

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRAL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Büşra ÇELEBİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Doç. Dr. Sebahat Ebru DAŞ

Temmuz, 2024

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRAL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Büşra ÇELEBİ tarafından hazırlanan tez çalışması 18.07.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Sebahat Ebru DAŞ
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Sebahat Ebru DAŞ, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Pınar ALBAYRAK, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Meltem UZUN, Üye
İstanbul Gelişim Üniversitesi

Danışmanım Doç. Dr. Sebahat Ebru DAŞ sorumluluğunda tarafımca hazırlanan “İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümleri” başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Büşra ÇELEBİ

İmza

Çok kıymetli canım aileme...

TEŞEKKÜR

Öncelikle bu tezi hazırlarken her konuda desteklerini esirgemeyen değerli bilgi birikimiyle kıymetli tez danışmanım Doç. Dr. Sebahat Ebru DAŞ'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca her zaman yanımda olan aileme özellikle tüm eğitim ve öğretim hayatımda her türlü desteği esirgemeyen rahmetli babam Tahsin ÇELEBİ'ye ve bana Dünya'da cenneti sunan gecesini gündüzüne katan yeryüzündeki melek canım annem Fatma ÇELEBİ'ye çok ama çok teşekkür ederim.

Büşra ÇELEBİ

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vii
KISALTMA LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
TABLO LİSTESİ	x
ÖZET	xi
ABSTRACT	xiii
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	6
1.3 Hipotez	7
2 ÖZEL FONKSİYONLAR	8
2.1 Gama Fonksiyonu	8
2.2 Beta Fonksiyonu	9
2.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu.....	10
3 KESİRLİ İNTEGRAL VE TÜREV	11
3.1 Kesirli Analizin Tarihçesi ve Uygulama Alanları.....	11
3.2 Temel Kesirli İntegral ve Türev Tanımları	13
3.2.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegral ve Türevi.....	13
3.2.2 Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi	14
3.2.3 Caputo Kesirli Türevi.....	14
4 İNTEGRAL DENKLEMLER	16
4.1 İntegral Denklem.....	17
4.2 İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması	17
4.2.1 Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler	18
4.2.2 Tekil ve Tekil Olmayan İntegral Denklemler.....	18
4.2.3 Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler	18
4.2.4 Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri	19
5 HERMİT POLİNOMLARI	21
5.1 Hermit Diferansiyel Denklemi.....	21
5.2 Hermit Polinomlarının Bazı Temel Özellikleri.....	28
5.2.1 Üretici Fonksiyon.....	28
5.2.2 $H_n(x)$ için Rekürans Bağlantıları	29

5.2.3	Rodriguez Formülü	32
5.2.4	Ortogonallik	33
6	HERMİT SIRALAMA YÖNTEMİ	35
6.1	$D(x)$ Matris Gösterimi	35
6.2	$D^\alpha(x)$ Matris Gösterimi	39
6.3	$I(x)$ Matris Gösterimi	39
6.4	Başlangıç Koşullarının Matris Gösterimi	41
6.5	Yöntemin Matris Formunun Elde Edilmesi	42
7	SONUÇ	44
	KAYNAKÇA	53
	TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	60



SİMGE LİSTESİ

$B(x, y)$	Beta fonksiyonu
$D_t^\alpha f(x)$	Caputo Kesirli Türevi
$K(x, t)$	Çekirdek fonksiyonu
$\Gamma(x)$	Gama fonksiyonu
$E_{\alpha, \beta}(x)$	Genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu
$D_x^\alpha f(x)$	Grünwald-Letkinov Kesirli Türevi
$H_n(x)$	Hermit polinomu
${}_c D_x^{-\nu} f(x)$	Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$D^u f(x)$	Riemann-Liouville Kesirli Türevi

KISALTMA LİSTESİ

GKİDD	Genelleştirilmiş Kesirli İntegro Diferansiyel Denklemler
KDD	Kesirli Diferansiyel Denklemler
KDDY	Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi
KFİDD	Kesirli Fredholm İntegro Diferansiyel Denklemi
KİDD	Kesirli İntegro Diferansiyel Denklemi
KVİDD	Kesirli Volterra İntegro Diferansiyel Denklemi
MLDD	Müntz-Legendre Dalgacık Dönüşümü
RHFY	Rasyonelleştirilmiş Haar Fonksiyonları Yöntemi
SDP	Sınır Değer Problemleri
SKİDD	Stokastik Kesirli İntegro Diferansiyel Denklemi
ŞFM	Şapka Fonksiyonlarının Modifikasyonu
YDTF	Yerel Dairesel Taban Fonksiyonu Yöntemi
ZTİDD	Zayıf Tekil İntegral Diferansiyel Denklemi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	Gama fonksiyonunun grafiği	9
Şekil 3.1	Kesirli analiz alanındaki önde gelen bilim insanlarının zaman çizelgesi	12
Şekil 5.1	Charles Hermite (24 Aralık 1822 - 14 Ocak 1901, Fransa).....	21
Şekil 5.2	Hermit polinomlarının grafiği.....	28
Şekil 7.1	N=4 için yaklaşık ve tam çözüm grafikleri.....	47
Şekil 7.2	N=2 için yaklaşık ve tam çözüm grafikleri.....	51
Şekil 7.3	N=4 için yaklaşık ve tam çözüm grafikleri.....	51
Şekil 7.4	N=2 ve $\alpha=0.2$ için yaklaşık ve tam çözüm grafikleri.....	52
Şekil 7.5	N=4 ve $\alpha=0.2$ için yaklaşık ve tam çözüm grafikleri.....	52

TABLO LİSTESİ

Tablo 3.1 Bazı polinomların Caputo türevleri	15
Tablo 5.1 Bazı temel seri özellikleri	25
Tablo 7.1 $N=2,4$ ve 6 için yaklaşık çözümlerle tam çözümün karşılaştırması ve mutlak hata değerleri.....	46
Tablo 7.1 $N=2,4$ ve 6 için yaklaşık çözümlerle tam çözümün karşılaştırması ve mutlak hata değerleri (devamı)	47
Tablo 7.2 $N=2,4$ ve 6 için yaklaşık çözümlerle tam çözümün karşılaştırması ve mutlak hata değerleri.....	50
Tablo 7.3 $N=4$ 'te $\alpha=0.2, 0.4, 0.6$ ve 0.8 için yaklaşık çözümlerle tam çözümün karşılaştırması	50

İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümleri

Büşra ÇELEBİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Sebahat Ebru DAŞ

Bilindiği gibi nüfus artışından ısı dağılımına, elektrik iletiminden genetiğe kadar sayısız alanda karşılaştığımız birçok problem diferansiyel ya da integral denklemler gibi denklemlerin yardımıyla modellenerek çözüme kavuşmaktadır. Kesirli analizin ortaya çıkmasıyla kesirli diferansiyel ve kesirli integral denklemler de bu gruba katılmıştır. Bu tür problemlerin çoğu zaman tam çözümü olmadığından ancak nümerik çözüm yöntemleri yardımıyla yaklaşık olarak çözülebilmektedirler. Bu tezde, iyi bilinen kesirli türev tanımlarından olan Caputo kesirli türeviyle verilen bir kesirli Fredholm-integro diferansiyel denklem sınıfının yaklaşık çözümü Hermit Sıralama Yöntemi yardımıyla elde edilmiştir.

Tezin ilk bölümünde konunun literatür taraması, tezin amacı ve hipotezi verilmiştir. İkinci bölümünde, tezde kullanılan bazı özel fonksiyonlar ve özellikleri tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde, bilinen belli başlı kesirli türev ve integral kavramları ve tarihçeleri hakkında bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise, integral denklemlerin sınıflandırılması yapılmıştır. Beşinci bölümde, Hermit polinomlarının ortaya çıkışı, farklı ifade edilişleri ve belli başlı özellikleri ifade edilmiştir. Altıncı bölümde, Hermit Sıralama Yöntemi tanıtılıp ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Yedinci bölümde ise, yöntem bazı test problemlerine uygulanarak yaklaşık çözümleri elde

edilmiştir. Farklı değerler için çözümler irdelenmiş, bunlarla ilgili tablo ve şekiller verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İntegral denklemler, Hermit polinomu, sıralama yöntemi, kesirli türev.



Numerical Solutions of Integral Equations

Büşra ÇELEBİ

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Supervisor: Assoc. Dr. Sebahat Ebru DAŞ

It is known that many problems we encounter in numerous fields, from population growth to heat distribution, from electricity transmission to genetics, are solved by modeling them via such as differential or integral equations. With the arising of fractional calculus, fractional differential and fractional integral equations also joined this group. Since most of such problems do not have exact solutions, they can only be solved approximately using the numerical methods.

In this thesis, the approximate solution of a class of fractional Fredholm-integro differential equations given by Caputo fractional derivative, one of the well-known fractional derivative definitions, was obtained with the help of the Hermit Collocation Method.

In chapter I of the thesis, the literature review of the subject, the aim and hypothesis of the thesis are given. In chapter II, some special functions and their properties which used in the thesis are introduced. In chapter III, the well known fractional derivative and integral definitions are given with their history. In chapter IV, integral equations are classified. In chapter V, the emergence of Hermit polynomials, their different expressions and properties are explained. In chapter VI, Hermit Collocation Method is introduced and explained in detail. In chapter VII, the method is applied to some test problems and approximate solutions are obtained.

Solutions for different values are examined and relevant tables and figures are given.

Keywords: Integral equations, Hermite polynomials, collocation method, fractional derivative.



1.1 Literatür Özeti

Son yıllarda birçok matematikçi ve araştırmacı kesirli analiz konusunda çok sayıda değerli çalışmalar yapmışlardır. Örneğin, Yousefi, Javadi ve Babolian [1] adlı çalışmalarında kesirli mertebeden Volterra integral denkleminin nümerik çözümü üzerinde çalışmışlardır. Yaklaşık çözüm için Legendre Sıralama Yöntemini kullanmışlardır. Daha sonrasında ise memnun edici yakınsama oranları elde etmişlerdir. [2] çalışmasında ise Haotao ve Yanping zayıf tekil çekirdekli kesirli mertebeden Volterra integral denkleminin çözüm yaklaşımı için Chebyshev tipindeki kesirli mertebeden Lagrange interpolasyon fonksiyonunu baz alınarak sıralama yöntemi uygulanmıştır. Radmanesha ve Ebadi [3]'te değişken mertebeli kesirli evrim denklemlerinin çözümünde Yerel Dairesel Taban Fonksiyonu Yöntemini (YDTF) kullanmışlardır. Zaman değişkenini ayırtırmak için uygun bir sonlu fark tekniği kullanılarak, denklemi çözmek için YDTF uygulanmıştır. Bu yöntem diğer yöntemlere göre daha hızlı ve etkin sonuçlar vermiştir. Rashidinia, Eftekhari ve Maleknejad [4] adlı çalışmasında iki boyutlu doğrusal olmayan kesirli Volterra ve Fredholm integral denklemlerinin yaklaşık çözümlerine sayısal bir yöntem sunulmaktadır. İki değişkenli kaydırılmış Jacobi polinomlarına dayalı olarak kesirli dereceli entegrasyon ve çarpımın yeni operasyonel matrisleri türetilir. Elde edilen matrisler, çalışma kapsamındaki denklemleri doğrusal veya doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemlerine indirmek için kullanılır. Daha sonra ortaya çıkan sistemler Newton Yöntemiyle çözülebilir. Önerilen yöntemin hata sınırı ve yakınsama analizine ilişkin tartışma sunulmaktadır. Wang, Liu ve Zhang [5] çalışmasında kesik psi serisi çözümünün doğruluğunu ve Abel integral denklemini çözmek için tekillik ayrımı ile parçalı ve küresel sıralama yöntemlerinin etkinliğini doğrulamaktadır. Xu ve Zheng [6]'da ilk olarak Jacobi polinomlarının kesirli türevi için analitik formülleri türetilmiştir. Genelleştirilmiş kesirli operatörler için değişken dönüşüm tekniği aracılığıyla Spektral Yaklaşım Yöntemi önerilmiştir. Genelleştirilmiş kesirli operatörler için operasyonel matrisler türetilmiş ve farklı kesirli operatörlere sahip diferansiyel ve integral denklemler için Spektral Sıralama Yöntemleri önerilmiştir. Son olarak yöntem genelleştirilmiş

kesirli adi diferansiyel denklem ve Hadamard tipi integral denklemlere uygulanarak yöntemin üstel yakınsaması doğrulanmıştır. [7]'de Yousefi, Javadi ve Babolian, Legendre-Gauss-Lobatto noktasını kullanarak bir cebirsel denklem sistemi türettirler. Bu yöntem uygulamalarla gösterildi ve elde edilen sonuçlar kesin çözümleriyle karşılaştırıldı. Elde edilen sayısal sonuçlar, önerilen yöntemin ikinci tür kesirli integral denklemler için etkili ve doğru olduğunu gösterildi. Eslahchi, Dehghan ve Parvizi [8]'de sıralama yöntemi kullanılarak doğrusal olmayan kesirli integral diferansiyel denklemleri çözülmüştür. Bu yöntemin yakınsama ve kararlılık analizi incelenerek sayısal örnekler verilmiştir. Sharma, Pandey ve Kumar [9]'da B-operatörleri açısından tanımlanan bazı genelleştirilmiş kesirli integral diferansiyel denklemler (GKİDD) sınıfları için sayısal yaklaşım üzerinde çalışılmıştır. GKİDD'in doğrusal ve doğrusal olmayan formları için sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Legendre polinomları, yakınsama analizi ile sonlu boyutlu uzayda çözüme yaklaşmak için kullanılır. Elde edilen yaklaşık çözüm, özel bir durumda Caputo türevleri kullanılarak tanımlanan kesirli integral diferansiyel denklemin (KİDD) çözümünü kurtarır. Konvolüsyon tipi çekirdekler içeren KİDD'ler, bilim ve mühendislik uygulamalarının çeşitli alanlarında karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle sayısal incelemelerin gerçekleştirilmesi için B-operatöründeki çekirdeği değiştiren bazı test örneklerini dikkate almışlardır. [10]'da Nemati, Lima ve Sedaghat, kesirli gecikmiş integral diferansiyel denklem sınıfını çözmek için Gauss-Jacobi kareleme formülüyle birleştirilmiş Legendre dalgacığına dayalı bir sıralama yöntemi sunmuştur. Problem başlangıç veya sınır koşullarıyla ele alınmakta ve Caputo kesirli türevi kullanılmıştır. [11]'de Taheri, Javadi ve Babolian, Stokastik kesirli integral diferansiyel denklemleri (SKİDD) çözmek için kaydırılmış Legendre Spektral Sıralama Yöntemini önermektedir. Sunulan yöntemin temel özelliği, SKİDD'leri cebirsel denklemler sistemine indirgemesidir. Böylece problemi Newton Yöntemiyle çözebilir. Ayrıca yaklaşımın yakınsama analizi de dikkate alınmaktadır. [12]'de Jebreen ve Dassios, kesirli Fredholm integral diferansiyel denklemlerine (KFİDD) Dalgacık Sıralama Yöntemini kullanarak yaklaşık bir çözüm bulmak için algoritma önermişlerdir. Bunu yapmak için istenen denklemi eşdeğer bir doğrusal veya doğrusal olmayan zayıf tekil Volterra-Fredholm integral denklemine indirgemişlerdir. Bu integral denklemi çözmek için Müntz-Legendre dalgacıklarına değinerek kesirli integral operatörü matris olarak temsil edildikten sonra doğrusal olmayan veya doğrusal

