLW ve MRLW denklemlerinin ilerleyen soliter dalga çözümlerini incelemek için üçüncü dereceden B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi kullanan dördüncü mertebeden bir nümerik şema önerdiler. Zeybek ve Karakoç [59], GRLW denklemi için başlangıç ve sınır koşulları ile verilen üç test problemin ilerleyen soliter dalga çözümlerini elde etmek için sonlu elemanlar üzerine kurulan beşinci dereceden B-spline kollokasyon yöntemi kullandılar. Bhowmik ve Karakoç [60], GRLW denkleminin ilerleyen dalga çözümleri için eleman şekil fonksiyonu olarak üçüncü dereceden ve ağırlık fonksiyonu olarak ikinci dereceden B-spline fonksiyonlar kullanan Petrov-Galerkin yöntemi üzerine inşa edilen bir şema sundular. Yazarlar önerilen yöntemi, tek soliter dalganın yayılımı, iki soliter dalganın etkileşimi ve Maxwellian başlangıç koşullu soliter dalgaların evrimini içeren üç referans probleme uyguladılar. Görgülü ve Irk [61], MRLW denklemi ile verilen tek soliter dalganın yayılımı ve iki soliter dalganın etkileşimi olarak bilinen problemleri ele aldılar. Bu problemlerin nümerik çözümleri için üçüncü dereceden trigonometrik B-spline baz

fonksiyonlarını kullanan Galerkin yöntemi üzerine dayalı bir sayısal algoritma sundular. Omrani vd. [62], RLW ve MRLW denklemleri ile verilen ilerleyen soliter dalga davranışlarına sahip dört farklı başlangıç ve sınır değer probleminin nümerik sonuçlarını üreten yüksek mertebeden lineerleştirilmiş bir korunumlu sonlu fark şeması verdiler. Alharbi [63], GRLW denkleminde oluşan tek (single), iki ve üç soliter dalganın sayısal çözümlerini Parabolik Monge Ampere hareketli ağ yöntemi ve sonlu fark yaklaşımlarıyla elde edilen iki sayısal hesaplama tekniği kullanarak inceledi. Rouatbi vd. [64], lineer olmayan dağıtıcı GRLW denklemi için ele aldıkları dört test problemin nümerik çözümlerini bulan korunumlu bir sonlu fark şeması önerdiler. Oruç [65], GRLW denkleminin dört test problemle verilen ilerleyen dalga çözümleri için zamanı sonlu fark yaklaşımı ve konumu da delta-shaped baz fonksiyonları yardımıyla ayırıklaştıran bir nümerik şablon sundu. Jena vd. [66], MRLW denklemini içeren tek soliter dalga, iki soliter dalganın etkileşimi ve Maxwellian başlangıç koşullu soliter dalga problemlerini ele aldılar. Bu problemlerin nümerik çözümleri için herhangi bir lineerleştirme veya dönüşüm yapmadan konum yönünde dördüncü dereceden B-spline fonksiyonları yardımıyla yarı ayırıklaştırma ile sonuçlanan diferansiyel denklem sistemini Butcher'ın beşinci mertebeden Runge-Kutta algoritmasını kullanarak elde ettiler. El-Bary vd. [15], GBBM denkleminin analitik ve sayısal çözümlerini analiz etmek için uyarlanabilir (adapted) hareketli mesh ve düzgün mesh yöntemlerini kullandılar. Hammad [67], RLW ve MRLW denklemleriyle verilen tek (single) ve iki dalganın fiziksel özellikleri ile birlikte noktasal sonuçlarını incelemek için Kronecker çarpımı üzerine teşkil edilen konum ve zaman yönlerindeki ayırıklaştırmalarda Bernstein kollokasyon yöntemini kullanan bir nümerik algoritma geliştirdi. Kukreja ve Shallu [68], ele aldıkları RLW denklemi için üç test problemle birlikte MRLW denklemi için dört test problemin soliter dalga çözümlerini incelemek için zaman yönündeki ayırıklaştırmada üçüncü mertebeden dört adımli güçlü, kararlı ve korunumlu Runge-Kutta algoritmasını, konum yönünde ayırıklaştırmada ise geliştirilmiş üçüncü dereceden B-spline kollokasyon yöntemi kullanan bir nümerik şablon verdiler. Mohammed vd. [69], MRLW denklemi ile parçalanmış MRLW denklemi için ilerleyen dalgaları temsil eden üç test problemi göz önüne aldılar. Bu problemlerin nümerik sonuçlarını irdelemek için zamanla ilgili ögelerin ayırıklaştırılmasında bir Crank-Nicolson tarzı sonlu fark yaklaşımı, konumla ilgili bileşenlerin ayırıklaştırılmasında da altıncı dereceden B-spline kollokasyon yöntemi kullanan bir sayısal çözüm tekniği geliştirdiler. Al-Humedi [70], genel olarak başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen GRLW denkleminde oluşan bir başlangıç-sınır değer probleminin analizi için birçok farklı ağırlık fonksiyonları ile birlikte yine birçok farklı baz fonksiyonları kullanan yeni bir B-spline en küçük kareler yöntemi önerdi. Shokri ve Behnood

[71], RLW, MRLW ve GRLW denklemleri ile tanımlanan tek soliter dalga yayılımını ve iki soliter dalga etkileşimi problemlerini nümerik olarak çözmek için Legendre Spectral Eleman yöntemini uyguladılar. Karakoç vd. [16], GRLW denklemi ile verilen tek soliter dalga problemini göz önüne aldılar. Bu problemin tam çözümü için Riccati-Bernoulli sub-ODE yöntemini ve nümerik çözümü için Subdomain sonlu eleman yöntemini kullandılar. Shallu ve Kukreja [72], GRLW denklemini içeren üç test problemi incelediler. Bunların çözümleri için konum yönünde ayrıklaştırmada üçüncü dereceden B-spline kollokasyon yöntemi, zaman ayrıklaştırmada ise hem kapalı Crank-Nicolson yöntemini hem de dört adımlı üçüncü mertebeden Runge-Kutta algoritmasını kullanan iki nümerik şema verdiler. Başhan ve Yağmurlu [73], üç farklı başlangıç ve sınır koşullarıyla verilen RLW denkleminin nümerik çözümlerini hesaplamak için, lineer olmayan terimi Rubin-Graves tekniği ile lineerleştiren, zaman yönünde ayrıklaştırmada Crank-Nicolson tipi sonlu fark yaklaşımı, konum yönündeki ayrıklaştırmada ise üçüncü dereceden B-spline fonksiyonları üzerine temellenen diferansiyel kareleme (differential quadrature) yöntemini kullanan bir lineer nümerik şema geliştirdiler. Pandit [74], RLW denklemi için dört ve MRLW denklemi için bir test probleminin soliter dalga çözümlerini incelemek için zaman yönündeki unsurları ayrıklaştırmada θ -ağırlıklı sonlu fark yaklaşımı, konum yönündeki unsurları ayrıklaştırmada da lokal radyal baz fonksiyonları ve Scale-3 Haar dalgacıkları kullanan iki sayısal algoritma önerdi. Kumari ve Kukreja [75], RLW denklemi için farklı başlangıç ve sınır koşulları ile verilen üç test problemin, MRLW denklemi için ise sadece tek soliter dalga yayılımı probleminin nümerik çözümlerini sunmak için zamansal ve konumsal yönlerdeki ayrıklaştırmalarda sırasıyla Crank-Nicolson tarzı sonlu fark yaklaşımı ve yedinci dereceden Hermite kollokasyon yöntemi kullanan bir algoritma geliştirdiler. Kukreja ve Kumari [76], aynı zamanda GRLW denklemi için tek soliter dalga, iki soliter dalga etkileşimi ve Maxwellian başlangıç koşullu soliter dalga problemlerinin yaklaşık sayısal çözümleri için konum integrasyonunu yedinci dereceden Hermite kollokasyon yöntemiyle, zaman integrasyonunu da hem Crank-Nicolson tipi sonlu fark yaklaşımıyla hem de dört adımlı üçüncü mertebeden Runge-Kutta algoritmasıyla ayrıklaştıran iki farklı nümerik şablon sundular. Karta [77], zamana göre parçalanmış MRLW denklemi için farklı başlangıç ve sınır koşullarıyla verilen dört problemi zaman ve konum integrasyonlarında sırasıyla Crank-Nicolson fark yaklaşımı ve beşinci dereceden B-spline kollokasyon tekniği yardımıyla ayrıklaştırdı. Elde edilen nümerik şemayı Lie-trotter parçalama algoritması ile çözdü. Alotaibi ve Alzubaidi [78], MRLW denkleminin tek soliter dalga, iki ve üç soliter dalgaların etkileşimini içeren başlangıç

sınır değer problemlerini ele aldılar. Bu problemleri çözmek için üç zaman adımlı ve konumda beş noktalı bir sonlu fark şeması önerdiler.

Bu bilimsel çalışmanın esas hedefi (1.0.3)-(1.0.5) denklemleri ile verilen başlangıç ve sınır değer probleminin yaklaşık nümerik sonuçlarını hesaplamak için sonlu farklar üzerine temellenmiş tamamen ayrıklaştırılmış bir lineer şema vermektir. Tezin geriye kalan kısımları şöyle organize edildi: Bölüm 2’de bu tezde kullanılacak olan sonlu farklar yönteminden kısaca bahsedildi ve ayrıca bazı önemli tanımlar verildi. Bölüm 3’de model problem olarak ele alınan başlangıç ve sınır şartlı MRLW denklemi için sonlu farklar üzerine kurulmuş Crank-Nicolson tipi bir fark şeması sunuldu. Şemanın elde edilişinde denklemde görülen $(U^3)_x$ nonlinear terimi Richtmyer [79] tekniği ile lineerleştirildi. Bölüm 4’de nümerik hesaplamalar için farklı başlangıç ve sınır şartları ile sonlu bölgede verilen dört örnek problem kısaca tanıtıldı. Bölüm 5’de sunulan şema her bir örnek probleme uygulandı. Şemanın güvenilirliğini ve doğruluğunu test etmek için L_2 ve L_∞ ile gösterilen sırasıyla karesel ortalama ve maksimum hata normları, $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ ile gösterilen sırasıyla kütle, momentum ve enerji korunum sabitleri, CPU zamanları ile birlikte L_2 ve L_∞ daki $Mertebe(L_2)$ ve $Mertebe(L_\infty)$ ile gösterilen hatanın yakınsaklık mertebeleri hesaplandı. Ayrıca elde edilen nümerik sonuçlar aynı parametre değerleri kullanılarak mevcut literatürdeki diğer bazı araştırmacıların sundukları sonuçlarla karşılaştırıldı. Bu bilimsel çalışmanın son bölümü olan Bölüm 6’da ise kısa bir sonuçla birlikte ileriki çalışmalar için bir öneride bulunuldu.

2. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ VE BAZI ÖNEMLİ TANIMLAR

Bu bölümde tezde kullanılacak olan sonlu fark yöntemlerinin ana unsurları ile birlikte bazı önemli tanımlardan ve Lax'ın denklik teoreminden kısaca bahsedildi [80].

2.1 Sonlu Farklar Yöntemi ve Temel Unsurları

x -konum değişkeni ve t -zaman değişkeni olmak üzere $U = U(x, t)$ bilinmeyenli genel olarak verilen

$$F(x, t; U, U_t, U_x, U_{tt}, U_{xt}, U_{xx}, \dots) = 0$$

1-boyutlu kısmi diferansiyel denkleminin $(x, t) \in [x_l, x_r] \times [0, T]$ çözüm bölgesinde belirli başlangıç ve sınır şartlarıyla göz önüne ele alındığını kabul edelim. Genel olarak bu tip problemlerin sonlu farklar yöntemiyle bir nümerik şemasının oluşturulmasında aşağıdaki adımlar izlenir:

-Önce problemin çözüm bölgesini oluşturan $x \in [x_l, x_r]$ konum aralığı $x_l = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m < x_{m+1} < \dots < x_{M-1} < x_M = x_r$, $h = x_{m+1} - x_m = (x_r - x_l)/M$ olacak şekilde genellikle eşit uzunluklu alt aralıklara, benzer şekilde $t \in [0, T]$ zaman aralığı da $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n < t_{n+1} < t_{n+1} < \dots < t_{N-1} < t_N = T$, $k = t_{n+1} - t_n = T/N$ olacak şekilde yine eşit uzunluklu alt aralıklara ayrılır. Her m ve n için (x_m, t_n) noktası mesh (grid) noktası olarak bilinir. Böylece çözüm bölgesi ayrıklaştırılmış olur. Herhangi bir (x_m, t_n) grid noktasında $U(x_m, t_n)$ tam çözümünün yaklaşık değeri u_m^n ile gösterilir. Yani $u_m^n \approx U(x_m, t_n)$ dir.

-Sonra, problemde görülen x ve t değişkenlerine göre türevler yerine Taylor seri açılımından elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları alınır ve böylece başlangıç-sınır değer problemi bir cebirsel denklem sistemine indirgenmiş olur. Eğer ele alınan kısmi diferansiyel denklem lineer ise problem lineer cebirsel denklemlerden oluşan ve böylece bir direkt çözüm yöntemi yardımıyla kolayca çözülebilen bir sistemle sonuçlanır. Aksi halde yani KDD nonlinear ise bu durumda problem nonlinear cebirsel denklemlerden oluşan ve böylece yaklaşık nümerik çözüm yöntemlerinden biri ile çözülebilen bir sistemle sonuçlanır.

-Daha sonra, cebirsel denklem sisteminin çözümlerinin hangi şart veya şartlar altında problemin tam çözümüne yakın olabileceği incelenir. Başka bir ifadeyle tam çözüme oldukça yakın yaklaşık çözümlerin elde edilebilmesi için konum ve zaman yönündeki h ve k adım

uzunlukları nasıl seçilmelidir. Bu ise matematik analiz derslerinden bilinen yakınsaklık konusudur. Bunun için daha sonra verilecek olan Lax'ın Denklik Teoreminden yararlanılır.

2.2 Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımı

Bu kısımda (1.0.3)-(1.0.5) ile tanımlanan başlangıç ve sınır değer şartlı model problemin nümerik şemasına geçmeden önce Taylor seri açılımlarından kolayca elde edilen bu tezde göz önüne alınacak olan KDD'deki x ve t değişkenlerine göre türevler yerine kullanılabilecek t 'ye göre birinci, x 'e göre birinci ve ikinci mertebeden türevleri için sırasıyla $O(k)$ ve $O(h^2)$ mertebeden sonlu fark yaklaşımları

$$\begin{cases} U_t(x_m, t_n) = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + O(k) & , \text{ İleri Fark} \\ U_x(x_m, t_n) = \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} + O(h^2) & , \text{ Merkezi Fark} \\ U_{xx}(x_m, t_n) = \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{h^2} + O(h^2) & , \text{ Merkezi Fark} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

dir [80]. Burada $O(k)$ ve $O(h^2)$ terimleri t ve x yönündeki kesme hataları olup $k, h \rightarrow 0$ iken $O(k), O(h^2) \rightarrow 0$ dır.

Şimdi de yine şemanın oluşturulmasında bu tez çalışmasında kullanılacak olan Richtmyer tipi lineerleştirme yaklaşımı ile birlikte tutarlılık, kararlılık, yakınsaklık ve Lax'ın Denklik Teoremini verelim.

2.3 Richtmyer Lineerleştirme Yaklaşımı

Bu çalışmada ele alınacak olan $U = U(x, t)$ bilinmeyenli bir kısmi diferansiyel denklemin bir sonlu fark yöntemi yardımıyla konum ve zaman değişkenlerine göre tamamen ayrıklaştırılması ile elde edilen fark denkleminde görülen $(n+1)$ -inci zaman adımındaki $u_{m,n+1}^q$ ($q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) biçimindeki lineer olmayan terimleri lineerleştirmek için

$$u_{m,n+1}^q = u_{m,n}^q + qu_{m,n}^{q-1}(u_{m,n+1} - u_{m,n}), \quad q \geq 2 \quad (2.3.1)$$

olarak verilen Richtmyer yaklaşımı kullanıldı [79, 80]. Bu yaklaşım, $u^q(x_m, t_n + k)$ fonksiyonu (x_m, t_n) noktası civarında Taylor serisine açılır ve $\frac{\partial u}{\partial t}$ yerine (2.2.1) de verilen ileri fark yaklaşımı

yazılırsa

$$\begin{aligned}
u^q(x_m, t_n + k) &= u^q(x_m, t_n) + k \frac{\partial u^q}{\partial t}(x_m, t_n) + O(k^2) \\
&= u^q(x_m, t_n) + k \frac{\partial u^q}{\partial u}(x_m, t_n) \frac{\partial u}{\partial t}(x_m, t_n) + O(k^2) \\
&= u^q(x_m, t_n) + k q u^{q-1}(x_m, t_n) \frac{\partial u}{\partial t}(x_m, t_n) + O(k^2) \\
&= u^q(x_m, t_n) + q u^{q-1}(x_m, t_n) [u(x_m, t_n + k) - u(x_m, t_n)] + O(k^2)
\end{aligned}$$

olarak kolayca bulunur. Bu eşitlik ise keyfi bir (x_m, t_n) mesh noktasında, $O(k^2)$ hatasının ihmal edilmesiyle,

$$u_{m,n+1}^q = u_{m,n}^q + q u_{m,n}^{q-1} (u_{m,n+1} - u_{m,n})$$

olarak yazılabilir. Böylece $u^q(x_m, t_n + k)$ nonlinear terimi lineerleştirilmiş olur.

2.4 Lokal Kesme Hatası

Lokal kesme hatası sonlu fark şemasının kısmi diferansiyel denklemini ne kadar iyi ölçüde sağladığını gösterir. u ile U analitik çözümüne karşılık gelen yaklaşık çözüm gösterilirse, F bir sonlu fark operatörü olmak üzere, (m, n) —inci grid noktasında bir KDD'in herhangi bir sonlu fark şeması

$$F(u_m^n) = 0$$

ile temsil edilebilir. Bu eşitlikte u yerine U yazılırsa sonlu fark şemasının $T_{m,n}$ ile gösterilen lokal kesme hatasının mertebesi

$$T_{m,n} = F(U_m^n)$$

eşitliğinden Taylor seri açılımı yardımıyla kolayca bulunur.

2.5 Tutarlılık

h konum adım uzunluğu ve k zaman adım uzunlukları sıfıra yaklaştığında lokal kesme hatası sıfıra gidiyorsa yani $h, k \rightarrow 0$ iken $T_{m,n} \rightarrow 0$ oluyorsa sonlu fark yaklaşımı tutarlıdır denir.

2.6 Kararlılık

Sayısal hesaplamalarda yer alan hatalar, sayısal hesaplamalar devam ettikçe artmıyorsa şema kararlıdır denir.

Herhangi bir lineer sonlu fark şemasının kararlılığının incelenmesinde sıklıkla kullanılan iki yöntem: matris ve vonn-Neumann yöntemleridir.

2.7 Yakınsaklık

Konum adım uzunluğu h ve zaman adım uzunluğu k sıfıra gittikçe yaklaşık sayısal sonuçlar gerçek çözümlere yaklaşıyorsa sunulan şema yakınsaktır. Diğer bir ifadeyle $h, k \rightarrow 0$ iken $u_m^n \rightarrow U(x_m, t_n)$ oluyorsa şema yakınsaktır.

2.8 Lax'ın Denklik Teoremi

Bir lineer sonlu fark şemasının yakınsak olması için gerek ve yeter şart yöntemin kararlı ve tutarlı olmasıdır. Yani şema, $(\text{Tutarlı}) + (\text{Kararlı}) \Leftrightarrow (\text{Yakınsak})$ dır.

3. MRLW DENKLEMİ İÇİN BİR SONLU FARK ŞEMASI

Bu bölüm tezin temel kısmını oluşturur. Burada (1.0.3)-(1.0.5) denklemleriyle ifade edilen model problemin yani

$$U_t + U_x + \alpha(U^3)_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad , \quad (x, t) \in [x_l, x_r] \times [0, T]$$

$$U(x, 0) = U_0(x) \quad , \quad x \in [x_l, x_r]$$

$$U(x_l, t) = U(x_r, t) = 0 \quad , \quad t \geq 0$$

başlangıç ve sınır değer probleminin yaklaşık sayısal çözümlerini bulmak için sonlu farklar üzerine kurulmuş Crank-Nicolson tipi bir fark şeması elde edildi. Bu çalışmada MRLW denklemindeki $(U^3)_x$ nonlinear terimi literatürde mevcut diğer çalışmalardan farklı olarak Richtmyer yaklaşımı ile lineerleştirildi. Ayrıca bu bölümde şemanın kararlılık analizi ile birlikte lokal kesme hatasının mertebesi verildi.

3.1 Crank-Nicolson Sonlu Fark Şeması

(1.0.3) ile verilen MRLW denkleminde Crank-Nicolson tipi sonlu fark yaklaşımı [80] uygulanırsa

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} + \frac{(u_x)_m^{n+1} + (u_x)_m^n}{2} + \alpha \frac{[(u^3)_x]_m^{n+1} + [(u^3)_x]_m^n}{2} - \mu \frac{(u_{xx})_m^{n+1} - (u_{xx})_m^n}{k} = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte n -inci ve $(n+1)$ -inci zaman adımlarındaki x 'e göre birinci ve ikinci mertebeden türevler yerine (2.2.1) eşitliğinde verilen merkezi fark yaklaşımları $O(h^2)$ mertebeden hatalar ihmal edilerek yazılırsa x ve t değişkenleri cinsinden tamamen ayrıştırılmış, $n = 0(1)N$ ve $m = 1(1)M - 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} + u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{4h} \\ & + \alpha \frac{(u^3)_{m+1}^{n+1} - (u^3)_{m-1}^{n+1} + (u^3)_{m+1}^n - (u^3)_{m-1}^n}{4h} \\ & - \mu \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^n + 2u_m^n - u_{m-1}^n}{kh^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

lineer olmayan fark şeması elde edilir. Açıkça bu fark şemasından elde edilen cebirsel denklem sistemi nonlinear olduğundan ancak Newton-Raphson ve sabit nokta iterasyon yöntemi gibi yaklaşık nümerik yöntemlerden biri yardımıyla çözülebilir. Bu bilimsel çalışmanın amacı

lineer bir şema geliştirmek olduğundan yukarıdaki ayrıklaştırılmış şemadaki $(n+1)$ -inci zaman seviyesinde $(m-1)$ ve $(m+1)$ konum noktalarındaki nonlinear terimler lineerleştirildi. Bunun için (3.1.1) deki $(u^3)_{m-1}^{n+1}$ ve $(u^3)_{m+1}^{n+1}$ nonlinear terimler yerine yukarıda bahsedilen Richtmyer Lineerleştirme Yaklaşımından [79] $q=3$ için elde edilen

$$(u^3)_{m-1}^{n+1} = (u^3)_{m-1}^n + 3(u^2)_{m-1}^n(u_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^n)$$

ve

$$(u^3)_{m+1}^{n+1} = (u^3)_{m+1}^n + 3(u^2)_{m+1}^n(u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n)$$

eşitlikleri alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, herhangi bir n -inci zaman adımında $m = 1(1)M-1$ için

$$\begin{aligned} & \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} + u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{4h} \\ & + \frac{\alpha}{4h} [2(u^3)_{m+1}^n + 3(u^2)_{m+1}^n(u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n) - 2(u^3)_{m-1}^n - 3(u^2)_{m-1}^n(u_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^n)] \\ & - \frac{\mu}{kh^2} (u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^n + 2u_m^n - u_{m-1}^n) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

lineer sonlu fark şeması elde edilir. Kısalığın hatırı için $W_m = u_m^{n+1} - u_m^n$ alınırsa yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned} & \frac{W_m}{k} + \frac{W_{m+1} - W_{m-1} + 2u_{m+1}^n - 2u_{m-1}^n}{4h} \\ & + \frac{\alpha}{4h} [3(u^2)_{m+1}^n W_{m+1} + 2(u^3)_{m+1}^n - 3(u^2)_{m-1}^n W_{m-1} - 2(u^3)_{m-1}^n] \\ & - \frac{\mu}{kh^2} (W_{m+1} - 2W_m + W_{m-1}) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \end{aligned}$$

olur. Bu ise gerekli düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{1}{4h} + \frac{3\alpha(u^2)_{m+1}^n}{4h} + \frac{\mu}{kh^2} \right] W_{m-1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right) W_m + \left[\frac{1}{4h} + \frac{3\alpha(u^2)_{m+1}^n}{4h} - \frac{\mu}{kh^2} \right] W_{m+1} \\ & = \frac{1}{2h} (u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\alpha}{2h} [(u^3)_{m-1}^n - (u^3)_{m+1}^n], \quad \begin{matrix} n = 0, 1, \dots, N \\ m = 1, 2, \dots, M-1 \end{matrix} \end{aligned}$$

veya daha basit şekilde

$$a_m W_{m-1} + b_m W_m + c_m W_{m+1} = d_m, \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.1.3)$$

olarak yazılabilir. Burada a_m , b_m , c_m ve d_m katsayıları

$$\begin{aligned} a_m &= - \left[\frac{1}{4h} + \frac{3\alpha(u^2)_{m+1}^n}{4h} + \frac{\mu}{kh^2} \right], \\ b_m &= \frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2}, \end{aligned}$$

$$c_m = \frac{1}{4h} + \frac{3\alpha(u^2)_{m+1}^n}{4h} - \frac{\mu}{kh^2},$$

$$d_m = \frac{1}{2h}(u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\alpha}{2h}[(u^3)_{m-1}^n - (u^3)_{m+1}^n]$$

dir.

Problemde (1.0.4) ile verilen sınır şartları kullanılırsa $U(x_l, t) = 0$ sol sınır şartından herhangi bir n -inci zaman seviyesinde $u_0^n = 0$ ($u_0^{n+1} = 0$), $U(x_r, t) = 0$ sağ sınır şartından $u_M^n = 0$ ($u_M^{n+1} = 0$) dir. Böylece $W_m = u_m^{n+1} - u_m^n$ den

$$W_0 = u_0^{n+1} - u_0^n = 0$$

$$W_M = u_M^{n+1} - u_M^n = 0$$

olup bunlar (3.1.3) de yerlerine konursa,

$m = 1$ için

$$b_1 W_1 + c_1 W_2 = d_1$$

$m = 2(1)M - 2$ için

$$a_m W_{m-1} + b_m W_m + c_m W_{m+1} = d_m$$

$m = M - 1$ için

$$a_{M-1} W_{M-2} + b_{M-1} W_{M-1} = d_{M-1}$$

biçiminde $(M - 1)$ tane denklemden oluşan $(M - 1)$ bilinmeyenli bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu ise matris denklem sistemi olarak açık formda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a_{M-2} & b_{M-2} & c_{M-2} \\ & & & a_{M-1} & b_{M-1} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ W_{M-2} \\ W_{M-1} \end{bmatrix}}_W = \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{M-2} \\ d_{M-1} \end{bmatrix}}_D$$

veya kısaca kapalı formda

$$AW = D \quad (3.1.4)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece bu bilimsel çalışmada hedeflenen lineer nümerik şema elde edilmiş olur. Bu aşamadan sonra sunulan şema lineer cebirsel denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan direkt yöntemlerden biri yardımıyla çözülür. Çözüm işlemine geçmeden önce

şemadan elde edilen çözümlerin göz önüne alınan problemin tam çözümüne ne kadar yakınlıkta yaklaşık sayısal çözümler vereceği konusunda şemanın kararlılığının incelenmesi gerekir. Mevcut şemanın kararlılığı aşağıda von-Neumann kararlılık testi yardımıyla incelendi ve şartsız kararlı olduğu gösterildi. Ayrıca şemanın çıkarılışında türevler yerine alınan yaklaşımlarda $k, h \rightarrow 0$ iken $O(k)$, $O(h^2) \rightarrow 0$ olduğundan fark şeması aynı zamanda tutarlıdır. Böylece Lax'ın Denklik Teoreminin bir sonucu olarak h ve k büyüklüklerinin seçilen makul (modest) değerleri için bu çalışmada sunulan şemadan elde edilecek olan yaklaşık sayısal çözümlerin problemin analitik sonuçlarına yakın kalacağı açıktır. Başka bir ifadeyle sunulan şema yakınsaktır. Yani $k, h \rightarrow 0$ iken $u(x_m, t_n) \rightarrow U(x_m, t_n)$ olur.

(3.1.4) ile verilen lineer nümerik şema cebir derslerinden bilinen direkt yöntemlerden biri kullanılarak kolayca çözülür. $(n + 1)$ -inci zaman adımındaki W_m bilinmeyen değerlerinin herhangi bir (x_m, t_n) mesh noktalarındaki yaklaşık çözümlerini elde etmek için n -inci zaman adımındaki çözümlerine ihtiyaç duyulur. Başka bir ifadeyle (3.1.4) ile verilen iteratif denklem sisteminin başlatılabilmesi için n -inci zaman adımında yani başlangıç zamanı $t = 0$ da $U_m^0 = [U_0^0, U_1^0, U_2^0, \dots, U_{M-1}^0, U_M^0]$ değerlerinin bilinmesi gerekir. Açıkça bu değerler problemde verilen $U(x, 0) = U_0(x)$ başlangıç koşulu yardımıyla kolayca hesaplanır. Zaman adımı ardışık olarak artırılarak arzu edilen bitiş zamanına yani $t_n = T$ ye ulaşınca kadar iterasyona devam edilir. Böylece W_m bilinmeyen değerleri ve dolayısıyla $u_m^{n+1} = W_m + u_m^n$ eşitliğinden u_m^{n+1} bilinmeyenleri elde edilmiş olur.

