

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İFLAS DURUMLARI VE OYUN TEORİSİ İLE MODELLENMESİ

Ertuğrul SALİHÇAVUŞOĞLU

**Danışman
Prof. Dr. Sırma Zeynep ALPARSLAN GÖK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA – 2024**

© 2024 [Ertuğrul SALİHÇAVUŞOĞLU]

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. KOOPERATİF OYUN TEORİSİ.....	4
3. İFLAS DURUMLARI VE OYUNLARI	15
4. UYGULAMA	28
5. SONUÇ	34
KAYNAKLAR.....	35
ÖZGEÇMİŞ.....	36

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İFLAS DURUMLARI VE OYUN TEORİSİ İLE MODELLENMESİ

Ertuğrul SALİHÇAVUŞOĞLU

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sırma Zeynep ALPARSLAN GÖK

Oyun teorisi; akılcı bireylerin verdikleri kararların toplumsal sonuçlarını inceleyen ve bu incelemeleri matematiksel temellere dayandıran matematiğin alt disiplinlerinden biridir. Bu disiplin bireylerin karşılıklı etkileşimde bulundukları çeşitli durumları analiz ederken, onların stratejik tercihlerini ve bu tercihlerin topluma olan etkilerini detaylı bir şekilde ele alır. Oyun teorisi; ekonomik, sosyal ve politik birçok alanda uygulanabilen kapsamlı bir analiz yöntemidir. Kooperatif oyun teorisi, oyuncuların bir araya gelerek oluşturdukları koalisyonlar aracılığıyla elde edilen getirilerin paylaşıldığı ve bu süreçte karar verme mekanizmalarını analiz etmeyi amaçlayan oyun teorisinin alt dallarından bir tanesidir. Bu teori, oyuncuların bireysel çıkarlarını ve koalisyon içindeki etkileşimlerini dikkate alarak, optimal stratejilerin belirlenmesi için kapsamlı bir çerçeve sunar. Böylece, kooperatif oyun teorisi, işbirliği ve ortak karar alma süreçlerinin matematiksel analizini yaparak, farklı senaryolarda en uygun stratejilerin tespit edilmesine yardımcı olur. İflas problemleri, çeşitli oyuncu grupları arasında paylaştırılması gereken belirli bir kaynağın, oyuncuların taleplerine göre en adil şekilde nasıl dağıtılacağını araştıran ve bu karmaşık durumları oyun teorisi ile matematiksel modeller kullanarak çözümlemeyi amaçlayan bir alandır. Bu alan, kaynak dağıtımının adil ve etkili bir şekilde gerçekleştirilmesini sağlamak amacıyla geliştirilen çözümleri incelemektedir. İflas problemlerinin çözümleri, paylaşım sürecinin her bir oyuncunun taleplerini göz önünde bulundurarak adil bir şekilde yürütülmesine yardımcı olur ve bu sürecin matematiksel temellere dayanan bir çerçeve içinde ele alınmasını sağlar. Bu tez, iflas durumları ve bunların oyun teorisi ile modellenmesi sonucu oluşturulan iflas oyunları üzerine bir çalışmadır. İlk olarak, kooperatif oyun teorisinin temel kavramları hakkında kapsamlı bilgilere değinilmiştir. Daha sonra iflas durumları sonucu elde edilen iflas oyunları ve çözüm yöntemleri verilmiştir. Son olarak, iflas durumlarında sıkça kullanılan çözümlerden *RUN* kuralı, *PROP* kuralı, Shapley değeri, Banzhaf değeri, *CIS* değeri ve *ENSC* değeri kullanılarak, üç farklı şirketin bir bankadan talep ettiği kredi miktarlarının bankanın tamamını karşılayamaması sonucunda, şirketlerin talepleri ve bankanın sahip olduğu kaynaklar göz önüne alınarak en adil şekilde paylaşım yapılmasını amaçlayan bir model üzerinde çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kooperatif oyun teorisi, verimlilik, Shapley değeri, Banzhaf değeri, *CIS* değeri, *ENSC* değeri, *RUN* kuralı, *PROP* kuralı, iflas oyunları

2024, 36 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

BANKRUPTCY SITUATIONS AND MODELING WITH GAME THEORY

Ertuğrul SALİHÇAVUŞOĞLU

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sırma Zeynep ALPARSLAN GÖK

Game theory is a sub-discipline of mathematics that examines the social consequences of decisions made by rational individuals and bases these investigations on mathematical foundations. This discipline analyzes various situations in which individuals interact with each other, and examines in detail their strategic choices and their impact on society. Game theory is a comprehensive method of analysis that can be applied in many economic, social and political fields. Cooperative game theory is one of the sub-branches of game theory that aims to analyze the decision-making mechanisms through which players come together to form coalitions in which the payoffs are shared. This theory provides a comprehensive framework for determining optimal strategies, taking into account the individual interests of the players and their interactions within the coalition. Thus, cooperative game theory helps to identify optimal strategies in different scenarios by mathematically analyzing the processes of cooperation and joint decision-making. Bankruptcy problems are a field that investigates how to allocate a given resource among various groups of players in the fairest way according to the demands of the players and aims to solve these complex situations using game theory and mathematical models. This field examines the solutions developed to ensure that the allocation of resources is fair and efficient. Solutions to insolvency problems help to ensure that the sharing process is conducted in a fair manner, taking into account the demands of each player, and that this process is handled within a framework based on mathematical foundations. This thesis is a study on bankruptcy situations and bankruptcy games modeled by game theory. First, a comprehensive overview of the basic concepts of cooperative game theory is presented. Then, the bankruptcy games and solution methods obtained as a result of bankruptcy cases are given. Finally, by using the RUN rule, PROP rule, Shapley value, Banzhaf value, CIS value and ENSC value, which are commonly used solutions in bankruptcy cases, a model is worked on that aims to make the fairest allocation considering the demands of the companies and the resources of the bank as a result of the fact that the loan amounts demanded by three different companies from a bank cannot be fully covered by the bank.

Keywords: Cooperative game theory, efficiency, Shapley value, Banzhaf value, *CIS* value, *ENSC* value, *RUN* rule, *PROP* rule, bankruptcy games

2024, 36 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma sürecinde bana rehberlik eden, geniş bilgi birikimi ve deneyimleri ile karşılaştığım zorlukları aşmamda yardımcı olan, tezime çok değerli katkılarını sunan, bana çalıştığım alanın temel ilkelerini kavratan çok değerli tez danışmanım Prof. Dr. Sırma Zeynep ALPARSLAN GÖK'e içten teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin her aşamasında sabırla benimle ilgilenen ve destek olan aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Ertuğrul SALİHÇAVUŞOĞLU
ISPARTA, 2024



ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Talep-Mal varlığı tablosu	15
Şekil 3.2. Talep-Mal varlığı tablosu	16
Şekil 3.3. Talep-Mal varlığı tablosu	17



ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 2.1. Koalisyon değerleri	5
Çizelge 2.2. Koalisyon değerleri	6
Çizelge 2.3. Marjinal vektörler	7
Çizelge 2.4. Koalisyon değerleri	8
Çizelge 2.5. Koalisyon değerleri	10
Çizelge 2.6. Koalisyon değerleri	11
Çizelge 2.7. Koalisyon değerleri	12
Çizelge 3.1. Her bir sıralanış için oyuncuların alacağı miktarlar	18
Çizelge 3.2. İflas durumuna ait oyunculara önerilen çözümler	19
Çizelge 3.3. Koalisyon değerleri	20
Çizelge 3.4. Marjinal vektörler	22
Çizelge 3.5. Modele ait çözüm tablosu	25
Çizelge 4.1. Koalisyon değerleri	29
Çizelge 4.2. Marjinal vektörler	30
Çizelge 4.3. Modele ait çözüm tablosu	33

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	n -boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\emptyset$	Boş küme
$=$	Reel sayılar üzerinde “eşittir” bağıntısı
$\geq$	Reel sayılar üzerinde “büyük veya eşittir” bağıntısı
N	Oyuncuların kümesi
G^N	Tüm kooperatif oyunların kümesi
$\langle N, v \rangle$	Kooperatif kazanç oyunu
$\langle N, c \rangle$	Kooperatif maliyet oyunu
v	Karakteristik fonksiyon
$v(S)$	S koalisyonuna ait kazanç değeri
$c(S)$	S koalisyonuna ait maliyet değeri
$\cup$	İki küme birleşimi
$\cap$	İki küme kesişimi
2^N	N 'nin alt kümelerinden oluşan küme
$\pi(N)$	N 'nin tüm permütasyonlarının kümesi
$m^\sigma(v)$	Marjinal katkı vektörü
$\setminus$	Fark sembolü
$\Phi(v)$	Shapley değeri
σ	Permütasyon
d^σ	Oyuncuların taleplerine ait permütasyonlar
$ S $	S koalisyonunun eleman sayısı
$maks$	Bir kümenin maksimum değeri
x	Ödeme vektörü
CG^N	Konveks oyunlar sınıfı
CIS	Kısıt kümesinin ağırlık merkezi çözümü
$ENSC$	Eşitlikçi bölünemeyen katkı değeri
β	Banzhaf değeri
RUN	Sıralanış kuralı
$PROP$	Orantılı kural
$(E; d)$	İflas problemi
X	Kartezyen çarpım

1. GİRİŞ

Oyun teorisi, karşılıklı bağımlılık içinde bulunan akılcı bireylerin kararlarına dayalı olarak ortaya çıkan toplumsal sonuçları inceleyen, matematiksel temellere sahip bir disiplindir. Bunun yanı sıra özellikle ekonomi alanındaki ihale düzenlerinden rekabet analizlerine, sosyal, siyasi vb. problemlere uygulanması nedeniyle matematiksel özellikleri büyük ilgi gören bir yöntem ve karar kuramı çerçevesinde bu teori ortaya çıkmıştır. Günümüzde, bu teorinin ekonominin çeşitli alanlarında yaygın olarak uygulandığı ve uygulama alanlarının hızla genişlediği gözlemlenmektedir. Oyun teorisi ve ekonomi sentezi, ekonomik meselelere bakış açısını ve bu konuları anlama yeteneğini önemli ölçüde geliştirmiştir. "Oyunlar Teorisi ve Ekonomik Davranış" adlı kitap, J. von Neumann ve O. Morgenstern (1944) yılında yazılıp yayımlanan oyun teorisine dair ilk önemli kaynaktır. Bu dönem içinde, oyun teorisi bilimi bir dizi farklı alanda, örneğin ekonomi, biyoloji, fizik, mekanik gibi, çeşitli uygulama sahalarında yer bulmuş ve uygulamalı matematiğin önemli alanlarından biri olmuştur. Bir oyun, birbirine bağlı stratejilere sahip iki veya daha fazla bireyin etkileşimini ifade eder. Oyun teorisi, kendi stratejilerine sahip olan ve kaderleri birbirine bağlı olan; diğer bir deyişle birbirlerinin eylemlerinden etkilenen iki veya daha fazla oyuncunun oyununu analiz eder ve bir kişinin kaderinin diğer kişilerin eylemlerine bağlı olduğu durumda izleyebileceği stratejileri geliştirir.