cebirsal denklemlerden oluşan bir sistem elde etmek için Dalgacık Sıralama Yöntemini uygulamışlardır. Ma ve Huang [13]'te genel doğrusal kesirli integral diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için bir Spektral Jacobi Sıralama Yöntemi önermiş ve analiz etmişlerdir. Denklemin tanımlanan aralıkta bir Volterra integral denklemine dönüştürülmesi için gereken bazı fonksiyon ve değişken dönüşümleri verilmiştir. Daha sonra sıralama düğümleri olarak Jacobi-Gauss noktaları kullanılmış ve integral denkleme yaklaşmak için Jacobi-Gauss kareleme formülü kullanılır. Ardından önerilen yöntemin yakınsama sırası sonsuzluk normunda incelenmiştir. Son olarak önerilen yöntemin etkinliğini göstermek için bazı sayısal sonuçlar verilmiştir. Shi [14]'te zayıf çekirdekli kesirli integral diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için bir spektral yaklaşım önermiş ve analiz etmiştir. Denklemler ilk olarak düzgün olmayan çözümlere sahip eşdeğer zayıf tekil Volterra integral denklemine dönüştürülür. Çözümün tekilliğini ortadan kaldırmak için, bazı uygun dönüşümler sunulur ve ardından elde edilen denklemi yaklaşık olarak hesaplamak için Jacobi Spektral Sıralama Yöntemini kullanılır. Daha sonra spektral önerilen yöntemin doğruluğu sonsuz normda araştırılmıştır. [15]'te Jebreen, kesirli türevlerle zayıf tekil integral diferansiyel denklemleri (ZTİDD) çözmek için bir Dalgacık Sıralama Yöntemi sunmuştur. Yaklaşım, istenen denklemin ona karşılık gelen Volterra integral denklemine indirgenmesine dayanmaktadır. Müntz-Legendre dalgacık dönüşümünü (MLDD) tanıtmış ve bunun için kesirli bir entegrasyon işlem matrisi oluşturmuştur. Elde edilen integral denklem, sıralama yöntemi ve kesirli entegrasyonun operasyonel matrisi kullanılarak doğrusal olmayan cebirsel denklemler sistemine indirgeyip sunulan yöntemin hata sınırı araştırılmıştır. Amin, Ahmad, Shah, Hafeez ve Sumelka [16]'da doğrusal olmayan Volterra-Fredholm kesirli integro-diferansiyel denklemler sınıfı hem teorik hem de hesaplama açısından dikkate alırlar. İlgili teorik sonuçlar, sabit nokta yaklaşımı yoluyla bir çözümün varlığına ayrılmıştır. Ayrıca, hesaplama açısından Haar dalgacık sıralamasının önerilen metodolojisidir. Bu yöntem doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemini en aza indirir. Sonuç olarak uygulanan Haar yönteminin etkili olduğu ve farklı sıralama noktaları için yakınsama oranının kabaca 2'ye eşit olduğu gösterilmiştir. [17]'de Singh ve Mehra, Stokastik kesirli integral diferansiyel denklemlerin çözümündeki belirsizliği ölçmek için etkili bir sayısal yöntem sunmayı amaçlamıştır. Bu sayısal yöntem, Legendre polinomlarına ve bunların deterministik ve stokastik operasyonel

entegrasyon matrisine dayanan bir dalgacık sıralama yöntemidir. Son olarak gerçek dünya uygulamasına ilişkin olarak bir borsa modeli simüle edilmiş ve sonuçlar gösterilmiştir. [18]'de Kumar ve Agrawal bir kesirli diferansiyel denklemler (KDD) sınıfı Caputo tipi kesirli türev cinsinden ifade edilir. Bu çalışmada toplam zaman bir dizi küçük aralığa bölünmüş ve birbirini takip eden iki aralık arasında bilinmeyen fonksiyonlara ikinci dereceden hesaplamalar kullanılarak yaklaşılmıştır. Yöntem doğrusal ve doğrusal olmayan iki tür KDD'yi çözmek için uygulanır. Paul, L. Mishra ve V. Mishra [19] nolu çalışmalarında hem birinci türden hem de ikinci türden kesirli integral denklemleri çözmek için Laguerre ve Touchard polinomlarına dayanan iki sayısal yöntem tanıtmışlardır. Kesirli integraller Erdelyi-Kober anlamında tanımlanmaktadır. Her iki integral denklem de Laguerre ve Touchard matrisleri kullanılarak cebirsel bir doğrusal denklem sistemine dönüştürülür. [20]'de Sun ve Zhu, değişken mertebeli kesirli integral diferansiyel denklem sınıfının çözümü için Chebyshev polinomlarını incelemektir. Chebyshev polinomlarının özellikleri dört tür operasyonel matrisiyle birlikte problemi bir cebirsel denklem sisteminin çözümüne indirgemek için kullanılır. Cebirsel denklemlerin çözülmesiyle sayısal çözümler elde edilir. [21]'de Najafalizadeh ve Ezzati, iki boyutlu kesirli integral işlem matrisi oluşturmak ve bunun iki boyutlu kesirli integral denklemlerin sayısal çözümünde kullanmıştır. İki boyutlu kesirli integral denklemleri bir cebirsel denklem sistemine indirgemek için bu operasyonel matrisleri ve iki boyutlu blok darbe fonksiyonlarının özelliklerini kullanmıştır. Cebirsel sistem doğrusal veya doğrusal olmayan olabilir. Daha sonra önerilen yöntemlerin yakınsaması gösterilir ve hata sınırları bulunur. Önerilen yöntemin doğruluğunu, verimliliğini ve hızını göstermek amacıyla doğrusal ve doğrusal olmayan örnekler sunulmuştur. Esmaeili, Shamsi ve Dehghan'ın [22]'deki çalışmasında Caputo türevinin özellikleri, verilen kesirli diferansiyel denklemi Volterra integral denklemine indirgemek için kullanılır. Tüm alan birkaç küçük alana bölünür ve integral denklemin iki bitişik noktaya yerleştirilmesiyle iki bilinmeyenli iki cebirsel denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Yöntem doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için uygulanır. Ayrıca hata analizi de sunulmaktadır. [23]'te Zabidi, Majid, Kilicman ve Rabiei kesirli türevlerin Caputo anlamında tanımlandığı kesirli durum için Lagrange enterpolasyonu uygulanarak üçüncü dereceden Adam-Bashforth sayısal şeması kavramına dayalı olarak türetilmiştir. Ayrıca çalışma, yöntemin kararlılık ve

yakınsama analizine ilişkin bir tartışmayı da içermektedir. [24]'te Abdeljawad, Agarwal, Karapınar ve Kumari, üç yeni kavram üzerinde durmuştur. Ayrıca, bu yeni kavramlar aracılığıyla bazı sabit nokta sonuçları ve belirli türlerdeki doğrusal olmayan Volterra-Fredholm integral denklemleri için uygun bir çözüme yönelik çalışmaları ve aynı zamanda Caputo tipi doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemin çözümü için formül kullanılarak bir çözüm önerilmektedir. Ma ve Huang [25]'te ilk alt aralıkta kullanılan polinom olmayan bir sıralama ile aralığın geri kalanında kullanılan kademeli parçalı polinom sıralamasını birleştiren hibrit bir sıralama yöntemi kullanılmıştır. Yöntemin yakınsama sırası için teorik bir analiz sunulmaktadır. Teorik sonuçları doğrulayan bazı sayısal örnekler verilmiştir. Ordokhani ve Rahimi [26] çalışmasında kesirli Volterra integral diferansiyel denklemlerinin (KVİDD) sayısal çözümüne yaklaşmak için rasyonelleştirilmiş Haar Fonksiyonları Yöntemi (RHFY) uygulanmıştır. RHFY fonksiyonlarının özellikleri şunlardır: sunulmuş ve kesirli entegrasyonun işlem matrisi, ürün işlem matrisi ile birlikte, KVİDD'lerin hesaplanmasını bir cebirsel denklemler sistemine indirgemek için kullanılmıştır. KVİDD'leri çözmek için bu tekniğin kullanılması hesaplama süresini azaltmıştır. Wang, Kamran, Jamal ve Li [27]'deki çalışmasında amaçları Fredholm tipi integral diferansiyel denklemin çözümünü Atangana-Baleanu kesirli türeviyle Caputo anlamında yaklaştırmaktır. Bunun için Laplace ve ters Laplace dönüşümüne dayalı bir yöntem üzerinde durmuşlardır. Sayısal şemalarında verilen denklem önce Laplace dönüşümü kullanılarak cebirsel denkleme dönüştürülmüş ardından indirgenmiş denkleme karmaşık düzlemde çözülmüştür. Son olarak verilen problemin çözümü, ters Laplace dönüşümü ile bir kontur integrali olarak temsil edilmektedir. Yang ve Hou [28]'de doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli integral denklemlerin çözümü için Laplace Ayırıştırma Yöntemi geliştirilmiştir. Yöntem doğrusal olmayan kesirli integral-diferansiyel denkleme dayanmaktadır. Doğrusal olmayan terim, Adomian polinomlarının yardımıyla kolaylıkla ele alınmıştır. [29]'da Pedas, Tamme ve Vikerpuur, Caputo kesirli türevleri ve integral sınır koşullarını içeren doğrusal kesirli zayıf tekil integral-diferansiyel denklemler için bir sınır değer problemleri (SDP) sınıfını ele alır. SDP'nin yeniden düzenlenmesiyle elde edilen integral denklemi kullanarak, ilk olarak kesin çözümün düzenliliği ve Caputo türevi incelenmiştir. Elde edilen düzenlilik özelliklerine dayanarak ve spline sıralama teknikleri ile birlikte uygun dönüşümler kullanılarak problemin sayısal çözümü tartışılmıştır. Optimum küresel

yakınsama tahminleri türetilir ve özel bir ızgara ve sıralama parametreleri seçimi için bir süper yakınsama sonucu verilir. Nemati ve Lima [30]'da zayıf tekil çekirdeğe sahip doğrusal olmayan kesirli integral-diferansiyel denklemlerin bir sınıfını sayısal olarak çözmek için şapka fonksiyonlarının bir modifikasyonu (ŞFM) düşünülmüştür. Problem ikinci türden eşdeğer bir Volterra integral denklemine dönüştürülür ve problemi iki değişkenli polinom denklemlerinin çözümüne indirgemek için ŞFM'lerin operasyonel matrisleri kullanılır. Roohollahi, Ghazanfari ve Akhavan [31] nolu çalışmasında başlangıç değerli kesirli mertebeden ve çok mertebeden karma Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denkleminin çözümü için iki etkili sayısal yaklaşımı tanıtmışlardır. [32]'de Duangpan, Boonklurb ve Juytai, Sonlu Entegrasyon Yöntemi ve kesirli entegrasyonun işlemsel matrisi kaydırmış, Chebyshev polinomuna dayalı olarak uygulamıştır. Kesirli ve klasik integral diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için iki sayısal prosedür tasarlamak için kullanırlar. Arikoglu ve Özkol [33]'teki çalışmasında yarı analitik sayısal bir teknik olan Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemini (KDDY), Volterra tipi kesirli integral diferansiyel denklemleri çözecek şekilde genişletmiştir. Dejenere çekirdeğe sahip integral terimlerinin dönüşümüne ilişkin daha önce var olmayan yeni teoremler kanıtlarıyla birlikte sunmuşlardır. Daha fazlası için [34-61] nolu çalışmalara bakabilirsiniz.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı aşağıda maddeler halinde verilmiştir.

- Hermit Polinomlarını ve özelliklerini ayrıntılı olarak öğrenmek
- Hermit polinomlarını baz alan Hermit Sıralama Yöntemini anlamak
- Hermit Sıralama Yöntemi yardımıyla bir kesirli Fredholm-integro diferansiyel denklem sınıfının yaklaşık çözümünü elde etmek
- Elde edilen çözümleri tüm yönleriyle irdeleyip yorumlamak
- Bu konudaki ileriki çalışmalar için yeni fikirler ortaya koymak

1.3 Hipotez

“İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümleri” adlı hipotezimizde, ilk olarak bir literatür taraması yapıldıktan sonra Hermit Sıralama Yöntemi tüm özellikleriyle incelenecek, daha sonrasında ise bir kesirli Fredholm-integro diferansiyel denklem sınıfına uygulanacaktır. MATHEMATICA programı yardımıyla yaklaşık çözümler elde edilip hem grafiksel hem de tablosal olarak yorumlanacaktır.



2 ÖZEL FONKSİYONLAR

Özel fonksiyonlar Matematiğin ve Fiziğin birçok alanında oldukça yaygın olarak kullanılmaktadırlar. Özel fonksiyonlar, kesirli türev ve integral tanımlarını daha iyi anlamamızda bize faydalı olacaklardır.

2.1. Gama Fonksiyonu

İsviçreli bir Matematikçi olan Leonhard Euler tarafından ortaya konulan Gama fonksiyonu, faktöriyel fonksiyonunun karmaşık sayılar ve tam sayı olmayan reel sayılar için genelleyen bir fonksiyondur. Birçok özel fonksiyon Gama fonksiyonu ile ifade edilebilir.

Tanım 2.1 Gama Fonksiyonu

Gama fonksiyonu genelleştirilmiş integral ile

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt ; \quad x \in \mathbb{C}, \quad \text{Re}(x) > 0 \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır [35,42].

Teorem 2.1

Gama fonksiyonu aşağıda verilen özellikleri sağlamaktadır:

- a. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $x \neq 0, -1, -2, \dots$
- b. $\Gamma(x) = (x-1)!$, $x = 1, 2, 3, \dots$
- c. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Teorem 2.1.a'nın yardımıyla aşağıda bazı değerler için Gama fonksiyonunun değerleri hesaplanmıştır.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 1.72245$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.886227$$

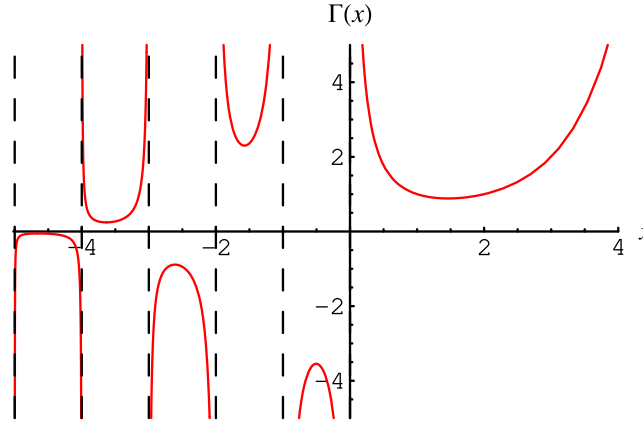
$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1.3}{2^2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} = 1.32934$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1.3.5}{2^3}\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi} = 3.32335$$

$$\vdots$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.2)$$

Gama fonksiyonunun grafiği ise aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.1 Gama fonksiyonunun grafiği

2.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu matematikte oldukça yaygın olarak kullanılan özel bir fonksiyondur ve birçok karmaşık integral Beta fonksiyonu içeren ifadelerle indirgenebilir. Ayrıca Gama fonksiyonu ile olan ilişkisi de oldukça önemlidir.

Tanım 2.2 Beta Fonksiyonu

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt ; \quad Re(x), Re(y) > 0 \quad (2.3)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyondur [35,42]. Beta fonksiyonu sıfır ve negatif tam sayılar hariç tüm kompleks sayılarda, Gama fonksiyonunun yardımıyla aşağıdaki formül ile genelleştirilebilir:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} ; \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0, -1, -2, \dots \quad (2.4)$$

Teorem 2.2

Beta fonksiyonu aşağıda verilen özellikleri sağlamaktadır:

- a. $B(x, y) = B(y, x)$
- b. $B(x, y) = B(x + 1, y) + B(x, y + 1)$
- c. $B(x, y + 1) = \frac{y}{x} B(x + 1, y) = \frac{y}{x+y} B(x, y)$

2.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

İlk olarak İsveçli Matematikçi Gösta Mittag-Leffler tarafından 1903'te tanımlanan bu fonksiyon üstel fonksiyonun bir genelleştirilmesidir.

Tanım 2.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu

Fonksiyon $E_\alpha(x)$ ile ifade edilir ve

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} , \quad \alpha > 0 , x \in \mathbb{C} \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanmıştır [35]. Ayrıca

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} , \quad \alpha, \beta > 0 , x \in \mathbb{C} \quad (2.6)$$

fonksiyonuna *Genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu* denir [36].

KESİRLİ İNTEGRAL VE TÜREV

Bu bölümde öncelikli olarak kesirli türev ve integral kavramlarının tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir. Daha sonrasında ise, literatürde bilinen bazı temel türev ve integral tanımları verilmiştir.

