

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**SINIRLANDIRILMIŞ TERS ESNEK KÜMELER VE
KARAR VERMELERİ ÜZERİNE**

**Hazırlayan
Seda ERDİNÇ**

**Danışman
Doç. Dr. Emin AYGÜN**

Doktora Tezi

**Temmuz 2024
KAYSERİ**

T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLANDIRILMIŞ TERS ESNEK KÜMELER VE
KARAR VERMELERİ ÜZERİNE

(Doktora Tezi)

Hazırlayan
Seda ERDİNÇ

Danışman
Doç. Dr. Emin AYGÜN

Temmuz 2024
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı-Soyadı: Seda ERDİNÇ

İmza:

“Sınırlandırılmış Ters Esnek Kümeler ve Karar Vermeleri Üzerine” adlı Doktora tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan

Seda ERDİNÇ

Danışman

Doç. Dr. Emin AYGÜN

Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

TEŞEKKÜR

Öncelikle bu tez çalışmasının her aşamasında değerli katkı ve eleştirileriyle bana yol gösteren, desteğini esirgemeyen değerli hocam Sayın **Doç. Dr. Emin AYGÜN**'e teşekkür ederim. Tezimin jüri üyeliğini yapan ve tezin gelişmesine katkı sunan değerli hocalarıma da teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı başta eşim Hacı Mehmet ERDİNÇ ve bana motivasyon kaynağı olan kızım olmak üzere tüm aileme teşekkür ederim.

Ayrıca hayatım boyunca destek ve sevgilerini her daim hissettiğim şuan hayatta olmayan ağabeyim Seyfettin AKBULUT ve kardeşim Semih AKBULUT'a bana kattıkları bütün değerler için teşekkür ederim.

SINIRLANDIRILMIŞ TERS ESNEK KÜMELER VE KARAR VERMELERİ ÜZERİNE

Seda ERDİNÇ

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora Tezi, Temmuz 2024
Danışman: Doç. Dr. Emin AYGÜN

ÖZET

Esnek kümeler belirsizlik içeren problemlerin çözümü için kullanılan matematiksel bir araçtır. Esnek küme parametreler kümesinin elemanlarını nesneler kümesinin alt kümeleriyle eşleştirir ters esnek küme ise nesneler kümesindeki elemanları parametreler kümesinin alt kümeleriyle eşleştirir. Tezimizin temelini oluşturan ters esnek kümeler birçok araştırmacı tarafından incelenen bir konu olmuştur. Ancak ters esnek kümelerin sınırlandırılması(kısıtlanması) literatürde eksik olan bir konudur.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, esnek küme ve esnek kümeleri temsil eden esnek matrisler, ters esnek küme ve ters esnek matrislerin tanımları ve ilgili teoremler verilmiştir. İkinci bölümde sınırlandırılmış ters esnek küme ve ters esnek matrisler tanımlanmıştır. Üçüncü bölümde bir küme yardımıyla oluşturulan ters esnek alt yapılar tanımlanıp ilgili teoremler açıklanmıştır. Dördüncü bölümde ters esnek kümeler kullanılarak oluşturulan algoritmalar ve uygulamalar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Esnek küme; ters esnek küme; sınırlandırılmış ters esnek küme; ters esnek karar verme

ON RESTRICTED INVERSE SOFT SETS AND DECISION-MAKING

Seda ERDİNÇ

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

Thesis, July 2024

Supervisor: Assist. Prof. Emin AYGÜN

ABSTRACT

Soft sets are mathematical tools used to solve problems involving uncertainty. Soft sets map elements of the set of parameters to subsets of the set of objects, while inverse soft sets map elements of the set of objects to subsets of the set of parameters. Inverse soft sets, which form the basis of our thesis, have been a subject studied by many researchers. However, restricted inverse soft sets are a topic missing in the literature.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, soft sets and soft matrices representing soft sets, definitions of inverse soft sets and inverse soft matrices, and related theorems are given. In the second part, restricted inverse soft set and inverse soft matrices are defined. In the third chapter, inverse soft substructures created with the help of a cluster are defined and the relevant theorems are explained. In the fourth section, algorithms and applications developed using inverse soft sets are given.

Keywords: Soft set; inverse soft set; restricted inverse soft set; inverse soft decision making

İÇİNDEKİLER

SINIRLANDIRILMIŞ TERS ESNEK KÜMELER VE KARAR VERMELERİ ÜZERİNE

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK	ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI	iii
JÜRİ:	iv
ONAY:	iv
TEŞEKKÜR	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
İÇİNDEKİLER	viii
TABLO LİSTESİ	x
ŞEKİL LİSTESİ	xi
GİRİŞ	1

1. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

1.1. Esnek Kümeler	4
1.2. Esnek Matrisler	8
1.4. Ters Esnek Matris	19

2. BÖLÜM

SINIRLANDIRILMIŞ TERS ESNEK KÜMELER

2.1. Sınırlandırılmış Ters Esnek Kümeler	24
2.2. Ters Esnek Kümelerin Ayrışması	35
2.3. Ters Esnek Matrislerin Ayrışması	38

3. BÖLÜM

BİR KÜME YARDIMIYLA ELDE EDİLEN TERS ESNEK ALT YAPILAR

3.1. Ters Esnek Grup	42
3.2. Ters Esnek Halka	44
3.3. Ters Esnek Cisim	44

3.4. Ters Esnek Modül	46
------------------------------------	-----------

4. BÖLÜM

UYGULAMA

KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ.....	64



TABLO LİSTESİ

Tablo 1. Skor-Değer Tablosu.....	53
----------------------------------	----



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1. Algoritma 1'in Yapısı	51
Şekil 2. Algoritma 2'nin Yapısı	53
Şekil 3. Algoritma 3'ün Yapısı	56
Şekil 4. Algoritma 4'ün Yapısı	58



GİRİŞ

Hayatımızın birçok farklı alanında karmaşık problemlerde çeşitli belirsizlik tipleri mevcuttur. Bu belirsizliklerin bir kısmı klasik yöntemlerle çözülebilirken çoğunluğu bu yöntemler ile çözülememektedir. Belirsizliklerin giderilmesi için Molotsov[1] tarafından ortaya atılan esnek küme teorisi parametreleştirme kavramını tanıtarak klasik küme teorisinin farklı bir uzantısını sunmaktadır. Esnek kümeler belirsiz bilgilerin etkili bir şekilde modellenmesine ve yönetilmesine olanak sağlamıştır.

Esnek küme teorisinin tanıtılmasından günümüze kadar teorik ve pratikte birçok alanda uygulanmış ve birçok araştırmacı tarafından çalışılan bir konu olmuştur. Yaklaşımli küme teorisi yardımıyla Maji ve ark.[3] esnek kümelerde bazı işlemler tanımladı ve karar verme probleminde esnek kümeler ile uygulamasını yaptı. Maji ve diğerleri.[4] iki esnek kümenin eşitliğini, bir esnek kümenin alt kümesini, bir esnek kümenin tümleyenini, ve/veya gibi esnek ikili işlemleri ve birleşim ve kesişim işlemlerini tanımlayarak esnek küme teorisinde yeni çalışmaların yapılabilmesini sağlamıştır.

Pei ve Miao[5], esnek alt küme ve iki esnek kümenin kesişimi kavramlarını yeniden tanımladı. Bazı yazarlar tarafınca esnek kümelerin cebirsel özellikleri çalışılmaktadır. Esnek grupların yeni bir tanımı ve bazı temel özellikleri Aktaş ve Çağman[6] tarafından elde edilmiştir. Daha sonra Ali ve ark.[7] bazı yeni esnek küme işlemleri önermiş ve Sezgin ve Atagün[8] ile Ali vd.[9] bu esnek işlemlerini ayrıntılı olarak analiz etmiştir. Esnek küme teorisine farklı bir bakış açısı kazandıran önemli öncülerden birisi Çağman ve Enginoğlu[10] tarafından ortak evrensel küme üzerine kurulu esnek matris tanımı verilmiştir. Atagün ve ark.[11] ortak evrensel küme üzerinde indirgenmiş esnek matrisler için esnek matris çarpımını genelleştirdi. Bu genellemeler iki farklı türde esnek matrisi aynı anda çarpmamıza olanak tanımıştır. Kamacı ve ark.[12] esnek matrislerin satır çarpımı kavramını ortaya attı ve cebirsel özellikleri incelendi. Atagün ve Kamacı[13]

esnek kümelerin ve esnek matrislerin ayrışması kavramını tanıtmıştır ve grup karar verme uygulamalarını vermiştir.

Feng ve ark.[14] esnek halkalar ile alakalı çalışmayı ve birtakım özelliklerini esnek küme teorisi yardımıyla sundu. Esnek modül tanımını ve Molodtsov` un esnek küme tanımını kullanarak birtakım temel özelliklerini ise Sun ve ark. verdi.

Esnek sayı, esnek türev, esnek integral benzer biçimde kavramlar Molodtsov ve ark. tarafınca esnek küme teorisi üstüne dayalı bir çözümleme geliştirerek, formüle edildi. Esnek küme teorisi ve uygulamaları ile alakalı çalışmalar halen devam etmekte ve gelişmektedir. Esnek küme üstündeki değişik işlemlerin temel analizi Ali ve ark. tarafınca açıklandı. Çağman ve Enginoğlu[15] Molodtsov`un esnek kümelerindeki işlemleri, değişik yeni sonuçlar elde etme amacıyla daha işlevsel yaparak yeniden tanımladı. Esnek karar verme metotlarını bu yeni tanımları kullanarak yaptılar. Qin ve ark.[16] karar verme yöntemi olarak iki yeni yaklaşım vurgulamıştır bunlar seçim değeri temelli yaklaşım ve mukayese puanına dayalı nesnelerin sıralamasını sağlayan yaklaşımdır.

Esnek kümelerin kapsamasına, kısıtlanmasına ve genişletilmesine dayanan küme odaklı yaklaşımlar, esnek kümelerin işlem aralığının, cebirsel yapılarının, topolojik yapıların uygulama yönünün genişletilmesine olanak sağlar. Sezer ve ark.[17] evrensel bir U kümesi üzerindeki esnek kümenin $\alpha \subseteq U$ olmak üzere esnek kümenin α - alt kapsama, α - üst kapsama tanımlarını yapmıştır. Aykut ve Atagün[18] esnek küme ve esnek matrislerin α –kesişim, α –birleşim, α –alt kapsama ve α – üst kapsama gibi tanımlarını vermiş ve grup karar verme problemlerinde uygulanmıştır.

Esnek kümelere farklı bir bakış açısı sunan ters esnek küme kavramı Çetkin vd.[19] tarafından ortaya atılmış ve bu kavram gerçek dünya sahnesinden örneklerle desteklenmiştir. İlerleyen yıllarda, Kamacı vd.[20-21] ters esnek kümenin bir matris formu olan kardinalite ters esnek matris yapısını geliştirmiş ve çok kriterli karar verme ile uğraşmada bu yapının avantajlarına değinmiştir. Ayrıca ters esnek matrislerin satır çarpımını tanıtarak çok kriterli karar verme uygulamalarını sunmuştur. Aygün ve ark. [22] ters esnek kümeler ve matris temsilleri üzerine çalışmış ve yeni bir karar verme yöntemi önermiştir.

Ters esnek küme teorisine katkı sağlamayı amaçlayan bu çalışma bir veya daha fazla parametre kümesi içeren karar problemlerinde en uygun karar seçeneğini ve seçeneklerin seçim sırasını belirlemek için ters esnek kümenin ve ters esnek matrisin sınırlandırılmış/kısıtlanmış formlarını kullanan yeni bir grup karar verme yöntemi önermeyi hedeflemektedir. Ayrıca bu karar verme algoritmasının gerçek dünya uygulamalarını tartışmayı ve literatüre yeni bir karar verme yöntemi sunmayı amaçlamaktadır.

Dört bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde, esnek küme ve esnek kümelere karşılık gelen esnek matrisler, ters esnek küme ve ters esnek matrislerin tanımları ve ilgili teoremler verilmiştir. İkinci bölümde sınırlandırılmış ters esnek küme ve ters esnek matrisler tanımlanmıştır. Üçüncü bölümde bir küme yardımıyla oluşturulan ters esnek alt yapılar tanımlanıp ilgili teoremler açıklanmıştır. Dördüncü bölümde ters esnek kümeler kullanılarak oluşturulan algoritmalar ve karar verme problemleri ile ilgili uygulamalar verilmiştir.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, esnek küme, esnek matris, ters esnek küme ve ters esnek matris tanımları açıklanacaktır. İlgili özellikler ve teoremler verilecektir.

1.1. Esnek Kümeler

Tanım 1.1.1.[1] V bir evrensel küme, $P(V)$ V 'nin kuvvet kümesi, T parametreler kümesi ve $A \subseteq T$ olsun. Bu durumda $\mathcal{F}: T \rightarrow P(V)$ dönüşüm olmak üzere

$$(\mathcal{F}_A, T) = \{(t, \mathcal{F}_A(t)): t \in T, \mathcal{F}_A(t) \in P(V) | t \notin T \text{ ise } \mathcal{F}_A(t) = \emptyset\}$$

şeklinde verilen sıralı ikililerin kümesi V üzerinde esnek küme olarak adlandırılır.

Daha somut bir örnekle açıklayacak olursak: Bir şirketteki boş bir pozisyon için bir yöneticinin (karar vericinin) belirli sayıda adayla görüşme yaptığını varsayalım. Bu boş pozisyon için başvurmuş adayları değerlendirmede kullanılacak kriterlerinin veya parametrelerinin kümesi

$$t = \{t_1 = \text{iş tecrübesi}, t_2 = \text{yabancı dil}, t_3 = \text{kendine güvenen}, t_4 = \text{disiplinli}\}.$$

olsun. Adayların kümesi $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ olsun. Yönetici, adaylarla yapılan mülakat sonucunda, kriterlere göre adayların değerlendirmelerini aşağıdaki gibi bir esnek küme ile verebilir:

$$\delta = \{(t_1, \{v_1, v_3, v_4\}), (t_2, \{v_1, v_2\}), (t_3, \{v_3, v_5, v_7\}), (t_4, \{v_1, v_4\})\}.$$

Burada, $(t_1, \{v_1, v_3, v_4\})$ ile *iş tecrübesi* olan adayların v_1, v_3 ve v_4 olduğu ifade edilmektedir. Esnek kümenin diğer elemanları da benzer şekilde yorumlanabilir.

Tanım 1.1.2.[4] (f_A, T) ve (g_B, T) V üzerinde tanımlı esnek kümeleri için,

1) $A \subseteq B$ ve

2) $(\forall t \in T)$ için $f_A(t) = g_B(t)$

ise (f_A, T) , (g_B, T) 'nin esnek alt kümesidir denir ve $(f_A, T) \subseteq (g_B, T)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.3.[4] Eğer V üzerinde (f_A, T) , (g_B, T) 'nin esnek alt kümesi ve (g_B, T) 'de (f_A, T) 'nin esnek alt kümesi ise bu durumda (g_B, T) ve (f_A, T) V üzerinde esnek eşittir denir.

Tanım 1.1.4.[4] (f_A, T) , V üzerinde bir esnek küme olsun.

1) $\forall t \in T$ için $f_A(t) = \emptyset$ ise bu durumda (f_A, T) esnek kümesine *boş esnek küme* denir ve $(f_A, T) = \Phi$ şeklinde gösterilir.

2) $\forall t \in T$ için $f_A(t) = V$ ise (f_A, T) ya *A-evrensel esnek küme* denir ve $(f_A, T) = (f_{\tilde{A}}, T)$ şeklinde gösterilir.

3) $\forall t \in A$ için $f_A(t) = V$ ve $A = T$ ise *A-evrensel esnek kümesine, evrensel esnek küme* denir. $(f_A, T) = (f_T, T)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1.1.5. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ bir evrensel küme, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ tüm parametrelerin kümesi ve $A = \{t_1, t_3\}$ olsun. $f_A(t_1) = \emptyset$, $f_A(t_3) = \emptyset$ ise (f_A, T) esnek kümesi boş esnek kümedir $(f_A, T) = \Phi$ dır.

Örnek 1.1.6. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ bir evrensel küme, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ tüm parametrelerin kümesi ve $A = \{t_2, t_3, t_5\}$ olsun. $f_A(t_2) = V$, $f_A(t_3) = V$, $f_A(t_5) = V$ ise (f_A, T) A-evrensel esnek kümedir. $(f_A, T) = (f_{\tilde{A}}, T)$ dır.

Tanım 1.1.7.[7] (f_A, T) V üzerinde bir esnek küme olsun. (f_A, T) 'nin tümleyeni olan $(f_A^c, T) = (f_A, T)^c$, $\forall t \in T$ için $f_A^c(t) = V \setminus f_A(t)$ yaklaşım fonksiyonu ile tanımlanır.

Örnek 1.1.8. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ bir evrensel küme, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ tüm parametrelerin kümesi ve $A = \{t_1, t_2, t_4\}$ olsun.

$$\mathcal{f}_A(t_1) = \{v_2, v_3, v_5\} \quad \mathcal{f}_A^c(t_1) = \{v_1, v_4\}$$

$$\mathcal{f}_A(t_2) = \{v_1, v_4\} \quad \mathcal{f}_A^c(t_2) = \{v_2, v_3, v_5\}$$

$$\mathcal{f}_A(t_4) = \{v_1, v_2, v_4\} \quad \mathcal{f}_A^c(t_4) = \{v_3, v_5\}$$

şeklindedir.

Önerme 1.1.9.[7] $(\mathcal{f}_A, T), V$ üzerinde bir esnek küme olsun.

$$1) (\mathcal{f}_A^c, T)^c = (\mathcal{f}_A, T)$$

$$2) \Phi^c = (\mathcal{f}_T, T).$$

Önerme 1.1.10. $(\mathcal{f}_A, T)$ ve $(\mathcal{g}_B, T)$ V üzerinde iki esnek küme olsun.

$$1) (\mathcal{f}_A, T) \cong (\mathcal{f}_T, T)$$

$$2) \Phi \cong (\mathcal{f}_A, T)$$

$$3) (\mathcal{f}_A, T) \cong (\mathcal{f}_A, T)$$

$$4) (\mathcal{f}_A, T) \cong (\mathcal{f}_B, T) \text{ ve } (\mathcal{f}_B, T) \cong (\mathcal{f}_C, T) \text{ ise } (\mathcal{f}_A, T) \cong (\mathcal{f}_C, T) \text{ dir.}$$

Tanım 1.1.11.[4] $(\mathcal{f}_A, T)$ ve $(\mathcal{g}_B, T)$ V üzerinde iki esnek küme olsun. İki esnek kümenin birleşimi olan $(\mathcal{h}_{A \cup B}, T) = (\mathcal{f}_A, T) \cup (\mathcal{g}_B, T)$, $\forall t \in T$ için $\mathcal{h}_{A \cup B}(t) = \mathcal{f}_A(t) \cup \mathcal{g}_B(t)$ şeklindeki yaklaşım fonksiyonu ile tanımlanır.

Önerme 1.1.12. $(\mathcal{f}_A, T), (\mathcal{g}_B, T)$ ve $(\mathcal{h}_C, T)$ V üzerinde esnek küme olsunlar.

$$1) (\mathcal{f}_A, T) \cup (\mathcal{f}_A, T) = (\mathcal{f}_A, T), (\mathcal{f}_A, T) \cup \Phi = (\mathcal{f}_A, T)$$

$$2) (\mathcal{f}_A, T) \cup (\mathcal{f}_T, T) = (\mathcal{f}_T, T)$$

$$3) (\mathcal{f}_A, T) \cup (\mathcal{f}_A^c, T) = (\mathcal{f}_T, T)$$

$$4) (\mathcal{f}_A, T) \cup (\mathcal{g}_B, T) = (\mathcal{g}_B, T) \cup (\mathcal{f}_A, T)$$

$$5) (\mathcal{f}_A, T) \cup ((\mathcal{g}_B, T) \cap (\mathcal{h}_C, T)) = ((\mathcal{f}_A, T) \cup (\mathcal{g}_B, T)) \cap (\mathcal{h}_C, T) \text{ dir.}$$

Örnek 1.1.13. $(\mathcal{f}_A, T)$ ve $(\mathcal{g}_B, T)$ V üzerinde iki esnek küme olsun. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ evrensel küme $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ parametreler kümesi olsun.

$$(\mathcal{f}_A, T) = \{(t_2, \{v_2, v_3, v_4\}), (t_3, \{v_2, v_3, v_5\}), (t_4, \{v_1, v_5, v_6\})\}$$

$$(\mathcal{g}_B, T) = \{(t_1, \{v_2, v_3\}), (t_3, \{v_2, v_3\}), (t_4, \{v_1, v_6\})\} \text{ olmak üzere}$$

$$(\mathcal{h}_{A \cup B}, T) = \{(t_1, \{v_2, v_3\}), (t_2, \{v_2, v_3, v_4\}), (t_3, \{v_2, v_3, v_5\}), (t_4, \{v_1, v_5, v_6\})\}$$

şeklindedir.

Tanım 1.1.14.[5] $(\mathcal{f}_A, T)$ ve $(\mathcal{g}_B, T)$ V üzerinde iki esnek küme olsun. İki esnek kümenin kesişimi olan $(\mathcal{h}_{A \cap B}, T) = (\mathcal{f}_A, T) \cap (\mathcal{g}_B, T), \forall t \in T$ için

$$\mathcal{h}_{A \cap B}(t) = \mathcal{f}_A(t) \cap \mathcal{g}_B(t) \text{ şeklindeki yaklaşım fonksiyonu ile tanımlanır.}$$

Önerme 1.1.15.[4] $(\mathcal{f}_A, T), (\mathcal{g}_B, T)$ ve $(\mathcal{h}_C, T)$ V üzerinde esnek küme olsunlar.

$$1) (\mathcal{f}_A, T) \cap (\mathcal{f}_A, T) = (\mathcal{f}_A, T), (\mathcal{f}_A, T) \cap \Phi = \Phi$$

$$2) (\mathcal{f}_A, T) \cap (\mathcal{f}_T, T) = (\mathcal{f}_A, T)$$

$$3) (\mathcal{f}_A, T) \cap (\mathcal{f}_A^c, T) = \Phi$$

$$4) (\mathcal{f}_A, T) \cap (\mathcal{g}_B, T) = (\mathcal{g}_B, T) \cap (\mathcal{f}_A, T)$$

$$5) (\mathcal{f}_A, T) \cap ((\mathcal{g}_B, T) \cap (\mathcal{h}_C, T)) = ((\mathcal{f}_A, T) \cap (\mathcal{g}_B, T)) \cap (\mathcal{h}_C, T) \text{ dir.}$$

Önerme 1.1.16. $(\mathcal{f}_A, T)$ ve $(\mathcal{g}_B, T)$ V üzerinde esnek küme olsunlar.

$$1) ((\mathcal{f}_A, T) \cap (\mathcal{g}_B, T))^c = (\mathcal{f}_A, T)^c \cup (\mathcal{g}_B, T)^c$$

$$2) ((\mathcal{f}_A, T) \cup (\mathcal{g}_B, T))^c = (\mathcal{f}_A, T)^c \cap (\mathcal{g}_B, T)^c \text{ dir.}$$

Tanım 1.1.17.[7] $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$ V evrensel kümesi üzerinde iki esnek küme olsun.