3.1.1 Şemanın kararlılık analizi

(3.1.2) eşitliği ile verilen lineer nümerik şemanın kararlılığı von-Neumann yöntemi ile incelendi. Bunun için, ζ amplikasyon faktörü, λ mod sayısı ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, sunulan şemanın genel satırında yani

$$\begin{aligned} & \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} + u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{4h} \\ & + \frac{\alpha}{4h} [2(u^3)_{m+1}^n + 3(u^2)_{m+1}^n (u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n) - 2(u^3)_{m-1}^n - 3(u^2)_{m-1}^n (u_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^n)] \\ & - \frac{\mu}{kh^2} (u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^n + 2u_m^n - u_{m-1}^n) = 0 \end{aligned}$$

eşitliğinde u_m^n yerine

$$u_m^n = \zeta^n e^{i\lambda mh}$$

ifadesi alınır ve gerekli cebirsel işlemlerle birlikte birtakım düzenlemeler yapılırsa, $(u^2)_{m-1}^n = (u^2)_{m+1}^n = C$ lokal sabit olmak üzere,

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{1}{4h} + \frac{3\alpha C}{4h} + \frac{\mu}{kh^2} \right] \zeta^{n+1} e^{i\lambda(m-1)h} + \left[\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right] \zeta^{n+1} e^{i\lambda mh} + \left[\frac{1}{4h} + \frac{3\alpha C}{4h} - \frac{\mu}{kh^2} \right] \zeta^{n+1} e^{i\lambda(m+1)h} \\ & = \left[\frac{1}{4h} - \frac{\alpha C}{4h} - \frac{\mu}{kh^2} \right] \zeta^n e^{i\lambda(m-1)h} + \left[\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right] \zeta^n e^{i\lambda mh} - \left[\frac{1}{4h} - \frac{\alpha C}{4h} + \frac{\mu}{kh^2} \right] \zeta^n e^{i\lambda(m+1)h} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

bulunur. Kararlılık için

$$|\zeta| \leq 1$$

olması gerekir. (3.1.5) den

$$\zeta = \frac{-\frac{\mu}{kh^2}(e^{i\lambda h} - 2 + e^{-i\lambda h}) - \frac{1}{4h}(e^{i\lambda h} - e^{-i\lambda h}) + \frac{1}{k} + \frac{\alpha C}{4h}(e^{i\lambda h} - e^{-i\lambda h})}{-\frac{\mu}{kh^2}(e^{i\lambda h} - 2 + e^{-i\lambda h}) + \frac{1}{4h}(e^{i\lambda h} - e^{-i\lambda h}) + \frac{1}{k} + \frac{3\alpha C}{4h}(e^{i\lambda h} - e^{-i\lambda h})}$$

dir. Bu son eşitlikte $e^{i\lambda h} = \cos \lambda h + i \sin \lambda h$ Euler formülü ve $\cos(\lambda h) = 1 - 2 \sin^2(\lambda h/2)$ trigonometrik eşitliği kullanılırsa

$$\zeta = \frac{\frac{\mu}{kh^2}(4 \sin^2(\frac{\lambda h}{2}) + \frac{1}{k} + \frac{i \sin \lambda h}{2h}(\alpha C - 1))}{\frac{\mu}{kh^2}(4 \sin^2(\frac{\lambda h}{2}) + \frac{1}{k} + \frac{i \sin \lambda h}{2h}(3\alpha C + 1))}$$

bulunur. Bu eşitlik ise

$$\begin{aligned} a &= \frac{\mu}{kh^2}(4 \sin^2(\frac{\lambda h}{2}) + \frac{1}{k}), \\ b_1 &= \frac{\sin \lambda h}{2h}(\alpha C - 1), \\ b_2 &= \frac{\sin \lambda h}{2h}(3\alpha C + 1) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\zeta = \frac{a + ib_1}{a + ib_2}$$

olarak yazılabilir. Şemanın kararlı olması için $|\zeta| \leq 1$ olmalıdır. Bunun için

$$\left| \frac{a + ib_1}{a + ib_2} \right| \leq 1$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bu eşitsizliğin sağlandığını göstermek

$$a^2 + (b_1)^2 - a^2 - (b_2)^2 \leq 0 \Rightarrow (b_1)^2 - (b_2)^2 \leq 0$$

eşitsizliğinin doğruluğunu göstermekle eşdeğerdir. $(b_1)^2 - (b_2)^2$ cebirsel ifadesinden

$$(b_1)^2 - (b_2)^2 = \frac{(\alpha C - 1)^2}{2h} \sin^2 \lambda h - \frac{(3\alpha C + 1)^2}{2h} \sin^2 \lambda h$$

$$= \frac{-2\alpha C(\alpha C + 1)}{h} \sin^2 \lambda h$$

elde edilir. Açıkça

$$\frac{-2\alpha C(\alpha C + 1)}{h} \sin^2 \lambda h \leq 0$$

olduğundan $(b_1)^2 - (b_2)^2 \leq 0$ bulunur. Böylece ς güçlendirme faktörü $|\varsigma| \leq 1$ şartını sağlar. Dolayısıyla sunulan şema şartsız kararlıdır.

3.1.2 Şemanın lokal kesme hatası

(3.1.1) eşitliği ile verilen Crank-Nicolson tipi sonlu fark şemasının lokal kesme hatasının mertebesi bu kısımda incelendi. Lokal kesme hatasının tanımından (3.1.1) eşitliğinde yaklaşık nümerik sonuçları temsil eden u yerine gerçek çözüm olan U yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1} + U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{4h} \\ & + \alpha \frac{(U^3)_{m+1}^{n+1} - (U^3)_{m-1}^{n+1} + (U^3)_{m+1}^n - (U^3)_{m-1}^n}{4h} \\ & - \mu \frac{U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1} - U_{m+1}^n + 2U_m^n - U_{m-1}^n}{kh^2} = 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte görülen U_m^{n+1} , U_{m-1}^n , U_{m+1}^n , U_{m-1}^{n+1} , U_{m+1}^{n+1} , $(U^3)_{m-1}^n$, $(U^3)_{m+1}^n$, $(U^3)_{m-1}^{n+1}$ ve $(U^3)_{m+1}^{n+1}$ terimleri yerine sırasıyla Taylor seri açılımından elde edilen

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} &= U(x_m, t_n + k) = U_m^n + k \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_m^n + \frac{k^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_m^n + \frac{k^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right)_m^n + \dots \\ U_{m-1}^n &= U(x_m - h, t_n) = U_m^n - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \\ U_{m+1}^n &= U(x_m + h, t_n) = U_m^n + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \\ U_{m-1}^{n+1} &= U(x_m - h, t_n + k) = U_m^n - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_m^n \\ &+ \dots + k \frac{\partial}{\partial t} \left[U_m^n - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \right]_m^n \\ &+ \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[U_m^n - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \right]_m^n + \dots \\ U_{m+1}^{n+1} &= U(x_m + h, t_n + k) = U_m^n + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_m^n \\ &+ \dots + k \frac{\partial}{\partial t} \left[U_m^n + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \right]_m^n \\ &+ \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[U_m^n + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \right]_m^n + \dots \end{aligned}$$

$$(U^3)_{m-1}^n = U^3(x_m - h, t_n) = (U^3)_m^n - h \left(\frac{\partial U^3}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^3}{\partial x^2} \right)_m^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^3}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots$$

$$(U^3)_{m+1}^n = U^3(x_m + h, t_n) = (U^3)_m^n + h \left(\frac{\partial U^3}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^3}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^3}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots$$

$$\begin{aligned} (U^3)_{m-1}^{n+1} &= U^3(x_m - h, t_n + k) = (U^3)_m^n - h \left(\frac{\partial U^3}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^3}{\partial x^2} \right)_m^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^3}{\partial x^3} \right)_m^n \\ &+ \dots + k \frac{\partial}{\partial t} \left[(U^3)_m^n - h \left(\frac{\partial U^3}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^3}{\partial x^2} \right)_m^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^3}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \right]_m^n \\ &+ \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(U^3)_m^n - h \left(\frac{\partial U^3}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^3}{\partial x^2} \right)_m^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^3}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \right]_m^n + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (U^3)_{m+1}^{n+1} &= U^3(x_m + h, t_n + k) = (U^3)_m^n + h \left(\frac{\partial U^3}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^3}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^3}{\partial x^3} \right)_m^n \\ &+ \dots + k \frac{\partial}{\partial t} \left[(U^3)_m^n + h \left(\frac{\partial U^3}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^3}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^3}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \right]_m^n \\ &+ \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(U^3)_m^n + h \left(\frac{\partial U^3}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^3}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^3}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \right]_m^n + \dots \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır ve bir takım cebirsel işlemlerle birlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} T_m^n &= \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \alpha \frac{\partial U^3}{\partial x} - \mu \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right)_m^n + \frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \alpha \frac{\partial U^3}{\partial x} - \mu \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right)_m^n \\ &+ k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{6} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{4} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\alpha}{4} \frac{\partial U^3}{\partial x} - \frac{\mu}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right)_m^n + h^2 \left(\frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\alpha}{6} \frac{\partial^3 U^3}{\partial x^3} - \frac{\mu}{12} \frac{\partial^5 U}{\partial t \partial x^4} \right)_m^n \\ &+ k^3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left(\frac{1}{24} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{12} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\alpha}{12} \frac{\partial U^3}{\partial x} - \frac{\mu}{24} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right)_m^n \\ &+ kh^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{12} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\alpha}{12} \frac{\partial^3 U^3}{\partial x^3} - \frac{\mu}{24} \frac{\partial^5 U}{\partial t \partial x^4} \right)_m^n + \dots \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

bulunur. U verilen kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü olduğu için

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \alpha \frac{\partial U^3}{\partial x} - \mu \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right)_m^n = 0$$

olup (3.1.6) eşitliği

$$T_m^n = \underbrace{k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{6} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{4} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\alpha}{4} \frac{\partial U^3}{\partial x} - \frac{\mu}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right)_m^n + h^2 \left(\frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\alpha}{6} \frac{\partial^3 U^3}{\partial x^3} - \frac{\mu}{12} \frac{\partial^5 U}{\partial t \partial x^4} \right)_m^n}_{\text{Lokal Kesme Hatasının Esas Kısımı}}$$

Lokal Kesme Hatasının Esas Kısımı

$$+k^3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left(\frac{1}{24} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{12} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\alpha}{12} \frac{\partial U^3}{\partial x} - \frac{\mu}{24} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right)_m^n$$

$$+kh^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{12} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\alpha}{12} \frac{\partial^3 U^3}{\partial x^3} - \frac{\mu}{24} \frac{\partial^5 U}{\partial t \partial x^4} \right)_m^n + \dots$$

olur. Böylece, lokal kesme hatasının esas kısmından MRLW denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımının lokal kesme hatasının mertebesi

$$O(k^2) + O(h^2)$$

olarak bulunur.



4. ÖRNEK PROBLEMLER

Bu bölümde 1-boyutlu lineer olmayan MRLW denklemi için (1.0.3)-(1.0.5) denklemleriyle tanımlanan model problem farklı başlangıç ve sınır şartlarıyla ele alındı ve ilerleyen pozitif dalgaları simüle eden dört örnek problem kısaca tanıtıldı.

4.1 Problem 1: Tek Soliter Dalga

Bu problemde (1.0.3) MRLW denklemi $\alpha = 2$ ve $\mu = 1$ parametreleri için ele alındı. Bu durumda, (1.0.3) denklemi eşitliği

$$U_t + U_x + 6U^2U_x - U_{xxt} = 0, \quad x \in [x_l, x_r], \quad t \in [0, T]$$

olur. Bu denklemin analitik çözümü [18]

$$U(x, t) = A \operatorname{sech}(K(x + (c + 1)t - x_0)) \quad (4.1.1)$$

dir. Burada $U = U(x, t)$ dalgaının yüksekliği, $c + 1$ dalgaının hızı, $A = \sqrt{c}$ dalgaının genliği, $K = \sqrt{\frac{c}{c+1}}$ dalgaının genişliği ve x_0 ise x 'in tanımlı olduğu aralıkta keyfi bir noktadır. Bu denklemin başlangıç ve sınır şartları sırasıyla

$$U(x, 0) = A \operatorname{sech}(K(x - x_0)), \quad x \in [x_l, x_r]$$

$$U(x_l, t) = 0, \quad U(x_r, t) = 0, \quad t \geq 0$$

olup (4.1.1) ile verilen analitik çözümünden alınmıştır.

4.2 Problem 2: İki Soliter Dalganın Etkileşimi

Bu problemde, farklı genliklerde iki soliter dalgaının hareketini incelemek için (1.0.3) denkleminde $\alpha = 2$ ve $\mu = 1$ parametre değerleri için elde edilen

$$U_t + U_x + 6U^2U_x - U_{xxt} = 0, \quad x \in [x_l, x_r], \quad t \in [0, T]$$

MRLW denklemi

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 A_i \operatorname{sech}(K_i(x - x_i)), \quad x \in [x_l, x_r]$$

başlangıç ve

$$U(x_l, t) = 0, U(x_r, t) = 0, t \geq 0$$

sınır şartlarıyla göz önüne alındı. Burada $i = 1, 2$ olmak üzere $A_i = \sqrt{c_i}$ ler dalga genliklerini,

$K_i = \sqrt{\frac{c_i}{c_i+1}}$ ler dalga genişliklerini ve x_i ler ise x 'in tanımlı olduğu aralıkta herhangi iki keyfi noktayı temsil etmektedir.

4.3 Problem 3: Üç Soliter Dalganın Etkileşimi

Bu problemde, üç soliter dalganın hareketleri değişen genliklerde incelendi. $\alpha = 2$ ve $\mu = 1$ parametreleri için (1.0.3) ile verilen

$$U_t + U_x + 6U^2U_x - U_{xxt} = 0, x \in [x_l, x_r], t \in [0, T]$$

MRLW denklemi

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^3 A_i \operatorname{sech}(K_i(x - x_i)), x \in [x_l, x_r]$$

başlangıç ve

$$U(x_l, t) = 0, U(x_r, t) = 0, t \geq 0$$

sınır şartları ile ele alındı. Burada $i = 1, 2, 3$ olmak üzere $A_i = \sqrt{c_i}$ ler dalga genliklerini, $K_i = \sqrt{\frac{c_i}{c_i+1}}$ ler dalga genişliklerini ve x_i ler ise x 'in tanımlı olduğu aralıkta herhangi üç keyfi noktayı temsil etmektedir.

4.4 Problem 4: Maxwellian Başlangıç Koşullu Soliter Dalga

Bu problemde ise $\alpha = 2$ ve farklı μ parametre değerleri için (1.0.3) ile tanımlanan

$$U_t + U_x + 6U^2U_x - \mu U_{xxt} = 0, x \in [x_l, x_r], t \in [0, T]$$

MRLW denklemi

$$U(x, 0) = e^{-(x-x_0)^2}, x \in [x_l, x_r]$$

başlangıç ve

$$U(x_l, t) = 0, U(x_r, t) = 0, t \geq 0$$

sınır koşullarıyla incelendi. Burada x_0 , x 'in tanımlı olduğu aralıkta keyfi bir noktadır.

5. SAYISAL SONUÇLAR VE KARŞILAŞTIRMALAR

Bu bölümde, bir önceki bölümde ele alınan dört örnek problemin Bölüm 3’de (3.1.4) denklemi ile sunulan şemadan elde edilen yaklaşık nümerik sonuçları verildi. Hesaplanan sonuçlar kendi aralarında ve denklemde görülen aynı parametre değerleri için literatürde var olan diğer bazı araştırmacıların önerdikleri farklı teknik ve yöntemlerden elde ettikleri sonuçlarla karşılaştırıldı. Sunulan şemanın güvenilirliğini ve doğruluğunu ölçmek için başka bir ifadeyle ayrık noktalar yardımıyla hesaplanan yaklaşık nümerik sonuçların bilinen yani önceden verilen analitik değerlerine ne kadar yakın kaldıklarını test etmek için, U_m^n ve u_m^n sırasıyla her bir (x_m, t_n) mesh noktasında analitik ve sayısal çözümler olmak üzere,

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{m=0}^M |U_m^n - u_m^n|^2}, \quad L_\infty = \max_{0 \leq m \leq M} |U_m^n - u_m^n|$$

olarak tanımlanan ortalama kare ve maksimum hata normları;

$$\begin{aligned} I_M &= \int_{x_l}^{x_r} U \, dx = \frac{\pi \sqrt{c}}{K}, \\ I_Q &= \int_{x_l}^{x_r} [U^2 + \mu (\frac{\partial U}{\partial x})^2] \, dx = \frac{2c}{K} + \frac{2\mu Kc}{3}, \\ I_E &= \int_{x_l}^{x_r} [U^4 - \mu (\frac{\partial U}{\partial x})^2] \, dx = \frac{4c^2}{3K} - \frac{2\mu Kc}{3} \end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilen sırasıyla Kütle (I_M), Momentum (I_Q) ve Enerji (I_E) korunum sabitleri [18] ile birlikte analitik çözümü mevcut olan tek soliter dalga problemi için hatanın yaklaşık yakınsaklık mertebesi

$$Mertebe(L) = \log_2 \left[\frac{L(2h, 2k)}{L(h, k)} \right], \quad (L = L_2, L_\infty) \quad (5.0.1)$$

olarak tanımlanan formülle hesaplandı.

Analitik çözümü mevcut olmayan örnek problemler için ise mevcut şemanın yaklaşık yakınsaklık mertebesi aşağıda verilen Richardson ekstrapolasyon yaklaşımı [80] yardımıyla hesaplandı.

Bu bölümde yapılan hesaplamaların hepsinde 11. Nesil Intel(R) Core(TM) i5-11400H @ 2.70GHz, 2688 Mhz, 6 Çekirdek, 12 Mantıksal İşlemci laptop bilgisayar ve MATLAB(R2023b) programı kullanıldı.

Sunulan şemadan elde edilen ayrıklaştırılmış noktalardaki $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ ile gösterilen invaryantların yaklaşık değerleri dikdörtgenler yöntemi yardımıyla aşağıdaki şekilde hesaplandı:

$$\tilde{I}_M = h \sum_{m=1}^M u_m^n,$$

$$\tilde{I}_Q = h \sum_{m=1}^M [u^2 + \mu(u_x)^2]_m^n,$$

$$\tilde{I}_E = h \sum_{m=1}^M [u^4 - \mu(u_x)^2]_m^n.$$

Richardson Yaklaşımı: Richardson tarafından önerilen bu yöntem ayırıklaştırma hatasının bilindiği durumlarda son derece kullanışlıdır. U fonksiyonu nonlinear kısmi diferansiyel denkleminin bir tam çözümü ve u_1, u_2 sırasıyla aynı grid noktasındaki farklı h_1 ve h_2 mesh uzunluklarına karşılık gelen yaklaşık çözümler olsun. Bunlar arasındaki ayırıklaştırılmış hatalar, $p \geq 1$ bir tam sayı olmak üzere, sırasıyla $O(h_1^p)$ ve $O(h_2^p)$ olarak gösterilirse

$$U = u_1 + O(h_1^p)$$

$$U = u_2 + O(h_2^p)$$

eşitlikleri yazılabilir. Büyük O 'nun tanımından yukarıdaki eşitlikler sırasıyla h_1^p ve h_2^p ile orantılı olacağından, $K > 0$ bir sabit sayı olmak üzere,

$$U - u_1 = Kh_1^p$$

ve

$$U - u_2 = Kh_2^p$$

olur. Bu iki eşitlikten

$$U = \frac{h_2^p u_1 - h_1^p u_2}{h_2^p - h_1^p}$$

elde edilir. Özel olarak $h_1 = 2h_2$ alınırsa u_1 ve u_2 yaklaşık çözümler cinsinden U 'nin değeri

$$U = u_2 + \frac{1}{3}(u_2 - u_1)$$

olarak bulunur.

Hatanın mertebesi olan p değeri ise aynı düğüm noktasında üç farklı yaklaşık çözüm değerleri kullanılarak tahmin edilebilir. Bunun için u_1, u_2 ve u_3 sırasıyla aynı düğüm noktasında farklı h_1, h_2 ve h_3 mesh uzunluklarına karşılık gelen yaklaşık çözümler olsun. Bu durumda

$$U - u_1 = Kh_1^p,$$

$$U - u_2 = Kh_2^p,$$

$$U - u_3 = Kh_3^p$$

olduğunu biliyoruz. Özel olarak h_1 , h_2 ve h_3 mesh uzunlukları $h_3 = \frac{h_2}{2} = \frac{h_1}{4}$ olarak seçilir ve yukarıdaki eşitliklerde yerlerine yazılırsa hatanın yaklaşık yakınsaklık mertebesi olan p değeri

$$2^p = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_2}$$

formülünden

$$p = \log_2 \left| \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_2} \right| \quad (5.0.2)$$

olarak kolayca bulunur [80].

5.1 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda bir önceki yani Bölüm 4’de tanıtılan dört örnek problemin her birine Bölüm 3’de (3.1.4) denklemiyle sunulan nümerik şema ayrı ayrı uygulandı. Şemadan hesaplanan yaklaşık çözümler çizelgeler ve grafiksel olarak verildi. Ayrıca bu bilimsel çalışmada önerilen şemanın doğruluğunu ve güvenilirliğini test etmek için aynı parametre değerleri alınarak hesaplanan yaklaşık nümerik sonuçlar diğer araştırmacıların çalışmalarında verdikleri sonuçlarla da karşılaştırıldı.

5.1.1 Problem 1: Tek soliter dalga

Bu problem için $x_0 = 40$ ve $x \in [0, 100]$ alındı ve c parametresinin aşağıdaki üç durumu için $t = 0(2)10$ bitiş zamanına kadar nümerik hesaplamalar yapıldı.

5.1.1.1 Durum 1: $c = 1$, $x_0 = 40$, $[x_l, x_r] = [0, 100]$.

Bu durum için önce $k = 0.0125$ zaman adım uzunluğu sabit tutularak farklı $h = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$ konum adım uzunlukları; $h = 0.05$ konum adım uzunluğu sabit tutularak farklı $k = 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625, 0.003125$ değerleri için $t = 0(2)10$ zamanlarında (3.1.4) sonlu fark şeması ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları ve $CPU(s)$ zamanları Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2’de sunuldu. Çizelgeler incelendiğinde elde edilen nümerik sonuçların konum ve zaman adım uzunlukları küçüldükçe L_2 ve L_∞ hatalarının da gittikçe küçüldüğü rahatça görülmektedir. Bu durum nümerik sonuçların analitik sonuçlara yaklaştığı anlamına gelir. Bu ise sunulan şemanın yakınsaklığının bir delilidir. Yine çizelgelerden ayrıklaştırılmış noktalarda hesaplanan invaryant değerlerinin ilerleyen zaman boyunca neredeyse değişmeden sabit kaldığı ve analitik değerleriyle iyi uyum içerisinde oldukları görülmektedir. Her ne kadar h ve k konum ve zaman adım uzunluklarının

gittikçe küçük seçilmesi durumunda elde edilen yaklaşık nümerik çözümler gittikçe analitik değerlerine yakın kalsa da *CPU* zamanlarına bakıldığında yöntemin kullanımını maliyetli hale getirmesinden dolayı h ve k adım uzunluklarının makul (modest) değerlerini seçmek yeterlidir.

Bu durum için ayrıca $h = 0.2$ ve $k = 0.025$ için $t = 0(1)10$ bitiş zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ yaklaşık invaryant değerleri ile L_2 ve L_∞ hata normları diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla Çizelge 5.3'te karşılaştırıldı. Hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının değerleri kabul edilebilir seviyede küçük olmasına rağmen karşılaştırmaların yapıldığı referanslardaki çalışmaların hemen hemen hepsinde kullanılan çeşitli sonlu elemanlar üzerine temellenmiş şemalardan elde edilenler kadar iyi olmadığı açıktır.

Bu bilimsel çalışmada Bölüm 3'de sunulan (3.1.4) eşitliği ile verilen nümerik şema sonlu farklar üzerine inşa edilmiş Crank-Nicolson tarzı yaklaşımla konum ve zaman yönünde tamamen ayrıklaştırılmış bir nümerik şema olduğundan h ve k nın yeterince küçük seçilmesi durumunda yaklaşık nümerik sonuçların gittikçe iyileşeceği beklenir. Bunun için Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2'ye tekrar dönülür ve bakılırsa daha küçük h ve k değerleri için $t = 10$ 'daki L_2 ve L_∞ hata normları Çizelge 5.3'te [16, 18, 22, 31, 33–36, 40, 43, 48, 51, 54, 60, 77] ile verilen çalışmalardakinden daha iyi olduğu, geriye kalan diğer referanslarda verilen çalışmalardakilerle de uyum içinde olduğu görülür. Çizelge 5.3'te invaryantların zaman arttıkça iyi korunduğu ve ayrıca diğer araştırmacıların verdikleri ile de oldukça uyumlu olduğu kolayca görülmektedir.

Çizelge 5.1 : Problem 1 (Durum 1): $c = 1$, $x_0 = 40$, $k = 0.0125$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları ve $CPU(s)$ zamanları.

t		$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
0	I_M	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294
	I_Q	3.29983165	3.29983165	3.29983165	3.29983165	3.29983165
	I_E	1.41421356	1.41421356	1.41421356	1.41421356	1.41421356
2	$L_2 \times 10^2$	1.118781	0.292951	0.086313	0.035583	0.023656
	$L_\infty \times 10^2$	0.736502	0.192683	0.055830	0.021573	0.013058
	$\tilde{I}_M$	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294
	$\tilde{I}_Q$	3.29561679	3.29874206	3.29955607	3.29976167	3.29981320
	$\tilde{I}_E$	1.41842373	1.41530007	1.41448647	1.41428098	1.41422948
	$CPU(s)$	0.941479	1.855066	3.834186	17.427944	47.930349
4	$L_2 \times 10^2$	1.853424	0.492164	0.150814	0.066478	0.046127
	$L_\infty \times 10^2$	1.087117	0.289056	0.087449	0.037076	0.024577
	$\tilde{I}_M$	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294
	$\tilde{I}_Q$	3.29565248	3.29874313	3.29955495	3.29976041	3.29981193
	$\tilde{I}_E$	1.41838458	1.41529624	1.41448501	1.41427970	1.41422821
	$CPU(s)$	1.046923	2.282430	6.659164	33.966034	96.386730
6	$L_2 \times 10^2$	2.473915	0.662799	0.208171	0.095411	0.067855
	$L_\infty \times 10^2$	1.398690	0.375262	0.116428	0.051719	0.035635
	$\tilde{I}_M$	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294
	$\tilde{I}_Q$	3.29566160	3.29874252	3.29955372	3.29975915	3.29981067
	$\tilde{I}_E$	1.41837267	1.41529425	1.41448369	1.41427843	1.41422695
	$CPU(s)$	1.163507	3.051949	9.363356	50.639344	142.390555
8	$L_2 \times 10^2$	3.068595	0.826916	0.263840	0.123820	0.089354
	$L_\infty \times 10^2$	1.709565	0.460280	0.145124	0.066265	0.046642
	$\tilde{I}_M$	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294
	$\tilde{I}_Q$	3.29566406	3.29874150	3.29955248	3.29975789	3.29980941
	$\tilde{I}_E$	1.41836764	1.41529273	1.41448241	1.41427716	1.41422568
	$CPU(s)$	1.346265	3.740461	12.251174	68.847166	191.871375
10	$L_2 \times 10^2$	3.659150	0.989974	0.319215	0.152127	0.110816
	$L_\infty \times 10^2$	2.019513	0.545518	0.173760	0.080829	0.057664
	$\tilde{I}_M$	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294
	$\tilde{I}_Q$	3.29566429	3.29874034	3.29955122	3.29975662	3.29980814
	$\tilde{I}_E$	1.41836493	1.41529138	1.41448114	1.41427590	1.41422442
	$CPU(s)$	1.515168	4.321267	14.442219	85.163860	244.157343

Çizelge 5.2 : Problem 1 (Durum 1): $c = 1$, $x_0 = 40$, $h = 0.05$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları ve $CPU(s)$ zamanları.

t		$k = 0.05$	$k = 0.025$	$k = 0.0125$	$k = 0.00625$	$k = 0.003125$
0	I_M	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294
	I_Q	3.29983165	3.29983165	3.29983165	3.29983165	3.29983165
	I_E	1.41421356	1.41421356	1.41421356	1.41421356	1.41421356
2	$L_2 \times 10^2$	0.378438	0.142298	0.086313	0.073299	0.070168
	$L_\infty \times 10^2$	0.208337	0.086209	0.055830	0.048287	0.046401
	$\tilde{I}_M$	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294
	$\tilde{I}_Q$	3.29947599	3.29954704	3.29955607	3.29955723	3.29955738
	$\tilde{I}_E$	1.41440635	1.41447745	1.41448647	1.41448763	1.41448778
	$CPU(s)$	1.469299	2.221837	3.539314	6.406369	11.821173
4	$L_2 \times 10^2$	0.740498	0.266056	0.150814	0.123179	0.116437
	$L_\infty \times 10^2$	0.393246	0.148280	0.087449	0.072367	0.068618
	$\tilde{I}_M$	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294
	$\tilde{I}_Q$	3.29939528	3.29953704	3.29955495	3.29955722	3.29955751
	$\tilde{I}_E$	1.41432455	1.41446698	1.41448501	1.41448731	1.41448760
	$CPU(s)$	2.144807	3.507808	6.393918	11.887940	22.969156
6	$L_2 \times 10^2$	1.093618	0.382220	0.208171	0.165897	0.155513
	$L_\infty \times 10^2$	0.572349	0.207004	0.116428	0.094012	0.088418
	$\tilde{I}_M$	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294
	$\tilde{I}_Q$	3.29931498	3.29952699	3.29955372	3.29955710	3.29955753
	$\tilde{I}_E$	1.41424382	1.41445678	1.41448369	1.41448710	1.41448754
	$CPU(s)$	2.835903	5.062619	9.250729	17.469343	34.928984
8	$L_2 \times 10^2$	1.446072	0.496542	0.263840	0.206973	0.192955
	$L_\infty \times 10^2$	0.752292	0.265512	0.145124	0.115289	0.107893
	$\tilde{I}_M$	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294
	$\tilde{I}_Q$	3.29923487	3.29951694	3.29955248	3.29955696	3.29955753
	$\tilde{I}_E$	1.41416352	1.41444667	1.41448241	1.41448693	1.41448751
	$CPU(s)$	3.526285	6.309091	11.885251	23.100456	45.903852
10	$L_2 \times 10^2$	1.800926	0.610712	0.319215	0.247775	0.230130
	$L_\infty \times 10^2$	0.933988	0.324138	0.173760	0.136593	0.127336
	$\tilde{I}_M$	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294	4.44288294
	$\tilde{I}_Q$	3.29915484	3.29950688	3.29955122	3.29955681	3.29955751
	$\tilde{I}_E$	1.41408340	1.41443659	1.41448114	1.41448676	1.41448748
	$CPU(s)$	4.257392	7.822453	14.586297	28.763440	56.321087

Çizelge 5.3 : Problem 1 (Durum 1): $c = 1$, $x_0 = 40$, $k = 0.025$ ve $h = 0.2$ için farklı $t=0(1)10$ zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ve $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