Mücadele içeren herhangi bir etkinlik oyun olarak adlandırılır ve oyun teorisi, bu tür mücadele içeren etkinliklerin analizi ile ilgilenir. Oyunda kararlar alan taraf ve gruplara oyuncu adı verilir. Oyun, mücadele eden oyuncu sayısına bağlı olarak iki kişilik, üç kişilik, dört kişilik vb. şeklinde adlandırılır. Oyunun herhangi bir aşamasında ortaya çıkan duruma, oyun içi pozisyon denir. Herhangi bir oyuncunun, oyunun ilerleyen sürecinde meydana gelebilecek tüm farklı pozisyonlar için alabileceği kararlara ise strateji denir. Oyun sürecinin her aşamasında, her bir oyuncu kendi belirlediği stratejiyi izleyerek oyunu tamamlar ve oyun sonunda, her oyuncu, kendi uyguladığı stratejisi ile diğer oyuncuların izlediği stratejilerin sonuçlarına dayanarak belirli bir kazanç elde eder. Bir oyuncunun elde ettiği kazanç reel sayı olarak ifade edilir ve bu sayı oyuncunun kazancı olarak tanımlanır.

Bu bağlamda, oyuncuların hepsi ya da bir kısmı, diğer oyuncuların davranışlarına göre şekillenen eylemlerde bulunurlar. Oyuncular, stratejik bir yaklaşımla hareket etme gerekliliğini hissederler ve kendi hamlelerinin diğer oyuncuların hamlelerini nasıl etkileyeceğini önceden tahmin etmeye çalışarak stratejik kararlar almaya çalışırlar. Dolayısıyla, her bir oyuncu en uygun sonucu elde edebilmek için optimal bir karar vermeye çalışır.

Oyun teorisi, kararları belirleme sorunuyla ilgilenir, bu kararlar iki veya daha fazla birimin karşı karşıya geldiği durumlarda ortaya çıkar. Bu birimlerin tercih ettikleri stratejiler, karşı tarafın tercih edeceği stratejiyi etkiler. Oyun teorisi, çıkarları çatışan kişilerin en iyi durumu belirlemek için nasıl düşünüp hareket etmeleri gerektiğini matematiksel bir teknikle açıklar. Ancak, oyun teorisi bireylerin kazançlarını garanti etmez; bunun yerine, içinde bulunulan durumdan en yüksek fayda sağlamayı veya zarar durumunda en az zararla çıkmayı hedefler. Oyun teorisi, temelde çıkar çatışmalarına bağlı olarak iki ana kategoriye ayrılır: kooperatif ve kooperatif olmayan. Bu çalışma kapsamında, özellikle kooperatif oyun teorisine odaklanılacaktır.

Kooperatif oyun teorisinde, oyuncu grubu ve oyuncuların kazanç veya maliyetlerini belirleyen bir karakteristik fonksiyon bulunmaktadır. Oyuncular arasında işbirliği yapılırken, oyunun kurulmasının ardından elde edilen kazancın veya maliyetin adil bir şekilde nasıl dağıtılacağı incelenir.

Uygulamalı matematiğin bir yöntemi olarak, oyun teorisi insan ve hayvan davranışlarının analizinde kullanılmaktadır. Başlangıçta öncelikle ekonomi alanında, firma ve tüketicilerin davranışlarını belirlemek amacıyla kullanılan bu teori, daha sonraları politik, sosyolojik ve psikolojik davranışları da incelemek için geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Oyun teorisi özellikle tutsak ikilemi gibi çeşitli oyunlar, siyaset bilimi ve etik alanlarındaki düşünceleri açıklamak için kullanılmıştır. John Maynard Smith, 1982 yılında 'Evolution and the Theory of Games' adlı kitabıyla oyun teorisini biyolojiye aktarmış ve bu çalışmasıyla Crafoord ödülüne layık görülmüştür. Ek olarak John Maynard Smith, ekonomi alanında sekiz oyun kuramcısı Nobel ödülü kazanmıştır ve sadece akademik ilgi değil, aynı zamanda popüler kültürde de dikkat çekmiştir. Nobel ödüllü oyun kuramcısı John Forbes Nash'in 1988 tarihli biyografisi

ve 2011 yapımı 'A Beautiful Mind' filmi, oyun teorisini konu edinmiştir. Ayrıca, 1983 yapımı War Games filmi de oyun teorisini ana tema olarak işlemiştir.

Televizyonda yayımlanan bazı yarışma programlarında, örneğin Friend or Foe ve kısmen Survivor gibi, oyun teorisinin izlerine rastlamak mümkündür.

Tarihsel açıdan oyun teorisinin izleri, eski çağlara kadar gitmektedir. Yaklaşık 2000 yıl öncesine dayanan Babylon-Talmud problemleri(tartışmalı giysi, haklar tahkimi, bir adam ve ölümünden sonra boşanmış olduğu üç hanımı arasındaki miras davası), günümüz oyun teorisi çözüm yöntemlerinin temelini oluşturan çeşitli sorunları içermektedir (Aumann ve Maschler, 1985). İflas problemleri, literatürde geniş bir şekilde incelenmiş ve günümüzde birçok araştırmacının dikkatini çeken bir alan olmuştur (O'Neill, 1982; Aumann ve Maschler, 1985; Curiel vd., 1992). Guiasu (2011), Talmud problemlerini kooperatif oyun teorisi kullanarak modellemiş ve Shapley (1953) değerini kullanarak çözüm geliştirmiştir. Alparslan Gök ve Saniarslan (2012) tarafından, Talmud problemlerinin Alexia değeri ile de çözülebileceği gösterilmiştir.

2. KOOPERATİF OYUN TEORİSİ

Kooperatif oyun teorisi, koalisyon kurma ve maliyet ya da kazançların en uygun şekilde nasıl dağıtılacağı gibi sorulara yanıt arar. Bu bölümde, tez boyunca kullanılan kooperatif oyun teorisi ile ilgili temel kavramlardan bahsedilecektir. Kooperatif oyun teorisi hakkında detaylı bilgiye Tijs (2003), Branzei vd. (2008) ve Tüzün (2021) referanslarından ulaşılabilir.

Şimdi kooperatif oyun teorisinin sistematik bir şekilde incelemesine yer verilecektir. Kooperatif oyun teorisi, oyuncuların bir araya gelerek oluşturdukları koalisyonlar üzerinden kazançlarını paylaştığı bir analiz yöntemidir. Bu teori, oyuncular arasındaki iş birliği ve etkileşimleri inceleyerek, bireylerin kendi çıkarlarını gözetirken grup içindeki ilişkilerini de göz önünde bulundurur. Oyuncular, stratejik hamlelerini belirlerken sadece kendi kazançlarını değil, aynı zamanda koalisyonlar içindeki diğer oyuncuların kazançlarını da dikkate alarak hareket ederler. Bu sayede kooperatif oyun teorisi, oyun içindeki dinamik ilişkileri daha kapsamlı bir şekilde ele alarak oyuncuların optimal stratejilerini belirlemelerine yardımcı olur. Kooperatif oyun teorisinin önemli bir sorunu da bu kazancın koalisyona giren oyuncular arasında nasıl paylaşılacağıdır. Bu tezde kullanılacak olan kooperatif oyun teorisi ile ilgili temel kavramlar ve çözüm yöntemleri için Tüzün (2021) referansı incelenebilir.

Tanım 2.1 n -kişilik bir kooperatif oyun $\langle N, v \rangle$ sıralı ikilisinden oluşur. Burada $N = \{1, 2, \dots, n\}$ oyuncu kümesi, $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ karakteristik fonksiyondur. Karakteristik fonksiyon $\forall S \subset N$ koalisyonunu bir reel sayıya götürür yani $\forall S \in 2^N$ için $v(S)$ koalisyon değerini belirtir ve $v(\emptyset) = 0$ olarak tanımlıdır. N nin alt kümeleri koalisyonlar ve $v(S)$ de her S koalisyonu için S nin değeri olarak tanımlanır.

Daha açık olmak gerekirse $N = \{1, 2, \dots, n\}$ boş olmayan farklı koalisyonları oluşturan sonlu elemanlı oyuncu kümesi olsun. N kümesi büyük koalisyon, $\emptyset$ de boş koalisyon olmak üzere her bir $S \subset N$ net koalisyon olarak tanımlanır. N nin alt kümelerinin oluşturduğu küme 2^N ile gösterilir. Her $S \in 2^N$ kümesi için koalisyona katılan elemanların sayısı $|S|$ ile tanımlanır.

Örnek 2.2 Üç farklı kırtasiye satış yapmak amacıyla bir kağıt fabrikası ile anlaşma talep etmektedirler. Fabrika, satış stratejisi gereği ne kadar çok ton kağıt satılırsa o kadar indirim yapmaktadır. Fabrika, 1 ton kağıdı 10 birime satmaktadır. Eğer talep edilen kağıt; 50-74 ton olursa %10 indirim, 75-99 ton olursa %15 indirim, 100 tondan fazla olursa %20 indirim uygulanmaktadır. A kırtasiyesinin talebi 40 ton, B kırtasiyesinin talebi 40 ton ve C kırtasiyesinin talebi 30 tondur.

A kırtasiyesi kağıdı tek başına alırsa 400 birim öder.

B kırtasiyesi kağıdı tek başına alırsa 400 birim öder.

C kırtasiyesi kağıdı tek başına alırsa 300 birim öder.

A ve B kırtasiyeleri beraber almaya karar verirlerse toplamda 800 birim ödeme yerine %15 indirimden faydalanır ve 680 birim öderler.