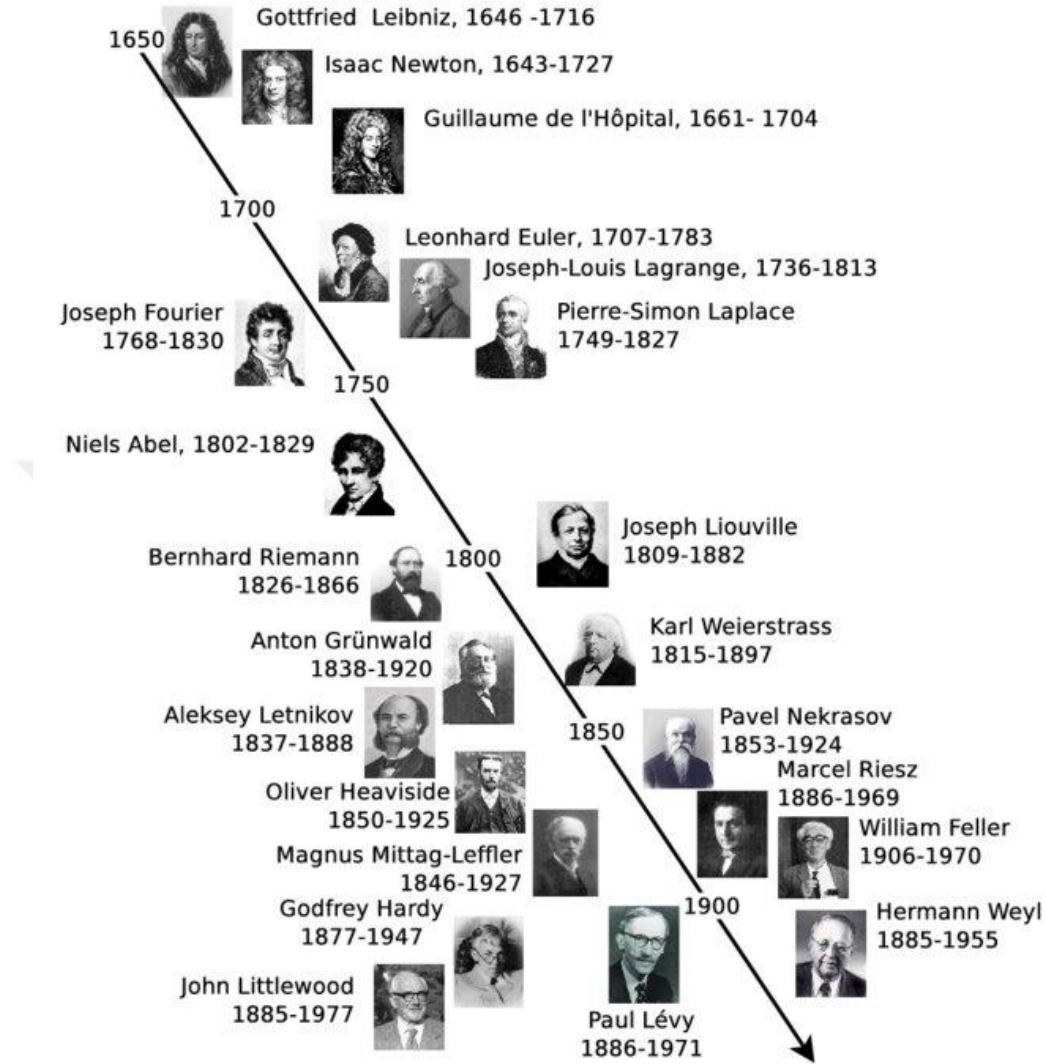
3.1. Kesirli Analizin Tarihçesi ve Uygulama Alanları

Kesirli Analiz, klasik analizin tamsayı olmayan mertebeden integral ve türev almanın bir genellemesidir.

Kesirli operatör kavramı, klasik operatörün gelişimiyle hemen hemen aynı anda ortaya çıkmıştır. Kesirli analizin bilinen ilk referansı $\frac{d^n f}{dx^n}$ notasyonunun mucidi olan Gottfried Wilhelm Leibniz ve Marquis de L'Hospital ile 1695'teki yazışmalarında ortaya çıkmıştır. 30 Eylül 1695 tarihli yazışmada Leibniz, L'Hospital'e "Tam sayı mertebeden türevin işlevi tam sayı olmayan mertebeden türevin işlevine genişletilebilir mi?" sorusunu yönelttiğinde [43] L'Hospital "Öyleyse 1/2 mertebeden türevin anlamı ne olur?" sorusuyla Leibniz'i yanıtlamıştır (Miller ve Ross, 1993). Daha sonra başka bir yazışmasında Leibniz "Bu, bir gün yararlı sonuçların çıkacağı bir paradoksa yol açacak." cevabını vermiştir [41]. Kesirli türev kavramının ortaya çıkışı Bernoulli ile Leibniz'in aralarındaki bu yazışmalara dayanır. Leibniz'in sorduğu soru ile kesirli türev 300 yılı aşkın bir süredir çok cazip bir konu haline gelmiştir ve Euler, Joseph Liouville, Jean-Baptiste Joseph Fourier, Niels Henrik Abel, Pierre-Simon de Laplace, Bernhard Riemann, Hermann Weyl, Peter Grünwald, A. V. Letnikov gibi birçok önemli matematikçinin ilgisini çekmiş ve bu teoriye katkıları olmuştur [44].

Kesirli türevlere daha sonra 1772'de Joseph-Louis Lagrange, 1812'de Laplace, 1819'da Sylvestre-François Lacroix, 1822'de Fourier, 1847'de Riemann, 1859'da Judy Green, 1865'te Hjalmar Holmgren, 1867'de Grünwald, 1868'de Letnikov, 1869'da Nikolay Sonin'i, 1884'te Pierre Alphonse Laurent, 1919'da Hermann Weyl gibi birçok matematikçi atıf yapmıştır [39]. 1819 yılında ise Lacroix kesirli türev hakkında makale yayınlayan ilk matematikçi olmuştur [45]. 19. yüzyılda kesirli

analiz teorisi, büyük matematikçilerin içgörülleri ve dehaları sayesinde bu şekilde geliştirilmiştir.



Şekil 3.1 Kesirli analiz alanındaki önde gelen bilim insanlarının zaman çizelgesi

Seksenli yıllarda kesirli analiz, fraktal ve kaos gibi fenomenlerle ve dolayısıyla doğrusal olmayan dinamikle ilişkili olarak ortaya çıktı. Son yıllarda, yerel olmayan ve uzun hafıza etkilerine sahip karmaşık dinamik sistemlerin modellenmesinde popüler bir araç haline geldi [40]. Bilim ve mühendislik camiasında oldukça popüler olan bu konunun güzelliği kesirli türevlerin (ve integrallerin) yerel (veya nokta) bir özelliği olmamasıdır. Aslında konu doğanın gerçekliğini daha iyi tercüme etmektedir. Böylece bu konu bilim ve mühendislik camiasının popüler konusu

haline gelmiş, doğayı daha iyi anlamak veya tanımlamak için başka bir boyut katmıştır [43].

1900’lü yıllardan günümüze kadar kesirli analiz teorisi, daha çok kesirli dinamikler, kesirli diferansiyel denklemler ve kesirli geometri dahil olmak üzere uygulamalı disipline esas olarak seri bir şekilde gelişti. Bugün ise Kesirli analizin uygulamaları oldukça yayılmıştır. Modern disiplinin neredeyse hiçbir disiplininin olmadığını söylemek güvenlidir. Genel olarak modern mühendislik ve bilimin neredeyse hiçbir disiplininin kesirli analizin araç ve tekniklerinden etkilenmediğini söylemek yanlış olmaz. Örnek verecek olursak akustik, viskoelastisite, optik, jeoloji, kimyasal ve istatistiksel fizik, kontrol teorisi, robotik, elektrik ve makine mühendisliği, biyomühendislik gibi birçok sahada geniş ve verimli uygulamalar bulunabilir.

3.2. Temel Kesirli İntegral ve Türev Tanımları

Bu bölümde bilinen en ünlü tam sayı olmayan türev ve integralle alakalı olan Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo tanımları verilmiştir. İtalyan matematikçi Michele Caputo 1960’lı yıllarda kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri, tam sayı mertebeden başlangıç koşullarını kullanmak amacıyla Riemann-Liouville kesirli türevinin tanımını tekrardan formülize ederek çözer yani o başlangıç koşullarına ihtiyaç duymadan daha çok tercih edilen türev operatörü haline dönüştürmüştür [46].

3.2.1. Riemann-Liouville Kesirli İntegral ve Türevi

Muhtemelen kesirli analizin gelişimindeki en yararlı ilerleme, G. F. Bernhard Riemann tarafından öğrencilik günlerinde yazılan bir makaleden kaynaklanıyordu. Ne yazık ki, makale ancak ölümünden sonra 1892’de yayınlandı. 1853’te bir Taylor serisini genelleştirmeye çalışan Riemann, belirli bir integral içeren ve tam sayı olmayan üslü kuvvet serilerine uygulanabilir farklı bir tanım üretti. Burada Riemann-Liouville kesirli analizin çerçevesinde kesirli integralin doğrusal operatörleri ve kesirli türevi mevcuttur. Bu operatörler uygulamalı bilimlerde çalışan bilim insanlarının erişebileceği bir şekilde Laplace dönüşümü tekniği ile ele alınmıştır.

Tanım 3.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegral

ν negatif olmayan gerçek bir sayı olsun. $f, J' = (0, \infty)$ üzerinde parçalı sürekli ve $J = [0, \infty]$ ’nin herhangi bir sonlu alt aralığında integrallenebilir olsun. O zaman

$${}_c D_x^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt, \quad v > 0 \quad (3.1)$$

'e f 'nin v . mertebeden *Riemann-Liouville Kesirli İntegrali* denir [45,61].

Tanım 3.2 Riemann-Liouville Kesirli Türevi

Kesirli türev, kesirli integralin tanımı kullanılarak tanımlanabilir. Bu amaçla

$v = n - u$ olduğunu varsayalım. Burada $0 < v < 1$ ve n, u 'dan büyük en küçük tam sayıdır. O halde,

$$D^u f(x) = D^n [D^{-v} f(x)] \quad (3.2)$$

f 'nin u . mertebeden *Riemann-Liouville Kesirli Türevi* denir [37,45].

3.2.2. Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi

Grünwald ve Letnikov bugün de sıklıkla kullanılan başka bir kesirli türev tanımının temelini oluşturdu. Liouville'in yaklaşımının kısıtlamalarından rahatsız olan Grünwald (1867), başlangıç noktası olarak bir fark bölümünün sınırı olarak bir türev tanımını benimsemiştir. Adi türevler için belirli integralinin sonlu bir alt limite sahip olarak yorumlanması gerektiğini ve ayrıca ayırt edilebilir bir alt limitin görünmediği Liouville tanımının bir alt limit $-\infty$ 'a karşılık geldiğini gösterdi. $\binom{\alpha}{k}$ genelleştirilmiş binom katsayısıdır. Burada faktöriyeler Euler'in Gama fonksiyonu ile değiştirilir. O halde

$$D_x^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh)}{h^\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (3.3)$$

olarak adlandırılır [37,47,61].

3.2.3. Caputo Kesirli Türevi

Kesirli analize yapılan en önemli modern katkılar arasında, 1967'de M. Caputo'nun tarafından tanıtılan Caputo kesirli türevidir. Caputo'nun yeniden formülize ettiği bu kesirli türevde diferansiyel denklemler çözülürken Riemann-Liouville kesirli türevinde kullanılan kesirli mertebeden başlangıç koşullarını tanımlamaya gerek yoktur. n pozitif bir tam sayı ve $n - 1 < \text{Re}(\alpha) < n$ olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonunun α . mertebeden klasik *Caputo Kesirli Türevi*

$$D_t^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{ds} \right)^n f(s) ds, \quad (3.4)$$

dir. Özel olarak eğer $f(x) = (x - a)^\beta$, $\alpha, \beta \geq 0$ ise

$$D_a^\alpha (x - a)^\beta = \begin{cases} 0 & , \beta \in \{0, 1, \dots, n - 1\} \text{ ve } \beta < n \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x - a)^{\beta-\alpha} & , \beta \in \mathbb{N} \text{ ve } \beta \geq n \\ & \beta \notin \mathbb{N} \text{ ve } \beta > n - 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanmıştır [37,42,47,61].

Tablo 3.1 Bazı polinomların Caputo türevleri

$\alpha = 0.5$ için Caputo Türevleri	
Fonksiyon	Caputo Türevi
$f(x) = x$	$D^{0.5}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{0.5} = 1.1283791671x^{0.5}$
$f(x) = x^2$	$D^{0.5}x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}x^{1.5} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{1.5} = 1.50450555613x^{1.5}$
$f(x) = x^3$	$D^{0.5}x^3 = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}x^{2.5} = \frac{16}{5\sqrt{\pi}}x^{2.5} = 1.80540666735x^{2.5}$
$f(x) = x^4$	$D^{0.5}x^4 = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}x^{3.5} = \frac{128}{35\sqrt{\pi}}x^{3.5} = 2.06332190555x^{3.5}$

İNTEGRAL DENKLEMLER

İntegral denklemler, bilinmeyen bir $u(x)$ fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemlerdir. Bu denklemler, teorik ve uygulamalı matematik alanlarında kullanılan oldukça güçlü matematiksel bir araçtır. Birçok fiziksel problemlerde oldukça geniş uygulamalara sahiptir. Birçok adi ve kısmi diferansiyel denklemler başlangıç ya da sınır koşulları altında integral denklemlerin yaklaşık çözümü problemlerine dönüştürülebilir.

İntegral denklemlerin tarihçesine bakacak olursak, ilk olarak İtalyan matematikçi olan Niels Henrik Abel 1823 yılında incelediği problemle beraber ilk kez integral denklemden bahsetmiştir. Bu problem “Tautochrone Problemi” olarak bilinir ve Abel bu problemi kendisine ait olan Abel İntegral Denklemi ile ilişkilendirmiştir. Bu problem, ağır bir parçacığın sürtünme olmadan kayarak en alçak konuma kadar gittiği yolu ifade eden bir eğrinin belirlenmesi ile ilgilidir. İntegral denklem kavramı ilk olarak D.B. REYMOND’un 1888’de yayınladığı çalışmasında ortaya atılmıştır. İntegral denklemlerle alakalı daha sonraları Ivan Petrovsky, Francesco Tricomi ve William Vernon Lovitt’e ait belgeler mevcuttur. Doğa kanunları genellikle diferansiyel denklemler kullanılarak açıklanabilir. Bu nedenle, çevremizi incelediğimizde kozmosun bütününde doğru kabul edilen doğa kanunlarının olduğu neticesine ulaşılabilir. Görülüyor ki Albert Einstein’ın “Evrenin en anlaşılabilir özelliği anlaşılabilir olmasıdır.” sözü daha da anlamlandırılmıştır. İntegral denklemler tüm kozmos üzerinden integral alınmayı icap ettirdiğinden evrenseldir. İntegral denklemler nispeten birçok denkleme göre çözüme ulaşılması daha zordur. Diferansiyel denklemler ise yalnız başına bir problemi tanımlamak için yeterli değildir. Onlara başlangıç ya da sınır koşullarının da eklenmesi gerekir. İntegral denklemler ise ilave koşullara ihtiyaç duymadan bir problemin tam tanımını verir. Ancak, sınır şartları da kozmosun tamamında onların incelenen alana tesirinin dolaylı yoldan denklemlere eklenmesi olarak çıkarıma varılabileceğinden, integral ile diferansiyel denklemler arasında benzer bir bağlantı olması da çok açıktır. Anlaşılacağı üzere diferansiyel denklemler esasında integral denklemler şeklinde de belirtilebilir.