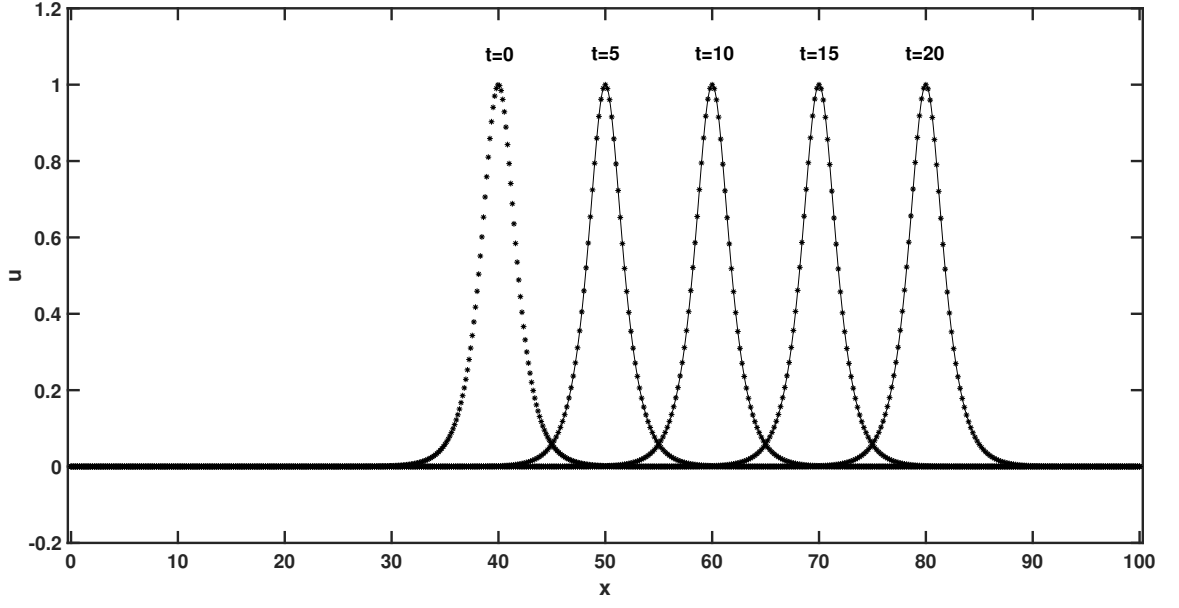
t	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	L_2	L_∞
1	4.44288294	3.29554687	1.41848424	$6.444998e-03$	$4.874454e-03$
2	4.44288294	3.29560464	1.41841199	$1.167840e-02$	$7.662427e-03$
3	4.44288294	3.29562425	1.41837996	$1.589538e-02$	$9.650696e-03$
4	4.44288294	3.29563121	1.41836174	$1.959406e-02$	$1.145006e-02$
5	4.44288294	3.29563279	1.41834955	$2.304467e-02$	$1.316141e-02$
6	4.44288294	3.29563166	1.41834042	$2.637586e-02$	$1.487127e-02$
7	4.44288294	3.29562905	1.41833299	$2.965087e-02$	$1.657225e-02$
8	4.44288294	3.29562558	1.41832654	$3.290168e-02$	$1.826901e-02$
9	4.44288294	3.29562161	1.41832069	$3.614464e-02$	$1.996430e-02$
10	4.44288294	3.29561733	1.41831519	$3.938805e-02$	$2.165944e-02$
10 [1] ($M = 300$, $k = 0.05$)	4.44288	3.29976	1.41429	—	$2.90e-04$
10 [16]	4.4428679	3.2998244	1.4142061	$9.619e-03$	$4.971e-03$
10 [18]	4.442	3.299	1.413	$1.639e-02$	$9.24e-03$
10 [22]	4.44288	3.29983	1.41420	$9.30196e-03$	$5.43718e-03$
10 [24] ($h = 0.1$)	4.445176	3.302476	1.417411	$8.644462e-04$	$1.247570e-03$
10 [28] ($k = 0.1$)	4.44288	3.29863	1.415209	$2.632212e-04$	$1.369715e-04$
10 [31]	4.44288	3.29981	1.41416	$3.00533e-03$	$1.68749e-03$
10 [33]	4.4428821	3.2997861	1.4141511	—	$9.0618935e-03$
10 [34]	4.4431758	3.3003023	1.4146927	$2.41552e-03$	$1.07974e-03$
10 [35]	4.4428661	3.2997108	1.4143165	$2.58891e-03$	$1.35164e-03$
10 [36]	4.44287	3.29982	1.41420	$9.23663e-03$	$4.98295e-03$
10 [40]	4.4428661	3.2997151	1.4143122	$2.57148e-03$	$1.334021e-03$
10 [43]	4.44288	3.29983	1.41420	$9.49238e-03$	$5.06983e-03$
10 [46]	4.44288	3.29881	1.41416	—	$2.27598e-05$
10 [48]	4.4428827	3.2998042	1.4142107	$2.3909e-03$	$1.0647e-03$
10 [51]	4.4428661	3.2998227	1.4142045	$2.632463e-03$	$1.393064e-03$
10 [54]	4.4431919	3.3003022	1.4146930	$2.417503e-03$	$1.080996e-03$
10 [56]	4.44288	3.29979	1.41416	$1.69905e-03$	$0.79871e-03$
10 [60]	4.443175	3.300302	1.414692	$2.415468e-03$	$1.079686e-03$
10 [61]	4.44288308	3.29983306	1.41421337	—	$0.85e-05$
10 [66]	4.44288293782	3.2998340621	1.4142111408	$1.006349e-04$	$5.916283e-05$
10 [75] ($M = 300$, $k = 0.05$)	4.44288	3.29865	1.413304	—	$6.0537e-04$
10 [77]	4.44288286	3.29983150	1.41420100	$2.47366508e-03$	$0.89643465e-03$
10 [78]	—	—	—	—	$1.116198e-03$
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 4.44288294$	$I_Q = 3.29983165$	$I_E = 1.41421356$		

Bu durum için ilaveten $h = k$ adım uzunluklarının 0.2'den 0.0125'e yarılarak giden değerleri için $t = 2, 6, 10$ zamanlarında CPU zaman değerleri ile birlikte L_2 ve L_∞ hata normları ve bu normlarda meydana gelen sunulan şemanın yakınsaklık mertebesi hesaplandı ve Çizelge 5.4'te kaydedildi. Çizelgeden açıkça L_2 ve L_∞ hata normlarının yeterince küçük olduğu, h ve k değerlerinin küçülmesi durumunda artan CPU zaman değerleriyle gittikçe azalarak beklenen yakınsaklığı sağladığı görülmektedir. Ayrıca çizelgeden ayrılaştırılmış noktalarda L_2 ve L_∞ normlarından hesaplanan şemanın $Mertebe(L_2)$ ve $Mertebe(L_\infty)$ ile temsil edilen yaklaşık doğruluk mertebesi 2 civarında olup analitik değeri $p = 2$ ile oldukça iyi uyum içindedir. Bu durum önerilen nümerik şemanın doğruluğunun bir diğer kanıtıdır.

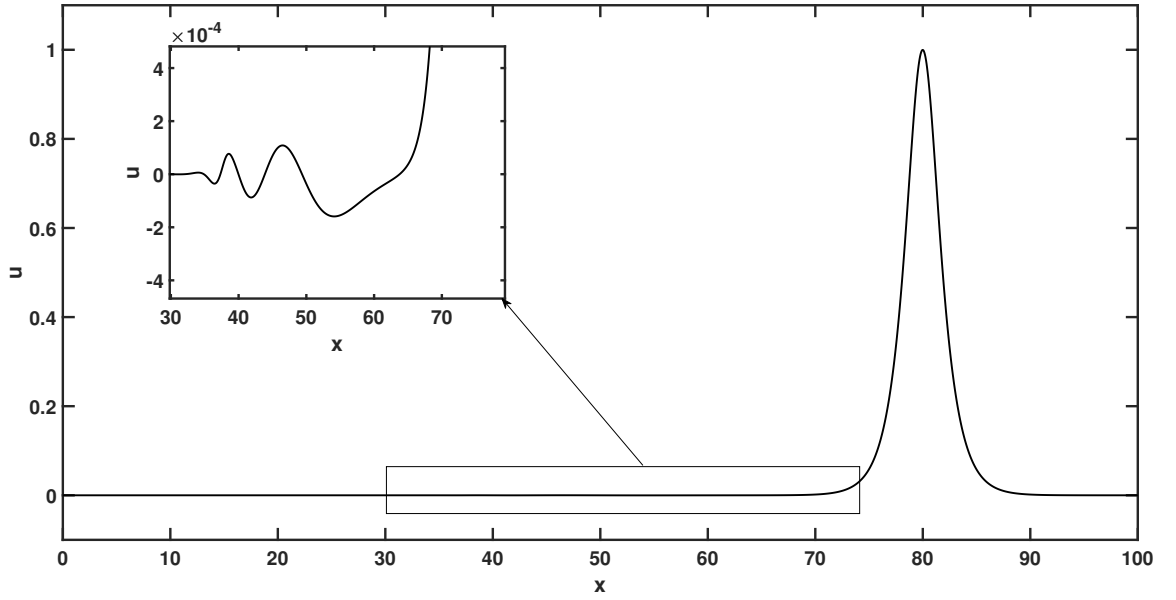
Çizelge 5.4 : Problem 1 (Durum 1): $c = 1$, $x_0 = 40$ ve farklı $h = k$ 'lar için farklı t zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, yakınsaklık mertebesi ve $CPU(s)$ zamanları.

t	$h = k$	L_2	$Mertebe(L_2)$	L_∞	$Mertebe(L_\infty)$	$CPU(s)$
2	0.2	$0.580465e-01$	—	$0.316541e-01$	—	0.688985
	0.1	$0.150361e-01$	1.9488	$0.824707e-02$	1.9404	0.842808
	0.05	$0.378438e-02$	1.9903	$0.208337e-02$	1.9850	1.486807
	0.025	$0.946637e-03$	1.9992	$0.522076e-03$	1.9966	10.906912
	0.0125	$0.236564e-03$	2.0006	$0.130584e-03$	1.9993	43.662323
6	0.2	$0.170539e-00$	—	$0.878297e-01$	—	0.741452
	0.1	$0.438154e-01$	1.9606	$0.228055e-01$	1.9453	1.015912
	0.05	$0.109362e-01$	2.0023	$0.572349e-02$	1.9944	2.789459
	0.025	$0.272230e-02$	2.0062	$0.142804e-02$	2.0029	24.399432
	0.0125	$0.678555e-03$	2.0043	$0.356351e-03$	2.0027	133.235845
10	0.2	$0.286286e-00$	—	$0.146517e-00$	—	0.773225
	0.1	$0.728448e-01$	1.9746	$0.375584e-01$	1.9639	1.174911
	0.05	$0.180093e-01$	2.0161	$0.933988e-02$	2.0077	4.086600
	0.025	$0.445853e-02$	2.0141	$0.231738e-02$	2.0109	40.415323
	0.0125	$0.110816e-02$	2.0084	$0.576638e-03$	2.0068	225.748429

Elde edilen sayısal çözümlerin sürekliliğini ve gerçek çözümle ne kadar iyi ölçüde uyumlu olduğunu sergilemek için $h = 0.05$ ve $k = 0.0125$ için $t = 0(5)20$ zamanlarında 2-boyutlu grafikler Şekil 5.1'de verildi. Her iki çözüm birbirine oldukça yakın olduklarından grafiklerinin ayırt edilemeyecek kadar neredeyse üst üste geldikleri görülmektedir. Şekilden artan zamanla dalganın hemen hemen şeklini koruyarak ilerlediği ancak Şekil 5.2'den arkalarında çok küçükte olsa dalga kalıntıları bıraktıkları görüldü. Örneğin, Şekil 5.1'den $t = 0$ 'da dalganın tam olarak genlik değeri $A = 1$ iken $t = 5$ 'te $A = 0.99982$, $t = 15$ 'te $A = 0.99980$ ve $t = 20$ 'de $A = 0.99979$ 'dur.



Şekil 5.1 : Problem 1 (Durum 1): $h = 0.05$ ve $k = 0.0125$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik (*) ve analitik (-) çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.



Şekil 5.2 : Problem 1 (Durum 1): $h = 0.05$ ve $k = 0.0125$ için $t = 20$ 'de hesaplanan nümerik çözüm ve arkasında bıraktığı dalgacıkların büyütülmüş görseli.

5.1.1.2 Durum 2: $c = 0.3$, $x_0 = 40$, $[x_l, x_r] = [0, 100]$.

Bu durum için önce $k = 0.0125$ sabit zaman adım uzunluğu için beş farklı $h = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$ konum adım uzunlukları; $h = 0.05$ sabit konum adım uzunluğu için beş farklı $k = 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625, 0.003125$ zaman adım uzunlukları için farklı $t = 0(2)10$ zamanlarında (3.1.4) ile verilen nümerik şemadan elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları, $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları ve CPU zamanları Çizelge 5.5 ve Çizelge 5.6'da verildi. Çizelgelere bakıldığında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının oldukça küçük olduğu, h ve k nın küçük değerlerinde gittikçe azaldığı görülmektedir. Bu durum yaklaşık sayısal sonuçların analitik sonuçlara yaklaştığı anlamına gelir. Bu ise sunulan şemanın yakınsaklığını destekler. Yine çizelgelerden ayrıklaştırılmış noktalarda hesaplanan invaryant değerlerinin ilerleyen zaman boyunca neredeyse değişmeden sabit kaldığı ve analitik değerleriyle iyi uyum içerisinde oldukları görülmektedir. Her ne kadar h konum ve k zaman adım uzunluklarının gittikçe küçük seçilmesi durumunda elde edilen yaklaşık nümerik çözümler gittikçe analitik değerlerine yakın kalsa da CPU zamanlarına bakıldığında yöntemin kullanımını maliyetli hale getirmesinden dolayı h ve k adım uzunluklarının makul (modest) değerlerini seçmek yeterlidir.

Bu durum için ayrıca $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ için $t = 0(2)20$ bitiş zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ yaklaşık invaryant değerleri ile L_2 ve L_∞ hata normları diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla Çizelge 5.7'de karşılaştırıldı. $t = 0(2)20$ zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları yeterince küçük olup örneğin, $t = 2$ 'de $L_2 = 4.811197e - 04$ ve $L_\infty = 3.051373e - 04$ iken $t = 20$ zamanında $L_2 = 3.201205e - 03$ ve $L_\infty = 1.479666e - 03$ 'dür. Karşılaştırmaların yapıldığı referanslardaki çalışmalarda sonlu elemanlar üzerine inşa edilmiş tekniklerin çoğundan elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları kadar iyi olmasa da $t = 10$ 'da [43,58-(III)] daki sonuçlardan daha iyi olup diğer referanslardaki çalışmalarla da uyumlu olduğu, $t = 20$ 'de ise [32] daki sonuçlardan daha iyi olup diğer referanslardaki sonuçlarla da yakın uyum içerisinde olduğu açıkça gözükmemektedir. Yine çizelgeden hesaplanan her üç invaryantın $t = 0(2)20$ zamanlarında neredeyse değişmeden korunduğu ve analitik değerleri ile oldukça iyi uyum içerisinde olduğu görülmektedir. Örneğin, hesaplanan invaryant değerleri $t = 10$ 'da $\tilde{I}_M = 3.58196677$, $\tilde{I}_Q = 1.34497406$, $\tilde{I}_E = 0.15382541$ ve $t = 20$ 'de $\tilde{I}_M = 3.58196657$, $\tilde{I}_Q = 1.34497429$, $\tilde{I}_E = 0.15382514$ iken $t = 0$ 'daki analitik değerleri $I_M = 3.58196674$, $I_Q = 1.34507649$, $I_E = 0.15372303$ 'dür. Aynı zamanda bu invaryant değerleri diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla da oldukça uyumludur.

Çizelge 5.5 : Problem 1 (Durum 2): $c = 0.3$, $x_0 = 40$, $k = 0.0125$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları ve $CPU(s)$ zamanları.

t		$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
0	I_M	3.58196674	3.58196674	3.58196674	3.58196674	3.58196674
	I_Q	1.34507649	1.34507649	1.34507649	1.34507649	1.34507649
	I_E	0.15372303	0.15372303	0.15372303	0.15372303	0.15372303
2	$L_2 \times 10^3$	1.910993	0.483852	0.126751	0.037630	0.015694
	$L_\infty \times 10^3$	1.211533	0.306590	0.079749	0.022971	0.008780
	$\tilde{I}_M$	3.58196674	3.58196674	3.58196674	3.58196674	3.58196674
	$\tilde{I}_Q$	1.34466787	1.34497334	1.34505064	1.34507002	1.34507487
	$\tilde{I}_E$	0.15413162	0.15382616	0.15374887	0.15372949	0.15372464
	$CPU(s)$	0.866416	1.538343	3.774271	21.361066	51.846551
4	$L_2 \times 10^3$	3.573044	0.906563	0.238593	0.071789	0.030600
	$L_\infty \times 10^3$	2.064028	0.523540	0.137234	0.040592	0.016431
	$\tilde{I}_M$	3.58196675	3.58196675	3.58196675	3.58196675	3.58196675
	$\tilde{I}_Q$	1.34467251	1.34497363	1.34505064	1.34507001	1.34507486
	$\tilde{I}_E$	0.15412693	0.15382586	0.15374885	0.15372949	0.15372464
	$CPU(s)$	1.064265	2.217787	6.630908	38.161824	102.098729
6	$L_2 \times 10^3$	4.995320	1.269711	0.335618	0.102255	0.044506
	$L_\infty \times 10^3$	2.679621	0.681578	0.179746	0.054132	0.022730
	$\tilde{I}_M$	3.58196675	3.58196676	3.58196676	3.58196676	3.58196676
	$\tilde{I}_Q$	1.34467562	1.34497381	1.34505065	1.34507000	1.34507485
	$\tilde{I}_E$	0.15412379	0.15382565	0.15374883	0.15372948	0.15372464
	$CPU(s)$	1.258323	2.917515	9.615687	58.400666	133.171718
8	$L_2 \times 10^3$	6.261257	1.593736	0.422765	0.130133	0.057610
	$L_\infty \times 10^3$	3.206745	0.816712	0.216193	0.065895	0.028336
	$\tilde{I}_M$	3.58196676	3.58196676	3.58196677	3.58196677	3.58196677
	$\tilde{I}_Q$	1.34467777	1.34497394	1.34505064	1.34506999	1.34507484
	$\tilde{I}_E$	0.15412161	0.15382551	0.15374882	0.15372948	0.15372463
	$CPU(s)$	1.362043	3.631422	12.133899	75.144339	206.608649
10	$L_2 \times 10^3$	7.428586	1.892992	0.503610	0.156314	0.070149
	$L_\infty \times 10^3$	3.683140	0.939411	0.249473	0.076742	0.033577
	$\tilde{I}_M$	3.58196676	3.58196677	3.58196677	3.58196678	3.58196678
	$\tilde{I}_Q$	1.34467935	1.34497403	1.34505064	1.34506998	1.34507483
	$\tilde{I}_E$	0.15412000	0.15382540	0.15374881	0.15372947	0.15372463
	$CPU(s)$	1.506451	4.315481	17.855048	94.483778	259.246244

Çizelge 5.6 : Problem 1 (Durum 2): $c = 0.3$, $x_0 = 40$, $h = 0.05$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları ve $CPU(s)$ zamanları.

t		$k = 0.05$	$k = 0.025$	$k = 0.0125$	$k = 0.00625$	$k = 0.003125$
0	I_M	3.58196674	3.58196674	3.58196674	3.58196674	3.58196674
	I_Q	1.34507649	1.34507649	1.34507649	1.34507649	1.34507649
	I_E	0.15372303	0.15372303	0.15372303	0.15372303	0.15372303
2	$L_2 \times 10^3$	0.250978	0.150493	0.126751	0.120993	0.119567
	$L_\infty \times 10^3$	0.140339	0.091841	0.079749	0.076725	0.075968
	$\tilde{I}_M$	3.58196674	3.58196674	3.58196674	3.58196674	3.58196674
	$\tilde{I}_Q$	1.34505001	1.34505056	1.34505064	1.34505064	1.34505065
	$\tilde{I}_E$	0.15374868	0.15374885	0.15374887	0.15374887	0.15374887
	$CPU(s)$	1.525294	2.218904	3.473984	6.321279	11.751375
4	$L_2 \times 10^3$	0.489386	0.287095	0.238593	0.226747	0.223807
	$L_\infty \times 10^3$	0.262663	0.162293	0.137234	0.130968	0.129401
	$\tilde{I}_M$	3.58196675	3.58196675	3.58196675	3.58196675	3.58196675
	$\tilde{I}_Q$	1.34504938	1.34505050	1.34505064	1.34505066	1.34505066
	$\tilde{I}_E$	0.15374845	0.15374880	0.15374885	0.15374885	0.15374885
	$CPU(s)$	2.233363	3.618842	6.361136	11.772997	23.333203
6	$L_2 \times 10^3$	0.711853	0.408928	0.335618	0.317630	0.313161
	$L_\infty \times 10^3$	0.363346	0.216453	0.179746	0.170594	0.168306
	$\tilde{I}_M$	3.58196676	3.58196676	3.58196676	3.58196676	3.58196676
	$\tilde{I}_Q$	1.34504875	1.34505043	1.34505065	1.34505067	1.34505068
	$\tilde{I}_E$	0.15374822	0.15374876	0.15374883	0.15374884	0.15374884
	$CPU(s)$	2.914430	4.915311	9.322099	17.631372	33.315440
8	$L_2 \times 10^3$	0.921575	0.520411	0.422765	0.398736	0.392761
	$L_\infty \times 10^3$	0.452989	0.263468	0.216193	0.204387	0.201436
	$\tilde{I}_M$	3.58196677	3.58196677	3.58196677	3.58196677	3.58196677
	$\tilde{I}_Q$	1.34504812	1.34505036	1.34505064	1.34505068	1.34505068
	$\tilde{I}_E$	0.15374801	0.15374872	0.15374882	0.15374883	0.15374883
	$CPU(s)$	3.618144	6.406766	11.969164	23.218812	46.481815
10	$L_2 \times 10^3$	1.122351	0.625114	0.503610	0.473650	0.466195
	$L_\infty \times 10^3$	0.536860	0.306856	0.249473	0.235159	0.231586
	$\tilde{I}_M$	3.58196677	3.58196677	3.58196677	3.58196677	3.58196677
	$\tilde{I}_Q$	1.34504749	1.34505029	1.34505064	1.34505068	1.34505069
	$\tilde{I}_E$	0.15374780	0.15374869	0.15374881	0.15374882	0.15374883
	$CPU(s)$	4.172665	7.762148	14.907902	29.200754	57.901502

Çizelge 5.7 : Problem 1 (Durum 2): $c = 0.3$, $x_0 = 40$, $k = 0.025$ ve $h = 0.2$ için farklı $t = 0(2)20$ zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ve $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

t	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	L_2	L_∞
2	3.58196674	1.34497335	0.15382616	$4.811197e-04$	$3.051373e-04$
4	3.58196675	1.34497364	0.15382586	$9.009296e-04$	$5.205401e-04$
6	3.58196676	1.34497383	0.15382566	$1.261147e-03$	$6.771844e-04$
8	3.58196676	1.34497396	0.15382552	$1.582287e-03$	$8.110625e-04$
10	3.58196677	1.34497406	0.15382541	$1.878709e-03$	$9.325442e-04$
12	3.58196677	1.34497413	0.15382533	$2.159028e-03$	$1.047281e-03$
14	3.58196678	1.34497418	0.15382527	$2.428555e-03$	$1.158141e-03$
16	3.58196677	1.34497423	0.15382522	$2.690700e-03$	$1.266639e-03$
18	3.58196672	1.34497426	0.15382518	$2.947733e-03$	$1.373640e-03$
20	3.58196657	1.34497429	0.15382514	$3.201205e-03$	$1.479666e-03$
10 [24] ($k = 0.1$)	3.582265	1.345182	0.1538901	$3.379583e-04$	$7.672911e-04$
10 [28] ($k = 0.1$)	3.581958	1.344973	0.1538264	$1.919314e-05$	$8.970499e-06$
10 [41-(CN)] ($h = 0.1, k = 0.01$)	3.581966	1.344972	0.1538260	$5.77512e-04$	$2.84373e-04$
10 [41-(RK)] ($h = 0.1, k = 0.01$)	3.581967	1.344973	0.1538262	$5.600205e-04$	$2.766940e-04$
10 [43] ($k = 0.01$)	—	—	—	$2.08976e-03$	$1.02762e-03$
10 [48] ($k = 0.1$)	3.5812102	1.345133	0.1538342	$1.3378e-04$	$6.1250e-04$
10 [58-(I)] ($h = 0.1, k = 0.05$)	—	—	—	$1.1712e-03$	$5.3166e-04$
10 [58-(II)] ($h = 0.1, k = 0.05$)	—	—	—	$1.0423e-03$	$5.1113e-04$
10 [58-(III)] ($h = 0.1, k = 0.05$)	—	—	—	$2.5471e-03$	$1.2434e-03$
10 [58-(IV)] ($h = 0.1, k = 0.05$)	—	—	—	$4.3307e-04$	$2.0496e-04$
10 [72-(I)] ($k = 0.01$)	3.5819667	1.3450761	0.1537234	$2.777e-05$	$1.276e-05$
10 [72-(II)] ($k = 0.01$)	3.5819667	1.3450760	0.1537234	$8.941e-07$	$4.533e-07$
10 [76-(I)] ($k = 0.01$)	3.5819667	1.3450763	0.1537230	$2.6975e-05$	$1.2311e-05$
10 [76-(II)] ($k = 0.01$)	3.5821413	1.3450764	0.1537230	$9.6982e-05$	$1.0149e-04$
20 [1] ($M = 300, k = 0.05$)	3.58197	1.34507	0.153726	—	$8.69e-05$
20 [22] ($h = 0.1, k = 0.01$)	3.58197	1.34508	0.153723	$6.06885e-04$	$2.96650e-04$
20 [26] ($h = 0.1, k = 0.01$)	3.581967	1.345076	0.153723	$2.222848e-05$	$5.089274e-05$
20 [29-(MQ)] ($k = 0.01$)	3.58219	1.34511	0.153734	$0.256768e-03$	$0.076264e-03$
20 [29-(G)] ($k = 0.01$)	3.58133	1.34459	0.153577	$0.748535e-03$	$0.376850e-03$
20 [29-(IMQ)] ($k = 0.01$)	3.58336	1.34667	0.154202	$2.052729e-03$	$1.059413e-03$
20 [29-(IQ)] ($k = 0.01$)	3.57853	1.34213	0.152841	$2.889491e-03$	$1.579076e-03$
20 [31] ($h = 0.1, k = 0.01$)	3.58197	1.34508	0.153723	$0.645295e-04$	$0.301923e-04$
20 [32-(I)] ($h = 0.1, k = 0.1$)	3.581965	1.345024	0.153705	$7.2739e-03$	$3.2064e-03$
20 [32-(II)] ($h = 0.1, k = 0.01$)	3.581966	1.345077	0.153721	$1.7832e-03$	$0.8163e-03$
20 [35] ($h = 0.1, k = 0.01$)	3.5820204	1.3450974	0.1537250	$0.8112594e-04$	$0.3569076e-04$
20 [36] ($h = 0.1, k = 0.01$)	3.5820202	1.3450940	0.1537283	$3.2849177e-04$	$1.6582700e-04$
20 [40] ($h = 0.1, k = 0.01$)	3.5819531	1.3450696	0.1537243	$0.3585031e-04$	$0.1702101e-04$
20 [44-(CN)] ($h = 0.1, k = 0.02$)	3.581947	1.344747	0.153758	$1.27971e-03$	—
20 [44-(BDF2)] ($h = 0.1, k = 0.02$)	3.581962	1.344797	0.153773	$1.54476e-04$	$7.27421e-05$
20 [46]	3.58197	1.34508	0.15372	—	$0.62037e-04$
20 [48] ($h = 0.1, k = 0.01$)	3.5819987	1.3450863	0.1537246	$5.3488e-05$	$3.1778e-05$
20 [51-(First)] ($h = 0.1, k = 0.01$)	3.5820204	1.3450941	0.1537283	$1.20462362e-04$	$0.51392349e-04$
20 [51-(Second)] ($h = 0.1, k = 0.01$)	3.5820204	1.3450956	0.1537268	$1.19599766e-04$	$0.51304090e-04$
20 [54] ($h = 0.1, k = 0.01$)	3.5820206	1.3450944	0.1537284	$1.22736382e-04$	$0.44722941e-04$
20 [59] ($k = 0.01$)	3.58195	1.34506	0.15372	$0.376e-04$	$0.175e-04$
20 [66] ($h = 0.1, k = 0.01$)	3.58196657129	1.34507649829	0.15372302133	$6.4922e-7$	$3.2303e-7$
20 [68] ($M = 300, k = 0.05$)	3.581967	1.34506	0.15372	—	$5.2275e-05$
20 [75] ($M = 300, k = 0.05$)	3.581967	1.34506	0.15372	—	$9.7914e-06$
20 [77] ($h = 0.1, k = 0.01$)	3.58196659	1.34507649	0.15372294	$0.34923321e-04$	$0.12540476e-04$
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 3.58196674$	$I_Q = 1.34507649$	$I_E = 0.15372303$		

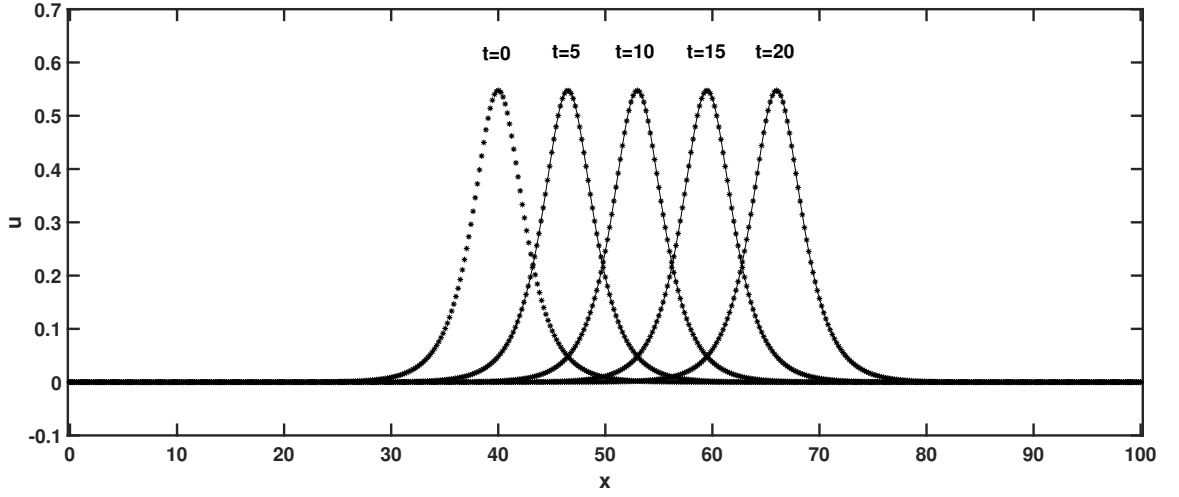
Bu durum için ilaveten $h = k$ adım uzunluklarının 0.2'den 0.0125'e kadar yarılayarak giden değerleri için farklı $t = 2, 6, 10$ bitiş zamanlarında CPU zaman değerleri ile birlikte L_2 ve L_∞ hata normları ve (5.0.1) eşitliği kullanılarak bu normlarda hesaplanan önerilen şemanın doğruluk mertebesi Çizelge 5.8'de listelendi. Çizelge incelendiğinde L_2 ve L_∞ hata normlarının yeterince küçük olduğu, h ve k nın gittikçe küçülen değerlerinde hata normlarının

da giderek azaldığı, seçilen herhangi bir t bitiş zamanında ve yine seçilen herhangi bir $h = k$ mesh uzunluğunda her iki normda hesaplanan yaklaşık doğruluk mertebesi 2 civarında olup tam değeri olan $p = 2$ değeri ile iyi uyumlu olduğu görüldü. Açıkça bu sonuçlar sunulan şemanın etkinliğinin ve kararlılığının önemli delilleridir. Ayrıca bunların yanısıra çizelgeden mesh uzunlukları küçüldüğünde ve t bitiş zamanı arttığında doğal olarak CPU zamanlarının beklenen artışıda gözlemlendi.

