T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

WITCH OF AGNESI EĞRİSİNİN KARAR TEORİ UYGULAMALARI

CEM GÜZEY

DANIŞMAN

PROF. DR. BÜLENT KARAKAŞ

BARTIN-2024

T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

WITCH OF AGNESI EĞRİSİNİN KARAR TEORİ UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cem GÜZEY

JÜRİ ÜYELERİ

Danışman :

Üye :

Üye :

BARTIN-2024

BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ danışmanlığında hazırlamış olduğum "WITCH OF AGNESI EĞRİSİNİN KARAR TEORİ UYGULAMALARI" başlıklı yüksek lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımı kabul edeceğimi beyan ederim.

29.04.2024
Cem GÜZEY

ÖN SÖZ

Bilimsel çalışma ahlak ve etiğini bana kazandıran değerli danışmanım Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ’a teşekkürlerimi sunarım.

Cem GÜZEY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

WITCH OF AGNESİ EĞRİSİNİN KARAR TEORİ UYGULAMALARI

Cem GÜZEY

Bartın Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

Bartın-2024, sayfa: 35

Bu araştırmada Witch of Agnesi eğrisinin karar ve teori uygulamaları incelenmiştir. Maria Gaetana Agnesi'nin bu eğriyi tanımlamasının ardındaki matematiksel özelliklere yer verilmiştir. Araştırmanın odak noktası, bu eğrinin karar teorisi alanında nasıl kullanılabileceği ve bu kullanımın karar verme süreçlerine nasıl katkıda bulunabileceği üzerinedir. Witch of Agnesi'nin beklenen değerini belirleme zorluklarına odaklanarak, çeşitli karar teorisi yaklaşımlarını incelenmiştir. Araştırmanın problem cümlesi; Witch of Agnesi eğrisi, karar teorisi içinde nasıl değerlendirilebilir ve bu değerlendirme karar alma süreçlerine nasıl entegre edilebilir olarak belirlenmiştir. Araştırma kapsamında, benzer matematiksel zorluklarla karşılaşan diğer oyunların (örneğin, Pasadena oyunu) nasıl değerlendirildiği de karşılaştırılmıştır ve bu konudaki bilgi boşluklarını doldurmaya çalışmaktadır. Sonuç olarak, bu tez, Witch of Agnesi'nın karar teorisi bağlamındaki potansiyel uygulamalarını keşfetmek amacıyla matematik ve karar teorisi arasındaki etkileşimi inceleyen bir araştırmadır.

Anahtar Kelimeler: Agnesi, Couchy, karar teori, Pasadena, Witch of Agnesi.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

THE APPLICATION OF THE WITCH OF AGNESI CURVE IN DECISION THEORY

Cem GÜZEY

Bartın University
Graduate School
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ
Bartın-2024, pp: 35

In this research, the applications of the Witch of Agnesi curve in decision theory have been examined. The mathematical properties behind Maria Gaetana Agnesi's definition of this curve have been highlighted. The focus of the study is on how this curve can be utilized in the field of decision theory and how such utilization can contribute to decision-making processes. By addressing the challenges in determining the expected value of the Witch of Agnesi and focusing on various decision theory approaches, the research aims to explore how the Witch of Agnesi curve can be evaluated within decision theory and how this evaluation can be integrated into decision-making processes. The research problem statement has been formulated as: How can the Witch of Agnesi curve be assessed in decision theory, and how can this assessment be integrated into decision-making processes? The study also compares the evaluation of other games facing similar mathematical challenges, such as the Pasadena game, aiming to fill gaps in knowledge on this subject. In conclusion, this thesis represents a comprehensive exploration of the potential applications of the Witch of Agnesi in the context of decision theory by examining the interaction between mathematics and decision theory.

Keywords: Agnesi, Couchy, decision theory, Pasadena Witch of Agnesi,

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

No **No**

1. GİRİŞ

Matematiksel çalışmalarda, özellikle analiz veya olasılık teorisi gibi konularda hem eğri modelleri hem de olasılık dağılımları sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Eğri modelleri, karar teorisi içinde belirli bağlamlarda kullanılabilir ve karar alma süreçlerinde analiz için bir araç olabilmektedir. Eğri modelleri, belirli bir veri setini analiz etmek ve gelecekteki sonuçları tahmin etmek için kullanılabilmektedir. Özellikle, Witch of Agnesi gibi eğri modelleri, veri setinin belirli bir olasılık dağılımını temsil edebilir ve bu dağılımın tahminlenmesinde karar alma sürecine yardımcı olabilir. Bu araştırmada Witch of Agnesi eğrisinin genel özellikleri incelenmiştir. Öncelikle Witch of Agnesi ile ilgili görülen temel bilgilere yer verilmiştir.

1.1. Olasılık Dağılımları

Olasılık dağılımları, bir olayın veya sonucun olasılığını temsil eden bir matematiksel modeldir. Bernoulli, binom, normal, poisson ve uniform gibi temel olasılık dağılımları yanı sıra olasılık teorisinde pek çok dağılım bulunmaktadır. Witch of Agnesi ile ilişkili görülen önemli bir dağılım Cauchy dağılımıdır.

1.2. Cauchy Dağılımı

Cauchy dağılımı, sürekli bir olasılık dağılımıdır ve genellikle diğer dağılımlardan farklı olan özellikleriyle dikkat çekmektedir. Kökenini Augustin Cauchy'den alan Cauchy dağılımı, beklenen değerin var olmadığı bir dağılım ailesidir. Ayrıca, aile bağımsız rastgele değişkenlerin toplamı oluşturulduğunda kapalıdır ve bu nedenle sonsuz bölünebilir bir dağılım ailesidir. Cauchy dağılımı, Stigler (1989) tarafından standart iki değişkenli normal dağılımı takip eden $(Z_1, Z_2)T$ için $P(Z_1 \leq 0, Z_2 \leq 0)$ ifadesini elde etmek için kullanılmıştır. Cauchy dağılımı, mekanik ve elektrik teorisi, fiziksel antropoloji, ölçüm problemleri, risk ve finansal analiz gibi birçok uygulamada kullanılır. Ayrıca, nokta kaynağından yayılan parçacıkların sabit düz çizgiye olan etki noktalarını modellemek için de kullanılmıştır (Johnson, aktaran Alzaatreh vd., 2016).

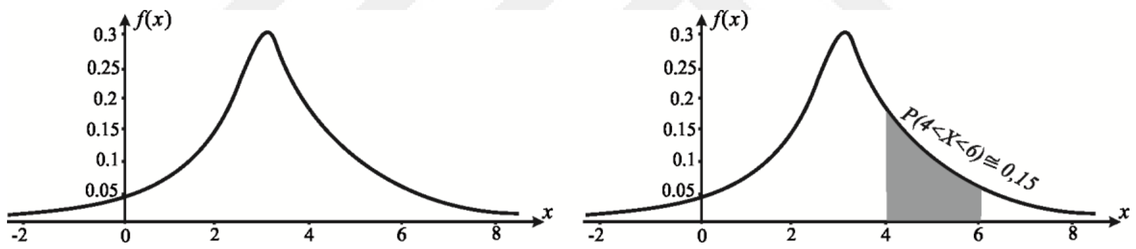
X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-\theta)^2} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

şeklinde ise, X Cauchy dağılımına sahiptir denir ve $X \sim Cauchy(\theta)$ ile gösterilir. Bu fonksiyon,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-\theta)^2} dx = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(\infty) - \arctan(-\infty)\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1$$

olduğundan bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Cauchy dağılımının en belirgin özelliği hiçbir momentinin olmamasıdır. Dağılım θ ya göre simetrik olup $\theta = 3$ için olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği aşağıda Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1.1: $\theta = 3$ için Cauchy dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

X rasgele değişkeni Cauchy dağılımına sahip olsun. $P(4 < X < 6)$ olasılığı

$$P(4 < X < 6) = \int_4^6 f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_4^6 \frac{1}{1+(x-3)^2} dx = \frac{1}{\pi} \arctan(x-3)\Big|_{x=4}^{6}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\arctan(3) - \arctan(1)\right) \cong \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{20} = 0.15$$

olarak hesaplanmıştır. Bu olasılık Şekil 1'de belirtilen taralı bölgenin alanıdır. Benzer şekilde,

$$P(3 < X < 4) = \frac{1}{\pi}\int_4^6 \frac{1}{1+(x-3)^2}dx = \frac{1}{\pi}\arctan(x-3)\Big|_{x=3}^{4}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\arctan(1) - \arctan(0)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{1}{4} = 0.25\text{'dir.}$$

Cauchy dağılımının en önemli özelliklerinden biri, ortalaması ve varyansı olmayan bir dağılım olmasıdır. Bu nedenle, standart istatistiksel tekniklerle karşılaştırıldığında bazı zorluklarla karşılaşılmaktadır. Özellikle, küçük örneklemlerle çalışırken, outlier (aykırı değer) olarak nitelendirilebilecek değerlerin etkisi belirgin olarak gözlenebilmektedir. Ayrıca, Cauchy dağılımı, merkezi limit teoremi gibi bazı önemli olasılık teoremlerinin varsayımlarını karşılamadığı için, bu tür teoremlerle yapılan çıkarımlar sırasında dikkatli olunması gereken bir dağılımdır. Ancak, bazı istatistiksel modellerde ve teorik çalışmalarda önemli bir rol oynar.

1.3. Karar Teorisi

Karar verme teorisi, bireylerin ve grupların nasıl karar verdiklerini anlamak ve bu kararların nasıl verilmesi gerektiği konularında ekonomistler, matematikçiler, filozoflar, sosyal bilimciler ve istatistikçilerin ortak çabasıdır. (Resnik, aktaran Koçi, 2009). Karar teorisi, risk ve belirsizlik altında nasıl karar verileceğini anlamak için kullanılır. Karar alıcılar, farklı kararların sonuçları ve bunların olasılıkları hakkında bilgi sahibi olmadıklarında, kararlarını nasıl optimize edeceklerini belirlemeye çalışırlar. Eğri modelleri, veri setinin dağılımını ve belirsizlik seviyesini analiz etmek için kullanılabilir. Bu, karar alıcının risk toleransını değerlendirmesine ve farklı kararlar arasında seçim yapmasına yardımcı olabilir. Karar teorisi, genellikle farklı karar alma modelleri ve yöntemlerini içerir. Örneğin:

Belirsizlik Altında Kararlar: Bilgi eksikliği veya belirsizlik durumunda karar alma sürecini ele alır.

Risk Altında Kararlar: Olasılıkların bilindiği ancak sonuçların tam olarak tahmin edilemediği durumlarda karar alma sürecini ele alır.

Fayda-Kayıp Analizi: Farklı aksiyonların sonuçlarına yönelik fayda ve kayıpları analiz eder.

Oyun Teorisi: Birden fazla karar verenin birbirleriyle etkileşim halinde olduğu durumları inceler.

Karar teorisi, bir karar vericinin farklı seçenekler arasında nasıl seçim yapacağını ve bu seçimlerin sonuçlarını değerlendirmesini inceler. Bu, genellikle belirsizlik, risk ve fayda gibi kavramları ele alır. Karar teorisi, bir kararın ne zaman ve nasıl alınması gerektiği, farklı alternatifler arasında nasıl tercih yapılacağı ve bu tercihlerin sonuçları hakkında nasıl değerlendirme yapılacağı gibi konuları kapsar. Karar teorisi, genellikle aşağıdaki temel bileşenlerden oluşur:

Karar Veren (Decision Maker): Karar veren, belirli bir durumda karar vermeye yetkili olan kişidir. Bu kişi, belirsizlik altında bir dizi olası sonuç arasından seçim yapar.