Birçok bilim dalındaki problemler birden fazla bilinmeyen fonksiyon içeren diferansiyel yada integral denklem yardımıyla ifade edilir. Bu denklemler, özellikle parçalılarla, pek çok fizik ve mühendislik alanında karşılaşmaktayız. Örnek verecek olursak, Diferansiyel Denklem Sistemleri: 1988 yılında Elastikiyet teorisi, 1990'da Dinamik ve yine aynı yılda Akışkanlar mekaniği, 1996'da Devre problemleri, Salınım problemleri, 1998'de Kuantum dinamiği gibi alanlarda görülmektedir. Bu sistemlerin ta çözümü elde edilemediğinden yaklaşık çözümleri için çalışmaların yapılması önem arz etmiştir [48-51].

4.1. İntegral Denklem

Bilinmeyen bir $u(x)$ fonksiyonunun bir integral işareti altında bulunduğu denkleme *İntegral Denklem* denir. Bir integral denklem en genel haliyle

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t)u(t)dt \quad (4.1)$$

Şeklinde ifade edilir. Burada, $g(x)$ ve $h(x)$ integralin sınırları, λ sabit bir parametre ve $K(x, t)$ çekirdek veya integral denkleminin çekirdeği olarak adlandırılan x ve t değişkenlerine bağlı bir fonksiyondur. Bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu integral işaretinin altında olabileceği gibi hem içinde hem de dışında görülebilir. Görüldüğü gibi $f(x)$, $K(x, t)$ fonksiyonları bilinen fonksiyonlardır. İntegral sınırları olan $g(x)$ ve $h(x)$ sabit ya da fonksiyon olabilir.

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun integral işareti altında bulunduğu ve aynı zamanda $u^n(x)$ türevini de içeren denklemlere *İntegro Diferansiyel Denklemi* denir. Standart bir integro diferansiyel denklemi

$$u^n(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t)u(t)dt \quad (4.2)$$

şeklinededir [48-51].

4.2. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

İntegral denklemler farklı özelliklerine göre aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

4.2.1. Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemler lineer ve lineer olmayan integral denklemler olarak iki bölüme ayrılır. Eğer $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu integral işareti altında lineer formda ise, yani

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad (4.3)$$

ise *Lineer İntegral Denklem*; lineer olmayan formda ise, yani

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \varphi[x, t, u(t)]dt \quad (4.4)$$

ise *Lineer Olmayan İntegral Denklem* adını alır. Bunların haricinde birden fazla değişkeni mevcut olan

$$u(x, y) = f(x, y) + \int_a^b \int_c^d K(x, y; t_1, t_2)u(t_1, t_2)dt_1dt_2 \quad (4.5)$$

biçimindeki denklemler de lineer ve lineer olmayan olarak sınıflandırılır.

4.2.2. Tekil ve Tekil Olmayan İntegral Denklemler

Bir integral denklemi sınıflandırırken çekirdek fonksiyonunun sürekliliği önem arz etmektedir. $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu $a \leq x, t \leq b$ aralığında sürekli ise integral denkleme *Tekil Olmayan İntegral Denklem*; sürekli değilse *Tekil İntegral Denklem* denir. Örneğin $0 < \alpha < 1$ için

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad (4.6)$$

tekil bir integral denklemdir. Bununla birlikte, integrasyon sınırlarından en az biri ∞ ise, denkleme tekil integral denklem denir. Örneğin,

$$f(x) = \int_a^\infty e^{-xt}u(t) dt \quad (4.7)$$

şeklindeki denklem gösterilebilir [48-51].

4.2.3. Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler

$f(x)$ fonksiyonunun var olup olmadığına göre de integral denklemler sınıflandırılabilir. İntegral denklemde $f(x) \equiv 0$ ise, denklem *homojen integral denklem*; değilse *homojen olmayan integral denklem* adını alır. Yani

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt \quad (4.8)$$

homojen bir denklem iken

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt \quad (4.9)$$

homojen olmayan bir denkleme örnektir. $u(x) \equiv 0$ olan çözüme *Aşık Çözüm* denir.

4.2.4. Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri

İntegral denklemlerin lineer ve homojen olup olmadıklarına bakılmaksızın, integrasyon sınırlarının değişken veya sabit olmalarına göre de sınıflandırmalar yapılmaktadır.

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt = 0 \quad (4.10)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt \quad (4.11)$$

denklemlerine *Volterra İntegral Denklemi* denir. Bu tip denklemlerde, integrasyonun üst sınırında (veya sınırlarından birinde) x değişkeni vardır. Eğer integrasyonun iki sınırı da sabitlerden oluşuyorsa bu tür denklemlere *Fredholm İntegral Denklemi* denir. Genel olarak

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt = 0 \quad (4.12)$$

ya da

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt \quad (4.13)$$

birer Fredholm integral denklemdir. Eğer integral denklem, biri Volterra biri de Fredholm integral denklemlerindeki gibi sınırlar içeren iki integral içeriyorsa bu tarz denklemlere *Volterra-Fredholm İntegral Denklemi* denir.

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt + \beta \int_a^x K(x, t) u(t) dt = 0 \quad (4.14)$$

ya da

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt + \beta \int_a^x K(x, t) u(t) dt \quad (4.15)$$

birer örnektir [48-51].



1810 yılında Fransız matematikçi ve gökbilimci Pierre-Simon Laplace tarafından tanımlanan Hermit polinomları, farklı bir biçimde 1859'da Pafnuty Chebyshev tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir. Daha sonrasında 1864'de Charles Hermite'nin adıyla anılmıştır. Yeni bir tanım değildir ama Hermite 1865'teki yayınlarında çok boyutlu polinomları tanımlayan ilk kişi olmuştur [52-53].



Şekil 5.1 Charles Hermite (24 Aralık 1822 - 14 Ocak 1901, Fransa)

5.1 Hermit Diferansiyel Denklemini

Günümüzde doğa bilimlerinden mühendisliğe kadar birçok alanda karmaşık problemlerle karşılaşırız. Bu problemler genellikle diferansiyel denklemler yardımıyla modellenerek çözüme ulaşılmaya çalışılır. Bu modellemelerde çok çeşitli denklemler kullanılmaktadır. Bunlardan birisi de matematik ve fizikte kullanılan Hermit Diferansiyel Denklemdir. Bu diferansiyel denklem en genel haliyle

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (5.1)$$

biçiminde ifade edilir [54-55]. Bu diferansiyel denklemi çözebilmek için kuvvet serilerinden yararlanılır. Bunun için öncelikle $y(x)$ çözüm fonksiyonunu kuvvet serisi olarak aşağıdaki gibi yazalım.

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} a_mx^m \quad (5.2)$$

Burada $y(x)$ fonksiyonu bizim denklemimizin çözüm fonksiyonu olduğundan dolayı diferansiyel denklemimizi sağlamak zorundadır. Sırasıyla $y'(x)$ ve $y''(x)$ türevleri

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} ma_mx^{m-1} \quad (5.3)$$

ve

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \dots = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_mx^{m-2} \quad (5.4)$$

olarak elde edilir. Daha sonrasında (5.2), (5.3) ve (5.4) ifadelerini (5.1) denkleminde yerine yazacak olursak

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_mx^{m-2} - \sum_{m=1}^{\infty} 2ma_mx^m + \sum_{m=0}^{\infty} 2na_mx^m = 0 \quad (5.5)$$

elde edilir. Yukarıda görüldüğü gibi ikinci ve üçüncü seri x^m kuvvetine sahip iken ilk serimiz x^{m-2} kuvvetine sahiptir. İlk serimizi m değeri yerine $(m+2)$ olarak yeniden düzenlersek

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2}x^m - \sum_{m=1}^{\infty} 2ma_mx^m + \sum_{m=0}^{\infty} 2na_mx^m = 0 \quad (5.6)$$

elde edilir. Burada amacımız serilerin hepsini tek bir seri toplamı altında yazmak olduğundan, serinin indisini $m = 1$ 'den başlayacak şekilde alırsak

$$\sum_{m=1}^{\infty} [(m+2)(m+1)a_{m+2} - (2m-2n)a_m]x^m + 2a_2 + 2na_0 = 0 \quad (5.7)$$

elde edilir. (5.7) denklemindeki eşitliğin sağ tarafı sıfır olduğundan sol taraftaki ifadeleri ayrı ayrı sıfıra eşitlersek

$$a_{m+2} = \frac{2[m-n]}{(m+2)(m+1)} a_m, \quad m \geq 1 \quad (5.8)$$

yineleme bağıntısı ve

$$a_2 = \frac{-2n}{2} a_0 \quad (5.9)$$

değeri elde edilir. (5.8) yineleme bağıntısını (5.9) eşitliği yardımıyla açacak olursak m 'nin çift sayı değerleri için

➤ $m = 0$

$$a_2 = \frac{2(-n)}{2!} a_0$$

➤ $m = 2$

$$a_4 = \frac{2(2-n)}{4.3} a_2 = \frac{2^2(-n)(2-n)}{4!} a_0$$

➤ $m = 4$

$$a_6 = \frac{2(4-n)}{6.5} a_4 = \frac{2^3(-n)(2-n)(4-n)}{6!} a_0 \quad (5.10)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilecek olursa a_{2m} terimi

$$a_{2m} = \frac{2^m(-n)(2-n) \dots ((2m-2)-n)}{(2m)!} a_0 \quad (5.11)$$

şeklinde genellenebilir. Aynı şeyi bu sefer m 'nin tek sayı değerleri için yaparsak

➤ $m = 1$

$$a_3 = \frac{2(1-n)}{3!} a_1$$

➤ $m = 3$

$$a_5 = \frac{2(3-n)}{5.4} a_3 = \frac{2^2(1-n)(3-n)}{5!} a_1$$

➤ $m = 5$

$$a_7 = \frac{2(5-n)}{7.6} a_5 = \frac{2^3(1-n)(3-n)(5-n)}{7!} a_1 \quad (5.12)$$

elde edilir. Yine bu şekilde devam edilirse a_{2m+1} terimi

$$a_{2m+1} = \frac{2^m(1-n)(3-n) \dots ((2m-1)-n)}{(2m+1)!} a_1 \quad (5.13)$$

olarak genellenir. Buna göre $y(x)$ çözüm fonksiyonumuz

$$\begin{aligned} y(x) = a_0 \left\{ 1 + \frac{2(-n)}{2!} x^2 + \dots + \frac{2^m(-n)(2-n) \dots (2m-2-n)}{(2m)!} x^{2m} + \dots \right\} \\ + a_1 \left\{ x + \frac{2(1-n)}{3!} x^3 + \dots + \frac{2^m(1-n)(3-n) \dots (2m-1-n)}{(2m+1)!} x^{2m+1} \right. \\ \left. + \dots \right\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

olarak elde edilir. (5.14) denklemini

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \quad (5.15)$$

olarak yeniden ifade edelim. Burada $y_1(x)$ fonksiyonu x 'in çift kuvvetlerine yer edinirken $y_2(x)$ fonksiyonu ise x 'in tek kuvvetlerine yer edinir. (5.14) denkleminde gözümüze çarpan ilk şey n sayısının bir tam sayı olmasıdır. Burada ilk olarak n sayısını çift olarak kabul edersek a_0 'dan başlayan seri $m = n$ değerinden sonra

$$a_{n+2} = a_{n+4} = \dots = 0$$

olur. Böylece y_1 bir polinom olurken y_2 sonsuz terimli bir seri olur. Bu sefer n tamsayısını tek kabul edecek olursak y_2 'nin çözümü polinom olurken y_1 'in çözümü sonsuz terimli bir seri olur. Polinom olan ifade edilen kısma *Hermit Polinomu* denir ve H_n ile gösterilir. Buna göre Hermit diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y(x) = a_0 u_n(x) + a_1 v_n(x) \quad (5.16)$$

olarak yazıldığında

$$n \text{ çift} \Rightarrow H_n(x) = u_n(x)$$

$$n \text{ tek} \Rightarrow H_n(x) = v_n(x)$$

şeklinde olur. Hermit polinomları ise

$$H_n(x) = a_0 \left\{ 1 - \frac{n}{1} \cdot \frac{x^2}{1!} + \frac{(n)(n-2)}{1.3} \cdot \frac{x^4}{2!} + \dots \right\}, (n \text{ çift}) \quad (5.17)$$

$$H_n(x) = a_1 \left\{ x - \frac{(n-1)}{3} \cdot \frac{x^3}{1!} + \frac{(n-1)(n-3)}{3.5} \cdot \frac{x^5}{2!} + \dots \right\}, (n \text{ tek}) \quad (5.18)$$

ifadeleri ile verilir [55]. O halde (5.17) ve (5.18) denklemleri (5.16)'de yerine yazılırsa

$$y(x) = a_0 \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-2)^j n(n-2) \dots (n-2j+2)}{(2j)!} \cdot x^{2j} \right\} \\ + a_1 x \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-2)^j (n-1)(n-3) \dots (n-2j+1)}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \right\} \quad (5.19)$$

elde edilir.

Serilerle işlemlere başlamadan önce daha sonrasında bizim için önemli olan serilerle ilgili bazı özellikleri verelim:

Tablo 5.1 Bazı temel seri özellikleri

<i>Bazı Temel Seri Özellikleri</i>	
1.(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} M(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n M(k, n-k)$	1.(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} M(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} M(k, n-2k)$
2.(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n N(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} N(k, n+k)$	2.(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} N(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} N(k, n+2k)$

➤ n çift bir sayı olsun. O halde

$$a_0 = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad (5.20)$$

olur. (5.19) teki ilk toplamda $2j = n$ kabul edersek o zaman x^n 'in katsayısı

$$(-2)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{n(n-2) \dots (n-n+2)}{n!} \cdot a_0 \quad (5.21)$$

olur. Daha sonrasında (5.20) teki a_0 terimini (5.21)'de yerine yazacak olursak

$$(-2)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{n(n-2) \dots (n-n+2)}{n!} \cdot \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad (5.22)$$

elde edilir. (5.22) denkleminde gerekli düzenlemeler yapıldığında pay ve paydada bulunan $n!$ terimleri sadeleşecektir. $\left(\frac{n}{2}\right)$ üslü ifadeleri tek bir parantez halinde toplanırsa (5.22) ifadesi

$$(2)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{n(n-2) \dots (n-n+2)}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad (5.23)$$

halini alır. Payda aşağıdaki gerekli düzenlemeler yapılnca (5.23) ifadesi

$$= (2)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{2^{\frac{n}{2}} 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \dots (2)1}{\left(\frac{n}{2}\right)!} = (2)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{(2)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} = 2^n \quad (5.24)$$

olur. Aynı şekilde x^{n-2} 'in katsayısı,

$$(-2)^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot \frac{n(n-2) \dots (n-n+2+2)}{(n-2)!} \cdot \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad (5.25)$$

olur. (5.25) denkleminizi (-1) ile çarpıp bölelim. O halde

$$\begin{aligned} & (-2)^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot \frac{n(n-2) \dots (n-n+2+2)}{(n-2)!} \cdot \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} \\ &= -2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot \frac{2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2}-1\right) \dots (2)}{(n-2)!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \\ &= \frac{-2^{(n-2)} \left(\frac{n}{2}\right)! n(n-1)}{\left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{-2^{(n-2)} n(n-1)}{(1)!} \end{aligned} \quad (5.26)$$

elde edilir. O zaman $y(x)$ fonksiyonunun en büyük kuvvete sahip x 'i ve katsayısını polinom dizilişine göre yazacak olursak

$$\begin{aligned} y(x) &= 2^n x^n - \frac{n(n-1)}{(1)!} \cdot 2^{n-2} x^{n-2} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(2)!} \cdot 2^{n-4} x^{n-4} + \dots + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \end{aligned} \quad (5.27)$$

bulunur. (5.27) denkleminde son terimin a_0 olduğu açıkça gözükmemektedir. O zaman $H_n(x)$ polinomu

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{(1)!} \cdot (2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(2)!} \cdot (2x)^{n-4} + \dots + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad (5.28)$$

şeklindedir. (5.28) denklemini bir seri toplamı olarak daha pratik olarak ifade edecek olursak, Hermit polinomu

$$H_n(x) = \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^m \frac{n!}{(m)!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} \quad (5.29)$$