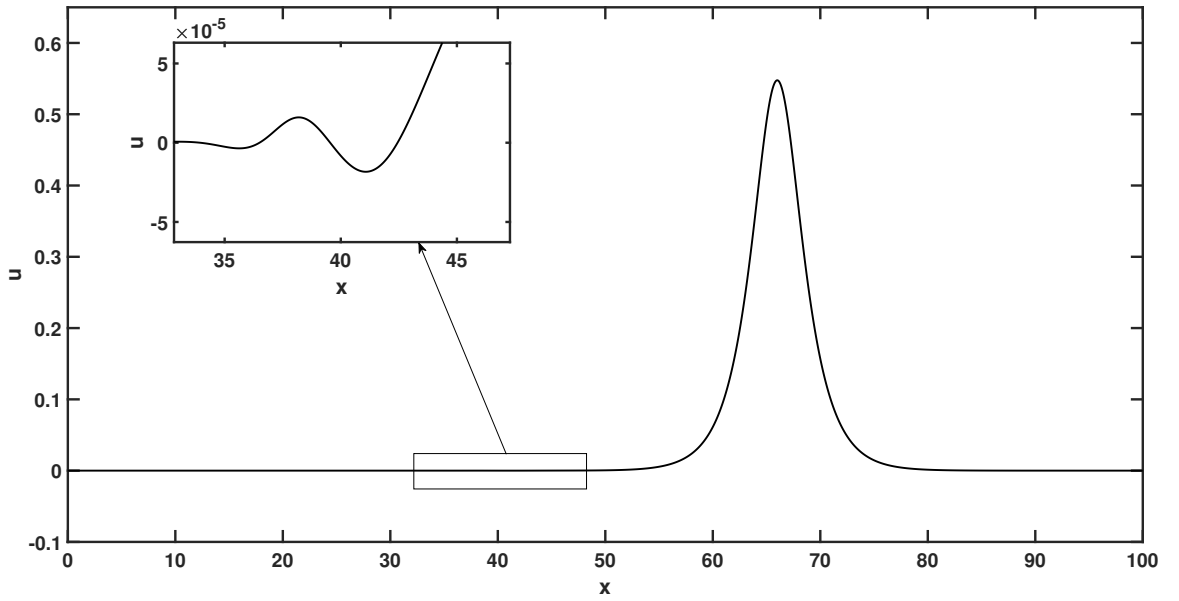
Çizelge 5.8 : Problem 1 (Durum 2): $c = 0.3$, $x_0 = 40$ ve farklı $h = k$ 'lar için farklı t zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, yakınsaklık mertebesi ve CPU(s) zamanları.

t	$h = k$	L_2	Mertebe(L_2)	L_∞	Mertebe(L_∞)	CPU(s)
2	0.2	$0.397491e-02$	—	$0.221423e-02$	—	0.704361
	0.1	$0.100194e-02$	1.9881	$0.559965e-03$	1.9834	0.835793
	0.05	$0.250978e-03$	1.9972	$0.140339e-03$	1.9964	1.679994
	0.025	$0.627722e-04$	1.9994	$0.351100e-04$	1.9990	10.468959
	0.0125	$0.156944e-04$	1.9999	$0.877951e-05$	1.9997	51.277261
6	0.2	$0.112576e-01$	—	$0.571547e-02$	—	0.719817
	0.1	$0.284157e-02$	1.9861	$0.144908e-02$	1.9797	0.984730
	0.05	$0.711853e-03$	1.9970	$0.363346e-03$	1.9957	3.405570
	0.025	$0.178023e-03$	1.9995	$0.909039e-04$	1.9989	30.474369
	0.0125	$0.445056e-04$	2.0000	$0.227301e-04$	1.9997	154.759001
10	0.2	$0.177417e-01$	—	$0.845305e-02$	—	0.737218
	0.1	$0.448089e-02$	1.9853	$0.214018e-02$	1.9817	1.220748
	0.05	$0.112235e-02$	1.9973	$0.536860e-03$	1.9951	5.157558
	0.025	$0.280630e-03$	1.9998	$0.134299e-03$	1.9991	40.552141
	0.0125	$0.701490e-04$	2.0002	$0.335774e-04$	1.9999	225.257382

Sunulan şemadan elde edilen yaklaşık nümerik çözümlerin sürekliliğini ve ele alınan problemin fiziksel davranışını ne kadar iyi sağladığını sergilemek için $h = 0.05$ ve $k = 0.0125$ için $t = 0(5)20$ zamanlarında elde edilen yaklaşık sayısal ve analitik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri Şekil 5.3'te verildi. Grafiklerden nümerik çözümlerin analitik çözümlerle son derece iyi uyum içinde olduğu açıktır. Şekilden artan zamanla dalganın neredeyse şeklini koruyarak yollarına devam ettikleri, fakat Şekil 5.4'ten arkalarında son derece küçük dalga parçacıkları bıraktıkları gözlemlendi. Örneğin, Şekil 5.3'ten $t = 0$ 'daki dalganın amplitüd değeri $A = 0.54772$ iken $t = 5$ 'te $A = 0.54767$, $t = 15$ 'te $A = 0.54763$ ve $t = 20$ 'de $A = 0.54763$ 'dür.



Şekil 5.3 : Problem 1 (Durum 2): $h = 0.05$ ve $k = 0.0125$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik (*) ve analitik (-) çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.



Şekil 5.4 : Problem 1 (Durum 2): $h = 0.05$ ve $k = 0.0125$ için $t = 20$ 'de hesaplanan nümerik çözüm ve arkasında bıraktığı dalgacıkların büyütülmüş görseli.

5.1.1.3 Durum 3: $c = 0.1$, $x_0 = 40$, $[x_l, x_r] = [0, 100]$.

Bu durum için de önceki durumlarda olduğu gibi önce sabit $k = 0.0125$ değeri için $h = 0.2$ 'den $h = 0.0125$ değerlerine yarılayarak giden beş farklı konum adım uzunlukları; sabit $h = 0.05$ değeri için $k = 0.05$ 'ten $k = 0.003125$ değerlerine yarılayarak giden beş farklı zaman adım uzunlukları için $t = 0(2)10$ zamanlarında hesaplanan hata normları, $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ yaklaşık invaryant değerleri sırasıyla Çizelge 5.9 ve Çizelge 5.10'da listelendi. Çizelgelere bakıldığında küçülen konum ve zaman adım uzunlukları için L_2 ve L_∞ hatalarının da giderek azaldığı kolayca görülmektedir. Bu durum nümerik sonuçların analitik sonuçlara yaklaştığı anlamına gelir ve sunulan şemanın yakınsaklığının da bir kanıtıdır. Yine çizelgelerden ayrıklaştırılmış noktalarda hesaplanan invaryant değerlerinin zaman ilerledikçe hemen hemen değişmeden korunduğu ve analitik değerleriyle de oldukça uyumlu oldukları görülmektedir. Örneğin, Çizelge 5.9'dan $h = 0.05$ için hesaplanan invaryantlar $t = 2$ zamanında $\tilde{I}_M = 3.29492642$, $\tilde{I}_Q = 0.68342358$, $\tilde{I}_E = 0.02412304$ ve $t = 10$ zamanında $\tilde{I}_M = 3.29495043$, $\tilde{I}_Q = 0.68342358$, $\tilde{I}_E = 0.02412304$; Çizelge 5.10'dan $k = 0.0125$ için hesaplanan invaryantlar $t = 2$ zamanında $\tilde{I}_M = 3.29492642$, $\tilde{I}_Q = 0.68342358$, $\tilde{I}_E = 0.02412304$ ve $t = 10$ zamanında $\tilde{I}_M = 3.29495043$, $\tilde{I}_Q = 0.68342358$, $\tilde{I}_E = 0.02412304$ olup neredeyse değişmeden sabit kaldıkları analitik değerleri olan $t = 0$ zamanındaki $I_M = 3.29493017$, $I_Q = 0.68342571$, $I_E = 0.02412091$ değerleriyle yeterince yakınlık içerisinde oldukları açıktır. Ayrıca her iki çizelgeden zaman arttıkça CPU zamanlarında beklenen artışın da olduğu kolayca görülür.

Çizelge 5.9 : Problem 1 (Durum 3): $c = 0.1$, $x_0 = 40$, $k = 0.0125$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları ve $CPU(s)$ zamanları.

t		$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
0	I_M	3.29493017	3.29493017	3.29493017	3.29493017	3.29493017
	I_Q	0.68342571	0.68342571	0.68342571	0.68342571	0.68342571
	I_E	0.02412091	0.02412091	0.02412091	0.02412091	0.02412091
2	$L_2 \times 10^3$	0.336699	0.084825	0.021866	0.006267	0.002678
	$L_\infty \times 10^3$	0.169085	0.042651	0.010928	0.002998	0.001884
	$\tilde{I}_M$	3.29492543	3.29492607	3.29492642	3.29492660	3.29492669
	$\tilde{I}_Q$	0.68339170	0.68341719	0.68342358	0.68342518	0.68342558
	$\tilde{I}_E$	0.02415492	0.02412943	0.02412304	0.02412144	0.02412104
	$CPU(s)$	0.895216	1.510326	3.680867	16.654568	46.454400
4	$L_2 \times 10^3$	0.662921	0.167061	0.043081	0.012366	0.005313
	$L_\infty \times 10^3$	0.336002	0.084597	0.021708	0.005975	0.002590
	$\tilde{I}_M$	3.29493077	3.29493220	3.29493302	3.29493346	3.29493369
	$\tilde{I}_Q$	0.68339180	0.68341720	0.68342358	0.68342518	0.68342558
	$\tilde{I}_E$	0.02415482	0.02412942	0.02412304	0.02412144	0.02412104
	$CPU(s)$	1.074934	2.221311	6.495914	32.394277	92.333564
6	$L_2 \times 10^3$	0.972819	0.245258	0.063292	0.018233	0.007935
	$L_\infty \times 10^3$	0.479784	0.121112	0.031114	0.008607	0.003023
	$\tilde{I}_M$	3.29493495	3.29493753	3.29493906	3.29493990	3.29494034
	$\tilde{I}_Q$	0.68339193	0.68341721	0.68342358	0.68342518	0.68342558
	$\tilde{I}_E$	0.02415469	0.02412941	0.02412304	0.02412144	0.02412104
	$CPU(s)$	1.233288	2.891458	8.872955	48.520109	131.314185
8	$L_2 \times 10^3$	1.265315	0.319131	0.082415	0.023819	0.010477
	$L_\infty \times 10^3$	0.604104	0.152622	0.039260	0.010906	0.003817
	$\tilde{I}_M$	3.29493839	3.29494242	3.29494491	3.29494630	3.29494703
	$\tilde{I}_Q$	0.68339206	0.68341721	0.68342358	0.68342518	0.68342558
	$\tilde{I}_E$	0.02415456	0.02412941	0.02412304	0.02412144	0.02412104
	$CPU(s)$	1.452403	3.634751	11.936672	64.454368	176.819166
10	$L_2 \times 10^3$	1.541788	0.389010	0.100522	0.029113	0.012873
	$L_\infty \times 10^3$	0.715291	0.180533	0.046497	0.012961	0.004576
	$\tilde{I}_M$	3.29494109	3.29494678	3.29495043	3.29495251	3.29495362
	$\tilde{I}_Q$	0.68339218	0.68341722	0.68342358	0.68342518	0.68342558
	$\tilde{I}_E$	0.02415443	0.02412940	0.02412304	0.02412144	0.02412104
	$CPU(s)$	1.640955	4.140869	14.655249	82.053961	222.533414

Çizelge 5.10 : Problem 1 (Durum 3): $c = 0.1$, $x_0 = 40$, $h = 0.05$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları ve $CPU(s)$ zamanları.

t		$k = 0.05$	$k = 0.025$	$k = 0.0125$	$k = 0.00625$	$k = 0.003125$
0	I_M	3.29493017	3.29493017	3.29493017	3.29493017	3.29493017
	I_Q	0.68342571	0.68342571	0.68342571	0.68342571	0.68342571
	I_E	0.02412091	0.02412091	0.02412091	0.02412091	0.02412091
2	$L_2 \times 10^4$	0.342335	0.243056	0.218658	0.212600	0.211089
	$L_\infty \times 10^4$	0.162718	0.119908	0.109282	0.106630	0.105966
	$\tilde{I}_M$	3.29492642	3.29492642	3.29492642	3.29492642	3.29492642
	$\tilde{I}_Q$	0.68342357	0.68342358	0.68342358	0.68342358	0.68342358
	$\tilde{I}_E$	0.02412304	0.02412304	0.02412304	0.02412304	0.02412304
	$CPU(s)$	1.506043	2.155755	3.324685	5.889951	11.290110
4	$L_2 \times 10^4$	0.677946	0.479626	0.430807	0.418680	0.415653
	$L_\infty \times 10^4$	0.326691	0.238998	0.217078	0.211597	0.210226
	$\tilde{I}_M$	3.29493302	3.29493302	3.29493302	3.29493302	3.29493302
	$\tilde{I}_Q$	0.68342356	0.68342358	0.68342358	0.68342358	0.68342358
	$\tilde{I}_E$	0.02412304	0.02412304	0.02412304	0.02412304	0.02412304
	$CPU(s)$	2.472935	3.347857	6.209751	11.198311	21.481283
6	$L_2 \times 10^4$	1.002943	0.706025	0.632921	0.614748	0.610213
	$L_\infty \times 10^4$	0.476527	0.344223	0.311138	0.302866	0.300797
	$\tilde{I}_M$	3.29493906	3.29493906	3.29493906	3.29493906	3.29493906
	$\tilde{I}_Q$	0.68342355	0.68342358	0.68342358	0.68342358	0.68342358
	$\tilde{I}_E$	0.02412303	0.02412304	0.02412304	0.02412304	0.02412304
	$CPU(s)$	3.688848	4.628491	8.543349	16.324400	31.759336
8	$L_2 \times 10^4$	1.314274	0.921216	0.824153	0.800012	0.793985
	$L_\infty \times 10^4$	0.610523	0.436197	0.392605	0.381706	0.378981
	$\tilde{I}_M$	3.29494491	3.29494491	3.29494491	3.29494491	3.29494491
	$\tilde{I}_Q$	0.68342354	0.68342358	0.68342358	0.68342358	0.68342358
	$\tilde{I}_E$	0.02412303	0.02412304	0.02412304	0.02412304	0.02412304
	$CPU(s)$	4.696384	5.909668	11.266306	21.284657	42.356911
10	$L_2 \times 10^4$	1.613476	1.125793	1.005221	0.975219	0.967729
	$L_\infty \times 10^4$	0.731760	0.518334	0.464972	0.451630	0.448294
	$\tilde{I}_M$	3.29495043	3.29495043	3.29495043	3.29495043	3.29495043
	$\tilde{I}_Q$	0.68342353	0.68342358	0.68342358	0.68342358	0.68342358
	$\tilde{I}_E$	0.02412303	0.02412304	0.02412304	0.02412304	0.02412304
	$CPU(s)$	5.400687	7.188046	13.736312	27.114465	52.467842

Çizelge 5.11 : Problem 1 (Durum 3): $c = 0.1$, $x_0 = 40$, çeşitli h ve k için farklı t zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları.

t	h	k	Mevcut		[45]	
			L_2	L_∞	L_2	L_∞
2	0.1	0.1	$1.367131e-04$	$6.502845e-05$	0.039859	0.018973
4			$2.707443e-04$	$1.305642e-04$	0.036136	0.015780
6			$4.003208e-04$	$1.904209e-04$	0.032839	0.013296
8			$5.247821e-04$	$2.439427e-04$	0.030230	0.011791
10			$6.442224e-04$	$2.923367e-04$	0.028541	0.011065
t	h	k	Mevcut		[54]	
			L_2	L_∞	L_2	L_∞
5	0.1	0.01	$2.059764e-04$	$1.032478e-04$	$0.16e-04$	$0.09e-04$
10			$3.875697e-04$	$1.798934e-04$	$0.27e-04$	$0.13e-04$
15			$5.474190e-04$	$2.395837e-04$	$0.36e-04$	$0.16e-04$
20			$6.923995e-04$	$2.907228e-04$	$0.44e-04$	$0.19e-04$
t	h	k	Mevcut		[59]	
			L_2	L_∞	L_2	L_∞
5	0.2	0.01	$8.193412e-04$	$4.101786e-04$	$0.040e-04$	$0.029e-04$
10			$1.540357e-03$	$7.146562e-04$	$0.075e-04$	$0.035e-04$
15			$2.174188e-03$	$9.510706e-04$	$0.101e-04$	$0.036e-04$
20			$2.748542e-03$	$1.153141e-03$	$0.120e-04$	$0.066e-04$
t	h	k	Mevcut		[65]	
			L_2	L_∞	L_2	L_∞
2	0.1	0.05	$9.701678e-05$	$4.794370e-05$	$3.618557e-05$	$1.747289e-05$
4			$1.914554e-04$	$9.551581e-05$	$7.126962e-05$	$3.143534e-05$
6			$2.817933e-04$	$1.376258e-04$	$1.060434e-04$	$4.661107e-05$
8			$3.676453e-04$	$1.743790e-04$	$1.401759e-04$	$6.109345e-05$
10			$4.492746e-04$	$2.071708e-04$	$1.736471e-04$	$7.520650e-05$

Bu durum için ayrıca h ve k 'nın çeşitli değerleri için farklı t bitiş zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları [45, 54, 59, 65] referanslarında verilen sonuçlarla Çizelge 5.11'de karşılaştırıldı. Çizelgeye bakıldığında mevcut şemadan hesaplanan hata normlarının büyük t zamanlarında da yeterince küçük olduğu, h ve k 'nın küçük değerlerinde hata normlarının gittikçe küçülerek sunulan şemadan beklenen kararlılığı sergilediği, sadece $h = k = 0.1$ değerleri için [45] çalışmasında verilenlerden daha iyi sonuçlar elde edildiği görüldü.

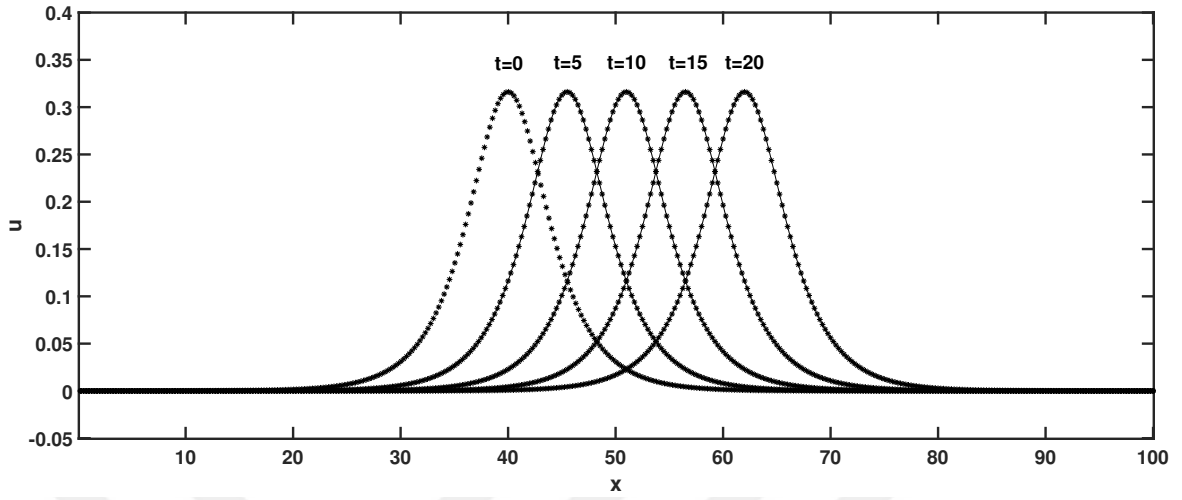
Çizelge 5.12 : Problem 1 (Durum 3): $c = 0.1$, $x_0 = 40$ ve farklı $h = k$ 'lar için farklı t zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ve yakınsaklık mertebesi.

t	$h = k$	L_2	$Mertebe(L_2)$	L_∞	$Mertebe(L_\infty)$
2	0.4	$2.157869e-03$	—	$1.025302e-03$	—
	0.2	$5.453312e-04$	1.9844	$2.592965e-04$	1.9834
	0.1	$1.367131e-04$	1.9960	$6.502845e-05$	1.9955
	0.05	$3.423353e-05$	1.9977	$1.627184e-05$	1.9987
	0.025	$8.696167e-06$	1.9770	$4.069120e-06$	1.9996
6	0.4	$6.302601e-03$	—	$2.973580e-03$	—
	0.2	$1.596062e-03$	1.9814	$7.580673e-04$	1.9718
	0.1	$4.003208e-04$	1.9953	$1.904209e-04$	1.9931
	0.05	$1.002493e-04$	1.9976	$4.765273e-05$	1.9986
	0.025	$2.547936e-05$	1.9762	$1.191635e-05$	1.9996
10	0.4	$1.011168e-02$	—	$4.560490e-03$	—
	0.2	$2.566968e-03$	1.9779	$1.163532e-03$	1.9707
	0.1	$6.442224e-04$	1.9944	$2.923367e-04$	1.9928
	0.05	$1.613476e-04$	1.9974	$7.317598e-05$	1.9982
	0.025	$4.102448e-05$	1.9756	$1.830124e-05$	1.9994

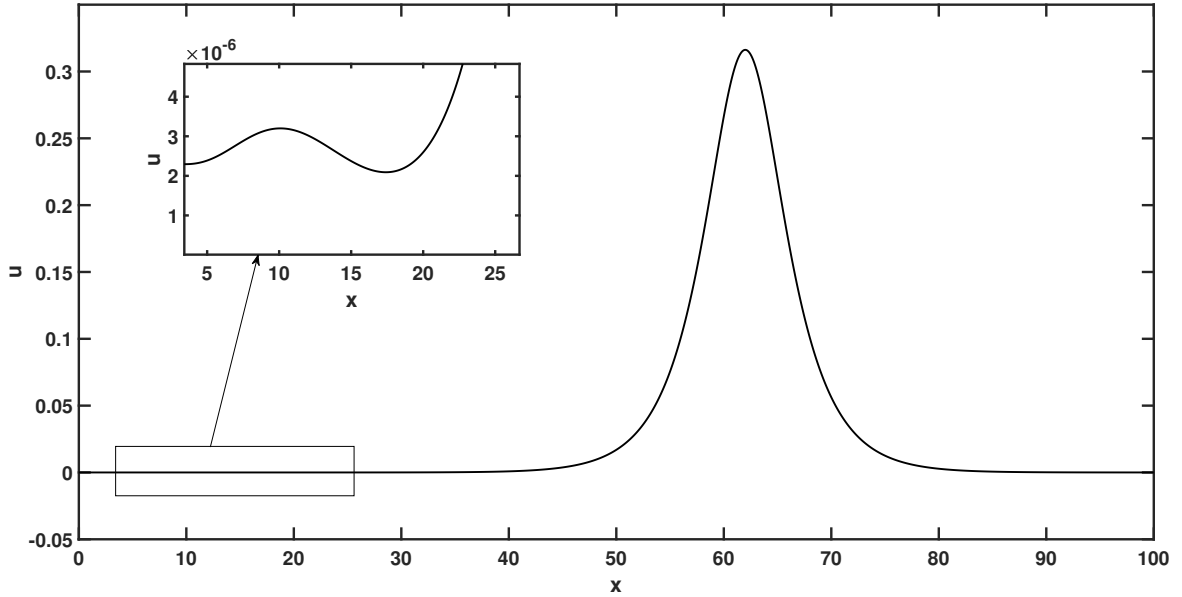
Bu durum için ilaveten $h = k$ mesh uzunluklarının 0.4'ten 0.025'e yarılayarak giden dört farklı değerleri için $t = 2, 6, 10$ bitiş zamanlarında sunulan şemadan elde edilen ayırık noktalarla ve bunlara karşılık gelen noktalardaki analitik değerlerin kullanılmasıyla hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte bu normlardaki hatanın yakınsaklık mertebesi Çizelge 5.12'de verildi. Bu çizelgeden her bir bitiş zamanında grid uzunlukları küçülürken L_2 ve L_∞ hata normlarında gittikçe küçüldüğü ve bu normlarda hesaplanan hatanın yakınsaklık mertebesinin gerçek değeri olan $p = 2$ 'ye oldukça yakın değerler olduğu açıkça görülmektedir. Yukarıda da belirtildiği üzere bu sonuçlar kullanılan yöntemin güvenilirliği ve doğruluğu ile birlikte etkinliğinin bir kanıtı olarak karşımıza çıkar.

Sunulan şemadan elde edilen noktasal çözümlerin sürekliliğini ve problemin fiziksel davranışını ne kadar doğrulukta sergilediğini göstermek için $h = 0.05$, $k = 0.0125$ ve farklı t zamanlarında nümerik ve analitik çözümlerin dalga grafikleri Şekil 5.5'te verildi. Şekilden her iki çözümün her bir t bitiş zamanlarında hemen hemen şekillerini koruduğu, artan t zamanlarında ilerleyerek yollarına devam ettikleri ancak grafikleri her ne kadar üst üste gelmiş gibi görünse de Şekil 5.6'da bunların karşılık gelen zamanlardaki amplitüdlerinin çok az da olsa farklılıklar gösterdiği ve arkalarında oldukça küçük dalgacıklar bıraktığı gözlemlendi. Örneğin, Şekil 5.5'ten $t = 5$ ve $t = 20$ zamanlarında nümerik çözümlerden elde edilen dalga grafiklerinin

amplitüdleri sırasıyla $A = 0.316221$ ve $A = 0.316201$ iken herhangi bir t zamanındaki dalganın analitik olarak amplitüd değeri $A = 0.316228$ 'dir.



Şekil 5.5 : Problem 1 (Durum 3): $h = 0.05$ ve $k = 0.0125$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik (*) ve analitik (-) çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.



Şekil 5.6 : Problem 1 (Durum 3): $h = 0.05$ ve $k = 0.0125$ için $t = 20$ 'de hesaplanan nümerik çözüm ve arkasında bıraktığı dalgacıkların büyütülmüş görseli.

5.1.2 Problem 2: İki soliter dalgaının etkileşimi

Bu problem için c_1, c_2, x_1 ve x_2 parametrelerinin ve $x \in [x_l, x_r]$ aralığının farklı üç durumu ele alındı. h ve k adım uzunluklarının çeşitli değerleri için $t = 0(2)20$ zamanlarında sunulan nümerik şemadan elde edilen kütle, moment ve enerji korunumları olarak bilinen üç değişmez $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ ile gösterilen yaklaşık değerleri hesaplandı. Bilindiği üzere bu problemin tam çözümü literatürde mevcut değildir. Bu nedenle sunulan şemanın doğruluğu ve güvenilirliğinden emin olmak için elde edilen sonuçlar diğer bilim insanlarının literatürde karşılaşılan çalışmalarında verdikleri sonuçlarla karşılaştırıldı.

5.1.2.1 Durum 1: $c_1 = 4, c_2 = 1, x_1 = 25, x_2 = 55, [x_l, x_r] = [0, 250]$.

Bu durum için önce $k = 0.025$ zaman adım uzunluğu sabit seçilerek farklı $h = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4$ konum adım uzunlukları; $h = 0.2$ konum adım uzunluğu sabit alınarak farklı $k = 0.00625, 0.0125, 0.025, 0.05$ değerleri için $t = 0(2)20$ zamanlarında elde edilen $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları Çizelge 5.13 ve Çizelge 5.14'te listelendi. Çizelgelerden farklı h ve k 'lar için herhangi bir t zamanında hesaplanan invaryantların neredeyse değişmeden sabit kaldığı ve gerçek değeriyle oldukça iyi uyum içinde olduğu açıkça görülmektedir. Buradan sunulan şemanın büyük bitiş zamanlarında da invaryantları koruduğu açıktır. Örneğin, çizelgelerden $t = 20$ zamanında $h = 0.2$ ve $k = 0.025$ adım uzunlukları için hesaplanan yaklaşık invaryant değerleri $\tilde{I}_M = 11.46769768, \tilde{I}_Q = 14.54715988, \tilde{I}_E = 22.74087573$ iken analitik değerleri ($t = 0$ 'da) $I_M = 11.46769767, I_Q = 14.62924273, I_E = 22.88046615$ olup hemen hemen değişmeden sabit kalmışlardır.