$(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$ 'nin genişletilmiş kesişimi olarak tanımlanan $(\mathcal{H}, C)$ esnek kümesi her $c \in C$ için ve $C = A \cup B$ olmak üzere, $\mathcal{H}(t) =$

$$\begin{cases} \mathcal{F}(t) & , t \in A \setminus B \\ \mathcal{G}(t) & , t \in B \setminus A \\ \mathcal{F}(t) \cap \mathcal{G}(t) & , t \in A \cap B \end{cases}$$

Bu bağıntı $(\mathcal{F}, A) \sqcap_{\mathcal{E}} (\mathcal{G}, B) = (\mathcal{H}, C)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.18.[7] $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$ V evrensel kümesi üzerinde iki esnek küme olsun öyle ki $A \cap B \neq \emptyset$ 'dir. $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$ 'nin kısıtlanmış birleşimi $(\mathcal{F}, A) \cup_R (\mathcal{G}, B)$ ile gösterilir, $C = A \cap B$ ve her $c \in C$ için, $\mathcal{H}(c) = \mathcal{F}(c) \cup \mathcal{G}(c)$ olmak üzere

$(\mathcal{F}, A) \cup_R (\mathcal{G}, B) = (\mathcal{H}, C)$ gibi tanımlanır.

Önerme 1.1.19. $(\mathcal{F}, A) \widetilde{=} (\mathcal{G}, B) = (\mathcal{F}, A) \cup_R (\mathcal{G}, B)$

İspat. Esnek kümelerin parametreler kümesi, Tanım 1.1.11. ve Tanım 1.1.18. birlikte göz önüne alındığında açıktır.

1.2. Esnek Matrisler

Tanım 1.2.1.[23] $(\mathcal{F}_A, T)$, V üzerinde bir esnek küme olsun. $\mathcal{R}_A = \{ \{(v, t)\} : t \in A, v \in \mathcal{F}_A(t) \}$ şeklinde tanımlanan $V \times T$ nin alt kümesine $(\mathcal{F}_A, T)$ nin bir bağıntı formu denir.

$$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_A} : V \times T \rightarrow \{0, 1\}, \quad \mathcal{X}_{\mathcal{R}_A}(v, t) = \begin{cases} 1, & (v, t) \in \mathcal{R}_A \\ 0, & (v, t) \notin \mathcal{R}_A \end{cases}$$

ile tanımlanan fonksiyona $\mathcal{R}_A$ 'nin karakteristik fonksiyonu denir.

Eğer $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ ve $A \subseteq T$ ise, bu durumda $\mathcal{R}_A$

$\mathcal{R}_A$	t_1	t_2	$\dots$	t_n
v_1	$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_A}(v_1, t_1)$	$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_A}(v_1, t_2)$	$\dots$	$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_A}(v_1, t_n)$
v_2	$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_A}(v_2, t_1)$	$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_A}(v_2, t_2)$	$\dots$	$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_A}(v_2, t_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
v_m	$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_A}(v_m, t_1)$	$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_A}(v_m, t_2)$	$\dots$	$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_A}(v_m, t_n)$

şekildeki gibi bir tabloyla temsil edilebilir. Eğer $a_{ij} = \mathcal{X}_{\mathcal{R}_A}(v_i, t_j)$ dersek, bu durumda V üzerindeki $(\mathcal{f}_A, T)$ esnek kümesi

$$[a_{ij}]_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ tipindeki bir matris ile gösterilebilir ve buna $(\mathcal{f}_A, T)$ nin esnek matrisi denir.

Bu tanıma göre $[a_{ij}]_{m \times n}$ matrisi tarafından bir $(\mathcal{f}_A, T)$ esnek kümesi tek türlü belirtilir. Bunun anlamı bir $(\mathcal{f}_A, T)$ esnek kümesi $[a_{ij}]_{m \times n}$ matrisine eşittir. Sonuç olarak, herhangi bir esnek kümeyi onun esnek matrisi ile tanımlamalıyız ve bu iki kavramı değiştirilebilir olarak kullanmalıyız. V üzerindeki bütün $m \times n$ tipindeki matrislerin kümesini $SM_{m \times n}$ sembolü ile göstereceğiz ve $[a_{ij}] \in SM_{m \times n}$ ifadesi $i=1, 2, \dots, m$ ve $j=1, 2, \dots, n$ için $[a_{ij}]$ nin $m \times n$ tipinde bir matris olduğunu gösterdiğinden, $[a_{ij}]_{m \times n}$ nin yerine $[a_{ij}]$ yi kullanacağız.

Örnek 1.2.2. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ bir evrensel küme ve $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ tüm parametrelerin kümesi olsun. $A = \{t_1, t_3, t_5\}$ ise, $\mathcal{f}_A(t_1) = \{v_2, v_4, v_5\}$, $\mathcal{f}_A(t_3) = \{v_1, v_3, \}$ ve $\mathcal{f}_A(t_5) = \{v_2, v_3, v_5\}$ olsun. V üzerinde $(\mathcal{f}_A, T)$ esnek kümesi ise

$(\mathcal{f}_A, T) = \{(t_1, \{v_2, v_4, v_5\}), (t_3, \{v_1, v_3\}), (t_5, \{v_2, v_3, v_5\})\}$ olur ve $(\mathcal{f}_A, T)$ nin bağıntı formu

$\mathcal{R}_A = \{(v_2, t_1), (v_4, t_1), (v_5, t_1), (v_1, t_3), (v_3, t_3), (v_2, t_5), (v_3, t_5), (v_5, t_5),\}$ olur. Sonuç olarak $[a_{ij}]$ esnek matrisi

$$[a_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ şeklinde olur.}$$

Tanım 1.2.3.[23] $[a_{ij}] \in SM_{m \times n}$ olsun.

- 1) Bütün i ve j için $a_{ij} = 0$ ise, $[a_{ij}]$ ya sıfır esnek matris denir ve $[0]$ ile gösterilir.
- 2) Bütün $j \in I_A = \{j: t_j \in A\}$ ve i için $a_{ij} = 1$ ise, $[a_{ij}]$ ya A –evrensel esnek matris denir ve $[\tilde{a}_{ij}]$ ile gösterilir.
- 3) Bütün i ve j için $a_{ij} = 1$ ise, $[a_{ij}]$ ya evrensel esnek matris denir ve $[1]$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.4. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ bir evrensel küme ve $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ tüm parametrelerin kümesi ve $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in SM_{m \times n}$ olsun.

Eğer $A = \{t_2, t_4\}$ ve $\mathcal{f}_A(t_2) = \emptyset, \mathcal{f}_A(t_4) = \emptyset$ ise bu durumda $[a_{ij}] = [0]$ dır ve

$$[0] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

Eğer $B = \{t_1, t_2, t_4\}$ ve $\mathcal{f}_B(t_1) = V, \mathcal{f}_B(t_2) = V, \mathcal{f}_B(t_4) = V$ ise bu durumda

$$[b_{ij}] = [\tilde{b}_{ij}] \text{ dır ve}$$

$$[\tilde{b}_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eğer $C = T$ ve tüm $t_i \in C$ ler için $\#_C(t_i) = V$ ise $[c_{ij}] = [1]$ dir ve

$$[1] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

Tanım 1.2.5.[23] $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{m \times n}$ olsun.

1) Bütün i ve j için $a_{ij} \leq b_{ij}$ ise, $[a_{ij}]$ ya $[b_{ij}]$ nin esnek alt matrisi denir ve

$[a_{ij}] \subseteq [b_{ij}]$ ile gösterilir.

2) Bütün i ve j ve en az bir terimi $a_{ij} < b_{ij}$ olmak üzere $a_{ij} \leq b_{ij}$ ise, $[a_{ij}]$ ya $[b_{ij}]$ nin öz esnek altmatrisi denir ve $[a_{ij}] \subset [b_{ij}]$ ile gösterilir.

3) Bütün i ve j için $a_{ij} = b_{ij}$ ise $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ esnek eşit matristir denir ve $[a_{ij}] = [b_{ij}]$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.6. [23] $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{m \times n}$ olsun.

1) Bütün i ve j için $[a_{ij}] \cup [b_{ij}] = [c_{ij}]$, $c_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\}$ biçiminde tanımlanan $[c_{ij}]$ ye $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ nin birleşimi denir.

2) Bütün i ve j için $[a_{ij}] \cap [b_{ij}] = [c_{ij}]$, $c_{ij} = \min\{a_{ij}, b_{ij}\}$ biçiminde tanımlanan $[c_{ij}]$ ye $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ nin kesişimi denir.

3) Bütün i ve j için $c_{ij} = 1 - a_{ij}$ ise $[c_{ij}]$ ye $[a_{ij}]$ nin tümleyeni denir ve $[c_{ij}] = [a_{ij}]^\circ$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.7. $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{m \times n}$ olsun. Bu durumda bütün i ve j için $[a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}] = [0]$ ise $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ ayrıktır denir.

Örnek 1.2.8. $[a_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, [b_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ olsun.

$$[a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad [a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}] = [0] \quad [a_{ij}]^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Önerme 1.2.9. $[a_{ij}] \in SM_{m \times n}$ olsun.

1) $\left[[a_{ij}]^o \right]^o = [a_{ij}]$

2) $[0]^o = [1]$

Önerme 1.2.10. $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{m \times n}$ olsun.

1) $[a_{ij}] \tilde{\subseteq} [1]$

2) $[0] \tilde{\subseteq} [a_{ij}]$

3) $[a_{ij}] \tilde{\subseteq} [a_{ij}]$

4) $[a_{ij}] \tilde{\subseteq} [b_{ij}]$ ve $[b_{ij}] \tilde{\subseteq} [c_{ij}]$ ise $[a_{ij}] \tilde{\subseteq} [c_{ij}]$

Önerme 1.2.11. $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in SM_{m \times n}$ olsun.

$$1) [a_{ij}] \circ [a_{ij}] = [a_{ij}]$$

$$2) [a_{ij}] \circ [0] = [a_{ij}]$$

$$3) [a_{ij}] \circ [1] = [1]$$

$$4) [a_{ij}] \circ [a_{ij}]^o = [1]$$

$$5) [a_{ij}] \circ [b_{ij}] = [b_{ij}] \circ [a_{ij}]$$

$$6) ([a_{ij}] \circ [b_{ij}]) \circ [c_{ij}] = [a_{ij}] \circ ([b_{ij}] \circ [c_{ij}])$$

Önerme 1.2.12. $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in SM_{m \times n}$ olsun.

$$1) [a_{ij}] \wedge [a_{ij}] = [a_{ij}]$$

$$2) [a_{ij}] \wedge [0] = [0]$$

$$3) [a_{ij}] \wedge [1] = [a_{ij}]$$

$$4) [a_{ij}] \wedge [a_{ij}]^o = [0]$$

$$5) [a_{ij}] \wedge [b_{ij}] = [b_{ij}] \wedge [a_{ij}]$$

$$6) ([a_{ij}] \wedge [b_{ij}]) \wedge [c_{ij}] = [a_{ij}] \wedge ([b_{ij}] \wedge [c_{ij}]).$$

Önerme 1.2.13. $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in SM_{m \times n}$ olsun. Bu durumda De Morgan kuralları geçerlidir.

$$\text{i. } ([a_{ij}] \circ [b_{ij}])^o = [a_{ij}]^o \wedge [b_{ij}]^o$$

$$\text{ii. } ([a_{ij}] \wedge [b_{ij}])^o = [a_{ij}]^o \circ [b_{ij}]^o$$

İspat: Her i ve j için

i.

$$\begin{aligned}
 ([a_{ij}] \circ [b_{ij}])^0 &= [\max\{a_{ij}, b_{ij}\}]^0 \\
 &= [1 - \max\{a_{ij}, b_{ij}\}] \\
 &= [\min\{1 - a_{ij}, 1 - b_{ij}\}] \\
 &= [a_{ij}]^0 \tilde{\circ} [b_{ij}]^0
 \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
 ([a_{ij}] \tilde{\circ} [b_{ij}])^0 &= [\min\{a_{ij}, b_{ij}\}]^0 \\
 &= [1 - \min\{a_{ij}, b_{ij}\}] \\
 &= [\max\{1 - a_{ij}, 1 - b_{ij}\}] \\
 &= [a_{ij}]^0 \circ [b_{ij}]^0
 \end{aligned}$$

Örnek 1.2.14. $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{5 \times 4}$,

$$[a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, [b_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ olsun.}$$

$$([a_{ij}] \circ [b_{ij}])^0 = [a_{ij}]^0 \tilde{\circ} [b_{ij}]^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$([a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}])^0 = [a_{ij}]^0 \tilde{\cup} [b_{ij}]^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

Önerme 1.2.15. $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in SM_{m \times n}$ olsun.

$$1) [a_{ij}] \tilde{\cup} ([b_{ij}] \tilde{\cap} [c_{ij}]) = ([a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}]) \tilde{\cap} ([a_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}])$$

$$2) [a_{ij}] \tilde{\cap} ([b_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}]) = ([a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}]) \tilde{\cup} ([a_{ij}] \tilde{\cap} [c_{ij}])$$

Örnek 1.2.16. $[a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, [b_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [c_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$[a_{ij}] \tilde{\cup} ([b_{ij}] \tilde{\cap} [c_{ij}]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\cup} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ([a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}]) \tilde{\cap} ([a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}])$$

1.3. Ters Esnek Kümeler

Tanım 1.3.1.[19] V nesneler kümesi ve T parametrelerin kümesi olsun. T 'nin kuvvet kümesi $P(T)$ ile tanımlansın.

$$\bar{\mathcal{F}}_T^V = \{(v_j, \bar{\mathcal{F}}(v_j) : v_j \in V, \bar{\mathcal{F}}(v_j) \in P(T)\}$$

sıralı ikilisine V 'nin ters esnek kümesi denir. $ISS(V)$, V üzerindeki tüm ters esnek kümelerin kümesini belirtir.

Örnek 1.3.2. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ evrensel küme $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ parametreler kümesi olsun.

$$\bar{\mathcal{F}}: V \rightarrow P(T)$$

$$\bar{\mathcal{F}}(v_1) = \{t_1, t_3, t_4\}, \bar{\mathcal{F}}(v_2) = \{t_1, t_2\}, \bar{\mathcal{F}}(v_3) = \{t_2, t_3, t_4\}, \bar{\mathcal{F}}(v_4) = \{t_1, t_4\},$$

$$\bar{\mathcal{F}}(v_5) = \{t_2, t_3\} \text{ ise bu ters esnek küme}$$

$$\bar{\mathcal{F}} = \{(v_1, \{t_1, t_3, t_4\}), (v_2, \{t_1, t_2\}), (v_3, \{t_2, t_3, t_4\}), (v_4, \{t_1, t_4\}), (v_5, \{t_2, t_3\})\}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 1.3.3.[19] V nesneler kümesi ve T_k parametrelerin kümesi olsun. T_k 'nin kuvvet kümesi $P(T_k)$ ile tanımlansın.

$\bar{\mathcal{F}}_{T_k}^V = \{(v_j, \bar{\mathcal{F}}(v_j)) : v_j \in V, \bar{\mathcal{F}}(v_j) \in P(T_k)\}$ sıralı ikilisine V 'nin ters esnek kümesi denir. $ISS(V)$, V üzerindeki tüm ters esnek kümelerin kümesini belirtir.

Tanım 1.3.4.[15] V_r nesneler kümesi ve T parametrelerin kümesi olsun. T 'nin kuvvet kümesi $P(T)$ ile tanımlansın.

$\bar{\mathcal{F}}_{V_r}^T = \{(v_j^r, \bar{\mathcal{F}}(v_j^r)) : v_j^r \in V_r, \bar{\mathcal{F}}(v_j^r) \in P(T)\}$ sıralı ikilisine T üzerinde ters esnek küme denir. $ISS(T)$, T üzerindeki tüm ters esnek kümelerin kümesini belirtir.

Örnek 1.3.5. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ nesneler kümesi, $T_1 = \{t_1^1, t_2^1, t_3^1, t_4^1\}$,

$T_2 = \{t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2, t_5^2\}$ parametre kümeleri olsun.

$$\bar{\mathcal{F}} = \{(v_1, \{t_1^1, t_2^1\}), (v_2, \{t_2^1, t_3^1, t_4^1\}), (v_3, \{t_3^1, t_4^1\}), (v_4, \{t_1^1, t_2^1, t_3^1\}), (v_5, \{t_1^1, t_4^1\})\}$$

$$\bar{\mathcal{G}} = \{(v_1, \{t_3^2, t_4^2, t_5^2\}), (v_2, \{t_4^2, t_5^2\}), (v_3, \{t_2^2, t_3^2\}), (v_4, \{t_1^2, t_4^2, t_5^2\}), (v_5, \{t_2^2, t_3^2, t_4^2\})\}$$

V 'nin ters esnek kümeleridir.

Örnek 1.3.6. $V_1 = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1\}$, $V_2 = \{v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2, v_5^2\}$ nesnelerin kümesi

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ parametre kümesi olsun.

$$\bar{\mathcal{F}} = \{(v_1^1, \{t_1, t_2, t_3\}), (v_2^1, \{t_4, t_5\}), (v_3^1, \{t_2, t_3, t_4\}), (v_4^1, \{t_2, t_3, t_4, t_5\})\}$$

$\bar{\mathcal{G}} = \{(v_1^2, \{t_1, t_3\}), (v_2^2, \{t_1, t_3, t_5\}), (v_3^2, \{t_1, t_2, t_3\}), (v_4^2, \{t_1, t_2, t_5\}), (v_5^2, \{t_4, t_5\})\}$ T üzerindeki ters esnek kümelerdir.

Tanım 1.3.7.[15] $\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}} \in ISS(T)$ olsun. $\bar{\mathcal{F}}: V_r \rightarrow P(T), \bar{\mathcal{G}}: V_s \rightarrow P(T)$ ' $\bar{\mathcal{F}}$ VE $\bar{\mathcal{G}}$ ' ters esnek kümesi, $\bar{\mathcal{F}}$ ve $\bar{\mathcal{G}} = (\bar{\mathcal{H}}, V_r \times V_s) \ni \forall (v_i, v_j) \in V_r \times V_s$ için $\bar{\mathcal{H}}(v_i, v_j) = \bar{\mathcal{F}}(v_i) \cap \bar{\mathcal{G}}(v_j)$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.3.8.[15] $\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}} \in ISS(T)$ olsun. $\bar{\mathcal{F}}: V_r \rightarrow P(T), \bar{\mathcal{G}}: V_s \rightarrow P(T)$ ' $\bar{\mathcal{F}}$ VEYA $\bar{\mathcal{G}}$ ' ters esnek kümesi, $\bar{\mathcal{F}}$ veya $\bar{\mathcal{G}} = (\bar{\mathcal{H}}, V_r \times V_s) \ni \forall (v_i, v_j) \in V_r \times V_s$ için $\bar{\mathcal{H}}(v_i, v_j) = \bar{\mathcal{F}}(v_i) \cup \bar{\mathcal{G}}(v_j)$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.3.9. $\bar{\mathcal{F}}_{V_r}^T$ ve $\bar{\mathcal{G}}_{V_s}^T$ T üzerinde ters esnek kümeler olsun. $\bar{\mathcal{F}}$ ve $\bar{\mathcal{G}}$ ' nin ters esnek birleşimi $(\bar{\mathcal{H}}, V_r \cup V_s), \forall v_i \in V$ için

$$\bar{\mathcal{H}}(v_i) = \begin{cases} \bar{\mathcal{F}}(v_i) & , \quad v_i \in V_r \setminus V_s \\ \bar{\mathcal{G}}(v_i) & , \quad v_i \in V_s \setminus V_r \\ \bar{\mathcal{F}} \cup \bar{\mathcal{G}}(v_i) & , \quad v_i \in V_r \cap V_s \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $(\bar{\mathcal{F}}, V_r) \tilde{\cup} (\bar{\mathcal{G}}, V_s) = (\bar{\mathcal{H}}, V_r \tilde{\cup} V_s)$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.10. $\bar{\mathcal{F}}_{T_k}^V$ ve $\bar{\mathcal{G}}_{T_s}^V$, V 'nin ters esnek kümeleri olsun. $\bar{\mathcal{F}}$ ve $\bar{\mathcal{G}}$ ' nin kısıtlanmış birleşimi $(\bar{\mathcal{H}}, V), \forall x \in V$ için, $\bar{\mathcal{H}}(x) = \bar{\mathcal{F}}(x) \cup \bar{\mathcal{G}}(x)$ şeklinde tanımlanır ve

$$\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{H}} \text{ ile gösterilir.}$$

Tanım 1.3.11. $\bar{\mathcal{F}}_{T_k}^V$ ve $\bar{\mathcal{G}}_{T_s}^V$ V 'nin ters esnek kümeleri olsun. $\bar{\mathcal{F}}$ ve $\bar{\mathcal{G}}$ ' nin ters esnek kesişimi $(\bar{\mathcal{H}}, V)$ olmak üzere, $\forall x \in V$ için, $\bar{\mathcal{H}}(x) = \bar{\mathcal{F}}(x) \cap \bar{\mathcal{G}}(x)$ şeklinde tanımlanır ve $\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{H}}$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.12. $\bar{\mathcal{F}}_{V_r}^T$ ve $\bar{\mathcal{G}}_{V_s}^T$, T üzerinde ters esnek kümeler olsun. $\bar{\mathcal{F}}$ ve $\bar{\mathcal{G}}$ ' nin kısıtlanmış farkı,

$$\bar{\mathcal{F}}_{\bar{\mathcal{G}}}(v_i) = \begin{cases} \bar{\mathcal{F}}(v_i) & , \quad v_i \in V_r \setminus V_s \\ \bar{\mathcal{G}}(v_i) & , \quad v_i \in V_s \setminus V_r \\ \bar{\mathcal{F}}(v_i) \setminus \bar{\mathcal{G}}(v_i) & , \quad v_i \in V_r \cap V_s \end{cases}$$

$\bar{\mathcal{G}}$ ve $\bar{\mathcal{F}}$ 'nin kısıtlanmış farkı,

$$\bar{\mathcal{G}}_{\bar{\mathcal{F}}}(v_i) = \begin{cases} \bar{\mathcal{F}}(v_i) & , \quad v_i \in V_r \setminus V_s \\ \bar{\mathcal{G}}(v_i) & , \quad v_i \in V_s \setminus V_r \\ \bar{\mathcal{G}}(v_i) \setminus \bar{\mathcal{F}}(v_i) & , \quad v_i \in V_r \cap V_s \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.3.13. $\bar{\mathcal{F}}$, V üzerinde ters esnek küme olsun. $\bar{\mathcal{F}}$ ters esnek kümesinin tümleyeni, $\forall x \in V$ için $\bar{\mathcal{F}}^c(x) = T \setminus \bar{\mathcal{F}}(x)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.3.14. $\bar{\mathcal{F}}$, V üzerinde ters esnek küme olsun. $\forall x \in V$ için $\bar{\mathcal{F}}(x) = \emptyset$ ise $\bar{\mathcal{F}}$ ters esnek kümesine boş ters esnek küme denir.