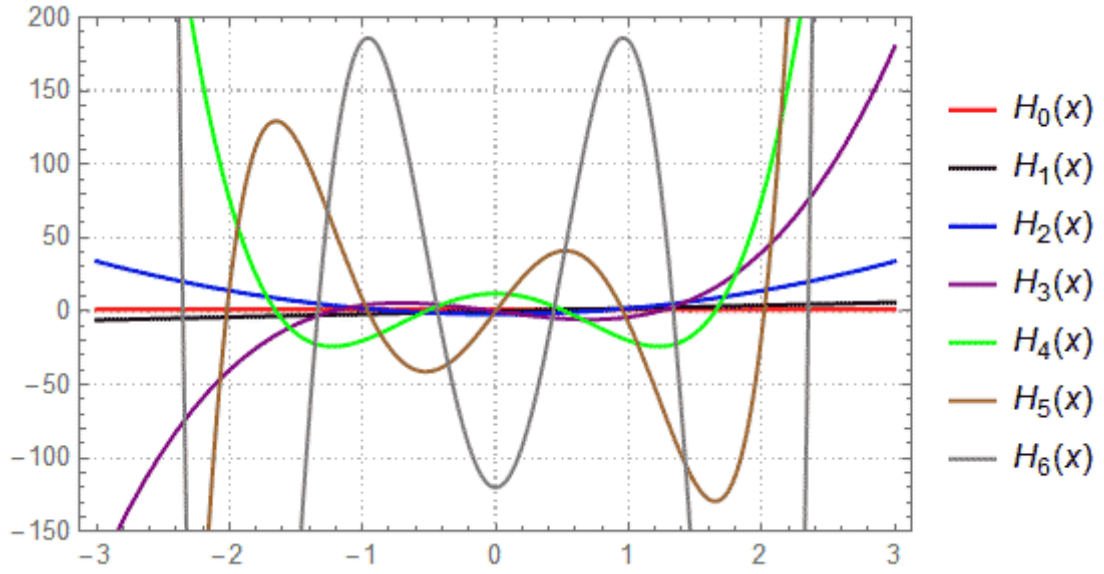
$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2}, n \text{ çift} \\ \frac{(n-1)}{2}, n \text{ tek} \end{cases} \quad (5.30)$$

şeklinde elde edilir [55,58]. Bu formüle göre, Hermit polinomlarının birkaç terimini açık şekilde ifade edecek olursak

- $H_0(x) = \sum_{m=0}^0 (-1)^m \cdot \frac{1}{(m)!(n-2m)!} \cdot (2x)^{n-2m} = (-1)^0 \cdot \frac{1}{0!0!} \cdot (2x)^0 = 1$
- $H_1(x) = \sum_{m=0}^0 (-1)^m \cdot \frac{1}{(m)!(1-2m)!} \cdot (2x)^{1-2m} = (-1)^0 \cdot \frac{1}{0!1!} \cdot (2x)^1 = 2x$
- $H_2(x) = \sum_{m=0}^1 (-1)^m \cdot \frac{2}{(m)!(2-2m)!} \cdot (2x)^{2-2m} = (-1)^0 \cdot \frac{2}{0!2!} \cdot (2x)^2 + (-1)^1 \cdot \frac{2}{1!0!} \cdot (2x)^0 = 4x^2 - 2$
- $H_3(x) = \sum_{m=0}^1 (-1)^m \cdot \frac{3!}{(m)!(3-2m)!} \cdot (2x)^{3-2m} = (-1)^0 \cdot \frac{3!}{0!3!} \cdot (2x)^3 + (-1)^1 \cdot \frac{3!}{1!1!} \cdot (2x)^1 = 8x^3 - 12x$
- $H_4(x) = \sum_{m=0}^2 (-1)^m \cdot \frac{4!}{(m)!(4-2m)!} \cdot (2x)^{4-2m} = (-1)^0 \cdot \frac{4!}{0!4!} \cdot (2x)^4 + (-1)^1 \cdot \frac{4!}{1!2!} \cdot (2x)^2 + (-1)^2 \cdot \frac{4!}{2!0!} \cdot (2x)^0 = 16x^4 - 48x^2 + 12$
- $H_5(x) = \sum_{m=0}^2 (-1)^m \cdot \frac{5!}{(m)!(5-2m)!} \cdot (2x)^{5-2m} = (-1)^0 \cdot \frac{5!}{0!5!} \cdot (2x)^5 + (-1)^1 \cdot \frac{5!}{1!3!} \cdot (2x)^3 + (-1)^2 \cdot \frac{5!}{2!1!} \cdot (2x)^1 = 32x^5 - 160x^3 + 120x$

- $H_6(x) = \sum_{m=0}^3 (-1)^m \cdot \frac{6!}{(m)!(6-2m)!} \cdot (2x)^{6-2m} = (-1)^0 \cdot \frac{6!}{0!6!} \cdot (2x)^6 +$
 $(-1)^1 \cdot \frac{6!}{1!4!} \cdot (2x)^4 + (-1)^2 \cdot \frac{6!}{2!2!} \cdot (2x)^2 + (-1)^3 \cdot \frac{6!}{3!0!} \cdot (2x)^0 = 64x^6 -$
 $480x^4 + 720x^2 - 120$
- $H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$
- $H_8(x) = 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680$
- $H_9(x) = 512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 80640x^3 + 30240x$
- $H_{10}(x) = 1024x^{10} - 23040x^8 + 161280x^6 - 493200x^4 +$
 $302400x^2 - 30240$

olur [55,58].



Şekil 5.2 Hermit polinomları grafiği

5.2 Hermit Polinomlarının Bazı Temel Özellikleri

Burada Hermit polinomlarının farklı formlardaki halleri mevcuttur.

5.2.1 Üretici Fonksiyon

Hermit polinomunu farklı bir şekilde ifade edebilmek için üstel fonksiyonun seri toplam formülünden yararlanabiliriz. Biliyoruz ki

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \quad (5.31)$$

ile ifade edilir. Burda $t \rightarrow 2xt$ yazacak olursak

$$e^{2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n \frac{t^n}{n!} \quad (5.32)$$

elde edilir. Şimdi ise, (5.31) denkleminde $t \rightarrow -t^2$ alırsak

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} \quad (5.33)$$

bulunur. (5.32) ile (5.33) seri toplamalarını çarpalım. O zaman

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (2x)^i \frac{t^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{t^{2j}}{j!} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(2x)^i t^{i+2j}}{i! j!} \quad (5.34)$$

olur. (5.34) denkleminde bazı temel seri özelliklerinden 1(ii) özelliğini kullanırsak

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \frac{(-1)^j (2x)^{i-2j} t^i}{(i-2j)! j!} \quad (5.35)$$

elde edilir. Elde ettiğimiz (5.35) denklemini $i!$ ile çarpıp bölersek sonuç olarak

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \frac{(-1)^j (2x)^{i-2j} i!}{(i-2j)! j!} \frac{t^i}{i!} \quad (5.36)$$

olarak bulunur. (5.36) denkleminin ikinci toplamında (5.29) denklemindeki benzerliği kullanacak olursak

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{i=0}^{\infty} H_i(x) \frac{t^i}{i!} \quad (5.37)$$

olur [56,58].

5.2.2 $H_n(x)$ için Rekürans Bağlantıları

$$\blacksquare \quad 2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x)$$

Bu bağıntının doğruluğunu göstermek için (5.37) denkleminin t 'ye göre türevini alalım. Buna göre,

$$e^{2xt-t^2} (2x - 2t) = \sum_{n=1}^{\infty} nH_n(x) \frac{t^{n-1}}{n!} \Rightarrow 2(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nH_n(x) \frac{t^{n-1}}{n!} \quad (5.38)$$

dir. (5.38) denkleminde ikinci toplamın dışındaki $2(x-t)$ katsayısını dağıtalım.

Buna göre

$$2x \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} nH_n(x) \frac{t^{n-1}}{n!} \quad (5.39)$$

elde edilir. Bu eşitlikteki serileri terimlerine açacak olursak

$$\begin{aligned} & 2x \left\{ H_0(x) + H_1(x) \frac{t}{1!} + \cdots + H_n(x) \frac{t^n}{n!} + \cdots \right\} \\ & - 2 \left\{ H_0(x) \frac{t}{0!} + H_1(x) \frac{t^2}{1!} + \cdots + H_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!} + \cdots \right\} \\ & = \left\{ H_1(x) + 2H_2(x) \frac{t}{2!} + \cdots + nH_n(x) \frac{t^{n-1}}{n!} \right\} \end{aligned} \quad (5.40)$$

olur. Eşitliğin solunda ve sağında bulunan aynı kuvvetli t terimlerinin katsayılarını birbirlerine eşitleyecek olursak,

$$\begin{aligned} 2xH_0(x) &= H_1(x) \\ 2xH_1(x) &= 2H_0(x) + H_2(x) \\ &\vdots \\ 2xH_n(x) &= 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x) \end{aligned} \quad (5.41)$$

bağıntısı elde edilmiş olur [56,58].

$$\blacksquare \quad H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

Bir önceki bölümde elde edilen (5.37) denklemini alalım. Burada verilen fonksiyonun x 'e göre türevini alırsak,

$$2te^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (5.42)$$

olur. (5.37) denklemini (5.42)'de yerine yazarsak

$$2t \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!} \Rightarrow 2 \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (5.43)$$

olur. (5.43)'te serileri terimlerine açalım. Buna göre

$$\begin{aligned} & 2 \left\{ H_0(x) \frac{t}{0!} + H_1(x) \frac{t^2}{1!} + H_2(x) \frac{t^3}{2!} + \dots \right\} \\ &= \left\{ H'_0(x) + H'_1(x) \frac{t}{1!} + H'_2(x) \frac{t^2}{2!} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (5.44)$$

elde ederiz. Eşitliğin iki tarafındaki aynı kuvvetli t terimlerinin katsayılarını eşitleyerek

$$\begin{aligned} H'_1(x) &= 2H_0(x) \\ H'_2(x) &= 2.2H_1(x) \\ &\vdots \\ H'_n(x) &= 2nH_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (5.45)$$

elde edilir [58].

$$\blacksquare \quad xH'_n(x) = nH'_{n-1}(x) + nH_n(x)$$

Öncelikle (5.37) denkleminin t 'ye göre türevini alalım.

$$2(x-t)e^{2xt-t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nH_n(x) \frac{t^{n-1}}{n!} \quad (5.46)$$

elde edilir. Şimdi ise (5.37) üretici fonksiyonun x 'e göre türevini alalım. O halde

$$2te^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (5.47)$$

elde edilir. (5.46) denklemini t ile çarpalım. Buna göre,

$$2t(x-t)e^{2xt-t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nH_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (5.48)$$

elde edilir. (5.47) denklemini $(x-t)$ ile çarpalım.

$$2t(x-t)e^{2xt-t^2} = (x-t) \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (5.49)$$

olur. (5.48) denklemi ile (5.49) denklemini taraf tarafa çıkartırsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} nH_n(x) \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!} = x \sum_{n=1}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (5.50)$$

dır. (5.50) denklemindeki ikinci toplam 0'dan başlamaktadır. İkinci toplamda n yerine $(n - 1)$ yazalım. O zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} nH_n(x) \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} H'_{n-1}(x) \frac{t^n}{(n-1)!} = x \sum_{n=1}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (5.51)$$

elde edilir. Serilerde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{nH_n(x)}{n!} + \frac{H'_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{xH'_n(x)}{n!} \quad (5.52)$$

olur. (5.52) denkleminde gerekli sadeleştirme işlemleri sonucu

$$\frac{nH_n(x)}{n(n-1)!} + \frac{H'_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{xH'_n(x)}{n(n-1)!} \quad (5.53)$$

$$H_n(x) + H'_{n-1}(x) = \frac{xH'_n(x)}{n} \quad (5.54)$$

$$nH_n(x) + nH'_{n-1}(x) = xH'_n(x) \quad (5.55)$$

elde edilir. Böylece bağıntının doğruluğu elde edilmiş olunur [56].

5.2.3 Rodriguez Formülü

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (5.56)$$

Hermit polinomu (5.56)'de belirtilen Rodriguez formülü adı verilen bir başka formül ile de bulunabilir. (5.56)'in doğruluğunu göstermek için (5.37) denklemini kullanalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{-(t^2 - 2xt + x^2 - x^2)} = e^{x^2 - (x-t)^2}$$

$$H_0(x) + H_1(x) \frac{t}{1!} + \dots + H_n(x) \frac{t^n}{n!} + \dots = e^{x^2} e^{-(x-t)^2} = f(x, t) \quad (5.57)$$

olur. (5.57) eşitliğinin n kez t 'ye göre türevini alalım. O zaman

$$H_n(x) + H_{n+1}(x)t + \dots = e^{x^2} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} (e^{-(x-t)^2}) \right] \quad (5.58)$$

elde ederiz. (5.58) 'te kısmi türev operatörü ile belirtilen bölge için $(x - t) = u$ değişken dönüşümü yapalım. Buna göre,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} (-1) = -\frac{\partial}{\partial u} \quad (5.59)$$

ifadesini elde ederiz. (2.59) 'de yapılan işleme devam edilirse

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial u^n} \quad (5.60)$$

elde ederiz. (5.58) denkleminde (5.60) değişken dönüşümü de yaparak yerine yazalım.

$$H_n(x) + H_{n+1}(x)(x - u) + \dots = e^{x^2} \left[(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial u^n} (e^{-u^2}) \right] \quad (5.61)$$

dır. Böylece $t = 0$ için $x = u$ olacaktır. Şimdi (5.58) denklemini düzenleyelim.

$$H_n(x) = e^{x^2} \left[(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial u^n} (e^{-u^2}) \right] \quad (5.62)$$

Böylece

$$H_n(x) = e^{x^2} \left[(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} (e^{-x^2}) \right] \quad (5.63)$$

elde edilir [57].

5.2.4 Ortogonalite

Hermit polinomları e^{-x^2} ağırlık fonksiyonuna göre $(-\infty, \infty)$ aralığında birbirine diktir.

Hermit polinomlarının bu ortogonalite özelliği

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn} \quad (5.64)$$

şeklinde gösterilir. Burada ki δ_{mn} ile ifade edilen

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases} \quad (5.65)$$

Kronecker Deltası'dır. (5.56) de ifade edilen Rodriguez formülü (5.64) integrali ile

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} H_m(x) dx \quad (5.66)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $n > m$ olduğu düşünülür ve n defa kısmi integrasyonu alınırsa integralin sıfıra eşit olduğu gösterilmiş olur. Aynı durum $m > n$ için uygulandığında (5.64) integralinde $H_m(x)$ yerine onun Rodriguez formülü yazılarak m defa kısmi integrasyonu alınırsa integralin tekrar sıfıra eşit olduğu gösterilmiş olur. Bu sebeple $m \neq n$ olduğu durumda (5.64) integrali sıfıra eşittir.

Şimdi $m = n$ durumunu inceleyecek olursak (5.64) eşitliğindeki integralde (5.56) Rodriguez formülü kullanılırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} H_n(x) dx \quad (5.67)$$

elde edilir. Bu (5.67) eşitliğinin sağ tarafındaki integrale n defa kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d^n H_n(x)}{dx^n} dx \quad (5.68)$$

bulunur. (5.29) eşitliğinin her iki yanının n kez x 'e göre türevini alınırsa

$$\frac{d^n H_n(x)}{dx^n} = 2^n n! \quad (5.69)$$

elde edilir. Bu (5.69) eşitliğinin (5.68) de kullanılmasıyla

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (5.70)$$

elde edilir. (5.70) denklemindeki eşitliğin sağ tarafındaki integral Gamma fonksiyonunun

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (5.71)$$

özelliklerinden yararlanılarak tekrar düzenlenirse

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (5.72)$$

Hermit polinomlarının normu elde edilmiş olur [58].

HERMİT SIRALAMA YÖNTEMİ

Bu çalışmada

$$\sum_{k=0}^m N_k(x)y^{(k)}(x) + M(x)y^\alpha(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad (6.1)$$

kesirli mertebeden Fredholm-integro diferansiyel denklemini

$$y^j(c) = \mu_j, \quad j = 0, \dots, m-1 \quad (6.2)$$

başlangıç koşulları altında inceleyeceğiz. Burada $y(x)$ bilinmeyen fonksiyon; $M(x)$, $N_k(x)$, $g(x)$, $[a, b]$ 'de sürekli birer fonksiyon; $K(x, t)$ ayrılabilir çekirdek fonksiyonu ve $0 < \alpha \leq 1$ 'dir. Kolaylık olması açısından denkleminizi

$$D(x) + D^\alpha(x) = g(x) + \lambda I(x) \quad (6.3)$$

olarak ifade edelim. Burada

$$\begin{aligned} D(x) &= \sum_{k=0}^m N_k(x)y^{(k)}(x) \\ D^\alpha(x) &= M(x)y^\alpha(x) \\ I(x) &= \int_a^b K(x,t)y(t)dt \end{aligned} \quad (6.4)$$

şeklinde. Problemimizin çözümünde Hermit polinomları baz alınarak MATHEMATICA programı kullanımıyla yaklaşık çözüm hesaplaması yapacağız.

6.1 $D(x)$ Matris Gösterimi

Yaklaşık çözümümüzü kesilmiş Hermit serisi olarak

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(x) \quad (6.5)$$

olarak kabul edelim. Burada a_n 'ler ($n = 0, \dots, N$) Hermit polinomlarının katsayıları ve N pozitif bir tam sayıdır. (6.4) denkleminin ilk ifadesinde bulunan $y(x)$ 'i matris formunda yazacak olursak

$$[y(x)] = [H_0(x)H_1(x) \dots H_N(x)][[a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N]]^T = H(x)A \quad (6.6)$$

elde edilir.

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (6.7)$$

sıralama noktalarını (6.6) denkleminde yerine yazarsak, denklem

$$[y(x_i)] = H(x_i)A, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (6.8)$$

şekline gelir. Daha açık yazılacak olursa

$$\begin{bmatrix} y(x_0) \\ y(x_1) \\ \vdots \\ y(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0(x_0) & H_1(x_0) & \dots & H_N(x_0) \\ H_0(x_1) & H_1(x_1) & \dots & H_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_0(x_N) & H_1(x_N) & \dots & H_N(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

olur. Daha önceden (5.29) denkleminde tanımlanan Hermit polinomlarının özelliğini kullanarak Hermit polinomları N 'nin tek ve çift değerlerine göre aşağıdaki gibi matris formuna dönüştürülebilir [38].

$N = \text{tek}$ ise

$$\begin{bmatrix} H_0(x) \\ H_1(x) \\ \vdots \\ H_{N-1}(x) \\ H_N(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{\left(\frac{N-5}{2}\right)} \frac{2^0 (N-1)!}{0! \left(\frac{N-1}{2}\right)!} & 0 & \dots & 0 & 2^{N-1} \\ 0 & (-1)^{\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{2^1 N!}{1! \left(\frac{N-1}{2}\right)!} & \dots & 0 & 2^N \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{N-1} \\ x^N \end{bmatrix}$$

$N = \text{çift}$ ise

$$\begin{bmatrix} H_0(x) \\ H_1(x) \\ \vdots \\ H_{N-1}(x) \\ H_N(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^{\left(\frac{N-2}{2}\right)} \frac{2^1 (N-1)!}{1! \left(\frac{N-2}{2}\right)!} & \dots & 0 & 2^{N-1} \\ (-1)^{\left(\frac{N-4}{2}\right)} \frac{2^0 N!}{0! \left(\frac{N}{2}\right)!} & 0 & \dots & 0 & 2^N \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{N-1} \\ x^N \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

O zaman

$$H^T(x) = FX^T(x) \Rightarrow H(x) = X(x)F^T \quad (6.11)$$

olur. $X^{(k)}(x)$ matrisi

$$X^{(k)}(x) = [(x^0)^{(k)} \quad (x^1)^{(k)} \quad \dots \quad (x^N)^{(k)}] \quad (6.12)$$

olarak tanımlanır. Örneğin

- $k = 0$ için

$$X(x) = [x^0 \quad x^1 \quad \dots \quad x^N]$$

- $k = 1$ için

$$X^{(1)}(x) = [(x^0)^{(1)} \quad (x^1)^{(1)} \quad \dots \quad (x^N)^{(1)}]$$

olur. Diğer bir deyişle

$$X^{(1)}(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix}}_{[X^{(0)}(x)]^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} (x^0)^{(1)} \\ (x^1)^{(1)} \\ (x^2)^{(1)} \\ \vdots \\ (x^N)^{(1)} \end{bmatrix}}_{[X^{(1)}(x)]^T} \quad (6.13)$$

olur [59-60]. Yani

$$[X^{(1)}(x)]^T = B[X^{(0)}(x)]^T \Rightarrow X^{(1)}(x) = X^{(0)}(x)B^T \quad (6.14)$$

dir. Benzer şekilde

$$X^{(2)}(x) = X^{(1)}(x)B^T = X(x)(B^T)^2 \quad (6.15)$$

ve genel haliyle

$$X^{(k)}(x) = X(x)(B^T)^k \quad (6.16)$$

olarak yazılabilir. (6.6) denkleminde ifade edilen matris formunun k . türevini alırsak,

$$y^{(k)}(x) = H^{(k)}A \quad (6.17)$$

elde edilir (6.11)'dan yararlanarak (6.17) denklemi

$$y^{(k)}(x) = X(x)(B^T)^k F^T A \quad (6.18)$$

halini alır. En son olarak sıralama noktaları (6.4) denklemindeki $D(x)$ 'de yerine yazılırsa

$$D(x_i) = \sum_{k=0}^m N_k(x_i) y^{(k)}(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (6.19)$$

haline gelir. Burada

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_k(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_k(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_k(x_N) \end{bmatrix}}_{N_k} \underbrace{\begin{bmatrix} y^{(k)}(x_0) \\ y^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{bmatrix}}_{y^{(k)}} \quad (6.20)$$

elde ederiz. Diğer bir deyişle

$$D(x) = \sum_{k=0}^m N_k y^{(k)} \quad (6.21)$$

matris halini alır. Şimdi ise (6.18) denkleminde $x = x_i$ yazacak olursak

$$y^{(k)}(x_i) = X(x_i)(B^T)^k F^T A \quad (6.22)$$

olur. O halde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y^{(k)}(x_0) \\ y^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{bmatrix}}_{y^{(k)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix}}_X [B^T]^k F^T A \quad (6.23)$$

olur. Buradaki X matrisi

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

şeklinde yazılır. O zaman

$$y^{(k)} = X(B^T)^k F^T A \quad (6.25)$$

olarak tanımlanır. Böylece

$$D = \sum_{k=0}^m N_k X(B^T)^k F^T A \quad (6.26)$$

temel matris denklemi elde edilir.

6.2 $D^\alpha(x)$ Matris Gösterimi

(6.6)'da belirttiğimiz eşitliğin α türevini Caputo kesirli türev tanımına göre alacak olursak

$$y^{(\alpha)}(x) = H^{(\alpha)}A \quad (6.27)$$

olur. $H(x)$ 'ler birer polinom olduklarından (3.5)'de verilen Caputo kesirli türev tanımı yardımıyla

$$y^{(\alpha)}(x) = x^{-\alpha}X(x)\Omega F^T A \quad (6.28)$$

olur. Burada

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma(\alpha+1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\Gamma(N\alpha+1)}{\Gamma((N-1)\alpha+1)} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

dir. Sıralama noktaları (6.4) denklemindeki $D^\alpha(x)$ ' te yerine yazılırsa

$$D^\alpha(x_i) = M(x_i)x_i^{-\alpha}X(x_i)\Omega F^T A \quad (6.30)$$

olur. Matris formunda yazılacak olursa

$$D^\alpha(x) = MX^{-\alpha}X\Omega F^T A \quad (6.31)$$

elde edilir. (6.31)'de verilen

$$X^{-\alpha} = \begin{bmatrix} x_0^{-\alpha} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1^{-\alpha} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & x_N^{-\alpha} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

'dir.

6.3 $I(x)$ Matris Gösterimi

Bu bölümde (6.4) denklemindeki $I(x)$ integral kısmını matris formunda yazmaya çalışacağız. $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonunu kesilmiş Hermit serisi yardımıyla açacak olursak

$$K(x, t) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N k_{mn} H_m(x) H_n(t) \quad (6.40)$$

ve kesilmiş Taylor serisi ise [62]'de

$$K_t(x, t) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N k_{mn}^t x^m t^n \quad (6.41)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada

$$k_{mn}^t = \frac{1}{m! n!} \frac{\partial^{m+n} K(0,0)}{\partial x^m \partial t^n} \quad , \quad m, n = 0, 1, \dots, N \quad (6.42)$$

dir. $K_t(x, t)$ Taylor serisi ise

$$[K_t(x, t)] = X(x) K_t X^T(t) \quad (6.43)$$

olarak ifade edilir [63]. (6.43) denklemi yardımıyla (6.40) denklemini

$$[K(x, t)] = H(x) K H^T(t) \quad (6.44)$$

matris formunda yazabiliriz. (6.43) ve (6.44) denklemlerini birbirlerine eşitleyecek olursak

$$[K(x, t)] = H(x) K H^T(t) = X(x) K_t X^T(t) \quad (6.45)$$

elde ederiz. Bu eşitlikte sırasıyla

$$H(x) = [H_0(x) \ H_1(x) \ \dots \ H_N(x)] \quad (6.46)$$

$$K = [k_{mn}] \quad m, n = 0, \dots, N \quad (6.47)$$

$$X(x) = [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^N] \quad (6.48)$$

$$K_t = [k_{mn}^t] \quad m, n = 0, \dots, N \quad (6.49)$$

olarak verilmiştir. (6.11) denklemindeki Hermit ifadesini (6.45) denkleminde yerine yazarsak

$$X(x) F^T K F X^T(t) = X(x) K_t X^T(t) \quad (6.50)$$

ifadesini elde etmiş oluruz. Bu ifade en sade şekliyle

$$K_t = F^T K F \quad (6.51)$$

olur. K ifadesini elde etmek için eşitliği önce soldan $(F^T)^{-1}$ ve sonrasında ise sağdan $(F)^{-1}$ ile çarpacak olursak

$$K = (F^T)^{-1} K_t (F)^{-1} \quad (6.52)$$

şeklinde bulunur. Buradan $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonunun Hermit ve Taylor katsayıları arasındaki ilişki rahatlıkla görülebilmektedir.

(6.4)'teki $I(x)$ integral kısmında (6.6) ve (6.52) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} [I(x)] &= \int_a^b H(x) K H^T(t) H(t) A dt \\ &= H(x) K \left\{ \int_a^b H^T(t) H(t) dt \right\} A \\ &= H(x) K \Theta A \end{aligned} \quad (6.53)$$

olur. (6.53) denklemindeki Θ ifadesi (6.11) denklemini yardımıyla

$$\begin{aligned}\Theta &= \int_a^b F X^T(t) X(t) F^T dt \\ &= F \underbrace{\left\{ \int_a^b X^T(t) X(t) dt \right\}}_{\Theta_F} F^T \\ &= F \Theta_F F^T\end{aligned}\quad (6.54)$$

'dir. O halde son haliyle

$$[I(x)] = X(x) F^T K \Theta A \quad (6.55)$$

olur. Şimdi sıralama noktalarımızı matrislerde yerine yazarsak

$$[I(x_i)] = X(x_i) F^T K \Theta A \quad (6.56)$$

yani

$$I = X F^T K \Theta A \quad (6.56)$$

olur. Burada

$$I = \begin{bmatrix} I(x_0) \\ I(x_1) \\ \vdots \\ I(x_N) \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

şeklindedir.

6.4 Başlangıç Koşullarının Matris Gösterimi

Bölüm 5.2.2'deki ikinci özellikten yararlanacak olursak

$$H'_1(x) = 2.1. H_0(x)$$

$$H'_2(x) = 2.2. H_1(x)$$

$$H'_3(x) = 2.3. H_2(x)$$

...

$$H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x) \quad (6.58)$$

olacaktır. Bunları matris formunda yazacak olursak

$$\begin{aligned}H'(x) &= [H'_0(x) \ H'_1(x) \ \dots \ H'_N(x)] \\ \Delta &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 2n & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (6.59)$$

olmak üzere

$$H'(x) = H(x) \Delta^T \quad (6.60)$$

olur. Aynı bağıntı yardımıyla

$$D^j H(x) = H(x)M^j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6.61)$$

O zaman

$$y^j(c) = \underbrace{H(c)M^j}_{U_j}$$

olmak üzere

$$U_j A = \mu_j, \quad j = 0, \dots, m-1 \quad (6.62)$$

elde edilir.

6.5 Yöntemin Matris Formunun Elde Edilmesi

Sırasıyla (6.1)-(6.4) bölümlerinde elde edilen matrisleri problemimizde yerine yazacak olursak

$$\underbrace{[N_k X(B^T)^k F^T + M X^{-\alpha} X \Omega F^T - \lambda X F^T K \Theta]}_W A = G \quad (6.59)$$

şeklinde $(N+1) \times (N+1)$ cebirsel denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi daha sade olarak

$$WA = G \quad (6.60)$$

olarak ifade edilebilir. Daha açık olarak

$$[W; G] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \dots & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \dots & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N-1)0} & w_{(N-1)1} & \dots & w_{(N-1)N} & ; & g(x_{N-1}) \\ w_{N0} & w_{N1} & \dots & w_{NN} & ; & g(x_N) \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

ile belirtilen arttırılmış matrisi yazabiliriz. Bölüm (6.2)'de verilen başlangıç koşullarına dönecek olursak,

$$U_j A = \mu_j \text{ ya da } [U_j; \mu_j] \\ U_j = [u_{j0} \ u_{j1} \ \dots \ u_{jN}], \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (6.62)$$

olur. Yani

$$[U_j; \mu_j] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0N} & ; & \mu_0 \\ u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1N} & ; & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m-2)0} & u_{(m-2)1} & \dots & u_{(m-2)N} & ; & \mu_{m-2} \\ u_{(m-1)0} & u_{(m-1)1} & \dots & u_{(m-1)N} & ; & \mu_{m-1} \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

olur. Şimdi ise (6.61) matris formunda son m satır silinip yerine (6.63) yazılırsa

$$[\tilde{W}; \tilde{G}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{00} & \dots & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \dots & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N-1-m)0} & w_{(N-1-m)1} & \dots & w_{(N-1-m)N} & ; & g(x_{N-1-m}) \\ w_{(N-m)0} & w_{(N-m)1} & \dots & w_{(N-m)N} & ; & g(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0N} & ; & \mu_0 \\ u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1N} & ; & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m-1)1} & u_{(m-1)2} & \dots & u_{(m-1)N} & ; & \mu_{m-1} \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

artırılmış matrisi elde edilir. Buna göre

$$\tilde{W}A = \tilde{G} \quad (6.65)$$

dir. Eğer $rank \tilde{W} = rank[\tilde{W}; \tilde{G}] = (N + 1)$ ise; yani $|\tilde{W}| \neq 0$ ise o zaman çözüm

$$A = (\tilde{W})^{-1} \tilde{G} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T \quad (6.66)$$

olarak elde edilir.

Bu bölümde Hermit sıralama yöntemini bazı test problemlerine uygulayarak yaklaşık çözümlerimizi MATHEMATICA programı yardımıyla elde etmeye çalışacağız.

Örnek 1.

$$y''(x) - 2xy'(x) + y(x) + y^{0.5}(x) = g(x) + \int_0^1 xty(t)dt \quad (7.1)$$

kesirli mertebeden Fredholm-integro denkleminin yaklaşık çözümünü $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ başlangıç koşulları altında bulunuz.

Problemimizde görüldüğü gibi $\alpha = 0.5$, $N_0(x) = 1$, $N_1(x) = -2x$, $N_2(x) = 1$, $M(x) = 1$, $g(x) = -9x^2 + \frac{6}{\Gamma(2.5)}x^{1.5} + 1.41667x - \frac{2}{\Gamma(1.5)}x^{0.5} + 7$, $\lambda = 1$ ve çekirdek fonksiyonu $K(x, t) = xt$ ($0 \leq x, t \leq 1$) olarak verilmiştir. Problemimizin tam çözümü $y(x) = 3x^2 - 2x + 1$ 'dir. Biz $N = 4$ için yaklaşık çözümünü elde etmeye çalışacağız. $N = 4$ için Hermit sıralama noktalarımız sırasıyla $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$ ve $x_4 = 1$ 'dir. Çözümümüzü Hermit polinomu formunda

$$y(x) = \sum_{n=0}^4 a_n H_n(x) \quad (7.2)$$

olarak kabul edelim. Bölüm 6.2'deki tanımlamalara göre (7.1) denkleminin matris formu

$$\left\{ \sum_{k=0}^2 N_k X (B^T)^k F^T + M X^{-0.5} X \Omega F^T - \lambda X F^T K \Theta \right\} A = G \quad (7.3)$$

olur. Daha açık haliyle ifade edecek olursak

$$\underbrace{\{N_2X(B^T)^2F^T + N_1X(B^T)F^T + N_0XF^T + MX^{-0.5}X\Omega F^T - \lambda XF^TK\Theta\}}_W A = G$$

$$WA = G \Rightarrow [W; G]$$

olur. $\alpha = 0.5$ için matrislerimiz

$$N_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} -0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.50015 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.5001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 6.97758 \\ 6.22733 \\ 5.45811 \\ 3.97762 \\ 1.67343 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.250075 & 0.0625375 & 0.0156391 & 0.00391094 \\ 1 & 0.50005 & 0.25005 & 0.125038 & 0.0622525 \\ 1 & 0.750025 & 0.562538 & 0.421917 & 0.316448 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_{0.5} = \begin{bmatrix} x^{-0.5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-0.5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-0.5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-0.5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-0.5} \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.12838 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.50451 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.80541 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.06332 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.9999 & 1 & -0.666467 & -4 & -0.8012 \\ 1 & 1.33333 & 0 & -4.8 & -6.66667 \\ -0.666467 & 0 & 1.86627 & 1.33333 & -11.6547 \\ -4 & -4.8 & 1.33333 & 18.7429 & 16 \\ -0.8012 & -6.66667 & -11.6547 & 16 & 106.601 \end{bmatrix}$$

olur. $y(0) = 1$ ve $y'(0) = -2$ başlangıç koşulları için sırasıyla

$$[u_0; \mu_0] = [1 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 12 \quad ; \quad 1]$$

$$[u_1; \mu_1] = [0 \quad 2 \quad 0 \quad -12 \quad 0 \quad ; \quad -2]$$

elde edilir. Matrislerimizi ve başlangıç koşullarımızı (7.3) cebirsel denklem sisteminde yerlerine yazarsak,

$$[\tilde{W}; \tilde{G}] = \begin{bmatrix} 0.99995 & 0.0223009 & 6.00001 & -0.129165 & -839997 & ; & 6.97758 \\ 0.874963 & 0.461682 & 6.00214 & 8.65952 & -71.3647 & ; & 6.22733 \\ 0.749975 & 0.262382 & 5.12741 & 19.1804 & -27.9363 & ; & 5.45811 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & ; & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & 0 & ; & -2 \end{bmatrix}$$

artırılmış matrisini elde ederiz. Sistemin çözümünden

$$A = [2.5 \quad -1 \quad 0.75 \quad 1.11022 \times 10^{-16} \quad 3.46945 \times 10^{-17}]^T$$

sonucu elde edilir. $N = 2, 4$ ve 6 için elde edilen yaklaşık çözümlerle tam çözümün karşılaştırması ve mutlak hata değerleri Tablo 7.1'de verilmiştir. $N = 4$ için yaklaşık ve tam çözüm grafikleri ise Şekil 7.1'de gösterilmiştir.

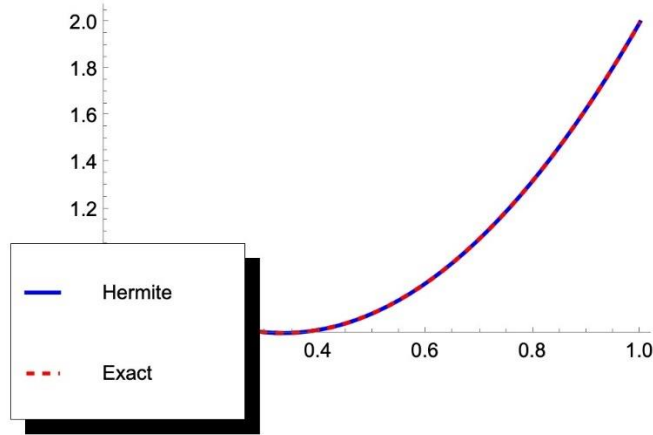
Tablo 7.1 $N = 2, 4$ ve 6 için yaklaşık ve tam çözümün karşılaştırması ve mutlak hata değerleri

x	Tam Çözüm	Hermit Sıralama Yöntemi $N = 2$	Mutlak Hata $E(X_i)$	Hermit Sıralama Yöntemi $N = 4$	Mutlak Hata $E(x_i)$	Hermit Sıralama Yöntemi $N = 6$	Mutlak Hata $E(X_i)$
0	1	1	$2.2204 \cdot 10^{-16}$	1	$2.2204 \cdot 10^{-16}$	1	0
0.1	0.83	0.83	$2.2204 \cdot 10^{-16}$	0.83	$2.2204 \cdot 10^{-16}$	0.83	0
0.2	0.72	0.72	$1.1102 \cdot 10^{-16}$	0.72	$2.2204 \cdot 10^{-16}$	0.72	0
0.3	0.67	0.67	0	0.67	$3.3306 \cdot 10^{-16}$	0.67	0
0.4	0.68	0.68	$1.1102 \cdot 10^{-16}$	0.68	$2.2204 \cdot 10^{-16}$	0.68	$1.1102 \cdot 10^{-16}$
0.5	0.75	0.75	$1.1102 \cdot 10^{-16}$	0.75	$2.2204 \cdot 10^{-17}$	0.75	0
0.6	0.88	0.88	$2.2204 \cdot 10^{-16}$	0.88	$2.2204 \cdot 10^{-18}$	0.88	0

Tablo 7.1 $N = 2, 4$ ve 6 için yaklaşık ve tam çözümün karşılaştırması ve mutlak

hata değerleri (devamı)

0.7	1.07	1.07	$2.2204 \cdot 10^{-16}$	1.07	0	1.07	0
0.8	1.32	1.32	$4.4408 \cdot 10^{-16}$	1.32	0	1.32	0
0.9	1.63	1.63	$6.6613 \cdot 10^{-16}$	1.63	0	1.63	0
1	2	2	$8.8817 \cdot 10^{-16}$	2	$4.4408 \cdot 10^{-16}$	2	0

**Şekil 7.1** $N = 4$ için yaklaşık ve tam çözüm grafikleri**Örnek 2.**

$$y''(x) + xy(x) + y^{0.2}(x) = g(x) + \int_0^1 xty(t)dt \quad (7.4)$$

kesirli mertebeden Fredholm-integro diferansiyel denklemini $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ başlangıç koşulları altında inceleyiniz.

Burada $\alpha = 0.2$, $N_0(x) = x$, $N_1(x) = 0$, $N_2(x) = 1$, $M(x) = 1$, $g(x) = -6x^2 + \frac{3}{\Gamma(2.5)}x^{1.5} + 2.41667x - \frac{1}{\Gamma(1.5)}x^{0.5} - 3$, $\lambda = 1$ ve çekirdek fonksiyonu ise $K(x, t) = xt$ ($0 \leq x, t \leq 1$) olarak verilmiştir. Problemimizin tam çözümü $y(x) = e^x + 1$ 'dir. Biz $N = 4$ için, farklı α değerleri alarak yaklaşık çözümlerini inceleyeceğiz. $N = 4$ için Hermit sıralama noktalarımız $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 =$

0.5, $x_3 = 0.75$, $x_3 = 0.75$ ve $x_4 = 1$ 'dir. Çözümümüzü Hermit polinomu formunda

$$y(x) = \sum_{n=0}^4 a_n H_n(x) \quad (7.5)$$

olarak kabul edelim. Bölüm 6.2'deki tanımlamalara göre (7.5) denkleminin matris formu

$$\left\{ \sum_{k=0}^2 N_k X(B^T)^k F^T + M X^{-0.2} X \Omega F^T - \lambda X F^T K \Theta \right\} A = G \quad (7.6)$$

olur. Daha açık haliyle ifade edecek olursak

$$\underbrace{\{N_2 X(B^T)^2 F^T + N_1 X(B^T) F^T + N_0 X F^T + M X^{-0.2} X \Omega F^T - \lambda X F^T K \Theta\}}_W A = G$$

$$WA = G \Rightarrow [W; G]$$

olur. $\alpha = 0.2$ için matrislerimiz

$$N_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.250075 & 0.0625375 & 0.0156391 & 0.00391094 \\ 1 & 0.50005 & 0.25005 & 0.125038 & 0.0622525 \\ 1 & 0.750025 & 0.562538 & 0.421917 & 0.316448 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_{0.2} = \begin{bmatrix} x^{-0.2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-0.2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-0.2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-0.2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-0.2} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.0002 \\ 3.2703 \\ 4.99172 \\ 7.33823 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.07367 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.19297 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.27818 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.34545 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -0.666667 & -4 & -0.8 \\ 1 & 1.33333 & 0 & -4.8 & -6.66667 \\ -0.666667 & 0 & 1.86627 & 1.33333 & -11.6571 \\ -4 & -4.8 & 1.33333 & 18.7429 & 16 \\ -0.8 & -6.66667 & -11.6571 & 16 & 106.616 \end{bmatrix}$$

matrislerimiz elde edilir. $y(0) = 2$ ve $y'(0) = 1$ başlangıç koşulları için

$$[u_0; \mu_0] = [1 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 12 \quad ; \quad 2]$$

$$[u_1; \mu_1] = [0 \quad 2 \quad 0 \quad -12 \quad 0 \quad ; \quad 1]$$

elde edilir. Matrislerimizi ve başlangıç koşullarımızı (7.6) cebirsel denklem sisteminde yerlerine yazarak,

$$[\tilde{W}; \tilde{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 1.3562 \cdot 10^{-11} & 6 & -8.0908 \cdot 10^{-11} & -84 & ; & 3 \\ 0.875 & 1.04169 & 6.64353 & 5.68567 & -78.7156 & ; & 3.60112 \\ 0.75 & 1.899996 & 8.37036 & 14.2683 & -60.2351 & ; & 4.37047 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & ; & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

artırılmış matrisini elde ederiz. Sistemin çözümünden

$$A = [2.29032 \quad 0.62186 \quad 0.165321 \quad 0.02031 \quad 0.00336009]^T$$

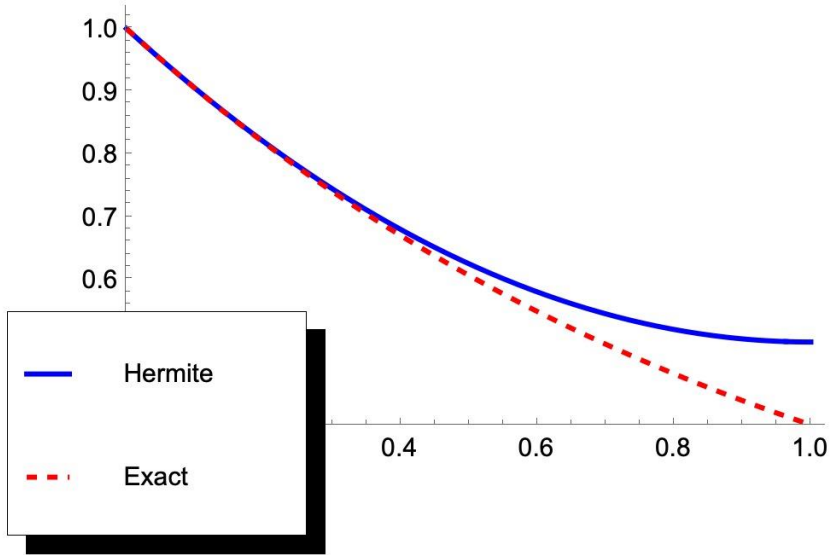
sonucu elde edilir. $N = 2, 4$ ve 6 için elde edilen yaklaşık çözümlerle tam çözümün karşılaştırması ve mutlak hata değerleri Tablo 7.2'de verilmiştir. Ayrıca $N = 4$ için yaklaşık ve tam çözüm grafikleri ise Şekil 7.2'de gösterilmiştir.

Tablo 7.2 $N = 2, 4$ ve 6 için yaklaşık çözümlerle tam çözümün karşılaştırması ve mutlak hata değerleri

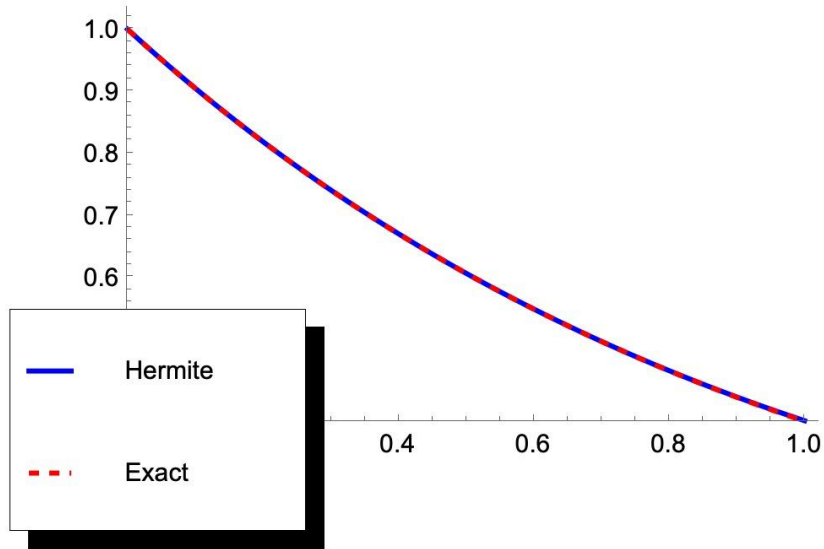
x	Tam Çözüm	Hermit Sıralama Yöntemi $N = 2$	Mutlak Hata $E(X_i)$	Hermit Sıralama Yöntemi $N = 4$	Mutlak Hata $E(x_i)$	Hermit Sıralama Yöntemi $N = 6$	Mutlak Hata $E(X_i)$
0	2	2	0	2	$4.4408.10^{-16}$	2	$4.4408.10^{-16}$
0.1	2.10517	2.105	$1.7091.10^{-4}$	2.10517	$3.0793.10^{-6}$	2.10517	$1.7687.10^{-8}$
0.2	2.2214	2.22	$1.4027.10^{-3}$	2.22139	$1.7030.10^{-5}$	2.2214	$6.8426.10^{-8}$
0.3	2.34986	2.345	$4.8588.10^{-3}$	2.34982	$3.6789.10^{-5}$	2.34986	$1.1046.10^{-7}$
0.4	2.49182	2.48	$1.1824.10^{-2}$	2.49177	$5.0584.10^{-5}$	2.49182	$1.4368.10^{-7}$
0.5	2.64872	2.625	$2.3721.10^{-2}$	2.64867	$5.2798.10^{-5}$	2.64872	$1.9166.10^{-7}$
0.6	2.82212	2.78	$4.2118.10^{-2}$	2.82206	$5.8193.10^{-5}$	2.82212	$2.351.10^{-7}$
0.7	3.01375	2.945	$6.8752.10^{-2}$	3.01364	$1.1762.10^{-4}$	3.01375	$2.3874.10^{-7}$
0.8	3.22554	3.12	$1.0554.10^{-1}$	3.22521	$3.3540.10^{-4}$	3.22554	$4.2921.10^{-7}$
0.9	3.4596	3.305	$1.5460.10^{-1}$	3.45871	$8.8850.10^{-4}$	3.4596	$1.9975.10^{-6}$
1	3.71828	3.5	$2.1828.10^{-1}$	3.71623	$2.0477.10^{-3}$	3.71827	$8.4187.10^{-6}$

Tablo 7.3 $N = 4$ 'te $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6$ ve 0.8 için yaklaşık çözümlerle tam çözümün karşılaştırması

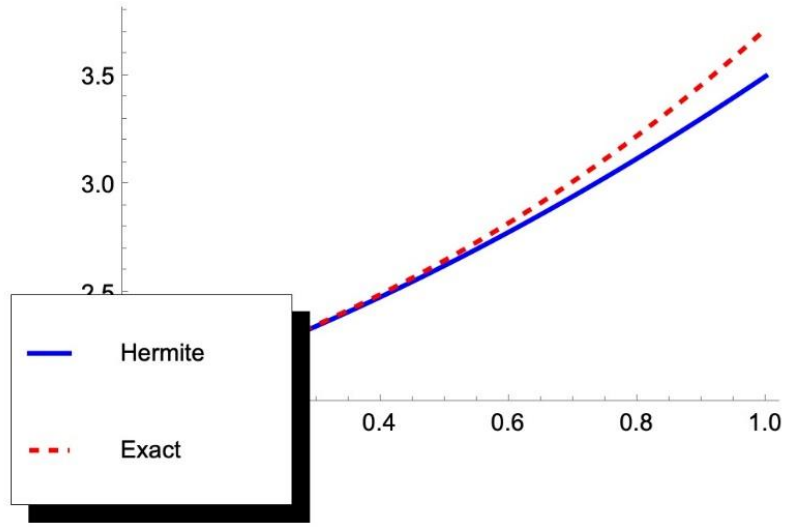
x	Tam Çözüm	Hermit Sıralama Yöntemi $N = 4$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$
0	2	2	2	2	2	2
0.1	2.10517	2.10517	2.10517	2.10517	2.10517	2.10517
0.2	2.2214	2.22139	2.22139	2.22139	2.22139	2.22139
0.3	2.34986	2.34982	2.34982	2.34982	2.34982	2.34982
0.4	2.49182	2.49177	2.49177	2.49178	2.49178	2.49178
0.5	2.64872	2.64867	2.64867	2.64867	2.64867	2.64868
0.6	2.82212	2.82206	2.82206	2.82206	2.82207	2.82207
0.7	3.01375	3.01364	3.01364	3.01364	3.01364	3.01365
0.8	3.22554	3.22521	3.22521	3.22521	3.22521	3.22521
0.9	3.4596	3.45871	3.45871	3.45872	3.45872	3.45871
1	3.71828	3.71623	3.71623	3.71623	3.71623	3.71622



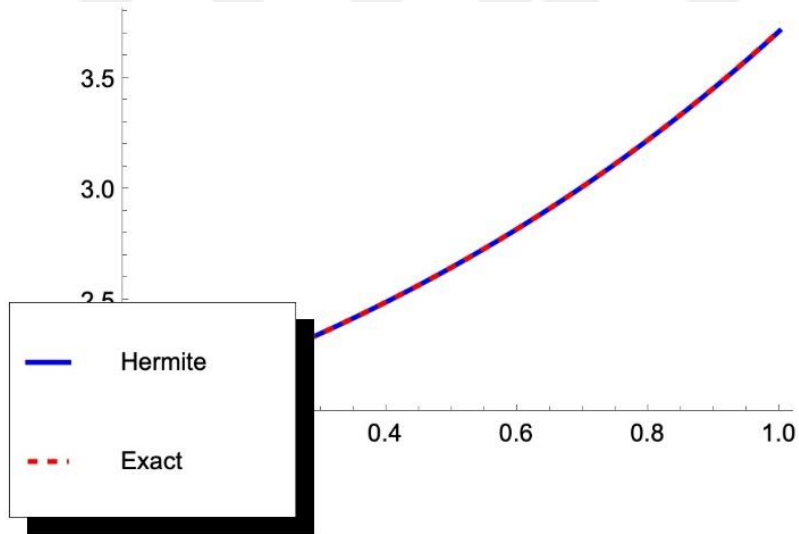
Şekil 7.2 $N = 2$ için yaklaşık ve tam çözüm grafikleri



Şekil 7.3 $N = 4$ için yaklaşık ve tam çözüm grafikleri



Şekil 7.4 $N = 2$ ve $\alpha = 0.2$ için yaklaşık ve tam çözüm grafikleri



Şekil 7.5 $N = 4$ ve $\alpha = 0.2$ için yaklaşık ve tam çözüm grafikleri

- [1] Babolian, E., Javadi, S., & Yousefi, A. (2019). A computational approach for solving fractional integral equations based on Legendre collocation method. *Mathematical Sciences*, 13(5), 231-240.
- [2] Cai, H., & Chen, Y. (2018). A fractional order collocation method for second kind Volterra integral equations with weakly singular kernels. *Journal of Scientific Computing*, 75, 970-992.
- [3] Ebadi, M.J., & Radmanesha, M. (2020). A local mesh-less collocation method for solving a class of time-dependent fractional integral equations: 2D fractional evolution equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, 113, 372-381.
- [4] Eftekhari, T., Maleknejad, K., & Rashidinia, J. (2021). Numerical solutions of two-dimensional nonlinear fractional Volterra and Fredholm integral equations using shifted Jacobi operational matrices via collocation method. *Journal of King Saud University- Science*, 33(1).
- [5] Liu, S., Wang, T., & Zhang, Z. (2023). Singular expansions and collocation methods for generalized Abel integral equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, 429.
- [6] Xu, Q., & Zheng, Z. (2019). Spectral Collocation Method for Fractional Differential/Integral Equations with Generalized Fractional Operator. *International Journal of Differential Equations*, 2019(2), 1-14.
- [7] Babolian, E., Javadi, S., & Yousefi, A. (2018). *The Legendre Spectral-Collocation method for a class of fractional integral equations*. Department of Computer Science, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, Tehran, Iran.
- [8] Eslahchi, M.R., Dehghanb, M., & Parvizi, M. (2014). Application of the collocation method for solving nonlinear fractional integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 257, 105–128.

- [9] Kumar, K., Pandey, R.K., & Sharma, S. (2018). Collocation method with convergence for generalized fractional integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 342, 419–430.
- [10] Lima, P.M., Nemati, S., & Sedaghat, S. (2020). Legendre wavelet collocation method combined with the Gauss–Jacobi quadrature for solving fractional delay-type integro-differential equations. *Applied Numerical Mathematics* 149, 99–112.
- [11] Babolian, E., Javadi, S., & Taheri, Z. (2017). Numerical solution of stochastic fractional integro-differential equation by the spectral collocation method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 321, 336–347.
- [12] Dassios, I., & Jebreen, H.B. (2022). On the Wavelet Collocation Method for Solving Fractional Fredholm Integro-Differential Equations. *Mathematics*, 10(8), 1272.
- [13] Huang, C., & Ma, X. (2014). Spectral collocation method for linear fractional integro-differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 38, 1434–1448.
- [14] Shi, X. (2022). Spectral Collocation Methods for Fractional Integro Differential Equations with Weakly Singular Kernels. *Journal of Mathematics* 2022, 1-9.
- [15] Jebreen, H.B. (2023). The Müntz–Legendre Wavelet Collocation Method for Solving Weakly Singular Integro-Differential Equations with Fractional Derivatives. *Fractal and Fractional*, 7(10), 763.
- [16] Ahmad, H., Amin, R., Hafeez, M.B., Shah, K., & Sumelka, W. (2021). Theoretical and computational analysis of nonlinear fractional integro-differential equations via collocation method. *Chaos, Solitons and Fractals* 151.
- [17] Mehra, M., & Singh, A.K. (2021). Wavelet collocation method based on Legendre polynomials and its application in solving the stochastic fractional integro-differential equations. *Journal of Computational Science*, 51.

- [18] Agrawal, O.P., & Kumar, P. (2006). An approximate method for numerical solution of fractional differential equations. *Signal Processing*, 86(10), 2602-2610.
- [19] Mishra, L.N., Mishra, V.N., & Paul, S.K. (2023). Approximate numerical solutions of fractional integral equations using Laguerre and Touchard polynomials. *Palestine Journal of Mathematics*, 12(3), 416-431.
- [20] Sun, K., & Zhu, M. (2015). Numerical Algorithm to Solve a Class of Variable Order Fractional Integral-Differential Equation Based on Chebyshev Polynomials. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015(5), 1-10.
- [21] Ezzati, R., & Najafalizadeh, S. (2016). Numerical methods for solving two-dimensional nonlinear integral equations of fractional order by using two-dimensional block pulse operational matrix. *Applied Mathematics and Computation*, 280, 46–56.
- [22] Dehghan, M., Esmaeili, S., & Shamsi, M. (2013). Numerical solution of fractional differential equations via a Volterra integral equation approach. *Central European Journal of Physics*, 11(10).
- [23] Kilicman, A., Majid, Z.A., Rabiei, F., & Zabidi, N.A. (2020). Numerical Solutions of Fractional Differential Equations by Using Fractional Explicit Adams Method. *Mathematics*, 8(10).
- [24] Abdeljawad, T., Agarwal, R.P., Karapinar, E., & Kumari, P.S. (2019). Solutions of the Nonlinear Integral Equation and Fractional Differential Equation Using the Technique of a Fixed Point with a Numerical Experiment in Extended b-Metric Space. *Symmetry*, 11(5), 1-18.
- [25] Huang, C., & Ma, X. (2013). Numerical solution of fractional integro-differential equations by a hybrid collocation method. *Applied Mathematics and Computation*, 219(12).
- [26] Ordokhani, Y., & Rahimi, N. (2014). Numerical Solution of Fractional Volterra Integro-differential Equations via the Rationalized Haar Functions. *J. Sci. Kharazmi University*, 14(3).
- [27] Jamal, A., Kamran, Li, X., & Wang, J. (2021). Numerical Solution of Fractional-Order Fredholm Integrodifferential Equation in the Sense of

- Atangana–Baleanu Derivative. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, 8.
- [28] Hou, J., & Yang, C. (2013). Numerical solution of integro-differential equations of fractional order by Laplace decomposition method. *WSEAS TRANSACTIONS on MATHEMATICS*, 12(12).
- [29] Pedas, A., Tamme, E., & Vikerpuur, M. (2020). Numerical solution of linear fractional weakly singular integro-differential equations with integral boundary conditions. *Applied Numerical Mathematics*, 149(6).
- [30] Lima, P.M., & Nemati, S. (2018). Numerical solution of nonlinear fractional integro-differential equations with weakly singular kernels via a modification of hat functions. *Applied Mathematics and Computation*, 327(2018).
- [31] Akhavan, S., Ghazanfari, B., & Roohollahi, A. (2020). Numerical solution of the mixed Volterra–Fredholm integro-differential multi-term equations of fractional order. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 376(4).
- [32] Boonklurb, R. Duangpan, A., & Juytai, M. (2021). Numerical Solutions for Systems of Fractional and Classical Integro-Differential Equations via Finite Integration Method Based on Shifted Chebyshev Polynomials. *Fractal and Fractional*, 5(3), 103.
- [33] Arikoglu, A., & Ozkol, İ. (2009). Solution of fractional integro-differential equations by using fractional differential transform method. *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(2).
- [34] Liang, H., & Stynes, M. (2021). A general collocation analysis for weakly singular Volterra integral equations with variable exponent. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 1-27.
- [35] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., & Flannery, B.P. (1992). *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing Second Edition*. Cambridge University Press Publishers.
- [36] Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E., & Trijullo, A. (2012). *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods* (2nd ed.). World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.

- [37] Li, C., & Zeng, F. (2015). *Numerical Methods for Fractional Calculus*. Chapman and Hall/CRC Publishers.
- [38] Akgönüllü, N., & Ayaz, F. (2018). şenelation method for fractional order differential equations. *An International Journal of Optimization and Control: Theories and Applications*, 8(2), 228-236.
- [39] Lazarevic, M.P., Rapaic, M.R., & Sekara, T.B. (2014). *Introduction to Fractional Calculus with Brief Historical Background*. WSEAS Press, Serbia.
- [40] Machado, J.A.T. (2022). The evolution of fractional calculus. *CHAOS Theory and Applications in Applied Sciences and Engineering*, 4(2), 59-63.
- [41] Wheeler, N. (1997). *Construction and Physical Application of The Fractional Calculus*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., US.
- [42] Carpinteri, A., & Mainardi, F. (Ed.). (1997). *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Springer-Verlag Wien, New York, 223-276.
- [43] Das, S. (2008). *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Springer Berlin Heidelberg, New York.
- [44] Galhano, A., Machado, J.A.T., & Trujillo, J.J. (2013). *On Development of Fractional Calculus During the Last Fifty Years*. Springer, Hungary.
- [45] Kimeu, J.M. (2009). *Fractional Calculus: Definitions and Applications*. Masters Theses and Specialist Projects, Western Kentucky University, Kentucky. Erişim adresi <https://digitalcommons.wku.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1115&context=theses>
- [46] Ünlü, C. (2014). *Kesirli Türevli Diferansiyel Denklemler ve Çözüm Yöntemleri*. Doktora tezi, İstanbul Üniversitesi, İstanbul. Erişim adresi <http://nek.istanbul.edu.tr:4444/ekos/TEZ/52670.pdf>
- [47] Kilbas, A.A., Srivastava H.M., & Trujillo, J.J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equation*. Elsevier B.V., Amsterdam.
- [48] Aksoy, Y. (1983). *İntegral Denklemler* (1. Baskı, Baskı Numarası:166). Yıldız Üniversitesi Yayınları.

- [49] Rahman, M. (2007). *Integral Equations and their Applications*. Wit Press, Dalhausie Üniversitesi, Kanada.
- [50] Wazwaz, A.M. (2011). *Linear and Nonlinear Integral Equations Methods and Applications*. Higher Education Press, Springer.
- [51] Köklü, K.Ö. (2018). *İntegral Denklemler*. Papatya Bilim Üniversite Yayıncılığı.
- [52] Vikipedi Özgür Ansiklopedi. *Hermit polinomu*. Erişim tarihi: 10.04.2024, https://tr.wikipedia.org/wiki/Hermit_polinomu
- [53] Wolfram Research. *Hermite, Charles(1822-1901)*. Erişim tarihi:10.04.2024, <https://scienceworld.wolfram.com/biography/Hermite.html>
- [54] Chihara, T.S. (1955). *Generalized Hermite Polynomials*. Thesis, Purdue Universty, Purdue. Erişim adresi <https://www.proquest.com/docview/302015034>
- [55] Szego, G. (1975). *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society Colloquium Publications. Providence, RI:American Mathematical Society/AMS.
- [56] Chaggara, H. (2007). Operational rules and a generalized Hermite polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, Elsevier*, 332(1), 11-21.
- [57] Dominici, D. (2007). Asymptotic analysis of the Hermite polynomials from their differential-difference equation. *Journal of Difference Equations and Applications*, 13(12), 1115-1128.
- [58] Bell, W.W. (1968). *Special Functions for Scientist and Engineers*. Canada: David Van Nostrand Company, 156-163.
- [59] Pirim, N.A. (2014). *Kesirli mertebeden değişkenli diferansiyel denklem ve denklem sistemlerinin hermite collocation yöntemi ile yaklaşık çözümleri*. Doktora tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara.
- [60] Ablay, M.V. (2019). *Bazı kesirli mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin hermite sıralama yöntemi ile sayısal çözümleri*. Yüksek lisans tezi, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Osmaniye.

- [61] Cai, M., & Li, C. (2020). *Theory and Numerical Approximations of Fractional Integrals and Derivatives*. Siam, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- [62] Sezer, M. (1996). A method for the Approximate solution of the Second-Order Linear Differential Equations in terms of Taylor Polynomials. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27, 821-834.
- [63] Karamete, A., & Sezer, M. (2002). A Taylor Collocation Method for the Solution of Linear Integro-Differential Equations. *International Journal of Computational Mathematics*, 79, 987-1000.



TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirileri

1. Daş, S.E. ve Çelebi, B. (2024). *Numerical Solution of Some Integral Equations*. 7th International Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA-2024), 8-11 May 2024.