Çizelge 5.13 : Problem 2 (Durum 1): $c_1 = 4$, $c_2 = 1$, $x_1 = 25$, $x_2 = 55$, $k = 0.025$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

t	$h = 0.4$			$h = 0.2$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	11.46769767	14.49858599	22.98546465	11.46769767	14.58639733	22.89800509
4	11.46769767	14.49498585	22.96785890	11.46769767	14.58163849	22.87870524
6	11.46769767	14.48405022	22.95880428	11.46769767	14.57646418	22.86007238
8	11.46769767	14.50970752	22.89891445	11.46769767	14.57748305	22.82086693
10	11.46769767	14.52136326	22.86151604	11.46769767	14.57502172	22.80242600
12	11.46769767	14.47469092	22.92002036	11.46769767	14.56429877	22.81876411
14	11.46769767	14.47447855	22.89947708	11.46769767	14.56066620	22.79873293
16	11.46769767	14.47225547	22.88066372	11.46769768	14.55639316	22.77914076
18	11.46769767	14.46885683	22.86309089	11.46769768	14.55182641	22.75992322
20	11.46769767	14.46502279	22.84601034	11.46769768	14.54715988	22.74087573
t	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	11.46769767	14.61431640	22.87024201	11.46769767	14.62171653	22.86288538
4	11.46769767	14.60934664	22.85036350	11.46769767	14.61669942	22.84285164
6	11.46769767	14.60436618	22.83045150	11.46769767	14.61166848	22.82270990
8	11.46769767	14.59911560	22.79644106	11.46769767	14.60484813	22.78999468
10	11.46769768	14.59594558	22.77995923	11.46769768	14.60168982	22.77381623
12	11.46769768	14.59287527	22.78702381	11.46769768	14.60045334	22.77863759
14	11.46769768	14.58823011	22.76720504	11.46769768	14.59554470	22.75887728
16	11.46769768	14.58340689	22.74738209	11.46769768	14.59058136	22.73899421
18	11.46769768	14.57852613	22.72770222	11.46769768	14.58562054	22.71919535
20	11.46769768	14.57363231	22.70810962	11.46769768	14.58066854	22.69946293
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 11.46769767$		$I_Q = 14.62924273$	$I_E = 22.88046615$		

Çizelge 5.14 : Problem 2 (Durum 1): $c_1 = 4, c_2 = 1, x_1 = 25, x_2 = 55, h = 0.2$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

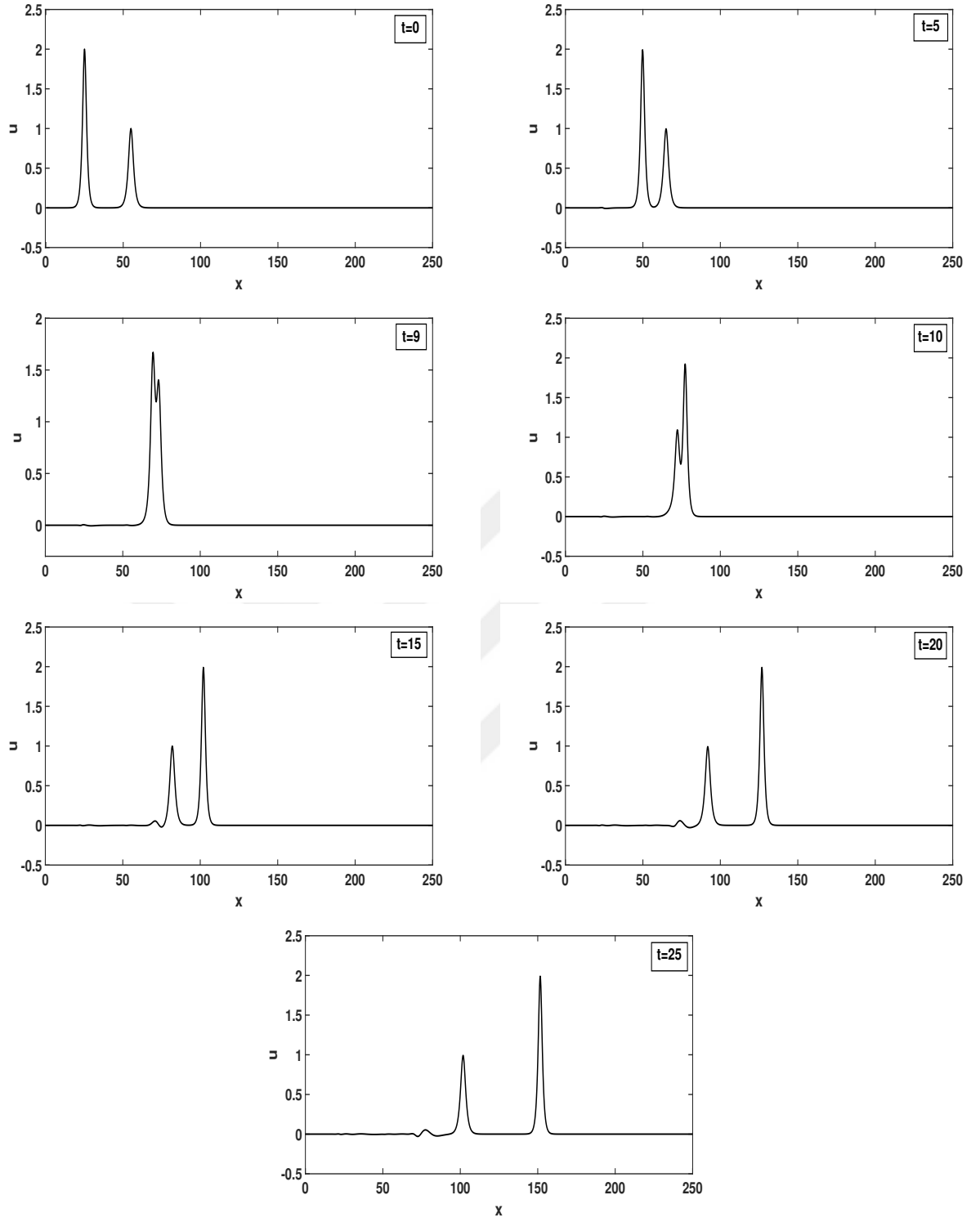
t	$k = 0.05$			$k = 0.025$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	11.46769767	14.55349705	22.76843627	11.46769767	14.58639733	22.89800509
4	11.46769767	14.51747746	22.62431613	11.46769767	14.58163849	22.87870524
6	11.46769767	14.48180265	22.48388033	11.46769767	14.57646418	22.86007238
8	11.46769767	14.44693923	22.31074733	11.46769767	14.57748305	22.82086693
10	11.46769767	14.42438499	22.12945030	11.46769767	14.57502172	22.80242600
12	11.46769767	14.40329116	22.18110815	11.46769767	14.56429877	22.81876411
14	11.46769767	14.37068200	22.04819271	11.46769767	14.56066620	22.79873293
16	11.46769768	14.33775099	21.91622586	11.46769768	14.55639316	22.77914076
18	11.46769768	14.30499883	21.78697139	11.46769768	14.55182641	22.75992322
20	11.46769768	14.27261234	21.66013584	11.46769768	14.54715988	22.74087573
t	$k = 0.0125$			$k = 0.00625$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	11.46769767	14.59091220	22.91544553	11.46769767	14.59152506	22.91772676
4	11.46769767	14.59034473	22.91296251	11.46769767	14.59148949	22.91737946
6	11.46769767	14.58930522	22.91099857	11.46769767	14.59097091	22.91752653
8	11.46769767	14.59678535	22.89639419	11.46769767	14.59962578	22.90742656
10	11.46769767	14.59527734	22.89488643	11.46769767	14.59805961	22.90844138
12	11.46769767	14.58649400	22.90698755	11.46769767	14.58935699	22.91828501
14	11.46769767	14.58701306	22.90345711	11.46769767	14.59040742	22.91686114
16	11.46769768	14.58689225	22.90051430	11.46769768	14.59081948	22.91606309
18	11.46769768	14.58646771	22.89788178	11.46769768	14.59092747	22.91557052
20	11.46769768	14.58593297	22.89536336	11.46769768	14.59092487	22.91518928
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 11.46769767$		$I_Q = 14.62924273$	$I_E = 22.88046615$		

Bu durum için ayrıca sunulan şemadan elde edilen invaryantlar bazı bilim insanlarının çoğu sonlu elemanlar üzerine inşa edilmiş teknik ve yöntemlerden buldukları sonuçlarla Çizelge 5.15'te karşılaştırıldı ve oldukça iyi uyum içerisinde oldukları görüldü. Bu sonuçlar sunulan şemanın doğruluğu ve güvenilirliğinin güçlü bir kanıtıdır.

Çizelge 5.15 : Problem 2 (Durum 1): $c_1 = 4$, $c_2 = 1$, $x_1 = 25$, $x_2 = 55$, $k = 0.025$ ve $h = 0.2$ için farklı $t = 0(2)20$ zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

t	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	11.46769767	14.58639733	22.89800509
4	11.46769767	14.58163849	22.87870524
6	11.46769767	14.57646418	22.86007238
8	11.46769767	14.57748305	22.82086693
10	11.46769767	14.57502172	22.80242600
12	11.46769767	14.56429877	22.81876411
14	11.46769767	14.56066620	22.79873293
16	11.46769768	14.55639316	22.77914076
18	11.46769768	14.55182641	22.75992322
20	11.46769768	14.54715988	22.74087573
10 [28] ($k = 0.05$)	11.466050	14.608160	22.842790
10 [72-(M-I)] ($k = 0.01$)	11.4676968	14.6271433	22.8716001
10 [72-(M-II)] ($k = 0.01$)	11.4676972	14.6262341	22.8689140
20 [1] ($M = 420$)	11.4676	14.6222	22.8846
20 [22]	11.4677	14.6292	22.8809
20 [26]	11.467701	14.583089	22.696510
20 [29-(MQ)] ($h = 0.4$)	11.4644	14.5819	22.6927
20 [29-(G)] ($h = 0.4$)	11.4677	14.5834	22.6978
20 [29-(IMQ)] ($h = 0.4$)	11.4602	14.5708	22.6524
20 [29-(IQ)] ($h = 0.4$)	11.4698	14.5811	22.6859
20 [31]	11.4677	14.6299	22.8806
20 [35]	11.4691886	14.6331334	22.8764330
20 [36]	11.4661	14.6249	22.8631
20 [40]	11.4691	14.6331	22.8763
20 [51-(First)]	11.4676541	14.6292086	22.8803901
20 [51-(Second)]	11.4676452	14.6309639	22.8786025
20 [54]	11.4662	14.6253	22.8650
20 [56]	11.4677	14.5830	22.6965
20 [59]	11.4676	14.6309	22.8786
20 [61]	11.4692	14.6382	22.9162
20 [65] ($M = 400$)	11.4674483	14.5831979	22.6975609
20 [66]	11.4676977	14.62927316	22.8804154
20 [68] ($M = 300, k = 0.02$)	11.4651	14.5356	22.7178
20 [69-(SBCM1)]	11.467700	14.629287	22.885799
20 [69-(SBCM2)]	11.467701	14.629190	22.874809
20 [77]	11.46769804	14.62924273	22.88046615
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 11.46769767$	$I_Q = 14.62924273$	$I_E = 22.88046615$

Ele alınan bu durum için konum ve adım uzunlukları $h = 0.2$ ve $k = 0.025$ 'te elde edilen nümerik çözümlerin sürekliliğini ve iki soliter dalganın artan zamanla hareketini yani fiziksel davranışlarını göstermek için Şekil 5.7'de grafikleri verildi. Şekilden başlangıçta ($t = 0$ zamanında) soldaki hızı büyük olan yani büyük amplitüdlü dalga zaman arttıkça başlangıçta sağdaki hızı küçük olan yani küçük amplitüdlü dalga ile etkileşime girdiği ve daha sonra birbirlerinden ayrılarak yollarına devam ettikleri, küçük dalganın büyük dalganın önüne geçtiği görülmektedir. Yine şekilden artan zamanlarda dalgaların hemen hemen şekillerini koruyarak ve arkalarında oldukça çok küçük dalgacıklar bırakarak ilerledikleri açıktır. Örneğin, $t = 0$ başlangıç zamanında $x_1 = 25$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 2$, $x_2 = 55$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 1$ olup dalgaların toplam amplitüdü 3 iken; $t = 5$ zamanı için $x_1 = 50$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 1.96931$, $x_2 = 65$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.99695$ olup dalgaların toplam amplitüdü 2.96626; $t = 15$ zamanı için $x_1 = 102$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 1.99048$, $x_2 = 82$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.99977$ olup dalgaların toplam amplitüdü 2.9903; $t = 25$ zamanı için $x_1 = 151.6$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 1.98984$, $x_2 = 101.8$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.99258$ olup dalgaların toplam amplitüdü 2.9824'tür. Bu ölçümlerden de kolayca anlaşılacağı üzere ilerleyen zamanlarda dalgalar arkalarında çok küçük dalga parçacıkları yani dalgacıklar bırakır. Bu örnekte ele alınan problem iki soliter dalganın hareketi problemi olduğu için grafiklerinin soliter dalga davranışlarını sergileyecekleri beklenen durumdur.



Şekil 5.7 : Problem 2 (Durum 1): $h = 0.2$ ve $k = 0.025$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.

5.1.2.2 Durum 2: $c_1 = 1, c_2 = 0.5, x_1 = 20, x_2 = 30, [x_l, x_r] = [0, 100]$.

Bu durum için önce $k = 0.01$ zaman adım uzunluğu sabit alınarak farklı $h = 0.025, 0.05, 0.1, 0.2$ konum adım uzunlukları; $h = 0.1$ konum adım uzunluğu sabit seçilerek farklı $k = 0.0025, 0.005, 0.01, 0.02$ değerleri için $t = 0(2)20$ zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryant değerleri Çizelge 5.16 ve Çizelge 5.17’de verildi. Çizelgeler incelendiğinde değişen h ve k adım uzunlukları için farklı t zamanlarında invaryantların hemen hemen hiç değişmediği ve analitik değerleriyle iyi uyum içinde olduğu söylenebilir. Bu ise elde edilen şemanın uzun zamanlarda invaryantları koruduğunu gösterir. Örneğin, çizelgelerden $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ adım uzunlukları için $t = 20$ zamanındaki invaryantları $\tilde{I}_M = 8.29055006, \tilde{I}_Q = 5.29552593, \tilde{I}_E = 1.88416539$ dır ve bu sonuçlar $t = 0$ ’da hesaplanan analitik değerlerle $I_M = 8.29053243, I_Q = 5.22433254, I_E = 1.79911374$ iyi derecede uyum içindedir.

Çizelge 5.16 : Problem 2 (Durum 2): $c_1 = 1, c_2 = 0.5, x_1 = 20, x_2 = 30, k = 0.01$ ve farklı h ’lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M, \tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

t	$h = 0.2$			$h = 0.1$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	8.29053432	5.29220357	1.88746654	8.29053457	5.29579510	1.88387582
4	8.29053604	5.29288319	1.88676126	8.29053662	5.29596333	1.88368164
6	8.29053774	5.29372255	1.88588949	8.29053878	5.29616238	1.88345003
8	8.29053933	5.29439638	1.88518790	8.29054097	5.29631931	1.88326521
10	8.29054068	5.29432724	1.88525465	8.29054299	5.29629818	1.88328401
12	8.29054172	5.29350810	1.88609951	8.29054475	5.29609355	1.88351498
14	8.29054251	5.29252941	1.88711157	8.29054628	5.29585117	1.88379141
16	8.29054314	5.29181465	1.88785168	8.29054764	5.29567522	1.88399309
18	8.29054367	5.29140525	1.88827617	8.29054889	5.29557502	1.88410853
20	8.29054415	5.29120367	1.88848551	8.29055006	5.29552593	1.88416539
t	$h = 0.05$			$h = 0.025$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	8.29053471	5.29672616	1.88294497	8.29053479	5.29696104	1.88271014
4	8.29053695	5.29676172	1.88288339	8.29053713	5.29696313	1.88268202
6	8.29053941	5.29680305	1.88280946	8.29053975	5.29696517	1.88264736
8	8.29054198	5.29683508	1.88274950	8.29054254	5.29696626	1.88261833
10	8.29054447	5.29682918	1.88275308	8.29054531	5.29696438	1.88261791
12	8.29054677	5.29678437	1.88282440	8.29054795	5.29695991	1.88264891
14	8.29054889	5.29673199	1.88291100	8.29055044	5.29695541	1.88268768
16	8.29055088	5.29669421	1.88297461	8.29055285	5.29695240	1.88271655
18	8.29055280	5.29667278	1.88301132	8.29055523	5.29695075	1.88273348
20	8.29055467	5.29666226	1.88302961	8.29055759	5.29694990	1.88274211
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 8.29053243$		$I_Q = 5.22433254$	$I_E = 1.79911374$		

Çizelge 5.17 : Problem 2 (Durum 2): $c_1 = 1$, $c_2 = 0.5$, $x_1 = 20$, $x_2 = 30$, $h = 0.1$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

t	$k = 0.02$			$k = 0.01$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	8.29053457	5.29577065	1.88383675	8.29053457	5.29579510	1.88387582
4	8.29053662	5.29590964	1.88358992	8.29053662	5.29596333	1.88368164
6	8.29053878	5.29607397	1.88329238	8.29053878	5.29616238	1.88345003
8	8.29054097	5.29620219	1.88305058	8.29054097	5.29631931	1.88326521
10	8.29054299	5.29617873	1.88306302	8.29054299	5.29629818	1.88328401
12	8.29054475	5.29600009	1.88334486	8.29054475	5.29609355	1.88351498
14	8.29054628	5.29579046	1.88368756	8.29054628	5.29585117	1.88379141
16	8.29054764	5.29563798	1.88393883	8.29054764	5.29567522	1.88399309
18	8.29054889	5.29554998	1.88408275	8.29054889	5.29557502	1.88410853
20	8.29055006	5.29550515	1.88415312	8.29055006	5.29552593	1.88416539
t	$k = 0.005$			$k = 0.0025$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	8.29053457	5.29580066	1.88388505	8.29053457	5.29580198	1.88388729
4	8.29053662	5.29597575	1.88370360	8.29053662	5.29597873	1.88370897
6	8.29053878	5.29618314	1.88348816	8.29053878	5.29618817	1.88349753
8	8.29054097	5.29634701	1.88331739	8.29054097	5.29635373	1.88333024
10	8.29054299	5.29632626	1.88333761	8.29054299	5.29633305	1.88335080
12	8.29054475	5.29611488	1.88355564	8.29054475	5.29611996	1.88356557
14	8.29054628	5.29586395	1.88381517	8.29054628	5.29586685	1.88382083
16	8.29054764	5.29568168	1.88400401	8.29054764	5.29568293	1.88400641
18	8.29054889	5.29557787	1.88411178	8.29054889	5.29557815	1.88411220
20	8.29055006	5.29552711	1.88416466	8.29055006	5.29552690	1.88416401
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 8.29053243$		$I_Q = 5.22433254$	$I_E = 1.79911374$		

Bu durum için ayrıca mevcut şema kullanılarak elde edilen invaryant değerleri diğer bilim insanlarının verdikleri sonuçlarla Çizelge 5.18'de karşılaştırıldı ve sonuçların birbirleriyle iyi uyum içinde olduğu görüldü.

Çizelge 5.18 : Problem 2 (Durum 2): $c_1 = 1$, $c_2 = 0.5$, $x_1 = 20$, $x_2 = 30$, $k = 0.01$ ve $h = 0.1$ için farklı $t = 0(2)20$ zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

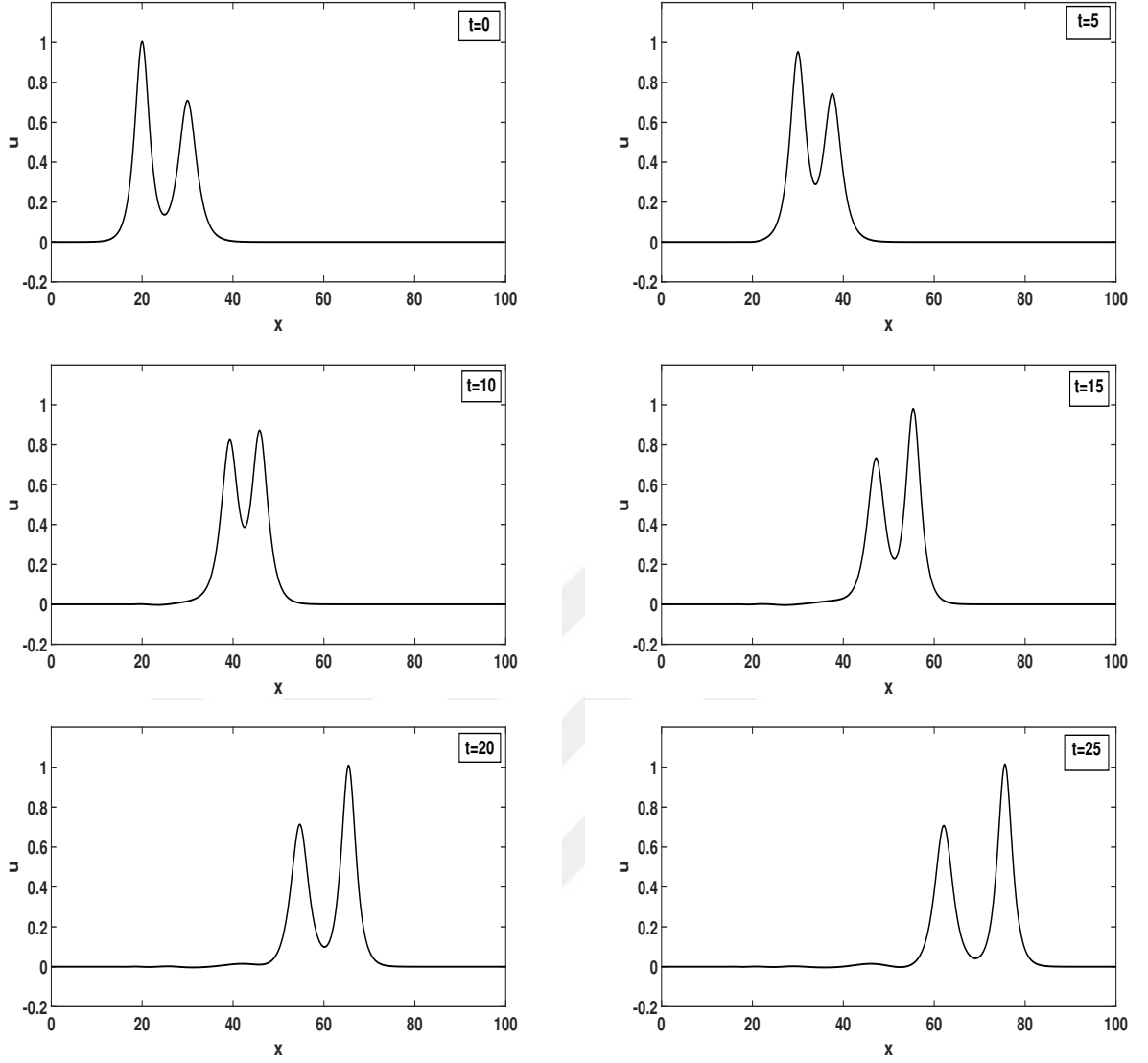
t	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	8.29053457	5.29579510	1.88387582
4	8.29053662	5.29596333	1.88368164
6	8.29053878	5.29616238	1.88345003
8	8.29054097	5.29631931	1.88326521
10	8.29054299	5.29629818	1.88328401
12	8.29054475	5.29609355	1.88351498
14	8.29054628	5.29585117	1.88379141
16	8.29054764	5.29567522	1.88399309
18	8.29054889	5.29557502	1.88410853
20	8.29055006	5.29552593	1.88416539
10 [43]	8.29055	5.29545	1.88309
20 [44-(CN)] ($k = 0.02$)	8.280408	5.227425	1.792428
20 [44-(BDF2)] ($k = 0.02$)	8.290532	5.228086	1.792958
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 8.29053243$	$I_Q = 5.22433254$	$I_E = 1.79911374$

Bu durum için ilaveten bu problemin analitik çözümü mevcut olmadığı için (5.0.2) ile verilen Richardson ekstrapolasyon yaklaşımı yardımıyla $h = k$ için bazı mesh noktalarında hesaplanan yaklaşık sayısal sonuçlar kullanılarak şemanın doğruluk mertebesi Çizelge 5.19’da sunuldu. Çizelgeye bakıldığında şemanın analitik doğruluk mertebesi olan $p = 2$ ’nin civarında sonuçlar verdiği açıkça görülmektedir.

Çizelge 5.19 : Problem 2 (Durum 2): $c_1 = 1$, $c_2 = 0.5$, $x_1 = 20$, $x_2 = 30$ ve farklı $h = k$ 'lar için farklı mesh noktalarında hesaplanan yaklaşık sayısal sonuçlar ve yakınsaklık mertebesi.

(x_m, t_n)	$h = k$	$u(x_m, t_n)$	$p = \log_2 \left \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_2} \right $
(40, 5)	0.1	$u_1 = 0.3386027541$	1.986
	0.05	$u_2 = 0.3403336819$	
	0.025	$u_3 = 0.3407707317$	
(50, 5)	0.1	$u_1 = 0.0010553648$	2.007
	0.05	$u_2 = 0.0010535633$	
	0.025	$u_3 = 0.0010531152$	
(60, 5)	0.1	$u_1 = 0.0000032509$	2.000
	0.05	$u_2 = 0.0000032385$	
	0.025	$u_3 = 0.0000032354$	
(40, 10)	0.1	$u_1 = 0.7442602686$	2.083
	0.05	$u_2 = 0.7556843864$	
	0.025	$u_3 = 0.7583805683$	
(50, 10)	0.1	$u_1 = 0.1216841189$	1.971
	0.05	$u_2 = 0.1237806893$	
	0.025	$u_3 = 0.1243154530$	
(60, 10)	0.1	$u_1 = 0.0002764373$	1.878
	0.05	$u_2 = 0.0002765990$	
	0.025	$u_3 = 0.0002766430$	
(40, 15)	0.1	$u_1 = 0.0313428363$	2.212
	0.05	$u_2 = 0.0308088105$	
	0.025	$u_3 = 0.0306935461$	
(50, 15)	0.1	$u_1 = 0.2954349101$	1.955
	0.05	$u_2 = 0.3014484434$	
	0.025	$u_3 = 0.3029995376$	
(60, 15)	0.1	$u_1 = 0.0760847899$	1.956
	0.05	$u_2 = 0.0797956434$	
	0.025	$u_3 = 0.0807521402$	
(40, 20)	0.1	$u_1 = 0.0121231040$	1.934
	0.05	$u_2 = 0.0130221812$	
	0.025	$u_3 = 0.0132574641$	
(50, 20)	0.1	$u_1 = 0.0873713657$	2.078
	0.05	$u_2 = 0.0826442583$	
	0.025	$u_3 = 0.0815247316$	
(60, 20)	0.1	$u_1 = 0.1023769385$	2.290
	0.05	$u_2 = 0.1000851574$	
	0.025	$u_3 = 0.0996164788$	

Ele alınan bu durum için konum ve zaman adım uzunlukları sırasıyla $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ olarak seçilerek nümerik çözümlerin sürekliliğini, iki soliter dalganın etkileşimini ve ilerleyen hareketlerini gözlemlemek için $t = 0(5)25$ bitiş zamanlarındaki grafikleri Şekil 5.8’de verildi. Grafikler incelendiğinde $t = 0$ ’da hızı büyük olan yani büyük genlikli dalga ile genliği küçük olan dalganın etkileşime girdiği ve ilerleyen zamanlarda iki soliter dalganın ayrıldığı ve arkalarında dalgacıklar bıraktığı gözlemlendi. Şekilden görüldüğü üzere soliter dalgaların etkileşimden sonra hemen hemen genliklerini koruyarak ilerledikleri görüldü. Örneğin, $t = 0$ zamanında $x_1 = 20$ ’de dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 1.0044$, $x_2 = 30$ ’da dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.7088$ olup dalgaların toplam amplitüdü 1.7132; $t = 5$ zamanında $x_1 = 30$ ’da dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 0.9532$, $x_2 = 37.6$ ’da dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.7436$ olup dalgaların toplam amplitüdü 1.6968; $t = 15$ zamanında $x_1 = 55.4$ ’te dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 0.9812$, $x_2 = 47.2$ ’de dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.7333$ olup dalgaların toplam amplitüdü 1.7145; $t = 25$ zamanında $x_1 = 75.6$ ’da dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 1.0147$, $x_2 = 62.1$ ’de dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.7073$ olup dalgaların toplam amplitüdü 1.7220’dir.



Şekil 5.8 : Problem 2 (Durum 2): $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.

5.1.2.3 Durum 3: $c_1 = 0.2$, $c_2 = 0.1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$, $[x_l, x_r] = [0, 100]$.

Bu durum için önce $k = 0.1$ zaman adım uzunluğu sabit tutularak farklı $h = 0.025, 0.05, 0.1, 0.2$ konum adım uzunlukları; $h = 0.1$ konum adım uzunluğu sabit alınarak farklı $k = 0.025, 0.05, 0.1, 0.2$ değerleri için $t = 0(2)20$ zamanlarında elde edilen $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryant değerleri Çizelge 5.20 ve Çizelge 5.21’de verildi. Çizelgelerden açıkça görüleceği üzere artan zamanlarda korunum sabitlerindeki değişim oldukça küçük olup analitik değerleri ile de iyi uyum içindedir.

Çizelge 5.20 : Problem 2 (Durum 3): $c_1 = 0.2$, $c_2 = 0.1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$, $k = 0.1$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

t	$h = 0.2$			$h = 0.1$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	6.73588686	1.73865109	0.10506878	6.73622906	1.73880642	0.10491497
4	6.73868912	1.73865652	0.10506269	6.73946167	1.73880866	0.10491373
6	6.74094178	1.73866063	0.10505650	6.74233537	1.73881007	0.10491218
8	6.74293518	1.73866396	0.10505057	6.74511190	1.73881114	0.10491070
10	6.74465683	1.73866673	0.10504474	6.74772988	1.73881180	0.10490919
12	6.74606027	1.73866908	0.10503883	6.75009088	1.73881198	0.10490747
14	6.74715841	1.73867123	0.10503270	6.75216683	1.73881171	0.10490550
16	6.74801981	1.73867329	0.10502640	6.75400126	1.73881110	0.10490333
18	6.74872459	1.73867510	0.10502025	6.75566154	1.73881024	0.10490104
20	6.74932529	1.73867659	0.10501441	6.75719258	1.73880920	0.10489868
t	$h = 0.05$			$h = 0.025$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	6.73641656	1.73885428	0.10486793	6.73651474	1.73888345	0.10483917
4	6.73990363	1.73885637	0.10486777	6.74014027	1.73888575	0.10483932
6	6.74316339	1.73885794	0.10486734	6.74361573	1.73888770	0.10483927
8	6.74645505	1.73885943	0.10486709	6.74720381	1.73888979	0.10483946
10	6.74970081	1.73886071	0.10486686	6.75082268	1.73889184	0.10483976
12	6.75277982	1.73886158	0.10486647	6.75434354	1.73889360	0.10483994
14	6.75564328	1.73886198	0.10486583	6.75770951	1.73889499	0.10483989
16	6.75831957	1.73886199	0.10486497	6.76094295	1.73889604	0.10483965
18	6.76086600	1.73886171	0.10486399	6.76409727	1.73889686	0.10483931
20	6.76331961	1.73886120	0.10486293	6.76720643	1.73889751	0.10483891
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 6.73637250$		$I_Q = 1.71765472$	$I_E = 0.10032726$		

Çizelge 5.21 : Problem 2 (Durum 3): $c_1 = 0.2$, $c_2 = 0.1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$, $h = 0.1$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

t	$k = 0.2$			$k = 0.1$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	6.73623025	1.73879333	0.10491024	6.73622906	1.73880642	0.10491497
4	6.73946232	1.73878210	0.10490395	6.73946167	1.73880866	0.10491373
6	6.74233537	1.73877006	0.10489720	6.74233537	1.73881007	0.10491218
8	6.74511159	1.73875779	0.10489049	6.74511190	1.73881114	0.10491070
10	6.74772965	1.73874520	0.10488373	6.74772988	1.73881180	0.10490919
12	6.75009095	1.73873217	0.10487674	6.75009088	1.73881198	0.10490747
14	6.75216713	1.73871871	0.10486947	6.75216683	1.73881171	0.10490550
16	6.75400158	1.73870493	0.10486196	6.75400126	1.73881110	0.10490333
18	6.75566169	1.73869096	0.10485434	6.75566154	1.73881024	0.10490104
20	6.75719252	1.73867690	0.10484663	6.75719258	1.73880920	0.10489868
t	$k = 0.05$			$k = 0.025$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	6.73622876	1.73880869	0.10491595	6.73622869	1.73880914	0.10491617
4	6.73946151	1.73881325	0.10491575	6.73946147	1.73881414	0.10491620
6	6.74233537	1.73881696	0.10491526	6.74233537	1.73881831	0.10491595
8	6.74511198	1.73882032	0.10491486	6.74511200	1.73882211	0.10491579
10	6.74772994	1.73882328	0.10491443	6.74772995	1.73882552	0.10491560
12	6.75009087	1.73882576	0.10491381	6.75009086	1.73882846	0.10491524
14	6.75216675	1.73882783	0.10491296	6.75216674	1.73883099	0.10491464
16	6.75400118	1.73882959	0.10491192	6.75400116	1.73883323	0.10491387
18	6.75566151	1.73883113	0.10491079	6.75566150	1.73883525	0.10491300
20	6.75719259	1.73883250	0.10490959	6.75719260	1.73883712	0.10491208
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 6.73637250$		$I_Q = 1.71765472$	$I_E = 0.10032726$		

Bu durum için ayrıca $h = 0.1$ ve $k = 0.1$ için $t = 0(2)20$ zamanlarında hesaplanan invaryant değerleri [45, 50] referanslarında verilen sonuçlarla Çizelge 5.22 ile karşılaştırıldı. Çizelgeden kolayca görüleceği üzere şemadan elde edilen invaryant değerlerinin uzun zamanlar için de korunduğu ve [45, 50] çalışmalarındaki sonuçlarla da iyi uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 5.22 : Problem 2 (Durum 3): $c_1 = 0.2$, $c_2 = 0.1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$, $k = 0.1$ ve $h = 0.1$ için farklı $t = 0(2)20$ zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