Aksiyonlar (Actions): Karar verenin, belirli bir durumda alabileceği farklı seçeneklerdir. Her aksiyonun, belirli bir sonuca yol açma olasılığı vardır.

Durumlar (States): Karar verenin karşılaşabileceği farklı durumlar veya koşullardır. Bu durumlar genellikle belirsizlik altındadır ve gelecekte gerçekleşebilecek farklı olayları temsil eder.

Sonuçlar (Outcomes): Her aksiyonun, her durum altında ortaya çıkabilecek sonuçlar kümesidir. Bu sonuçlar, genellikle bir fayda veya kayıp ölçütüne dayalı olarak değerlendirilir.

Bu bileşenler bir örnekle şöyle açıklanabilir:
Bir restoran sahibi, menüsüne yeni bir yemek eklemek istemektedir. Ancak hangi yemeği ekleyeceği konusunda kararsızlık yaşamaktadır.

Aksiyonlar (Actions):
Seçenek 1: Yeni bir vegan yemeği eklemek.
Seçenek 2: Yeni bir etli yemeği eklemek.
Seçenek 3: Yeni bir deniz ürünleri yemeği eklemek.

Durumlar (States):
Durum A: Toplumda vegan yemeğe olan talep artıyor.
Durum B: Etli yemeklerin popülerliği sabit kalıyor.
Durum C: Deniz ürünleri yemeklerine olan talep artıyor.

Sonuçlar (Outcomes):
Her seçenek için belirli durumlarda olası sonuçlar:

Seçenek 1:
Durum A'da: Müşteri memnuniyeti artabilir, yeni bir müşteri segmenti kazanılabilir.
Durum B'de: Vegan seçeneklere olan talep artmasına rağmen, etli yemeklere olan talep azalabilir.
Durum C'de: Vegan yemeklere olan talep artabilir, ancak deniz ürünleri yemeklerine olan talep de artabilir.

Seçenek 2:
Durum A'da: Belki yeni müşteriler kazanılabilir, ancak vegan müşteriler kaybedilebilir.
Durum B'de: Mevcut müşteri kitlesi memnuniyetle karşılayabilir, ancak yeni bir müşteri segmenti kazanılmamış olabilir.
Durum C'de: Deniz ürünleri yemeklerine olan talep artabilir, ancak etli yemeklere olan talep azalabilir.

Seçenek 3:
Durum A'da: Belki yeni müşteriler kazanılabilir, ancak vegan müşteriler kaybedilebilir.
Durum B'de: Müşteri memnuniyeti artabilir, ancak yeni bir müşteri segmenti kazanılmamış olabilir.
Durum C'de: Deniz ürünleri yemeklerine olan talep artabilir, ancak etli yemeklere olan talep de azalabilir.

Restoran sahibi, karar teorisini kullanarak hangi yemeği menüye ekleyeceğine karar verirken, olası durumları ve sonuçları dikkate alarak en uygun seçeneği belirleyebilir. Bu süreçte, belirsizlik altında bile en iyisini yapmaya yönelik rasyonel bir karar alma süreci izlemiş olur.

1.3.1. Fayda Fonksiyonları:

Belirsizlik altında, her bir sonucun olasılığıyla çarpılıp toplanarak beklenen değer hesaplanır.

E(Yeni Yemek)=P(Durum A)×U(Yeni Yemek | Durum A)+P(Durum B)×U(Yeni Yemek | Durum B)+P(Durum C)×U(Yeni Yemek | Durum C)

1.3.2. Fayda Fonksiyonu Maksimizasyonu:

Karar verenin elde etmek istediği maksimum faydayı sağlamak için seçenekler arasından en uygun olanını seçme işlemidir. Örneğin, restoran sahibinin yeni bir yemek ekleyip eklememe kararını, maksimum beklenen fayda elde etme hedefiyle alması gibi.

1.3.3. Karar Ağaçları:

Karar ağaçları, bir karar problemi için belirsizlik altında alınacak adımları ve sonuçları gösteren ağaç yapısıdır.
Örneğin, restoran sahibinin yeni bir yemek eklemesi durumunda alabileceği adımları ve sonuçları gösteren karar ağacı:

```
┌─────────┐          ┌─────────┐          ┌─────────┐
(Durum A)            (Durum B)            (Durum C)
└─────────┘          └─────────┘          └─────────┘
│                    │                    │
└────(1.seçenek)     └────(1.seçenek)     └────(1.seçenek)
└────(2.seçenek)     └────(2.seçenek)     └────(2.seçenek)
└────(3.seçenek)     └────(3.seçenek)     └────(3.seçenek)
```

1.4. Regresyon

Regresyon analizi, bir bağımlı değişken ile bir veya daha fazla bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi modellemek için kullanılır. Bu ilişki genellikle doğrusal veya doğrusal olmayan bir fonksiyonla ifade edilir. Regresyon analizi, sadece doğrusal ilişkileri modelleyebilirken, Witch of Agnesi gibi eğri modelleri, doğrusal olmayan ilişkileri de yakalayabilir. Regresyon analizine örnek olarak; bir perakende şirketi, satışlarını artırmak için reklam harcamalarını optimize etmeyi hedeflediği düşünülsün. Şirket, farklı dönemlerdeki reklam harcamalarını ve aynı dönemdeki satışları şöyle kaydetmiştir:

Reklam Harcamaları (x)	Satışlar (y)
1000 TL	120 birim
2000 TL	180 birim
3000 TL	210 birim
4000 TL	240 birim
5000 TL	290 birim

Regresyon analizi için bir model şöyle kurulur

$$y=\beta_0+\beta_1 x+\in$$

y satışlar, x reklam harcamaları, β0 ve β1 regresyon katsayıları, ϵ hata terimidir.

Eğim katsayısı, bağımsız değişkenin bağımlı değişken üzerindeki etkisini ölçer. En küçük kareler yöntemi kullanılarak β_1 aşağıdaki formülle tahmin edilir:

$$\widehat{\beta_1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

eşitliğinde değerler yerine yazılırsa $\widehat{\beta_1}$= 0.04 olarak elde edilir.

$\widehat{\beta_0}=\bar{y}-\widehat{\beta_1}\bar{x}$ eşitliğinden $\widehat{\beta_1}=88$ olarak hesaplanır.

Elde edilen değerler yerine konulduğunda;
Satışlar=88+0.04×Reklam Harcamaları olarak bulunur.

1.5. Bayes Teoremi

Bayes teoremi, bir olayın olasılığını, olayın meydana gelmesi durumunda bazı gözlemler elde edildiğinde bu olayın olasılığını güncelleyen bir olasılık teoremidir. Bayes teoremi, belirsizlik altında bilgi güncellemesi yapmak için kullanılmaktadır.

Uygulama Örneği: Bir şirketin insan kaynakları müdürü, sağlık bakanlığının istatistiklerine ve geçmiş iş başvurularına dayanarak, şirkete iş başvurusu yapan adayların %10'unun HİV virüsü taşıyıcısı olduğunu bilmektedir. Şirketin sağlık sigortası giderlerini en aza indirmek için insan kaynakları müdürü, adayların işe alınmadan önce HİV virüsü taşıyıcı olup olmadıklarını belirlemek için bir test uygulanmasına karar vermiştir. İnsan kaynakları müdürü tarafından seçilen test, %90 doğruluk oranına sahiptir. Yani, bir kişi için test pozitif çıkarsa, o kişinin HİV pozitif olma olasılığı %90'dır ve aynı şekilde bir kişi için test negatif çıkarsa, o kişinin HİV negatif olma olasılığı %90'dır.

H1: Kişi HİV pozitiftir.
H2: Kişi HİV pozitif değildir.
T1: Test kişinin HİV pozitif olduğunu söyler.
T2: Test kişinin HİV pozitif olmadığını söyler.
Olayların olasılıkları şöyledir:

$P(H_1) = 0.10 \qquad P(H_2) = 0.90$

$P(T_1|H_1) = 0.90 \qquad P(T_2|H_1) = 0.10$

$P(T_1|H_2) = 0.10 \qquad P(T_2|H_2) = 0.90$

$P(T_1) = P(T_1 \cap H_1) + P(T_1 \cap H_2) = (0.90)\,(0.10) + (0.10)\,(0.90) = 0.18$

$P(T_2) = 1 - P(T_2) = 1 - P(\bar{T}_1) = 1 - 0.18 = 0.82$

İnsan kaynakları müdürü test sonuçlarının doğru çıkma olasılıklarını ifade eden $P(T_1|H_1)$ ve $P(T_2|H_2)$ olasılıkları ile ilgilenmektedir. Bayes teoremine göre;

$$P(H_1|T_1) = \frac{P(T_1|H_1)\,P(H_1)}{P(T_1)} = \frac{(0.90)\,(0.10)}{0.18} = 0.50$$

$$P(H_2|T_2) = \frac{P(T_2|H_2)\,P(H_2)}{P(T_2)} = \frac{(0.90)\,(0.90)}{0.82} = 0.988$$

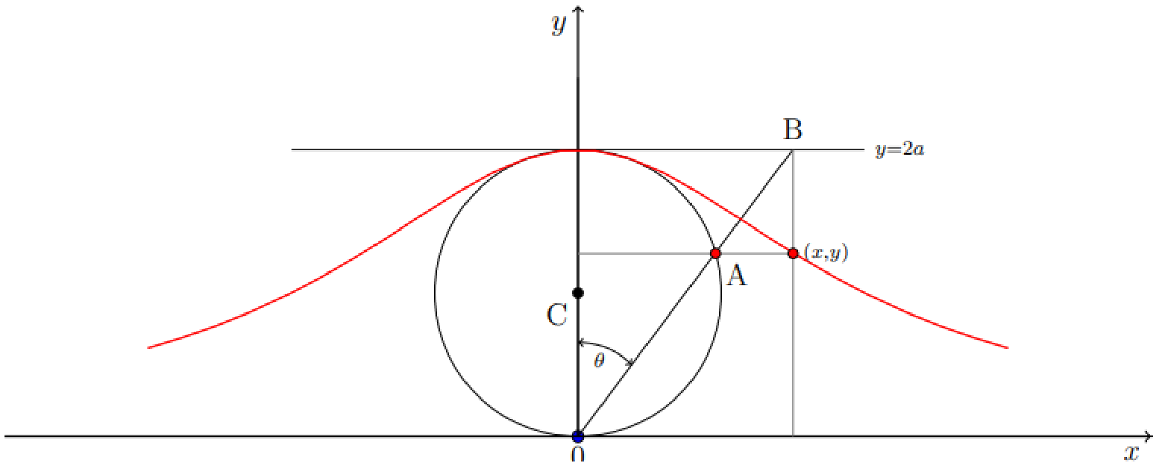
Bu sonuçlara göre; eğer test kişinin HIV pozitif olduğunu söylerse %50 olasılıkla doğrudur ve eğer test kişinin HIV negatif olduğunu söylerse testin sonucu %98 olasılıkla doğrudur.

Özellikle, eğri modelleri gibi parametreli modellerde, Bayes teoremi parametrelerin belirlenmesi için bir çerçeve sağlamaktadır. Veri setinden elde edilen bilgiler kullanılarak, parametrelerin olasılık dağılımları güncellenebilmektedir. Witch of Agnesi gibi eğri modelleri, belirli bir fonksiyon formu kullanılarak belirlenen parametrelere sahiptir. Bu parametreler, eğrinin şeklini ve davranışını belirler. Veri seti gözlemleri kullanılarak, bu parametrelerin değerleri tahmin edilebilir. Bu tahminde, Bayes teoremi ve Bayesci istatistik yöntemleri kullanılabilir.

2. WITCH OF AGNESI

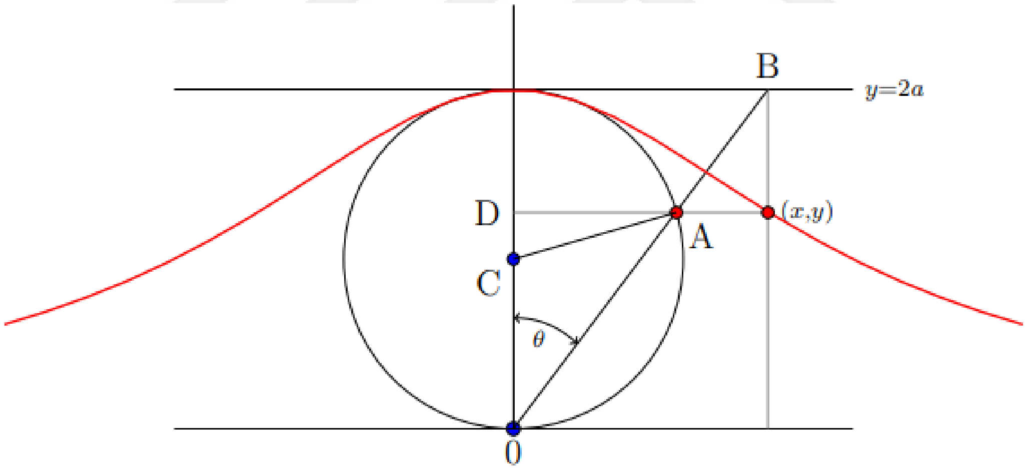
Witch of Agnesi, İtalyan matematikçi Maria Gaetana Agnesi'nin adını taşıyan bir matematiksel eğriyi ifade eder. Eğri, resmi olarak İtalyanca'da "versiera" olarak bilinir ve İngilizce'de "cadı" anlamına gelir. İlk kez Agnesi tarafından 1748'de yayımlanan "Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana" (İtalyan Gençliği için Analitik Kurumlar) adlı kitabında incelenmiştir. "Witch of Agnesi" adı, mistik veya doğaüstü bir şeyle herhangi bir bağlantısı olmayan, tamamen matematiksel bir kavram olan eğrinin adıdır. "Witch" terimi, İtalyanca kelime "versiera"nın yanlış bir çevirisinden ortaya çıktığı düşünülmektedir.

Maria Gaetana Agnesi, öncü bir matematikçi olarak diferansiyel ve integral hesaplama ile matematiksel analizdeki sonraki gelişmelerin temelini atmıştır. Witch of Agnesi, tarihsel öneme sahip bir matematik eğridir, matematik analizi ve hesaplama bağlamında ilginç özelliklere sahiptir.



Şekil 1.2: Witch of Agnesi eğri grafiği

Yukarıdaki şekilde merkezi C = (0, a) noktasında bulunan a yarıçaplı bir çember gösterilmektedir. (x, y) noktaları şu şekilde elde edilir: O = (0, 0) noktasından $y = 2a$ doğrusu üzerindeki herhangi bir noktaya bir çizgi çizildiğinde çemberi A noktasında keser. B den indirilen dikmenin kesiştiği nokta eğrinin (x, y) noktasıdır.



Şekil 1.3: Witch of Agnesi eğri grafiği

Yukarıdaki şekil incelendiğinde, Pozitif y ekseni ile OB çizgisi arasında θ açısı cinsinden (x, y) noktaları için parametrik denklemler elde edilebilir. Y değeri, $a+|CD| = a\cos(2\theta)$ 'ya eşittir. $\widehat{DCA} = 2\theta$ ve $|CA| = a$ olduğu görülmektedir.

$y = a + a\cos(2\theta)$ ve $x = 2a\tan\theta$

$y = a + a\cos(2\theta) = a\left(1+\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = a\left(1+\cos^2\theta - \left(1-\cos^2\theta\right)\right)$

$y = 2a\cos^2\theta$

x ve y için parametrik denklemler;

$x = 2a \tan\theta$ ve $y = 2a \cos2\theta$ olarak bulunmuştur.

Y değerini tanımlayan x fonksiyonunu elde edelim.

$$x^2 = 4a^2 \tan^2\theta = 4a^2\left(sec^2\theta - 1\right) = 4a^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)$$

$$x^2 = 4a^2\left(\frac{2a}{y} - 1\right)$$

Denklem çözümlendiğinde;

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$

elde edilir.

Yukarıda bu eğriyle ve aşağıda x ekseniyle sınırlanan alanı bulalım.

$$Area = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} dx = \lim_{M\to\infty} \int_{-M/2}^{M/2} \frac{8a^3}{4a^2y^2 + 4a^2} (2a)\, dy$$

$$= 4a^2 \lim_{M\to\infty} \int_{-M/2a}^{M/2a} \frac{1}{y^2 + 1} dy = 4a^2 \lim_{M\to\infty} \left(\tan^{-1}\left(\frac{M}{2a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{M}{2a}\right)\right)$$

$$= 4\pi a^2$$

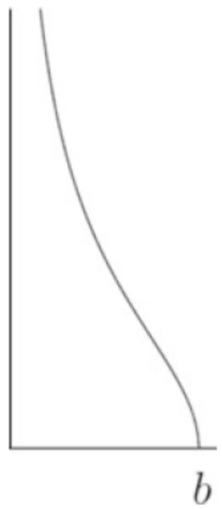
Bu alan eğriyi oluşturmak için kullanılan dairenin alanının 4 katıdır.

a, eğrinin genişliğini belirleyen bir parametredir. Eğri, çan şeklinde olan bir eğridir ve genellikle iki ucu sonsuza giden simetrik bir yapıya sahiptir (Agnesi, 1801).
Agnesi'den önce, eğriye farklı bir bakış açısıyla Pierre de Fermat tarafından incelenmiştir

(Quadratures Üzerine İnceleme, 1659). S. Stigler, Newton'un bu eğri üzerinde 1718'den önce çalıştığını, ancak bu çalışmanın 1779'a kadar yayımlanmadığını belirtir. (Magnaghi-Delfino, Norando, 2020).

Fermat'ın Quadratures Üzerine İnceleme'si (1659), her bir durumda uygun integrasyon sınırlarıyla daha yüksek bir parabol veya daha yüksek bir hiperbol altındaki alanın hesaplanmasının ilk bilinen kanıtını içerir. İncelemenin ikinci bölümü, Fermat'ın çağdaşları tarafından genellikle fark edilmeyen, okunması zor bir kısımdır. Fermat, örtülü formdaki çok sayıda cebirsel eğrinin karelemesini, bilinen eğrilerin kareleme işlemine indirgedi. Diğerleri ise dairenin kareleme işlemine indirgedi. Fermat, o dönemde oldukça yeni olan iki prosedürü zekice kullandı: değişkenlerin değiştirilmesi ve bölümlerle integrasyon formülünün özel bir durumu. Bu araçlarla Fermat, Descartes'ın folium'u, Diocles'in cissoid'i veya Witch of Agnesi gibi bazı iyi bilinen eğrileri kareleyebilmiştir (Noranda, Magnaghi-Delfino, 2020). Fermat, Witch of Agnesi'nin incelemesinde üçüncü dereceden denklem yoluyla tanıtmıştır:

$b^3 = x^2 + xb^2$ (Eşitlik 1)



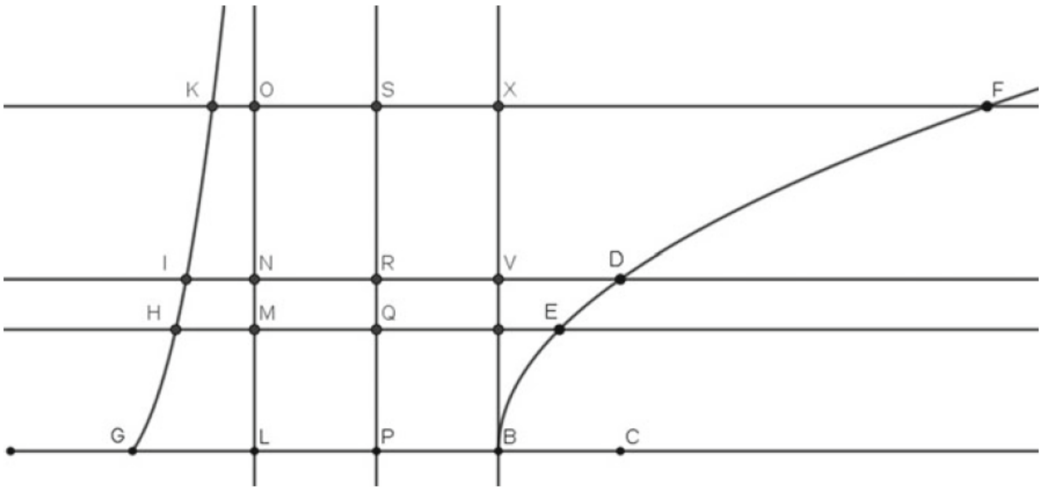
Şekil 1.4: Eşitlik 1 denklemin grafiği

Burada b, pozitif bir parametredir. Denklem (1) ile uyumlu grafiği Şekil 4'te görülmektedir. Fermat, eğri ve asimptot içeren düzlem bölgenin alanını belirlemiştir. Şekil 5'te benzer bir grafik verilmiştir. Bu şekilde, x ve y ekseni değişmiş olarak görülüyor, ki bu dönemin matematik çalışmalarında yaygın bir durumdur. Şekil, değişkenlerin ilk değişimini açıklar.

$$x = \frac{z^2}{b}$$

Eşitlik 1'i şuna dönüştürür.

$$b^4 = z^2y^2 + z^2b^2$$



Şekil 1.5: Fermat Grafiği

Sonrasında, Fermat ikinci değişken dönüşünü kullanır.

$$y=\frac{ub}{z}$$

Eşitlik şuna dönüşür:

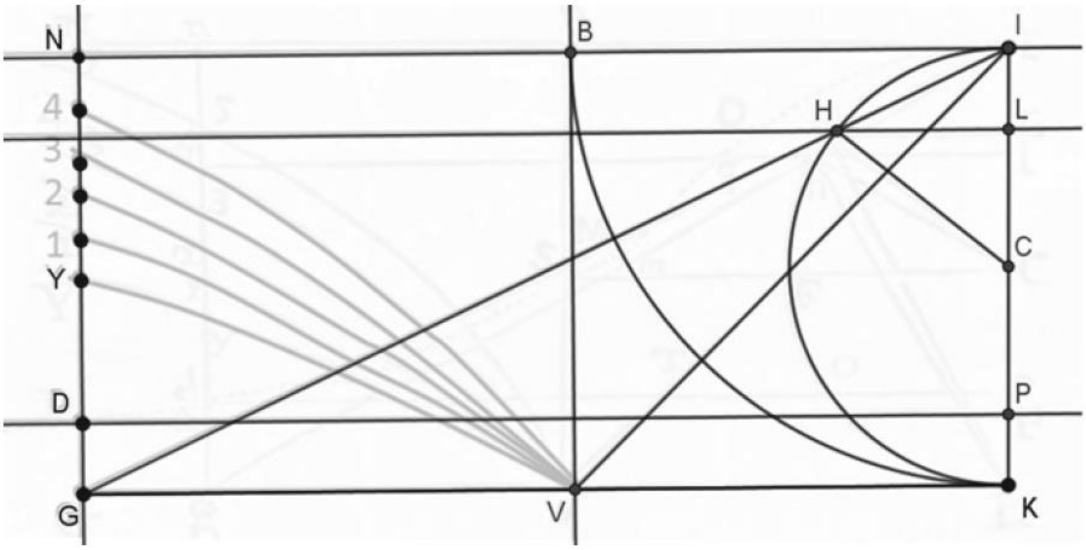
$$b^2=u^2=z^2$$

Fermat, üçüncü dereceden eğrinin karelemesini (quadrature) dairenin karelemesine (quadrature) indirgediğini iddia etmiştir.
Modern bir bakış açısından, Fermat sonucu iki bölümdeki integrasyon yöntemi kullanarak elde eder.

$$\int_0^\infty xdy = V.C.1 = \frac{1}{b}\int_0^\infty z^2dy = G.R. = \frac{2}{b}\int_0^b yzdz = V.C.2$$

$$= 2\int_0^b udz = 2\int_0^b \sqrt{b^2 - z^2}dz = \frac{\pi}{2}b^2$$

Grandi'nin Quadratura Circuli et Hyperbolae adlı kitabında, Maria Gaetana Agnesi ile ilişkilendirilen yer eğrisine Scala, yani ölçek eğrisi adını verdi. Grandi, bu eğriyi ışık yoğunluğunu ölçmek için bir ölçü olarak kullanılabileceğini düşündüğü için Scala adını haklı çıkardı. Bunu Claude Francois Milliet Dechales'ın Opticae, Liber III'de açıklanan ışığın ışınlarına ait özelliklerle akılda tutarak yapmıştır (Alexander, 2012)

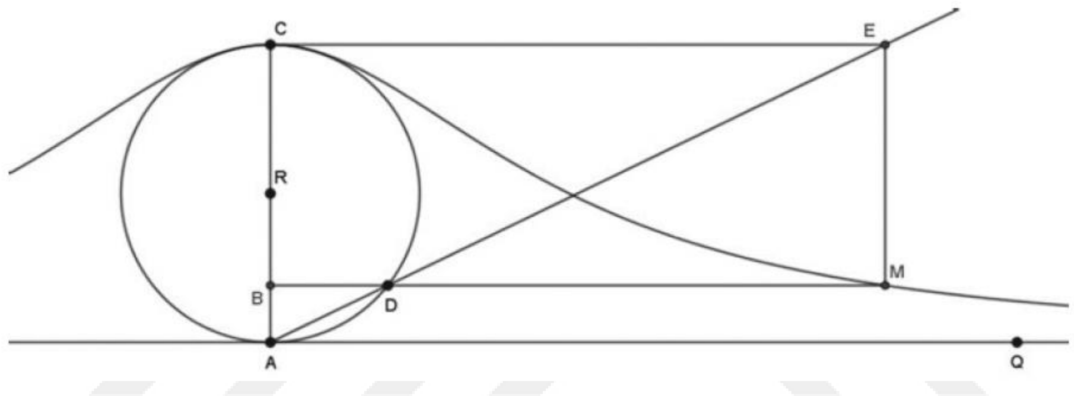


Şekil 1.6: Grandi Önerme III

Grandi, yer eğrisinin ilk tanımını Önerme III'te vermiştir (Şekil 6). Ardından, Önerme IV'te, Grandi, Scala'nın Cartesian denkleminden türetilir. ICH = ϕ, KI =a, KG=x, GD=LI=y olarak alarak, şunu kanıtlar:

$$IL = \frac{a}{2}(1 - \cos\varphi) = \frac{a}{2}vers\varphi = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

Versin veya versinüs kullanımı önemlidir çünkü versin, özellikle hesaplamalarda, logaritması her zaman hesaplanabilen ve modern hesaplama araçları olmadan, logaritmik tablolar aracılığıyla işlemleri basitleştiren en önemli trigonometrik fonksiyonlardan biri olarak kabul ediliyordu. Versin, Ptolemy tarafından türetilen yarı açı formülünün uygulanmasında ara bir adım olarak ortaya çıkar. Versin kullanımı, Dünya yüzeyindeki noktalar arasındaki mesafelerin hesaplanmasında çok önemlidir. Bu hesaplama, enlem ve boylam bilgisi temel alınarak haversin formülü olarak adlandırılan formülle yapılmıştır. Grandi, eğrinin ikinci bir tanımı yaklaşık otuz yıl sonra Maria Gaetana Agnesi tarafından yapılacaktır (Noranda, Magnaghi-Delfino, 2020).



Şekil 1.7: Agnesi Versiera

Maria Gaetana, eğrinin kartezyen denklemini ve çizim yöntemini bulur. II. Tomo'da, tepe noktasını, asimptotik çizgiyi, diferansiyel yöntemi ve integral yoluyla esnek noktaları geometrik ve diferansiyel yöntemleri birleştirerek bulur. Maria Gaetana, versiera ve asimptot arasındaki alanı, integralin bir fonksiyonun belirli bir aralık üzerinde hesaplanabileceğini ifade eden hesaplamaların ikinci temel teoremi olarak bildiğimiz diferansiyel yöntemi ile hesaplayamaz. Ancak 1825 yılında Augustin-Louis Cauchy, fonksiyon ve limit kavramını infinitesimal analize tanıtma projesine başlamıştır (Noranda, Magnaghi-Delfino, 2020).

Maria Gaetana'nın versiera için hatırlanmasının, kitabındaki birçok eğriden biri olmasından kaynaklanan bir ilginçlik olduğu görülmektedir. Bu ilginçlik tüm çalışmasının önemi yerine öne çıkan tek bir eğri üzerinden hatırlanmasına işaret eder. İtalyan matematikçilerinin Agnesi'nin versiera'sını "Witch" olarak düşünmediklerine dair başka bir kanıt, G. Peano'nun Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale adlı eserindeki ilginç bir hata ile sunulur. Peano, belirli bir denklemin yer eğrisinin "Agnesi'nin visierası" olarak adlandırıldığını belirtir ve bu eğrinin kutup koordinatlarındaki denklemini verir. Ancak bu, Peano'nun hafızasında çift bir hata gibi görünmektedir. Çünkü bu eğri Agnesi'nin versiera'sı değildir. Gino Loria şöyle sonuç çıkarır: "Bu, versiera'dan oldukça farklı bir eğridir ve Peano tarafından verilen visiera adını koruyabilir”. Cauchy dağılımı, normal dağılıma görsel olarak benzeyen bir tepe dağılıma sahiptir, ancak ağır kuyrukları, simetrisine rağmen, normal tanımlamalara göre beklenen bir değere sahip olmasını engeller. Witch eğrisi, eğri ve asimptotik çizgi arasındaki bölgenin merkez kümesinin koordinatının, bu bölgenin simetrisine ve sonlu alanına rağmen iyi tanımlanmamış olduğu anlamına gelir.

Versiera, özellikle rezonans fenomenlerinde fizikte birçok uygulama bulur. Bir örnek, bir atoma çarpan doğrudan monokromatik ışıktır: atom tarafından yayılan ışının yoğunluğu, frekans farkına bağlı olarak bir versiera şeklinde olup, çeşitli tıbbi görüntüleme uygulamalarında X-ışını spektrumunun yaklaşık enerji dağılımını oluşturur. Elektrik devrelerinde ve akışkan dinamiklerinde de başka uygulamalar bulunmaktadır. Düz bir tepenin kesiti, Witch eğrisine benzer bir şekle sahiptir. Bu şekle sahip eğriler, matematiksel modellemede akıştaki genel topografik engel olarak kullanılmıştır. (Noranda, Magnaghi-Delfino, 2020).

Witch of Agnesi, diferansiyel ve integral hesaplamaları gibi matematiksel analiz konularında önemli bir rol oynamıştır. Bu eğri, diferansiyel ve integral konularında öğrenilmesi gereken bazı temel kavramların anlaşılmasına yardımcı olabilir. Eğrinin genişletilmiş formu, çeşitli matematiksel konularda ortaya çıkan çeşitli matematiksel özelliklere sahiptir. Bu özellikler arasında sonsuz kare kökler ve limit değerleri gibi konular bulunmaktadır. Witch of Agnesi, matematiksel bir eğri olmanın ötesinde, geometrik bir anlam taşır. Bu eğri, belirli matematiksel sorunları anlamak ve çözmek için kullanılabilecek bir araçtır. Eğri ilginç özelliklere sahiptir ve genellikle matematikte ve diferansiyel geometride kullanılır. Witch of Agnesi’nin bazı bağlamsal kullanım alanları şöyledir:

Matematiksel Analiz: Diferansiyel ve integral hesaplamaları gibi matematiksel analiz konularında öğrenim materyali olarak kullanılabilir. Eğrinin denklemi ve özellikleri, öğrencilere matematikteki karmaşık fonksiyonları ve eğrileri anlamada yardımcı olabilir.

Görselleştirme ve Eğitim: Matematik öğretiminde ve görselleştirmede kullanılabilir. Belli bir matematik konseptinin veya fonksiyonun nasıl davrandığını anlamak için grafikler oluşturmak amacıyla kullanılabilir.

İstatistiksel Modelleme: Regresyon analizleri veya veri modelleri oluşturulurken benzer eğrilerin matematiksel temsilini anlamak için referans olarak kullanılabilir.

Mühendislik Uygulamaları: Mühendislikte, matematiksel modeller ve eğriler genellikle çeşitli mühendislik problemlerini çözmek için kullanılır. Matematiksel özellikleri, belirli mühendislik uygulamalarında modelleme veya analizde kullanılabilir.

3. WITCH OF AGNESI VE KARAR TEORİSİ

(1,1) noktasından $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ de rastgele seçilen θ açısıyla x eksenine bir doğru çizildiğini varsayalım. x>0 ise, x ₺ kazandığınız ancak; x<0 ise x ₺ ödediğiniz bir şans oyununda, bu şans oyununa katılmak için ne kadar ödemeye istekli olmalısınız? Bu şans oyununa bir fiyat koymak için olasılık dağılımı belirlenmelidir.

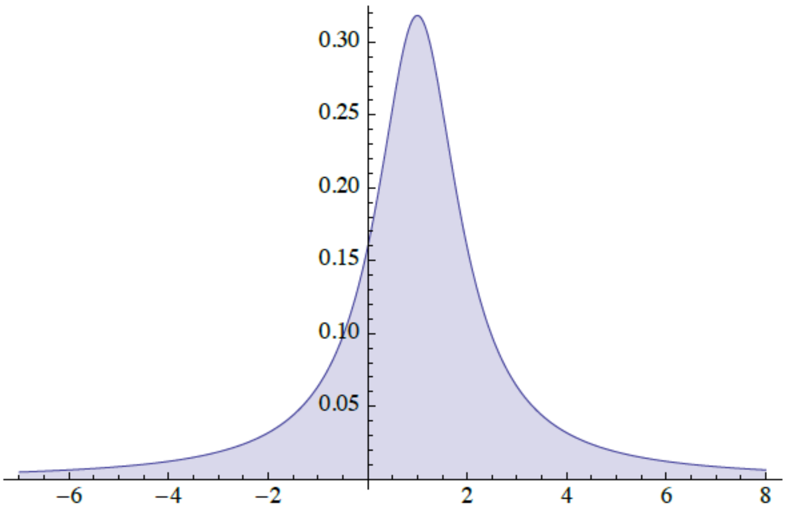
$$\theta = \mathrm{ar}\tan\left(\frac{x-1}{1}\right)$$

ve

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1+(x-1)^2}$$

x-1 değeri, x yerine yazılır. Çünkü çizgi (0,1) yerine (1,1) noktasından geçmektedir. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığı seçildiği için bu değeri π ye bölersek olasılık dağılımı söyle olur:

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-1)^2}$$



Şekil 1.8: Olasılık dağılımı

Şekil 8, olasılık dağılımının bir grafiğini gösterir. Grafikte iki dikkate değer şey bulunmaktadır. İlk olarak, dağılım normal dağılıma benzer görünse ve her ikisi de "çan şeklinde" olsa da belirgin bir şekilde daha ağır kuyruklara sahiptir. İkinci olarak, dağılım Witch of Agnesi'nın formunu almıştır, tek değişiklik sağa bir birim kaydırılması ve $\frac{1}{\pi}$ yeniden normalleştirme sabiti ile çarpılmasıdır. Bir olasılık dağılımı olarak görüldüğünde, Witch of Agnesi daha çok "Cauchy dağılımı" olarak bilinir, bununla birlikte, onu tanımlayan geometrik eğri hakkındaki bilgi, Cauchy'den önce önemli bir ölçüde varlığını sürdürmekteydi. Fizikte, Cauchy dağılımı, harmonik osilatörün rezonans denklemine yaklaşım olarak yaygın bir şekilde karşımıza çıkar (Alexander, 2010).

Dağılımın doğası göz önüne alındığında, temsil ettiği oyunun dikkate alınmaya değer bir oyun olduğu görünmektedir. Varsayalım ki dağılım 1 yerine 0'da merkezlenmiş olsun. Bu durumda, dağılımın 0 etrafındaki simetrisi, bir miktar kazanma şansının $(n-\in, n+\in)$ aralığında, bazı n, $\in > 0$ için, tam olarak $(-(n-\in), -(n+\in))$ aralığında bir miktar kaybetme şansına eşit olduğu anlamına gelmektedir. Dağılımın 0 etrafındaki simetrisi adil bir bahis oluşturur. Dağılımı bir birim sağa kaydırmak, sadece 1 etrafında simetrik hale getirmek, oyunu lehimize çevirir: Şimdi bir miktar kazanma şansı $(n-\in, n+\in)$ aralığında bir miktar kaybetme şansını $(-(n-\in), -(n+\in))$ aralığını aşmaktadır. Başka bir şekilde ifade etmek gerekirse: Eğer Witch 0 noktasında olsaydı, rasyonel bir kişi oynamaya karşı duyarsız olacaktı, ancak Witch 1 noktasında olduğunda oynamak oldukça çekici görünmektedir. Henüz bu oyunu oynamak için ne kadar ödemeye istekli olunması gerektiği bilinmese de, ödemeye istekli olunması gerektiğine dair kesin bir izlenim var gibi görünüyor. Burada önemli soru “ne kadar?” dır. Ne kadar ödemeye istekli olmamız gerektiğini anlamanın doğal yolu, oyunun beklenen değerini hesaplamaktır. Oyunun beklenen değerini belirlemek, aşağıdaki düzensiz integralin değerini hesaplamayı gerektirir:

$$\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+(x-1)^2}\mathrm{d}x$$

Ancak,

$$\int \frac{x}{1+(x-1)^2}dx = ar\tan(x-1) + \frac{1}{2}\log\left(1+(x-1)^2\right)$$

beklenen değeri veren integral, belirsiz form $\infty - \infty$'e sahiptir ve tanımsızdır. Bu nedenle, ilginç bir şekilde, oyunun beklenen değeri yoktur.

Değerlendirilmesi zor olan oyunlar, genellikle farklı nedenlerden dolayı karar teorisinde yabancı değildir. Belki de en bilinen zor değerlendirilebilen oyun türü belirsizlik altında seçimle ilgili olanıdır. Burada sonuçlar bilinir, ancak bunlar üzerine bir olasılık dağılımı yoktur. Bu durumda, oyun için ne kadar ödemeye istekli olacağınızı kolayca söylemenin mümkün olmaması şaşırtıcı olmamalıdır. Başka bir zor değerlendirilebilen oyun türü, sonuçların bilinmediği durumları içerir. Elimde kahverengi bir kâğıt torba varsa onun için ne kadar ödemeye istekli olmalısınız? Bu durumda, torbanın içinde iyi veya kötü her şey olabilir. Ancak sözü edilen şans oyunu, çok farklı nedenlerle değerlendirmesi zordur. Tüm ilgili olasılıksal bilgilere sahip olunduğu için bu bir belirsizlik altında karar problemi değildir. Tüm olası sonuçların neler olduğu bilinmektedir; belirli bir miktar para kazanılır veya kaybedilir. Ancak, yine de beklenen bir değerin var olmaması durumu mevcuttur.

Birçok oyunun beklenen değerleri yoktur. Belki de en ünlü örnek, Daniel Bernoulli'yi 1738'de beklenen fayda teorisini geliştirmeye yönlendiren, Petersburg paradoksuna yol açan şans oyunudur. Daha yakın bir örnek, 2004'te Nover ve Hájek tarafından icat edilen Pasadena oyunudur. Pasadena oyununda, bir madeni para atarsınız, ilk kez tura gelene kadar devam edersiniz; eğer n. kez tura gelirse, sonuç $(-1)^{n-1} \cdot \frac{2^n}{n}$ ile ifade edilir ki; pozitif değerler kazandığınız parayı, negatif değerler ise ödemeniz gereken parayı gösterir. Pasadena oyunuyla ilgili ilginç olan şey, ödemelerin sırayla gelen harmonik serisinin terimlerini üretecek şekilde dikkatlice oluşturulmuş olmasıdır. Bu nedenle, olası ödemelerin toplamak için doğal bir sıralamalarının olmaması ve sırayla gelen harmonik serisinin koşullu olarak yakınsak olması, terimleri uygun bir şekilde yeniden düzenleyerek herhangi bir değere (veya hatta ayrılmaya) yakınsatılabilir olmasından dolayı beklenen bir değere sahip değildir.

Ancak, sadece Pasadena oyununun beklenen bir değere sahip olmaması nedeniyle ona bir değer atamanın prensipte mümkün olmadığını düşünmek bir hata olur. Kenny Easwaran'ın son makalesinde, Pasadena oyununa "zayıf beklentiler" yöntemi kullanarak sezgisel olarak etkileyici bir değer atanabileceğini savunmuştur. Bu yöntem, Pasadena oyununa makul bir değer atamakla kalmaz, bu değeri aynı zamanda oyunun çeşitli varyasyonlarına uygulanan üstünlük mantığına saygı gösteren bir şekilde atar. Örneğin, Pasadena oyunuyla aynı şekilde tanımlanan ancak her bir sonuç için ödeme +1 eklenmiş olan Altadena oyununu düşünün. Üstünlük mantığı, Pasadena oyununu nasıl değerlendirirsek değerlendirelim, Altadena oyununu "bir daha iyi" değerlendirmemiz gerektiğini önerir. Ve gerçekten de Easwaran'ın zayıf beklentiler yöntemi, Altadena oyununa $\log(2) + 1$ değerini atar.

Alexander (2010), zayıf beklentilerin, daha önce değerlendirmesi zor olan oyunlara değer atamada başarılı olması göz önüne alındığında, zayıf beklentileri Witch of Agnesi'yi değerlendirmek için kullanamayacağımızı ifade etmiştir. Zayıf beklentilerin uygulanmasını engelleyen matematiksel düşüncelerin olduğunu ve Witch of Agnesi'ye değer atamanın alternatif yöntemlerini ele almıştır.

Zayıf beklentiler neden yeterli değil?

Zayıf Büyük Sayılar Yasasının aşağıdaki şeklini kullanarak, Easwaran, Pasadena oyunu için bir zayıf beklenti olduğunu kanıtlar:

Y_1, Y_2, ... [bağımsız, aynı dağılıma sahip rastgele değişkenler] olsun,

$y\Pr(|Y_i| > y) \to 0$ as $y \to \infty$.

$Sn = Y_1 + \cdots + Y_n$ olsun ve M_n rastgele değişkenin beklentisi olsun.

Ayrıca, $|Y_1| > n$ olduğunda 0 olan ve aksi takdirde Y_1'e eşit olan bir rastgele değişken olsun.

$\frac{S_n}{n} - \mu_n \to 0$ olasılık içinde

Bu durum sağlandığında ve $n \rightarrow \infty$ olduğunda M_n ω'ye yakınsarsa, sınır(limit) ω'nin zayıf bir beklenti olduğu söylenir. Böylece, bir zayıf beklentinin var olup olmadığı, bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenlerin toplamının yakınsama davranışına bağlı olduğunu görülür. Bu durumu söz konusu oyun için değerlendirelim.

X ve Y iki bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişken olsun, her biri merkezi 1 olan Cauchy dağılımına sahip. Gördüğümüz gibi, X ve Y için olasılık yoğunluk fonksiyonları şöyledir:

$$p_X(x) = p_Y(x) = \frac{1}{\pi\left(1 + (x-1)^2\right)}$$

Şimdi, Z = X + Y rastgele değişkenini düşünelim. Olasılık teorisi bize, Z'nin yoğunluk fonksiyonunun X ve Y'nin yoğunluklarının integrali tarafından verildiğini söyler.

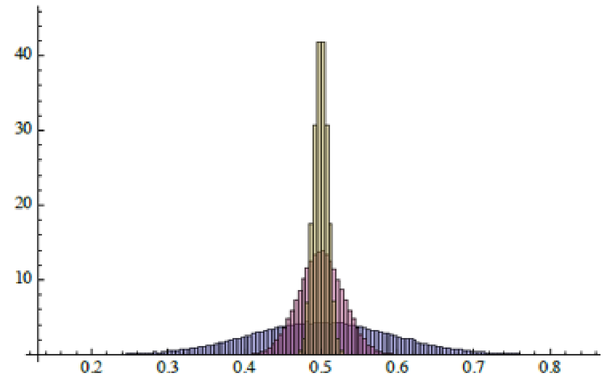
$$p_z(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(z-y-1)^2} \cdot \frac{1}{1+(y-1)^2} dy = \frac{2}{\pi\left(8-4z+z^2\right)}$$

Öyleyse X ve Y'nin ortalaması nedir? Eğer $M = \frac{X+Y}{2} = \frac{1}{2}Z$ ortalamayı ifade ediyorsa, olasılık teorisi tekrar yoğunluk fonksiyonu M'nin Z'nin yoğunluğuna göre $p_M(x) = 2p_z(2x)$ ilişkili olduğunu söyler. Bu nedenle, merkezi 1 etrafında Cauchy dağılımına sahip iki bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenin ortalaması olduğu bulunur.

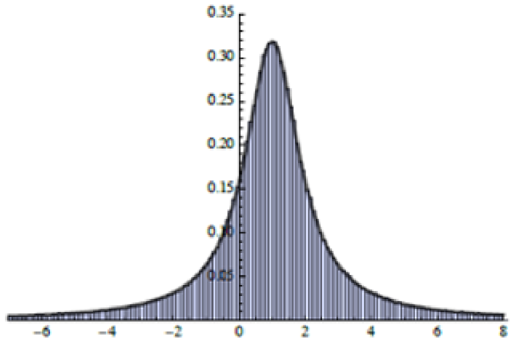
$$P_M(x) = 2 \cdot \frac{1}{\pi\left(8-4(2x)+\left(2X^2\right)\right)} = \frac{1}{\pi(1+(X-1)}$$

Yani, iki rastgele değişkenin ortalaması, bir bireysel rastgele değişkenle aynı dağılıma sahiptir.

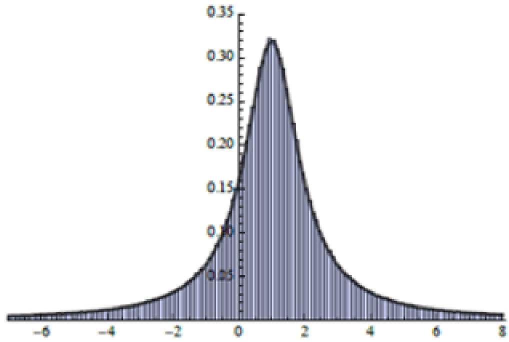
Cauchy dağılımı için, bu gerçek genel olarak geçerlidir. Eğer $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merkezi 1 olan Cauchy dağılımına sahip bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenler ise, öyleyse $S_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ ortalama da Cauchy dağılımına sahiptir. Bu, problemimiz için birkaç önemli sonuç doğurur. Öncelikle, tekrarlanan bir oyunun değerini belirlemenin, ortalama kazancınızla ilgilendiğiniz durumun, bir oyunun tek bir oynanışının değerini belirlemekle eşdeğer olduğu anlamına gelir. Bu nedenle, bir oyunu çok sayıda tekrarlamak, ortalamasını ve beklenen değerini yaklaşık olarak vermesi bakımından avantajlıdır. Diyelim ki [0,1] aralığında uniform olasılıkla tanımlanan bir oyunu düşünüyorsanız, burada sadece seçilen miktarı kazanırsınız. Bu bahsin beklenen değeri, elbette, 1/2'dir. Şimdi diyelim ki oyunu 10, 100 veya 1000 kez tekrar etmeyi düşünüyordunuz. Ortalama kazançlarınızın dağılımı nasıl olurdu? Şekil 9(a), bu üç dağılımın karşılaştırılması vardır. Merkezi limit teoremi, oyunu tekrar etmenin, ortalama kazancınızın oyunun beklenen değeri etrafında yaklaşık olarak normal dağılmasını sağladığını ve daha da önemlisi, ortalama kazancınızdaki varyansı önemli ölçüde azalttığını söyler. Bu nedenle, örnek ortalamayı oyunun beklenen değeri ölçüsü olarak kullanabiliriz. Ancak, 9(b) ve 9(c) şekilleri gösterdiği gibi, bu durum Cauchy dağılımı için geçerli değildir. 0 şekli, 1 merkezli simetrik Cauchy dağılımından yapılan 100.000 çekimden oluşan simülasyonla belirlenen deneysel dağılımı gösterir. 0 şekli, her biri 1 merkezli simetrik Cauchy dağılımından yapılan 1.000 çekimden oluşan 100.000 örnek ortalamasının dağılımını gösterir. Daha önce belirtildiği gibi, örnek büyüklüğünü artırmak hiçbir fayda sağlamaz, çünkü örnek ortalamalarının dağılımı, bir bireysel rastgele değişkenin dağılımıyla tamamen aynıdır. Kısacası, bir oyunu ne kadar ödemeye istekli olmanız gerektiğini belirlemeye çalışmak için, eğer oyunu n kez tekrarlarsanız ortalama kazançlarınızın dağılımını düşünerek bir sonuca ulaşmak imkansızdır.



(a) S_{10}, S_{100} ve S_{1000} örneklem büyüklüğünde [0,1] aralığındaki uniform dağılım



(b) 1 merkezli simetrik Cauchy dağılımından alınan bir rastgele değişkenin 100.000 tekrarın dağılımı



(b) 1 merkezli simetrik Cauchy dağılımından alınan S_{1000} örneklemin 100.000 tekrarın dağılımı

Şekil 1.9: Cauchy dağılımı için merkezi limit teoremine göre incelenmesi

Son olarak, güçlü ve zayıf büyük sayılar yasalarının da geçerli olmadığı incelenmelidir. Güçlü yasa, örnek ortalamasının dağılımın beklenen değerine yakınsadığını söyler; ancak, gördüğümüz gibi, Cauchy dağılımının beklenen bir değeri yoktur. Ancak bizim için önemli olan, zayıf büyük sayılar yasasının geçerli olmamasının, bu özel oyunda zayıf bir beklentinin de bulunmadığı anlamına gelmesidir.

Zayıf bir beklentinin var olmamasının nedeni oldukça kolay görülebilir, çünkü Sn dağılımının tüm n'ler için normal bir Cauchy dağılımı olduğu gerçeğiyle bağlantılıdır. Bir zayıf beklenti W'nin var olabilmesi için, rastgele değişkenler dizisinin Sn'nin W'ye olasılıkla yakınsaması gerekmektedir. Ancak, Sn dizisi W'ye olasılıkla yakınsayamaz çünkü her Sn, yukarıda belirtildiği gibi, orijinal Cauchy dağılımına göre dağıtılmaktadır. Bu, herhangi bir gerçel r için Sn'nin r'den büyük olma olasılığının, hiçbir şekilde n'ye bağlı olmayan sabit $\frac{1}{n}\int_{r}^{+\infty}\frac{1}{1+(x-1)^{2}}dx$ tarafından verildiği anlamına gelir. Dolayısıyla, olasılıkta yakınsama olamaz ve bu nedenle oyuna bir değer atamak için zayıf beklentiler yöntemini kullanamayız.

Özetlemek gerekirse: Agnesi'nin karar teorisi ile buluştuğunda, açıkça faydalı görünen ancak bir rasyonel kişinin oynamak için ne kadar ödemeye istekli olması gerektiğini belirleyemediğimiz bir oyununda ilginç bir durumla karşı karşıyayız. Ne güçlü ne de zayıf beklentiler işe yaramamaktadır ve başka alternatifler düşünülmelidir.

3.1. Fayda fonksiyonunu sınırlamak

Sınırsız kazançları hem pozitif hem de negatif olanları mümkün kıldığımız için sorunun ortaya çıktığı görülmektedir. Sınırsız kazançlar, St. Petersburg paradoksu oluşturmak için kullanıldığından beri sorunlu olduğu bilinmektedir. Benzer şekilde, sınırsız kazançlar hem pozitif hem de negatif olanları, Pasadena oyununa bir değer atama sorununu oluşturmada önemli bir rol oynamıştır. Tartışılan oyunun formülasyonunda yapılan en önemli hata, açıkça sınırsız kazançların, para veya fayda açısından, mümkün olduğunu varsayarak yapılmış olabilir. Nover ve Hájek'in Pasadena oyunu ile ilgili aynı itiraza verdiği yanıt, sınırsız kazançlar (veya fayda) ile ilgili şikâyetin gerçekte ne anlama geldiği sorusuyla başlar. Eğer bu, insanların fayda fonksiyonlarının kavramsal bir zorunluluk olarak sınırlı olması gerektiği anlamına geliyorsa, iddia olası görünmektedir. Eğer bu, insanların fayda fonksiyonlarının olasılığa bağlı bir gerçek olarak sınırlı olması gerektiği anlamına geliyorsa, bu, bir şans oyununa rasyonel bir değer atamanın ne anlama geldiğini anlamada başarısız olduğunu gösterir. Bir şeyin rasyonel olup olmadığı, gerçek fayda fonksiyonlarının sınırlı olup olmaması gibi insan doğasıyla ilgili keyfi veya tesadüfi gerçeklere bağlı olmamalıdır.

3.2. Yaklaşımların beklenen değerinin limitini kullanmak

Burada yapılan öneri,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+(x-1)^2)} dx$$

sonsuza giderken, her seferinde daha büyük yaklaşımların limitini düşünmek mümkün olabilir.

İntegral sınırları simetri noktası 1 birim kaydırıldığı için -n'den n'ye değil, -(n-1) ile n + 1 arasında alabiliriz.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-(n-1)}^{n+1}\frac{x}{\pi(1+(x-1)^2)}dx=1$$

Farklı bir yaklaşım olarak pozitif kuyruğu negatif kuyruktan iki kat daha fazla içermeye karar vererek sınırları değiştirecek olursak,

$$\int_{-2(n-1)}^{n+1}\frac{x}{\pi\left(1+(x-1)^2\right)}dx$$

n → ∞ olduğunda limit değeri $1-\frac{\log(4)}{2\pi}$ olarak ortaya çıkar. Eğer iyimser bir yaklaşım gösterirsek ve negatif kuyruktan pozitif kuyruğa göre iki kat daha fazlasını içermesini sağladığımızda limitin $1+\frac{\log(4)}{2\pi}$ olduğunu buluruz. Bu sonuç, beklenen değerin yaklaşımlarını oyunun gerçek değeri olarak kullanmanın olasılığını zayıflatır.

3.3. Medyanı kullanmak

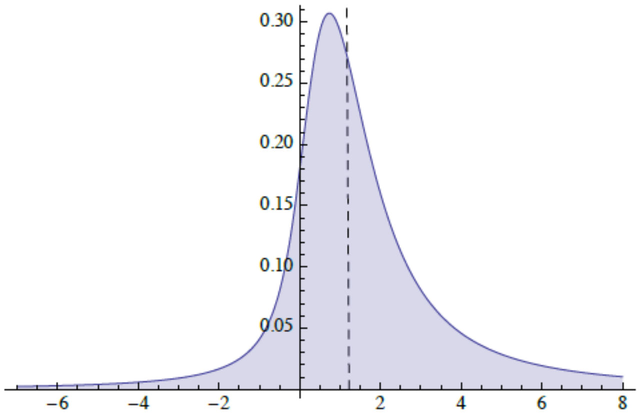
Oyunun beklenen bir değeri olmasa da temel olasılık dağılımının bir medyanı vardır, ki bu da 1'e eşittir. Bu değeri oyunun değeri olarak kullanma önerisi, simetrik bir dağılımın hem bir ortalama hem de bir medyanı olduğunda, bu iki değerin örtüştüğü durumda oldukça önem kazanır. Bu nedenle, bir ortalama olmayan ancak bir medyanı olan simetrik bir dağılıma sahip olduğumuz için, oyunun değeri olarak dağılımın medyanını önermek mantıklı olabilir. Bu önerinin ilk sorunu, tamamen geçici olmasıdır. Bu çözümün ikinci sorunu, olasılık dağılımının simetriye ağırlık vermesidir. Dolayısıyla asimetrik dağılımlara genelleştirilemez.

Başka bir öneri ise değerlendirilen oyun için, olasılık dağılımını oluşturan nedensel süreç hakkında bilgi sahibi olduğumuzu işaret eder. Hatırlayalım ki kazanılan veya kaybedilen miktar, $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$'den rastgele seçilmiş bir açı θ tarafından belirlenir. θ açısının beklenen değeri elbette ki basitçe 0'dır ve $\theta = 0$ olduğunda kazanılan miktar 1 dolardır. Bu durumda iki sorun mevcuttur. İlk olarak, bu öneri, oyunun değerini belirlemek için gereken tüm bilginin olasılık dağılımı ve sonuçların değerleri tarafından sağlandığını savunan geleneksel karar teorik bakış açısından ayrılır. Bu öneri bir değer belirler, ancak neden bu değerin ve yalnızca bu değerin rasyonel olduğunu belirtmez. İkinci olarak, bu durumda nedensel mekanizmayı biliyor olmalıyız.

1920'lerde, Fransız matematikçi Paul Lévy, bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenlerin toplamlarını inceleyerek, etkileyici bir olasılık dağılımı ailesi keşfetmiştir. Bu dağılımların belirleyici özelliği, stabilitesidir. Eğer X_1 ve X_2, X tipinde iki bağımsız rastgele değişken ise, o zaman X, X_1 'in dağılımına göre eşit olduğu bir cX + d formunda ek sabitler c ve d bulunan herhangi pozitif sabitler a ve b için stabil olarak adlandırılır. Sabit d = 0 olduğunda, dağılım X kesin olarak stabil olarak adlandırılır.
Stabil dağılımların en iyi bilinen örneği normal dağılımdır. Eğer X_1 ve X_2 iki bağımsız normal dağılıma sahip rastgele değişken ise, $X_1 + X_2$ toplamı da normal dağılıma sahiptir ve toplamın ortalaması, X_1 ve X_2'nin ortalamalarının toplamıdır. Bu gerçek, genellikle olasılık teorisi öğrencilerine verilen bir egzersiz olarak sunulur ve normal dağılımın bir stabil dağılım olduğunu gösterir.

Daha önce gördüğümüz gibi, Cauchy dağılımı da stabildir. Bu iki örnek, olasılık yoğunluk fonksiyonları kapalı bir formda yazılabilen stabil dağılımların kümesini neredeyse tamamen tüketir. Çoğu stabil dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonları yazılamasa da dört parametre için sayısal değerler belirterek karakterize edilebilirler.

Bu parametreler dağılımın önemli özelliklerini kontrol eder: karakteristik üstel α şeklini etkiler, simetri β eğilimini belirler, ölçek parametresi γ dağılımın gerçel doğru üzerinde ne kadar yayıldığını belirler ve konum parametresi δdağılımı sola veya sağa kaydırır. Buna göre, bir stabil dağılım genellikle $\delta(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ile gösterilir. Klasik Agnesi eğrisi, 0 merkezli olan, $\delta(1,0,1,0)$ stabil dağılımıdır. Değerini belirlemeye çalıştığımız oyunun temelini oluşturan, 1 merkezli olan Agnesi, $\delta(1,0,1,1)$ stabil dağılımıdır. Her ikisinin de ana eğrilik parametresi β'nın değeri sıfırdır. β'yı sıfırdan farklı bir değere, mesela $\beta = \frac{1}{2}$ olduğunda, şekil 10'da gösterilen eğri Cauchy dağılımını elde ederiz.

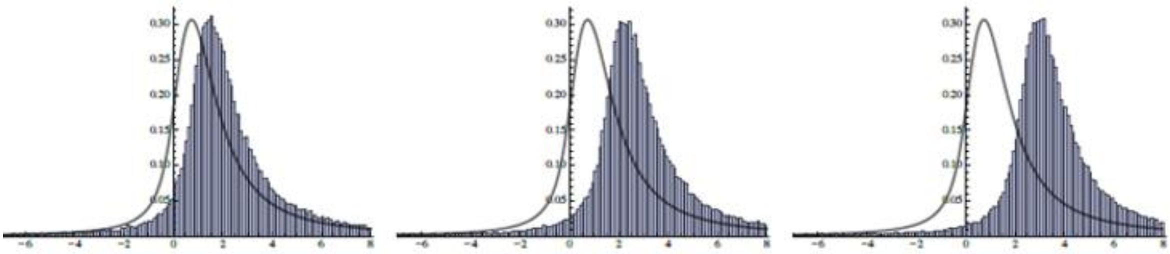


Şekil 1.10: Stabil dağılıma karşılık gelen "eğik Cauchy" dağılımı

Gerçek bir sayı r, şekil 8'de gösterilen olasılık dağılımına göre rastgele seçilir. Eğer r > 0 ise, o miktarda para kazanırsınız ve eğer r < 0 ise, o miktarda para kaybedersiniz. Agnesi eğrisi kullanılarak tanımlanan önceki oyununun aksine, $\delta\left(1,\ \frac{1}{2},\ 1{,}1\right)$ dağılımının olasılık fonksiyonu kapalı bir formda ifade edilememektedir.

İlk soru: Oyunu oynanmalı mıdır? Olasılık dağılımı artık simetrik olmasa da açıkça oyunu oynamak mantıklıdır. Sağ kuyruk, sol kuyruktan önemli ölçüde daha ağırdır, bu da $(n-\in,\ n+\in)$ aralığında bir miktar kazanma olasılığının $(-(n-\in),\ -(n+\in))$ aralığında bir miktar kaybetme olasılığını aşmasına neden olur. Kazanma olasılığına dair bu üstünlük, oyunu oynamayı mantıklı gösterir.

İkinci soru: Bu oyuna katılmak için kişi ne kadar ödemeyi kabul etmelidir? Daha önce simetrik Cauchy dağılımının bir beklenen değere sahip olmadığı gösterilmiştir. Karakteristik üstel $\alpha \leq 1$ olduğunda, genel olarak stabil dağılımların beklenen değerlere sahip olmadığı gösterebilir. Dolayısıyla, oyunun beklenen bir değeri yoktur.



(a) 10 kez tekrar dağılımı (b) 100 kez tekrar dağılımı (c) 1000 kez tekrar dağılımı

Şekil 1.11: Eğik Cauchy dağılımından üç farklı büyüklükteki örneklerin örnek ortalamalarının dağılımı

Zayıf bir beklenti ω, n → ∞ olduğunda $S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$'nin ω'ye olasılıkla yakınsaması durumunda var olur. Şekil 11, örneklerin eğik Cauchy dağılımından çekildiğinde $S_{10}, S_{100}\ ve\ S_{1000}$ için örnek ortalamalarının dağılımını göstermektedir. Bu dağılımları düşünmenin yolu şöyledir: Diyelim ki 100.000 kişi her biri 10 kez (şekil 9(a) için), veya 100 kez (şekil 9(b) için) veya 1.000 kez (şekil 9(c) için) oyun oynar. Her kişi oyunu uygun sayıda oynadıktan sonra, her kişi ortalama ödemesini hesaplar ve sonra sonuçların bir histogramı çizilir, çubukların yüksekliğini normalleştirerek bir olasılık dağılımı haline getirilir. Bu, oyunun 10 veya 100 veya 1000 kez oynandığında ₺X kazanma veya kaybetme olasılığı dağılımını gösterir.

Örnek ortalamaların dağılımında bulduğumuz en çarpıcı şey, dağılımın şeklinin eğik Cauchy dağılımınınki gibi kalmasıdır ancak örnek büyüklüğü arttıkça dağılımın daha da sağa doğru kaymasıdır. Bu, simetrik Cauchy dağılımına dayalı olarak tanımladığımız oyununun durumuyla karşılaştırıldığında dikkat çekicidir; çünkü örnek ortalamalarının dağılımı, örnek büyüklüğünden bağımsız olarak her zaman orijinal dağılıma eşittir. ω, bir zayıf beklenti adayı olarak önerilebilir. Çünkü S_n'nin dağılımı n → ∞ olduğunda giderek daha fazla sağa kayar, S_n'nin ω'ye olasılıkla yakınsaması mümkün değildir. Herhangi bir k > ω için S_n > k olma olasılığı, aslında n → ∞ olduğunda 1'e yakınsar. Ayrıca, bu şans oyunu için ödemeniz gereken fiyatı belirlemede S_n'yi kullanmanın aslında yanıltıcı olacağı anlamına gelir. n ne kadar büyük olursa, S_n için dağılım o kadar sağa kayar. Eğer S_n, bir kumar oyununun tek bir oyunu için fiyat rehberi olarak alınsaydı, sizi çok yüksek bir fiyat belirlemeye yönlendirirdi.

Öneri olarak temel dağılımın medyanının oyun fiyatı için kullanılması, simetrik durumda bazı sezgisel desteklerle gelebilir, ancak bu destek asimetrik durumda kaybolur. Dağılım

$\delta(1, \frac{1}{2}, 1{,}1)$ bir ortalama olsaydı, medyana eşit olmazdı. Şekil 11'de kesikli dikey çizgi ile belirtilen medyan, dağılımın sadece başka bir özelliği haline gelir ve kumar oyununun fiyatı olarak tamamen mantıksız hale gelir.

Son olarak, dağılımı oluşturan nedensel sürece bakma önerisinin burada geçerli olmadığı açıktır. Nasıl oluşturulduğunu bilmeden sunulan şans oyununu değerlendirmek ve ilgili olasılıklar ve sonuçlar hakkında tam bilgiye sahip olmamıza rağmen sonuç hakkında kesin bilgi verilememektedir.

Karar teorisi, risk altında yapılan seçimler için basit bir kural olarak beklenen faydayı maksimize etmektir. Bu kuralı şans oyunlarının fiyatlandırmasına uyguladığımızda, riskten kaçınmayan bir rasyonel kişinin oyunun beklenen değerini fiyatı olarak kabul edecektir. Bu kural genellikle mümkün olan sonuçların ve iliştirilmiş olasılıkların tam bilgisine sahip olduğumuz durumlarda geçerlidir, ancak bazen beklenen bir değerin olmaması durumunda bir rasyonel kişi için bir tavsiye veremeyebilir.

Bazen değer atamak için alternatif yollar bulunabilir. Pasadena oyunu, karar teorisinin bir değer atayamadığı oyunlarından biridir. Ancak, Easwaran'ın gösterdiği gibi, tekrarlı oyunların yakınsama davranışını düşünerek Pasadena oyununa makul bir değer atayabiliriz. Karar teorisi, oyunlara değer atama yeteneğini genişleten zayıf beklentiler yöntemiyle desteklenmesine rağmen, hala eksiklikleri bulunmaktadır. Agnesi eğrisi, şu anda bilinen tüm yöntemlerle değerlendirilemeyen iyi tanımlı şans oyunlarının var olduğunu göstermektedir.

Karar teorisinin bu yöndeki eksikliği önemlidir çünkü bu dağılımlar (simetrik ve eğik Cauchy dağılımı) sadece matematiksel ilginçlikler değildir. Çeşitli türlerdeki istikrarlı dağılımlar, hisse senedi fiyatlarından buğday piyasalarına kadar çeşitli durumları modellemek için finansta kullanılır. Bu dağılımların ağır kuyrukları sıra dışı olayların hala şaşırtıcı derecede sık görüldüğü durumları modellemek için uygundur. Ancak, bu dağılımları içeren oyunları değerlendirmek mevcut yöntemlerle zor, hatta imkânsız olabilir. Ancak, genellikle pratik öneme sahip nedenlerle değerler atamak gerekmektedir. Medyanı kullanarak ya da fayda fonksiyonunu sınırlayarak böyle oyunlara değerler atayabiliriz. Bu yöntemler bir değer atama konusunda başarılı olabilir, ancak gerçekten bilmek istediğimiz şey, bir rasyonel değerin ne anlama geldiği ve neden olduğudur (Alexander, 2010).

4. WITCH OF AGNESI'NİN İSTATİSTİKTE KULLANIMI

Witch of Agnesi, istatistikte kullanılan fonksiyonlar ve matematiksel konseptlerle ilişkilendirilebilir. Witch of Agnesi'nın istatistikle ilişkili birkaç bağlam şunlardır:

Olasılık Dağılımları: Olabilirlik fonksiyonları veya olabilirlik dağılımları, istatistikte kullanılan temel kavramlardan biridir. Witch of Agnesi'nın eğrisi, bu tür dağılımların matematiksel analizinde veya görselleştirmesinde kullanılabilir. Ancak, bu daha çok eğrinin matematiksel özellikleri ve genel matematiksel bağlam ile ilgilidir, istatistiksel bir bağlam değildir.

Regresyon Analizi: Regresyon analizi, bir bağımlı değişken ile bir veya daha fazla bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi inceleyen bir istatistiksel yöntemdir. Witch of Agnesi eğrisi, belirli bir parametre ile kontrol edilebilen bir eğri olduğu için regresyon analizlerinde benzer eğrilerin modellenmesi veya görselleştirilmesi için kullanılabilir.

Kernel Yoğunluk Tahminleri: Kernel yoğunluk tahminleri, veri dağılımının düzgün bir fonksiyon yardımıyla tahmin edilmesini sağlar. Witch of Agnesi'nın eğrisi, bu tür tahminlerin görselleştirilmesinde kullanılabilir.

Ancak, Witch of Agnesi'nın doğrudan istatistiksel bir uygulaması olmadığını belirtmek önemlidir. Bu eğri, daha çok diferansiyel, integral ve matematiksel analizle ilgili konularda kullanılır. İstatistiksel analizlerde genellikle farklı yöntemler ve modeller kullanılır.

5. LİTERATÜR ÖZETİ

Alexander (2010), witch of Agnesi eğrisini karar teorileri bağlamında ele almıştır. Makalede Witch of Agnesi eğrisi hakkında bilgi verilmiştir ve Cauchy dağılımı ile bağlantısı irdelenmiştir. Karar teorisinin beklenen değer elde edilmediği durumlarda alternatif yöntem olarak Pasadena oyununa Easwaran'ın gösterdiği gibi, tekrarlanan oyunların yakınsama davranışını dikkate alarak makul bir değer atanabileceğine değinmiştir. Karar teorisinin, tekrarlanan oyunların değerlerini atama yeteneğini genişleten zayıf beklentiler yöntemiyle desteklendiğinde bile eksik kaldığı belirtilmiştir. Agnesi Cadısı'nın karar teorisi bağlamında nasıl kullanılabileceği ve karar alma süreçlerine nasıl etki edebileceği tartışılmıştır. Ayrıca, karar teorisi ve Agnesi Cadısı arasındaki ilişki, karar teorisinin belirli kumar oyunlarını değerlendirme yeteneği üzerindeki etkileri üzerine odaklanmıştır. Makale, bu ilişkinin karar teorisi literatüründeki boşlukları doldurabileceği ve karar verme süreçlerine yeni bir bakış açısı sunabileceği konusunda önerilerde bulunmuştur.

Yankova(2015) Agnesi'nin cadısı tarafından parçalı akılcı enterpolasyon başlıklı makalesinde; Witch of Agnesi tarafından parçalı akılcı enterpolasyon yöntemini, düzlemdeki nokta dizisinden geçen düzgün bir eğri oluşturmak için sunmuştur. Her bölüm için, iki nokta arasında bir enterpolasyon, Agnesi'nin eğrisini tanımlayan bir akılcı fonksiyon ile yapılmıştır. Bir bölümde eğrinin var olma koşulları ve parametrelerinin belirlenmesi metodolojisi kurulmuştur. Enterpolasyon hatası tahmin edilmiştir.

Norando ve Magnaghi-Delfino (2020) editörlüğünde yazılan kitapta Agnesi'den Mirzakhani'ye kadar geometrinin çeşitli yönleri ve tarihsel gelişimine yer verilmiştir. Agnesi, bir matematikçi ve bilim insanı olarak ele alınmıştır, eserleri hakkında bilgi verilmiştir.

6. MATERYAL VE METOT

Bu araştırma, Witch of Agnesi eğrisinin karar ve teori uygulamalarını incelemektedir. Araştırmanın odak noktası, bu eğrinin karar teorisi alanında kullanımı ve karar verme süreçlerine katkısı üzerinedir. Maria Gaetana Agnesi'nin eğriyi tanımlamasının ardındaki matematiksel özellikler detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Araştırma, Witch of Agnesi'nin beklenen değerini belirleme zorluklarına odaklanmış ve çeşitli karar teorisi yaklaşımlarını ele almıştır. Temel problem cümlesi Witch of Agnesi eğrisinin karar teorisi içinde nasıl değerlendirilebileceği ve bu değerlendirmenin karar alma süreçlerine nasıl entegre edilebileceğidir. Ayrıca, araştırma kapsamında benzer matematiksel zorluklarla karşılaşan diğer oyunların, örneğin Pasadena oyunu gibi, nasıl değerlendirildiği de incelenmiş ve bu alandaki bilgi boşluklarını doldurmaya yönelik çabalar gösterilmiştir.

Sonuç olarak, bu tez, Witch of Agnesi'nın karar teorisi bağlamındaki potansiyel uygulamalarını keşfetmek amacıyla matematik ve karar teorisi arasındaki etkileşimi incelemiştir. Materyal ve metod olarak, eğrinin matematiksel özellikleri, karar teorisi yaklaşımları ve benzeri oyunların incelenmesi gibi yöntemler kullanılmıştır.

7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Araştırma sonuçları, Witch of Agnesi eğrisinin karar teorisi ve uygulamaları açısından önemli potansiyellere sahip olduğunu göstermektedir. Maria Gaetana Agnesi'nin bu eğriyi tanımlamasının ardındaki matematiksel özelliklerin detaylı bir şekilde incelenmesi, eğrinin karar verme süreçlerine nasıl entegre edilebileceği konusunda önemli bir temel oluşturmuştur.

Araştırmanın odak noktası olan Witch of Agnesi'nin beklenen değerini belirleme zorlukları, çeşitli karar teorisi yaklaşımlarıyla ele alınmıştır. Bu yaklaşımların incelenmesi, eğrinin karar alma süreçlerine nasıl katkı sağlayabileceğini anlamak açısından önemlidir.

Ayrıca, benzer matematiksel zorluklarla karşılaşan diğer oyunlarla yapılan karşılaştırmalar, Witch of Agnesi'nin değerlendirilmesinde yeni bakış açıları sunmuştur. Özellikle, Pasadena oyunu gibi benzeri oyunların incelenmesi, bilgi boşluklarını doldurmak ve eğrinin karar teorisi içindeki yerini daha iyi anlamak için önemli bir adım olmuştur.

Bu araştırma, Witch of Agnesi'nin karar teorisi bağlamındaki potansiyel uygulamalarını keşfetmek amacıyla yapılmıştır. Matematik ve karar teorisi arasındaki etkileşimi incelemesiyle, eğrinin karar verme süreçlerinde nasıl kullanılabileceği konusunda önemli bir katkı sağlamaktadır.

Sonuç olarak, Witch of Agnesi'nin karar teorisi alanında değerlendirilmesi, bu eğrinin matematiksel özelliklerini daha iyi anlamak ve karar alma süreçlerinde kullanılabilirliğini araştırmak için önemli bir adımdır. Bu çalışma, ileride yapılacak araştırmalara yol gösterecek potansiyel uygulamaları ortaya koymaktadır.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu araştırma, Witch of Agnesi eğrisinin karar ve teori uygulamalarını derinlemesine incelemiştir. Maria Gaetana Agnesi'nin bu eğriyi tanımlamasının ardındaki matematiksel özelliklerin detaylı bir şekilde ele alınması, eğrinin karar teorisi alanında kullanım potansiyelini ortaya koymuştur. Araştırmanın odak noktası, bu eğrinin karar verme süreçlerine nasıl katkı sağlayabileceği ve çeşitli karar teorisi yaklaşımlarının nasıl uygulanabileceği üzerinedir.

Witch of Agnesi'nin beklenen değerini belirleme zorluklarına odaklanarak, çeşitli karar teorisi yaklaşımları incelenmiş ve bu yöntemlerin eğrinin değerlendirilmesinde nasıl kullanılabileceği üzerinde durulmuştur. Araştırmanın ana problem cümlesi olan Witch of Agnesi eğrisinin karar teorisi içinde nasıl değerlendirilebileceği ve bu değerlendirmenin karar alma süreçlerine nasıl entegre edilebileceği üzerinde önemli bir vurgu yapılmıştır.

Araştırma aynı zamanda, benzer matematiksel zorluklarla karşılaşan diğer oyunların, özellikle de Pasadena oyunu gibi, nasıl değerlendirildiğini inceleyerek bu alandaki bilgi boşluklarını doldurmaya çalışmıştır. Bu karşılaştırmalar, Witch of Agnesi'nin karar teorisi bağlamındaki yerini daha iyi anlamak için önemli bir referans noktası sağlamıştır.

Sonuç olarak, bu tez, Witch of Agnesi'nin karar teorisi bağlamındaki potansiyel uygulamalarını keşfetmek amacıyla yapılmıştır. Matematik ve karar teorisi arasındaki etkileşimi inceleyerek, eğrinin karar verme süreçlerinde nasıl kullanılabileceği konusunda önemli bir adım atılmıştır.

Witch of Agnesi eğrisinin karar teorisi alanındaki potansiyel uygulamalarını daha detaylı bir şekilde inceleyen gelecek çalışmaların yapılması önerilir.
Benzer matematiksel zorluklarla karşılaşan diğer oyunların daha kapsamlı bir şekilde incelenmesi ve bu oyunların Witch of Agnesi'nin değerlendirilmesine nasıl katkı sağlayabileceğinin daha iyi anlaşılması önerilir.
Witch of Agnesi'nin karar teorisi içindeki rolünü test etmek için gerçek dünya uygulamalarında kullanılabilecek potansiyel senaryoların belirlenmesi önerilir.
Witch of Agnesi eğrisinin karar teorisi açısından avantajlarını ve sınırlamalarını daha iyi

anlamak için deneysel çalışmaların yapılması önerilir.

Bu önerilerin uygulanması, Witch of Agnesi'nin karar teorisi alanındaki kullanımının daha iyi anlaşılmasına ve potansiyel uygulamalarının geliştirilmesine katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

Agnesi, M (1801) çev: Colson, J. Analytical Instution. Taylor and Wilks. London.

Alexander, M.J. (2010) Decision theory meets the Witch of Agnesi The Journal of Philosophy 109(2)

Alzaatreh, A., Lee, C., Famoye, F. vd. The generalized Cauchy family of distributions with applications. J Stat Distrib App 3, 12 (2016). https://doi.org/10.1186/s40488-016-0050-3

Koçi, E. (2009) Riskli Ortamlarda Karar Verme Ankara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü yayımlanmamış yüksek lisans tezi

Norando, T. Magnaghi-Delfino, P. (2020) Witch of Agnesi: The True Story P. Magnaghi-Delfino vd. (eds.), Faces of Geometry. From Agnesi to Mirzakhani, Springer Nature Switzerland https://doi.org/10.1007/978-3-030-29796-1_15

Yankova, T. (2015) Piecewise rational interpolation by witch of Agnesi. Comp. Appl. Math. DOI 10.1007/s40314-015-0276-6