A ve C kırtasiyeleri beraber almaya karar verirlerse toplamda 700 birim ödeme yerine %10 indirimden faydalanır ve 630 birim öderler.

B ve C kırtasiyeleri beraber almaya karar verirlerse toplamda 700 birim ödeme yerine %10 indirimden faydalanır ve 630 birim öderler.

A, B ve C kırtasiyeleri beraber almaya karar verirlerse toplamda 1100 birim ödeme yerine %20 indirimden faydalanır ve 880 birim öderler.

$N = \{A, B, C\}$ oyuncuların kümesi ve $c(S)$ oyuncuların maliyeti olmak üzere $\langle N, c \rangle$ maliyet oyununu kuralım (Çizelge 2.1).

Çizelge 2.1. Koalisyon değerleri

S	$\emptyset$	$\{A\}$	$\{B\}$	$\{C\}$	$\{A, B\}$	$\{A, C\}$	$\{B, C\}$	$\{A, B, C\}$
$c(S)$	0	400	400	300	680	630	630	880

Eğer üç kırtasiye birlikte satın almaya karar verirlerse, minimum maliyet ile toplam maliyet 880 birim olacağından birlikte hareket edilmesi tercih edilir.

Tanım 2.3 Tüm kooperatif oyunlar G^N ile gösterilir.

Örneğin $v \in G^N$ veya $c \in G^N$ yazıldığında $\langle N, v \rangle$ veya $\langle N, c \rangle$ oyunu anlatılmış olunur.

Tanım 2.4 (Toplanabilir Oyun) $\forall S, T \in 2^N$ için $S \cap T = \emptyset$ şartı altında

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T)$$

oluyorsa, bu oyuna toplanabilir oyun olarak isimlendirilir.

Tanım 2.5 (Süpertoplamsal Oyun) $\forall S, T \in 2^N$ için $S \cap T = \emptyset$ şartı altında

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

oluyorsa, bu oyuna süpertoplamsal oyun (superadditive game) olarak isimlendirilir.

Kazanç oyunlarında koalisyona teşvik eden bir durumdur.

Tanım 2.6 (Shapley Değeri) $v \in G^N$ için,

$$\Phi(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \pi(N)} m^{\sigma}(v)$$

ile verilen değere Shapley (1953) denir.

Örnek 2.7 Üç kişilik $\langle N, v \rangle$ oyunu verilsin. Karakteristik fonksiyonlar

Çizelge 2.2. Koalisyon değerleri

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	0	6	10	21	30

Çizelge 2.2 deki gibi olsun. Koalisyon değerlerinden marjinal vektörlere geçiş yaparken önemli bir adım ise permütasyonlardır. $N = \{1, 2, 3\}$ kümesi elemanları için permütasyonlar

$$\sigma_1 = (1, 2, 3), \sigma_2 = (1, 3, 2), \sigma_3 = (2, 1, 3),$$

$$\sigma_4 = (2, 3, 1), \sigma_5 = (3, 1, 2), \sigma_6 = (3, 2, 1)$$

bulunur.

$\sigma_1 = (1, 2, 3)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_1} = v(\{1\}) = 0,$$

$$m_2^{\sigma_1} = v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) = 6,$$

$$m_3^{\sigma_1} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 24$$

bulunur.

$\sigma_2 = (1, 3, 2)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_2} = v(\{1\}) = 0,$$

$$m_2^{\sigma_2} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 20,$$

$$m_3^{\sigma_2} = v(\{1, 3\}) - v(\{1\}) = 10$$

bulunur.

$\sigma_3 = (2, 1, 3)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_3} = v(\{1, 2\}) - v(\{2\}) = 6,$$

$$m_2^{\sigma_3} = v(\{2\}) = 0,$$

$$m_3^{\sigma_3} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 24$$

bulunur.

$\sigma_4 = (2, 3, 1)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_4} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 9,$$

$$m_2^{\sigma_4} = v(\{2\}) = 0,$$

$$m_3^{\sigma_4} = v(\{2, 3\}) - v(\{2\}) = 21$$

bulunur.

$\sigma_5 = (3, 1, 2)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_5} = v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) = 10,$$

$$m_2^{\sigma_5} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 20,$$

$$m_3^{\sigma_5} = v(\{3\}) = 0$$

bulunur.

Son olarak $\sigma_6 = (3, 2, 1)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_6} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 9,$$

$$m_2^{\sigma_6} = v(\{2, 3\}) - v(\{3\}) = 21,$$

$$m_3^{\sigma_6} = v(\{3\}) = 0$$

bulunur. Elde edilen marjinal vektörler Çizelge 2.3 te gösterilmektedir.

Çizelge 2.3. Marjinal vektörler

σ	$m_1^\sigma(v)$	$m_2^\sigma(v)$	$m_3^\sigma(v)$	$m_\sigma(v)$
$\sigma_1 = (1, 2, 3)$	$m_1^{\sigma_1}(v) = 0$	$m_2^{\sigma_1}(v) = 6$	$m_3^{\sigma_1}(v) = 24$	$m^{\sigma_1}(v) = (0, 6, 24)$
$\sigma_2 = (1, 3, 2)$	$m_1^{\sigma_2}(v) = 0$	$m_2^{\sigma_2}(v) = 20$	$m_3^{\sigma_2}(v) = 10$	$m^{\sigma_2}(v) = (0, 20, 10)$
$\sigma_3 = (2, 1, 3)$	$m_1^{\sigma_3}(v) = 6$	$m_2^{\sigma_3}(v) = 0$	$m_3^{\sigma_3}(v) = 24$	$m^{\sigma_3}(v) = (6, 0, 24)$
$\sigma_4 = (2, 3, 1)$	$m_1^{\sigma_4}(v) = 9$	$m_2^{\sigma_4}(v) = 0$	$m_3^{\sigma_4}(v) = 21$	$m^{\sigma_4}(v) = (9, 0, 21)$
$\sigma_5 = (3, 1, 2)$	$m_1^{\sigma_5}(v) = 10$	$m_2^{\sigma_5}(v) = 20$	$m_3^{\sigma_5}(v) = 0$	$m^{\sigma_5}(v) = (10, 20, 0)$
$\sigma_6 = (3, 2, 1)$	$m_1^{\sigma_6}(v) = 9$	$m_2^{\sigma_6}(v) = 21$	$m_3^{\sigma_6}(v) = 0$	$m^{\sigma_6}(v) = (9, 21, 0)$

Shapley değeri ise marjinal vektörlerin ortalaması olduğundan,

$$\begin{aligned}
\Phi(v) &= \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in \pi(N)} m^\sigma(v) \\
&= \frac{1}{6} \{(0, 6, 24) + (0, 20, 10) + (6, 0, 24) + (9, 0, 21) + (10, 20, 0) + (9, 21, 0)\} \\
&= \frac{1}{6} (34, 67, 79) = \left(\frac{17}{3}, \frac{67}{6}, \frac{79}{6}\right) \text{ olarak bulunur.}
\end{aligned}$$

Tanım 2.8 (Verimlilik) $\forall v \in G^N$ için

$$\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$$

oluyorsa çözüme verimlidir denir. Burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ olup ödeme vektörü olarak adlandırılır.

Tanım 2.9 (Banzhaf değeri) Banzhaf değeri, $\beta(v)$ ile gösterilir ve $\beta: G^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ olmak üzere $\forall i \in N$ ve $\forall v \in G^N$ için

$$\beta_i(v) = \frac{1}{2^{|N|-1}} \sum_{i \in S} v(S) - v(S \setminus \{i\})$$

olarak tanımlanır. Banzhaf değeri verimlilik şartını sağlamaz.

Örnek 2.10 Oyuncuların kümesi $N = \{1, 2, 3\}$, $v \in G^N$ olmak üzere koalisyon değerleri (Çizelge 2.4)

Çizelge 2.4. Koalisyon değerleri

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	7	0	0	17	7	0	29

olarak verilsin. Buna göre bu oyunun $\beta(v)$ değerini bulalım.

$$\begin{aligned}
\beta_1(v) &= \frac{1}{2^{3-1}} \sum_{i \in S} v(S) - v(S \setminus \{1\}) \\
&= \frac{1}{4} (v(\{1\}) - v(\emptyset) + v(\{1, 2\}) - v(\{2\}) + v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) + v(\{1, 2, 3\}) \\
&\quad - v(\{2, 3\}))
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(7 + 17 - 0 + 7 - 0 + 29 - 0)$$

$$= \frac{1}{4}60 = 15$$

$$\beta_2(v) = \frac{1}{2^{3-1}} \sum_{2 \in S} v(S) - v(S \setminus \{2\})$$

$$= \frac{1}{4}(v(\{2\}) - v(\emptyset) + v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) + v(\{2, 3\}) - v(\{3\}) + v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}))$$

$$= \frac{1}{4}(0 + 17 - 7 + 29 - 7)$$

$$= \frac{1}{4}32 = 8$$

$$\beta_3(v) = \frac{1}{2^{3-1}} \sum_{3 \in S} v(S) - v(S \setminus \{3\})$$

$$= \frac{1}{4}(v(\{3\}) - v(\emptyset) + v(\{1, 3\}) - v(\{1\}) + v(\{2, 3\}) - v(\{2\}) + v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}))$$

$$= \frac{1}{4}(0 + 7 - 7 + 0 + 29 - 17)$$

$$= \frac{1}{4}12 = 3$$

Bu durumda, $\beta(v) = (15, 8, 3)$ olarak bulunur.

Tanım 2.11 (Kısıt kümesinin ağırlık merkezi çözümü) *CIS*-değeri, Driessen ve Funaki tarafından 1991 yılında bulunmuştur. *CIS*-değeri,

$\forall v \in G^N, \forall i \in N$ için *CIS*: $G^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ olmak üzere

$$CIS_i(v) = v(\{i\}) + \frac{1}{|N|} \left(v(N) - \sum_{j \in N} v(\{j\}) \right)$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.12 Oyuncuların kümesi $N = \{1, 2, 3\}$, $v \in G^N$ olmak üzere koalisyon değerleri (Çizelge 2.5)

Çizelge 2.5. Koalisyon değerleri

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	1	1	0	4	1	3	5

olarak verilsin. Bu oyunun $CIS(v)$ değerini bulalım.

$$CIS_1(v) = v(\{1\}) + \frac{1}{3} \left(v(\{1, 2, 3\}) - (v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})) \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{3} (5 - (1 + 1 + 0))$$

$$= 1 + 1 = 2$$

$$CIS_2(v) = v(\{2\}) + \frac{1}{3} \left(v(\{1, 2, 3\}) - (v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})) \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{3} (5 - 2)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

$$CIS_3(v) = v(\{3\}) + \frac{1}{3} \left(v(\{1, 2, 3\}) - (v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})) \right)$$

$$= 0 + \frac{1}{3} (5 - 2)$$

$$= 0 + 1 = 1$$

Bu durumda, $CIS(v) = (2, 2, 1)$

olarak bulunur.