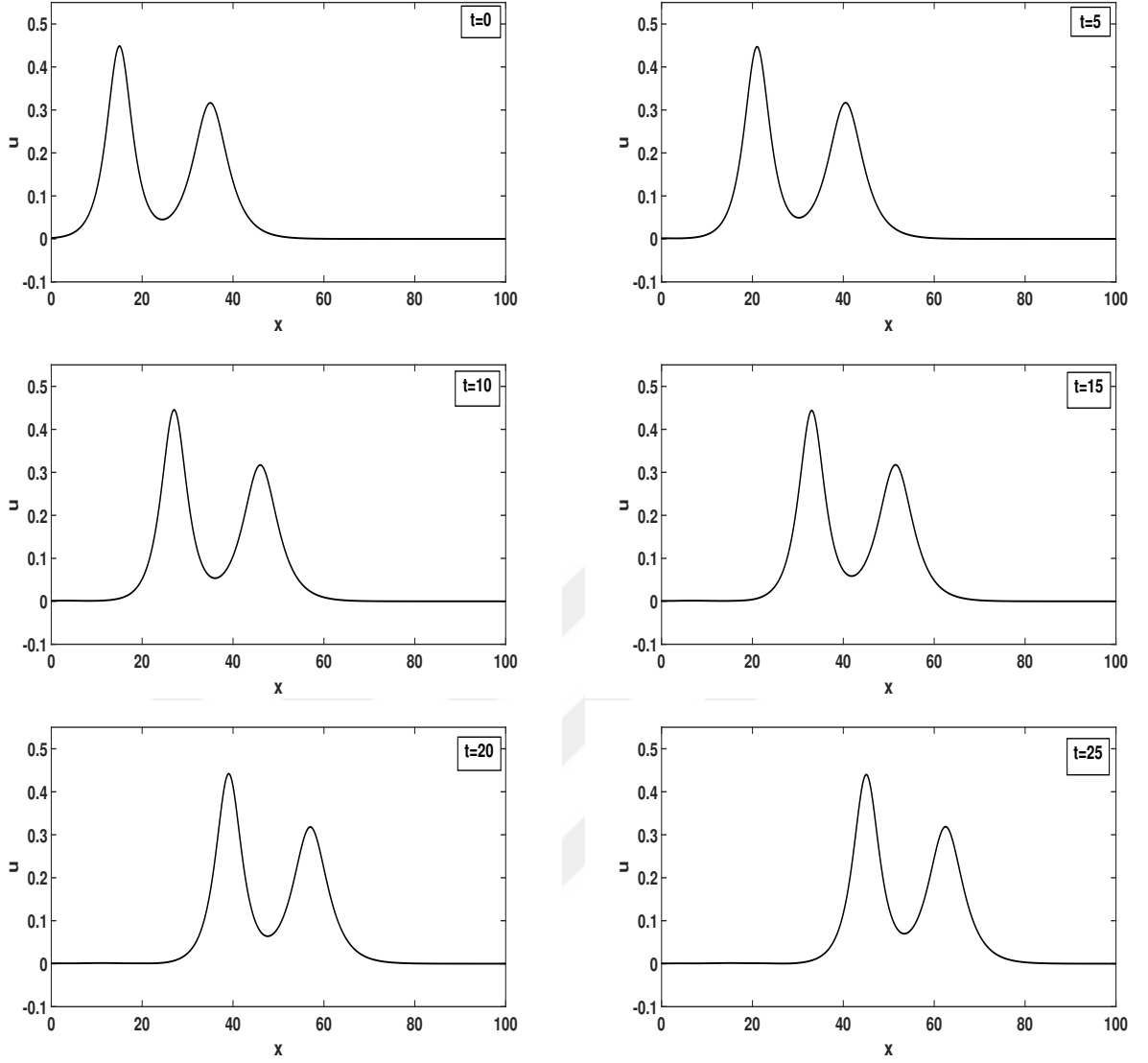
t	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	6.73622906	1.73880642	0.10491497
4	6.73946167	1.73880866	0.10491373
6	6.74233537	1.73881007	0.10491218
8	6.74511190	1.73881114	0.10491070
10	6.74772988	1.73881180	0.10490919
12	6.75009088	1.73881198	0.10490747
14	6.75216683	1.73881171	0.10490550
16	6.75400126	1.73881110	0.10490333
18	6.75566154	1.73881024	0.10490104
20	6.75719258	1.73880920	0.10489868
10 [45]	6.73138	1.70032	0.098312
20 [50]	6.821394	1.733127	0.083631
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 6.73637250$	$I_Q = 1.71765472$	$I_E = 0.10032726$

Bu durum için ilaveten $h = k$ yarılıyarak bazı mesh noktalarında hesaplanan yaklaşık sayısal sonuçlar yardımıyla doğruluk mertebesi hesaplandı ve Çizelge 5.23'te verildi. Çizelge incelendiğinde bazı (x_m, t_n) mesh noktalarında sunulan şemanın ürettiği noktasal değerler kullanılarak Richardson yaklaşımından elde edilen doğruluk mertebesinin şemanın teorik doğruluk mertebesi $p = 2$ 'nin oldukça çok yakın civarında olduğu görüldü. Açıkça bu sonuçlarda kullanılan şemanın doğruluğu ve güvenilirliğine şahitlik etmektedir.

Çizelge 5.23 : Problem 2 (Durum 3): $c_1 = 0.2$, $c_2 = 0.1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$ ve farklı $h = k$ 'lar için farklı mesh noktalarında hesaplanan yaklaşık sayısal sonuçlar ve yakınsaklık mertebesi

(x_m, t_n)	$h = k$	$u(x_m, t_n)$	$p = \log_2 \left \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_2} \right $
(40, 5)	0.1	$u_1 = 0.3133031225$	1.975
	0.05	$u_2 = 0.3132891568$	
	0.025	$u_3 = 0.3132856047$	
(50, 5)	0.1	$u_1 = 0.0359638815$	1.999
	0.05	$u_2 = 0.0359574853$	
	0.025	$u_3 = 0.0359558857$	
(60, 5)	0.1	$u_1 = 0.0017693380$	2.001
	0.05	$u_2 = 0.0017687924$	
	0.025	$u_3 = 0.0017686561$	
(40, 10)	0.1	$u_1 = 0.1051358092$	2.011
	0.05	$u_2 = 0.1050808232$	
	0.025	$u_3 = 0.1050671818$	
(50, 10)	0.1	$u_1 = 0.1739827736$	1.997
	0.05	$u_2 = 0.1740673096$	
	0.025	$u_3 = 0.1740884924$	
(60, 10)	0.1	$u_1 = 0.0092919779$	2.000
	0.05	$u_2 = 0.0092872189$	
	0.025	$u_3 = 0.0092860291$	
(40, 15)	0.1	$u_1 = 0.0719411973$	1.999
	0.05	$u_2 = 0.0720592972$	
	0.025	$u_3 = 0.0720888336$	
(50, 15)	0.1	$u_1 = 0.2879464882$	1.990
	0.05	$u_2 = 0.2877744354$	
	0.025	$u_3 = 0.2877311380$	
(60, 15)	0.1	$u_1 = 0.0485424368$	2.001
	0.05	$u_2 = 0.0485360237$	
	0.025	$u_3 = 0.0485344212$	
(40, 20)	0.1	$u_1 = 0.4122789051$	2.002
	0.05	$u_2 = 0.4131263277$	
	0.025	$u_3 = 0.4133378804$	
(50, 20)	0.1	$u_1 = 0.0852216208$	2.012
	0.05	$u_2 = 0.0851244944$	
	0.025	$u_3 = 0.0851004173$	
(60, 20)	0.1	$u_1 = 0.2209623210$	1.996
	0.05	$u_2 = 0.2211995821$	
	0.025	$u_3 = 0.2212590571$	

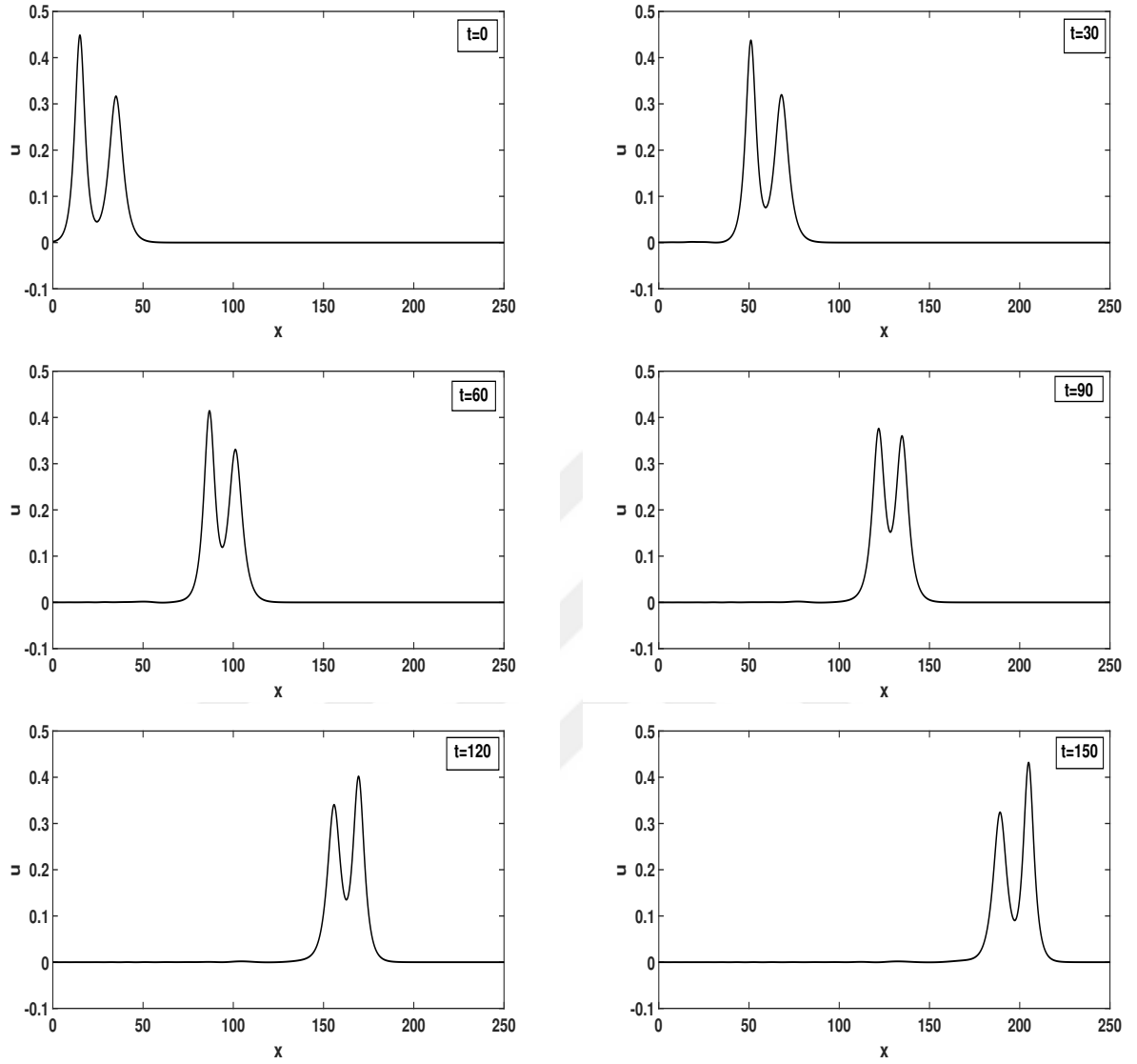
Ele alınan bu durum için konum ve adım uzunlukları $h = 0.1$ ve $k = 0.1$ 'de elde edilen nümerik çözümlerin sürekliliğini ve iki soliter dalganın artan zamanla hareketini yani fiziksel davranışlarını göstermek için Şekil 5.9'da grafikleri verildi. Şekilden artan zamanlarda dalgaların hemen hemen şekillerini koruyarak ve arkalarında oldukça çok küçük dalgacıklar bırakarak ilerledikleri açıktır. Örneğin, $t = 0$ başlangıç zamanında $x_1 = 15$ 'te konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 0.4487$, $x_2 = 35$ 'te konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.3165$ olup dalgaların toplam amplitüdü 0.7652 iken; $t = 5$ zamanı için $x_1 = 21$ 'de konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 0.4470$, $x_2 = 40.5$ 'te konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.3167$ olup dalgaların toplam amplitüdü 0.7637; $t = 15$ zamanı için $x_1 = 33$ 'te konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 0.4437$, $x_2 = 51.5$ 'te konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.3175$ olup dalgaların toplam amplitüdü 0.7612; $t = 25$ zamanı için $x_1 = 45.1$ 'de konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 0.4398$, $x_2 = 62.5$ 'te konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.3187$ olup dalgaların toplam amplitüdü 0.7585'tir. Bu ölçümlerden de kolayca anlaşılacağı üzere ilerleyen zamanlarda dalgalar arkalarında çok küçük dalga parçacıkları yani dalgacıklar bırakır. Bu örnekte ele alınan problem iki soliter dalganın hareketi problemi olduğu için grafiklerinin soliter dalga davranışlarını sergileyecekleri açıktır.



Şekil 5.9 : Problem 2 (Durum 3): $h = 0.1$ ve $k = 0.1$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.

Bu durum için seçilen $[x_l, x_r] = [0, 100]$ konum aralığında artan zamanla dalgalar hemen hemen şekillerini koruyarak fakat arkalarında çok küçük dalga kalıntıları bırakarak yollarına devam etmelerine rağmen Şekil 5.9'dan da görüldüğü üzere soldaki hızı büyük olan yani büyük amplitüdlü dalga zaman arttıkça sağdaki hızı küçük olan küçük amplitüdlü dalga ile etkileşime girmemiştir. Söz konusu dalgaların ilerleyen zamanlarda etkileşime girdiğini ve beklenen fiziksel davranışları sergilediğini göstermek için x 'in tanım aralığı $[x_l, x_r] = [0, 250]$ olarak seçildi ve t 'nin daha büyük $t = 0(30)150$ değerlerinde sunulan şemadan hesaplanan nümerik çözümlerin grafikleri Şekil 5.10'da verildi. Şekilde verilen grafiklerden soliter dalgaların ilerleyen zamanlarda beklenen fiziksel davranışları sergiledikleri, $t = 0, 30, 60$ 'da daha büyük

genliğe sahip dalga solda iken $t = 120, 150$ 'de genliği daha büyük olan dalga sağda olup $t = 90$ civarında iki soliter dalganın etkileşime girdiği açıkça görülmektedir.



Şekil 5.10 : Problem 2 (Durum 3): $h = 0.1$, $k = 0.1$ ve $[x_l, x_r] = [0, 250]$ için $t = 0(30)150$ zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.

5.1.3 Problem 3: Üç soliter dalganın etkileşimi

Bu problemin de mevcut literatürde tam çözümü olmadığından sunulan şemanın doğru çözümler ürettiğini göstermek için aşağıdaki üç durum göz önüne alındı ve hesaplanan sonuçlar diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla kıyaslandı.

5.1.3.1 Durum 1: $c_1 = 4, c_2 = 1, c_3 = 0.25, x_1 = 15, x_2 = 45, x_3 = 60, [x_l, x_r] = [0, 250]$.

Bu durum için önce $k = 0.025$ zaman adım uzunluğu sabit seçilerek farklı $h = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4$ konum adım uzunlukları; $h = 0.2$ konum adım uzunluğu sabit tutularak farklı $k = 0.00625, 0.0125, 0.025, 0.05$ değerleri için $t = 0(5)45$ zamanlarında hesaplanan invaryantların değerleri sırasıyla Çizelge 5.24 ve Çizelge 5.25'te sergilendi. Çizelgelerden invaryantların korunduğu, analitik değerleri ile uyum içerisinde olduğu ve sunulan şemanın uzun zamanlar içinde iyi sonuçlar verdiği açıktır. Örneğin, $t = 45$ zamanında $h = 0.2$ ve $k = 0.025$ değerleri için her iki çizelgeden elde edilen yaklaşık invaryant değerleri $\tilde{I}_M = 14.972866554, \tilde{I}_Q = 15.700456383, \tilde{I}_E = 22.650875671$ iken tam değerleri ($t = 0$ 'da) $I_M = 14.98010503, I_Q = 15.82181232, I_E = 22.99226955$ 'dir.

Bu durum için ayrıca önerilen şemadan hesaplanan invaryant değerleri büyük kısmı sonlu elemanlar kullanan mevcut literatürde var olan diğer araştırmacıların elde ettikleri sonuçlarla Çizelge 5.26'da verildi ve sonuçların birbirleriyle kıyaslanacak uygunlukta olduğu görüldü. Bu ise açıkça önerilen şemanın doğru sonuçlar ürettiğine dair bir delildir.

Bunlarla birlikte $h = 0.2$ ve $k = 0.0125$ için farklı t bitiş zamanlarında şemadan hesaplanan nümerik çözümlerin sürekliliği ile birlikte ilerleyen zamanlarda problemin doğru fiziksel davranışını sergilediğini göstermek için Şekil 5.11'de dalga grafikleri verildi.

Çizelge 5.24 : Problem 3 (Durum 1): $c_1 = 4$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0.25$, $x_1 = 15$, $x_2 = 45$, $x_3 = 60$, $k = 0.025$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

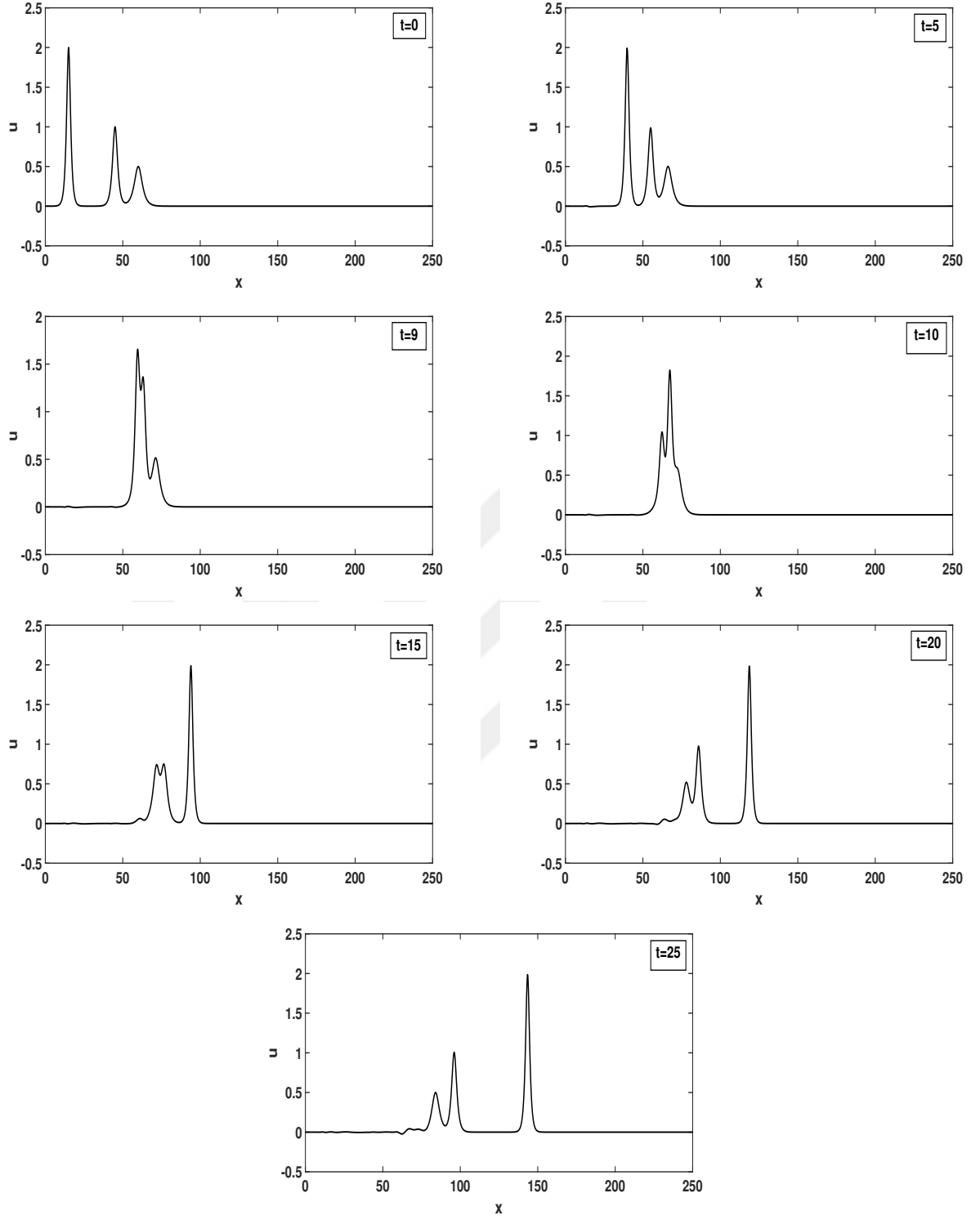
t	$h = 0.4$			$h = 0.2$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
5	14.98012936	15.70255273	23.08554253	14.98013149	15.78780287	22.99637673
10	14.98015689	15.80153562	22.89766706	14.98016128	15.80230333	22.88642275
15	14.98018391	15.70836796	23.00390925	14.98019011	15.77626862	22.92185593
20	14.98021122	15.68051918	22.98073173	14.98021902	15.75988774	22.88030327
25	14.98023570	15.66449767	22.94541997	14.98024782	15.74679262	22.83517061
30	14.98026911	15.65371551	22.90490091	14.98027746	15.73500420	22.78884085
35	14.98028348	15.64366014	22.86389024	14.98030478	15.72342866	22.74261216
40	14.98032486	15.63369633	22.82305188	14.98033649	15.71191971	22.69665723
45	14.97844575	15.62374787	22.78245663	14.97286655	15.70045638	22.65087567
t	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
5	14.98013232	15.81516345	22.96799250	14.98013262	15.82242998	22.96046691
10	14.98016277	15.80562188	22.88013726	14.98016325	15.80664185	22.87835131
15	14.98019219	15.79888850	22.89538504	14.98019282	15.80494155	22.88834789
20	14.98022167	15.78575760	22.84867510	14.98022246	15.79264893	22.84031061
25	14.98025143	15.77335059	22.80095283	14.98025246	15.78041105	22.79193179
30	14.98028087	15.76125290	22.75305407	14.98028189	15.76823210	22.74363294
35	14.98031052	15.74924732	22.70540052	14.98031206	15.75611554	22.69561515
40	14.98034008	15.73730544	22.65804638	14.98034119	15.74406215	22.64790321
45	14.96975762	15.72541879	22.61075282	14.96879131	15.73206858	22.60020502
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 14.98010503$		$I_Q = 15.82181232$	$I_E = 22.99226955$		

Çizelge 5.25 : Problem 3 (Durum 1): $c_1 = 4$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0.25$, $x_1 = 15$, $x_2 = 45$, $x_3 = 60$ $h = 0.2$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

t	$k = 0.05$			$k = 0.025$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
5	14.98013150	15.708106597	22.68040794	14.98013149	15.78780287	22.99637673
10	14.98016132	15.63915581	22.19201719	14.98016128	15.80230333	22.88642275
15	14.98019019	15.59271947	22.19001762	14.98019011	15.77626861	22.92185592
20	14.98021898	15.50709349	21.87623310	14.98021902	15.75988774	22.88030327
25	14.98024816	15.42680206	21.57080580	14.98024782	15.74679262	22.83517061
30	14.98027703	15.35018904	21.27617234	14.98027746	15.73500420	22.78884085
35	14.98030595	15.27623552	20.99321133	14.98030478	15.72342866	22.74261216
40	14.98033479	15.20468286	20.72138413	14.98033649	15.71191971	22.69665724
45	14.98034743	15.13538450	20.46001275	14.97286655	15.70045638	22.65087567
t	$k = 0.0125$			$k = 0.00625$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
5	14.98013148	15.79863219	23.03907579	14.98013148	15.80005092	23.04457404
10	14.98016126	15.82728989	22.99186753	14.98016125	15.83136082	23.00929042
15	14.98019007	15.80192455	23.02460534	14.98019006	15.80527561	23.03789939
20	14.98021901	15.79556920	23.02363209	14.98021900	15.80017984	23.04210205
25	14.98024772	15.79261442	23.01910760	14.98024768	15.79852536	23.04282504
30	14.98027754	15.79097142	23.01321782	14.98027755	15.79819718	23.04220711
35	14.98030447	15.78949203	23.00716180	14.98030437	15.79803388	23.04142229
40	14.98033687	15.78802240	23.00110073	14.98033695	15.79787966	23.04062820
45	14.95697975	15.78649875	22.99389860	14.95144981	15.79764520	23.03807587
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 14.98010503$		$I_Q = 15.82181232$	$I_E = 22.99226955$		

Çizelge 5.26 : Problem 3 (Durum 1): $c_1 = 4$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0.25$, $x_1 = 15$, $x_2 = 45$, $x_3 = 60$, $k = 0.025$ ve $h = 0.2$ için farklı $t = 0(5)45$ zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

t	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
5	14.98013149	15.78780287	22.99637673
10	14.98016128	15.80230333	22.88642275
15	14.98019011	15.77626861	22.92185592
20	14.98021902	15.75988774	22.88030327
25	14.98024782	15.74679262	22.83517061
30	14.98027746	15.73500420	22.78884085
35	14.98030478	15.72342866	22.74261216
40	14.98033649	15.71191971	22.69665724
45	14.97286655	15.70045638	22.65087567
10 [28]	14.930390	15.822500	22.964190
40 [1] ($M = 450$)	14.9785	15.7342	22.6379
40 [68]	14.9772	15.7005	22.6291
45 [22]	13.7043	15.6563	22.9303
45 [26]	14.968030	15.734374	22.596591
45 [29-(MQ)] ($h = 0.5, k = 0.01$)	14.9958	15.7415	22.6211
45 [29-(IMQ)] ($h = 0.5, k = 0.01$)	15.0130	15.7184	22.5466
45 [29-(G)] ($h = 0.5, k = 0.01$)	14.9778	15.7288	22.5911
45 [29-(IQ)] ($h = 0.5, k = 0.01$)	14.9701	15.6988	22.4515
45 [35]	14.7145273	15.4927592	23.3529062
45 [36]	14.9534	15.8290	22.9649
45 [40]	14.9461	15.8613	22.9843
45 [69]	14.980008	15.821781	22.996855
45 [77]	14.97251076	15.82181232	22.99226955
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 14.98010503$	$I_Q = 15.82181232$	$I_E = 22.99226955$



Şekil 5.11 : Problem 3 (Durum 1): $h = 0.2$ ve $k = 0.025$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.

Şekilden başlangıçtaki ($t = 0$ zamanında) üç dalga zaman ilerledikçe birbirleriyle etkileşime girdiği ve daha sonra birbirlerinden ayrılarak yollarına devam ettikleri görülmektedir. Yine şekilden ilerleyen zamanla birlikte dalgaların neredeyse şekillerini koruyarak ve arkalarında oldukça çok küçük dalgacıklar bırakarak hareket ettikleri açıktır. Örneğin, $t = 0$ başlangıç zamanında $x_1 = 15$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 2$, $x_2 = 45$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 1.0012$, $x_3 = 60$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_3 = 0.5001$ olup dalgaların toplam amplitüdü 3.5013; $t = 15$ zamanı için $x_1 = 94$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 1.9890$, $x_2 = 71.8$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.7418$, $x_3 = 76.4$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_3 = 0.7509$ olup dalgaların toplam amplitüdü 3.4817; $t = 25$ zamanı için $x_1 = 143.4$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 1.9867$, $x_2 = 96$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 1.0078$, $x_3 = 84$ merkezli dalganın ölçülen amplitüdü $A_3 = 0.5002$ olup dalgaların toplam amplitüdü 3.4947'dir. Bu değerlerden de kolayca görüldüğü gibi ilerleyen zamanlarda dalgalar arkalarında çok küçük dalga parçacıkları yani dalgacıklar bırakır. Bu örnekte ele alınan problem üç soliter dalganın hareketi problemi olduğu için grafiklerinin böyle bir davranış sergileyecekleri açıktır.

5.1.3.2 Durum 2: $c_1 = 1$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = 0.25$, $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$, $[x_l, x_r] = [0, 100]$.

Bu durum için önce $k = 0.01$ zaman adım uzunluğu sabit tutularak farklı $h = 0.025, 0.05, 0.1, 0.2$ konum adım uzunlukları; $h = 0.1$ konum adım uzunluğu sabit seçilerek farklı $k = 0.0025, 0.005, 0.01, 0.02$ değerleri için $t = 0(2)20$ zamanlarında elde edilen $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryant değerleri Çizelge 5.27 ve Çizelge 5.28'de verildi. Çizelgeler incelendiğinde değişen h ve k adım uzunlukları için farklı t zamanlarında invaryantların hemen hemen hiç değişmediği ve analitik değerleriyle iyi uyum içinde olduğu söylenebilir. Bu ise elde edilen şemanın uzun zamanlarda invaryantları koruduğunu gösterir. Örneğin, çizelgelerden $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ adım uzunlukları için $t = 20$ zamanındaki invaryantları $\tilde{I}_M = 11.83573583$, $\tilde{I}_Q = 6.64663833$, $\tilde{I}_E = 2.09160558$ olup bu sonuçlar $I_M = 11.80293979$, $I_Q = 6.41690213$, $I_E = 1.91091714$ analitik değerleriyle ($t = 0$ 'da) de iyi uyumludur.