Tanım 1.3.15. $\bar{\mathcal{F}}$, V üzerinde ters esnek küme olsun. $\forall x \in V$ için $\bar{\mathcal{F}}(x) = T$ ise $\bar{\mathcal{F}}$ ters esnek kümesine mutlak ters esnek küme denir.

Örnek 1.3.16. $V_1 = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1\}$, $V_2 = \{v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2, v_5^2\}$ cep telefonu üreten iki ayrı firmanın kümeleri, $T = \{t_1(\text{güzel}), t_2(\text{boyut}), t_3(\text{hafıza}), t_4, (\text{üst model})\}$ parametre kümesi olsun.

$$\bar{\mathcal{F}} = \{(v_1^1, \{t_1, t_2, t_4\}), (v_2^1, \{t_1, t_3\}), (v_3^1, \{t_3, t_4\}), (v_4^1, \{t_1, t_2\})\}$$

$$\bar{\mathcal{G}} = \{(v_1^2, \{t_1, t_3\}), (v_2^2, \{t_1, t_3, t_4\}), (v_3^2, \{t_1, t_2\}), (v_4^2, \{t_1, t_2, t_4\}), (v_5^2, \{t_1, t_4\})\}$$

Cep telefonu alacak kişilerin ters esnek kümeleri olsun.

$$(\bar{\mathcal{F}}, V_1) \tilde{\cup} (\bar{\mathcal{G}}, V_2)$$

$$= \left\{ \left(v_1^{(1,2)}, \{t_1, t_2, t_3, t_4\} \right), \left(v_2^{(1,2)}, \{t_1, t_3, t_4\} \right), \left(v_3^{(1,2)}, \{t_1, t_2, t_3, t_4\} \right), \left(v_4^{(1,2)}, \{t_1, t_2, t_4\} \right), \left(v_5^2, \{t_1, t_4\} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{\mathcal{F}}, V_r) \sqcap_{\mathcal{E}} (\bar{\mathcal{G}}, V_s) \\
&= \left\{ \left(v_1^{(1,2)}, \{t_1\} \right), \left(v_2^{(1,2)}, \{t_1, t_3\} \right), \left(v_3^{(1,2)}, \emptyset \right), \left(v_4^{(1,2)}, \{t_1, t_2\} \right), \left(v_5^2, \{t_1, t_4\} \right) \right\} \\
&\bar{\mathcal{F}}_{\bar{\mathcal{G}}} = \left\{ \left(v_1^{(1,2)}, \{t_2, t_4\} \right), \left(v_2^{(1,2)}, \emptyset \right), \left(v_3^{(1,2)}, \{t_3, t_4\} \right), \left(v_4^{(1,2)}, \emptyset \right), \left(v_5^2, \{t_1, t_4\} \right) \right\} \\
&\bar{\mathcal{G}}_{\bar{\mathcal{F}}} = \left\{ \left(v_1^{(2,1)}, \{t_3\} \right), \left(v_2^{(2,1)}, \{t_4\} \right), \left(v_3^{(1,2)}, \{t_1, t_2\} \right), \left(v_4^{(1,2)}, \{t_4\} \right), \left(v_5^2, \{t_1, t_4\} \right) \right\}
\end{aligned}$$

Örnek 1.3.17. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ işe alınacak kişilerin kümesi, $\forall x \in V$ için

$$\begin{aligned}
T_1 &= \{t_1^1(\text{tecrübe}), t_2^1(\text{yabancı dil}), t_3^1(\text{bilgisayar program bilgisi})\}, \\
T_2 &= \{t_1^2(\text{sosyal}), t_2^2(\text{yabancı dil}), t_3^2(\text{girişimci}), t_4^2(\text{planlı çalışma})\} \text{ parametre} \\
&\text{kümeleri olsun. } T_1 \cap T_2 = \{t_2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{F}} &= \{(v_1, \{t_1^1, t_2^1\}), (v_2, \{t_2^1, t_3^1\}), (v_3, \{t_3^1\}), (v_4, \{t_1^1, t_2^1, t_3^1\}), (v_5, \{t_1^1, t_4^1\})\} \\
\bar{\mathcal{G}} &= \{(v_1, \{t_2^2, t_3^2\}), (v_2, \{t_2^2, t_4^2\}), (v_3, \{t_1^2, t_3^2\}), (v_4, \{t_1^2, t_2^2, t_4^2\}), (v_5, \{t_1^2, t_3^2, t_4^2\})\}
\end{aligned}$$

İşe alımda karar veren kişilerin ters esnek kümeleri olsun.

$$\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}} = \left\{ (v_1, \{t_1^1, t_2, t_3^2\}), (v_2, \{t_2, t_3^1, t_4^2\}), (v_3, \{t_3^1, t_1^2, t_3^2\}), (v_4, \{t_1^1, t_2, t_3^1, t_1^2, t_4^2\}), (u_5, \{e_1^1, e_4^1, e_1^2, e_3^2, e_4^2\}) \right\}$$

$$\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}} = \{(v_1, \{t_2\}), (v_2, \{t_2\}), (v_3, \emptyset), (v_4, \{t_2\}), (v_5, \emptyset)\}$$

$$\bar{\mathcal{F}}_{\bar{\mathcal{G}}} = \{(v_1, \{t_1^1\}), (v_2, \{t_3^1\}), (v_3, \{t_3^1\}), (v_4, \{t_1^1, t_3^1\}), (v_5, \{t_1^1, t_4^1\})\}$$

$$\bar{\mathcal{G}}_{\bar{\mathcal{F}}} = \{(v_1, \{t_3^2\}), (v_2, \{t_4^2\}), (v_3, \{t_1^2, t_3^2\}), (v_4, \{t_1^2, t_4^2\}), (v_5, \{t_1^2, t_3^2, t_4^2\})\}$$

1.4. Ters Esnek Matris

Tanım 1.4.1.[21] $V_r = \{v_j^r, j \in J\}$ ve $T_s = \{t_i^k, i \in I\}$, I, J index kümeler,

$(\bar{\mathcal{F}}_{T_k}^{V_r} \text{ yada } \bar{\mathcal{F}}_{V_r}^{T_k})$ ters esnek kümeler için, ters esnek matris $[a_{ij}^{(k,r)}]$ dir.

$$(a_{ij})^{(k,r)} = \begin{cases} 1, & t_i^k \in \bar{\mathcal{F}}(v_j^r) \\ 0, & t_i^k \notin \bar{\mathcal{F}}(v_j^r) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. V evrensel küme üzerindeki bütün ters esnek matrislerin kümesi $ISM(V)$, benzer şekilde ortak parametre T kümesi üzerindeki bütün ters esnek matrislerin kümesi $ISM(T)$ ile gösterilir.

Örnek 1.4.2. $V_1 = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1\}$ nesnelerin kümesi, $T_1 = \{t_1^1, t_2^1, t_3^1, t_4^1\}$,

$T_2 = \{t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2, t_5^2\}$ parametre kümeleri olsun.

$$\bar{\mathcal{F}}_{T_1}^{V_1} = \{(v_1^1, \{t_1^1, t_3^1, t_4^1\}), (v_2^1, \{t_2^1, t_3^1, t_4^1\}), (v_3^1, \{t_3^1, t_4^1\}), (v_4^1, \{t_1^1, t_2^1\})\}$$

$\bar{\mathcal{F}}_{T_2}^{V_1} = \{(v_1^1, \{t_2^2, t_4^2\}), (v_2^1, \{t_3^2, t_5^2\}), (v_3^1, \{t_2^2, t_3^2, t_4^2\}), (v_4^1, \{t_1^2, t_3^2\})\}$ ters esnek kümeler olsun.

$$(a_{ij})^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, (a_{kj})^{(2,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathcal{F}}_{T_1}^{V_1} \text{ ve } \bar{\mathcal{F}}_{T_2}^{V_1} \text{ ters esnek}$$

kümelerine karşılık gelen matrislerdir.

Tanım 1.4.3.[21] $[a_{ij}^{(k_1, r_1)}]$ ve $[b_{ij}^{(k_2, r_2)}] \in ISM_{m \times n}$ olsun.

- a. $k_1 = k_2 = k$ olsun. $\forall i, j$ için $[a_{ij}^{(k, r_1)}] \leq [b_{ij}^{(k, r_2)}]$ ise $[a_{ij}^{(k, r_1)}]$ matrisi $[b_{ij}^{(k, r_2)}]$ matrisinin k -ters esnek alt matrisi olarak adlandırılır. $[a_{ij}^{(k, r_1)}] \subseteq_k [b_{ij}^{(k, r_2)}]$ ile gösterilir.
- b. $r_1 = r_2 = r$ olsun. $\forall i, j$ için $[a_{ij}^{(k_1, r)}] \leq [b_{ij}^{(k_2, r)}]$ ise $[a_{ij}^{(k_1, r)}]$ matrisi $[b_{ij}^{(k_2, r)}]$ matrisinin r -ters esnek alt matrisi olarak adlandırılır. $[a_{ij}^{(k_1, r)}] \subseteq_r [b_{ij}^{(k_2, r)}]$ ile gösterilir.
- c. $k_1 = k_2 = k$ ve $r_1 = r_2 = r$ olsun. $\forall i, j$ için $[a_{ij}^{(k, r)}] \leq [b_{ij}^{(k, r)}]$ ise $[a_{ij}^{(k, r)}]$ matrisi $[b_{ij}^{(k, r)}]$ matrisinin ters esnek alt matrisi olarak adlandırılır. $[a_{ij}^{(k, r)}] \subseteq [b_{ij}^{(k, r)}]$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.4.[21] $\left[a_{ij}^{(k_1, r_1)} \right]$ ve $\left[b_{ij}^{(k_2, r_2)} \right] \in ISM_{m \times n}$ olsun.

- a. $k_1 = k_2 = k$ olsun. $\forall i, j$ için $\left[a_{ij}^{(k, r_1)} \right] = \left[b_{ij}^{(k, r_2)} \right]$ ise $\left[a_{ij}^{(k, r_1)} \right]$ ve $\left[b_{ij}^{(k, r_2)} \right]$ matrisleri k -ters esnek eşit matrisler olarak adlandırılır. $\left[a_{ij}^{(k, r_1)} \right] =_k \left[b_{ij}^{(k, r_2)} \right]$ ile gösterilir.
- b. $r_1 = r_2 = r$ olsun. $\forall i, j$ için $\left[a_{ij}^{(k_1, r)} \right] = \left[b_{ij}^{(k_2, r)} \right]$ ise $\left[a_{ij}^{(k_1, r)} \right]$ ve $\left[b_{ij}^{(k_2, r)} \right]$ matrisleri r -ters esnek eşit matrisler olarak adlandırılır. $\left[a_{ij}^{(k_1, r)} \right] =_r \left[b_{ij}^{(k_2, r)} \right]$
- c. $k_1 = k_2 = k$ ve $r_1 = r_2 = r$ olsun. $\forall i, j$ için $a_{ij}^{(k, r)} = b_{ij}^{(k, r)}$ ise $\left[a_{ij}^{(k, r)} \right]$ ve $\left[b_{ij}^{(k, r)} \right]$ matrisleri ters esnek eşit matrisler olarak adlandırılır. $\left[a_{ij}^{(k, r)} \right] = \left[b_{ij}^{(k, r)} \right]$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.5.[21] $\left[a_{ij}^{(k, r)} \right] \in ISM_{m \times n}$ olsun. $\left[a_{ij}^{(k, r)} \right]$ ters esnek matrisinin tümleyeni $\forall i, j$ $\left[a_{ij}^{(k, r)} \right]' = \left[c_{ij}^{(k, r)} \right]$ $c_{ij}^{(k, r)} = 1 - a_{ij}^{(k, r)}$ ile tanımlanır.

Tanım 1.4.6.[21] $\left[a_{ij}^{(k_1, r_1)} \right]$ ve $\left[b_{ij}^{(k_2, r_2)} \right] \in ISM_{m \times n}$ olsun.

- a. $k_1 = k_2 = k$ olsun. $\forall i, j$ için $\left[a_{ij}^{(k, r_1)} \right]$ ve $\left[b_{ij}^{(k, r_2)} \right]$ ters esnek matrislerinin k -kesişimi $\left[a_{ij}^{(k, r_1)} \right] \cap_k \left[b_{ij}^{(k, r_2)} \right] = \left[c_{ij} \right] \in ISM_{m \times n}$ burada $\left[c_{ij} \right] = \min \left\{ a_{ij}^{(k, r_1)}, b_{ij}^{(k, r_2)} \right\}$ olarak tanımlanır.
- b. $r_1 = r_2 = r$ olsun. $\forall i, j$ için $\left[a_{ij}^{(k_1, r)} \right]$ ve $\left[b_{ij}^{(k_2, r)} \right]$ ters esnek matrislerinin r -kesişimi $\left[a_{ij}^{(k_1, r)} \right] \cap_r \left[b_{ij}^{(k_2, r)} \right] = \left[c_{ij} \right] \in ISM_{m \times n}$ burada $\left[c_{ij} \right] = \min \left\{ a_{ij}^{(k_1, r)}, b_{ij}^{(k_2, r)} \right\}$ olarak tanımlanır.
- c. $k_1 = k_2 = k$ ve $r_1 = r_2 = r$ olsun. $\forall i, j$ için $\left[a_{ij}^{(k, r)} \right]$ ve $\left[b_{ij}^{(k, r)} \right]$ ters esnek matrislerin kesişimi $\left[a_{ij}^{(k, r)} \right] \cap \left[b_{ij}^{(k, r)} \right] = \left[c_{ij} \right] \in ISM_{m \times n}$ burada $\left[c_{ij} \right] = \min \left\{ a_{ij}^{(k, r)}, b_{ij}^{(k, r)} \right\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.4.7.[21] $\left[a_{ij}^{(k_1, r_1)} \right]$ ve $\left[b_{ij}^{(k_2, r_2)} \right] \in ISM_{m \times n}$ olsun.

- a. $k_1 = k_2 = k$ olsun. $\forall i, j$ için $\left[a_{ij}^{(k, r_1)} \right]$ ve $\left[b_{ij}^{(k, r_2)} \right]$ ters esnek matrislerinin k- birleşimi $\left[a_{ij}^{(k, r_1)} \right] \cup_k \left[b_{ij}^{(k, r_2)} \right] = \left[c_{ij} \right] \in ISM_{m \times n}$ burada $\left[c_{ij} \right] = \max \left\{ a_{ij}^{(k, r_1)}, b_{ij}^{(k, r_2)} \right\}$ olarak tanımlanır.
- b. $r_1 = r_2 = r$ olsun. $\forall i, j$ için $\left[a_{ij}^{(k_1, r)} \right]$ ve $\left[b_{ij}^{(k_2, r)} \right]$ ters esnek matrislerinin r- birleşimi $\left[a_{ij}^{(k_1, r)} \right] \cup_r \left[b_{ij}^{(k_2, r)} \right] = \left[c_{ij} \right] \in ISM_{m \times n}$ burada $\left[c_{ij} \right] = \max \left\{ a_{ij}^{(k_1, r)}, b_{ij}^{(k_2, r)} \right\}$ olarak tanımlanır.
- c. $k_1 = k_2 = k$ ve $r_1 = r_2 = r$ olsun. $\forall i, j$ için $\left[a_{ij}^{(k, r)} \right]$ ve $\left[b_{ij}^{(k, r)} \right]$ ters esnek matrislerin birleşimi $\left[a_{ij}^{(k, r)} \right] \cup \left[b_{ij}^{(k, r)} \right] = \left[c_{ij} \right] \in ISM_{m \times n}$ burada $\left[c_{ij} \right] = \max \left\{ a_{ij}^{(k, r)}, b_{ij}^{(k, r)} \right\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.4.8.[21] $\left[a_{pj}^{(k_1, r)} \right] \in ISM_{m_1 \times n}$ ve $\left[b_{qj}^{(k_2, r)} \right] \in ISM_{m_2 \times n}$ olsun.

- a. $\left[a_{pj}^{(k_1, r)} \right]$ ve $\left[b_{qj}^{(k_2, r)} \right]$ ters esnek matrislerin ve satır çarpımı (Ve r-çarpımı) $\left[a_{pj}^{(k_1, r)} \right] \wedge_r \left[b_{qj}^{(k_2, r)} \right] = \left[c_{sj} \right] \in ISM_{m_1 m_2 \times n}$ olarak tanımlanır burada $s = (p-1)m_2 + q$ için $c_{sj} = \min \left\{ a_{pj}^{(k_1, r)}, b_{qj}^{(k_2, r)} \right\}$ dir.
- b. $\left[a_{pj}^{(k_1, r)} \right]$ ve $\left[b_{qj}^{(k_2, r)} \right]$ ters esnek matrislerin veya satır çarpımı (Veya r-çarpımı) $\left[a_{pj}^{(k_1, r)} \right] \vee_r \left[b_{qj}^{(k_2, r)} \right] = \left[c_{sj} \right] \in ISM_{m_1 m_2 \times n}$ olarak tanımlanır burada $s = (p-1)m_2 + q$ için $c_{sj} = \max \left\{ a_{pj}^{(k_1, r)}, b_{qj}^{(k_2, r)} \right\}$ dir.

- c. $\left[a_{pj}^{(k_1, r)} \right]$ ve $\left[b_{qj}^{(k_2, r)} \right]$ ters esnek matrislerin ve değil satır çarpımı (Ve-Değil r-çarpımı) $\left[a_{pj}^{(k_1, r)} \right] \bar{\wedge}_r \left[b_{qj}^{(k_2, r)} \right] = \left[c_{sj} \right] \in ISM_{m_1 m_2 \times n}$ olarak tanımlanır burada $s = (p - 1)m_2 + q$ için

$$c_{sj} = \min \left\{ a_{pj}^{(k_1, r)}, 1 - b_{qj}^{(k_2, r)} \right\} \text{ dir.}$$

- d. $\left[a_{pj}^{(k_1, r)} \right]$ ve $\left[b_{qj}^{(k_2, r)} \right]$ ters esnek matrislerin veya değil satır çarpımı (Veya-Değil r-çarpımı) $\left[a_{pj}^{(k_1, r)} \right] \underline{\vee}_r \left[b_{qj}^{(k_2, r)} \right] = \left[c_{sj} \right] \in ISM_{m_1 m_2 \times n}$ olarak tanımlanır burada $s = (p - 1)m_2 + q$ için

$$c_{sj} = \min \left\{ a_{pj}^{(k_1, r)}, 1 - b_{qj}^{(k_2, r)} \right\} \text{ dir.}$$

2. BÖLÜM

SINIRLANDIRILMIŞ TERS ESNEK KÜMELER

Bu bölümde, ters esnek küme ve ters esnek matrisin bir küme yardımıyla sınırlandırılması(kısıtlanması) tanımı yapılacaktır. Parametre kümesinin bir alt kümesiyle yapılan sınırlandırma işlemi karar verme problemlerinde kullanılacaktır. Ayrıca ters esnek kümelerin ayrışması tanımlanıp ilgili teorem ve örnekler bu bölümde verilecektir

2.1. Sınırlandırılmış Ters Esnek Kümeler

Tanım 2.1.1. $\bar{\mathcal{F}} \in ISS(V)$ ve $\emptyset \neq \bar{\alpha} \subseteq T$ olsun.

a) $\bar{\mathcal{F}}$ 'nin $\bar{\alpha}$ –ters kesişim kümesi V 'nin

$$(\bar{\mathcal{F}}, V)^{\cap \bar{\alpha}} = \{x \in V \mid \bar{\mathcal{F}}(x) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset\} \text{ alt kümesidir.}$$

b) $\bar{\mathcal{F}}$ 'nin $\bar{\alpha}$ –ters birleşim kümesi V 'nin

$$(\bar{\mathcal{F}}, V)^{\cup \bar{\alpha}} = \{x \in V \mid \bar{\mathcal{F}}(x) \cup \bar{\alpha} = T\} \text{ alt kümesidir.}$$

Tanım 2.1.2. $\bar{\mathcal{F}} \in ISS(V)$ ve $\emptyset \neq \bar{\alpha} \subseteq T$ olsun.

a) $\bar{\mathcal{F}}$ 'nin üst $\bar{\alpha}$ – ters kapsam kümesi V 'nin.

$$(\bar{\mathcal{F}}, V)^{\supseteq \bar{\alpha}} = \{x \in V \mid \bar{\mathcal{F}}(x) \supseteq \bar{\alpha}\} \text{ alt kümesidir.}$$

b) $\bar{\mathcal{F}}$ 'nin alt $\bar{\alpha}$ – ters kapsam kümesi V 'nin.

$$(\bar{\mathcal{F}}, V)^{\subseteq \bar{\alpha}} = \{x \in V \mid \bar{\mathcal{F}}(x) \subseteq \bar{\alpha}\} \text{ alt kümesidir.}$$

Tanım 2.1.3. $\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}} \in ISS(T)$, $\bar{\mathcal{F}}: V_r \rightarrow P(T)$ $\bar{\mathcal{G}}: V_s \rightarrow P(T)$ olmak üzere $\bar{\alpha} \subseteq T$ olsun.

a) $\bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}}$ ve $\bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}}$ kümelerinin kesişimleri

$$\bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}} = \{v_i^{(r,s)} \mid v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \wedge v_i \in \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}}\}$$

b) $\bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}}$ ve $\bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}}$ kümelerinin kesişimleri

$$\bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} = \{v_i^{(r,s)} \mid v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \wedge v_i \in \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}}\}$$

c) $\bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}}$ ve $\bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}}$ kümelerinin kesişimleri

$$\bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} = \{v_i^{(r,s)} \mid v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \wedge v_i \in \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}}\}$$

d) $\bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$ ve $\bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$ kümelerinin kesişimleri

$$\bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} = \{v_i^{(r,s)} \mid v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \wedge v_i \in \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}\}$$

Örnek 2.1.4. $V_1 = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1, v_5^1, v_6^1\}$, $V_2 = \{v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2, v_5^2\}$ nesneler kümesi,

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ parametre kümesi olsun.

$$\bar{\mathcal{F}} = \{(v_1^1, \{t_2, t_4\}), (v_2^1, \{t_1, t_3\}), (v_3^1, \{t_3\}), (v_4^1, \{t_1, t_2\}), (v_5^1, \{t_4\}), (v_6^1, \{t_3, t_4\})\}$$

$$\bar{\mathcal{G}} = \{(v_1^2, \{t_1, t_3\}), (v_2^2, \{t_2, t_3\}), (v_3^2, \{t_2, t_4\}), (v_4^2, \{t_2, t_3, t_4\}), (v_5^2, \{t_1\})\}$$

T üzerindeki ters esnek kümeler ve $\bar{\alpha} = \{t_1, t_3\}$ olsun.

$$\bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} = \{v_2^1, v_3^1, v_4^1, v_6^1\} \quad \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}} = \{v_1^2, v_2^2, v_4^2, v_5^2\} \quad \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}} = \{v_2^{(1,2)}, v_4^{(1,2)}\}$$

$$\bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} = \{v_1^1\} \quad \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} = \{v_3^2, v_4^2\} \quad \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} = \emptyset$$

Teorem 2.1.5. $\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}} \in ISS(V)$ ve $\emptyset \neq \bar{\alpha} \subseteq T$ olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $\bar{\mathcal{F}} \cong \bar{\mathcal{G}}$ ise $\bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \subseteq \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}}$

b) $\bar{\mathcal{F}} \cong \bar{\mathcal{G}}$ olsun. Eğer, $\forall x \in V$ için $\bar{\mathcal{F}}(x) \subseteq \bar{\alpha}$ ve $\bar{\mathcal{G}}(x) \subseteq \bar{\alpha}$ ise $\bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \subseteq \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$

c) $\bar{\mathcal{F}} \cong \bar{\mathcal{G}}$ ise $\bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \subseteq \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}}$ dir.

d) $\bar{\mathcal{F}} \cong \bar{\mathcal{G}}$ ise $\bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \subseteq \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}}$ dir.

İspat. $\bar{\mathcal{F}} \cong \bar{\mathcal{G}}$ olsun. $\forall x \in V$ için $\bar{\mathcal{F}}(x) \subseteq \bar{\mathcal{G}}(x)$ dir.

a) $x \in \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}(x) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}(x) \subseteq \bar{\mathcal{G}}(x)$ olduğundan $\bar{\mathcal{G}}(x) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset$ dir. Bu durumda $x \in \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}}$ dir.

b) $\forall x \in V$ için $\bar{\mathcal{F}}(x) \subseteq \bar{\alpha}$ ve $\bar{\mathcal{G}}(x) \subseteq \bar{\alpha}$ olsun.

$\bar{\mathcal{F}}(x) \subseteq \bar{\mathcal{G}}(x)$ olduğundan $\bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \subseteq \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$ dir.

c) $x \in \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}(x) \supseteq \bar{\alpha} \Rightarrow \bar{\alpha} \subseteq \bar{\mathcal{F}}(x) \subseteq \bar{\mathcal{G}}(x)$ olduğundan $\bar{\mathcal{G}}(x) \supseteq \bar{\alpha}$ dir. $x \in \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}}$ dir.

d) $x \in \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}(x) \cup \bar{\alpha} = T \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}(x) \subseteq \bar{\mathcal{G}}(x)$ olduğundan $\bar{\mathcal{G}}(x) \cup \bar{\alpha} = T$ dir. $x \in \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}}$ dir.

Teorem 2.1.6. $\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}} \in ISS(T)$, $\bar{\mathcal{F}}: V_r \rightarrow P(T)$ $\bar{\mathcal{G}}: V_s \rightarrow P(T)$ olmak üzere $\bar{\alpha} \subseteq T$ olsun. Eğer

$|V_r| = |V_s|$ veya $\forall v_i \in V_s \setminus V_r$ için $\bar{\mathcal{G}}(v_i) \not\subseteq \bar{\alpha}$ ise,

$$(\bar{\mathcal{F}} \cup \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

İspat. $\bar{\mathcal{F}}$ ve $\bar{\mathcal{G}}$ 'nin ters esnek birleşimi $(\bar{\mathcal{H}}, V_r \cup V_s)$, $\forall v_i \in V$ için

$$\bar{\mathcal{H}}(u_i) = \begin{cases} \bar{\mathcal{F}}(v_i) & , \quad v_i \in V_r \setminus V_s \\ \bar{\mathcal{G}}(v_i) & , \quad v_i \in V_s \setminus V_r \\ \bar{\mathcal{F}}(v_i) \cup \bar{\mathcal{G}}(v_i) & , \quad v_i \in V_r \cap V_s \end{cases}$$

olmak üzere $v_i \in \bar{\mathcal{H}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \Leftrightarrow (\bar{\mathcal{F}} \cup \bar{\mathcal{G}})(v_i) \subseteq \bar{\alpha} \Leftrightarrow (\bar{\mathcal{F}}(v_i) \cup \bar{\mathcal{G}}(v_i)) \subseteq \bar{\alpha} \Leftrightarrow v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$ ve $v_i \in \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \Leftrightarrow v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \Leftrightarrow v_i^{(r,s)} \in \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$ dir.

Örnek 2.1.7. $V_1 = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1, v_5^1, v_6^1\}$, $V_2 = \{v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2, v_5^2\}$ nesneler kümesi,

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ parametre kümesi olsun.

$$\bar{\mathcal{F}} = \{(v_1^1, \{t_1, t_2\}), (v_2^1, \{t_1, t_3\}), (v_3^1, \{t_2\}), (v_4^1, \{t_1, t_2\}), (v_5^1, \{t_3\}), (v_6^1, \{t_3, t_4\})\}$$

$$\bar{\mathcal{G}} = \{(v_1^2, \{t_1, t_3\}), (v_2^2, \{t_1, t_2, t_3\}), (v_3^2, \{t_2, t_3\}), (v_4^2, \{t_1, t_2, t_4\}), (v_5^2, \{t_1\})\}$$

T üzerindeki ters esnek kümeler ve $\bar{\alpha} = \{t_1, t_2, t_3\}$ olsun.

$$(\bar{F}, U_1) \tilde{\cup} (\bar{G}, U_2)$$

$$= \left\{ \left(v_1^{(1,2)}, \{t_1, t_2, t_3\} \right), \left(v_2^{(1,2)}, \{t_1, t_2, t_3\} \right), \left(v_3^{(1,2)}, \{t_2, t_3\} \right), \left(v_4^{(1,2)}, \{t_1, t_2, t_4\} \right), \left(v_5^2, \{t_1, t_3\} \right), \right. \\ \left. \left(v_6^1, \{t_3, t_4\} \right) \right\}$$

$$(\bar{F} \tilde{\cup} \bar{G})^{\subseteq \bar{\alpha}} = \{v_1^{(1,2)}, v_2^{(1,2)}, v_3^{(1,2)}, v_5^{(1,2)}\}, \bar{F}^{\subseteq \bar{\alpha}} = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1, v_5^1\},$$

$$\bar{G}^{\subseteq \bar{\alpha}} = \{v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_5^2\}, \bar{F}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{G}^{\subseteq \bar{\alpha}} = \{v_1^{(1,2)}, v_2^{(1,2)}, v_3^{(1,2)}, v_5^{(1,2)}\}$$

Teorem 2.1.8. $\bar{F}, \bar{G} \in ISS(T), \bar{F}: V_r \rightarrow P(T), \bar{G}: V_s \rightarrow P(T)$ olmak üzere $\bar{\alpha} \subseteq T$ olsun.

a) $(\bar{F} \tilde{\cup} \bar{G})^{\supseteq \bar{\alpha}} \supseteq \bar{F}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cup \bar{G}^{\supseteq \bar{\alpha}}$

b) $(\bar{F} \tilde{\cup} \bar{G})^{\cap \bar{\alpha}} \supseteq \bar{F}^{\cap \bar{\alpha}} \cup \bar{G}^{\cap \bar{\alpha}}$

c) $(\bar{F} \tilde{\cup} \bar{G})^{\cup \bar{\alpha}} \supseteq \bar{F}^{\cup \bar{\alpha}} \cup \bar{G}^{\cup \bar{\alpha}}$

İspat.

a) $v_i \in \bar{F}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cup \bar{G}^{\supseteq \bar{\alpha}} \Rightarrow v_i \in \bar{F}^{\supseteq \bar{\alpha}}$ veya $v_i \in \bar{G}^{\supseteq \bar{\alpha}} \Rightarrow \bar{F}(v_i) \supseteq \bar{\alpha}$ veya $\bar{G}(v_i) \supseteq \bar{\alpha}$

$$\Rightarrow \bar{F}(v_i) \cup \bar{G}(v_i) \supseteq \bar{\alpha} \Rightarrow (\bar{F} \tilde{\cup} \bar{G})(v_i) \supseteq \bar{\alpha} \Rightarrow v_i \in (\bar{F} \tilde{\cup} \bar{G})^{\supseteq \bar{\alpha}}$$

b) $v_i \in \bar{F}^{\cap \bar{\alpha}} \cup \bar{G}^{\cap \bar{\alpha}} \Rightarrow v_i \in \bar{F}^{\cap \bar{\alpha}}$ veya $v_i \in \bar{G}^{\cap \bar{\alpha}} \Rightarrow \bar{F}(v_i) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset$ veya $\bar{G}(v_i) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset \Rightarrow (\bar{F}(v_i) \cup \bar{G}(v_i)) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset \Rightarrow v_i \in (\bar{F} \tilde{\cup} \bar{G})^{\cap \bar{\alpha}}$

c) $v_i \in \bar{F}^{\cup \bar{\alpha}} \cup \bar{G}^{\cup \bar{\alpha}} \Rightarrow v_i \in \bar{F}^{\cup \bar{\alpha}}$ veya $v_i \in \bar{G}^{\cup \bar{\alpha}} \Rightarrow \bar{F}(x) \cup \bar{\alpha} = T$ veya

$$\bar{G}(x) \cup \bar{\alpha} = T \Rightarrow (\bar{F}(u_i) \cup \bar{G}(u_i)) = T \Rightarrow v_i \in (\bar{F} \tilde{\cup} \bar{G})^{\cup \bar{\alpha}}$$

Örnek 2.1.9. $V_1 = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1, v_5^1\}$, $V_2 = \{v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2, v_5^2\}$ farklı bölümlerdeki hastalıkların kümesi olsun, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ ilaç seçiminde kullanılan parametreler kümesi

t_1 (yan etki az), t_2 (etkin madde miktarı), t_3 (hastanın kronik rahatsızlığı),

t_4 (kullanım kolaylığı) ve $\bar{\alpha} = \{t_1, t_3\}$ olsun.

$$\bar{\mathcal{F}} = \{(v_1^1, \{t_1, t_2\}), (v_2^1, \{t_1, t_3\}), (v_3^1, \{t_3\}), (v_4^1, \{t_2, t_4\}), (v_5^1, \{t_4\})\}$$

$$\bar{\mathcal{G}} = \{(v_1^2, \{t_1, t_3\}), (v_2^2, \{t_1, t_2, t_3\}), (v_3^2, \{t_2, t_4\}), (v_4^2, \{t_1, t_2, t_4\}), (v_5^2, \{t_3\})\}$$

Farklı hastanelerde çalışan doktorların ters esnek kümeleri olsun. $\bar{\mathcal{F}}$ ve $\bar{\mathcal{G}}$ ters esnek kümeleri, doktorların hastalıklara karşı ilaç seçiminde hangi parametreleri dikkate aldığını gösteren kümelerdir.

$$(\bar{\mathcal{F}}, V_1) \tilde{\cup} (\bar{\mathcal{G}}, V_2)$$

$$= \left\{ \begin{aligned} & \left(v_1^{(1,2)}, \{t_1, t_2, t_3\} \right), \left(v_2^{(1,2)}, \{t_1, t_2, t_3\} \right), \left(v_3^{(1,2)}, \{t_2, t_3, t_4\} \right), \left(v_4^{(1,2)}, \{t_1, t_2, t_4\} \right), \\ & \left(v_5^{(1,2)}, \{t_3, t_4\} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cup} \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}} = \{v_1^{(1,2)}, v_2^{(1,2)}\}, \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} = \{v_2^1\}, \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} = \{v_1^2, v_2^2\}$$

$$\bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} = \{v_2^1, v_1^2, v_2^2\}$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cup} \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \text{ dir.}$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cup} \bar{\mathcal{G}})^{\cap \bar{\alpha}} = \{v_1^{(1,2)}, v_2^{(1,2)}, v_3^{(1,2)}, v_4^{(1,2)}, v_5^{(1,2)}\}, \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1\},$$

$$\bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}} = \{v_1^2, v_2^2, v_4^2, v_5^2\}, \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}} = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_1^2, v_2^2, v_4^2, v_5^2\}$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cup} \bar{\mathcal{G}})^{\cap \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}} \text{ dir.}$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cup} \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}} = \{v_3^{(1,2)}, v_4^{(1,2)}\}, \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} = \{v_4^1\}, \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} = \{v_3^2, v_4^2\}, \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} = \{v_4^1, v_3^2, v_4^2\}$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cup} \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} \text{ dir.}$$

Verilen örneğe göre farklı doktorların seçimlerinin kümesi parametrelerle(karar veren kişilerin seçimine göre farklılık gösterebilir) sınırlandırılırsa kümelerin ters esnek birleşimi bu kümelerin birleşimlerini kapsar.

Teorem 2.1.10. $\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}} \in ISS(V), \bar{\mathcal{F}}: V \rightarrow P(T_1) \bar{\mathcal{G}}: V \rightarrow P(T_2)$ olmak üzere $\bar{\alpha} \subseteq T_k$ olsun.

$$\text{a) } (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} \subseteq \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{b) } (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{c) } (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\cap \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}}$$

$$\text{d) } (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}}$$

İspat. a)

$$1) \cap T_k = \emptyset \text{ olsun}$$

$$\text{i) } \bar{\alpha} \subseteq T_1 \Rightarrow (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} = \emptyset \subseteq \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{ii) } \bar{\alpha} \subseteq T_2 \Rightarrow (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} = \emptyset \subseteq \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{iii) } \bar{\alpha} \subseteq T_1 \cup T_2$$

$$\exists v_i \in V \text{ için } \bar{\mathcal{F}}(v_i) \subseteq \bar{\alpha} \text{ ve } \bar{\mathcal{G}}(v_i) \subseteq \bar{\alpha} \Rightarrow (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

$$v_i \neq v_j \text{ için } \bar{\mathcal{F}}(v_i) \subseteq \bar{\alpha} \text{ ve } \bar{\mathcal{G}}(v_i) \subseteq \bar{\alpha} \Rightarrow (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} = \emptyset \subseteq \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

$$2) \cap T_k \neq \emptyset \text{ olsun.}$$

$$\text{i) } \bar{\alpha} \subseteq T_1 \setminus T_2 \Rightarrow (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} = \emptyset \subseteq \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{ii) } \bar{\alpha} \subseteq T_2 \setminus T_1 \Rightarrow (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} = \emptyset \subseteq \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{iii) } \bar{\alpha} \subseteq T_1 \cap T_2$$

$$\exists v_i \in V \text{ için } \bar{\mathcal{F}}(v_i) \subseteq \bar{\alpha} \text{ ve } \bar{\mathcal{G}}(v_i) \subseteq \bar{\alpha} \Rightarrow (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

$$v_i \neq v_j \text{ için } \bar{\mathcal{F}}(v_i) \subseteq \bar{\alpha} \text{ ve } \bar{\mathcal{G}}(v_i) \subseteq \bar{\alpha} \Rightarrow (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} = \emptyset \subseteq \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

b)

$$1) \cap T_k = \emptyset \text{ olsun}$$

$$\text{i) } \bar{\alpha} \subseteq T_1 \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} = \emptyset \subseteq (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{ii) } \bar{\alpha} \subseteq T_1 \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} = \emptyset \subseteq (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{iii) } \bar{\alpha} \subseteq T_1 \cup T_2 \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} = \emptyset \subseteq (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}}$$

$$2) \cap T_k \neq \emptyset \text{ olsun.}$$

- i) $\bar{\alpha} \subseteq T_1 \setminus T_2 \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} = \emptyset \subseteq (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}}$
- ii) $\bar{\alpha} \subseteq T_2 \setminus T_1 \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} = \emptyset \subseteq (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}}$
- iii) $\bar{\alpha} \subseteq T_1 \cap T_2 \Rightarrow (\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}}$

Benzer şekilde diğer maddeler de ispatlanabilir.

Örnek 2.1.11. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ nesneler kümesi, $T_1 = \{t_1^1, t_2^1, t_3^1, t_4^1\}$,

$T_2 = \{t_1^2, t_2^2, t_3^2\}$ parametre kümeleri, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ ve $\bar{\alpha} = \{t_2^1, t_4^1, t_1^2, t_3^2\}$ olsun.

$\bar{\mathcal{F}} = \{(v_1, \{t_1^1, t_3^1\}), (v_2, \{t_4^1\}), (v_3, \{t_2^1, t_4^1\}), (v_4, \{t_1^1, t_2^1\})\}$

$\bar{\mathcal{G}} = \{(v_1, \{t_2^2, t_3^2\}), (v_2, \{t_3^2\}), (v_3, \{t_2^2, t_3^2\}), (v_4, \{t_1^2, t_3^2\})\}$ ters esnek kümeler olsun.

$$\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}}$$

$$= \{(v_1, \{t_1^1, t_3^1, t_2^2, t_3^2\}), (v_2, \{t_4^1, t_3^2\}), (v_3, \{t_2^1, t_4^1, t_2^2, t_3^2\}), (v_4, \{t_1^1, t_2^1, t_1^2, t_3^2\})\}$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} = \{v_2, v_3\}, \quad \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} = \{v_3\}, \quad \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} = \{v_2, v_4\}, \quad \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} = \{v_2, v_3, v_4\},$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} \subseteq \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \text{ dir.}$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}} = \{v_3\}, \quad \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} = \emptyset, \quad \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} = \emptyset, \quad \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} = \emptyset$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \text{ dir.}$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\cap \bar{\alpha}} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} = \{v_2, v_3, v_4\}, \quad \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\cap \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \cup \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}} \text{ dir.}$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}} = \{v_1\}, \quad \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} = \emptyset, \quad \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} = \emptyset, \quad \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} = \emptyset$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \cup_R \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} \text{ dir.}$$

Ortak nesneler kümesi üzerinde tanımlanan ters esnek kümelerin ters esnek kesişimi farklı parametreler kümesinden seçilen $\bar{\alpha}$ ile sınırlandırıldığında oluşan küme ve bu kümelerin kesişimleri arasındaki ilişki incelenmiştir.

Teorem 2.1.12. $\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}} \in ISS(V), \bar{\mathcal{F}}: V \rightarrow P(T_1) \quad \bar{\mathcal{G}}: V \rightarrow P(T_2)$ olmak üzere $\bar{\alpha} \subseteq T_k$ olsun.

$$\text{a)} \quad (\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{b)} \quad (\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{c)} \quad (\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}}$$

$$\text{d)} \quad (\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}})^{\cap \bar{\alpha}} \subseteq \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}}$$

İspat. $\bar{\mathcal{F}}$ ve $\bar{\mathcal{G}}$ 'nin ters esnek kesişimi $(\bar{\mathcal{H}}, U)$ olmak üzere, $\forall x \in V$ için, $\bar{\mathcal{H}}(x) = \bar{\mathcal{F}}(x) \cap \bar{\mathcal{G}}(x)$

$\cap T_k = \emptyset$ ise $(\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}}) = \emptyset$ olduğundan aşıkardır. $\cap T_k \neq \emptyset$ olsun.

$$\text{a)} \quad x \in \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \Rightarrow x \in \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \text{ ve } x \in \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}(x) \subseteq \bar{\alpha} \text{ ve } \bar{\mathcal{G}}(x) \subseteq \bar{\alpha} \Rightarrow$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}})(x) \subseteq \bar{\alpha} \Rightarrow x \in (\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{b)} \quad x \in \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \Leftrightarrow x \in \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \text{ ve } x \in \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \Leftrightarrow \bar{\mathcal{F}}(x) \supseteq \bar{\alpha} \text{ ve } \bar{\mathcal{G}}(x) \supseteq \bar{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}})(x) \supseteq \bar{\alpha} \Leftrightarrow x \in (\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{c)} \quad (\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}}) \subseteq \bar{\mathcal{F}} \text{ ve } (\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}}) \subseteq \bar{\mathcal{G}} \quad \text{olduğundan} \quad (\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}} \subseteq \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \quad \text{ve} \\ (\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}} \subseteq \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}}$$

Buradan $(\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}} \subseteq \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}}$ elde edilir. (2.1)

$$x \in \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}(x) \cup \bar{\alpha} = T_k \text{ ve } \bar{\mathcal{G}}(x) \cup \bar{\alpha} = T_k \Rightarrow x \in (\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}}$$

$$\bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} \subseteq (\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}} \quad (2.2)$$

(2.1) ve (2.2) den eşitlik görülür.

$$\text{d)} \quad x \in \bar{\mathcal{H}}^{\cap \bar{\alpha}} \Rightarrow (\bar{\mathcal{F}} \tilde{\cap} \bar{\mathcal{G}})(x) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset \Rightarrow (\bar{\mathcal{F}}(x) \cap \bar{\mathcal{G}}(x)) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$\bar{\mathcal{F}}(x) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset \text{ ve } \bar{\mathcal{G}}(x) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \text{ ve } x \in \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}} \Rightarrow x \in \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}} \text{ dir.}$$

Farklı evrensel küme üzerinde tanımlanan ters esnek kümelerin genişletilmiş kesişimi ortak parametre kümesinden seçilen $\bar{\alpha}$ ile sınırlandırıldığında oluşan kümenin bu kümelerin kesişimini kapsadığını ifade eden teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.1.13. $\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}} \in ISS(T), \bar{\mathcal{F}}: V_r \rightarrow P(E) \quad \bar{\mathcal{G}}: U_s \rightarrow P(T)$ olmak üzere $\bar{\alpha} \subseteq T$ olsun.

$$\text{a) } (\bar{\mathcal{F}} \cap_{\varepsilon} \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{b) } (\bar{\mathcal{F}} \cap_{\varepsilon} \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{c) } (\bar{\mathcal{F}} \cap_{\varepsilon} \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}}$$

İspat.

$$\text{a) } v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \Rightarrow v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \text{ ve } v_i \in \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \Rightarrow v_i \in V_r, \bar{\mathcal{F}}(v_i) \subseteq \bar{\alpha} \text{ ve } v_i \in V_s, \\ \bar{\mathcal{G}}(v_i) \subseteq \bar{\alpha} \Rightarrow v_i \in V_r \cap V_s, \bar{\mathcal{F}}(v_i) \cap \bar{\mathcal{G}}(v_i) \subseteq \bar{\alpha} \Rightarrow v_i \in (\bar{\mathcal{F}} \cap_{\varepsilon} \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{b) } v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \Rightarrow v_i \in V_r, \bar{\mathcal{F}}(v_i) \supseteq \bar{\alpha} \text{ ve } v_i \in V_s, \bar{\mathcal{G}}(v_i) \supseteq \bar{\alpha} \Rightarrow v_i \in V_r \cap V_s, \\ \bar{\mathcal{F}}(v_i) \cap \bar{\mathcal{G}}(v_i) \supseteq \bar{\alpha} \Rightarrow v_i \in (\bar{\mathcal{F}} \cap_{\varepsilon} \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{c) } v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} \Rightarrow v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \text{ ve } v_i \in \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} \Rightarrow v_i \in V_r, \bar{\mathcal{F}}(v_i) \cup \bar{\alpha} = T \text{ ve } v_i \in V_s,$$

$$\bar{\mathcal{G}}(v_i) \cup \bar{\alpha} = T \Rightarrow v_i \in V_r \cap V_s,$$

$$(\bar{\mathcal{F}}(v_i) \cap \bar{\mathcal{G}}(v_i)) \cup \bar{\alpha} = T \Rightarrow v_i \in (\bar{\mathcal{F}} \cap_{\varepsilon} \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}}$$

Örnek 2.1.14. $V_1 = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1, v_5^1\}$, $V_2 = \{v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2, v_5^2\}$ farklı şehirde bulunan evlerin kümesi, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ parametre kümesi

$t_1(\text{ekonomik}), t_2(\text{ulaşım}), t_3(\text{malzeme kalitesi}), t_4(\text{güzel})$ ve $\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}}$ sırasıyla V_1 ve V_2 kümeleri üzerinde tanımlanan ters esnek kümeler olsun. Bu kişilerin ev seçimini etkileyen ortak parameter kümesi $\bar{\alpha} = \{t_2, t_4\}$ olsun.

$$\bar{\mathcal{F}} = \{(v_1^1, \{t_2, t_4\}), (v_2^1, \{t_1, t_3\}), (v_3^1, \{t_1, t_2, t_4\}), (v_4^1, \{t_3, t_4\}), (v_5^1, \{t_2, t_3\})\}$$

$\bar{\mathcal{G}} = \{(v_1^2, \{t_1, t_4\}), (v_2^2, \{t_1, t_2, t_3\}), (v_3^2, \{t_2, t_4\}), (v_4^2, \{t_1, t_3\}), (v_5^2, \{t_2\})\}$ olmak üzere

$$(\bar{\mathcal{F}} \sqcap_{\varepsilon} \bar{\mathcal{G}}) = \{(v_1^{(1,2)}, \{t_4\}), (v_2^{(1,2)}, \{t_1, t_3\}), (v_3^{(1,2)}, \{t_2, t_4\}), (v_4^{(1,2)}, \{t_3\}), (v_5^{(1,2)}, \{t_2\})\}$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \sqcap_{\varepsilon} \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} = \{v_1^{(1,2)}, v_3^{(1,2)}\}, \quad \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} = \{v_1^1\}, \quad \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} = \{v_3^2, v_5^2\}, \quad \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} = \emptyset$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \sqcap_{\varepsilon} \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \sqcap_{\varepsilon} \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}} = \{v_3^{(1,2)}\}, \quad \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} = \{v_1^1, v_3^1\}, \quad \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} = \{v_3^2\}, \quad \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} = \{v_3^{(1,2)}\}$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \sqcap_{\varepsilon} \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}}$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \sqcap_{\varepsilon} \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}} = \{v_2^{(1,2)}\}, \quad \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} = \{v_2^1\}, \quad \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} = \{v_2^2, v_4^2\}, \quad \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} = \{v_2^{(1,2)}\}$$

$$(\bar{\mathcal{F}} \sqcap_{\varepsilon} \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \cap \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}}$$

Teorem 2.1.15. $\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}} \in ISS(T), \bar{\mathcal{F}}: V_r \rightarrow P(E) \quad \bar{\mathcal{G}}: U_s \rightarrow P(T)$ olmak üzere $\bar{\alpha} \subseteq T$ olsun.

a) $(\bar{\mathcal{F}} \vee \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$

b) $(\bar{\mathcal{F}} \vee \bar{\mathcal{G}})^{\cap \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}}$

c) $(\bar{\mathcal{F}} \vee \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}}$

d) $(\bar{\mathcal{F}} \vee \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}}$

İspat. $\bar{\mathcal{F}} \vee \bar{\mathcal{G}} = (\bar{\mathcal{H}}, V_r \times V_s) \ni \forall (v_i, v_j) \in V_r \times V_s$ için $\bar{\mathcal{H}}(v_i, v_j) = \bar{\mathcal{F}}(v_i) \cup \bar{\mathcal{G}}(v_j)$

a) $(v_i, v_j) \in \bar{\mathcal{H}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \Leftrightarrow (\bar{\mathcal{F}}(v_i) \cup \bar{\mathcal{G}}(v_j)) \subseteq \bar{\alpha} \Leftrightarrow \bar{\mathcal{F}}(v_i) \subseteq \bar{\alpha} \text{ ve } \bar{\mathcal{G}}(v_j) \subseteq \bar{\alpha} \Leftrightarrow$

$$(v_i, v_j) \in \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

b) $(v_i, v_j) \in \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}} \Rightarrow v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \text{ ve } v_j \in \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}} \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}(v_i) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset \text{ ve } \bar{\mathcal{G}}(v_j) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}(v_i) \cup \bar{\mathcal{G}}(v_j) \neq \emptyset \Rightarrow (v_i, v_j) \in (\bar{\mathcal{F}} \vee \bar{\mathcal{G}})^{\cap \bar{\alpha}}$

$$\text{c) } (v_i, v_j) \in \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \Rightarrow v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \text{ ve } v_j \in \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}(v_i) \supseteq \bar{\alpha} \text{ ve } \bar{\mathcal{G}}(v_j) \supseteq \bar{\alpha}$$

$$\Rightarrow \bar{\mathcal{F}}(v_i) \cup \bar{\mathcal{G}}(v_j) \supseteq \bar{\alpha} \Rightarrow (v_i, v_j) \in (\bar{\mathcal{F}} \vee \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{d) } (v_i, v_j) \in \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} \Rightarrow v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \text{ ve } v_j \in \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}(v_i) \cup \bar{\alpha} = T \text{ ve}$$

$$\bar{\mathcal{G}}(v_j) \cup \bar{\alpha} = T \Rightarrow (\bar{\mathcal{F}}(v_i) \cup \bar{\mathcal{G}}(v_j)) \cup \bar{\alpha} = T \Rightarrow (v_i, v_j) \in (\bar{\mathcal{F}} \vee \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}}$$

Teorem 2.1.16. $\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}} \in ISS(T), \bar{\mathcal{F}}: V_r \rightarrow P(E) \quad \bar{\mathcal{G}}: V_s \rightarrow P(T)$ olmak üzere $\bar{\alpha} \subseteq T$ olsun.

$$\text{a) } (\bar{\mathcal{F}} \wedge \bar{\mathcal{G}})^{\cap \bar{\alpha}} \subseteq \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}}$$

$$\text{b) } (\bar{\mathcal{F}} \wedge \bar{\mathcal{G}})^{\cup \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}}$$

$$\text{c) } (\bar{\mathcal{F}} \wedge \bar{\mathcal{G}})^{\subseteq \bar{\alpha}} \supseteq \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{d) } (\bar{\mathcal{F}} \wedge \bar{\mathcal{G}})^{\supseteq \bar{\alpha}} = \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}}$$

İspat. $\bar{\mathcal{F}} \wedge \bar{\mathcal{G}} = (\bar{\mathcal{H}}, V_r \times V_s) \ni \forall (v_i, v_j) \in V_r \times V_s$ için

$$\bar{\mathcal{H}}(v_i, v_j) = \bar{\mathcal{F}}(v_i) \cap \bar{\mathcal{G}}(v_j)$$

$$\text{a) } (v_i, v_j) \in \bar{\mathcal{H}}^{\cap \bar{\alpha}} \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}(v_i) \cap \bar{\mathcal{G}}(v_j) \neq \emptyset \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}(v_i) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset \text{ ve } \bar{\mathcal{G}}(v_j) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \text{ ve } v_j \in \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}} \Rightarrow (v_i, v_j) \in \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\alpha}}$$

$$\text{b) } (v_i, v_j) \in \bar{\mathcal{H}}^{\cup \bar{\alpha}} \Leftrightarrow (\bar{\mathcal{F}}(v_i) \cap \bar{\mathcal{G}}(v_j)) \cup \bar{\alpha} \Leftrightarrow (\bar{\mathcal{F}}(v_i) \cup \bar{\alpha}) \cap (\bar{\mathcal{G}}(v_j) \cup \bar{\alpha}) =$$

$$T \Leftrightarrow$$

$$\bar{\mathcal{F}}(v_i) \cup \bar{\alpha} = T \text{ ve } \bar{\mathcal{G}}(v_j) \cup \bar{\alpha} = T \Leftrightarrow v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \text{ ve } v_j \in \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}} \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in$$

$$\bar{\mathcal{F}}^{\cup \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\cup \bar{\alpha}}$$

$$\text{c) } (v_i, v_j) \in \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \Leftrightarrow v_i \in \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \text{ ve } v_j \in \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \Leftrightarrow \bar{\mathcal{F}}(v_i) \subseteq \bar{\alpha} \text{ ve}$$

$$\bar{\mathcal{G}}(v_j) \subseteq \bar{\alpha} \Rightarrow (\bar{\mathcal{F}}(v_i) \cap \bar{\mathcal{G}}(v_j)) \subseteq \bar{\alpha} \Rightarrow (v_i, v_j) \in \bar{\mathcal{F}}^{\subseteq \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

$$\text{d) } (v_i, v_j) \in \bar{\mathcal{H}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \Leftrightarrow \bar{\mathcal{F}}(v_i) \cap \bar{\mathcal{G}}(v_j) \supseteq \bar{\alpha} \Leftrightarrow \bar{\mathcal{F}}(v_i) \supseteq \bar{\alpha} \text{ ve } \bar{\mathcal{G}}(v_j) \supseteq \bar{\alpha} \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in \bar{\mathcal{F}}^{\supseteq \bar{\alpha}} \times \bar{\mathcal{G}}^{\supseteq \bar{\alpha}}$$

Örnek 2.1.17. $V_1 = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1\}$, $V_2 = \{v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2\}$ nesneler kümesi ,

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ parametre kümesi ve $\bar{\alpha} = \{t_2, t_3\}$ olsun.

$$\bar{\mathcal{F}} = \{(v_1^1, \{t_2, t_4\}), (v_2^1, \{t_2, t_3\}), (v_3^1, \{t_1, t_2\})\}$$

$\bar{\mathcal{G}} = \{(v_1^2, \{t_3, t_4\}), (v_2^2, \{t_1, t_2, t_3\}), (v_3^2, \{t_2, t_3\}), (v_4^2, \{t_1, t_3\})\}$ ters esnek kümeler olsun.

$$\bar{\mathcal{F}} \vee \bar{\mathcal{G}}$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &((v_1^1, v_1^2), \{t_2, t_3, t_4\}), ((v_1^1, v_2^2), \{t_1, t_2, t_3, t_4\}), ((v_1^1, v_3^2), \{t_2, t_3, t_4\}), ((v_1^1, v_4^2), \{t_1, t_2, t_3, t_4\}), \\ &((v_2^1, v_1^2), \{t_2, t_3, t_4\}), ((v_2^1, v_2^2), \{t_1, t_2, t_3\}), ((v_2^1, v_3^2), \{t_2, t_3\}), ((v_2^1, v_4^2), \{t_1, t_2, t_3\}), \\ &((v_3^1, v_1^2), \{t_1, t_2, t_3, t_4\}), ((v_3^1, v_2^2), \{t_1, t_2, t_3\}), ((v_3^1, v_3^2), \{t_1, t_2, t_3\}), ((v_3^1, v_4^2), \{t_1, t_2, t_3\}) \end{aligned} \right\}$$

2.2. Ters Esnek Kümelerin Ayrışması

Tanım 2.2.1. $\bar{\mathcal{F}}: V \rightarrow P(T)$ ters esnek küme olsun.

$$\overline{\text{supp}}(\bar{\mathcal{F}}) = \{v \in V : \bar{\mathcal{F}}(v) \neq \emptyset\}$$

kümesi ters esnek kümenin desteği(support) olarak adlandırılır. V üzerindeki ters esnek kümenin desteği boş ise $\emptyset_V$ olarak gösterilir.

Tanım 2.2.2. $\bar{\mathcal{F}}, V$ üzerinde ters esnek küme olsun. $(\bar{\mathcal{F}}, V)_s$ ters esnek kümesi

$$(\bar{\mathcal{F}}, \overline{\text{supp}}(\bar{\mathcal{F}})) = \{(v, \bar{\mathcal{F}}(v)) : v \in \overline{\text{supp}}(\bar{\mathcal{F}})\}$$

$(\bar{\mathcal{F}}, V)$ ters esnek kümesinin desteklenen ters esnek kümesi olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.3. $\bar{\mathcal{F}}, V$ üzerinde ters esnek küme ve $V_1, V_2 \subseteq V$ olsun.

$$\text{a) } \overline{\text{supp}}(\bar{\mathcal{F}}, V) = \overline{\text{supp}}(\bar{\mathcal{F}}, V_1) \cup \overline{\text{supp}}(\bar{\mathcal{F}}, V_2)$$

$$\text{b) } (\bar{\mathcal{F}}, V)_s = ((\bar{\mathcal{F}}, V_1) \cup (\bar{\mathcal{F}}, V_2))_s$$

$$\text{c) } (\bar{\mathcal{F}}, V_1) \tilde{\cap} (\bar{\mathcal{F}}, V_2) = \emptyset_V$$

şartlarını sağlayan $(\bar{\mathcal{F}}, V_1)$ ve $(\bar{\mathcal{F}}, V_2)$ varsa $(\bar{\mathcal{F}}, V)$ ters esnek kümesine $(\bar{\mathcal{F}}, V_1)$ ve $(\bar{\mathcal{F}}, V_2)$ 'nin ters bileşimi denir.

$$(\bar{\mathcal{F}}, V) = (\bar{\mathcal{F}}, V_1) \oplus (\bar{\mathcal{F}}, V_2)$$

olarak gösterilir.

Teorem 2.2.4. $(\bar{\mathcal{F}}, V) = (\bar{\mathcal{F}}, V_1) \oplus (\bar{\mathcal{F}}, V_2)$ ve $\bar{\alpha} \subseteq T$

- i. $(\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\subseteq \bar{\alpha}} \supseteq (\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\subseteq \bar{\alpha}} \cap (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\subseteq \bar{\alpha}}$
- ii. $(\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\subseteq \bar{\alpha}} \supseteq (\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\subseteq \bar{\alpha}} \cup (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\subseteq \bar{\alpha}}$
- iii. $(\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\supseteq \bar{\alpha}} \supseteq (\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\supseteq \bar{\alpha}} \cup (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\supseteq \bar{\alpha}}$

İspat. i) $(\bar{\mathcal{F}}, V) = (\bar{\mathcal{F}}, V_1) \oplus (\bar{\mathcal{F}}, V_2)$ olsun. $v \in (\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\subseteq \bar{\alpha}} \cap (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\subseteq \bar{\alpha}}$ olsun.

$\bar{\mathcal{F}}_{V_1}(v) \subseteq \bar{\alpha}$ ve $\bar{\mathcal{F}}_{V_2}(v) \subseteq \bar{\alpha}$ buradan $\bar{\mathcal{F}}_V(v) = \bar{\mathcal{F}}_{V_1}(v) \cup \bar{\mathcal{F}}_{V_2}(v) = (\bar{\mathcal{F}}, V)$ dir. Sonuç olarak

$v \in (\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\subseteq \bar{\alpha}}$ dir.

Benzer şekilde diğer maddeler de ispatlanabilir.

Örnek 2.2.5. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ nesneler kümesi $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$ parametre kümesi olsun.

$$\bar{\mathcal{F}}_V = \{(v_1, \{t_1, t_2, t_4, t_5\}), (v_2, \{t_3, t_4, t_6\}), (v_3, \{t_1, t_3, t_4\}), (v_4, \emptyset), (v_5, \{t_2, t_3\})\}$$

$$\bar{\mathcal{F}}_{V_1} = \{(v_1, \{t_2, t_4\}), (v_2, \{t_3, t_4\}), (v_3, \{t_1\}), (v_4, \emptyset)\}$$

$$\bar{\mathcal{F}}_{V_2} = \{(v_1, \{t_1, t_5\}), (v_2, \{t_6\}), (v_3, \{t_3, t_4\}), (v_4, \emptyset), (v_5, \{t_2, t_3\})\}$$

$$\overline{\text{supp}}(\bar{\mathcal{F}}, V) = \{v_1, v_2, v_3, v_5\} \quad \overline{\text{supp}}(\bar{\mathcal{F}}, V_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$\overline{\text{supp}}(\bar{\mathcal{F}}, V_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$$

$$\overline{\text{supp}}(\bar{\mathcal{F}}, V) = \overline{\text{supp}}(\bar{\mathcal{F}}, V_1) \cup \overline{\text{supp}}(\bar{\mathcal{F}}, V_2)$$

$$\begin{aligned} & ((\bar{\mathcal{F}}, V_1) \tilde{\cup} (\bar{\mathcal{F}}, V_2))_s \\ &= \{(v_1, \{t_1, t_2, t_4, t_5\}), (v_2, \{t_3, t_4, t_6\}), (v_3, \{t_1, t_3, t_4\}), (v_5, \{t_2, t_3\})\} \end{aligned}$$

$$(\bar{\mathcal{F}}, V)_s = \{(v_1, \{t_1, t_2, t_4, t_5\}), (v_2, \{t_3, t_4, t_6\}), (v_3, \{t_1, t_3, t_4\}), (v_5, \{t_2, t_3\})\}$$

$$(\bar{\mathcal{F}}, V_1) \tilde{\cap} (\bar{\mathcal{F}}, V_2) = \{(v_1, \emptyset), (v_2, \emptyset), (v_3, \emptyset), (v_4, \emptyset), (v_5, \emptyset)\} = \emptyset_V$$

$$(\bar{\mathcal{F}}, V) = (\bar{\mathcal{F}}, V_1) \oplus (\bar{\mathcal{F}}, V_2)$$

$$\bar{\alpha} = \{t_2, t_3\} \text{ olsun.}$$

$$(\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\subseteq \bar{\alpha}} = \{v_5\}, (\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\subseteq \bar{\alpha}} = \emptyset, (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\subseteq \bar{\alpha}} = \{v_5\} \quad (\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\subseteq \bar{\alpha}} \supseteq (\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\subseteq \bar{\alpha}} \cap (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\subseteq \bar{\alpha}}$$

$$(\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\subseteq \bar{\alpha}} \supseteq (\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\subseteq \bar{\alpha}} \cup (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\subseteq \bar{\alpha}} \text{ dir.}$$

$$(\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\supseteq \bar{\alpha}} = \{v_5\}, (\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\supseteq \bar{\alpha}} = \emptyset, (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\supseteq \bar{\alpha}} = \{v_5\}$$

$$(\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\supseteq \bar{\alpha}} \supseteq (\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\supseteq \bar{\alpha}} \cup (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\supseteq \bar{\alpha}} \text{ dir.}$$

Teorem 2.2.6. $(\bar{\mathcal{F}}, V) = (\bar{\mathcal{F}}, V_1) \oplus (\bar{\mathcal{F}}, V_2)$ ve $\bar{\alpha} \subseteq T$

$$\text{i.} \quad (\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\cap \bar{\alpha}} \cup (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\cap \bar{\alpha}} \subseteq (\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\cap \bar{\alpha}}$$

$$\text{ii.} \quad (\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\cup \bar{\alpha}} \cup (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\cup \bar{\alpha}} \subseteq (\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\cup \bar{\alpha}}$$

$$\text{iii.} \quad (\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\cap \bar{\alpha}} \cap (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\cap \bar{\alpha}} \subseteq (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\cap \bar{\alpha}}$$

İspat. i) $v \in (\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\cap \bar{\alpha}} \cup (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\cap \bar{\alpha}}$ olsun, $\bar{\mathcal{F}}_{V_1} \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset$ veya $\bar{\mathcal{F}}_{V_2} \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset$ dir.

$$\bar{\mathcal{F}}_V \cap \bar{\alpha} = (\bar{\mathcal{F}}_{V_1}(v) \cup \bar{\mathcal{F}}_{V_2}(v)) \cap \bar{\alpha} = (\bar{\mathcal{F}}_{V_1} \cap \bar{\alpha}) \cup (\bar{\mathcal{F}}_{V_2} \cap \bar{\alpha})$$

olduğundan $\bar{\mathcal{F}}_V \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset$ dir. $v \in (\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\cap \bar{\alpha}}$ ve $(\bar{\mathcal{F}}_{V_1})_s^{\cap \bar{\alpha}} \cup (\bar{\mathcal{F}}_{V_2})_s^{\cap \bar{\alpha}} \subseteq (\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\cap \bar{\alpha}}$ dir.

Benzer şekilde diğer maddeler de ispatlanabilir.

Örnek 2.2.7. Örnek 2.2.5. te verilen $\bar{\mathcal{F}}_V, \bar{\mathcal{F}}_{V_1}$ ve $\bar{\mathcal{F}}_{V_2}$ ters esnek kümelerini alalım. $\bar{\alpha} = \{t_2, t_3, t_6\}$ olsun.

$$(\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\cap \bar{\alpha}} = \{v_1, v_2, v_3, v_5\} \text{ ve } (\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\cup \bar{\alpha}} = \{v_1\}$$

$$(\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\cap \bar{\alpha}} = \{v_1, v_2\} \text{ ve } (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\cup \bar{\alpha}} = \emptyset$$

$$(\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\cap \bar{\alpha}} = \{v_2, v_3, v_5\} \text{ ve } (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\cup \bar{\alpha}} = \emptyset$$

Aşağıdakilerin sağlandığını görürüz.

$$(\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\cap \bar{\alpha}} \cup (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\cap \bar{\alpha}} \subseteq (\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\cap \bar{\alpha}}$$

$$(\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\cup \bar{\alpha}} \cup (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\cup \bar{\alpha}} \subseteq (\bar{\mathcal{F}}, V)_s^{\cup \bar{\alpha}}$$

$$(\bar{\mathcal{F}}, V_1)_s^{\cap \bar{\alpha}} \cap (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\cap \bar{\alpha}} \subseteq (\bar{\mathcal{F}}, V_2)_s^{\cap \bar{\alpha}}$$

2.3. Ters Esnek Matrislerin Ayırışması

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ evrensel küme $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ parametreler kümesi ve $[a_{ij}] \in ISM(V), ISM_{n \times m}$ V üzerindeki ters esnek matris olarak gösterilmiştir..

Notasyonlar :

1. $|a_{ij}|_j [a_{ij}]$ ters esnek matrisinin j.sütunu,
2. $|0|_j [a_{ij}]$ nin j.sütunu sıfırlardan oluşur anlamına gelmektedir,
3. $|1|_j [a_{ij}]$ nin j.sütunu 1'den oluşur anlamına gelmektedir.

$[a_{ij}]$ ters esnek matrisinin sütunlarını $\bigsqcup_{j=1}^m |a_{ij}|_j$ olarak ifade edebiliriz.

Tanım 2.3.1 $[a_{ij}] \in ISM_{n \times m}$ olsun. $[a_{ij}]$ nin destek(support) kümesi $\{1, 2, \dots, m\}$ kümesinin alt kümesidir ve

$$\overline{supp}[a_{ij}] = \{j | a_{ij} \neq 0, \exists i = 1, 2, \dots, n\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.2. $[a_{ij}] \in ISM_{n \times m}$ olsun. Eğer $[b_{ij}]$ ve $[c_{ij}] \in ISM_{n \times m}$ ters esnek matrisleri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa

$$a) \overline{supp}[a_{ij}] = \overline{supp}[b_{ij}] \cup \overline{supp}[c_{ij}]$$

$$b) [a_{ij}] = [b_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}]$$

$$c) [b_{ij}] \tilde{\cap} [c_{ij}] = [0]$$

$[a_{ij}]$ ters esnek matrisi $[b_{ij}]$ ve $[c_{ij}]$ ters esnek matrislerinin birleşimidir ve aşağıdaki şekilde gösterilir

$$[a_{ij}] = [b_{ij}] \oplus [c_{ij}].$$

Örnek 2.3.3. Örnek 2.2.5. te verilen $\bar{\mathcal{F}}_V, \bar{\mathcal{F}}_{V_1}$ ve $\bar{\mathcal{F}}_{V_2}$ ters esnek kümelerini alalım. $\bar{\mathcal{F}}_V, \bar{\mathcal{F}}_{V_1}$ ve $\bar{\mathcal{F}}_{V_2}$ ters esnek kümelerine karşılık gelen ters esnek matrisler sırasıyla $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}]$ olsun.

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{supp}[a_{ij}] = \{1, 2, 3, 5\} \quad \overline{supp}[b_{ij}] = \{1, 2, 3\} \quad \overline{supp}[c_{ij}] = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$[a_{ij}] = [b_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}]$$

$$[b_{ij}] \tilde{\cap} [c_{ij}] = [0] \text{ dir.}$$

Tanım 2.3.4. $[a_{ij}] \in ISM_{n \times m}$ olsun ve $\bar{\alpha} = \{t_i | i \in I\} \subseteq T \quad I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

a) $[a_{ij}]$ nin $\bar{\alpha}$ – üst ters esnek matrisi $[a_{ij}]^{\bar{\alpha}}$ ile gösterilir.

$$[a_{ij}]^{\bar{\alpha}} = \bigsqcup_{j=1}^m \begin{cases} |a_{ij}|_j, & \forall i \in I \text{ için } a_{ij} = 1 \\ |0|_j, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

b) $[a_{ij}]$ nin $\bar{\alpha}$ – alt ters esnek matrisi $[a_{ij}]_{\bar{\alpha}}$ ile gösterilir.

$$[a_{ij}]_{\bar{\alpha}} = \bigsqcup_{j=1}^m \begin{cases} |0|_j, & \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus I \text{ için } a_{ij} = 1 \\ |a_{ij}|_j, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

Örnek 2.3.5. $[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ters esnek matrisi için $\bar{\alpha} = \{t_2\}$ seçelim $I = \{2\}$ ve

$$[a_{ij}]^{\bar{\alpha}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{\beta} = \{t_2, t_3\}$ seçelim $I = \{2, 3\}$ ve

$$[a_{ij}]_{\bar{\beta}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tanım 2.3.6. $[a_{ij}] \in ISM_{n \times m}$ olsun ve $\bar{\alpha} = \{t_i | i \in I\} \subseteq T$ $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

a) $[a_{ij}]$ nin $\bar{\alpha}$ – ters kesişim ters esnek matrisi $[a_{ij}]^{\cap \bar{\alpha}}$ ile gösterilir.

$$[a_{ij}]^{\cap \bar{\alpha}} = \bigsqcup_{j=1}^m \begin{cases} |a_{ij}|_j, & \exists i \in I \text{ için } a_{ij} = 1 \\ |0|_j, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

b) $[a_{ij}]$ nin $\bar{\alpha}$ – ters birleşim ters esnek matrisi $[a_{ij}]^{\cup \bar{\alpha}}$ ile gösterilir.

3. BÖLÜM

BİR KÜME YARDIMIYLA ELDE EDİLEN TERS ESNEK ALT YAPILAR

Bu bölümde ters esnek kümeler kullanılarak oluşturulan ters esnek alt yapılardan bahsedilecektir. Gerekli tanım ve örnekler bu bölümde verilmiştir.

3.1. Ters Esnek Grup

Tanım 3.1.1. G bir grup ve V, G nin alt grubu olmak üzere $(\bar{\mathcal{F}}, V)$ G üzerinde ters esnek küme olsun. Eğer $\forall x, y \in G$ için

$$i) \quad \bar{\mathcal{F}}(xy) \supseteq \bar{\mathcal{F}}(x) \cap \bar{\mathcal{F}}(y)$$

$$ii) \quad \bar{\mathcal{F}}(x^{-1}) = \bar{\mathcal{F}}(x)$$

Şartı sağlanır ise $(\bar{\mathcal{F}}, V)$ G üzerinde ters esnek-kesişim alt gruptur (inverse soft-int group) denir ve $(\bar{\mathcal{F}}, V) \prec G$ veya $\bar{\mathcal{F}}_V \prec G$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.2. $G = \mathbb{Z}_6$, $V = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ nesneler kümesi ve $T = S_3$ parametre kümesi olsun.

$$\bar{\mathcal{F}}: V \rightarrow P(T)$$

$$\bar{\mathcal{F}}_V(\bar{0}) = S_3, \quad \bar{\mathcal{F}}_V(\bar{2}) = \{(1), (12), (132)\}, \quad \bar{\mathcal{F}}_V(\bar{4}) = \{(1), (12), (132)\} \text{ olsun.}$$

$\forall x, y \in V$ için $i)$ ve $ii)$ şartı sağlandığından $(\bar{\mathcal{F}}, V)$ G üzerinde ters esnek-int gruptur.

Teorem 3.1.3. $(\bar{\mathcal{F}}, V)$ G üzerinde bir ters esnek küme G üzerinde ters esnek-kesişim alt gruptur ancak ve ancak $\forall x, y \in G$ için $\bar{\mathcal{F}}(xy^{-1}) \supseteq \bar{\mathcal{F}}(x) \cap \bar{\mathcal{F}}(y)$ dır.

Tanım 3.1.4. G bir grup, $\bar{\mathcal{F}}$, G üzerinde ters esnek küme ve $\bar{\alpha} \neq \emptyset \subseteq T$ olsun. Eğer $(\bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}, G)^{\cap \bar{\alpha}})$ ters esnek kümesi G nin ters esnek-kesişim alt grubu ise bu ters esnek

kümeye G nin $\bar{\alpha}$ ile oluşturulan ters esnek-kesişim alt grubu denir ve $\langle \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \rangle_G$ ile gösterilir. Eğer $\bar{\alpha} = \{t\}$ kümesi tek bir elemandan oluşuyorsa $\langle \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \rangle_G$, G nin $t \in T$ elemanı tarafından üretilen ters esnek-kesişim alt grubudur.

Örnek 3.1.5. $G = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ nesneler kümesi, $T = \mathbb{Z}_4$ parametre kümesi ve

$\bar{\mathcal{F}}$, G üzerinde ters esnek küme olsun.

$$\bar{\mathcal{F}} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \mathbb{Z}_4, \quad \bar{\mathcal{F}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \{\bar{0}, \bar{2}\}, \quad \bar{\mathcal{F}} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \{\bar{1}\}, \quad \bar{\mathcal{F}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \{\bar{1}, \bar{3}\} \text{ ve}$$

$\bar{\alpha} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ olsun.

$$(\bar{\mathcal{F}}, G)^{\cap \bar{\alpha}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$(\bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}, G)^{\cap \bar{\alpha}}) = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \right), \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \{\bar{0}, \bar{2}\} \right) \right\}$ ters esnek kümesi $\langle \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \rangle_G \leq G$ dir.

$\bar{\mathcal{F}}$, G grubu üzerinde ters esnek küme olsun. $\{0_G\}$, G nin aşık alt grubudur dolayısıyla $(\bar{\mathcal{F}}, \{0_G\}) \leq G$ olduğu kolayca görülür.

Tanım 3.1.6. $(\bar{\mathcal{F}}, \{0_G\})$ ters esnek alt grubu G nin aşık ters esnek alt grubudur ve $\langle 0_G \rangle_{\bar{\mathcal{F}}}$ ile gösterilir. Genellikle $\langle 0_G \rangle_{\bar{\mathcal{F}}}$ ve $(\bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}, G)^{\cap \{0_G\}})$ birbirinden farklıdır. Örnek 3.1.5 de

$$\langle 0_G \rangle_{\bar{\mathcal{F}}} = (\bar{\mathcal{F}}, \{0_G\}) = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \right) \right\} \text{ ve}$$

$$(\bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}, G)^{\cap \{0_G\}}) = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \right), \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \{\bar{0}, \bar{2}\} \right) \right\} \text{ dir. Ayrıca}$$

$(\bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}, G)^{\cap \{0_G\}})$ G nin ters esnek-kesişim alt grubu olmak zorunda değildir.

3.2. Ters Esnek Halka

Tanım 3.2.1. $(R, +, \cdot)$ bir halka, S, R nin alt halkası ve $\bar{\mathcal{F}}, R$ üzerinde ters esnek küme olsun. $\forall x, y \in S$ için

$$i) \bar{\mathcal{F}}(x - y) \supseteq \bar{\mathcal{F}}(x) \cap \bar{\mathcal{F}}(y)$$

$$ii) \bar{\mathcal{F}}(xy) \supseteq \bar{\mathcal{F}}(x) \cap \bar{\mathcal{F}}(y)$$

Şartları sağlanır ise $\bar{\mathcal{F}}, R$ 'nin ters esnek alt halkasıdır.

Tanım 3.2.2. R bir halka, $\bar{\mathcal{F}}, R$ üzerinde ters esnek küme ve $\bar{\alpha} \neq \emptyset \subseteq R$ olsun. Eğer $(\bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}, R)^{\cap \bar{\alpha}})$ R 'nin ters esnek-kesişim alt halkası ise bu ters esnek kümeye R 'nin $\bar{\alpha}$ ile oluşturulan ters esnek-kesişim alt halkası denir ve $\langle \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \rangle_R \prec R$ ile gösterilir.

Örnek 3.2.3. $R = \mathbb{Z}_4$ halkası üzerinde $\bar{\mathcal{F}}$ ters esnek kümesi

$$\bar{\mathcal{F}}_R(\bar{0}) = \mathbb{Z}_4, \bar{\mathcal{F}}_R(\bar{1}) = \{\bar{2}, \bar{3}\}, \bar{\mathcal{F}}_R(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{1}\}, \bar{\mathcal{F}}_R(\bar{3}) = \{\bar{3}\} \text{ şeklinde tanımlansın.}$$

$$\bar{\alpha} = \{\bar{0}, \bar{1}\} \subseteq \mathbb{Z}_4 \text{ seçilir ise}$$

$$(\bar{\mathcal{F}}, R)^{\cap \bar{\alpha}} = \{\bar{0}, \bar{2}\} \text{ } R \text{ nin alt halkasıdır.}$$

$(\bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}, R)^{\cap \bar{\alpha}}) = \{(\bar{0}, \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}), (\bar{2}, \{\bar{0}, \bar{1}\})\}$ ters esnek kümesi $i)$ ve $ii)$ şartlarını sağladığından $\langle \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \rangle_R \prec R$ dir.

3.3. Ters Esnek Cisim

Tanım 3.3.1. K bir cisim S, K nın alt cismi olsun. $(\bar{\mathcal{F}}, S)$ K üzerinde ters esnek küme olsun. $\forall x, y \in S$ için

$$i) \bar{\mathcal{F}}(x - y) \supseteq \bar{\mathcal{F}}(x) \cap \bar{\mathcal{F}}(y)$$

$$ii) \bar{\mathcal{F}}(xy^{-1}) \supseteq \bar{\mathcal{F}}(x) \cap \bar{\mathcal{F}}(y) \text{ } (y \neq 0_R)$$

ise $(\bar{\mathcal{F}}, S)$ K 'nin ters esnek-kesişim cismidir. $(\bar{\mathcal{F}}, S) \prec K$ olarak gösterilir.

Tanım 3.3.2. K bir cisim olsun, $\bar{\alpha} \neq \emptyset \subseteq K$ ve $(\bar{\mathcal{F}}, S)$ K üzerinde ters esnek küme olsun. Eğer $(\bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}, K)^{\cap \bar{\alpha}})$ K 'nın ters esnek-kesişim alt cisimi ise $(\bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}, K)^{\cap \bar{\alpha}})$ K 'nın $\bar{\alpha}$ ile oluşturulan ters esnek-kesişim alt cismidir ve $\langle \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \rangle_K \leq K$ ile gösterilir.

Örnek 3.3.3. $K = (\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ cismi üzerinde $\bar{\mathcal{F}}$ ters esnek kümesi

$\bar{\mathcal{F}}_K(\bar{0}) = \mathbb{Z}_5$, $\bar{\mathcal{F}}_K(\bar{1}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, $\bar{\mathcal{F}}_K(\bar{2}) = \{\bar{1}, \bar{2}\}$, $\bar{\mathcal{F}}_K(\bar{3}) = \{\bar{1}, \bar{2}\}$, $\bar{\mathcal{F}}_K(\bar{4}) = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ şeklinde tanımlansın.

$\bar{\alpha} = \{\bar{1}\} \subseteq \mathbb{Z}_5$ seçilirse

$(\bar{\mathcal{F}}, K)^{\cap \bar{\alpha}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} = \mathbb{Z}_5$ K nin alt cismidir.

$(\bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}, K)^{\cap \bar{\alpha}}) = \{(\bar{0}, \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}), (\bar{1}, \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}), (\bar{2}, \{\bar{1}, \bar{2}\}), (\bar{3}, \{\bar{1}, \bar{2}\}), (\bar{4}, \{\bar{1}, \bar{2}\})\}$ ters esnek kümesi i) ve ii) şartlarını sağladığından $\langle \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \rangle_K \leq K$ dir.

Tanım 3.3.4. R_1, R_2 cisimler ve $(\bar{\mathcal{F}}, R_1), (\bar{\mathcal{G}}, R_2)$ sırasıyla R_1 ve R_2 nin iki ters esnek alt cisimleri olsun. Ters esnek alt cisimlerin çarpımları $(\bar{\mathcal{F}}, R_1) \times (\bar{\mathcal{G}}, R_2) = (\bar{\mathcal{Q}}, R_1 \times R_2)$ olarak tanımlanır burada $\forall (x, y) \in R_1 \times R_2$ için $\bar{\mathcal{Q}}(x, y) = \bar{\mathcal{F}} \times \bar{\mathcal{G}}$ dir.

Teorem 3.3.5. $\bar{\mathcal{F}}_{S_1} \leq R_1$ ve $\bar{\mathcal{G}}_{S_2} \leq R_2$ ise $\bar{\mathcal{F}}_{S_1} \times \bar{\mathcal{G}}_{S_2} \leq R_1 \times R_2$ dir.

İspat : S_1 ve S_2 sırasıyla R_1 ve R_2 nin alt cisimleri olduğu için $S_1 \times S_2, R_1 \times R_2$ nin esnek alt cisimleridir. Tanım 1 den, $\bar{\mathcal{F}}_{S_1} \times \bar{\mathcal{G}}_{S_2} = (\bar{\mathcal{F}}, S_1) \times (\bar{\mathcal{G}}, S_2) = (\bar{\mathcal{Q}}, S_1 \times S_2)$, burada $\forall (x, y) \in S_1 \times S_2$ için $\bar{\mathcal{Q}}(x, y) = \bar{\mathcal{F}} \times \bar{\mathcal{G}}$ dir.

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S_1 \times S_2$ için,

$$\begin{aligned} s_1) \bar{\mathcal{Q}}((x_1, y_1) - (x_2, y_2)) &= \bar{\mathcal{Q}}(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \bar{\mathcal{F}}(x_1 - x_2) \times \bar{\mathcal{G}}(y_1 - y_2) \supseteq \\ &(\bar{\mathcal{F}}(x_1) \cap \bar{\mathcal{F}}(x_2)) \times (\bar{\mathcal{G}}(y_1) \cap \bar{\mathcal{G}}(y_2)) = (\bar{\mathcal{F}}(x_1) \times \bar{\mathcal{G}}(y_1)) \cap (\bar{\mathcal{F}}(x_2) \times \bar{\mathcal{G}}(y_2)) = \\ &\bar{\mathcal{Q}}(x_1, y_1) \cap \bar{\mathcal{Q}}(x_2, y_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2) \bar{\mathcal{Q}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)^{-1}) &= \bar{\mathcal{Q}}(x_1 x_2^{-1}, y_1 y_2^{-1}) = \bar{\mathcal{Q}}(x_1 x_2^{-1}) \times \bar{\mathcal{Q}}(y_1 y_2^{-1}) \supseteq \\ &(\bar{\mathcal{F}}(x_1) \cap \bar{\mathcal{F}}(x_2)) \times (\bar{\mathcal{G}}(y_1) \cap \bar{\mathcal{G}}(y_2)) = (\bar{\mathcal{F}}(x_1) \times \bar{\mathcal{G}}(y_1)) \cap (\bar{\mathcal{F}}(x_2) \times \bar{\mathcal{G}}(y_2)) = \\ &\bar{\mathcal{Q}}(x_1, y_1) \cap \bar{\mathcal{Q}}(x_2, y_2) \quad (x_2, y_2) \neq (0_{R_1}, 0_{R_2}) \end{aligned}$$

Teorem 3.3.6. R_1 ve R_2 iki cisim ve $(\bar{\mathcal{F}}, R_1)$, $(\bar{\mathcal{G}}, R_2)$ sırasıyla R_1 ve R_2 üzerinde iki ters esnek küme olsun. $\langle \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \rangle_{R_1} \bar{<} R_1$ ve $\langle \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\beta}} \rangle_{R_2} \bar{<} R_2$ olacak şekilde $\bar{\alpha} \subseteq R_1$ $\bar{\beta} \subseteq R_2$ varsa

$$\langle \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \rangle_{R_1} \times \langle \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\beta}} \rangle_{R_2} = \langle \bar{\mathcal{H}}^{\cap (\bar{\alpha} \times \bar{\beta})} \rangle_{R_1 \times R_2}.$$

İspat : $\langle \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \rangle_{R_1} \bar{<} R_1$ ve $\langle \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\beta}} \rangle_{R_2} \bar{<} R_2$ olsun. $(\bar{\mathcal{F}}, R_1)^{\cap \bar{\alpha}}$, R_1 'in, $(\bar{\mathcal{G}}, R_2)^{\cap \bar{\beta}}$, R_2 'nin alt cisimleridir. Böylece $(\bar{\mathcal{F}}, R_1)^{\cap \bar{\alpha}} \times (\bar{\mathcal{G}}, R_2)^{\cap \bar{\beta}}$, $R_1 \times R_2$ 'nin alt cismidir. Bu nedenle teorem 1 den $\langle \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \rangle_{R_1} \times \langle \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\beta}} \rangle_{R_2} \bar{<} R_1 \times R_2$ dir. $(x, \bar{\mathcal{F}}(x)) \in \langle \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \rangle_{R_1}$ ve $(y, \bar{\mathcal{G}}(y)) \in \langle \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\beta}} \rangle_{R_2}$ olsun. $\bar{\mathcal{F}}(x) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset$ ve $\bar{\mathcal{G}}(y) \cap \bar{\beta} \neq \emptyset$ dir.

$$\bar{\mathcal{F}}(x) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset \wedge \bar{\mathcal{G}}(y) \cap \bar{\beta} \neq \emptyset \Leftrightarrow (\bar{\mathcal{F}}(x) \times \bar{\mathcal{G}}(y)) \cap (\bar{\alpha} \times \bar{\beta}) \neq \emptyset$$

$(x, \bar{\mathcal{F}}(x)) \in \langle \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \rangle_{R_1} \wedge (y, \bar{\mathcal{G}}(y)) \in \langle \bar{\mathcal{G}}^{\cap \bar{\beta}} \rangle_{R_2} \Leftrightarrow (\bar{\mathcal{F}}(x) \times \bar{\mathcal{G}}(y), (x, y)) \in \langle \bar{\mathcal{H}}^{\cap (\bar{\alpha} \times \bar{\beta})} \rangle_{R_1 \times R_2}$ burada $(\bar{\mathcal{H}}, R_1 \times R_2)$ $R_1 \times R_2$ üzerinde ters esnek kümedir, burada

$\bar{\mathcal{H}} : R_1 \times R_2 \rightarrow P(R_1 \times R_2)$, $\bar{\mathcal{H}}(x, y) = \bar{\mathcal{F}}(x) \times \bar{\mathcal{G}}(y)$ tarafından tanımlanan küme değerli fonksiyondur. Böylece ispat tamamlanır.

3.4. Ters Esnek Modül

Tanım 3.4.1. R bir halka $(M, +)$ değişmeli grup olmak üzere

$$R \times M \rightarrow M$$

$$(r, m) \rightarrow rm$$

$\forall r_1, r_2 \in R$ ve $\forall m, m_1, m_2 \in M$ için

$$M_1) r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$$

$$M_2) (r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$$

$$M_3) (r_1 \cdot r_2)m = r_1(r_2m)$$

ise M sol R -modüldür.

M_4) $1_R \cdot m = m$ R birimli ise sol birim R -modül ve R değişmeli halka ise sol R -modül aynı zamanda sağ R -modüldür.

Tanım 3.4.2. N, M' 'nin alt-modülü olsun ve $(\bar{\mathcal{F}}, N)$ M üzerinde ters esnek küme olsun.
 $\forall x, y \in N, \forall r \in R$ için

$$s_1) \bar{\mathcal{F}}(x - y) \supseteq \bar{\mathcal{F}}(x) \cap \bar{\mathcal{F}}(y)$$

$$s_2) \bar{\mathcal{F}}(rx) \supseteq \bar{\mathcal{F}}(x)$$

ise $(\bar{\mathcal{F}}, N)$ M 'nin ters esnek-kesişim alt-modülüdür.

Örnek 3.4.3. $R = (\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ $M = (\mathbb{Z}_6, +)$ olsun.

$$R \times M \rightarrow M$$

$$(r, m) \rightarrow rm$$

M sol R -modüldür. $N = \{0, 3\}$ alt-modülünü alalım. $(\bar{\mathcal{F}}, N)$ ters esnek küme olsun.

$\bar{\mathcal{F}}: N \rightarrow P(M)$ Burada N nesneler kümesi olarak M parametre kümesi olarak seçilmiştir.

$$\bar{\mathcal{F}}(0) = \{0, 1, 2, 3\} \quad \bar{\mathcal{F}}(1) = \{0, 1\} \quad (\bar{\mathcal{F}}, N) \bar{<} M \text{ dır.}$$

Tanım 3.4.3. M bir R -modül, $\emptyset \neq \bar{\alpha} \subseteq R$ ve $(\bar{\mathcal{F}}, M)$ M üzerinde ters esnek küme olsun. $(\bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}, M)^{\cap \bar{\alpha}})$ M 'nin ters esnek-kesişim alt modül ise $(\bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}, M)^{\cap \bar{\alpha}})$ M 'nin $\bar{\alpha}$ tarafından oluşturulan ters esnek-kesişim alt-modülüdür ve $\langle \bar{\mathcal{F}}^{\cap \bar{\alpha}} \rangle_M$ ile gösterilir.

Örnek 3.4.4.. $R = (\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ halkasını alalım. $I = \{0, 3, 6, 9\}$ idealini $I = M$ olarak alalım.

$$R \times M \rightarrow M$$

$$(r, m) \rightarrow rm$$

$I = M$ için R -modüldür. $(\bar{\mathcal{F}}, M)$ M üzerinde ters esnek küme olsun.

$$\bar{\mathcal{F}}: M \rightarrow P(M)$$

$$\bar{\mathcal{F}}(0) = \{0,3,6,9\} \quad \bar{\mathcal{F}}(3) = \{0,6\} \quad \bar{\mathcal{F}}(6) = \{6,9\} \quad \bar{\mathcal{F}}(9) = \{6\}$$

$$\bar{\alpha} = \{3\} \subseteq M \quad \text{ için } (\bar{\mathcal{F}}, M)^{\cap \bar{\alpha}} = \{0\} \text{ alt-modüldür.}$$

$$(\bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}, M)^{\cap \bar{\alpha}}) = \{(0, \{0,3,6,9\})\} \bar{<} M \quad s_1) \text{ ve } s_2) \text{ şartlarını sağladığından ters esnek alt-modüldür.}$$



4. BÖLÜM

UYGULAMA

Bu bölümde ters esnek kümeler ve matrisler kullanarak karar verme problemlerinde kullanacak bazı algoritmalar önerilmiştir. Önerilen algoritmaların esnek kümeler için örnekleri mevcut olup ters esnek kümeler ile ilgili uygulaması yapılmıştır.

Tanım 4.1. $[a_{ij}] \in ISM_{m \times n}$ olsun. Toplam sütun fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\varsigma_j: ISM_{m \times n} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \varsigma_j([a_{ij}]) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Kısalık açısından, $\varsigma_j([a_{ij}])$ değeri ς_j ile gösterilecektir.

Tanım 4.2. $[a_{ij}] \in ISM_{m \times n}$ olsun. Her sütun için skor değeri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$S_k = \sum_{j=1}^n \varsigma_{kj} = \sum_{j=1}^n \varsigma_k - \varsigma_j$$

Tanım 4.3. $[a_{ij}^1], [a_{ij}^2], \dots, [a_{ij}^n] \in ISM_{m \times n}$ $[\vartheta_{pj}] = \bigwedge_{t=1}^n [a_{ij}^t]$ ve $[\omega_{ip}] = \bigvee_{t=1}^n [a_{ij}^t]$ olsun.

$$\kappa_i = \{\kappa_i^1, \kappa_i^2, \kappa_i^3\}$$

üçlüsü $v_i \in V$ nin karar üçlüsü olarak tanımlanır. Burada κ_i^1, κ_i^2 ve κ_i^3 karar bileşenleridir ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\kappa_i^1 = \varsigma_j([\vartheta_{pj}]), \quad \kappa_i^2 = \sum_{t=1}^n \varsigma_j([a_{ij}^t]) \quad \text{ve} \quad \kappa_i^3 = n \times \varsigma_j([\omega_{ij}])$$

Tanım 4.4. $\kappa_i = (\kappa_i^1, \kappa_i^2, \kappa_i^3)$ $v_i \in V$ nin karar üçlüsü olsun.

a) $l_i^1 = \kappa_i^1 + \kappa_i^2$ değeri $v_i \in V$ 'nin birinci karar değeri olarak adlandırılır.

b) $l_i^2 = 2\kappa_i^3 - \kappa_i^2$ değeri $v_i \in V$ 'nin ikinci karar değeri olarak adlandırılır.

$v_i, v_{i'} \in V$ için, κ_i ve $\kappa_{i'}$ seçim sırası aşağıdaki gibi bulunur:

- Eğer $l_i^1 > l_{i'}^1$ ise $\kappa_i > \kappa_{i'}$ dır.
- Eğer $l_i^1 = l_{i'}^1$ ise ikinci karar değeri l_i^2 dikkate alınır.
- Eğer $l_i^2 > l_{i'}^2$ ise $\kappa_i > \kappa_{i'}$ dır
- Eğer $l_i^1 = l_{i'}^1$ ve $l_i^2 = l_{i'}^2$ ise $\kappa_i = \kappa_{i'}$ dır.

Tanım 4.5. $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ evrensel küme $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ parametreler kümesi olsun κ_i karar üçlüsünde birinci karar değeri l_i^1 ve ikinci karar değeri l_i^2 kullanılarak nesnelerin sıralaması aşağıdaki gibi bulunur.

Eğer $\kappa_{i_1} > \kappa_{i_2} \dots > \kappa_{i_m}$ ise $v_{i_1} > v_{i_2} \dots > v_{i_m}$ dır.

V 'nin optimum kümesi olarak adlandırılan V 'nin alt kümesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Opt_{\kappa}(V) = \{v_i: v_i \in V \text{ ve } \forall i' \neq i \text{ için } \kappa_i > \kappa_{i'}\}$$

Algoritma 1.

1. Karar vericinin parametre seçimine uygun ters esnek küme oluşturulur.
2. Ters esnek kümeye karşılık gelen ters esnek matris elde edilir.
3. $\forall j$ için ς_j ve S_k değerleri hesaplanır.
4. Eğer $S_j = \max_k S_k$ ise en uygun seçim olarak v_j seçilir.
5. Eğer birden fazla j varsa herhangi bir v_j seçimi yapılabilir.

Örnek 4.6. Bir öğrenci karar vereceği meslek için bazı parametreler belirlemiş olsun.

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ mesleklerin kümesi

$T = \{t_1 = \text{gelecekteki önemi}, t_2 = \text{ekonomik değeri}, t_3 = \text{ilgi}, t_4 = \text{yetenek}\}$ parametre kümesi olsun.

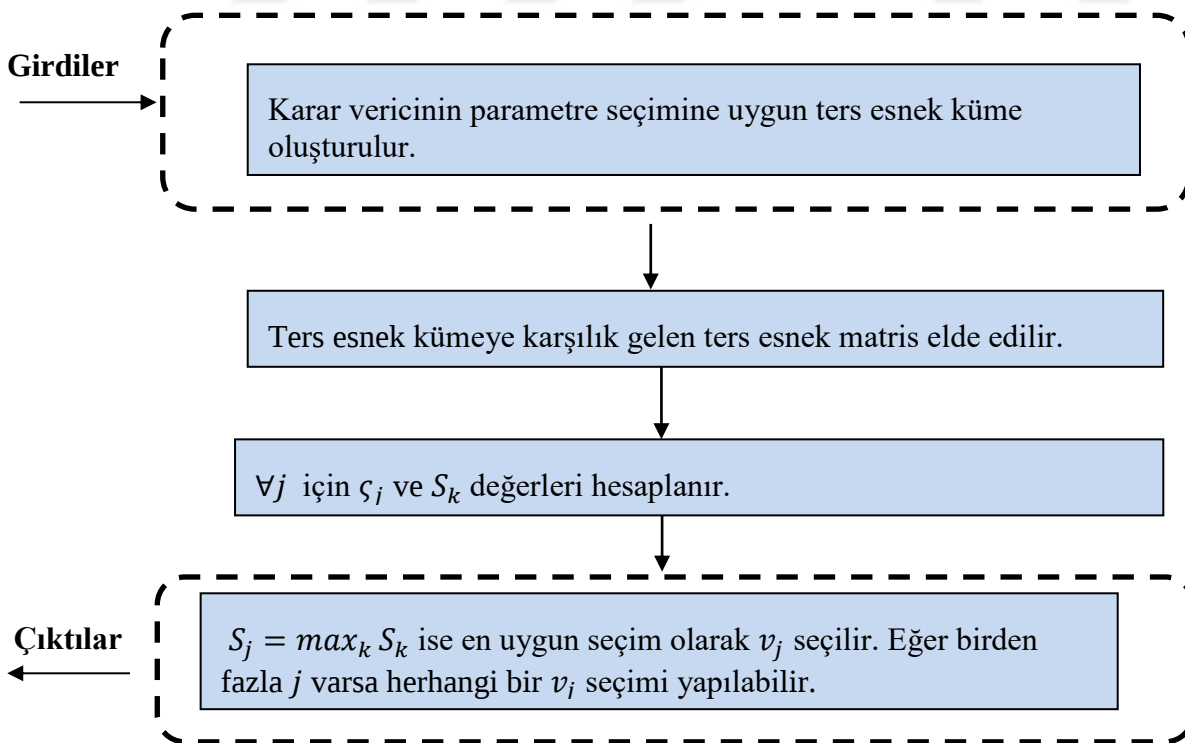
$$1. \bar{F} = \{(v_1, \{t_1, t_4\}), (v_2, \{t_1, t_2, t_3\}), (v_3, \{t_2\}), (v_4, \{t_1, t_2\})\}$$

$$2. [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3. \varsigma_j([a_{ij}]) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \quad \varsigma_1 = 2, \varsigma_2 = 3, \varsigma_3 = 1, \varsigma_4 = 2$$

$$4. S_k = \sum_{j=1}^n \varsigma_{kj} = \sum_{j=1}^n \varsigma_k - \varsigma_j \quad S_1 = 0, S_2 = 4, S_3 = -4, S_4 = 0$$

5. $\max_k S_k = S_2$ olduğundan v_2 seçimi en uygun karardır.



Şekil 1. Algoritma 1'in Yapısı

Algoritma 2.

1. Karar vericinin parametre seçimine uygun ters esnek küme oluşturulur.

2. Ters esnek kümeye karşılık gelen ters esnek matris elde edilir.

3. $S(v_j)(t_i) = R(v_j)(t_i) - C(v_j)(t_i)$ değerleri hesaplanır. Burada,

$$C(v_j)(t_i) = |\{v_k \in V | \bar{a}_{ij} \geq \bar{a}_{ik}\}| \quad R(v_j)(t_i) = |\{v_k \in V | \bar{a}_{ik} \geq \bar{a}_{ij}\}|$$

4. $S_j = \sum_{i=1}^m S(v_j)(t_i)$ olmak üzere $S_k = \max_j S_j$ ise en iyi seçim olarak v_j seçilir.

5. Eğer birden fazla j varsa herhangi bir v_j seçimi yapılabilir.

Örnek 4.7. Örnek 4.6 te verilen ters esnek küme ve ters esnek matris dikkate alınırsa

1. $\bar{F} = \{(v_1, \{t_1, t_4\}), (v_2, \{t_1, t_2, t_3\}), (v_3, \{t_2\}), (v_4, \{t_1, t_2\})\}$

2. $[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ için

$$\bar{a}_{11} \geq \bar{a}_{11}, \bar{a}_{12} \geq \bar{a}_{11}, \bar{a}_{14} \geq \bar{a}_{11} \text{ olduğundan } C(v_1)(t_1) = |\{v_1, v_2, v_4\}| = 3$$

$$\bar{a}_{11} \geq \bar{a}_{11}, \bar{a}_{11} \geq \bar{a}_{12}, \bar{a}_{11} \geq \bar{a}_{13}, \bar{a}_{11} \geq \bar{a}_{14} \text{ olduğundan}$$

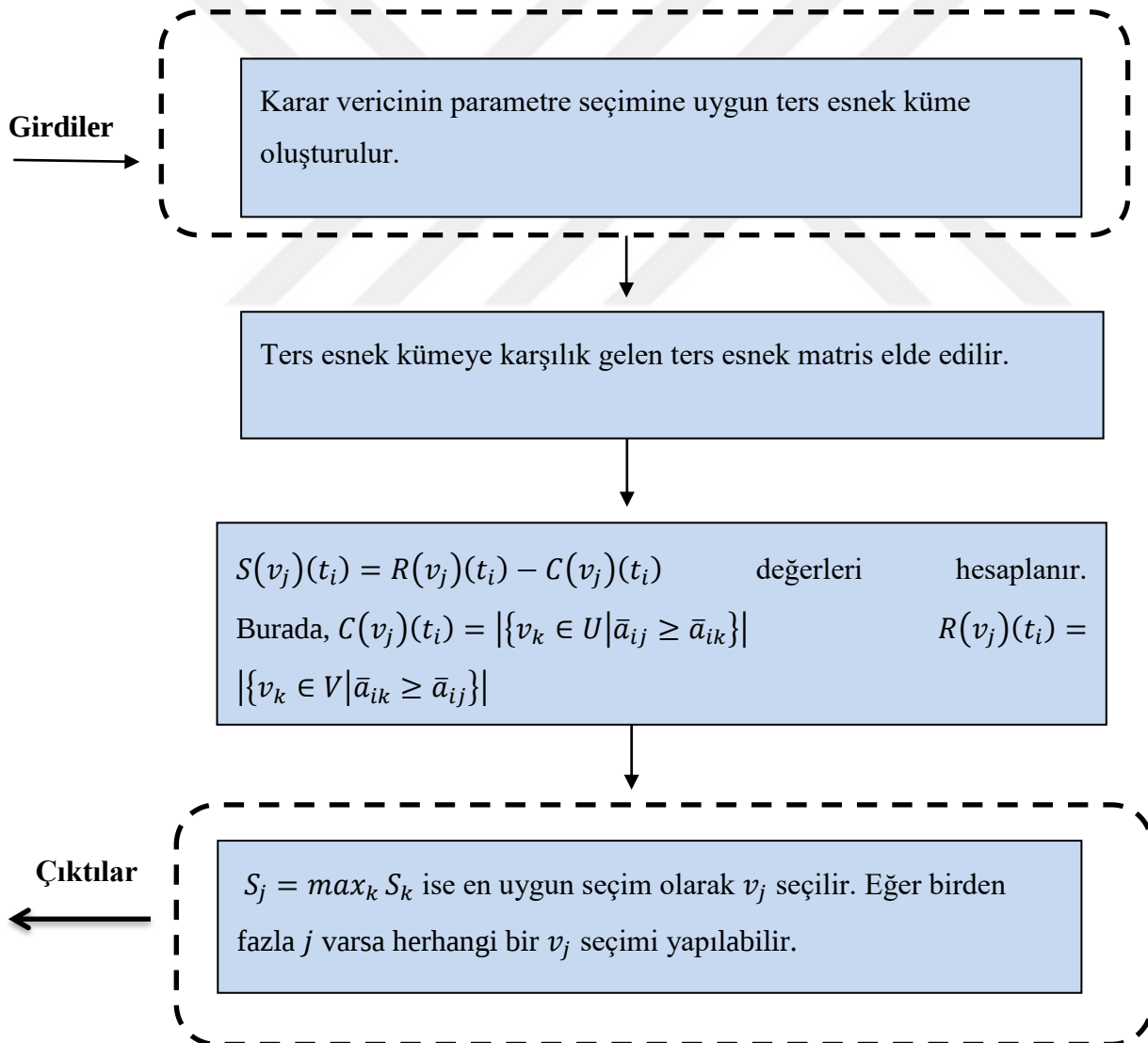
$$R(v_1)(t_1) = |\{v_1, v_2, v_3, v_4\}| = 4 \text{ olur.}$$

$$C(v_1)(t_2) = |\{v_1, v_2, v_3, v_4\}| = 4 \quad R(v_1)(t_2) = |\{v_1\}| = 1$$

Tablo 1. Skor-Değer Tablosu

	v_1	v_2	v_3	v_4
t_1	$R = 4$ $C = 3$ $S = 1$	$R = 4$ $C = 3$ $S = 1$	$R = 1$ $C = 4$ $S = -3$	$R = 4$ $C = 3$ $S = 1$
t_2	$R = 1$ $C = 4$ $S = -3$	$R = 4$ $C = 3$ $S = 1$	$R = 4$ $C = 3$ $S = 1$	$R = 4$ $C = 3$ $S = 1$
t_3	$R = 3$ $C = 4$ $S = -1$	$R = 4$ $C = 1$ $S = 3$	$R = 3$ $C = 4$ $S = -1$	$R = 3$ $C = 4$ $S = -1$
t_4	$R = 4$ $C = 3$ $S = 1$	$R = 3$ $C = 3$ $S = 0$	$R = 3$ $C = 4$ $S = -1$	$R = 3$ $C = 4$ $S = -1$
S_j	$S_1 = -2$	$S_2 = 5$	$S_3 = -4$	$S_4 = 0$

4. $\max_k S_k = S_2$ olduğundan v_2 seçimi en uygun karardır.



Şekil 2. Algoritma 2'nin Yapısı

Algoritma 3. (Çok Katılımcılı Karar Verme)

1. Karar vericiler nesnelere uygun parametreleri seçerler.
2. Ters esnek matrisler $[a_{ij}^1], [a_{ij}^2], \dots, [a_{ij}^n]$ oluşturulur.
3. $[\vartheta_{pj}] = \Lambda_{r_{t=1}}^n [a_{ij}^t]$ ve $[\omega_{ip}] = \tilde{\Gamma}_{t=1}^n [a_{ij}^t]$ bulunur.

(Problem tipine göre $\vee_r, \Lambda_r$ gibi işlemler kullanılabilir)

4. $\kappa_i = (\kappa_i^1, \kappa_i^2, \kappa_i^3)$ bulunur.

5. Optimum küme bulunur ve nesneler sıralanır.

Örnek 4.8. A ve B kişileri arazi satın almak istiyor olsun. A kişisi arazinin ekonomik açıdan değerlendirmesini, B kişisi ise arazinin kullanımı ile ilgili parametreleri belirleyecek olsun.

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ arazilerin kümesi

$T_A = \{t_1^1 = \text{uygun fiyat}, t_2^1 = \text{ulaşım}, t_3^1 = \text{konum}\}$

$T_B = \{t_1^2 = \text{toprak cinsi}, t_2^2 = \text{sulama imkanı}, t_3^2 = \text{arazinin toprak yapısı}\}$

Parametre kümeleri olsun.

1. $\bar{\mathcal{F}}_A = \{(v_1, \{t_1^1, t_2^1\}), (v_2, \{t_1^1, t_3^1\}), (v_3, \{t_2^1\}), (v_4, \{t_1^1, t_2^1, t_3^1\})\}$

$$\bar{\mathcal{F}}_B = \{(v_1, \{t_1^2, t_2^2\}), (v_2, \{t_2^2, t_3^2\}), (v_3, \{t_1^2\}), (v_4, \{t_1^2, t_3^2\})\}$$

2. $[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $[b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sırasıyla $\bar{\mathcal{F}}_A$ ve $\bar{\mathcal{F}}_B$ ye karşılık

gelen esnek matrisler elde edilir.

$$[\vartheta_{pj}] = [a_{ij}] \Lambda_r [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\omega_{ij}] = [a_{ij}] \tilde{\Lambda} [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varsigma_j([\vartheta_{pj}]) = \sum_{p=1}^9 \vartheta_{pj} \quad \varsigma_1 = 4, \varsigma_2 = 4, \varsigma_3 = 1, \varsigma_4 = 6$$

$$3. \quad \kappa^1_1 = 4 \quad \kappa^2_1 = 4 \quad \kappa^3_1 = 4$$

$$\kappa^1_2 = 4 \quad \kappa^2_2 = 4 \quad \kappa^2_3 = 2$$

$$\kappa^1_3 = 1 \quad \kappa^2_3 = 2 \quad \kappa^3_3 = 0$$

$$\kappa^1_4 = 6 \quad \kappa^2_4 = 5 \quad \kappa^3_4 = 4$$

$$\kappa_1 = (4, 4, 4) \quad l^1_1 = 8$$

$$\kappa_2 = (4, 4, 2) \quad l^1_2 = 8$$

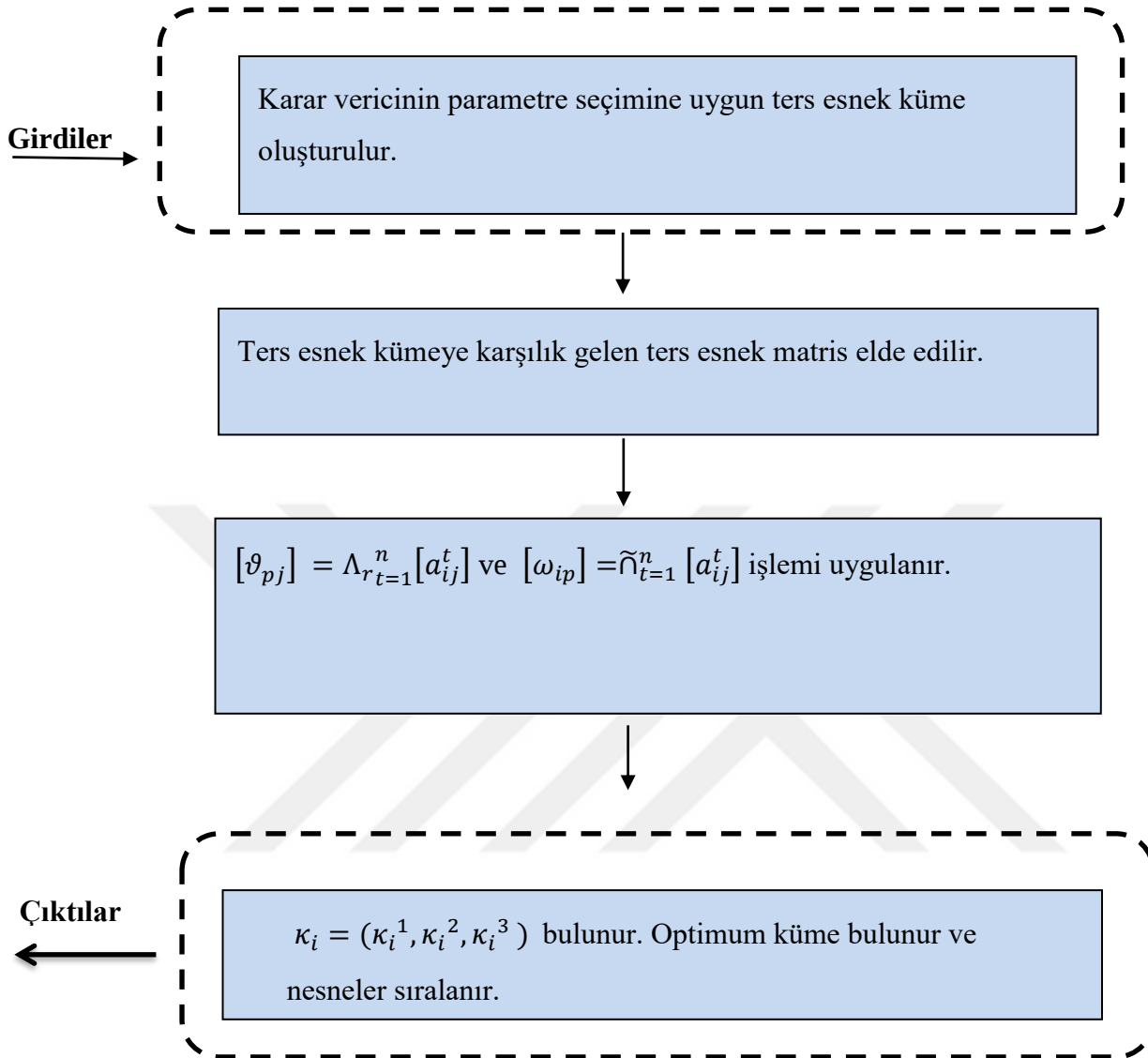
$$\kappa_3 = (1, 2, 0) \quad l^1_3 = 3$$

$$\kappa_4 = (6, 5, 4) \quad l^1_4 = 11$$

$$4. \quad l^1_4 > l^1_1 = l^1_2 > l^1_3 \text{ olduğundan } \kappa_4 > \kappa_1 = \kappa_2 > \kappa_3 \text{ dir.}$$

$$Opt_{\kappa}(V) = \{v_4\}$$

Sonuç olarak en uygun seçim v_4 arazisinin satın alınmasıdır.



Şekil 3. Algoritma 3'ün Yapısı

Algoritma 4. (Sınırlandırılmış Ters Esnek Karar Verme Algoritması)

1. Karar vericiler nesnelere uygun parametreleri seçerler.
2. Ters esnek matrisler $[a_{ij}^1], [a_{ij}^2], \dots, [a_{ij}^n]$ oluşturulur.
3. $\bar{\alpha}$ kümesine göre, $\bar{\alpha}$ – ters kesişim ters esnek matrisleri

$[a_{ij}^1]^{\cap \bar{\alpha}_1}, [a_{ij}^2]^{\cap \bar{\alpha}_2}, \dots, [a_{ij}^n]^{\cap \bar{\alpha}_n}$ oluşturulur. (Problemin gerektirdiği duruma göre $\bar{\alpha}$ – üst ters esnek matrisi, $\bar{\alpha}$ – alt ters esnek matrisi veya $\bar{\alpha}$ – ters birleşim ters esnek matrisi kullanılabilir.)

4. $[\vartheta_{pj}] = \Lambda_{r_{t=1}}^n [a_{ij}^t]^{\cap \bar{\alpha}_t}$ ve $[\omega_{ij}] = \tilde{\cap}_{t=1}^n [a_{ij}^t]^{\cap \bar{\alpha}_t}$ bulunur. (Problemin tipine göre $\vee_r$, $\wedge_r$ gibi işlemler kullanılabilir)
5. $\kappa_i = (\kappa_i^1, \kappa_i^2, \kappa_i^3)$ bulunur. Optimum küme bulunur ve nesneler sıralanır.

Örnek 4.9. Örnek 4.8’de verilen ters esnek kümeleri ve ters esnek matrisleri dikkate alalım. A kişisi için $\bar{\alpha}_1 = \{t_2^1\}$, B kişisi için ise $\bar{\alpha}_2 = \{t_3^2\}$ parametreleri öncelikli olsun.

1. $\bar{\mathcal{F}}_A = \{(v_1, \{t_1^1, t_2^1\}), (v_2, \{t_1^1, t_3^1\}), (v_3, \{t_2^1\}), (v_4, \{t_1^1, t_2^1, t_3^1\})\}$

$\bar{\mathcal{F}}_B = \{(v_1, \{t_1^2, t_2^2\}), (v_2, \{t_2^2, t_3^2\}), (v_3, \{t_1^2\}), (v_4, \{t_1^2, t_3^2\})\}$

2. $[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $[b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $[a_{ij}]^{\cap \bar{\alpha}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $[b_{ij}]^{\cap \bar{\alpha}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $[\vartheta_{pj}] = [a_{ij}]^{\cap \bar{\alpha}_1} \wedge_r [b_{ij}]^{\cap \bar{\alpha}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$[\omega_{ij}] = [a_{ij}]^{\cap \bar{\alpha}_1} \tilde{\cap} [b_{ij}]^{\cap \bar{\alpha}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\kappa^1_1 = 0$ $\kappa^2_1 = 2$ $\kappa^3_1 = 0$

$\kappa^1_2 = 0$ $\kappa^2_2 = 2$ $\kappa^3_2 = 0$

$\kappa^1_3 = 0$ $\kappa^2_3 = 1$ $\kappa^3_3 = 0$

$$\kappa_4^1 = 6 \quad \kappa_4^2 = 5 \quad \kappa_4^3 = 4$$

$$\kappa_1 = (0, 2, 0) \quad l_1^1 = 2$$

$$\kappa_2 = (0, 2, 0) \quad l_2^1 = 2$$

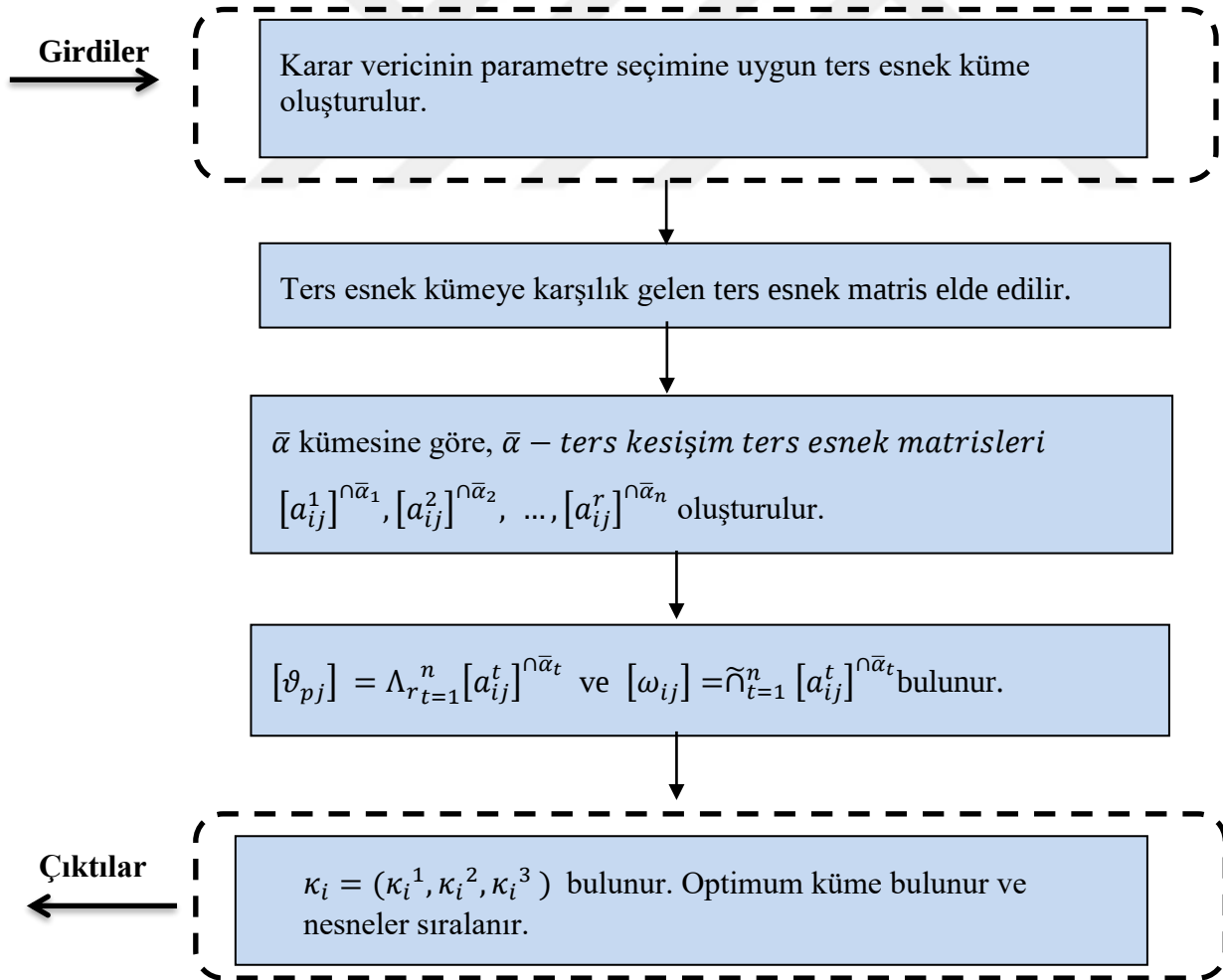
$$\kappa_3 = (0, 1, 0) \quad l_3^1 = 1$$

$$\kappa_4 = (6, 5, 4) \quad l_4^1 = 11$$

6. $l_4^1 > l_1^1 = l_2^1 > l_3^1$ olduğundan $\kappa_4 > \kappa_1 = \kappa_2 > \kappa_3$ dir.

$$Opt_{\kappa}(V) = \{v_4\}$$

Sonuç olarak en uygun seçim v_4 arazisinin satın alınmasıdır.



Şekil 4. Algoritma 4'ün Yapısı

Sınırlandırılmalı ters esnek kümenin gerçek yaşamda var olan problemde kullanımı üzerine aşağıdaki örnek durumları inceleyelim.

Örneğin; E-ticaret sitelerinden alışveriş yaparken seçilen bir ürün kategorisi için belirli filtrelerin\parametrelerin uygulanması seçeneklerin azalmasını sağlar. Fakat bu filtrelerin\parametrelerin uygulanmasında bazı sınırlamalar mevcuttur. Örneğin, parametreler seçilirken bir öncelik (olmazsa olmaz kriterler) veya parametrelerin önem katsayısının dikkate alınması söz konusu değildir. Örnek ile açıklamak gerekirse bir cep telefonunda kamera kalitesinin 100MP ve üzeri ve rengin siyah olması olmazsa olmaz parametreler (kısıtlama parametreleri) olarak tercih edilebilir fakat seçilen diğer parametreler için bu kısıtlama durumu söz konusu olmayabilir. Şöyle ki dahili hafıza için 128GB ve üzeri, pil gücü 5000 mAh ve üstü, ekran boyutu 6.5 inç ve üzeri seçildiğinde bu parametreler kısıtlama olarak belirlenmediği için bu parametrelerden çoğunu sağlayan telefon satın alınabilir. Bu durumda dahili hafızası 64GB, pil gücü 5000 mAh ve ekran boyutu 6.5 inç olan bir telefon da satın alınabilir fakat satın alınan telefonun kesinlikle rengi siyah ve kamera kalitesi 100MP ve üzeri olmalıdır. (Bu örnekte, satın alınan telefonun pil gücü, ekran boyutu ve dahili hafıza parametrelerinin hepsini değil (diğer adaylara göre) çoğunu sağladığı fakat kısıtlama parametrelerinin hepsini sağladığı vurgulanmaktadır.) Ayrıca, alışveriş sitelerinin mevcut filtreleme sistemi farklı kategoride alınabilecek ürünlerin ortak parametre kısıtlamasıyla filtrelenmesine çok elverişli değildir. Farklı kategorilerde fakat benzer parametrelerle filtrelenebilecek veya aynı anda benzer özellikli ürünlerin belirlenmesi alışveriş sitelerinin mevcut sistemiyle mümkün değildir. Çünkü mevcut sistemde ilk olarak kişiye ürün veya kategori seçmesi önerilmektedir.

Aşağıda cep telefonu ve bilgisayarı aynı anda almak isteyen bir kişinin seçtiği parametrelere uygun sonuçlar verilmiştir. Cep telefonlarının bulunduğu ters esnek küme $\bar{C}$, bilgisayarların kümesi $\bar{B}$ ve seçilen parametreler $T = \{t_1 = \text{Ram kapasitesi}, t_2 = 4 \text{ yıldız ve üzeri}, t_3 = \text{marka}\}$ olarak düşünülebilir. Bu parametreler arasından “ $t_2 = 4 \text{ yıldız ve üzeri}$ ” ve $t_3 = \text{marka}$ parametreleri kısıtlama olarak belirlenir yani $\bar{\alpha} = \{t_2, t_3\}$ oluşturulur. Bu kısıtlamalar ile sistem bütün telefonlar ve bilgisayarlar kümesinden aynı anda elemeler yapar. Daha sonra diğer filtrelemeler (kısıtlama olmayan parametreler) kullanır, kısıtlama parametreleri ortak iken parametreler değişebilmektedir (8GB RAM, 16GB RAM gibi).

Mevcut sistem, telefon ve bilgisayarların kısıtlama parametreler ve diğer parametreler kullanılarak aynı anda değerlendirilmesi için de uygun değildir. Telefon ve bilgisayar kümeleri için kısıtlamalı ters esnek kümelerin oluşturulması ve aynı anda değerlendirme ve karar verme süreci için bir karar verme algoritmasının oluşturulmasının ters esnek küme temelli karar vermeye hem teoride hem de uygulamada faydalı olacağını düşünmekteyiz.

Birçok online alışveriş sitesinin mevcut sisteminde yukarıda şekillerdeki gibi filtreleme olanağı sunulmakta fakat kısıtlama seçeneği mevcut değildir. Oysaki satın alıcılar için parametrelerin önemi farklılık gösterebilir. Ayrıca, aynı kısıtlamalı parametreleri sağlayan farklı ürünleri aynı anda değerlendirme imkanının sunulması avantajlı olacaktır. Bu sebepten değerlendirme sürecinde satın alıcıya kısıtlama parametreleri seçtirilip daha sonra filtreleme yapılması satın alıcının daha doğru seçeneğe yönelmesine dolaylı olarak müşteri memnuniyetine katkı sunacaktır. Özetle, yukarıdaki şekillerde sol üst köşede sunulan seçili filtreler iki başlık altında sunulmalıdır: Seçili kısıtlamalar ve seçili filtreler (Bu filtreleme sonucunda “Aradığınız ürün bulunamamaktadır” şeklinde bir uyarı çıktığında seçili kısıtlamalar değiştirilmez fakat seçili filtreler indirgenebilir). Bu seçimlerden sonra değerlendirme yapıp (ters esnek küme yapısında) karar verme süreci tamamlanmalıdır.

KAYNAKLAR

1. Molodtsov, D. 1999. Soft set theory-first results. **Computers and Mathematics with Applications** 37: 19-31.
2. Molodtsov, D. 2004. The Theory of Soft Sets. **URRS Puplichers., Moscow (in Russian)**
3. Maji, P.K. , Roy, A.R. and Biswas, R. 2002. An application of soft sets in a decision making problem, **Computers and Mathematics with Applications** 44 1077–1083.
4. Maji, P.K., Biswas, R., Roy, A.R. 2003. Soft set theory. **Computers and Mathematics with Applications** 45 : 555–562.
5. Pei, D. and Miao, D. 2005. From soft sets to information systems. **IEEE International Conference on Granular Computing**, 2, 617-621.
6. Aktaş, H., Çağman, N. 2007. Soft sets and soft groups. **Inform Sci.** 177 : 2726-2735
7. Ali, M.I., Feng, F., Liu X., Min, W.K. and Shabir, M., 2009. On some new operations in soft set theory . **Computers and Mathematics with Applications**, 57, pp. 1547-1553.
8. Sezgin, A., Atagün, A.O. 2011. On operations of soft sets. **Computers and Mathematics with Applications** 61: 1457–1467.
9. Ali, M.I., Shabir, M., and Naz, M., 2011. Algerraic strutures of soft sets assoicated with new operations. **Computers and Mathematics with Applications**, 61 (9), 2647-2654.
10. Çağman, N. and Enginoğlu, S., 2010. Soft set theory and uni-int decision making, **European J. Oper. Res.**, 207 pp. 848-855.
11. Atagün, A.O., Kamacı, H. and Oktay, O., 2018, Reduced soft matrices and generalized products with applications in decision making, **Neural Comput Applic** 29, 445–456.

12. Kamacı, H., Atagün, A. O., Sönmezoğlu, A., 2018, Row-products of soft matrices with applications in multiple-disjoint decision making, **Applied Soft Computing** **62**, 892-914.
13. Atagün, A. O., and Kamacı, H., 2021. Decompositions of soft sets and soft matrices with applications in group decision making. **Scientia Iranica** **31**(6), 518-534.
14. Feng, F., Jun, Y.B., Zhao, X. 2008. Soft semirings. **Computers and Mathematics with Applications** **56** 2621–2628.
15. Çağman, N., Enginoğlu, S. 2010. Soft matrix theory and its decision making. **Computers and Mathematics with Applications** **59** : 3308-3314
16. Qin, K., Yang, J. and Zhang, X., 2012. Soft set approaches to decision making problems, **in: Proc. 7nd International Conference on Rough Set and Knowledge Technology RSKT**, Chengdu, China, 2012, 456-464.
17. Sezer, A. S., Çağman, N., Atagün, A. O., Ali, M. I., and Türkmen, E., 2015. Soft Intersection Semigroups, Ideals and Bi-Ideals;: a New Application on Semigroup Theory I. **Filomat**, 29(5), 917–946.
18. Aykut, H., Atagün, A.O., and Kamacı, H., 2023. The restrictive sets and their applications to soft group theory. **Annals of Mathematics and Computer Science** **13**, 25-41.
19. Çetkin, V., Aygünouğlu, A. and Aygün, H. 2016. A new approach in handling soft decision making problems. **Journal of Nonlinear Science Applications** **9**, pp. 231-239.
20. Kamacı, H., Saltık, K, Akız, H.F. and Atagün, A.O., 2018. Cardinality inverse soft matrix theory and its applications in multicriteria group decision making **Journal of Intelligent and Fuzzy Systems**, **34** , pp. 2031-2049.
21. Kamacı, H. and Petchimuthu, S., 2019. The row-products of inverse soft matrices in multicriteria decision making. **Journal of Intelligent and Fuzzy Systems**, **36** , pp. 6425-6441

22. Aygün, E., Ateş, R. ve Erdiñ, S., 2021. Ters esnek matrislerde çoklu karar verme metodu, **Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi** , vol.37, no.2, pp.249-259.
23. Erdiñ, S., and Aygün, E. 2024. Score-Valued Decision Making Models Based on Inverse Soft Matrices. **Sahand Communications in Mathematical Analysis**, doi: 10.22130/scma.2023.1987342.1234
24. Çağman, N. and Enginouglu, S. 2010. Soft matrix theory and its decision making. **Computers and Mathematics with Applications** 59(10) pp. 3308-3314.
25. Atagün, A.O., Aygün, E. 2016. Groups of soft sets. **Journal of Intelligent and Fuzzy Systems**. 30 : 729-733
26. Atagün A.O. ,Sezgin, A. 2011. Soft substructures of rings, fields and modules. **Comput. Math. Appl.**, 61 (3) : 592-601.
27. Khalil ,A.M. and Hassan, N., 2019. Inverse fuzzy soft set and its application in decision making. **International Journal of Information and Decision Sciences**, 11, pp. 73-92.
28. Chen, D., Tsang, E.C.C ,Yeung, D.S. and Wang, X. 2002. The parametrization reduction of soft sets and its applications. **Computers and Mathematics with Applications** 44 1077–1083.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Seda ERDİNÇ
Uyruğu: Türkiye (TC)

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü	2018
Lisans	EÜ Fen Fakültesi	2015
Lise	Atatürk Çok Programlı Lisesi, Sivas	2010

YABANCI DİL

İngilizce

YAYINLAR

1. Aygün, E., ve Akbulut, S., (2019). AES Şifreleme ve Esnek Kümeler Yardımıyla Elde Edilen Yeni Bir Kriptosistem. Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri Dergisi , vol.35, no.1, 33-40.
2. Aygün, E., Ateş, R. ve Erdinç, S., (2021) "Ters Esnek Matrislerde Çoklu Karar Verme Metodu," Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi , vol.37, no.2, pp.249-259.
3. Erdinç, S., and Aygün, E. (2024). Score-Valued Decision Making Models Based on Inverse Soft Matrices. *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, (), -. doi: 10.22130/scma.2023.1987342.1234