Tanım 2.13 (Eşitlikçi Bölünemeyen katkı değeri) $ENSC$ -değeri, Driessen ve Funaki tarafından 1991 yılında bulunmuştur. $ENSC$ -değeri,

$\forall v \in 2^N$ için $ENSC: G^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ olup $\forall i \in N$ için

$$ENSC_i(v) = -v(N \setminus \{i\}) + \frac{1}{|N|} \left(v(N) + \sum_{j \in N} v(N \setminus \{j\}) \right)$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.14 Oyuncuların kümesi $N = \{1, 2, 3\}$ ve koalisyon değerleri (Çizelge 2.6)

Çizelge 2.6. Koalisyon değerleri

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	2	2	0	7	4	5	9

olarak verilsin. Buna göre $ENSC(v)$ değerini bulalım.

$$ENSC_1(v) = -v(N \setminus \{1\}) + \frac{1}{3} \left(v(N) + \sum_{j \in N} v(N \setminus \{j\}) \right)$$

$$ENSC_1(v) = -5 + \frac{1}{3} (9 + 7 + 4 + 5)$$

$$= -5 + \frac{1}{3} (25) = \frac{25}{3} - 5 = \frac{10}{3}$$

$$ENSC_2(v) = -v(N \setminus \{2\}) + \frac{1}{3} \left(v(N) + \sum_{j \in N} v(N \setminus \{j\}) \right)$$

$$= -4 + \frac{1}{3} (9 + 7 + 4 + 5)$$

$$= -4 + \frac{1}{3} (25) = \frac{25}{3} - 4 = \frac{13}{3}$$

$$ENSC_3(v) = -v(N \setminus \{3\}) + \frac{1}{3} \left(v(N) + \sum_{j \in N} v(N \setminus \{j\}) \right)$$

$$= -7 + \frac{25}{3} = \frac{25}{3} - 7 = \frac{4}{3}$$

Bu durumda, $ENSC(v) = \left(\frac{10}{3}, \frac{13}{3}, \frac{4}{3} \right)$

olarak bulunur.

Tanım 2.15 (Konveks Oyun) $v \in G^N$ verilsin.

$\forall S, T \in 2^N$ için

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$$

şartı sağlanıyorsa oyun konvektir denir. Konveks oyunlar sınıfı CG^N ile gösterilir.

Örnek 2.16 Oyuncular kümesi $N = \{1, 2, 3\}$ ve koalisyon değerleri (Çizelge 2.7)

Çizelge 2.7. Koalisyon değerleri

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	15	25	35	60	60	60	115

olarak verilsin. Buna göre oyunun konveks oyun olduğunu gösterelim.

Bu durumda, tanıma göre $\forall S, T \in 2^N$ için

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$$

şartının sağlanması gerekir. N nin bütün alt kümelerinin kümesi

$2^N = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ olmak üzere

$S = \{1\}, T = \{2\}$ için

$$\begin{aligned} v(\{1, 2\}) + v(\emptyset) &\geq v(\{1\}) + v(\{2\}) \\ 60 &\geq 40 \end{aligned}$$

bulunur.

$S = \{1\}, T = \{3\}$ için

$$\begin{aligned} v(\{1, 3\}) + v(\emptyset) &\geq v(\{1\}) + v(\{3\}) \\ 60 &\geq 50 \end{aligned}$$

bulunur.

$S = \{2\}, T = \{3\}$ için

$$\begin{aligned} v(\{2, 3\}) + v(\emptyset) &\geq v(\{2\}) + v(\{3\}) \\ 60 &\geq 60 \end{aligned}$$

bulunur.

$S = \{1\}, T = \{1, 2\}$ için

$$\begin{aligned} v(\{1, 2\}) + v(\{1\}) &\geq v(\{1\}) + v(\{1, 2\}) \\ 75 &\geq 75 \end{aligned}$$

bulunur.

$S = \{1\}, T = \{1, 3\}$ için

$$\begin{aligned} v(\{1, 3\}) + v(\{1\}) &\geq v(\{1\}) + v(\{1, 3\}) \\ 75 &\geq 75 \end{aligned}$$

bulunur.

$S = \{1\}, T = \{2, 3\}$ için

$$v(\{1, 2, 3\}) + v(\emptyset) \geq v(\{1\}) + v(\{2, 3\})$$

$$115 \geq 75$$

bulunur.

$S = \{2\}, T = \{1, 2\}$ için

$$v(\{1, 2\}) + v(\{2\}) \geq v(\{2\}) + v(\{1, 2\})$$

$$85 \geq 85$$

bulunur.

$S = \{2\}, T = \{1, 3\}$ için

$$v(\{1, 2, 3\}) + v(\emptyset) \geq v(\{2\}) + v(\{1, 3\})$$

$$115 \geq 85$$

bulunur.

$S = \{2\}, T = \{2, 3\}$ için

$$v(\{2, 3\}) + v(\{2\}) \geq v(\{2\}) + v(\{2, 3\})$$

$$85 \geq 85$$

bulunur.

$S = \{3\}, T = \{1, 2\}$ için

$$v(\{1, 2, 3\}) + v(\emptyset) \geq v(\{3\}) + v(\{1, 2\})$$

$$115 \geq 95$$

bulunur.

$S = \{3\}, T = \{1, 3\}$ için

$$v(\{1, 3\}) + v(\{3\}) \geq v(\{3\}) + v(\{1, 3\})$$

$$95 \geq 95$$

bulunur.

$S = \{3\}, T = \{2, 3\}$ için

$$v(\{2, 3\}) + v(\{3\}) \geq v(\{3\}) + v(\{2, 3\})$$

$$85 \geq 85$$

bulunur.

$S = \{1, 2\}, T = \{1, 3\}$ için

$$v(\{1, 2, 3\}) + v(\{1\}) \geq v(\{1, 2\}) + v(\{1, 3\})$$

$$130 \geq 120$$

bulunur.

$S = \{1, 2\}, T = \{2, 3\}$ için

$$v(\{1, 2, 3\}) + v(\{2\}) \geq v(\{1, 2\}) + v(\{2, 3\})$$

$$140 \geq 120$$

bulunur.

$S = \{1, 3\}, T = \{2, 3\}$ için

$$v(\{1, 2, 3\}) + v(\{3\}) \geq v(\{1, 3\}) + v(\{2, 3\})$$

$$150 \geq 120$$

bulunur.

Sonuç olarak $\langle N, v \rangle$ oyunu konvektir.



3. İFLAS DURUMLARI VE İLGİLİ OYUNLAR

Oyun teorisinin uygulamalı matematik içindeki bir alt dalı olan iflas durumu, bir oyuncu grubu arasında belirli bir miktarın oyuncuların taleplerine en adil şekilde nasıl dağıtılacağı sorununu ele alır. Bu oyuncular, bireyler, kurumlar, firmalar, bankalar, ülkeler vb. olabilir. Mevcut miktar genellikle mülk olarak adlandırılır ve bu mülk fon, para, mal vb. olabilir. Bu tür problemlerde odak noktası, mülkün oyuncuların toplam taleplerini karşılamak için yetersiz olmasıdır. Literatürde bilinen 3 antik problem vardır. Bunlar üç eş problemi, giysi çekişmesi problemi ve miras paylaşma problemidir.

Üç eş problemi, bir adamın üç farklı evliliğinden kaynaklanan ve her birinde belirli bir miktarda mal bırakma konusundaki vasiyetnameleri içeren bir durumu ele alır (Gura, 2009). Bu adam, ilk evliliğinde 100 birim, ikinci evliliğinde 200 birim ve üçüncü evliliğinde 300 birim para bırakma kararı almıştır. Ancak, adamın vefatında mal varlığının 600 birimden az olduğu tespit edilmiştir. Talmud'da sunulan çözüm, adamın mal varlığının sırasıyla 100 birim, 200 birim ve 300 birim olduğunu varsayarak geliştirilmiştir. Bu durum, üç eşin miras alma hakkındaki karmaşıklığı ve vasiyetnamelerin sonuçları üzerinde düşünmeye yönlendiren bir senaryoyu içermektedir. (Bkz. Şekil 3.1).

Mal varlığı		Talep	
	100	200	300
100	33.33	33.33	33.33
200	50	75	75
300	50	100	150

Şekil 3.1. Talep-Mal varlığı tablosu (O'Neill, 1982)

Bugünkü modern yasaya göre alacaklılar orantılı bir şekilde paylaşım yapar. Şekil 3.1 de hem 100 birim hem de 300 birim mal varlığı için orantılı bir paylaşım şekli görülmektedir. Ancak, 200 birim mal varlığı için yapılan paylaşım, tartışmalara ve itirazlara neden olan belirsizliklerle doludur. Aumann ve Maschler (1985) tarafından belirtildiği gibi bu paylaşım orantısız paylaşımın ya da eşit paylaşımın herhangi açık bir ifadesine uygun değildir. Bu üç durumun ortak mantığı hâlâ belirsizdir.

Talmud'da ele alınan antik problemlerden bir diğeri, giysi çekişmesi olarak bilinen bir problemdir. Bu problem, iki kişinin aynı giysiyi paylaşma konusunda anlaşamadıkları bir durumu içerir. Birinci kişi, giysinin tamamının kendisine ait olduğunu iddia ederken, ikinci kişi giysinin yarısının kendisine ait olduğunu savunmaktadır. Bu durum, giysi üzerindeki hak iddiaları arasında bir anlaşmazlığı temsil etmektedir. O'Neill (1982)'e göre paylaşım birinci kişiye giysinin dörtte üçünü verir, ikinciye ise dörtte birini verir (Bkz Şekil 3.2).

Mal varlığı	Talep	
	0.5	1
1	0.25	0.75

Şekil 3.2. Talep-Mal varlığı tablosu (O'Neill, 1982)

Talmud'da ele alınan antik problemlerden bir diğeri, miras paylaşım problemidir. O'Neill(1982)'e göre 1140 yılı civarında, Abraham İbn Ezra tarafından aşağıdaki miras sorunu formüle edilmiştir. Problem Jacob öldükten sonra dört çocuğunun istekleri doğrultusunda mirasının paylaşımı üzerinedir. Bu paylaşımında çocukları 30, 40, 60, 120 birim mal talep etmektedirler. Fakat Jacob öldükten sonra bıraktığı miras 100 birim mal olduğundan paylaşım aşağıdaki tabloda verilmiştir (Şekil 3.3).

Mal varlığı	Talep			
	30	40	60	120
100	7.5	10.83	20.83	80.83

Şekil 3.3. Talep-Mal varlığı tablosu (O'Neill, 1982)

İflas problemleri, gerçek dünyada sıkça karşılaşılan durumlar arasında yer almaktadır. Bu durumlar, iflas eden bir şirketin veya bankanın tasfiye edilmesi gibi ekonomik çöküntüleri içerebileceği gibi, ölen bir kişinin taahhütlerini yerine getirememesi durumunda ortaya çıkan miras problemlerini de içerir. Bu tip durumlar, mal varlığının bölüştürülmesi, mirasçılara düşen kısıtlamalar ve adaletli bir paylaşım düzeninin nasıl kurulacağı gibi karmaşık konuları içerir. Daha açık bir şekilde ifade edecek olursak, bir kişinin sahip olduğu varlık miktarının, toplam talebin üstüne çıkması durumuna

iflas problemi denir. Bu durum, genellikle bir bireyin ya da kurumun maddi yükümlülüklerini yerine getirememesi ve sahip olduğu varlıkların toplam talebi karşılamaması durumunda ortaya çıkar. İflas problemi kısaca $(E; d)$ ikilisi ile gösterilir. Burada; E elde bulunan miktar (mülk, hazine), $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ ise talepleri gösteren vektördür. Burada $(1, 2, \dots, n)$ tane oyuncu için genelleme yapılmaktadır. İflas durumları, iflas problemlerini ortaya çıkarır. İflas problemi sıralı bir $(E; d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ikilisi olarak ifade edilir. Burada; $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq E \leq d_1 + d_2 + \dots + d_n = D$ şeklinde tanımlanır. E, n -tane alacaklı arasında bölüştürülmesi gereken hazine dir. İflas problemlerini çözmek için çeşitli yöntemler aşağıda ele alınmaktadır.

Tanım 3.1 (Sıralanış Kuralı) Sıralanış kuralı, oyuncuların olası tüm sıralanışlarını bulan çözüm yöntemine denir. İlk oyuncu başta olmak üzere sırasıyla birinci oyuncu talebini karşılar, sonraki gelen oyuncular kalan miktarlara göre taleplerinin tamamını veya taleplerinin bir kısmını karşılar. Olası tüm sıralanışların ortalaması paranın oyuncular arasındaki paylaşımını verir. Sıralanış kuralına kısaca *RUN* kuralı denilmektedir. Oyunu kurmaya gerek kalmadan sıralanış kuralı kullanılarak sadece iflas durumundaki oyuncuların talepleri doğrultusunda çözüm önerisinde bulunulabilir.

RUN kuralı

$$RUN(E; d) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \pi(N)} d^\sigma$$

bulunur. Burada d^σ oyuncuların taleplerine ait permütasyonlardır.

RUN kuralı oyuncuların talep değerlerine, Shapley çözümü ise oyuncuların talepleri sonucu oluşturulan koalisyon değerlerine ait tüm permütasyonların ortalamasını aldığı için aynı sonucu verir.

Tanım 3.2 (Orantılı Kural) Orantılı kural, hazinenin (E) her bir oyuncunun talebi ile doğru orantılı olarak bölünmesine denir. Orantılı kurala kısaca *PROP* kuralı denilmektedir.

$(E; d)$ iflas oyununda, $E \geq 0$ ve $d \in \mathbb{R}_+^n$

$$\sum_{i \in N} d_i \geq E$$

olmak üzere, $0 \leq f(E; d) \leq d$ ve $\sum_{i \in N} f_i(E; d) = E$ her bir iflas sorunu ve tüm $i \in N$ için

$$PROP_i(E; d) = \frac{E}{\sum_{i \in N} d_i} d_i$$

bulunur. Orantılı kuralda da aynı sıralanış kuralında olduğu gibi oyunu kurmaya gerek kalmadan hazine ve oyuncuların talepleri doğrultusunda çözümü elde etmek mümkündür.

Şimdi hem *RUN* kuralını hem de *PROP* kuralını kullanarak bir iflas durum örneğini inceleyelim.

Örnek 3.3 İflas etmiş olan bir inşaat şirketini ele alalım. Firmanın elinde 750 milyon birim hazine ve şirkete ait 3 tane kurum olsun. Bu kurumların talepleri sırası ile 250 milyon birim, 300 milyon birim ve 350 milyon birim olsun. Şirketin tasfiyesi sonucu 750 milyon birimin alacaklılara en adil şekilde dağıtımını sağlayalım. Toplam talep 900 milyon birim olup iflas durumu oluşmuştur.

Bu durumu $(E; d) = (750; 250, 300, 350)$ ile gösterebiliriz. Üç oyuncu olduğu için $3! = 6$ farklı sıralanış vardır.

Çizelge 3.1. Her bir sıralanış için oyuncuların alacağı miktarlar

Sıralanışlar	1. Oyuncu	2. Oyuncu	3. Oyuncu
(1, 2, 3)	250	300	200
(1, 3, 2)	250	150	350
(2, 1, 3)	250	300	200
(2, 3, 1)	100	300	350
(3, 1, 2)	250	150	350
(3, 2, 1)	100	300	350
Toplam	1200	1500	1800

Çizelge 3.1'e göre *RUN* çözümünü bulmak için sıralanışların ortalamasını alalım.

$$RUN(E; d) = \left(\frac{1200}{6}, \frac{1500}{6}, \frac{1800}{6} \right) = (200, 250, 300)$$

olarak bulunur.

PROP çözümünü her bir oyuncu için ayrı ayrı hesaplayalım.

$$PROP_1(E; d) = \left(\frac{E}{d_1 + d_2 + d_3} \right) d_1 = \left(\frac{750}{900} \right) 250 = 208.33$$

$$PROP_2(E; d) = \left(\frac{E}{d_1 + d_2 + d_3} \right) d_2 = \left(\frac{750}{900} \right) 300 = 250.00$$

$$PROP_3(E; d) = \left(\frac{E}{d_1 + d_2 + d_3} \right) d_3 = \left(\frac{750}{900} \right) 350 = 291.66$$

Sonuç olarak; $PROP(E; d) = (208.33, 250.00, 291.66)$ olarak bulunur.

Çizelge 3.2. İflas durumuna ait oyunculara önerilen çözümler

Çözümler	1.Oyuncu	2.Oyuncu	3.Oyuncu
<i>RUN</i>	200	250	300
<i>PROP</i>	208.33	250	291.66

Tanım 3.4 (İflas Oyunu) Klasik bir iflas olayında, elimizde bulunan belirli bir miktar para E , n tane oyuncunun talebi $d_i, i \in N, N = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. Toplam talep, hazineden gelen kaynakların üstünde bir seviyeye ulaşırsa ortaya çıkan duruma iflas oyunu denir ve $(E; d)$ şeklinde gösterilir. Her bir koalisyon için özel olarak belirlenmiş olan ilgili iflas oyunu, kooperatif oyun teorisindeki temel kavramlardan biridir. Koalisyon, oyuncuların bir araya gelerek oluşturduğu bir grup olarak tanımlanır ve bu grup, belirli bir iflas oyunu çerçevesinde değerlendirilir. Her bir koalisyonun kendine özgü iflas oyunu vardır. Bu nedenle, kooperatif oyun teorisinde her bir koalisyonun ayrı bir iflas oyunu ile ilişkilendirilmesi, oyun içindeki dinamikleri daha derinlemesine anlamamıza ve analiz etmemize olanak sağlar. Her bir iflas oyunu

$$v_{E,d}(S) = maks\{E - \sum_{i \in N \setminus S} d_i, 0\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.5 İflas oyunları konveks oyunlardır.

Teorem 3.5 in ispatı için Sarıarslan (2013) referansı incelenebilir.

Şimdi Örnek 3.4 te verilen örneği iflas oyununu kullanarak modelleyelim ve oyun teorisine ait çözümleri bulalım.

Örnek 3.6 Örnek 3.4'ü kullanarak koalisyon değerlerini bulalım ve çözümleri hesaplayalım.

$(E; d) = (900; 400, 300, 500)$ $E = 900, d_1 = 400, d_2 = 300, d_3 = 500$ olmak üzere

$$v_{E,d}(\{1\}) = \max\left\{900 - \sum_{i \in \{2,3\}} d_i, 0\right\} = \max\{900 - d_2 - d_3, 0\} = \max\{100, 0\} \\ = 100$$

$$v_{E,d}(\{2\}) = \max\left\{900 - \sum_{i \in \{1,3\}} d_i, 0\right\} = \max\{900 - d_1 - d_3, 0\} = \max\{0, 0\} \\ = 0$$

$$v_{E,d}(\{3\}) = \max\left\{900 - \sum_{i \in \{1,2\}} d_i, 0\right\} = \max\{900 - d_1 - d_2, 0\} = \max\{200, 0\} \\ = 200$$

$$v_{E,d}(\{1, 2\}) = \max\left\{900 - \sum_{i \in \{3\}} d_i, 0\right\} = \max\{900 - d_3, 0\} = \max\{400, 0\} \\ = 400$$

$$v_{E,d}(\{1, 3\}) = \max\left\{900 - \sum_{i \in \{2\}} d_i, 0\right\} = \max\{900 - d_2, 0\} = \max\{600, 0\} \\ = 600$$

$$v_{E,d}(\{2, 3\}) = \max\left\{900 - \sum_{i \in \{1\}} d_i, 0\right\} = \max\{900 - d_1, 0\} = \max\{500, 0\} \\ = 500$$

$$v_{E,d}(\{1, 2, 3\}) = \max\left\{900 - \sum_{i \in \{\emptyset\}} d_i, 0\right\} = \max\{900, 0\} = \max\{900, 0\} = 900$$

Çizelge 3.3. Koalisyon değerleri

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$v(S)$	0	100	0	200	400	600	500	900

Oluşturduğumuz iflas oyununa ait $\Phi(v)$ değerini bulalım.

$N = \{1, 2, 3\}$ kümesinin elemanları için permütasyonlar

$$\sigma_1 = (1, 2, 3), \sigma_2 = (1, 3, 2), \sigma_3 = (2, 1, 3),$$

$$\sigma_4 = (2, 3, 1), \sigma_5 = (3, 1, 2), \sigma_6 = (3, 2, 1)$$

bulunur.

$\sigma_1 = (1, 2, 3)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_1} = v(\{1\}) = 100,$$

$$m_2^{\sigma_1} = v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) = 300,$$

$$m_3^{\sigma_1} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 500$$

bulunur.

$\sigma_2 = (1, 3, 2)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_2} = v(\{1\}) = 100,$$

$$m_2^{\sigma_2} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 300,$$

$$m_3^{\sigma_2} = v(\{1, 3\}) - v(\{1\}) = 500$$

bulunur.

$\sigma_3 = (2, 1, 3)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_3} = v(\{1, 2\}) - v(\{2\}) = 400,$$

$$m_2^{\sigma_3} = v(\{2\}) = 0,$$

$$m_3^{\sigma_3} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 500$$

bulunur.

$\sigma_4 = (2, 3, 1)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_4} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 400,$$

$$m_2^{\sigma_4} = v(\{2\}) = 0,$$

$$m_3^{\sigma_4} = v(\{2, 3\}) - v(\{2\}) = 500$$

bulunur.

$\sigma_5 = (3, 1, 2)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_5} = v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) = 400,$$

$$m_2^{\sigma_5} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 300,$$

$$m_3^{\sigma_5} = v(\{3\}) = 200$$

bulunur.

Son olarak $\sigma_6 = (3, 2, 1)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_6} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 400,$$

$$m_2^{\sigma_6} = v(\{2, 3\}) - v(\{3\}) = 300,$$

$$m_3^{\sigma_6} = v(\{3\}) = 200$$

bulunur. O halde marjinal vektörleri Çizelge 3.4'te gösterelim.

Çizelge 3.4. Marjinal vektörler

σ	$m_1^\sigma(v)$	$m_2^\sigma(v)$	$m_3^\sigma(v)$	$m_\sigma(v)$
$\sigma_1 = (1, 2, 3)$	$m_1^{\sigma_1}(v) = 100$	$m_2^{\sigma_1}(v) = 300$	$m_3^{\sigma_1}(v) = 350$	$m^{\sigma_1}(v) = (100, 300, 500)$
$\sigma_2 = (1, 3, 2)$	$m_1^{\sigma_2}(v) = 100$	$m_2^{\sigma_2}(v) = 300$	$m_3^{\sigma_2}(v) = 350$	$m^{\sigma_2}(v) = (100, 300, 500)$
$\sigma_3 = (2, 1, 3)$	$m_1^{\sigma_3}(v) = 250$	$m_2^{\sigma_3}(v) = 150$	$m_3^{\sigma_3}(v) = 350$	$m^{\sigma_3}(v) = (400, 0, 500)$
$\sigma_4 = (2, 3, 1)$	$m_1^{\sigma_4}(v) = 250$	$m_2^{\sigma_4}(v) = 150$	$m_3^{\sigma_4}(v) = 350$	$m^{\sigma_4}(v) = (400, 0, 500)$
$\sigma_5 = (3, 1, 2)$	$m_1^{\sigma_5}(v) = 250$	$m_2^{\sigma_5}(v) = 300$	$m_3^{\sigma_5}(v) = 200$	$m^{\sigma_5}(v) = (400, 300, 200)$
$\sigma_6 = (3, 2, 1)$	$m_1^{\sigma_6}(v) = 250$	$m_2^{\sigma_6}(v) = 300$	$m_3^{\sigma_6}(v) = 200$	$m^{\sigma_6}(v) = (400, 300, 200)$

Shapley değeri, marjinal vektörlerin ortalaması olduğundan,

$$\begin{aligned}
\Phi(v) &= \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in \pi(N)} m^\sigma(v) \\
&= \frac{1}{6} \{(100, 300, 500) + (100, 300, 500) + (400, 0, 500) + (400, 0, 500) + \\
&\quad (400, 300, 200) + (400, 300, 200)\} \\
&= \frac{1}{6} (1800, 1200, 2400) = (300, 200, 400)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Bu iflas oyunumuzun $\beta(v)$ değerini bulalım.

$$\begin{aligned}
\beta_1(v) &= \frac{1}{2^{3-1}} \sum_{1 \in S} v(S) - v(S \setminus \{1\}) \\
&= \frac{1}{4} (v(\{1\}) - v(\emptyset) + v(\{1, 2\}) - v(\{2\}) + v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) + v(\{1, 2, 3\}) \\
&\quad - v(\{2, 3\})) \\
&= \frac{1}{4} (100 - 0 + 400 - 0 + 600 - 200 + 900 - 500) \\
&= \frac{1}{4} 1300 = 325 \\
\beta_2(v) &= \frac{1}{2^{3-1}} \sum_{2 \in S} v(S) - v(S \setminus \{2\}) \\
&= \frac{1}{4} (v(\{2\}) - v(\emptyset) + v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) + v(\{2, 3\}) - v(\{3\}) + v(\{1, 2, 3\}) \\
&\quad - v(\{1, 3\}))
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(0 - 0 + 400 - 100 + 500 - 200 + 900 - 600)$$

$$= \frac{1}{4}500 = 125$$

$$\beta_3(v) = \frac{1}{2^{3-1}} \sum_{3 \in S} v(S) - v(S \setminus \{3\})$$

$$= \frac{1}{4}(v(\{3\}) - v(\emptyset) + v(\{1, 3\}) - v(\{1\}) + v(\{2, 3\}) - v(\{2\}) + v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}))$$

$$= \frac{1}{4}(200 - 0 + 600 - 100 + 500 - 0 + 900 - 400)$$

$$= \frac{1}{4}1700 = 425$$

Buradan da $\beta(v) = (325, 125, 425)$

olarak bulunur.

Bu iflas oyunumuzun $CIS(v)$ değerini bulalım.

$$CIS_1(v) = v(\{1\}) + \frac{1}{3}(v(\{1, 2, 3\}) - (v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})))$$

$$= 100 + \frac{1}{3}(900 - (100 + 0 + 200))$$

$$= 100 + 200 = 300$$

$$CIS_2(v) = v(\{2\}) + \frac{1}{3}(v(\{1, 2, 3\}) - (v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})))$$

$$= 0 + \frac{1}{3}(900 - 300)$$

$$= 0 + 200 = 200$$

$$CIS_3(v) = v(\{3\}) + \frac{1}{3}(v(\{1, 2, 3\}) - (v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})))$$

$$= 200 + \frac{1}{3}(900 - 300)$$

$$= 200 + 200 = 400$$

Buradan da $CIS(v) = (300, 200, 400)$

olarak bulunur.

Bu iflas oyunumuzun $ENSC(v)$ değerini bulalım.

$$ENSC_1(v) = -v(N \setminus \{1\}) + \frac{1}{3} \left(v(N) + \sum_{j \in N} v(N \setminus \{j\}) \right)$$

$$ENSC_1(v) = -500 + \frac{1}{3} (900 + 400 + 600 + 500)$$

$$= -500 + \frac{1}{3} (2400) = 800 - 500 = 300$$

$$ENSC_2(v) = -v(N \setminus \{2\}) + \frac{1}{3} \left(v(N) + \sum_{j \in N} v(N \setminus \{j\}) \right)$$

$$= -600 + \frac{1}{3} (900 + 400 + 600 + 500)$$

$$= -600 + \frac{1}{3} (2400) = 800 - 600 = 200$$

$$ENSC_3(v) = -v(N \setminus \{3\}) + \frac{1}{3} \left(v(N) + \sum_{j \in N} v(N \setminus \{j\}) \right)$$

$$= -400 + \frac{1}{3} (900 + 400 + 600 + 500)$$

$$= -400 + \frac{1}{3} (2400) = 800 - 400 = 400$$

Buradan da $ENSC(v) = (300, 200, 400)$

olarak bulunur.

Tanım 3.1'e göre RUN değeri Shapley değerine eşit olduğundan,

$$RUN = (300, 200, 400)$$

olarak elde edilmiş olur.

Bu iflas oyunumuzun $PROP$ değerini bulalım.

$$PROP_1(E; d) = \left(\frac{E}{d_1 + d_2 + d_3} \right) d_1 = \left(\frac{900}{1200} \right) 400 = 300$$

$$PROP_2(E; d) = \left(\frac{E}{d_1 + d_2 + d_3} \right) d_2 = \left(\frac{900}{1200} \right) 300 = 225$$

$$PROP_3(E; d) = \left(\frac{E}{d_1 + d_2 + d_3} \right) d_3 = \left(\frac{900}{1200} \right) 500 = 375$$

Sonuç olarak; $PROP(E; d) = (300, 225, 375)$ olarak bulunur. Bu durumda, tablomuz Çizelge 3.5 şeklinde olur.

Çizelge 3.5. Modele ait çözüm tablosu

Çözümler	1. Oyuncu	2. Oyuncu	3. Oyuncu
Shapley değeri	300	200	400
Banzhaf değeri	325	125	425
CIS değeri	300	200	400
ENSC değeri	300	200	400
RUN değeri	300	200	400
PROP değeri	300	225	375

Şimdi ise bu iflas oyunumuzun konveks olduğunu gösterelim.

Bunun için $\forall S, T \in 2^N$ için

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$$

şartının sağlanması gerekir. N nin bütün alt kümelerinin kümesi

$$2^N = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \text{ olmak üzere}$$

$S = \{1\}, T = \{2\}$ için

$$v(\{1, 2\}) + v(\emptyset) \geq v(\{1\}) + v(\{2\})$$

$$400 \geq 100$$

bulunur.

$S = \{1\}, T = \{3\}$ için

$$v(\{1, 3\}) + v(\emptyset) \geq v(\{1\}) + v(\{3\})$$

$$600 \geq 300$$

bulunur.

$S = \{2\}, T = \{3\}$ için

$$v(\{2, 3\}) + v(\emptyset) \geq v(\{2\}) + v(\{3\})$$

$$500 \geq 200$$

bulunur.

$S = \{1\}, T = \{1, 2\}$ için

$$v(\{1, 2\}) + v(1) \geq v(\{1\}) + v(\{1, 2\})$$

$$500 \geq 500$$

bulunur.

$S = \{1\}, T = \{1, 3\}$ için

$$v(\{1, 3\}) + v(1) \geq v(\{1\}) + v(\{1, 3\})$$

$$700 \geq 700$$

bulunur.

$S = \{1\}, T = \{2, 3\}$ için

$$\begin{aligned} v(\{1, 2, 3\}) + v(\emptyset) &\geq v(\{1\}) + v(\{2, 3\}) \\ 900 &\geq 600 \end{aligned}$$

bulunur.

$S = \{2\}, T = \{1, 2\}$ için

$$\begin{aligned} v(\{1, 2\}) + v(2) &\geq v(\{2\}) + v(\{1, 2\}) \\ 400 &\geq 400 \end{aligned}$$

bulunur.

$S = \{2\}, T = \{1, 3\}$ için

$$\begin{aligned} v(\{1, 2, 3\}) + v(\emptyset) &\geq v(\{2\}) + v(\{1, 3\}) \\ 900 &\geq 600 \end{aligned}$$

bulunur.

$S = \{2\}, T = \{2, 3\}$ için

$$\begin{aligned} v(\{2, 3\}) + v(2) &\geq v(\{2\}) + v(\{2, 3\}) \\ 500 &\geq 500 \end{aligned}$$

bulunur.

$S = \{3\}, T = \{1, 2\}$ için

$$\begin{aligned} v(\{1, 2, 3\}) + v(\emptyset) &\geq v(\{3\}) + v(\{1, 2\}) \\ 900 &\geq 600 \end{aligned}$$

bulunur.

$S = \{3\}, T = \{1, 3\}$ için

$$\begin{aligned} v(\{1, 3\}) + v(\{3\}) &\geq v(\{3\}) + v(\{1, 3\}) \\ 800 &\geq 800 \end{aligned}$$

bulunur.

$S = \{3\}, T = \{2, 3\}$ için

$$\begin{aligned} v(\{2, 3\}) + v(\{3\}) &\geq v(\{3\}) + v(\{2, 3\}) \\ 500 &\geq 500 \end{aligned}$$

bulunur.

$S = \{1, 2\}, T = \{1, 3\}$ için

$$\begin{aligned} v(\{1, 2, 3\}) + v(\{1\}) &\geq v(\{1, 2\}) + v(\{1, 3\}) \\ 1000 &\geq 1000 \end{aligned}$$

bulunur.

$S = \{1, 2\}, T = \{2, 3\}$ için

$$v(\{1, 2, 3\}) + v(\{2\}) \geq v(\{1, 2\}) + v(\{2, 3\})$$

$$900 \geq 900$$

bulunur.

$S = \{1, 3\}, T = \{2, 3\}$ için

$$v(\{1, 2, 3\}) + v(\{3\}) \geq v(\{1, 3\}) + v(\{2, 3\})$$

$$1100 \geq 1100$$

bulunur.

Sonuç olarak bu oyun konvektir.



4. UYGULAMA

Bu bölümde iflas durumu ile modellenen bir oyun örneği verilmektedir.

Üç farklı şirket bir bankadan fabrika kurmak amacıyla kredi çekmeyi talep etmektedirler. Ancak banka sahip olduğu nakte bağlı olarak toplamda sadece 100 milyar birimlik kredi verebilecektir. A şirketi 10 milyar birim, B şirketi 35 milyar birim ve C şirketi ise 75 milyar birimlik kredi talep etmektedirler. Bankanın kasasında yeterli miktarda nakit olmadığı için, şirketlerin talepleri doğrultusunda en uygun şekilde kredi miktarı dağıtılması gerekmektedir. Bu durumda, şirketlere kredi dağıtımını gerçekleştirmek için bir plan yapılması gerekmektedir. Talepler göz önünde bulundurulduğunda, en öncelikli adım hangi şirketin ne kadar miktarda kredi alabileceğini belirlemektir. Daha sonra, kasadaki mevcut nakit miktarı ve taleplerin karşılanma oranı göz önünde bulundurularak dağıtım yapılmalıdır. Bu süreçte, her bir şirketin belirlenen miktarı almasını sağlayacak bir dengeleme yapılmalıdır. Bu şekilde, tüm şirketlerin ihtiyaçları karşılanarak adil bir dağıtım gerçekleştirilebilir.

Şimdi bu durumu iflas oyunlarını kullanarak modelleyelim

$(E; d) = (100; 10, 35, 75)$, $E = 100$, $d_1 = 10$, $d_2 = 35$, $d_3 = 75$ olmak üzere

$$\begin{aligned} v_{E,d}(\{1\}) &= \max \left\{ 100 - \sum_{i \in \{2,3\}} d_i, 0 \right\} = \max \{ 100 - d_2 - d_3, 0 \} = \max \{ -10, 0 \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{E,d}(\{2\}) &= \max \left\{ 100 - \sum_{i \in \{1,3\}} d_i, 0 \right\} = \max \{ 100 - d_1 - d_3, 0 \} = \max \{ 15, 0 \} \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{E,d}(\{3\}) &= \max \left\{ 100 - \sum_{i \in \{1,2\}} d_i, 0 \right\} = \max \{ 100 - d_1 - d_2, 0 \} = \max \{ 55, 0 \} \\ &= 55 \end{aligned}$$

$$v_{E,d}(\{1, 2\}) = \max \left\{ 100 - \sum_{i \in \{3\}} d_i, 0 \right\} = \max \{ 100 - d_3, 0 \} = \max \{ 25, 0 \} = 25$$

$$v_{E,d}(\{1, 3\}) = \max \left\{ 100 - \sum_{i \in \{2\}} d_i, 0 \right\} = \max \{ 100 - d_2, 0 \} = \max \{ 65, 0 \} = 65$$

$$v_{E,d}(\{2,3\}) = \max\left\{100 - \sum_{i \in \{1\}} d_i, 0\right\} = \max\{100 - d_1, 0\} = \max\{90, 0\} = 90$$

$$v_{E,d}(\{1,2,3\}) = \max\left\{100 - \sum_{i \in \{2,3\}} d_i, 0\right\} = \max\{100, 0\} = \max\{100, 0\} = 100$$

Çizelge 4.1 Koalisyon değerleri

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	15	55	25	65	90	100

İflas oyununa ait koalisyon değerleri Çizelge 4.1 de verilmiştir. Şimdi iflas oyunumuza ait $\Phi(v)$ değerini bulalım.

$N = \{1, 2, 3\}$ kümesinin elemanları için permütasyonlar

$$\sigma_1 = (1, 2, 3), \sigma_2 = (1, 3, 2), \sigma_3 = (2, 1, 3),$$

$$\sigma_4 = (2, 3, 1), \sigma_5 = (3, 1, 2), \sigma_6 = (3, 2, 1)$$

bulunur.

$\sigma_1 = (1, 2, 3)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_1} = v(\{1\}) = 0,$$

$$m_2^{\sigma_1} = v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) = 25,$$

$$m_3^{\sigma_1} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 75$$

bulunur.

$\sigma_2 = (1, 3, 2)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_2} = v(\{1\}) = 0,$$

$$m_2^{\sigma_2} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 35,$$

$$m_3^{\sigma_2} = v(\{1, 3\}) - v(\{1\}) = 65$$

bulunur.

$\sigma_3 = (2, 1, 3)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_3} = v(\{1, 2\}) - v(\{2\}) = 10,$$

$$m_2^{\sigma_3} = v(\{2\}) = 15,$$

$$m_3^{\sigma_3} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 75$$

bulunur.

$\sigma_4 = (2, 3, 1)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_4} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 10,$$

$$m_2^{\sigma_4} = v(\{2\}) = 15,$$

$$m_3^{\sigma_4} = v(\{2, 3\}) - v(\{2\}) = 75$$

bulunur.

$\sigma_5 = (3, 1, 2)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_5} = v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) = 10,$$

$$m_2^{\sigma_5} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 35,$$

$$m_3^{\sigma_5} = v(\{3\}) = 55$$

bulunur.

Son olarak $\sigma_6 = (3, 2, 1)$ için marjinal vektörler;

$$m_1^{\sigma_6} = v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 10,$$

$$m_2^{\sigma_6} = v(\{2, 3\}) - v(\{3\}) = 35,$$

$$m_3^{\sigma_6} = v(\{3\}) = 55$$

bulunur.

Marjinal vektörleri Çizelge 4.2’de gösterelim.

Çizelge 4.2. Marjinal vektörler

σ	$m_1^\sigma(v)$	$m_2^\sigma(v)$	$m_3^\sigma(v)$	$m_\sigma(v)$
$\sigma_1 = (1, 2, 3)$	$m_1^{\sigma_1}(v) = 0$	$m_2^{\sigma_1}(v) = 25$	$m_3^{\sigma_1}(v) = 75$	$m^{\sigma_1}(v) = (0, 25, 75)$
$\sigma_2 = (1, 3, 2)$	$m_1^{\sigma_2}(v) = 0$	$m_2^{\sigma_2}(v) = 35$	$m_3^{\sigma_2}(v) = 65$	$m^{\sigma_2}(v) = (0, 35, 65)$
$\sigma_3 = (2, 1, 3)$	$m_1^{\sigma_3}(v) = 10$	$m_2^{\sigma_3}(v) = 15$	$m_3^{\sigma_3}(v) = 75$	$m^{\sigma_3}(v) = (10, 15, 75)$
$\sigma_4 = (2, 3, 1)$	$m_1^{\sigma_4}(v) = 10$	$m_2^{\sigma_4}(v) = 15$	$m_3^{\sigma_4}(v) = 75$	$m^{\sigma_4}(v) = (10, 15, 75)$
$\sigma_5 = (3, 1, 2)$	$m_1^{\sigma_5}(v) = 10$	$m_2^{\sigma_5}(v) = 35$	$m_3^{\sigma_5}(v) = 55$	$m^{\sigma_5}(v) = (10, 35, 55)$
$\sigma_6 = (3, 2, 1)$	$m_1^{\sigma_6}(v) = 10$	$m_2^{\sigma_6}(v) = 35$	$m_3^{\sigma_6}(v) = 55$	$m^{\sigma_6}(v) = (10, 35, 55)$

Shapley değeri, marjinal vektörlerin ortalaması olduğundan,

$$\begin{aligned}
\Phi(v) &= \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in \Pi(N)} m^\sigma(v) \\
&= \frac{1}{6} \{(0, 25, 75) + (0, 35, 65) + (10, 15, 75) + (10, 15, 75) + (10, 35, 55) + \\
&\quad (10, 35, 55)\} \\
&= \frac{1}{6} (40, 160, 400) = (6.66, 26.66, 66.66) \text{ olarak bulunur.}
\end{aligned}$$

Bu iflas oyunumuzun $\beta(v)$ değerini bulalım.

$$\begin{aligned}\beta_1(v) &= \frac{1}{2^{3-1}} \sum_{1 \in S} v(S) - v(S \setminus \{1\}) \\ &= \frac{1}{4} (v(\{1\}) - v(\emptyset) + v(\{1, 2\}) - v(\{2\}) + v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) + v(\{1, 2, 3\}) \\ &\quad - v(\{2, 3\}))\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} (0 - 0 + 25 - 15 + 65 - 55 + 100 - 90)$$

$$= \frac{1}{4} 30 = 7.5$$

$$\begin{aligned}\beta_2(v) &= \frac{1}{2^{3-1}} \sum_{2 \in S} v(S) - v(S \setminus \{2\}) \\ &= \frac{1}{4} (v(\{2\}) - v(\emptyset) + v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) + v(\{2, 3\}) - v(\{3\}) + v(\{1, 2, 3\}) \\ &\quad - v(\{1, 3\}))\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} (15 - 0 + 25 - 0 + 90 - 55 + 100 - 65)$$

$$= \frac{1}{4} 110 = 27.5$$

$$\begin{aligned}\beta_3(v) &= \frac{1}{2^{3-1}} \sum_{3 \in S} v(S) - v(S \setminus \{3\}) \\ &= \frac{1}{4} (v(\{3\}) - v(\emptyset) + v(\{1, 3\}) - v(\{1\}) + v(\{2, 3\}) - v(\{2\}) + v(\{1, 2, 3\}) \\ &\quad - v(\{1, 2\}))\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} (55 - 0 + 65 - 0 + 90 - 15 + 100 - 25)$$

$$= \frac{1}{4} 270 = 67.5$$

Buradan da $\beta(v) = (7.5, 27.5, 67.5)$

olarak bulunur.

Bu iflas oyunumuzun $CIS(v)$ değerini bulalım.

$$CIS_1(v) = v(\{1\}) + \frac{1}{3} (v(\{1, 2, 3\}) - (v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})))$$

$$= 0 + \frac{1}{3} (100 - (0 + 15 + 55))$$

$$= 0 + 10 = 10$$

$$\begin{aligned}
CIS_2(v) &= v(\{2\}) + \frac{1}{3} \left(v(\{1, 2, 3\}) - (v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})) \right) \\
&= 15 + \frac{1}{3} (100 - 70) \\
&= 15 + 10 = 25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CIS_3(v) &= v(\{3\}) + \frac{1}{3} \left(v(\{1, 2, 3\}) - (v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})) \right) \\
&= 55 + \frac{1}{3} (100 - 70) \\
&= 55 + 10 = 65
\end{aligned}$$

Buradan da $CIS(v) = (10, 25, 65)$

olarak bulunur.

Bu iflas oyunumuzun $ENSC(v)$ değerini bulalım.

$$\begin{aligned}
ENSC_1(v) &= -v(N \setminus \{1\}) + \frac{1}{3} \left(v(N) + \sum_{j \in N} v(N \setminus \{j\}) \right) \\
&= -90 + \frac{1}{3} (100 + 25 + 65 + 90) \\
&= -90 + \frac{1}{3} (280) = 93.33 - 90 = 3.33
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ENSC_2(v) &= -v(N \setminus \{2\}) + \frac{1}{3} \left(v(N) + \sum_{j \in N} v(N \setminus \{j\}) \right) \\
&= -65 + \frac{1}{3} (100 + 25 + 65 + 90) \\
&= -65 + \frac{1}{3} (280) = 93.33 - 65 = 28.33
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ENSC_3(v) &= -v(N \setminus \{3\}) + \frac{1}{3} \left(v(N) + \sum_{j \in N} v(N \setminus \{j\}) \right) \\
&= -25 + \frac{1}{3} (100 + 25 + 65 + 90) \\
&= -25 + \frac{1}{3} (280) = 93.33 - 25 = 68.33
\end{aligned}$$

Buradan da $ENSC(v) = (3.33, 28.33, 68.33)$

olarak bulunur.

RUN değeri Shapley değerine eşit olduğundan,

$$RUN = (6.66, 26.66, 66.66)$$

olarak bulunur.

Bu iflas oyunumuzun *PROP* değerini bulalım.

$$PROP_1(E; d) = \left(\frac{E}{d_1 + d_2 + d_3} \right) d_1 = \left(\frac{100}{120} \right) 10 = 8.33$$

$$PROP_2(E; d) = \left(\frac{E}{d_1 + d_2 + d_3} \right) d_2 = \left(\frac{100}{120} \right) 35 = 29.16$$

$$PROP_3(E; d) = \left(\frac{E}{d_1 + d_2 + d_3} \right) d_3 = \left(\frac{100}{120} \right) 75 = 62.5$$

Buradan da $PROP(E; d) = (8.33, 29.16, 62.5)$ olarak bulunur.

Oluşan tablo Çizelge 4.3'te verilmiştir.

Çizelge 4.3 Modele ait çözüm tablosu

Çözümler	A Şirketi	B Şirketi	C Şirketi
Shapley değeri	6.66	26.66	66.66
Banzhaf değeri	7.5	27.5	67.5
<i>CIS</i> değeri	10	25	65
<i>ENSC</i> değeri	3.33	28.33	68.33
<i>RUN</i> değeri	6.66	26.66	66.66
<i>PROP</i> değeri	8.33	29.16	62.5

5. SONUÇ

Bu tezde ilk olarak matematiğin alt dalı olan Oyun Teorisinin genel tanımlarından, hangi alanlarda kullanıldığından, oyun teorisinin ilk öncülerinden, gerçek hayattaki örneklerinden ve oyun teorisinin tarihsel açıdan öneminden bahsedilmiştir.

İkinci olarak Oyun Teorisinin alt disiplini olan Kooperatif Oyun Teorisi'nde sıkça kullanılan; Toplanabilir oyun, Süpertoplamsal oyun, Shapley değeri, verimlilik, Banzhaf değeri, kısıt kümesinin ağırlık merkezi çözümü, eşitlikçi bölünemeyen katkı değeri ve konveks oyun tanımlarından bahsedilerek örnekler verilmiştir.

Üçüncü olarak Kooperatif Oyun Teorisine dayanan ve bu tezin konusu olan İflas Durumları ve İlgili Oyunlar'dan detaylı bir şekilde bahsedilmiş olup; İflas Durumları'nda geçmişten bugüne bilinen üç antik problem, sıralanış kuralından, orantılı kuraldan ve iflas oyunu tanımından bahsedilmiş ve detaylı bir örnek verilmiştir.

Son olarak gerçek hayata uygun bir model oluşturulmuş olup oyun teorisine ait altı farklı çözüm değeri incelenerek en adil şekilde nasıl dağıtım yapılabileceği, bazı durumlarda farklı oyuncuların aynı değerleri tercih edebileceği gibi bazı durumlarda farklı değerleri tercih edeceği bir uygulama ile gösterilmiştir.

Üç şirketin talepleri ve bankanın kasasında bulunan hazır para göz önüne alınarak elde edilen çözümler Çizelge 4.3'te verilmiştir. Çizelge 4.3'e göre A Şirketi için en iyi çözüm oyun teorisi ile modellemeden *PROP* değeri ile elde edilir. Oyun teorisi kullanılarak elde edilen çözümlerden en iyisi ise Shapley değeridir. B Şirketi için de *PROP* değeri en iyi çözümdür. Oyun teorisi kullanarak ise *ENSC* çözümü en iyi çözümdür. C Şirketi için en iyi çözüm her türlü *ENSC* değerinden elde edilir.

KAYNAKLAR

- Alparslan Gök, S.Z., Sariarslan, A., 2012. on the Bankruptcy Situations and the Alexia Value, Journal of Applied Mathematics, Vol. 2012, Article ID 813060, 7 pages.
- Aumann, R., Maschler, M., 1985. Game-Theoretic Analysis of A Bankruptcy Problem from the Talmud. Journal of Economic Theory, 36, 195-213.
- Banzhaf, J.F., 1965. Weighted Voting Doesn.t Work: A Mathematical Analysis. Rutgers University Law Review, 19, 317-343.
- Branzei, R., Dimitrov, D., Tijs, S., 2008. Models in Cooperative Game Theory. Springer-Verlag, 204p, Berlin.
- Curiel, I., Maschler, M., Tijs S., 1992. Bankruptcy games. Zeitschrift für Operations Research, 31, A143-A159.
- Driessen, T.S.H., Funaki, Y., 1991. Coincidence of and Collinearity between Game-Theoretic Solutions. OR Spectrum, 13(1), 15-30.
- Guiasu, S., 2011. Three ancient problems solved by using the game theory logic based on the Shapley value. Synthese, 181, pp. 179-193.
- Gura, E. Y., 2009. Insights into the Game Theory: An Alternative Mathematical Experience. in Quadernidi Ricerca Didattica. G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy), n. 19 pp. 172-193.
- O'Neill, B., 1982. A problem of rights arbitration from the Talmud. Mathematical Social Sciences, 2, 345-371.
- Sariarslan, A., 2013. İflas problemlerinin oyun teorisi ile çözümü üzerine, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 70, Isparta.
- Shapley, L.S., 1953. A value for n-person games. Annals of Mathematics Studies, 28, 307-317.
- Tijs, S.H., 2003. Introduction to Game Theory. Hindustan Book Agency, 184p, India.
- Tüzün, S., 2021. Oyun teorisindeki eşit dağıtım kuralları üzerine, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 70, Isparta
- von Neumann, J., Morgenstern, O., 1944. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 776p, Princeton.