Çizelge 5.27 : Problem 3 (Durum 2): $c_1 = 1$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = 0.25$, $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$, $k = 0.01$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

t	$h = 0.2$			$h = 0.1$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	11.80559886	6.64264193	2.09560281	11.80567964	6.64623514	2.09201041
4	11.80836193	6.64370730	2.09450991	11.80848874	6.64650336	2.09171441
6	11.81151591	6.64523648	2.09294300	11.81169009	6.64688085	2.09129898
8	11.81496575	6.64677228	2.09136917	11.81518265	6.64725854	2.09088293
10	11.81847585	6.64785233	2.09026490	11.81872929	6.64752804	2.09058891
12	11.82190750	6.64840833	2.08970151	11.82219756	6.64766653	2.09044307
14	11.82524595	6.64846165	2.08965131	11.82557639	6.64768179	2.09043105
16	11.82855477	6.64767377	2.09046267	11.82892592	6.64748737	2.09064963
18	11.83189820	6.64600368	2.09218261	11.83230714	6.64707413	2.09111402
20	11.83528873	6.64423019	2.09401079	11.83573583	6.64663833	2.09160558
t	$h = 0.05$			$h = 0.025$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	11.80572345	6.64717245	2.09107335	11.80574542	6.64742173	2.09082415
4	11.80854628	6.64723475	2.09098321	11.80857193	6.64743214	2.09078590
6	11.81176100	6.64732163	2.09085834	11.81179014	6.64744619	2.09073384
8	11.81526553	6.64740863	2.09073292	11.81529778	6.64746042	2.09068117
10	11.81882271	6.64747232	2.09064463	11.81885775	6.64747245	2.09064452
12	11.82230169	6.64750743	2.09060219	11.82233959	6.64748180	2.09062785
14	11.82569221	6.64751488	2.09059802	11.82573321	6.64748740	2.09062553
16	11.82905355	6.64747553	2.09066171	11.82909769	6.64748726	2.09065007
18	11.83244590	6.64738829	2.09080044	11.83249299	6.64748226	2.09070662
20	11.83588573	6.64729663	2.09094812	11.83593576	6.64747727	2.09076772
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 11.80293979$		$I_Q = 6.41690213$	$I_E = 1.91091714$		

Çizelge 5.28 : Problem 3 (Durum 2): $c_1 = 1$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = 0.25$, $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$, $h = 0.1$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

t	$k = 0.02$			$k = 0.01$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	11.80567985	6.64620496	2.09196488	11.80567964	6.64623514	2.09201041
4	11.80848904	6.64643609	2.09160685	11.80848874	6.64650336	2.09171441
6	11.81169053	6.64676483	2.09110824	11.81169009	6.64688085	2.09129898
8	11.81518319	6.64709362	2.09060628	11.81518265	6.64725854	2.09088293
10	11.81872996	6.64732892	2.09025323	11.81872929	6.64752804	2.09058891
12	11.82219842	6.64745164	2.09008264	11.82219756	6.64766653	2.09044307
14	11.82557740	6.64746436	2.09006541	11.82557639	6.64768179	2.09043105
16	11.82892699	6.64729138	2.09031756	11.82892592	6.64748737	2.09064963
18	11.83230828	6.64692754	2.09086748	11.83230714	6.64707413	2.09111402
20	11.83573715	6.64654440	2.09145361	11.83573583	6.64663833	2.09160558
	$k = 0.005$			$k = 0.0025$		
2	11.80567954	6.64624214	2.09202125	11.80567949	6.64624382	2.09202389
4	11.80848859	6.64651919	2.09174033	11.80848852	6.64652303	2.09174669
6	11.81168988	6.64690856	2.09134541	11.81168977	6.64691533	2.09135686
8	11.81518237	6.64729831	2.09095070	11.81518223	6.64730807	2.09096747
10	11.81872895	6.64757626	2.09067136	11.81872877	6.64758811	2.09069179
12	11.82219714	6.64771864	2.09053167	11.82219693	6.64773146	2.09055362
14	11.82557590	6.64773449	2.09052092	11.82557565	6.64774745	2.09054319
16	11.82892538	6.64753464	2.09073104	11.82892510	6.64754623	2.09075119
18	11.83230654	6.64710889	2.09117389	11.83230624	6.64711735	2.09118864
20	11.83573516	6.64665966	2.09164155	11.83573482	6.64666472	2.09165029
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 11.80293979$		$I_Q = 6.41690213$	$I_E = 1.91091714$		

Bu durum için ayrıca önerilen şemadan hesaplanan invaryant değerleri [44] referansında verilen sonuçlarla Çizelge 5.29'da karşılaştırıldı ve sonuçların birbirleriyle uyumlu olduğu görüldü. Bu ise açıkça sunulan şemanın doğru sonuçlar verdiğinin bir delilidir.

Çizelge 5.29 : Problem 3 (Durum 2): $c_1 = 1$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = 0.25$, $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$, $k = 0.01$ ve $h = 0.1$ için farklı $t = 0(2)20$ zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

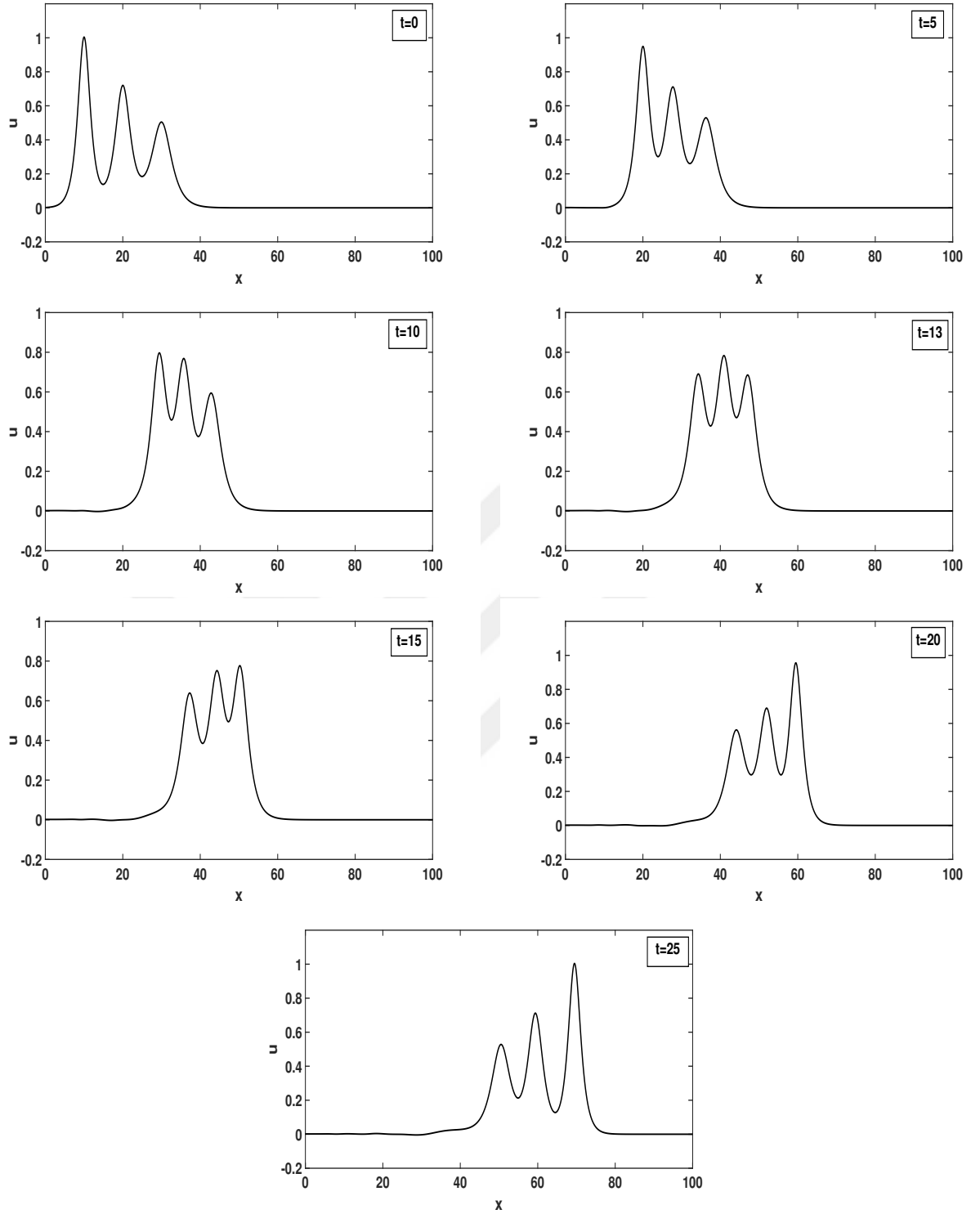
t	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	11.80567964	6.64623514	2.09201041
4	11.80848874	6.64650336	2.09171441
6	11.81169009	6.64688085	2.09129898
8	11.81518265	6.64725854	2.09088293
10	11.81872929	6.64752804	2.09058891
12	11.82219756	6.64766653	2.09044307
14	11.82557639	6.64768179	2.09043105
16	11.82892592	6.64748737	2.09064963
18	11.83230714	6.64707413	2.09111402
20	11.83573583	6.64663833	2.09160558
20 [44-(CN)]	11.802906	6.468065	1.990749
20 [44-(BDF2)]	11.802906	6.468319	1.991109
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 11.80293979$	$I_Q = 6.41690213$	$I_E = 1.91091714$

Bu durum için ilaveten üç soliter dalga probleminin analitik çözümü mevcut olmadığından doğruluk mertebesi bazı (x_m, t_n) mesh noktalarında (3.1.4) ile verilen nümerik şemadan hesaplanan yaklaşık sayısal değerleri kullanarak Richardson ekstrapolasyon yaklaşımı yardımıyla hesaplandı ve Çizelge 5.30'da listelendi. Çizelgeden şemanın doğruluk mertebesi, teorik doğruluk mertebesi olan $p = 2$ 'nin çok yakınında olduğu rahatça görülmektedir. Bu ise şemanın güvenilirliğini ve doğruluğunu destekleyen bir başka kanıttır.

Çizelge 5.30 : Problem 3 (Durum 2): $c_1 = 1$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = 0.25$, $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$ ve farklı $h = k$ 'lar için farklı mesh noktalarında hesaplanan yaklaşık sayısal sonuçlar ve yakınsak mertebesi.

(x_m, t_n)	$h = k$	$u(x_m, t_n)$	$p = \log_2 \left \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_2} \right $
(40, 5)	0.1	$u_1 = 0.1884942636$	1.991
	0.05	$u_2 = 0.1886615074$	
	0.025	$u_3 = 0.1887035831$	
(50, 5)	0.1	$u_1 = 0.0021476343$	2.001
	0.05	$u_2 = 0.0021452428$	
	0.025	$u_3 = 0.0021446453$	
(60, 5)	0.1	$u_1 = 0.0000244468$	1.996
	0.05	$u_2 = 0.0000244145$	
	0.025	$u_3 = 0.0000244064$	
(40, 10)	0.1	$u_1 = 0.3841117528$	1.930
	0.05	$u_2 = 0.3848681511$	
	0.025	$u_3 = 0.3850667036$	
(50, 10)	0.1	$u_1 = 0.0386801217$	1.972
	0.05	$u_2 = 0.0386964596$	
	0.025	$u_3 = 0.0387006250$	
(60, 10)	0.1	$u_1 = 0.0004054407$	2.002
	0.05	$u_2 = 0.0004045493$	
	0.025	$u_3 = 0.0004043267$	
(40, 15)	0.1	$u_1 = 0.3998230660$	1.918
	0.05	$u_2 = 0.4024684207$	
	0.025	$u_3 = 0.4031683942$	
(50, 15)	0.1	$u_1 = 0.7681162075$	2.097
	0.05	$u_2 = 0.7709098099$	
	0.025	$u_3 = 0.7715625842$	
(60, 15)	0.1	$u_1 = 0.0082464929$	1.955
	0.05	$u_2 = 0.0082631409$	
	0.025	$u_3 = 0.0082674344$	
(40, 20)	0.1	$u_1 = 0.1701702264$	2.053
	0.05	$u_2 = 0.1652716454$	
	0.025	$u_3 = 0.1640909042$	
(50, 20)	0.1	$u_1 = 0.4673748456$	2.038
	0.05	$u_2 = 0.4571855679$	
	0.025	$u_3 = 0.4547042730$	
(60, 20)	0.1	$u_1 = 0.8778945493$	2.100
	0.05	$u_2 = 0.9002361762$	
	0.025	$u_3 = 0.9054480693$	

Bunlarla birlikte $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ için $t = 0(5)25$ bitiş zamanlarında şemadan hesaplanan nümerik çözümlerin sürekliliği ile birlikte ilerleyen zamanlarda problemin doğru fiziksel davranışını sergilediğini göstermek için Şekil 5.12'de dalga grafikleri verildi.



Şekil 5.12 : Problem 3 (Durum 2): $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.

Şekilden başlangıçtaki ($t = 0$ zamanında) üç dalga zaman ilerledikçe birbirleriyle etkileşime girdiği ve daha sonra birbirlerinden ayrılarak yollarına devam ettikleri görülmektedir. Yine şekilden ilerleyen zamanla birlikte dalgaların neredeyse şekillerini koruyarak ve arkalarında oldukça çok küçük dalgacıklar bırakarak hareket ettikleri açıktır. Örneğin, $t = 0$ başlangıç zamanında $x_1 = 10$ 'da dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 1.0045$, $x_2 = 20$ 'da dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.7202$, $x_3 = 30$ 'daki dalganın ölçülen amplitüdü $A_3 = 0.5044$ olup dalgaların toplam amplitüdü 2.2291; $t = 15$ zamanı için $x_1 = 37.3$ 'te dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 0.6389$, $x_2 = 44.3$ 'te dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.7518$, $x_3 = 50.2$ 'de dalganın ölçülen amplitüdü $A_3 = 0.7768$ olup dalgaların toplam amplitüdü 2.1675; $t = 25$ zamanı için $x_1 = 69.5$ 'te dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 1.0047$, $x_2 = 59.4$ 'te dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.7123$, $x_3 = 50.5$ 'te dalganın ölçülen amplitüdü $A_3 = 0.5281$ olup dalgaların toplam amplitüdü 2.2451'dir. Bu değerlerden de kolayca görüldüğü gibi ilerleyen zamanlarda dalgalar arkalarında çok küçük dalga parçacıkları yani dalgacıklar bırakır. Bu örnekte ele alınan problem üç soliter dalganın hareketi problemi olduğundan grafiklerinin böyle bir davranış sergileyecekleri açıktır.

5.1.3.3 Durum 3: $c_1 = 0.6$, $c_2 = 0.3$, $c_3 = 0.15$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$, $x_3 = 60$, $[x_l, x_r] = [0, 100]$.

Bu durum için de önce $k = 0.1$ zaman adım uzunluğu sabit alınarak farklı $h = 0.025$, 0.05 , 0.1 , 0.2 konum adım uzunlukları; $h = 0.1$ konum adım uzunluğu sabit tutularak farklı $k = 0.025$, 0.05 , 0.1 , 0.2 değerleri için $t = 0(2)20$ zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invariant değerleri Çizelge 5.31 ve Çizelge 5.32'de sunuldu. Çizelgeler açıkça görüldüğü üzere değişen h ve k adım uzunlukları için artan zamanda yaklaşık invariantlardaki değişim çok az olup analitik değerleriyle ($t = 0$) iyi uyum içindedir. Bu ise elde edilen şemanın uzun zamanlarda invariantları koruduğunu gösterir. Örneğin, çizelgelerden $h = 0.1$ ve $k = 0.1$ adım uzunlukları için $t = 20$ zamanındaki invariantları $\tilde{I}_M = 10.92253883$, $\tilde{I}_Q = 4.41771054$, $\tilde{I}_E = 0.74072787$ olup bu sonuçlar $I_M = 10.92478484$, $I_Q = 4.41639540$, $I_E = 0.73956125$ analitik değerleriyle ($t = 0$ da) iyi uyumludur.

Çizelge 5.31 : Problem 3 (Durum 3): $c_1 = 0.6$, $c_2 = 0.3$, $c_3 = 0.15$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$, $x_3 = 60$, $k = 0.1$ ve farklı h 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

t	$h = 0.2$			$h = 0.1$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	10.92497411	4.41686929	0.74289851	10.92498019	4.41848685	0.74129486
4	10.92524145	4.41681040	0.74280192	10.92525027	4.41840220	0.74123636
6	10.92552349	4.41674189	0.74272354	10.92553529	4.41831781	0.74117949
8	10.92582136	4.41667029	0.74265228	10.92583572	4.41823355	0.74112290
10	10.92610112	4.41659941	0.74258005	10.92611776	4.41814905	0.74106507
12	10.92631505	4.41653327	0.74250266	10.92633412	4.41806435	0.74100577
14	10.92638189	4.41644644	0.74245920	10.92640432	4.41797931	0.74094764
16	10.92612611	4.41636288	0.74240603	10.92615411	4.41789277	0.74088493
18	10.92514033	4.41629120	0.74232184	10.92517866	4.41780350	0.74081283
20	10.92248026	4.41622798	0.74220741	10.92253883	4.41771054	0.74072787
t	$h = 0.05$			$h = 0.025$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	10.92498386	4.41890080	0.74088445	10.92498579	4.41900500	0.74078114
4	10.92525483	4.41881435	0.74083090	10.92525701	4.41891840	0.74072853
6	10.92554075	4.41872820	0.74077723	10.92554317	4.41883195	0.74067552
8	10.92584194	4.41864200	0.74072310	10.92584457	4.41874534	0.74062193
10	10.92612468	4.41855516	0.74066780	10.92612749	4.41865798	0.74056719
12	10.92634179	4.41846767	0.74061116	10.92634481	4.41856992	0.74051110
14	10.92641298	4.41837950	0.74055289	10.92641626	4.41848074	0.74045302
16	10.92616431	4.41828906	0.74049087	10.92616800	4.41838912	0.74039137
18	10.92519158	4.41819471	0.74042244	10.92519597	4.41829348	0.74032388
20	10.92255694	4.41809551	0.74034366	10.92256264	4.41819291	0.74024644
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 10.92478484$		$I_Q = 4.41639540$	$I_E = 0.73956125$		

Çizelge 5.32 : Problem 3 (Durum 3): $c_1 = 0.6$, $c_2 = 0.3$, $c_3 = 0.15$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$, $x_3 = 60$, $h = 0.1$ ve farklı k 'lar için farklı zamanlarda hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

t	$k = 0.2$			$k = 0.1$		
	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	10.92498055	4.41791220	0.74095284	10.92498019	4.41848685	0.74129486
4	10.92525054	4.41724099	0.74053561	10.92525027	4.41840220	0.74123636
6	10.92553556	4.41658367	0.74012859	10.92553529	4.41831781	0.74117949
8	10.92583606	4.41593679	0.73973009	10.92583572	4.41823355	0.74112290
10	10.92611815	4.41529449	0.73933409	10.92611776	4.41814905	0.74106507
12	10.92633437	4.41465955	0.73894345	10.92633412	4.41806435	0.74100577
14	10.92640403	4.41403612	0.73856227	10.92640432	4.41797931	0.74094764
16	10.92615237	4.41340877	0.73817284	10.92615411	4.41789277	0.74088493
18	10.92517341	4.41276132	0.73775437	10.92517866	4.41780350	0.74081283
20	10.92252624	4.41209297	0.73730033	10.92253883	4.41771054	0.74072787
$k = 0.05$						
2	10.92498006	4.41856275	0.74134037	10.92498001	4.41857283	0.74134654
4	10.92525015	4.41855417	0.74132971	10.92525009	4.41857415	0.74134249
6	10.92553514	4.41854498	0.74131990	10.92553506	4.41857480	0.74133916
8	10.92583553	4.41853567	0.74131004	10.92583542	4.41857541	0.74133582
10	10.92611753	4.41852651	0.74129944	10.92611740	4.41857638	0.74133195
12	10.92633390	4.41851780	0.74128764	10.92633376	4.41857812	0.74132709
14	10.92640420	4.41850793	0.74127686	10.92640408	4.41857867	0.74132334
16	10.92615433	4.41849860	0.74126367	10.92615428	4.41858039	0.74131783
18	10.92517973	4.41849033	0.74124584	10.92517988	4.41858412	0.74130887
20	10.92254170	4.41848239	0.74122065	10.92254229	4.41858923	0.74129396
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 10.92478484$		$I_Q = 4.41639540$		$I_E = 0.73956125$	

Bu durum için ayrıca önerilen şemadan hesaplanan invaryant değerleri [45, 50, 65] referansında verilen sonuçlarla Çizelge 5.33'te karşılaştırıldı ve sonuçların birbirleriyle uyumlu olduğu görüldü. Bu ise açıkça sunulan şemanın doğru sonuçlar verdiğinin bir delilidir.

Çizelge 5.33 : Problem 3 (Durum 3): $c_1 = 0.6$, $c_2 = 0.3$, $c_3 = 0.15$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$, $x_3 = 60$, $k = 0.1$ ve $h = 0.1$ için farklı $t = 0(2)20$ zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

t	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
2	10.92498019	4.41848685	0.74129486
4	10.92525027	4.41840220	0.74123636
6	10.92553529	4.41831781	0.74117949
8	10.92583572	4.41823355	0.74112290
10	10.92611776	4.41814905	0.74106507
12	10.92633412	4.41806435	0.74100577
14	10.92640432	4.41797931	0.74094764
16	10.92615411	4.41789277	0.74088493
18	10.92517866	4.41780350	0.74081283
20	10.92253883	4.41771054	0.74072787
10 [45]	10.9244	4.8697	1.039870
10 [65] ($M = 400$)	10.9245403	4.4186918	0.7405338
20 [50]	12.235213	4.538832	0.505828
Analitik ($t = 0$)	$I_M = 10.92478484$	$I_Q = 4.41639540$	$I_E = 0.73956125$

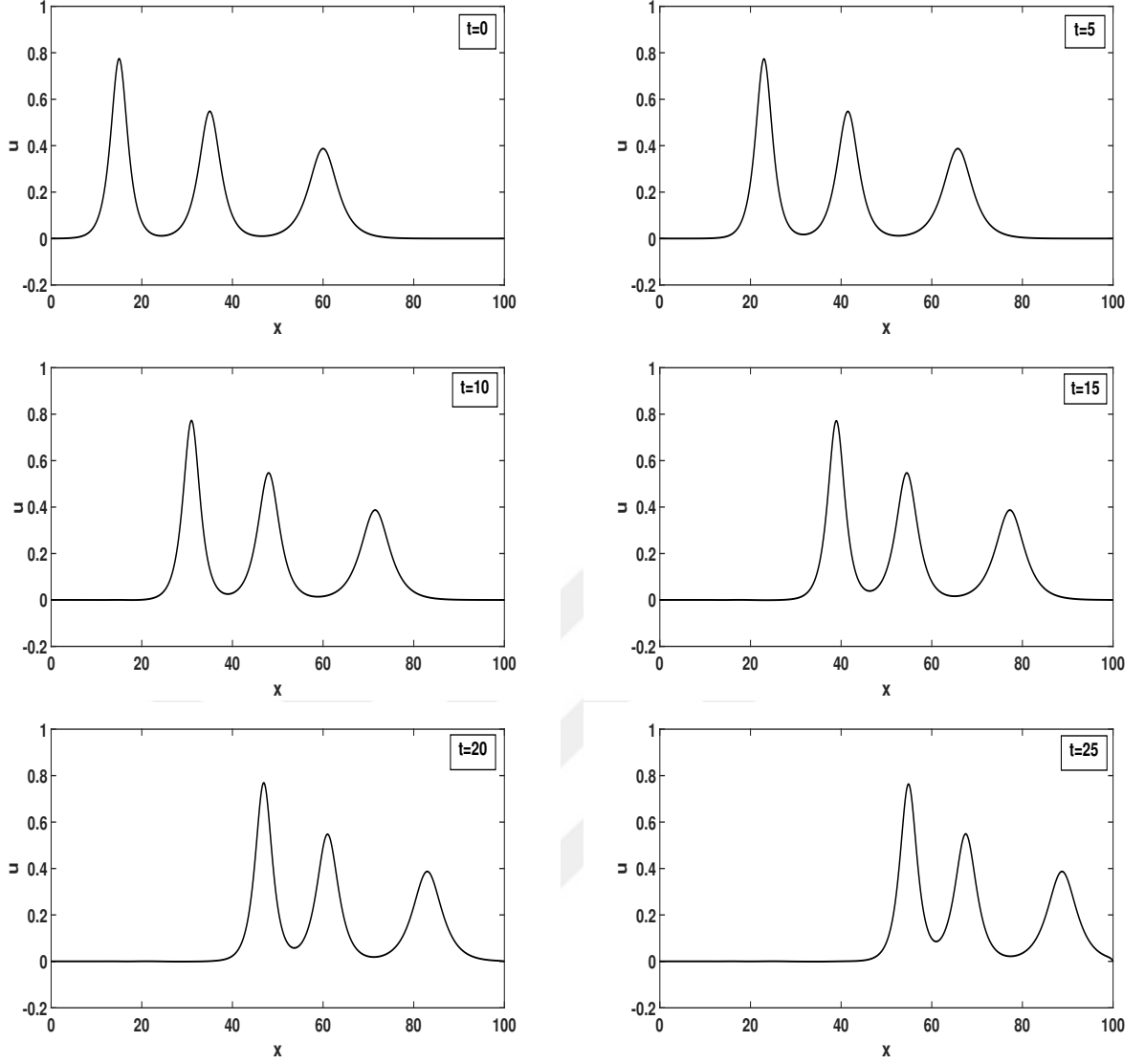
Bu durum için ilaveten $h = k$ adım uzunluklarını yarılayarak farklı (x_m, t_n) mesh noktalarında bulunan noktasal değerler yardımıyla Richardson yaklaşımından elde edilen doğruluk mertebesi hesaplandı ve Çizelge 5.34'te verildi. Çizelgeden sunulan şemanın doğruluk mertebesinin analitik doğruluk mertebesi olan $p = 2$ 'ye yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.34 : Problem 3 (Durum 3): $c_1 = 0.6$, $c_2 = 0.3$, $c_3 = 0.15$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$, $x_3 = 60$ ve farklı $h = k$ 'lar için farklı mesh noktalarında hesaplanan yaklaşık sayısal sonuçlar ve yakınsaklık mertebesi.

(x_m, t_n)	$h = k$	$u(x_m, t_n)$	$p = \log_2 \left \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_2} \right $
(40, 5)	0.1	$u_1 = 0.4319541296$	1.991
	0.05	$u_2 = 0.4310951958$	
	0.025	$u_3 = 0.4308790705$	
(50, 5)	0.1	$u_1 = 0.0211063789$	2.005
	0.05	$u_2 = 0.0210982703$	
	0.025	$u_3 = 0.0210962509$	
(60, 5)	0.1	$u_1 = 0.0957179623$	1.965
	0.05	$u_2 = 0.0957317564$	
	0.025	$u_3 = 0.0957352897$	
(40, 10)	0.1	$u_1 = 0.0293093331$	1.983
	0.05	$u_2 = 0.0296434915$	
	0.025	$u_3 = 0.0297279937$	
(50, 10)	0.1	$u_1 = 0.3646772718$	1.994
	0.05	$u_2 = 0.3658929713$	
	0.025	$u_3 = 0.3661981820$	
(60, 10)	0.1	$u_1 = 0.0155645892$	2.015
	0.05	$u_2 = 0.0155938835$	
	0.025	$u_3 = 0.0156011309$	
(40, 15)	0.1	$u_1 = 0.6351348956$	2.025
	0.05	$u_2 = 0.6446824154$	
	0.025	$u_3 = 0.6470274189$	
(50, 15)	0.1	$u_1 = 0.1276413026$	2.009
	0.05	$u_2 = 0.1265361365$	
	0.025	$u_3 = 0.1262615623$	
(60, 15)	0.1	$u_1 = 0.0790696985$	1.988
	0.05	$u_2 = 0.0793137679$	
	0.025	$u_3 = 0.0793753060$	
(40, 20)	0.1	$u_1 = 0.0236159785$	2.087
	0.05	$u_2 = 0.0228497302$	
	0.025	$u_3 = 0.0226693858$	
(50, 20)	0.1	$u_1 = 0.2349286043$	1.987
	0.05	$u_2 = 0.2425695960$	
	0.025	$u_3 = 0.2444969927$	
(60, 20)	0.1	$u_1 = 0.4922445675$	1.974
	0.05	$u_2 = 0.4903793792$	
	0.025	$u_3 = 0.4899045394$	

Bunlarla birlikte $h = 0.1$ ve $k = 0.1$ için $t = 0(5)25$ bitiş zamanlarında şemadan hesaplanan nümerik çözümlerin sürekliliği ile birlikte ilerleyen zamanlarda problemin doğru fiziksel davranışını sergilediğini göstermek için Şekil 5.13'te dalga grafikleri verildi.

Şekilden ilerleyen zamanla birlikte dalgaların neredeyse şekillerini koruyarak ve arkalarında oldukça çok küçük dalgacıklar bırakarak hareket ettikleri açıktır. Örneğin, $t = 0$ başlangıç zamanında $x_1 = 15$ 'te konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 0.7746$, $x_2 = 35$ 'teki konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.5478$, $x_3 = 60$ 'taki konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_3 = 0.3873$ olup dalgaların toplam amplitüdü 1.7097; $t = 15$ zamanı için $x_1 = 38.9$ 'da konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 0.7715$, $x_2 = 54.5$ 'te konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.5472$, $x_3 = 77.2$ 'de konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_3 = 0.3871$ olup dalgaların toplam amplitüdü 1.7058; $t = 25$ zamanı için $x_1 = 54.9$ 'da konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_1 = 0.7636$, $x_2 = 67.5$ 'te konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_2 = 0.5490$, $x_3 = 88.7$ 'de konumlanan dalganın ölçülen amplitüdü $A_3 = 0.3871$ olup dalgaların toplam amplitüdü 1.6997'dir. Bu değerlerden de kolayca görüldüğü gibi ilerleyen zamanlarda dalgalar arkalarında çok küçük dalga parçacıkları yani dalgacıklar bırakır. Bu örnekte ele alınan problem üç soliter dalganın hareketi problemi olduğu için grafiklerinin böyle bir davranış sergileyecekleri açıktır.

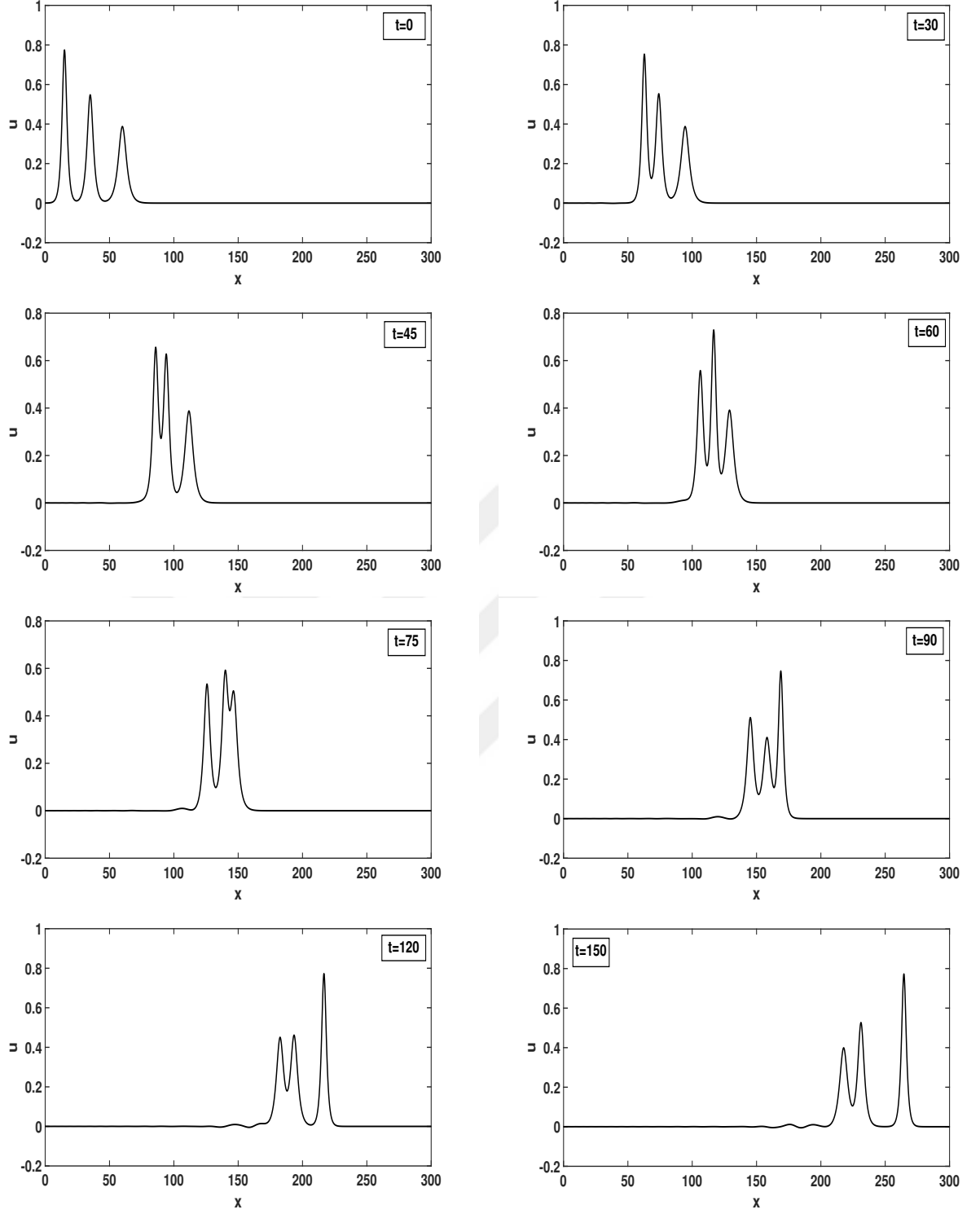


Şekil 5.13 : Problem 3 (Durum 3): $h = 0.1$ ve $k = 0.1$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.

Bu durum için seçilen $[x_l, x_r] = [0, 100]$ konum aralığında ilerleyen zamanlarda dalgalar şekillerini neredeyse koruduğunu ve arkalarında çok küçük dalga kalıntıları bırakarak yollarına devam etmelerine rağmen Şekil 5.13'ten de rahatça görüldüğü üzere hiçbir dalga birbirleriyle etkileşim içinde olmamıştır. Bu dalgaların ilerleyen zamanlarda etkileşime girdiğini ve beklenen fiziksel davranışları sağladığını göstermek için x 'in tanım aralığı $[x_l, x_r] = [0, 300]$ olarak seçildi ve $t = 0$ 'dan $t = 150$ 'ye kadar farklı t zamanlarında verilen nümerik şemadan elde edilen sayısal sonuçların grafikleri Şekil 5.14'te verildi. Şekil incelendiğinde soliter dalgaların zaman ilerledikçe beklenen fiziksel davranışları gösterdiği, en büyük genliğe sahip olan dalganın $t = 0$, 30 zamanlarında diğer soliter dalgaların solunda olduğu, $t = 60$ 'da diğer iki soliter

dalganın ortasında olduğu, $t = 90, 120$ zamanlarında ise diğerk iki soliter dalganın sağında olduğu gözükmeğektir. Ayrıca yine şekilden en büyük genlikli dalga $t = 45$ anında orta genlikli dalga ile, $t = 75$ anında en küçük genlikli dalga ile etkileşime girdiğı ve $t = 120$ anında ise orta genlikli dalga ile en küçük genlikli dalganın etkileşime girdiğı açıkça görülmektedir.





Şekil 5.14 : Problem 3 (Durum 3): $h = 0.1$, $k = 0.1$ ve $[x_l, x_r] = [0, 300]$ için farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.

5.1.4 Problem 4: Maxwellian başlangıç şartlı soliter dalga

Bilindiği gibi bu problemin de henüz tam çözümü literatürde mevcut olmadığından sunulan şemanın doğru sonuçlar ürettiğinden emin olmak için dalga sayısını veren μ parametresinin aşağıdaki üç farklı durumlarında $x_0 = 40$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan yaklaşık invaryant değerleri diğer araştırmacılar tarafından verilenlerle karşılaştırıldı. Yukarıda verilen üç problemten farklı olarak bu problemin invaryant değerleri analitik olarak bilinmemektedir. Bu problemin ilerleyen öncü dalgalarının sayısı

$$N \approx \left\lceil \frac{1}{\mu^{1/5}} \right\rceil$$

formülünden kolayca bulunur [18].

5.1.4.1 Durum 1: $\mu = 1$, $x_0 = 40$, $[x_l, x_r] = [0, 100]$.

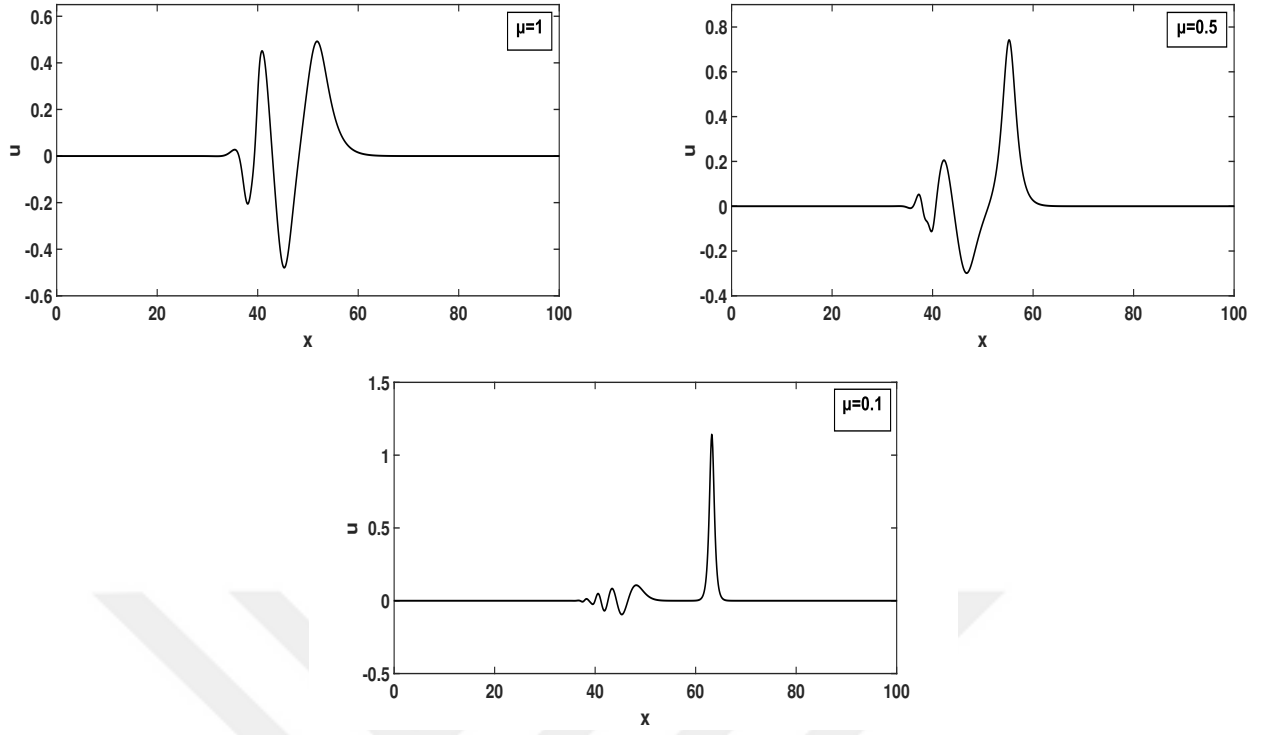
5.1.4.2 Durum 2: $\mu = 0.5$, $x_0 = 40$, $[x_l, x_r] = [0, 100]$.

5.1.4.3 Durum 3: $\mu = 0.1$, $x_0 = 40$, $[x_l, x_r] = [0, 100]$.

μ parametresinin yukarıda verilen üç durumu için $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ seçimiyle $t = 2(2)10$ zamanlarında nümerik şemadan elde edilen invaryant değerleri Çizelge 5.35'te diğer araştırmacıların çalışmalarında sundukları sonuçlarla karşılaştırıldı. Çizelgeden görüldüğü üzere hesaplanan invaryant değerlerinin hemen hemen korunduğu ve diğer araştırmacıların verdikleri ile de uyumlu olduğu görülmektedir. Burada ele alınan μ parametresini üç farklı değeri için $t = 10$ zamanında Maxwellian başlangıç şartlı soliter dalganın gelişimi Şekil 5.15'te gösterildi. μ parametresi ne kadar küçük olursa soliter dalgaların sayısı da o kadar fazla olur. Yukarıdaki formülden problemin dalga sayısı $\mu = 1$ için 1, $\mu = 0.5$ için 2 ve $\mu = 0.1$ için 2 olarak elde edilir.

Çizelge 5.35 : Problem 4: $x_0 = 40$, $k = 0.01$, $h = 0.1$ ve farklı μ değerleri için farklı $t = 2(2)20$ zamanlarında hesaplanan $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invaryantları.

μ	t	$\tilde{I}_M$	$\tilde{I}_Q$	$\tilde{I}_E$
1	2	1.772453851	2.504109948	-0.364612180
	4	1.772453851	2.505324238	-0.365848210
	6	1.772453851	2.507253912	-0.367785270
	8	1.772453851	2.507734258	-0.368270405
	10	1.772453851	2.508275296	-0.368814253
	10 [28] ($k = 0.1$)	1.772444	2.506092	-0.3665553
	10 [41]	1.772521	2.501206	-0.3665079
	10 [43]	1.77254	2.50058	-0.366354
	10 [44-(CN)]	1.772176	2.506800	-0.367712
	10 [44-(BDF2)]	1.772457	2.506868	-0.367386
0.5	2	1.772453851	1.879918147	0.259524553
	4	1.772453851	1.880892411	0.258508545
	6	1.772453851	1.881384045	0.258002362
	8	1.772453851	1.881553303	0.257826132
	10	1.772453851	1.881664784	0.257710840
	10 [28] ($k = 0.1$)	1.772449	1.879828	0.2597092
	10 [41]	1.772520	1.876574	0.2581499
	10 [43]	1.77254	1.87584	0.258256
	10 [44-(CN)]	1.771994	1.879609	0.258880
	10 [44-(BDF2)]	1.772455	1.879949	0.259652
0.1	2	1.772453851	1.371064230	0.769001718
	4	1.772453851	1.371051006	0.768871969
	6	1.772453851	1.371000039	0.768778417
	8	1.772453851	1.370943668	0.768690321
	10	1.772453851	1.370885211	0.768604365
	10 [28] ($k = 0.1$)	1.772453	1.378483	0.7607117
	10 [41]	1.766526	1.364993	0.7574795
	10 [44-(CN)]	1.765145	1.367074	0.742797
	10 [44-(BDF2)]	1.772452	1.404499	0.790175



Şekil 5.15 : Problem 4: μ 'nün farklı değerleri için $t = 10$ zamanında hesaplanan nümerik çözümlerin 2-boyutlu grafikleri.

6. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bilimsel çalışmada belirli başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen güçlü nonlinearliğe sahip olan MRLW kısmi diferansiyel denkleminin nümerik yaklaşık çözümlerini elde etmek için denklemden görülen lineer olmayan terimler yerine Richtmyer tipi lineerleştirme yaklaşımı kullanan sonlu farklar yöntemi üzerine inşa edilmiş, konum ve zaman integrasyonlarında tamamen ayrıklaştırılmış, bir Crank-Nicolson sonlu fark şeması çıkartıldı.

Sunulan şema MRLW denklemi ile verilen ve literatürde tek soliter dalga, iki soliter dalga, üç soliter dalga ve Maxwellian başlangıç şartlı soliter dalga olarak bilinen dört örnek probleme başarılı bir şekilde uygulandı. Her bir test problemin sunulan şemaya uygulanmasından elde edilen yaklaşık çözümlerin doğruluğunu ve güvenilirliğini ölçmek için problemde verilen parametrelerin ve değişkenlerin çeşitli değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları, $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invariantları, $Mertebe(L_2)$ ve $Mertebe(L_\infty)$ yakınsaklık mertebeleri ve $CPU(s)$ zamanları hesaplandı. Hesaplanan sonuçlardan L_2 ve L_∞ hata normlarının yeterince küçük olduğu ve h , $k \rightarrow 0$ iken gittikçe küçüldüğü ve böylece şemanın beklenen yakınsaklığı sağladığı; $\tilde{I}_M$, $\tilde{I}_Q$ ve $\tilde{I}_E$ invariant değerlerinin artan zamanlarda neredeyse değişmeden sabit kaldığı yani korunduğu; L_2 ve L_∞ normlarındaki $Mertebe(L_2)$ ve $Mertebe(L_\infty)$ yakınsaklık mertebelerinin teorik değeri olan 2'ye oldukça yakın kaldığı görüldü.

Bunlarla birlikte şemanın doğru ve güvenilir sonuçlar ürettiğinden dahada emin olmak için her bir örnek problemde elde edilen yaklaşık nümerik çözümler analitik çözümleriyle (eğer varsa) ile birlikte aynı parametre ve değişken değerlerinde literatürde mevcut diğer araştırmacıların verdikleriyle de karşılaştırıldı. Karşılaştırılan çalışmalardaki şemalar genellikle daha etkin olan sonlu elemanlar üzerine inşa edilmiş şemalar olduğundan daha iyi sonuçlar verecekleri kaçınılmazdır. Hesaplanan nümerik sonuçlardan h , $k \rightarrow 0$ iken şemanın analitik çözümlere gittikçe yakın çözümler ürettiği ancak bu durumda beklendiği gibi $CPU(s)$ zamanlarının büyüdüğü ve dolayısıyla hesaplama maliyetinin arttığı görüldü.

Şemadan elde edilen sayısal sonuçların sürekliliğini ve artan zamanla her bir problemin fiziksel davranışlar sergilediğini göstermek için ilerleyen dalgaların grafikleri verildi. Grafiklerden,

- Tek soliter dalganın zaman arttıkça neredeyse değişmez genlik ve şekil ile sağa doğru hareket ettiği ve ayrıca c parametresi azaldıkça dalganın hızının da azaldığı;

- Farklı genliklere sahip iki ve üç soliter dalganın $t = 0$ başlangıç zamanında genliği büyük olan önceki dalganın solda olduğu, zaman arttıkça sağda olduğu, ayrı ayrı hareketlerine devam eden dalgaların ilerleyen zamanlarda etkileşime girdiği ve çarpışma sonrası soliter dalgaları takip eden genlikleri son derece küçük bir artık dalga olan salınımlı bir dalga bırakarak yollarına devam ettikleri, ayrıca c_1, c_2 ve c_1, c_2, c_3 parametreleri azaldıkça sırasıyla iki ve üç soliter dalganın hızının da azaldığı;
- Maxwellian başlangıç koşullu soliter dalga hareketinde dalga sayısını belirleyen μ değerinin azalmasıyla soliter dalga sayısının arttığı ve genliği büyük olan dalgaların her zaman genliği küçük olanın sağında olduğu;

görüldü.

Ayrıca şemadan elde edilen sayısal sonuçların doğruluğunu ve güvenilirliğini göstermek için korunum sabitleri, hata normları ve yakınsaklık mertebesi hesaplandı. Hesaplanan nümerik sonuçlardan,

- Hareketin üç değişmezi olan kütle, momentum ve enerji değerlerinin artan zaman boyunca korunduğu;
- L_2 ve L_∞ hata normlarının yeterince küçük olduğu;
- Nümerik olarak hesaplanmış yakınsama mertebesinin teorik sonuçlarla uyumlu olduğu;

görüldü.

Bunlarla birlikte,

- Konum ve zamana göre 2-nci mertebeden lokal kesme hatasına sahip kapalı Crank-Nicolson şemasının von-Neumann yöntemi ile kararlılık analizi yapıldı ve şemanın koşulsuz kararlı olduğu gösterildi.
- Önerilen şema doğa gereği konum ve zaman adım uzunluklarının yeterince küçük seçilmesi durumunda yani $h, k \rightarrow 0$ iken analitik çözümlere gittikçe daha yakın çözümler üreteceği ve hesaplama verimliliğini artıracığı, ancak bunun da *CPU* zamanlarını ve dolayısıyla hesaplama maliyetini artıracığını açıkça görüldü.

Sonuç olarak uygulanması ve programlanması oldukça kolay olan ve ayrıca doğru ve güvenilir sonuçlar üreten bu mevcut şema fizik ve uygulamalı matematiğin birçok branşında karşılaşılan bu tip problemlerin yaklaşık nümerik çözümlerinin bulunmasında da başarılı bir şekilde kullanılabilir.



KAYNAKLAR

- [1] **Mittal, R.C. ve Rohila, R.** (2018). A fourth order cubic B-spline collocation method for the numerical study of the RLW and MRLW equations, *Wave Motion*, 80, 47–68.
- [2] **Peregrine, D.H.** (1966). Calculations of the development of an undular bore, *Journal of Fluid Mechanics*, 25(2), 321–330.
- [3] **Korteweg, D. ve de Vries, G.** (1895). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary wave, *Phil. Mag.*, 39, 422–443.
- [4] **Benjamin, T.B., Bona, J.L. ve Mahony, J.J.** (1972). Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 272(1220), 47–78.
- [5] **Bona, J.L., McKinney, W.R. ve Restrepo, J.M.** (2000). Stable and Unstable Solitary-Wave Solutions of the Generalized Regularized Long-Wave Equation, *Journal of Nonlinear Science*, 10(6), 603–638.
- [6] **Kaya, D.** (2004). A numerical simulation of solitary-wave solutions of the generalized regularized long-wave equation, *Applied Mathematics and Computation*, 149(3), 833–841.
- [7] **Rafei, M., Ganji, D.D., Mohammadi Daniali, H.R. ve Pashaei, H.** (2007). Application of homotopy perturbation method to the RLW and generalized modified Boussinesq equations, *Physics Letters A*, 364(1), 1–6.
- [8] **He, J.** (1997). A new approach to nonlinear partial differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2(4), 230–235.
- [9] **He, J.** (1999). Variational iteration method – a kind of non-linear analytical technique: some examples, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34(4), 699–708.
- [10] **Khalifa, A.K., Raslan, K.R. ve Alzubaidi, H.M.** (2008). Numerical study using ADM for the modified regularized long wave equation, *Applied Mathematical Modelling*, 32(12), 2962–2972.
- [11] **Achouri, T. ve Omrani, K.** (2009). Application of the homotopy perturbation method to the modified regularized long-wave equation: Application of HPM to MRLW, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26(2), 399–411.
- [12] **Labidi, M. ve Omrani, K.** (2011). Numerical simulation of the modified regularized long wave equation by He's variational iteration method, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27(2), 478–489.
- [13] **Khan, Y., Taghipour, R., Falahian, M. ve Nikkar, A.** (2012). A new approach to modified regularized long wave equation, *Neural Computing and Applications*, 23(5), 1335–1341.
- [14] **Akram, G. ve Sadaf, M.** (2017). Solution of damped generalized regularized long-wave equation using a modified homotopy analysis method, *Indian Journal of Physics*, 92(2), 191–196.

- [15] **Almatrafi, M.B., Alharbi, A., Lotfy, K. ve El-Bary, A.A.** (2021). Exact and numerical solutions for the GBBM equation using an adaptive moving mesh method, *Alexandria Engineering Journal*, 60(5), 4441–4450.
- [16] **Karakoç, S.B.G., Mei, L. ve Ali, K.K.** (2021). Two efficient methods for solving the generalized regularized long wave equation, *Applicable Analysis*, 101(13), 4721–4742.
- [17] **Liu, X.** (2024). The traveling wave solutions for generalized Benjamin–Bona–Mahony equation, *The European Physical Journal Plus*, 139(3).
- [18] **Gardner, L.R.T., Ayoub, F.A., Gardner, G.A. ve Amein, N.K.** (1997). Approximations of solitary waves of the MRLW equation by B-spline finite elements, *The Arabian Journal for Science and Engineering*, Volume 22, 183–193.
- [19] **Zhang, L.** (2005). A finite difference scheme for generalized regularized long-wave equation, *Applied Mathematics and Computation*, 168(2), 962–972.
- [20] **Ramos, J.I.** (2007). Solitary wave interactions of the GRLW equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, 33(2), 479–491.
- [21] **Khalifa, A.K., Raslan, K.R. ve Alzubaidi, H.M.** (2007). A finite difference scheme for the MRLW and solitary wave interactions, *Applied Mathematics and Computation*, 189(1), 346–354.
- [22] **Khalifa, A.K., Raslan, K.R. ve Alzubaidi, H.M.** (2008). A collocation method with cubic B-splines for solving the MRLW equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 212(2), 406–418.
- [23] **Raslan, K.R. ve Hassan, S.M.** (2009). Solitary waves for the MRLW equation, *Applied Mathematics Letters*, 22(7), 984–989.
- [24] **Raslan, K.R.** (2009). Numerical study of the Modified Regularized Long Wave (MRLW) equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, 42(3), 1845–1853.
- [25] **Cai, J.** (2010). A multisymplectic explicit scheme for the modified regularized long-wave equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(3), 899–905.
- [26] **i Haq, F., ul Islam, S. ve Tirmizi, I.A.** (2010). A numerical technique for solution of the MRLW equation using quartic B-splines, *Applied Mathematical Modelling*, 34(12), 4151–4160.
- [27] **Mokhtari, R. ve Mohammadi, M.** (2010). Numerical solution of GRLW equation using Sinc-collocation method, *Computer Physics Communications*, 181(7), 1266–1274.
- [28] **Raslan, K.R. ve EL-Danaf, T.S.** (2010). Solitary waves solutions of the MRLW equation using quintic B-splines, *Journal of King Saud University - Science*, 22(3), 161–166.
- [29] **Dereli, Y.** (2011). Solitary wave solutions of the MRLW equation using radial basis functions, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 28(1), 235–247.
- [30] **García-López, C.M. ve Ramos, J.I.** (2012). Effects of convection on a modified GRLW equation, *Applied Mathematics and Computation*, 219(8), 4118–4132.

- [31] **Roshan, T.** (2012). A Petrov–Galerkin method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation, *Computers & Mathematics with Applications*, 63(5), 943–956.
- [32] **Lin, B.** (2013). A Nonpolynomial Spline Scheme for the Generalized Regularized Long Wave Equation, *Studies in Applied Mathematics*, 132(2), 160–182.
- [33] **Dağ, I., Irk, D. ve Sarı, M.** (2013). The extended cubic B-spline algorithm for a modified regularized long wave equation, *Chinese Physics B*, 22(4), 040207.
- [34] **Gazi Karakoc, S.B. ve Geyikli, T.** (2013). Petrov-Galerkin finite element method for solving the MRLW equation, *Mathematical Sciences*, 7(1).
- [35] **Karakoc, S.B.G., Yagmurlu, N.M. ve Ucar, Y.** (2013). Numerical approximation to a solution of the modified regularized long wave equation using quintic B-splines, *Boundary Value Problems*, 2013(1).
- [36] **Karakoç, S.B.G., Geyikli, T. ve Başhan, A.** (2013). A numerical solution of the Modified Regularized Long Wave (MRLW) equation using quartic B-splines, *TWMS J. App. Eng. Math.* V.3, N.2, pp. 231-244.
- [37] **Akbari, R. ve Mokhtari, R.** (2013). A New Compact Finite Difference Method for Solving the Generalized Long Wave Equation, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 35(2), 133–152.
- [38] **Berikelashvili, G. ve Mirianashvili, M.** (2013). On the convergence of difference schemes for generalized Benjamin–Bona–Mahony equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 30(1), 301–320.
- [39] **Guo, P.F., Zhang, L.W. ve Liew, K.M.** (2014). Numerical analysis of generalized regularized long wave equation using the element-free kp-Ritz method, *Applied Mathematics and Computation*, 240, 91–101.
- [40] **Karakoç, S.B.G., Ak, T. ve Zeybek, H.** (2014). An Efficient Approach to Numerical Study of the MRLW Equation with B-Spline Collocation Method, *Abstract and Applied Analysis*, 2014, 1–15.
- [41] **Mei, L., Gao, Y. ve Chen, Z.** (2014). A Galerkin Finite Element Method for Numerical Solutions of the Modified Regularized Long Wave Equation, *Abstract and Applied Analysis*, 2014, 1–11.
- [42] **Muñoz Grajales, J.C.** (2014). Error estimates for a Galerkin numerical scheme applied to a generalized BBM equation, *Applicable Analysis*, 94(7), 1405–1419.
- [43] **Mei, L., Gao, Y. ve Chen, Z.** (2015). Numerical study using explicit multistep Galerkin finite element method for the MRLW equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 31(6), 1875–1889.
- [44] **Gao, Y. ve Mei, L.** (2015). Mixed Galerkin finite element methods for modified regularized long wave equation, *Applied Mathematics and Computation*, 258, 267–281.

- [45] **Hammad, D.A. ve El-Azab, M.S.** (2015). A 2N order compact finite difference method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation, *Applied Mathematics and Computation*, 253, 248–261.
- [46] **García-López, C.M. ve Ramos, J.I.** (2015). Solitary waves generated by bell-shaped initial conditions in the inviscid and viscous GRLW equations, *Applied Mathematical Modelling*, 39(21), 6645–6668.
- [47] **Pan, X., Che, H. ve Wang, Y.** (2015). A high-accuracy compact conservative scheme for generalized regularized long-wave equation, *Boundary Value Problems*, 2015(1).
- [48] **Mohammadi, R.** (2015). Exponential B-spline collocation method for numerical solution of the generalized regularized long wave equation, *Chinese Physics B*, 24(5), 050206.
- [49] **Li, S., Wang, J. ve Luo, Y.** (2015). A Fourth-Order Conservative Compact Finite Difference Scheme for the Generalized RLW Equation, *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 1–9.
- [50] **Hammad, D.A. ve El-Azab, M.S.** (2016). Chebyshev–Chebyshev spectral collocation method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation, *Applied Mathematics and Computation*, 285, 228–240.
- [51] **Karakoç, S.B.G. ve Zeybek, H.** (2016). Solitary-wave solutions of the GRLW equation using septic B-spline collocation method, *Applied Mathematics and Computation*, 289, 159–171.
- [52] **Pan, X. ve Zhang, L.** (2016). On the convergence of a high-accuracy compact conservative scheme for the modified regularized long-wave equation, *SpringerPlus*, 5(1).
- [53] **Ramos, J.I.** (2016). On the accuracy of some explicit and implicit methods for the inviscid GRLW equation subject to initial Gaussian conditions, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 26(3/4), 698–721.
- [54] **Zeybek, H. ve Karakoç, S.B.G.** (2016). A numerical investigation of the GRLW equation using lumped Galerkin approach with cubic B-spline, *SpringerPlus*, 5(1).
- [55] **Ramos, J.I. ve García-López, C.M.** (2017). Time-linearized, compact methods for the inviscid GRLW equation subject to initial Gaussian conditions, *Applied Mathematical Modelling*, 48, 353–383.
- [56] **Kaplan, A. ve Dereli, Y.** (2017). Numerical solutions of the MRLW equation using moving least square collocation method, *Communications Faculty Of Science University of Ankara Series A1Mathematics and Statistics*, 66(2), 349–361.
- [57] **Salih, H., Tawfiq, L.N.M., Yahya, Z.R. ve Zin, S.M.** (2018). Solving Modified Regularized Long Wave Equation Using Collocation Method, *Journal of Physics: Conference Series*, 1003, 012062.
- [58] **Li, Q. ve Mei, L.** (2018). Local momentum-preserving algorithms for the GRLW equation, *Applied Mathematics and Computation*, 330, 77–92.

- [59] **Zeybek, H. ve Karakoc, S.B.G.** (2018). A collocation algorithm based on quintic B-splines for the solitary wave simulation of the GRLW equation, *Scientia Iranica*, 0(0), 0–0.
- [60] **Bhowmik, S.K. ve Karakoc, S.B.G.** (2019). Numerical approximation of the generalized regularized long wave equation using Petrov–Galerkin finite element method, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 35(6), 2236–2257.
- [61] **Zorşahin Görgülü, M. ve Irk, D.** (2019). Numerical solution of modified regularized long wave equation by using cubic trigonometric B-spline functions, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 21(1), 126–138.
- [62] **Bayarassou, K., Rouatbi, A. ve Omrani, K.** (2019). Uniform error estimates of fourth-order conservative linearized difference scheme for a mathematical model for long wave, *International Journal of Computer Mathematics*, 97(8), 1678–1703.
- [63] **Alharbi, A.R.** (2020). Numerical investigation for the GRLW equation using Parabolic Monge Ampere Equation, *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 15, no. 2, 443–462.
- [64] **Rouatbi, A., Labidi, M. ve Omrani, K.** (2020). Conservative Difference Scheme of Solitary Wave Solutions of the Generalized Regularized Long-Wave Equation, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 51(4), 1317–1342.
- [65] **Oruç, O.** (2020). Numerical investigation of nonlinear generalized regularized long wave equation via delta-shaped basis functions, *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*, 10(2), 244–258.
- [66] **Jena, S.R., Senapati, A. ve Gebremedhin, G.S.** (2020). Approximate solution of MRLW equation in B-spline environment, *Mathematical Sciences*, 14(4), 345–357.
- [67] **Hammad, D.A.** (2021). Application of Bernstein collocation method for solving the generalized regularized long wave equations, *Ain Shams Engineering Journal*, 12(4), 4081–4089.
- [68] **Shallu ve Kukreja, V.K.** (2021). Analysis of RLW and MRLW equation using an improvised collocation technique with SSP-RK43 scheme, *Wave Motion*, 105, 102761.
- [69] **Mohammed, P.O., Alqudah, M.A., Hamed, Y.S., Kashuri, A. ve Abualnaja, K.M.** (2021). Solving the Modified Regularized Long Wave Equations via Higher Degree B-Spline Algorithm, *Journal of Function Spaces*, 2021, 1–10.
- [70] **AlHumedi, H.O.** (2022). Combining B-spline least-square schemes with different weight functions to solve the generalized regularized long wave equation, *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 13.
- [71] **Behnood, M. ve Shokri, A.** (2022). A Legendre spectral element method for the family of regularized long wave equations, *Mathematics and Computers in Simulation*, 201, 239–253.

- [72] **Shallu ve Kukreja, V.K.** (2022). Solution of the generalized regularized long-wave equation with optimal spline collocation technique and implicit Crank–Nicolson as well as explicit SSP-RK43 scheme, *International Journal of Computer Mathematics*, 100(1), 1–19.
- [73] **Başhan, A. ve Yağmurlu, N.M.** (2022). A mixed method approach to the solitary wave, undular bore and boundary-forced solutions of the Regularized Long Wave equation, *Computational and Applied Mathematics*, 41(4).
- [74] **Pandit, S.** (2022). Local radial basis functions and scale-3 Haar wavelets operational matrices based numerical algorithms for generalized regularized long wave model, *Wave Motion*, 109, 102846.
- [75] **Kumari, A. ve Kukreja, V.K.** (2022). Sixth order Hermite collocation method for analysis of MRLW equation, *Journal of Ocean Engineering and Science*.
- [76] **Kumari, A. ve Kukreja, V.K.** (2023). Study of generalized regularized long wave equation via septic Hermite collocation method with Crank–Nicolson and SSP-RK43 schemes to capture the various solitons, *Wave Motion*, 122, 103188.
- [77] **Karta, M.** (2023). Numerical approximation with the splitting algorithm to a solution of the modified regularized long wave equation, *Communications Faculty Of Science University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 72(4), 1034–1054.
- [78] **Alotaibi, N. ve Alzubaidi, H.** (2023). Solitary wave solutions of the MRLW equation using a spatial five-point stencil of finite difference approximation, *Journal of Umm Al-Qura University for Applied Sciences*, 9(3), 221–229.
- [79] **Richtmyer, R.D. ve Morton, K.W.** (1967). *Difference methods for initial-values problems*, Interscience Publishers, New York.
- [80] **Smith, G.D.** (1987). *Numerical solution of partial differential equation: Finite difference methods*, Clarendon Press, Oxford.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad: Furkan AKÇAPINAR

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2021, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

MESLEKİ DENEYİMLER:

- Arş. Gör.: 2023-Devam Ediyor. İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü.