

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**PİSAGOR HODOGRAFLAR EĞRİLERİ VE PİSAGOR NORMAL YÜZEYLER
ÜZERİNDE RASYONEL HAREKETLERİN GEOMETRİSİ**

DOKTORA TEZİ

Bahar KALKAN TAŞDEMİR
Danışman: Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ
İkinci Danışman: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

VAN – 2024

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**PİSAGOR HODOGRAF EĞRİLER VE PİSAGOR NORMAL YÜZEYLER
ÜZERİNDE RASYONEL HAREKETLERİN GEOMETRİSİ**

DOKTORA TEZİ

Bahar KALKAN TAŞDEMİR

Tez Savunma Sınavı Jüri Üyeleri
Prof. Dr. Esin İnan ESKİTAŞÇIOĞLU (Başkan)
Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ (Danışman)
Prof. Dr. Mehmet Nuri ALMALI (Üye)
Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI (Üye)
Doç. Dr. Ali ÇAKMAK (Üye)

KABUL VE ONAY SAYFASI

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ danışmanlığında, Bahar KALKAN TAŞDEMİR tarafından sunulan “Pisagor Hodograf Eğriler ve Pisagor Normal Yüzeyler Üzerinde Rasyonel Hareketlerin Geometrisi” başlıklı bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 09/05/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Esin İnan ESKİTAŞÇIOĞLU

İmza:

Üye: Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ

İmza:

Üye: Prof. Dr. Mehmet Nuri ALMALI

İmza:

Üye: Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

İmza:

Üye: Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun / / tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

Prof. Dr. Harun AKKUŞ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İmza

Bahar KALKAN TAŞDEMİR



ÖZET

PİSAGOR HODOGRAF EĞRİLER VE PİSAGOR NORMAL YÜZEYLER ÜZERİNDE RASYONEL HAREKETLERİN GEOMETRİSİ

KALKAN TAŞDEMİR, Bahar
Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ
İkinci Danışman: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ
Mayıs 2024, 127 sayfa

Bir rasyonel hareketin, bir noktaya, bir doğruya ve bir düzleme etkisinin yörüngeleri olan; eğri, regle yüzey ve zarf yüzeyinin Pisagor hodograf ve Pisagor normal özellikleriyle ilişkilerini incelediğimiz bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

Tezin ilk üç bölümünde sırasıyla; giriş, kaynak bildirisi ve tezde kullanılacak temel kavramlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, rasyonel hareketin noktaya etkisiyle oluşan yörünge eğrisinin Pisagor hodograf eğri olma durumu açıklanmıştır.

Beşinci bölümde, rasyonel hareketin doğruya etkisiyle oluşan yörünge yüzeyinin açılabilir yüzey olma durumuyla Pisagor hodograflık özelliği arasında bir ilişki bulunmuştur.

Altıncı bölümde, tek parametrelili rasyonel hareketin bir düzleme etkisiyle oluşan düzlemler ailesini oskülatör, normal veya rektifyen düzlemleri olarak kabul eden eğrinin bir Pisagor hodograf eğri olduğu keşfedilmiştir. Daha sonra, iki parametrelili rasyonel hareketin bir düzleme etkisiyle oluşan düzlemler ailesinin zarf yüzeyi ile Pisagor normal yüzey oluşturulmuştur.

Son olarak, yedinci bölümde, tezde yapılan çalışmalar için tartışma sunulmuş ve sonuçlar özetlenirken açık problemlere dikkat çekilmiştir.

Anahtar kelimeler: Dual kuaterniyon, Pisagor hodograf eğri, Pisagor normal yüzey, Rasyonel hareket, Regle yüzey, Study kuadriği, Zarf yüzeyi.



ABSTRACT

GEOMETRY OF RATIONAL MOTIONS ON PYTHAGOREAN HODOGRAPH CURVES AND PYTHAGOREAN NORMAL SURFACES

KALKAN TAŞDEMİR, Bahar

Ph.D. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ

Second Supervisor: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

May 2024, 127 pages

This thesis consists of seven chapters in which we investigate the relationships between the Pythagorean hodograph and Pythagorean normal properties of curves, ruled surfaces, and envelope surfaces resulting from the act of a rational motion on a point, a line, and a plane, respectively.

The first three sections of the thesis successively cover the introduction, literature review and basic concepts to be used in the thesis are included.

In the fourth section, the case where the trajectory curve resulting from the act of rational motion on a point becomes a Pythagorean hodograph curve is explained.

In the fifth section, a relationship is found between the property of the trajectory ruled surface becoming a developable surface under the act of rational motion on a line and the Pythagorean hodograph property.

In the sixth section, it is discovered that the curve that accepts the family of planes formed by the act of a one-parameter rational motion on a plane as osculating, normal, or rectifying planes, is a Pythagorean hodograph curve. Then, the Pythagorean normal surface is created with the envelope surface of the family of planes formed by the act of a two-parameter rational motion on a plane.

Finally, in the seventh section, a discussion is presented for the studies carried out in the thesis and open problems are pointed out while summarizing the results.

Keywords: Dual quaternion, Envelope surface, Pythagorean hodograph curve, Pythagorean normal surface, Rational motion, Ruled surface, Study quadric.



TEŞEKKÜR

Doktora tez çalışmam süresince, sonsuz yardımları ve değerli önerileri ile bu yolculukta bana ışık tutan danışmanım Sayın Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ'a ve ikinci danışmanım Sayın Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ'a teşekkür ederim. Bilgi ve tecrübeleriyle çalışmama yön veren, akademik rehberlikleriyle beni motive eden bu değerli hocalarım olmadan bu çalışma mümkün olamazdı.

Tez izleme komitesi üyelerim Sayın Prof. Dr. Esin ESKİTAŞÇOĞLU ve Sayın Prof. Dr. Mehmet Nuri ALMALI'ya, çalışmamı titizlikle değerlendirdikleri ve verimli geri bildirimde bulundukları için teşekkür ederim. Katkıları sayesinde bu tez daha kapsamlı ve sağlam bir temele oturmuştur.

Hayatımın en önemli destekçisi, sabır ve anlayışıyla bana her zaman güç veren sevgili eşim Arif Semih TAŞDEMİR'e en derin sevgi ve saygılarımı sunuyorum. Bu zorlu süreçte bana olan inancını hiçbir zaman kaybetmediği için sonsuz teşekkürler.

Ayrıca, akademik ve kişisel gelişimime katkıda bulunan Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Bölümü'nün değerli akademik kadrosuna da teşekkür etmek isterim. Her biriyle çalışmak ve öğrenmek büyük bir ayrıcalıktı.

Doktora eğitimim sırasında TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB) 2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı tarafından sağlanan destek için teşekkür etmek isterim.

Son olarak, burada adını anmadığım ancak hayatımda önemli rol oynayan, ilham veren, destek olan herkese teşekkür ederim. Bu tez çalışmasının her aşamasında yanımda olan herkese tekrar teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

2024

Bahar KALKAN TAŞDEMİR



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR	xiii
EKLER DİZİNİ	xv
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	3
3. TEMEL KAVRAMLAR	9
3.1 Hesaplamalı Doğru Geometrisi	9
3.1.1 Klein Doğru Uzay Modeli.....	9
3.1.2 Klein Kuadriği.....	11
3.2 Kuaterniyon Cebiri	13
3.2.1 Kuaterniyonlar	14
3.2.2 Dual Kuaterniyonlar.....	16
3.3 Study Kinematik Dönüşümü	20
3.3.1 Study Kuadriği	21
3.4 Hareket Geometrisi.....	23
3.5 Regle Yüzeyler ve Zarf Yüzeyler.....	30
3.5.1 Regle Yüzey	30
3.5.2 Zarf Yüzeyi	33
3.6 Pisagor Hodograf (PH) Eğriler.....	37
3.6.1 Pisagor Hodograf Eğriler	37
3.6.2 Düzlemsel Pisagor Hodograf Eğriler	37
3.6.3 Uzaysal Pisagor Hodograf Eğriler	39
3.6.4 Minkowski Pisagor Hodograf (MPH) Eğriler.....	42
3.6.4.1 Orta Eksen Dönüşümü	42
3.7 Pisagor Normal (PN) Yüzeyler	44
3.7.1 Regle Yüzey Normali.....	45
3.7.2 İki Parametrelili Hareketin Pisagor Normal Yüzey Olma Durumu	47
4. NOKTA HAREKETİNİN YÖRÜNGESİ VE PİSAGOR HODOGRAFI EĞRİLERİ.....	49
4.1 Bir Parametrelili Rasyonel Hareket	49

4.2 Rasyonel Pisagor Hodograf Eğriler.....	51
5. DOĞRU HAREKETİNİN YÖRÜNGESİ VE BAZI ÖZELLİKLERİ.....	57
5.1 Dual Kuaterniyonların Doğruya Etkisi.....	57
5.2 Doğru Etkisi ve Pisagor Hodograf Özelliği	63
5.3 Doğru Hareketinin Analizi	67
5.4 Dual Euler-Rodrigues Formülü	70
6. DÜZLEM HAREKETİNİN YÖRÜNGESİ OLARAK PİSAGOR HODOGRAFI EĞRİLER VE PİSAGOR NORMAL YÜZEYLER.....	73
6.1 Dual Kuaterniyonların Düzleme Etkisi	73
6.2 Düzlem Hareketinin Pisagor Hodograf Özelliği	75
6.3 Pisagor Normal Yüzey Olarak Regle Yüzeyler	78
6.4 Pisagor Normal Yüzey Olarak Düzlem Hareketinin Zarf Yüzeyi	81
7. TARTIŞMA VE SONUÇ	91
KAYNAKLAR.....	93
EKLER	97
ÖZ GEÇMİŞ.....	99

ÇİZELGELER LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3.1 Kuaterniyon çarpım tablosu	14
Çizelge 3.2 Dual kuaterniyon çarpım tablosu	18



ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1 Study kuadrik şeması (kırmızı kısım harici üretici temsil eder).....	22
Şekil 3.2 Reel projektif doğru.....	26
Şekil 3.3 (a) Doğru ailesinin zarf eğrisi (b) İki parametrelî düzlem ailesinin zarf yüzeyi	35
Şekil 4.1 Çatılı hareket	52
Şekil 6.1 $\mathbf{k}$ düzleminin x hareketinin etkisiyle oluşan düzlemler ailesini teğet düzlem kabul eden polinom Pisagor normal zarf yüzeyi	89
Şekil 6.2 $\mathbf{k}$ düzleminin x hareketinin etkisiyle oluşan düzlemleri teğet düzlemi kabul eden rasyonel Pisagor normal zarf yüzeyi.....	90



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamalarıyla aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklama

$\mathbb{R}^n$	n – boyutlu Reel vektör uzayı
$\mathbb{E}^n$	n – boyutlu Öklidyen uzayı
$\mathbb{H}$	Kuaterniyonlar kümesi
$\text{Im}(\mathbb{H}[t])$	Kuaterniyonun vektörel (imajiner) kısmı
$\text{Reel}(\mathbb{H}[t])$	Kuaterniyonun reel kısmı
$\mathbb{DH}$	Dual kuaterniyonlar kümesi
i, j, k	Kompleks kuaterniyon birimleri
ϵ	Dual birim
p	$\mathbb{R}^3$ uzayında bir vektör
q	Kuaterniyon
$\mathfrak{D}$	Dual kuaterniyon
q^*	Kuaterniyon eşleniği
$\mathfrak{D}_\epsilon$	Dual eşlenik
$\ q\ $	Kuaterniyon normu
M_4^2	Klein veya Plücker kuadriği
$\mathcal{S}$	Study kuadriği
$\mathcal{N}$	Null konisi
$\mathbb{RP}^n$ veya $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{n+1})$	$\mathbb{R}^{n+1}$ vektör uzayının projektif uzayı
$\mathbb{RP}^5$	Doğru uzayı
$\mathbb{RP}^7$	Kinematik görüntü uzayı
$\mathbb{R}[t], \mathbb{Q}[t], \mathbb{H}[t], \mathbb{DH}[t]$	Katsayıları sırasıyla reel sayılar, rasyonel sayılar, kuaterniyonlar ve dual kuaterniyonlardan olan tek değişkenli polinom halkası

$\mathbb{R}[\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbb{Q}[\mathbf{u}, \mathbf{v}],$
 $\mathbb{H}[\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbb{DH}[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$

Katsayıları sırasıyla reel sayılar, rasyonel sayılar,
kuaterniyonlar ve dual kuaterniyonlardan olan iki
değişkenli polinom halkası

Kısaltmalar

Açıklama

SE(3)

$\mathbb{E}^3$ ' te Özel Öklidyen Yer Değiştirmeler Grubu

SO(3)

$\mathbb{E}^3$ ' te Küresel Transformasyonlar Grubu

PH

Pisagor Hodograf

PN

Pisagor Normal



EKLER DİZİNİ

	Sayfa
Ek 1. Plücker Doğrusunun Hesaplanması ve Yer Değiştirme Algoritması.....	97





1. GİRİŞ

Eğrilerin ve yüzeylerin rasyonellik özelliğine sahip olması bilgisayar destekli tasarım (CAD) alanında çeşitli avantajlarından dolayı çalışılmaktadır. Rasyonellik özelliği, birçok alanda, özellikle cebirsel geometri, projektif geometri, hareket geometrisi ve diğer bilim dallarında geometrik kavramların temsili için büyük bir öneme sahiptir.

Bézier veya NURBS gibi eğri ve yüzey temsilleri yalnızca polinom ve rasyonel ifadelerle tanımlanarak geometrik tasarımda geometrik nesnelerin daha esnek ve kesin bir modellemesini sağlar. NURBS (düzgün olmayan rasyonel B-spline eğrileri) bilgisayarlar tarafından işlenen geometrik bilgilerin gösterimi ve tasarımı için endüstride standart bir form haline gelmiştir.

Bilgisayar destekli geometrik tasarım (CAGD) alanında, birçok geometrik nesne bir parametrelili eğrilerin (veya iki parametrelili yüzeylerin) ofset eğrileri (veya ofset yüzeyleri) ile tanımlanır. Ofset eğri (veya yüzey), normal vektörü yönünde pozitif veya negatif sabit bir kayma ile baz eğrisinden yer değiştiren eğridir (veya yüzeydir). Bu ofset eğrilerinde (veya yüzeylerinde) girdi eğrileri (veya yüzeyleri) rasyonel olsa bile bunların ofset eğrileri (veya yüzeyleri) genellikle rasyonelliği kaybederler. Bu uygulamalarda istenmeyen bir durumdur. Çünkü, CAD ve CAGD sistemleri sadece rasyonel nesneleri temsil edebilen NURBS algoritmalarına dayanır. Bu yüzden, ofsetin rasyonelliğini garanti eden eğrilerle çalışma fikri ortaya çıkmıştır (Farouki ve Šír, 2011). Bu noktada, rasyonel Pisagor hodograf eğriler ve rasyonel Pisagor normal yüzeyler devreye girer.

Pisagor hodograf eğrilerin ve Pisagor normal yüzeylerin polinom olma durumları üzerinde literatürde birçok çalışma mevcutken rasyonel olma durumu üzerine fazla çalışmaya rastlanılmamaktadır. Çünkü, rasyonel olma durumunda bir sorunla karşılaşmaktadır: rasyonel bir ifade integrallenebilirse integrali genellikle rasyonel olmaz. Polinom durumunun aksine hodografi veya normali rasyonel olan eğri veya yüzeyin kendisi genellikle rasyonel olmaz.

Bu tezde, bir rasyonel hareket polinomu altında nokta, doğru ve düzlemin yörüngeleri olan eğri, regle yüzey ve zarf yüzeyleri ile Pisagor hodograf eğrilerinin ve Pisagor normal yüzeylerinin ilişkileri bulunmuştur. Rasyonel hareket polinomu, katsayıları dual kuaterniyonlar halkasına ait olan ve normunun reel bir polinom olma koşulu olan Study şartını sağlayan bir polinomdur. Bu polinomlar Study kuadriği

üzerinde bir eğri tanımlar. Noktalar, doğrular ve düzlemler normlanmış Plücker koordinatları aracılığıyla dual kuaterniyonlarla tanımlanabilir. Bu hareketin adjoint etkisi tanımlı etki ettiği nesneye (nokta, doğru, düzlem) bağlı olarak değişir.

İkinci bölümde, genel anlamda Pisagor hodograf eğriler üzerine yapılan çalışmaların evrimi adına kısa bir derleme sunulmuştur. Buna ek olarak, tezin temelini oluşturan kavramlar hakkında da kaynak bildirişine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bu tezin mümkün olduğunca kendini açıklayıcı bir kaynak olması adına gerekli teorik bilgiler verilmiştir. Özellikle, kinematik ve bazı geometrik kavramlara kısa bir giriş yapılar Plücker koordinatlarında tanımlı doğrulara ve dual kuaterniyonlara detaylı yer verilmiştir. Dual kuaterniyonların belirli yörünge nesnelerini elde etmek için hareketin hangi şekilde tanımlandığına değinilmiştir. Ayrıca, bazı tanımlar daha anlaşılabilir olması amacıyla örneklerle çeşitlendirilmiştir.

Dördüncü bölümde, Pisagor hodograf eğri özelliği bir rasyonel hareketin yörüngesi olarak tanıtılmıştır. Burada, bir noktanın rasyonel hareket altında oluşan yörünge eğrisinin rasyonel çatıya sahip olma özelliği garanti altına alınıp eğrinin Pisagor hodograf eğri olma durumu bulunmuştur.

Beşinci bölümde, bir doğrunun rasyonel hareketi tanımlanıp bu hareket altındaki yörüngesi olan regle yüzeylerin Pisagor hodografılık ile ilgili temel ilişkileri sonuçlandırılmıştır. Bu hareketin analizi sonucunda hareketin doğasından kaynaklı bazı özellikler keşfedilmiştir. Bu regle yüzeyi sabit aksod (fixed axode) kabul eden hareket formüleleştirilmiştir.

Altıncı bölümde, daha önceki bölümlerde noktaya ve doğruya etkisi çalışılan rasyonel hareket polinomunun düzleme etkisi ispatlanmıştır. Bu hareket polinomu öncelikle bir parametrelili olarak alınıp bir parametrelili düzlemler ailesiyle Pisagor hodograf eğriler arasında ilişkiler saptanmıştır. Ardından, iki parametrelili olarak alınıp zarf yüzeyler kavramına başvurulmuştur. Buradan, elde edilen zarf yüzeyinin Pisagor normal yüzey olma durumu bulunmuştur.

Son olarak, yedinci bölümde, tartışma sunulmuş ve sonuçlar özetlenirken belirli açık problemlere dikkat çekilmiştir.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Pisagor hodograf eğriler, ilk olarak 1990 yılında Sakkalis ve Farouki tarafından düzlemsel Pisagor hodograf eğrinin Bezier formuyla tanıtılmıştır (Farouki ve Sakkalis, 1990). O zamandan beri, özellikle bilgisayar destekli geometrik tasarım (CAGD) alanında çalışan birçok araştırmacı bu eğrileri çalışmaktadır. Bu eğrilerin avantajı, bazı diferansiyel geometrik hesaplamaları bilgisayar destekli tasarım ve bilgisayar destekli üretim (CAD/CAM) uygulamalarına uygun hale getiren rasyonel bir hıza sahip olmalarıdır.

Düzlemsel Pisagor hodograf eğriler, Öklidyen benzerliklerine (yansıma, öteleme, dönme ve genişleme) ve lineer yeniden parametrelendirmelerine göre sınıflandırılmıştır. Ayrıca dördüncü ve beşinci dereceden Pisagor hodograf eğrilerin global özellikleri analiz edilmiştir ve tüm singüler konfigürasyonları tanımlanmıştır (Šír, 2020).

Uzaysal Pisagor hodograf eğriler için gerekli ve yeterli formlar ilk olarak Pisagor dörtlüleri olarak adlandırılan polinomlar cinsinden tanımlanmıştır (Farouki ve Sakkalis, 1994). Daha sonra, uzaysal Pisagor hodograf eğrilerinin genel bir formu kuaterniyonlar ile sunulmuştur (Choi ve Han, 2002).

Uzaysal Pisagor hodograf eğrilerinin kuaterniyon gösterimi; birinci dereceden Hermite interpolasyonu, koordinat sistemleri arasındaki dönüşümler ve dönmeyi minimuma indiren çatıların (RMF veya Bishop çatısı) belirlenmesi gibi temel algoritmaların formülasyonunu büyük ölçüde kolaylaştırmıştır. Teğet gösterge ve stereografik izdüşümün kullanımıyla Pisagor hodograf uzay eğrilerinin temel yapısı ve özellikleri üzerine bazı sonuçlar sunulmuştur (Farouki ve Han, 2006).

Minkowski Pisagor hodograf (MPH) eğriler, Pisagor hodograf eğri kavramını genişletmiştir. Moon, Minkowski Pisagor hodograf eğrilerin, düzlemsel bir alanın orta eksen dönüşümünün (MAT) temsili için uygun olduğunu göstermiştir (Moon, 1999). Orta eksen dönüşümü çemberlerin genel zarfı tarafından tanımlanır. Düzlemsel bir şeklin orta eksenini, şekli kapsayan bir dizi diskin merkezlerinin konumudur ve orta eksen dönüşümü, şekle karşılık gelen disklerin yarıçap değerleriyle birlikte merkezleri olan orta eksen konumlarıdır. Orta eksen dönüşümünün tanımlandığı zarf formülü tanımlı yardımıyla (Choi vd., 1997) Minkowski Pisagor hodograf eğriler incelenmiştir (Moon, 1999).

Pisagor hodograf eğrilerini Minkowski uzayına genelleştirme fikri rasyonel ofsetlere sahip olmak için zarf formülünden gelen $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) - r'^2(t)}$ radikal terimi yok etmektir. Bu, doğrudan Pisagor hodograf özelliğiyle ilgilidir. $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında Minkowski Pisagor hodograf için gerek ve yeter şart tanımlanmıştır (Moon, 1999). Daha sonra, Minkowski Pisagor hodografının rasyonel durumu da çalışılmıştır (Kosinka ve Lávička, 2010).

Pisagor hodograf eğriler, cebirsel ve trigonometrik uzay üzerinde oluşturulan trigonometrik Pisagor hodograf eğrileri kapsayacak şekilde genişletilmiştir. Cebirsel trigonometrik Pisagor hodograf (ATPH) eğriler, Pisagor hodograf eğrileriyle benzer bir hodograf özelliğini paylaşan Pisagor hodograf eğrilerinin bir alt sınıfıdır (Romani vd., 2014; Romani ve Montagner, 2019).

Bir uzay eğrisi üzerindeki dönmeyi minimuma indiren çatı $\mathbb{R}^3$ uzayı için bir ortonormal baz tanımlar. Rasyonel dönmeyi minimuma indiren çatıya (RRMF) sahip olan polinom eğrileri, bir $\mathcal{A}(\xi)$ kuaterniyon katsayılı polinomu için $r'(\xi) = \mathcal{A}(\xi)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(\xi)$ formunun integralinin alınmasıyla belirlenen Pisagor hodograf eğrilerinin bir alt kümesini oluşturur. $\mathcal{A}(\xi)$ kuaterniyon katsayılı polinomun dönme gösterge matrisi ve çekirdek kavramlarının tanıtılmasıyla, önceden bilinen tüm özel durumları içeren RRMF eğrilerinin tam uzayının kapsamlı bir karakterizasyonu geliştirilmiştir. Bu yeni karakterizasyon, RRMF eğriler uzayının yapısını netleştirmeye yardımcı olmuştur. Pisagor hodograf eğrileri için bir algoritma sunulmuştur (Farouki vd., 2017).

Bir $r(t)$ polinom uzay eğrisi ile aynı dönmeyi minimuma indiren rasyonel çatıya (RRMF) sahip olan $\tilde{r}(t)$ rasyonel uzay eğri ailelerini oluşturmak için bir metodoloji sunulmuştur (Farouki ve Šír, 2020). $\tilde{r}(t)$ 'nin oskülatör düzlemlerinin zarfı $\tilde{r}(t)$ rasyonel eğrisinin tanjant açılabilir yüzeyini tanımlar. Burada, $\tilde{r}(t)$ tanjant açılabilir yüzeyinin regresyon kenarı (veya cuspidal kenarı) (Kreyszig, 2013) olarak elde edilir. Rasyonel eğrilerin inşasında rasyonel dönmeyi minimuma indiren çatıya (RRMF) sahip Pisagor hodograf polinom eğrisinin hodograf yapısından faydalanan farklı bir yaklaşım sunulmuştur. (Farouki ve Šír, 2020).

Eğriler ve yüzeyler bağlamında G^0 , G^1 , G^2 ve G^3 farklı süreklilik seviyelerini temsil eder. Bu süreklilikler iki eğrinin veya yüzeyin buluştuğu birleşme noktasında sırasıyla aynı konum, teğet, eğrilik ve eğrilik değişim hızına sahip olmasıdır. G^1 ve G^2 süreklilikleri durumlarında yay uzunluğu belirli eğriler için Hermite interpolasyonu

yardımıyla Pisagor hodograf eğriler çalışılmıştır. Bu konuda temel çalışma, Hermit interpolasyonunda girdi olarak verilen uç nokta türevleri eşit olan düzlemsel Pisagor hodograf eğrilerini kullanarak, belirli yay uzunluklarına sahip G^1 düzlemsel Hermite interpolantlarını oluşturma kavramını tanıtmaktadır (Farouki, 2016). Noktaları, teğetleri, eğrilikleri ve belirli yay uzunluklarını interpolasyona dahil eden Pisagor hodograf spline eğrileri kullanılarak Farouki'nin çalışması G^2 düzlemsel Hermite interpolantlarına kadar genişletilmiştir. Yedinci dereceden Pisagor hodograf Biark eğrilerinde (Biark eğri, eğrinin birleşim noktasında diferansiyellenebilir olacak şekilde bağlanan, tipik olarak dairesel veya eliptik olan iki yaydan oluşan parçalı bir eğridir) uzunluk kısıtlamaları karşılanırken G^2 sürekliliği elde etmenin fizibilitesi gösterilmiştir (Knez vd., 2022).

Uygulama kapsamını daha da genişleten Farouki vd. (2021), Pisagor hodograf eğrileri tarafından tanımlanan, belirli yay uzunluğuna sahip uzaysal kapalı C^2 eğrilerini araştırmıştır. Frenet çatısının ve çatının Biark eğrilerinin bağlantı noktalarındaki eğriliğin sürekliliğini koruyan, eğri yapısının sınırlarını üç boyutlu uzaya iten interpolantların üretilmesi için bir yöntem sunan, uzaysal C^2 sürekli eğrilerin inşası çalışılmıştır. (Farouki vd., 2021). Belirli yay uzunluklarına sahip G^2 uzaysal interpolantların hesaplanması ele alınmıştır. Ayrıca, uzaysal Pisagor hodograf spline eğrileri için yeni bir interpolasyon şeması sunulurken bu eğrilerin hareket tasarımı uygulamalarında nasıl uygulanabileceği gösterilmiştir (Knez vd., 2024). Son olarak, yay uzunluğunu koruyan dairesel yayların G^2 Hermite interpolasyonu çalışılmıştır (Žagar, 2023).

Rasyonel düzlemsel Pisagor hodograf eğriler üzerine çalışmalar ilk olarak Pottmann (1995a) tarafından başlatılmıştır. Polinom Pisagor hodograf eğrilerinden rasyonel Pisagor hodograf eğrilerine geçiş açık değildir çünkü rasyonel hodografin integrali her zaman rasyonel bir eğriyle sonuçlanmaz. Rasyonel Pisagor hodografa sahip olmak, rasyonel bir Pisagor hodograf eğrisi için yalnızca gerekli bir koşuldur. Bu zorluğu aşmak için düzlemsel eğrilerin dual temsiline (doğrularla gösterimi) dayanan farklı bir yaklaşım uygulanmıştır (Fiorot ve Gensane, 1994; Pottmann, 1995a). Düzlem eğrileri nokta lokuslarından ziyade tek parametrelili teğet doğru ailelerinin zarfları olarak ele alınmıştır. Bu teğetlerin oryantasyonunu ve orijine olan uzaklıklarını tanımlamak için rasyonel fonksiyonlar hesaplanarak, geometrik olarak sezgisel bir şekilde rasyonel Pisagor hodograf eğriler oluşturulmuştur (Pottmann, 1995b). Düzlemsel Pisagor hodograf eğrilerin polinom ve rasyonel olma durumları karşılaştırılmıştır (Farouki, 2008;

Kosinka ve Šír, 2010). Rasyonel Pisagor hodograf eğrilerinin düzlemsel durumundan uzaysal durumuna genelleme aşıkâr değildir, çünkü doğrunun duali farklı şekillerde tanımlıdır. Düzlemde noktalar ve doğrular dual öğelerdir, ancak uzayda dualite noktalar ve düzlemler arasındadır (uzayda doğruların duali yine doğrulardır) (Pottmann ve Wallner, 2001).

$\mathbb{R}^3$ uzayında rasyonel Pisagor hodograf eğrilerin oluşturulması için bir rasyonel birim teğet vektörler alanı tanımlanmasına dayanan yöntem önerilmiştir. Bu teğet alan, birinci türevi ile birlikte, eğrinin oskülatör düzlemlerinin oryantasyonunu tanımlar. Bu oryantasyon bilgisine ek olarak, orijinden her bir oskülatör düzlemin mesafesini belirleyen rasyonel bir destek fonksiyonu bilgisiyle birlikte bir oskülatör düzlemler ailesi tanımlanır. Bu bir-parametrelili oskülatör düzlemler ailesinin zarfı bir açılabilir yüzey oluşturur. Bir $r(u, v)$ yüzeyi tek parametrelili normal vektör alanına ($N(u)$ veya $N(v)$) $r(u, v)$ sahipse açılabilir yüzeydir. Rasyonel Pisagor hodograf uzay eğrisi, bu açılabilir yüzeyin regresyon kenarı (veya kuspidal kenar) olarak tanımlanır. Bu tür eğriler, rasyonel parametrik hıza ve ayrıca teğete göre dönmeyi en aza indirmek için polinom Pisagor hodograf eğrileriyle aynı koşulları sağlayan rasyonel uyarlanmış çatıya (adapted frame) sahiptir. Bu tür rasyonel Pisagor hodograf uzay eğrilerinin temel özellikleri, örneklerle türetilmiş ve gösterilmiştir. Bunların geometrik Hermite interpolasyonu ile pratik yapıları için basit algoritmalar da önerilmiştir. Rasyonel birim teğet vektör alanının tanımı, $\mathbb{R}^3$ 'de rasyonel Pisagor hodograf eğrileri oluşturmaya yönelik bir tekniğin temelini oluşturur (Farouki ve Šír, 2011).

Pisagor hodograf eğrilerini B-spline örneklerine genişletmek için, B-spline fonksiyonları ile Pisagor hodograf eğrileri (Albrecht ve Farouki, 1996; Albrecht vd., 2017; 2020) çalışılmıştır. Clifford cebirleri, bu eğrileri çeşitli uzaylarda tek bir cebirsel yapı altında gruplamak için kullanılır. Bu eğrilerin pratik uygulamalarına ve kullanımına olanak sağlayan Öklid ve Minkowski uzayları dikkate alınmıştır. Pisagor hodograf özelliklerine sahip B-spline eğrileri Clifford cebirleri yardımıyla incelenmiştir (Bizzarri vd., 2023). Pisagor hodograf eğrilerinin ilk kez Clifford cebirleri yardımıyla tanıtıldığı ve kuaterniyon cebiri yardımıyla cebirsel bir modelin önerildiği bu çalışma Choi vd. (2002) çalışmasının devamı olarak düşünülebilir. Pisagor hodograf B-spline eğrileri, düşük boyutlu Öklid uzayının yanı sıra (2,1) ve (3,1) boyutlu Minkowski uzaylarında tanıtılmış ve incelenmiştir (Bizzarri vd., 2023).

Son yıllarda, Pisagor hodograf eğrileri üzerine yapılan çalışmalara ilginin sürekli arttığı görülmüştür ve bu durum çok sayıda yeni paradigma ve uygulamaya yol açmıştır. Aslında bu yeni keşiflerin hacmine ve çeşitliliğine ayak uydurmak oldukça zorlayıcı hale gelmiştir. Bu ihtiyacı karşılamak amacıyla, Pisagor hodograf eğri araştırmalarının üç ana kolu olan polinom Pisagor hodograf eğriler, rasyonel Pisagor hodograf eğriler ve Öklid ve Minkowski uzayındaki Pisagor hodograf eğriler için Hermite interpolasyonu başlıklarını özetleyen derleme çalışmaları sunulmuştur. Daha sonra, uzaysal Pisagor hodograf eğriler; rasyonel ortonormal çatılardan, polinom Pisagor hodograf eğrilerinin uzantıları ve özel durumlarına, Pisagor hodograf eğrilerine dayalı yüzey tasarımı, Pisagor hodograf eğrilerinin gerçek hayatta kullanımına kadar gruplandırılmıştır (Kosinka ve Lávička, 2014; Farouki vd., 2019).

Kozak vd. (2016) çalışmalarında, ilk defa iki değişkenli kuaterniyon polinomunun katsayıları üzerinde tanımlanan kısıtlamalara dayalı olarak polinom Pisagor normal yüzeyleri için bir kuaterniyon yaklaşımı öne sürmüştür. Pisagor normal yüzey oluşturmak için yüzeyin tek veya çift dereceli olmasına göre yeterli olan kısıtlamalar bulunmuştur. Bu Pisagor normal yüzeylere kübik, kuartik (dördüncü dereceden) ve kuintik (beşinci dereceden) örnekler verilmiştir (Kozak vd., 2016).

Pisagor normal yüzeylerin bir geometrik cebir temsili temelde alan kapsamlı birleştirici teorisi sunulmuştur (Krasauskas, 2017).

Minimal yüzeylerde Pisagor hodograf özelliği ve Pisagor normal özelliği karakterize edilmiştir. Enneper yüzeyinin izotermal parametrelendirmesi, Pisagor normal temsili kabul eder ve izotermal parametrelendirme, Pisagor hodograf yapısını koruyan dönüşümlerle yakından ilgilidir (Ueda, 1998; Kim ve Lee, 2008; Kong vd., 2016). Pisagor hodograf eğriler ve polinom minimal yüzeyler, cebirsel yapıları nedeniyle bazı doğal ilişkilere sahiptir. Pisagor hodograf eğrilerini kullanarak polinom minimal yüzeyler oluşturmak için bir teknik önerilmiştir (Hao, 2020). Pisagor hodograf eğriler yardımıyla polinom minimal yüzeyler derecelerine göre sınıflandırılmıştır (Fang vd., 2022). Farouki diğer araştırmacılarla birlikte daha az kısıtlanmış şekil parametreleriyle polinom minimal yüzeyleri üreten üç tane kompleks polinom yardımıyla daha önceki araştırmaları genişletmiştir (Farouki vd., 2022). Bu polinomlardan sadece biri sabit olduğunda yama sınırını oluşturmak için düzlemsel Pisagor hodograf eğriler kullanılarak sınırlı minimal yüzey yamaları (Plato sorununa çözümler) oluşturulur (Farouki vd., 2022).

Üç boyutlu uzaydaki doğrular kümesine odaklanan doğru geometrisi kavramı, aynı zamanda projektif geometri, cebirsel geometri, mekanik ve robotikteki uygulamaları da içerir. Doğru uzayı, en temel elemanları regle yüzeyler olan bir düzgün manifolddur. Pottmann ve Wallner (2001) tarafından doğru geometrisi üzerine kaleme alınan eser, alanındaki güçlü temellere dayanarak, kapsamlı ve sağlam bir kaynak olarak öne çıkmaktadır.

Doğru geometrisi hareket geometrisini çalışmada oldukça elverişli bir araçtır. Doğru segmentlerinin kontrol doğruları olarak belirlenmesine olanak sağlamak için Plücker koordinatlarının kullanımı vurgulanmaktadır. Aynı zamanda, bu geometri Bezier, Cardinal ve B-spline dahil olmak üzere farklı baz fonksiyonlarını kullanan doğru yapılarının geometrik tasarımı için hesaplamalı yöntemlerdir. Teoriyi imalat uygulamalarına da genişleterek ofset regle yüzeylerin hesaplanmasına yönelik yöntemler gösterilmiş ve tel kesme ve elektro erezyon (EDM) sistemlerinde takım hareketinin modellenmesi ile uygulaması sağlanmıştır. Burada sunulan matematiksel temel, CAD/CAM araştırma ve uygulamalarında doğru geometrisinin kullanımına yönelik yeni olanaklara kapı açmaktadır (Ravani ve Wang, 1990).

Regle yüzeyler robotikte önemlidir. Dual vektörler yönlü doğrulardır. Regle yüzeyin geometrisi striksiyon eğrisinin (regle yüzeyinin tüm üreteç doğrularını birleştiren minimum uzunluktaki eğri) geometrisi ile yakından ilişkilidir (Selig, 2005).

Rasyonel regle yüzeyler, bu yüzeylerin kontrol yapısına ve düşük dereceli temsillerine odaklanarak, üç boyutlu Öklidyen ve projektif uzaydaki regle yüzeylerin geometrisine giriş yaparak hesaplamalı doğru geometrisi yardımıyla çalışılmıştır. Aynı zamanda kuadriklerden oluşan G^1 rasyonel regle yüzeyler inşa edilmiş ve düşük dereceli regle yüzeyler için örnekler sağlanmıştır (Paternell vd., 1999).

Vida hareketinin geometrisi ve $\mathbb{R}^3$ 'teki doğru yerdeğiştirmesi ve nokta-doğru yer değiştirmesine ilişkin dual kuaterniyon temsilleri incelenmiştir. Matematiksel teknikler vurgulanarak, özellikle sayısal kontrol işleme (NC) için NURBS (Piegl ve Tiller, 1997) formatında yörüngelerin oluşturulmasında rasyonel nokta-doğru hareket tasarımının uygulamasına ilişkin örnekler sağlanmıştır. Rasyonel regle yüzey tasarlamının inceliklerini ve sayısal kontrol işlemede yörüngeleri tanımlamak için biri konum diğeri oryantasyon eğrisi olmak üzere çift NURBS eğrileri araştırılıp bu çerçevede matematiksel ve geometrik hususlara vurgu yapılmaktadır (Zhang vd., 2012).

3. TEMEL KAVRAMLAR

Kinematikte, Öklid yer değiştirmeleri dönme ve öteleme hareketlerinin kombinasyonu ile tanımlanır. Dönme hareketi bir ortogonal matrisiyle, öteleme hareketi ise bir öteleme vektörüyle ifade edilir. Başka bir model ise Study parametrelerini kullanır. Bu parametreler, yedi boyutlu projektif uzayda özel bir kuadrik üzerindeki bir noktanın koordinatlarını temsil eder ve her nokta, bir yer değiştirmeyi ifade eder. Üçüncü model ise dual kuaterniyon modelidir. Dual kuaterniyonlar, dönme eksenini ve dönme açısına ilişkin bilgilerin doğrudan okunmasını sağladığından oldukça sezgiseldir. Pratik açıdan bakıldığında, dual kuaterniyonlar bilgisayarda daha az bellek kullanımına sahip olabilir. Katı cisim hareketleri, özellikle Plücker koordinatlarıyla birlikte kullanılarak, dual kuaterniyonlar aracılığıyla güzel ve daha basit bir şekilde tanımlanabilir. Bu nedenlerden dolayı, tez çalışmasında dönme ve öteleme temel hareketlerinin tüm bu farklı işleme biçimleri kullanılacaktır.

3.1 Hesaplamalı Doğru Geometrisi

Bu bölümde doğru geometrisinin bazı temel tanımları ve özellikleri verilecektir. Plücker koordinatlarındaki temel fikir, $\mathbb{RP}^3$ üç boyutlu reel projektif uzayındaki tüm doğruları tanımlayan bir nokta modeli oluşturmaktır. Bu noktalar, $\mathbb{RP}^5$ beş boyutlu reel projektif uzayında bulunan Plücker kuadriği veya Klein kuadriği olarak adlandırılan bir kuadrik üzerindedirler.

3.1.1 Klein Doğru Uzay Modeli

$\mathbb{RP}^3$ reel projektif uzayındaki L doğrularını tanımlayan bir nokta modeli tanımlanmıştır. Genel olarak, bir $L \in \mathbb{RP}^3$ doğrusu, doğru üzerinde rastgele iki farklı $x\mathbb{R} = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3]^T$ ve $y\mathbb{R} = [y_0 : y_1 : y_2 : y_3]^T$ noktaları ile tanımlanabilir. Böylece, $x \wedge y$ 'nin $\{e_0 \wedge e_1, e_0 \wedge e_2, e_0 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3\}$ bazına göre koordinatları doğrunun *Plücker koordinatları* olarak adlandırılır (Selig, 2005).

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \wedge (y_0, y_1, y_2, y_3) = (l_{01}, l_{02}, l_{03}, l_{23}, l_{31}, l_{12}) \quad (3.1)$$

Bir başka deyişle, L 'nin Plücker koordinatları olan l_{ij} sayıları

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

matrisinin minörleridir, öyle ki $l_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} = x_i y_j - x_j y_i, i = \{0, 1, 2, 3\}, i \neq j$ olarak yazılır. Böylece, Eşitlik (3.1)'de ifade edilen L doğrusu beş-boyutlu $\mathbb{RP}^5$ uzayında noktalarının koordinatları olarak

$$[l_{01}:l_{02}:l_{03}:l_{23}:l_{31}:l_{12}]^T = [l_1:l_2:l_3:\bar{l}_1:\bar{l}_2:\bar{l}_3]^T \quad (3.2)$$

yazılır. İlk üç koordinat $[l_1:l_2:l_3]^T$, L doğrusunun yönünü diğer üç koordinat ise $[\bar{l}_1:\bar{l}_2:\bar{l}_3]^T$, L doğrusunun moment vektörünü temsil eder. Moment vektörü doğru ve orijin noktasının geldiği düzleme diktir. Plücker koordinatları

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$$

şartını sağlarsa normalleştirilmiştir denir (Selig, 2005).

Lemma 3.1. Plücker koordinatları $x\mathbb{R}, y\mathbb{R}$ noktalarını geren temsilcilerden bağımsızdır (Selig, 2005).

İspat. L üzerinde iki farklı $x' = [x'_0:x'_1:x'_2:x'_3]^T$ ve $y' = [y'_0:y'_1:y'_2:y'_3]^T$ noktaları alınsın. x' ve y' noktaları x ve y cinsinden $\lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3 \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_1 x + \lambda_2 y \\ y' &= \lambda_3 x + \lambda_4 y \end{aligned}$$

olarak yazılsın. x ve y ile L 'nin Plücker koordinatları Eşitlik (3.2) yardımıyla hesaplanınca

$$\begin{aligned} l'_{ij} &= x'_i y'_j - x'_j y'_i \\ &= (\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i)(\lambda_3 x_j + \lambda_4 y_j) \\ &\quad - (\lambda_1 x_j + \lambda_2 y_j)(\lambda_3 x_i + \lambda_4 y_i) = (\lambda_1 \lambda_4 - \lambda_2 \lambda_3) l_{ij} \end{aligned}$$

skaler bir faktöre göre aynıdır yani Plücker koordinatları projektif anlamda doğruyu temsil eden iki noktadan bağımsızdır. □

3.1.2 Klein Kuadriği

$\mathbb{RP}^3$ 'teki bir doğrunun Plücker koordinatlarını temsil eden Eşitlik (3.2) ile tanımlanan $\mathbb{RP}^5$ 'teki tüm noktalar Klein kuadriği olarak adlandırılan bir kuadrik üzerinde bulunur. Eşitlik (3.2) ile tanımlı doğru koordinatlarının

$$\begin{aligned} &l_{01}l_{23} + l_{02}l_{31} + l_{03}l_{12} \\ &= (x_0y_1 - x_1y_0)(x_2y_3 - x_3y_2) \\ &\quad + (x_0y_2 - x_2y_0)(x_3y_1 - x_1y_2) \\ &\quad + (x_0y_3 - x_3y_0)(x_1y_2 - x_2y_1) = 0 \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$l_{01}l_{23} + l_{02}l_{31} + l_{03}l_{12} = 0 \tag{3.3}$$

denklemleriyle tanımlanan $\mathbb{RP}^5$ uzayında olan kuadrik *Plücker kuadriği* veya *Klein kuadriği* olarak adlandırılır ve $\mathcal{M}_2^4$ ile gösterilir (Pottmann ve Wallner, 2001).

$\mathcal{M}_2^4$ 'te, üst-indis Klein kuadriğinin Hilbert polinomunun derecesi ve alt-indis Klein kuadriğinin projektif boyutudur. Klein kuadriğinin Hilbert polinomu $\frac{x^4}{12} + \frac{2x^3}{3} +$

$\frac{23x^2}{12} + \frac{7x}{3} + 1$ polinomudur. Polinomun derecesi yani kuadriğin derecesi dördtür ve projektif boyutu ise polinomun derecesinin faktöriyeli ile polinomun baş katsayısının çarpımı yardımıyla ikiye eşit olarak bulunur.

İlk üç koordinat $l = (l_{01}, l_{02}, l_{03})$, L doğrusunun yönünü ve diğer üç koordinat $\bar{l} = (l_{23}, l_{31}, l_{12})$ ise L doğrusunun momentini ifade eder. Plücker bağıntısı l ve $\bar{l}$ koordinatlarının ortogonalliğini ifade eder (Pottmann ve Wallner, 2001).

Ters olarak, $[l_1: l_2: l_3: \bar{l}_1: \bar{l}_2: \bar{l}_3]^T \in \mathbb{RP}^5$, Eşitlik (3.3)'ü sağlayan bir nokta olsun. $\mathbb{RP}^3$ uzayında dört tane nokta

$$\begin{aligned} a_0 &= [0: l_1: l_2: l_3]^T, \\ a_1 &= [-l_1: 0: \bar{l}_3: -\bar{l}_2]^T, \\ a_2 &= [-l_2: -\bar{l}_3: 0: \bar{l}_1]^T, \\ a_3 &= [-l_3: \bar{l}_2: -\bar{l}_1: 0]^T, \end{aligned} \tag{3.4}$$

olarak tanımlansın. Eşitlik (3.4)'te verilen her nokta çifti için Eşitlik (3.2) ile Plücker koordinatları hesaplansın. Örneğin, a_0 ve a_1 noktaları için

$$[l_1^2: l_1 l_2: l_1 l_3: -l_2 \bar{l}_2 - l_3 \bar{l}_3: l_1 \bar{l}_2: l_1 \bar{l}_3]^T$$

denklemini kullanılarak

$$[l_1^2: l_1 l_2: l_1 l_3: l_1 \bar{l}_1: l_1 \bar{l}_2: l_1 \bar{l}_3]^T$$

şeklinde basitleştirilebilir. Ayrıca bu ifade de $l_1 \neq 0$ olduğunda projektif olarak $[l_1: l_2: l_3: \bar{l}_1: \bar{l}_2: \bar{l}_3]^T$ noktasına denktir. Aynı hesaplamalar diğer nokta çiftleri için de uygulanır. Böylece, $\mathbb{RP}^3$ projektif uzayında $[l_1: l_2: l_3: \bar{l}_1: \bar{l}_2: \bar{l}_3]^T$ Plücker koordinatlarına sahip bir doğru elde edilir (Pottmann ve Wallner, 2001).

$\gamma: L \rightarrow \mathbb{RP}^5$ Klein dönüşümü $\mathbb{RP}^3$ uzayındaki bir L doğrusunu $\mathbb{RP}^5$ uzayında bir doğrunun Plücker koordinatları olan $(l_1, l_2, l_3, \bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3) \in \mathbb{RP}^5$ noktasına dönüştürür. $\mathbb{RP}^3$ uzayındaki tüm doğrular ile Plücker kuadriği arasında birebir ve örten bir ilişki vardır (Pottmann ve Wallner, 2001).

Teorem 3.2. $L = [l_1: l_2: l_3: \bar{l}_1: \bar{l}_2: \bar{l}_3]^T \in \mathbb{RP}^5$ Plücker koordinatlarında tanımlı doğru olmak üzere herhangi bir $x = [x_0: x_1: x_2: x_3]^T \in \mathbb{RP}^3$ noktası ancak ve ancak

$$\begin{bmatrix} 0 & \bar{l}_1 & \bar{l}_2 & \bar{l}_3 \\ -\bar{l}_1 & 0 & l_3 & -l_2 \\ -\bar{l}_2 & -l_3 & 0 & l_1 \\ -\bar{l}_3 & l_2 & -l_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

eşitliğini sağlıyorsa L doğrusu üzerindedir. Ayrıca, $K = [k_1: k_2: k_3: \bar{k}_1: \bar{k}_2: \bar{k}_3]^T \in \mathbb{RP}^5$ bir başka Plücker koordinatlarında tanımlı bir doğru olmak üzere K ve L doğruları ancak ve ancak

$$[l_1 \ l_2 \ l_3 \ \bar{l}_1 \ \bar{l}_2 \ \bar{l}_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \bar{k}_1 \\ \bar{k}_2 \\ \bar{k}_3 \end{bmatrix} = 0$$

matris çarpımını sağlıyorsa kesişir (Selig, 2005).

3.2 Kuaterniyon Cebiri

19. yüzyılda W.R. Hamilton, $SE(2)$ düzlemsel Öklidyen grubunun kompleks sayılar aracılığıyla olan temsilini $SO(3)$ dönmeler grubuna genişletmeye çalışırken kuaterniyonları ortaya çıkarmıştır (Hamilton, 1866). Öncesinde, Vidinli Hüseyin Tefik Paşa kuaterniyonları tanımlama yolunda yol kat etmiş olsa da (Hussein Tefik Pacha, 1882) Hamilton bu genişleme için kesin bir konsept sağlamıştır.

3.2.1 Kuaterniyonlar

Kuaterniyonlar dört boyutlu vektör uzayı üzerinde tanımlanmıştır. Reel sayılar bu vektör uzayına $\alpha_0 \in \mathbb{R} \rightarrow (\alpha_0, 0, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^4$ şeklinde gömülüdür. Üç boyutlu vektörler de benzer olarak $\alpha_0 \in \mathbb{R} \rightarrow (0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \in \mathbb{R}^4$ şeklinde gömülüdür. Kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{H}$ ile gösterilir. Kuaterniyonlar, aşağıdaki şekilde tanımlanan $\mathbb{R}^4$ 'ün standart bazı kompleks birimli $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ile

$$\mathbf{1} = (1, 0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{i} = (0, 1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{j} = (0, 0, 1, 0)^T, \quad \mathbf{k} = (0, 0, 0, 1)^T$$

tanımlıdır. Baz vektörleri çarpma işlemiyle aşağıdaki ilişkiyi sağlar (Hamilton, 1866):

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1 \quad (3.5)$$

Kuaterniyonun baz vektörlerinin çarpım tablosu Çizelge 3.1'de verildiği şekildedir.

Çizelge 3.1 Kuaterniyon çarpım tablosu

$\otimes^1$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	-1	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$	-1	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	-1

¹ Kuaterniyon çarpma işlemi

Bir $q \in \mathbb{H}$ kuaterniyonu, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ baz vektörleri olmak üzere

$$q = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k} \quad (3.6)$$

biçiminde ifade edilir. Burada, a_0 kuaterniyonun skaler veya reel kısmı $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ ise kuaterniyonun vektörel veya imajiner (sanal) kısmı olarak adlandırılır (Hamilton, 1866).

$q = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = a_0 + \mathbf{a}$ ve $p = c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} = c_0 + \mathbf{c}$ kuaterniyonlarının çarpımı Eşitlik (3.5) ile tanımlı baz vektör çarpma işlemiyle aşağıdaki şekildedir (Selig, 2005):

$$\begin{aligned} qp &= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\ &= a_0c_0 + a_0c_1\mathbf{i} + a_0c_2\mathbf{j} + a_0c_3\mathbf{k} + a_1c_0\mathbf{i} + a_2c_0\mathbf{j} + a_3c_0\mathbf{k} \\ &\quad - a_1c_1 - a_2c_2 - a_3c_3 + (a_2c_3 - a_3c_2)\mathbf{i} - (a_1c_3 - a_3c_1)\mathbf{j} \\ &\quad + (a_1c_2 - a_2c_1)\mathbf{k} = a_0c_0 + a_0\mathbf{c} + c_0\mathbf{a} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Kompleks eşleniğe benzer şekilde Eşitlik (3.6)'da tanımlanan bir q kuaterniyonunun *kuaterniyon eşleniği* $q^* \in \mathbb{H}$ kuaterniyonun vektörel kısmının eksi ile çarpılmasıyla

$$q^* = a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k} \quad (3.8)$$

tanımlıdır (Selig, 2005).

Çarpım durumunda olan iki kuaterniyonun eşleniği $(pq)^* = q^*p^*$ özelliğine sahiptir.

Kompleks sayılara benzer şekilde *kuaterniyon normu* Eşitlik (3.6) ile verilen bir kuaterniyonun Eşitlik (3.8) ile verilen eşleniği ile çarpımıdır:

$$\|q\| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (3.9)$$

ve reel bir sayıdır (Selig, 2005).

Eşitlik (3.9) ile ifade edilen normu 1'e eşit olan kuaterniyonlar *birim kuaterniyon* olarak adlandırılır. Birim kuaterniyonlar $(a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3$ bir birim vektör olmak üzere

$$q = \cos \theta + \sin \theta (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir (Selig, 2005).

Bir kuaterniyonun tersi

$$q^{-1} = \frac{q^*}{qq^*} = \frac{q^*}{\|q\|^2} \quad (3.11)$$

formülüyle hesaplanır (Selig, 2005).

Çizelge 3.1'den de görüldüğü üzere Eşitlik (3.7) ile tanımlanan kuaterniyon çarpma işlemi komutatif değildir. Eşitlik (3.11)'de tanımlı ters işlemiyle kuaterniyonlar $(\mathbb{H}, +, \otimes)$, reel sayılar üzerinde dört-boyutlu bir bölme cebiri tanımlar, bu yüzden bölme (division) halkasıdır (Selig, 2005)

3.2.2 Dual Kuaterniyonlar

19. yüzyılın ortalarına doğru Clifford, dual sayılar olarak adlandırılan bir cebir geliştirmiştir (Clifford, 1873). Study, SE(3) katı cisim transformasyonlar grubu temsili için kuaterniyonları dual kuaterniyonlara genişletmiştir (Gfrerrer, 2000).

Bir dual sayı $a + \epsilon b$ şeklinde yazılır. Burada, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $\epsilon, \epsilon^2 = 0$ şartını sağlayan dual birimdir (Veldkamp, 1976).

Dual sayılar kümesi, sıfırın bölenleri ϵb ($b \in \mathbb{R}$) sayılarına sahip olan değişmeli bir halkadır. $x_1 = a_1 + \epsilon b_1$ ve $x_2 = a_2 + \epsilon b_2$, $a_2 \neq 0$ ise x_1/x_2 bölümünün

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1 + \epsilon b_1}{a_2 + \epsilon b_2} = \frac{a_1}{a_2} + \epsilon \left(\frac{b_1}{a_2} - \frac{a_1 b_2}{a_2^2} \right) \quad (3.12)$$

olduğu kolaylıkla görülmektedir. Diğer tüm durumlarda, bölme işlemi belirsizdir. Bir $x = a + \epsilon b$ dual sayısının tersi

$$x^{-1} = \frac{1}{a} - \epsilon \frac{b}{a^2} \quad (3.13)$$

olarak hesaplanır. Diferansiyellenebilir bir f fonksiyonu için Taylor açılımının uygulanmasıyla

$$f(x) = f(a + \epsilon b) = f(a) + \epsilon b f'(a) \quad (3.14)$$

eşitliği elde edilir. İkinci türev ve sonrasındaki terimler dual bileşen $\epsilon^2 = 0$ bağıntısını sağladığı için sıfıra eşit olurlar. Bu kuralın trigonometrik fonksiyonlara uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(a + \epsilon b) = \sin a + \epsilon b \cos a, \\ \cos x &= \cos(a + \epsilon b) = \cos a - \epsilon b \sin a, \\ \tan x &= \tan(a + \epsilon b) = \tan a + \epsilon \frac{b}{\cos^2 a}, \\ \cot x &= \cot(a + \epsilon b) = \cot a - \epsilon \frac{b}{\sin^2 a}, \end{aligned}$$

açılımları elde edilir (Veldkamp, 1976).

Bir $\mathcal{D} \in \mathbb{DH}$ dual kuaterniyonu, $p = a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}$ ve $d = c_0 + c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$\mathcal{D} = \{p + \epsilon d \in \mathbb{DH} \mid p, d \in \mathbb{H}, \epsilon^2 = 0\} \quad (3.15)$$

ile gösterilir. Burada, p dual kuaterniyonun *reel kısmı* ve d ise dual kuaterniyonun *dual kısmı* olarak adlandırılır (Veldkamp, 1976).

Dual birim ϵ tüm $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ kompleks birimlerle değişmelidir. Dual kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{DH}$ ile gösterilir (Selig, 2005).

Dual kuaterniyonun baz elemanlarının çarpım tablosu Çizelge 3.2’de verildiği şekildedir. Dual kuaterniyonlarda çarpma işlemi Eşitlik (3.7)’de tanımlı kuaterniyon çarpma işlemine $\epsilon^2 = 0$ kuralını dahil ederek uygulanır.

Çizelge 3.2 Dual kuaterniyon çarpım tablosu

$\odot^1$	1	i	j	k	ϵ	ϵi	ϵj	ϵk
1	1	i	j	k	ϵ	ϵi	ϵj	ϵk
i	i	-1	k	-j	$-\epsilon i$	$-\epsilon$	ϵk	$-\epsilon j$
j	j	k	-1	-i	ϵj	ϵk	$-\epsilon$	$-\epsilon i$
k	k	j	-i	-1	ϵk	ϵj	$-\epsilon i$	$-\epsilon$
ϵ	ϵ	ϵi	ϵj	ϵk	0	0	0	0
ϵi	ϵi	$-\epsilon$	ϵk	-j	0	0	0	0
ϵj	ϵj	ϵk	$-\epsilon$	-i	0	0	0	0
ϵk	ϵk	ϵj	$-\epsilon i$	$-\epsilon$	0	0	0	0

¹ Dual kuaterniyon çarpma işlemi

$\mathfrak{Q} = p_1 + \epsilon d_1 \in \mathbb{DHI}$ ve $\mathfrak{P} = p_2 + \epsilon d_2 \in \mathbb{DHI}$ dual kuaterniyonlarının çarpımı

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{P} = (p_1 + \epsilon d_1)(p_2 + \epsilon d_2) = p_1 d_2 + \epsilon(p_1 d_1 + d_1 d_2) \quad (3.16)$$

olarak tanımlanır. $\mathfrak{Q}$ ve $\mathfrak{P}$ dual kuaterniyonlarının *iç çarpımı* ve *vektörel çarpımı*

$$2\langle \mathfrak{Q}, \mathfrak{P} \rangle = \mathfrak{Q}\mathfrak{P}^* + \mathfrak{P}\mathfrak{Q}^* \quad 2\mathfrak{Q} \times \mathfrak{P} = \mathfrak{Q}\mathfrak{P} - \mathfrak{P}\mathfrak{Q} \quad (3.17)$$

olarak tanımlanır (Selig, 2005).

Kuaterniyonlardan farklı olarak dual kuaterniyonlarda iki tür eşlenik tanımlıdır. Eşitlik (3.15) ile tanımlanan bir dual kuaterniyonun *kuaterniyon eşleniği* reel ve dual kısım olan kuaterniyonların eşleniğinin alınmasıyla

$$\mathfrak{D}^* = p^* + \epsilon d^* \quad (3.18)$$

tanımlıdır. Eşitlik (3.15) ile tanımlanan bir dual kuaterniyonun *dual eşleniği* ise dual kısmın eksi ile çarpılmasıyla

$$\mathfrak{D}_\epsilon = \mathfrak{p} - \epsilon \mathfrak{d} \quad (3.19)$$

tanımlıdır (Selig, 2005).

Kuaterniyon normu gibi *dual kuaterniyon normu* eşleniği ile çarpımıdır. $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 \mathbf{i} + \mathfrak{a}_2 \mathbf{j} + \mathfrak{a}_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}$ ve $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}_1 \mathbf{i} + \mathfrak{c}_2 \mathbf{j} + \mathfrak{c}_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{D}\| &= \mathfrak{D}\mathfrak{D}^* = (\mathfrak{p} + \epsilon \mathfrak{d})(\mathfrak{p}^* + \epsilon \mathfrak{d}^*) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}^* + \epsilon(\mathfrak{p}\mathfrak{d}^* + \mathfrak{d}\mathfrak{p}^*) \\ &= \mathfrak{a}_0^2 + \mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{a}_2^2 + \mathfrak{a}_3^2 + 2\epsilon(\mathfrak{a}_0\mathfrak{c}_0 + \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_3) \\ &= \|\mathfrak{p}\| + \epsilon\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{d} \rangle \end{aligned} \quad (3.20)$$

ve $\|\mathfrak{D}\| \in \mathbb{D}$ dual bir sayıdır (Veldkamp, 1976).

Çarpım durumunda iki dual kuaterniyonun normu, kuaterniyon eşleniği ve dual eşleniği

$$\|\mathfrak{Q}\mathfrak{P}\| = \|\mathfrak{Q}\| \|\mathfrak{P}\|, \quad (\mathfrak{Q}\mathfrak{P})^* = \mathfrak{P}^* \mathfrak{Q}^*, \quad (\mathfrak{Q}\mathfrak{P})_\epsilon = \mathfrak{Q}_\epsilon \mathfrak{P}_\epsilon$$

özelliklerine sahiptir.

Eşitlik (3.21)'de ifade edilen normu 1'e eşit olan dual kuaterniyon noktaları

$$\|\mathfrak{D}\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \|\mathfrak{p}\| = 1 \quad \& \quad \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{d} \rangle = 0 \quad (3.21)$$

birim dual küre olarak adlandırılır (Veldkamp, 1976).

Birim dual küre kuaterniyon çarpım işlemi ve dual kuaterniyon ters işlemiyle beraber bir grup tanımlar (Selig, 2005).

$\mathbb{R}^5$ 'teki bir doğru $(\mathfrak{p}, \mathfrak{d})$ dual vektör çifti ile belirlenebilir. $\mathfrak{p}$ ve $\mathfrak{d}$ vektörlerinin bileşenlerine söz konusu doğrunun *normlanmış doğru Plücker koordinatları* denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

3.3 Study Kinematik Dönüşümü

Study kinematik dönüşümünün temel fikri, $SE(3)$ Öklidyen yer değiştirmeler grubunu tanımlamak için bir nokta modeli oluşturmaktır. Bu dönüşüm, Öklidyen yer değiştirmeler grubu ile $\mathbb{RP}^7$ yedi boyutlu reel projektif uzayında bulunan özel bir kuadrik (3-boyutlu bir 'ideal' noktalar düzlemi hariç) arasında birebir eşleşme sağlar (Gferrer, 2000).

Bir yer değiştirme matrisi

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3) \mid R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \in SO(3), \quad t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

olmak üzere, bunun Study kinematik dönüşümü altındaki görüntüsü yedi boyutlu projektif uzayda bir $q = [p_0:p_1:p_2:p_3:d_0:d_1:d_2:d_3]^T$ noktasıdır. Bu noktanın ilk dört koordinatları aşağıdaki oranların en az birinden elde edilebilir (genellikle aynıdır):

$$\begin{aligned} p_0:p_1:p_2:p_3 &= 1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}:r_{32} - r_{23}:r_{13} - r_{31}:r_{21} - r_{12} \\ &= r_{32} - r_{23}:1 + r_{11} - r_{22} - r_{33}:r_{21} + r_{12}:r_{31} - r_{13} \\ &= r_{13} - r_{31}:r_{12} + r_{21}:1 - r_{11} + r_{22} + r_{33}:r_{32} + r_{23} \\ &= r_{21} - r_{12}:r_{31} + r_{13}:r_{32} + r_{23}:1 - r_{11} - r_{22} + r_{33} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Bu noktanın son dört koordinatları ise

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{2}(t_1 p_1 + t_2 p_2 + t_3 p_3), \\ d_1 &= -\frac{1}{2}(t_1 p_0 - t_3 p_2 + t_2 p_3), \\ d_2 &= -\frac{1}{2}(t_2 p_0 + t_3 p_1 - t_1 p_3), \\ d_3 &= -\frac{1}{2}(t_3 p_0 - t_2 p_1 + t_1 p_2), \end{aligned} \quad (3.23)$$

eşitlikleriyle verilir.

3.3.1 Study Kuadriği

Dual kuaterniyon temsili kullanılarak, katı cisim hareketler grubunun elemanları altı boyutlu projektif kuadriğin noktaları olarak düşünülür (3-boyutlu bir 'ideal' noktalar düzlemi hariç). Eğer katı cismin belirli bir pozisyonu başlangıç pozisyonu olarak sabitlenirse, cismin diğer tüm pozisyonları, başlangıç konfigürasyonunu mevcut konfigürasyona götüren tek bir dönüşümle tanımlanabilir. Eşitlik (3.22) ve Eşitlik (3.23) denklemleriyle tanımlanan bir $q = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3 : d_0 : d_1 : d_2 : d_3]^T \in \mathbb{RP}^7$ noktası için

$$\begin{aligned} & p_0 d_0 + p_1 d_1 + p_2 d_2 + p_3 d_3 \\ &= \frac{1}{2} p_0 (t_1 p_1 + t_2 p_2 + t_3 p_3) - \frac{1}{2} p_1 (t_1 p_0 - t_3 p_2 + t_2 p_3) \\ & - \frac{1}{2} p_2 (t_2 p_0 + t_3 p_1 - t_1 p_3) - \frac{1}{2} p_3 (t_3 p_0 - t_2 p_1 + t_1 p_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ilişkisi elde edilir. Böylece, Study kinematik dönüşümü bir $\mathcal{D} \in SE(3)$ Öklidyen yer değiştirmesini $\mathbb{RP}^7$ uzayında Eşitlik (3.24)'te verilen kuadratik form ile tanımlanan bir kuadriğe dönüştürür:

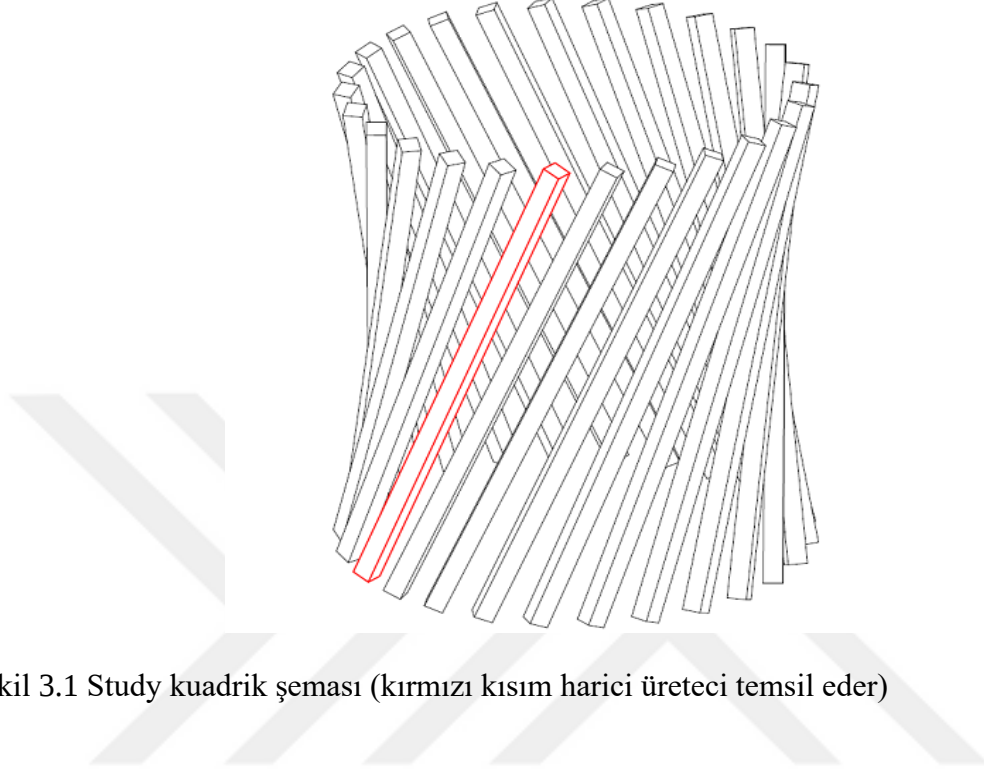
Study kuadriği, $\mathbb{RP}^7$ uzayında

$$p_0 d_0 + p_1 d_1 + p_2 d_2 + p_3 d_3 = 0. \quad (3.24)$$

denklemleriyle tanımlanır ve $\mathcal{S}$ ile gösterilir. Eşitlik (3.24), Eşitlik (3.20)'de tanımlanan bir dual kuaterniyonun normunun dual kısmına denktir (Selig, 2005).

$p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 0$ 3 –boyutlu uzayı *harici üreteç* (exceptional generator) olarak adlandırılır ve Study kuadriğine dahil değildir (Selig, 2005). Harici üreteçteki noktalar Öklid yer değiştirmelerini temsil etmez çünkü bu değerler için Eşitlik (3.10)'da

tanımlanan Euler parametreleri sıfıra eşit olur. Şekil 3.1’de şematik olarak Study kuadriği ve harici üretici görselleştirilmiştir.



Şekil 3.1 Study kuadrik şeması (kırmızı kısım harici üretici temsil eder)

Kuaterniyonlarda iç çarpım işlemini tanımlayan

$$pd^* + dp^* = 0 \quad (3.25)$$

denklemleri yardımıyla da Study kuadriği tanımlanır. Study kuadriğinin Hilbert polinomu:

$$\frac{x^{10}}{302400} + \frac{x^9}{7560} + \frac{47x^8}{20160} + \frac{x^7}{42} + \frac{2243x^6}{14400} + \frac{49x^5}{72} + \frac{121279x^4}{60480} + \frac{2963x^3}{756} + \frac{121883x^2}{25200} + \frac{709x}{210} + 1.$$

Polinomun derecesi yani kuadriğin derecesi ondur. Kuadriğin projektif boyutu ise polinomunun derecesinin faktöriyeli ile polinomunun baş katsayısının çarpımı formülüyle hesaplanarak 12 olarak bulunur. Bu dönüşümler, altı boyutlu projektif kuadrik olan Study kuadriği $\mathcal{S} \setminus E$ (3-boyutlu düzlem üzerindeki ideal noktalar hariç) üzerindeki noktalardır. İdeal noktalar düzlemi $E: p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 0$ düzlemdir.

Hareket geometrisinde, Study kuadriğine ek olarak başka bir önemli kuadrik de tanımlıdır. Bu kuadrik

$$p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 0 \quad (3.26)$$

olarak tanımlıdır ve *null koni* olarak adlandırılır. $\mathcal{N}$ ile gösterilir (Selig, 2005).

$\mathcal{N}$, tam olarak normu dual olan dual kuaterniyonları içerir. Karmaşık değerler de dikkate alındığında null konisinin harici üreteçten farklı olduğu unutulmamalıdır. Harici üreteç E tam olarak $\mathcal{N}$ null konisinin reel noktalarından oluşur.

3.4 Hareket Geometrisi

Ofset (paralel) eğriler: Parametrik olarak temsil edilen bir $(f(t), g(t))$ baz eğrisinden bir d uzaklıkta olan paralel eğrinin iki kolu,

$$\begin{aligned} x &= f \pm \frac{g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}, \\ y &= g \pm \frac{f'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} \end{aligned}$$

olarak verilir. Burada, $f' = \frac{df}{dt}$ ve $g' = \frac{dg}{dt}$, dir (Weisstein, 2021). Ofset (paralel) yüzeyler de benzer bir tanıma sahiptir.

Tanım 3.3 (Rasyonel eğri). $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ eğrisi için eğer

$$\alpha_1(t) = \frac{a_1(t)}{b_1(t)}, \alpha_2(t) = \frac{a_2(t)}{b_2(t)}, \dots, \alpha_n(t) = \frac{a_n(t)}{b_n(t)}$$

olacak şekilde $\text{ebob}(a_i(t), b_i(t)) = c_i, c_i \in \mathbb{R}$ koşulunu sağlayan $a_i(t), b_i(t)$ polinomları mevcut ise $\alpha(t) \in \mathbb{R}^n$ eğrisine n –boyutlu rasyonel polinom eğrisi denir (Fulton ve Weiss, 1969).

Örnek 3.4. Merkezi orijin olan birim çember $x = \cos \theta$ ve $y = \sin \theta$ denklemlerini sağlayan tüm noktaların geometrik yeri olarak tanımlanabilir. Burada x, y çember üzerindeki herhangi bir noktanın koordinatlarıdır ve θ parametresi çemberin merkezindeki noktanın x –ekseniyle taradığı açıdır. Çember denklemi rasyonel formda trigonometrik yerine koyma yöntemi yardımıyla $t = \tan \frac{\theta}{2}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2t}{1+t^2}, \\ y(t) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

olarak yazılır.

Bir hiperbol normal formda

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemiyle yazılır. a ve b sırasıyla asal eksen ve yedek eksen olarak adlandırılır. Burada hiperbol $x = a \sec \theta$ ve $y = b \tan \theta$ denklemlerini sağlayan tüm noktaların geometrik yeri olarak tanımlanabilir. Burada, $\sec \theta = 1 / \cos \theta$ ve $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$ olmak üzere trigonometrik yerine koyma yöntemiyle

$$\begin{aligned} x(t) &= a \frac{1+t^2}{2t}, \\ y(t) &= b \frac{1-t^2}{2t} \end{aligned}$$

rasyonel formunda yazılabilir. Diğer taraftan hiperbol $xy = 1$ denklemiyle de verilebilir.

Bu $x = t$ ve $y = \frac{1}{t}$ olarak parametrelendirilen rasyonel eğridir.

Aynı şekilde bir elips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemiyle yazılır. Burada elips $x = a \cos \theta$ ve $y = b \sin \theta$ denklemlerini sağlayan tüm noktaların yeri olarak tanımlanabilir. Öyleyse elips konik kesiti

$$\begin{aligned} x(t) &= a \frac{2t}{1+t^2}, \\ y(t) &= b \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

rasyonel formunda yazılabilir. Böylece, çember, elips ve hiperbol eğrileri polinom eğrisi değil rasyonel eğrilerdir.

Teorem 3.5. Rasyonel bir eğrinin ancak ve ancak sonsuzda bir tek noktası varsa polinom eğrisidir (Abhyankar, 1988).

Örnek 3.6. Çember eğrisinin sonsuzda iki noktası olduğu için bir polinom eğrisi olması mümkün değildir.

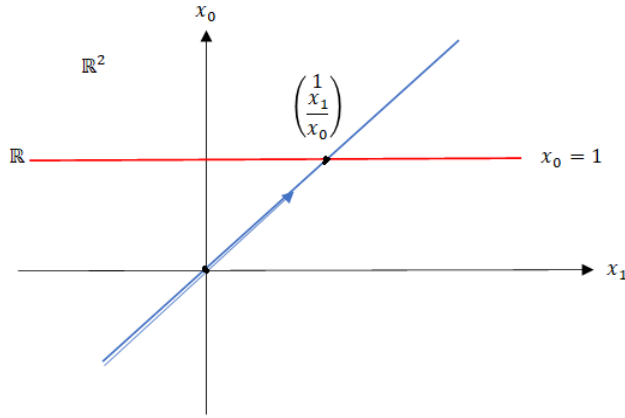
Öncelikle, sonsuzdaki noktaların hesaplanması için bazı temel bilgiler verilsin. $\mathbb{R}^2$ uzayında bir u noktası homojen koordinatlarda

$$[u] := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v = \lambda u, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

şeklinde verilir. Bir boyutlu $\mathbb{RP}^1$ projektif uzayı $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 'ın $\approx$ ilişkisine göre denklik sınıfıdır (Richter-Gebert, 2011):

$$u \approx v: \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ öyle ki } v = \lambda u$$

$\mathbb{RP}^1$ projektif uzayının noktaları bir reel projektif doğrudur. Reel projektif doğru, Şekil 3.2'de görselleştirilmiştir.



Şekil 3.2 Reel projektif doğru

$\mathbb{R}^2$ uzayında bir (x_0, x_1) noktası projektif uzayda

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_0 \neq 0} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x_1}{x_0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

noktasına eşleşir. (a, b) merkezli ρ yarıçaplı çember denklemi

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \rho^2$$

şeklinde tanımlanır. Çemberin sonsuzdaki noktalarını hesaplamak için homojen koordinatlarda yazılsın:

$$\left(\frac{x_1}{x_0} - a\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0} - b\right)^2 = \rho^2$$

eşitliği açık formda

$$x_1^2 - 2ax_0 + a^2x_0^2 + x_2^2 - 2bx_0 + b^2x_0^2 - \rho^2x_0^2 = 0 \quad (3.27)$$

yazılır. Çember eğrisinin sonsuzdaki noktaları Eşitlik (3.27)'nin $x_0 = 0$ değeri için bulunan

$$x_1^2 + x_2^2 = 0 \quad (3.28)$$

noktalar kümesidir. (3.28) $(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = 0$ olarak çarpanlarına ayrılır. Buradan,

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece, çember eğrisi sonsuzda iki tane $(0, 1, i)^T$ ve $(0, 1, -i)^T$ noktalarına sahiptir.

Örnek 3.7. Parabol eğrisi sonsuzda tek noktası olduğu için bir polinom eğrisidir.

Parabol eğrisi $y = a(x - h)^2 + k$ olmak üzere parabolün sonsuzdaki noktalarını hesaplamak için homojen koordinatlarda yazılsın:

$$\frac{x_2}{x_0} = a \left(\frac{x_1}{x_0} - h \right)^2 + k$$

eşitliği açık formda

$$ax_1^2 - 2ahx_0x_1 + ah^2x_0^2 + kx_0^2 - x_2 = 0$$

olarak yazılır. Polinom eğrisinin sonsuzdaki noktası $x_0 = 0$ değerine karşılık gelen noktadır:

$$ax_1^2 - x_2 = 0$$

eşitliğinden bir $(0: x_1: ax_1^2)^T$ noktası olarak hesaplanır.

Tanım 3.8 (Oskulatör düzlem). $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir diferansiyellenebilir eğri, P, Q ve R eğri üzerinde, $Q \rightarrow P, R \rightarrow Q$ olan üç nokta olsun. P 'de belli olan PQ, QR vektörlerinin gerdiği düzleme eğrinin $P = \alpha(t_0)$ noktasındaki *oskulatör düzlemi* denir. Teğet düzlem olarak da adlandırılır. $\alpha(s)$ yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş eğri, $t(s), n(s)$ ve $b(s)$ eğrinin sırasıyla teğet, normal ve binormal vektörleri olmak üzere sırasıyla teğet düzlem denklemi, normal düzlem denklemi ve rektifyen düzlem denklemi

$$\begin{aligned} \det(X - \alpha(s), t(s), n(s)) &= 0 \text{ veya} \\ \langle X - \alpha(s), b(s) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \det(X - \alpha(s), n(s), b(s)) &= 0 \text{ veya} \\ \langle X - \alpha(s), t(s) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \det(X - \alpha(s), b(s), t(s)) &= 0 \text{ veya} \\ \langle X - \alpha(s), n(s) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

ile tanımlanır (Karakaş, 2024).

Bir cismin başka bir cisme göre olan konumunu incelemek amacıyla, her bir cisme bir koordinat çatısı bağlanır. Bu durumda, biri sabit F çatısına, diğeri ise hareketli M çatısına bağlanmış olarak varsayılır. *Koordinat transformasyonu*, $D: F \rightarrow M$, bir cismin M 'de ölçülen koordinatlarını F çatısındaki koordinatlara çeviren bir işlem olarak tanımlanır ve bu transformasyon,

$$X = Ax + d$$

denklemleri kullanılarak gerçekleştirilir. Burada; x , noktanın M çatısındaki konum vektörünü, X ise F çatısındaki konum vektörünü temsil eder. Koordinat transformasyonları, homojen matrisler yardımıyla

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

formunda tanımlanır. A , dönme operatörü olan bir ortogonal matris ve d ise öteleme vektörüdür (McCarthy, 1990).

Tanım 3.9. $O(n, \mathbb{R})$, n –boyutlu *ortogonal grup*, $n \times n$ ortogonal matrislerin cümlesidir ve

$$O(n) = \{A \mid A \in GL(n, \mathbb{R}), A^T = A^{-1}\}$$

kümesi olarak tanımlanır. Bir ortogonal matrisin determinanı ya 1 ya da -1 'dir ve bu nedenle ortogonal grup iki bileşene sahiptir. Grubun birim elemanı olan birim matrisi içeren bileşen *özel ortogonal grup* $SO(n)$ olarak adlandırılır ve

$$SO(n) = \{A \mid A \in GL(n, \mathbb{R}), A^T = A^{-1}, \det A = 1\}$$

kümesiyle tanımlanır. $SO(n)$ 'in grup etkisi n –boyutlu uzayda orijin etrafında dönme hareketidir. Ayrıca, n –boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayının katı cisim yer değiştirmeler grubu uzayın *Öklidyen grubu* olarak tanımlanır. Bu grup

$$SE(n) = \left\{ \begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid A \in SO(n), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

ile gösterilir (McCarthy, 1990)

Tanım 3.10 (Rasyonel hareket). *Rasyonel hareket*, yalnızca rasyonel yörüngelere sahip olan harekettir. Dual kuaterniyonlar yönlü olduğundan (iki yön aynı hareketi verir), $\text{Mod } \{\pm 1\}$ 'e göre birim normlu dual kuaterniyonlar grubu $SE(3)$ katı cisim yer değiştirmeler grubuna izomorfiktir. $SE(3)$ katı cisim yer değiştirmeler grubunun dual kuaterniyon modelinde rasyonel hareket Study kuadriği üzerinde bir eğri ile tanımlanır (Selig, 2005).

Tanım 3.11 (Hareket polinomu). Bir $\mathcal{D} = \mathbf{p} + \epsilon \mathbf{d}$ dual kuaterniyon polinomu normunun dual kısmı $\mathbf{p}\mathbf{d}^* + \mathbf{d}\mathbf{p}^*$ ile tanımlı olan Study şartını sağlıyorsa ve normunun reel kısmı $\mathbf{p}\mathbf{p}^* \neq 0$ oluyorsa *hareket polinomu* olarak adlandırılır (Selig, 2005).

Nokta-doğru-düzlem hareketi: $\mathcal{D} = \{p + \epsilon d \in \mathbb{DH} \mid p, d \in \mathbb{H}, pd^* + dp^* = 0\}$
hareket polinomunun aşağıdaki şekilde

$$X = \{x_0 + \epsilon y \mid x_0 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^3\} \quad (3.32)$$

$$L = \{l + \epsilon \bar{l} \mid l \in \mathbb{R}^3, \bar{l} \in \mathbb{R}^3\} \quad (3.33)$$

$$E = \{x + \epsilon y_0 \mid x \in \mathbb{R}^3, y_0 \in \mathbb{R}\} \quad (3.34)$$

sırasıyla Eşitlik (3.32) ile tanımlanan X noktasına (veya vektörüne), Eşitlik (3.33) ile tanımlanan L doğrusuna ve Eşitlik (3.34) ile tanımlanan E düzlemine etkileri aşağıdaki şekilde verilmiştir (Selig, 2000)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\epsilon X \mathcal{D}^{-1} &= (p - \epsilon d)(x_0 + \epsilon y)(p + \epsilon d)^{-1} \\ &= \frac{(p - \epsilon d)(x_0 + \epsilon y)(p + \epsilon d)^*}{pp^*} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\epsilon L \mathcal{D}_\epsilon^{-1} &= (p - \epsilon d)(l + \epsilon \bar{l})(p - \epsilon d)^{-1} \\ &= \frac{(p - \epsilon d)(l + \epsilon \bar{l})(p - \epsilon d)^*}{pp^*} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\epsilon E \mathcal{D}^{-1} &= (p - \epsilon d)(x + \epsilon y_0)(p + \epsilon d)^{-1} \\ &= \frac{(p - \epsilon d)(x + \epsilon y_0)(p + \epsilon d)^*}{pp^*} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Doğru ve düzlem hareketinin ispatları sırasıyla 5.1 ve 6.1 bölümlerinde verilecektir.

3.5 Regle Yüzeyler ve Zarf Yüzeyler

3.5.1 Regle Yüzey

Tanım 3.12 (Regle yüzey). E^3 Öklid uzayında bir r doğrusunun bir kurala bağlı olarak hareketiyle oluşan yüzeye *regle (kurallı) yüzey* denir (Karakaş, 2024).

Üç boyutlu E^3 Öklid uzayı standart koordinatlarında *bir regle yüzey*

$$s(u, v) = a(u) + vr(u), \quad u \in I, v \in \mathbb{R}$$

parametrik gösterimine sahiptir. Burada, $a(u)$, $\dot{a}(u) \neq 0$ regüler eğrisi *dayanak eğrisi* ve $r(u) \neq 0$ vektör alanı *doğrultman* olarak adlandırılır. Yüzey bir parametrelili doğrular ailesini içerir: $s(u_0, v)$ sabit bir u_0 değeri için $\mathcal{R}(u_0)$ doğru üreticini temsil eder (Do Carmo, 1976; Karakaş, 2024).

Genel anlamda bir regle yüzey, uzayda hareket eden bir doğru tarafından üretilir (Karakaş, 2024)

Tanım 3.13 (Regle yüzeyin dual gösterimi). $\vec{R} = \vec{x} + \epsilon \vec{y} = R(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$ doğrusunun $(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$ homojen olmayan altı koordinatları arasında

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0 \end{cases}$$

bağıntılarından başka

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) &= 0 \\ \Phi(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) &= 0 \\ \Psi(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) &= 0 \end{aligned}$$

bağıntıları da varsa X doğrusunun parametre sayısı birdir. Study tekabülüne uyan bağımsız bir parametreye bağlı (∞^1) sayıdaki $\vec{X}$ doğrularının cümlesine *regle yüzey* denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Bir regle yüzey, bir u parametresine bağlı $R = \vec{R}(u)$ birim dual fonksiyon olmak üzere

$$\mathcal{R} = r(u) + \epsilon \bar{r}(u) = r(u) + \epsilon(a(u) \times r(u)) \quad (3.38)$$

şeklinde de yazılabilir. Bu birim dual vektör, birim dual küre üzerinde bir R dual eğrisi çizer. Bu eğriye $\mathbb{R}^3$ 'te bir regle yüzey karşılık gelir. R dual eğrisine regle yüzeyin *dual küresel resmi* denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Bir başka deyişle, $\mathbb{RP}^3$ 'te bir $\mathcal{R} = R(u)$ doğrular ailesi eğer $\mathcal{R}_\gamma$ Klein görüntüsü Klein kuadriği üzerinde bir $\mathcal{R}_{\gamma(u)}$ eğrisiyse bir *regle yüzey* olarak adlandırılır. Yüzeyin diferensiyellenebilirlik sınıfı $\mathcal{R}_\gamma$ 'nin diferensiyellenebilirlik sınıfı olarak tanımlanır. $R(u)$ doğruları yüzeyin üreteç doğrularıdır (Pottmann ve Wallner, 2001).

Eğer $\mathcal{R}$ bir regle yüzeyse doğrularının birleşimi $\mathbb{RP}^3$ uzayındaki noktaların bir iki-yüzeyi olarak bir parametrizasyona sahiptir. $\mathcal{R}$ 'nin doğrularının $u \in D$ (D , bir aralık veya projektif doğrudur) ile $R(u)$ formunda parametrelendirildiği varsayılın. Eğer, eğriler $a(u) = a(u)\mathbb{R}$, $b(u) = b(u)\mathbb{R}$ öyle ki $a(u) \vee b(u)$ olarak seçilirse

$$s: D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{RP}^3, \quad s(u, v) = ((1 - v)a(u) + vb(u))\mathbb{R}$$

yüzeyin bir kısmının parametresidir ve

$$s: D \times \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^3 \\ s(u, \lambda_0: \lambda_1) = x(u, \lambda_0: \lambda_1)\mathbb{R} = (\lambda_0 a(u) + \lambda_1 b(u))\mathbb{R}$$

tüm regle yüzeyi parametrize eder. $r(u) = b(u) - a(u)$ vektörleri $R(u)$ üretecine paraleldir ve tepe noktası orijin olan koniyi tanımlar. Böylece regle yüzeylerin parametrizasyonu

$$x(u, v) = a(u) + vr(u), \quad u \in I, \quad v \in \mathbb{R} \quad (3.39)$$

şeklinde de yazılabilir (Pottmann ve Wallner, 2001).

Örnek 3.14. Bir doğru demetinin Klein görüntüsü Klein kuadriği üzerinde bir doğrudur. $(\lambda_0(p_1, \bar{p}_1) + \lambda_2(p_2, \bar{p}_2))\mathbb{R}$, $p_1\bar{p}_1 = p_2\cdot\bar{p}_2 = p_1\cdot\bar{p}_2 + p_2\cdot\bar{p}_1 = 0$ ile parametrize edilebilir. Bu şartlar $(p_1, \bar{p}_1)$ ve $(p_2, \bar{p}_2)$ koordinatlarının Plücker koordinatlarında kesişen iki adet doğrular olduğu anlamına gelir. Eğer $(\lambda_0: \lambda_1)$ projektif doğrunun bir

noktasıyla tanımlanırsa bu, bir $c: \mathbb{RP}^1 \rightarrow M_2^4$ eğrisidir ve bir doğru demetinin Klein kuadriğinde kapalı bir eğriye karşılık geldiğini gösterir (Pottmann ve Wallner, 2001).

Örnek 3.15. Kurallı kuadrikler iki farklı doğru ailesi taşır. *Regulus*, üç boyutlu projektif uzayda düzgün bir kuadrik üzerindeki iki doğru ailesinden biri anlamına gelir. Regulusa en temel örnek olarak dönel hiperboloid verilebilir. Bir doğrunun eksen etrafında dönmesi bir regulus oluşturur. Ekseni içeren bir düzlemdeki yansıma ikinci regulusu verir. Aynı regulusun iki doğrusu kesişir ve farklı regulusların doğruları genellikle ideal bir noktada (sonsuzda) kesişir. Bir regulusun Klein görüntüsü Klein kuadriği üzerinde bir koniktir (Pottmann ve Wallner, 2001).

Yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş bir $\alpha(s)$ uzay eğrisi ve eğrinin $t(s)$ teğet vektörü tarafından oluşturulan yüzeyin denklemi

$$r(s, v) = \alpha(s) + vt(s) \quad (3.40)$$

ile verilir. Oluşan bu yüzey *tanjant açılabilir yüzey* olarak adlandırılır (Struik, 1950).

Açılabilir yüzeylerin hesaplamalı doğru geometrisinde farklı bir tanımlaması vardır. Tanım 3.13’de Eşitlik (3.24 ile ifade edilen Klein kuadriğinin üzerinde olmasıyla karakterize edilen regle yüzeyin eğer türevi de Klein kuadriği üzerinde bir eğriyse bu regle yüzeye *açılabilir yüzey* denir (Pottmann ve Wallner, 2001).

3.5.2 Zarf Yüzeyi

$F(x, y, z) = 0$ bir yüzey olsun. $F(x, y, z, a) = 0$ formunda verilen bir denklem sonsuz sayıda yüzey tanımlar, her yüzey a parametresinin bir değeriyle belirlenir. Bu tür sistemler yüzeylerin *bir parametrelili ailesi* olarak tanımlanır. Örneğin, bir eğrinin teğet düzlemleri böyle bir aile oluştururlar.

$k \geq 2$ için F, C^k sınıfından olsun. Parametrenin a ve a' değerlerine karşılık gelen ve kesişimleri bir eğri olan iki yüzey denklemleri

$$F(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{F(x, y, z, a') - F(x, y, z, a)}{a' - a} = 0$$

şeklinde yazılabilir. a' , a 'ya yaklaştıkça bu eğri

$$F(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, z, a)}{\partial a} = 0$$

denklemleriyle bir limit formuna ulaşır. Böylece, tanımlanan bu eğri a parametresine karşılık gelen yüzeyin *karakteristiği* olarak adlandırılır. a değıştikçe bu karakteristiklerin ve onların konumlarının (locus) bir ailesi oluşur. Denklem sisteminden a yok edilerek elde edilen $G(x, y, z) = 0$ yüzeyine, 1-parametrelili yüzey ailesinin *zarfı* denir (Eisenhart, 1960; Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 3.16 (Bir parametrelili doğru ailesinin zarfı). Bir $S: \{s(u) = 0 \mid s(u) = a(u)x + b(u)y + c(u), a(u), b(u), c(u) \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\}$ doğrular ailesinin zarfı

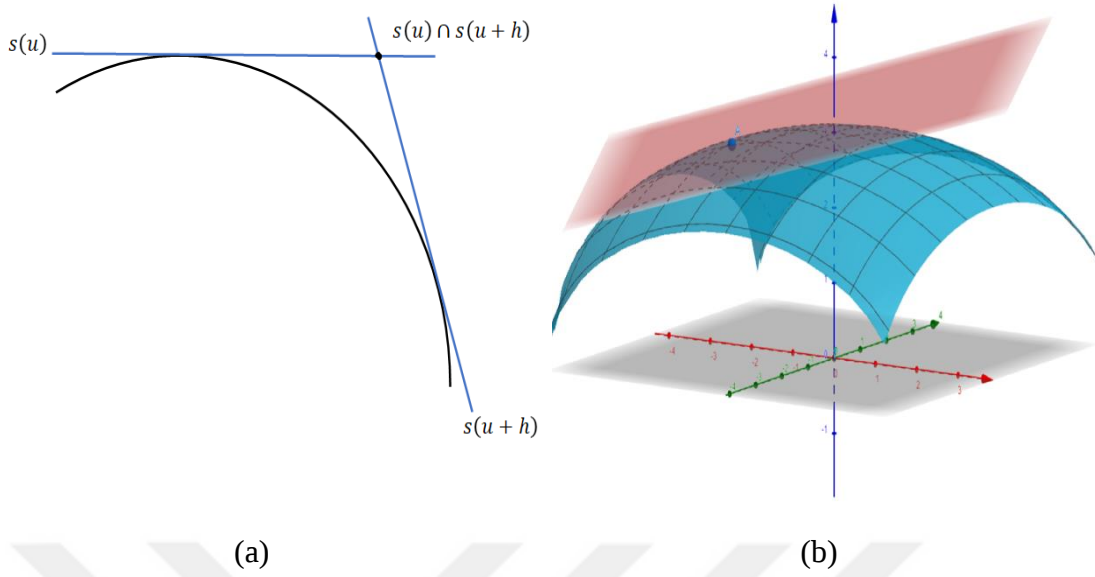
$$\gamma(u) := s(u) \cap \frac{d}{du} s(u) \quad (3.41)$$

ile tanımlanır. Şekil 3.3(a)' da gösterildiği gibi doğru ailesinin zarfı bir parametrik eğri üretir (Struik, 1950).

Tanım 3.17 (İki parametrelili düzlemler ailesinin zarfı). Bir $E: \{f(u, v) = 0 \mid f(u, v) = a(u, v)x + b(u, v)y + c(u, v)z + d(u, v)\}$ iki-parametrelili yüzeyler ailesinin zarfı

$$\varepsilon(u, v) = f(u, v) \cap \frac{\partial}{\partial u} f(u, v) \cap \frac{\partial}{\partial v} f(u, v) \quad (3.42)$$

ile tanımlanır. Şekil 3.3(b)' de gösterildiği gibi ilgili düzlemler ailesini teğet düzlemler ailesi kabul eden bir parametrik yüzey üretir (Struik, 1950).



Şekil 3.3 (a) Doğru ailesinin zarf eğrisi (b) İki parametrelili düzlem ailesinin zarf yüzeyi

Örnek 3.18. Orijin merkezli birim küre yüzeyinin parametrik ifadesi

$$r(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)^T$$

olarak yazılabilir. Bu örnekte, birim kürenin teğet düzlemlerinin zarf yüzeyi hesaplanacaktır. Birim kürenin normal vektörleri ile teğet düzlemlerinin normal vektörleri lineer bağımlı olmak zorundadır. Birim kürenin ve teğet düzlemlerin zarf yüzeyinin normal vektörleri bulunup lineer bağımlı oldukları gösterilecektir. Birim küre yüzeyinin normal vektörü

$$f(u, v) = r_u \times r_v = \sin u \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}$$

vektörüne paraleldir. $d \in \mathbb{R}$ olmak üzere birim küre yüzeyinin teğet düzlem denklemleri

$$E(u, v): \sin^2 u \cos v x + \sin^2 u \sin v y + \sin u \cos u z + d = 0$$

ile yazılır. Bu düzlemlerin zarf yüzeyi $\varepsilon(u, v) = E(u, v) \cap \frac{\partial}{\partial u} E(u, v) \cap \frac{\partial}{\partial v} E(u, v)$ formülünden (x, y, z) için çözülünce

$$F(u, v) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d(-1 + 2 \cos^2 u) \cos v}{\cos^2 u - 1} \\ -\frac{d(-1 + 2 \cos^2 u) \sin v}{\cos^2 u - 1} \\ -\frac{2d \cos u}{\sin u} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Birim kürenin teğet düzlemlerinin oluşturduğu $F(u, v)$ zarf yüzeyinin normal vektörü

$$\begin{aligned} g(u, v) = F_u \times F_v &= \begin{bmatrix} \frac{4d^2 \sin^2 u \cos v \left(\cos^2 u - \frac{1}{2} \right)}{(\cos u - 1)^3 (\cos u + 1)^3} \\ \frac{4d^2 \sin^2 u \sin v \left(\cos^2 u - \frac{1}{2} \right)}{(\cos u - 1)^3 (\cos u + 1)^3} \\ -\frac{2d^2 \cos u (2 \cos^2 u - 1)}{\sin u (\cos^2 u - 1)^2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{4d^2 \sin u \left(\cos^2 u - \frac{1}{2} \right)}{(\cos u - 1)^3 (\cos u + 1)^3} \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Yukarıdaki hesaplamalarda görüldüğü üzere, birim küre yüzeyinin

normal vektörü, $f(u, v) = \sin u \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}$ ile teğet düzlemler zarf yüzeyinin normal

vektörü, $g(u, v) = \frac{4d^2 \sin u \left(\cos^2 u - \frac{1}{2} \right)}{(\cos u - 1)^3 (\cos u + 1)^3} \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}$ lineer bağımlıdır. Sonuç olarak, birim

normal vektörleri $n(u, v) = \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}$ beklenildiği gibi çakışıktır.

3.6 Pisagor Hodograf (PH) Eğriler

Düzlemsel Pisagor hodograf eğriler ilk defa 1990 yılında Farouki ve Sakkalis tarafından çalışılmıştır (Farouki ve Sakkalis, 1990). Aynı yazarlar, 1994 yılında uzaysal Pisagor hodograf eğrilerini de ilk kez tanımlamışlardır (Farouki ve Sakkalis, 1994). Bu eğrilerin tanımı genelliği kaybetmeden herhangi bir n – boyuta ve eğrinin rasyonel olma durumuna genişletilebilir.

3.6.1 Pisagor Hodograf Eğriler

Bir $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ parametrik polinom (rasyonel) eğrisi eğer polinom (rasyonel) hıza (hodografa) sahipse

$$\|\alpha'(t)\|_n^2 = \alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2 + \dots + \alpha_n'(t)^2 = \sigma(t)^2 \quad (3.43)$$

Pisagor hodograf (PH) eğri olarak adlandırılır. Burada, $\sigma(t) \in \mathbb{R}[t]$ ve $\|\cdot\|_n$, $\mathbb{R}^n$ uzayında standart Öklid normunu gösterir. Ayrıca, $h(t) = \alpha'(t)$, $\alpha(t)$ eğrisinin *hodografi* olarak adlandırılır (Farouki, 2008).

3.6.2 Düzlemsel Pisagor Hodograf Eğriler

Düzlemsel bir Pisagor hodograf eğrisi için gerek ve yeter şart hodografinın aşağıda verilen teoremde ifade edildiği şekilde Pisagor üçlüsü şeklinde yazılmasıdır.

Teorem 3.19. Üç tane reel $a(t)$, $b(t)$ ve $c(t)$ polinomları $\max[\deg(a), \deg(b)] = \deg(c) > 0$ olmak üzere, $a^2(t) + b^2(t) = c^2(t)$ Pisagor koşulunu ancak ve ancak $u(t), v(t), w(t) \in \mathbb{R}[t]$ reel polinomları cinsinden aşağıdaki formda ifade edilebilirlerse

$$\begin{aligned} a(t) &= w(t)[u^2(t) - v^2(t)], \\ b(t) &= 2w(t)u(t)v(t), \\ c(t) &= w(t)[u^2(t) + v^2(t)], \end{aligned} \quad (3.44)$$

sağlarlar (Kubota, 1972).

Teorem 3.20 (Düzlemsel Pisagor hodograf eğriler). Bir $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ düzlemsel polinom eğrisinin Pisagor hodograf eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}\alpha'_1(t) &= a(t) = w(t)[u^2(t) - v^2(t)], \\ \alpha'_2(t) &= b(t) = 2w(t)u(t)v(t)\end{aligned}\tag{3.45}$$

formunda yazılmasıdır (Farouki ve Sakkalis, 1990).

Bu düzlem eğrileri bir başka şekilde kompleks sayılar yardımıyla tanımlanabilir. Kısaca, bir $z(t) = u(t) + iv(t)$ kompleks değerli fonksiyonun karesini alarak

$$z^2(t) = u^2(t) - v^2(t) + i(2u(t)v(t))\tag{3.46}$$

elde edilir. Eğer bu kompleks değerli fonksiyon Pisagor bağıntısını sağlayan $h(t) = (u^2(t) - v^2(t), 2u(t)v(t))$ parametrik eğrisi olarak yazılabilir (Farouki, 1994).

Örnek 3.21. Bir $y = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$ doğrusu bir parametrik polinom eğrisi formunda $r(t) = (t, at + b)$ olarak yazılabilir. Bu eğrinin hodografinin normu

$$r'(t) = (1, a) \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{1 + a^2} \in \mathbb{R}$$

bir sabit polinomdur. Bu aşikâr bir Pisagor hodograf eğrisidir.

Örnek 3.22 . Bir $y = x^2$ parabol eğrisi parametrik polinom formunda $r(t) = (t, t^2)$ olarak yazılabilir. Bu eğrinin hodografinin normu

$$r'(t) = (1, 2t) \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

bir polinom değildir. Pisagor hodograf eğriler birim çemberi parametrize eder (çemberin rasyonel parametrelendirmesi $\vec{v}(s) = (1 - s^2, 2s)$ öyle ki $\|\vec{v}(s)\| = 1 + s^2$). Öyleyse, $r(t)$ s cinsinden yeniden parametrelendirilsin:

$$\vec{v}^\perp(s) = (-2s, 1 - s^2)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\langle \vec{v}^\perp(s), r'(t) \rangle &= 0 \Rightarrow -2s + 2t(1 - s^2) = 0 \\ \Rightarrow t &= \frac{s}{1 - s^2}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece, $r(s) = \left(\frac{s}{1 - s^2}, \frac{s^2}{(1 - s^2)^2} \right)$, $s \in (-1, 1)$ parabol eğrisi bir Pisagor hodograf eğrisidir.

3.6.3 Uzaysal Pisagor Hodograf Eğriler

$\mathbb{R}^3$ uzayında, bir $r(t)$ polinom eğrisinin Pisagor hodograf eğrisi olması için yeter şart $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ hodograf $u(t), v(t), w(t)$ polinomları cinsinden

$$\begin{aligned}x'(t) &= u^2(t) - v^2(t) - w^2(t), \\ y'(t) &= 2u(t)v(t), \\ z'(t) &= 2u(t)w(t), \\ \sigma(t) &= u^2(t) + v^2(t) + w^2(t)\end{aligned}\tag{3.47}$$

formunda yazılmasıyla sunulmuştur (Farouki ve Sakkalis, 1994).

Pisagor koşulunu karşılayan polinomlar için farklı bir karakterizasyon sunulmuştur.

Teorem 3.23. Aralarında asal $a(t), b(t), c(t), d(t)$ reel polinomları Pisagor şartını $a^2(t) + b^2(t) + c^2(t) = d^2(t)$ sağlıyorsa $u(t), v(t), p(t), q(t)$ reel polinomları cinsinden

$$\begin{aligned}
a(t) &= u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t), \\
b(t) &= 2[u(t)q(t) + v(t)p(t)], \\
c(t) &= 2[v(t)q(t) - u(t)p(t)] \\
d(t) &= u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

formunda yazılmalıdır (Dietz vd., 1993).

Teorem 3.24 (Uzaysal Pisagor hodograf eğriler). (3.48) yardımıyla uzaysal Pisagor hodograf eğrilerinin $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = \sigma^2(t)$ Pisagor özelliğini sağlaması için gerek ve yeter şart hodograf bileşenlerinin

$$\begin{aligned}
x'(t) &= u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t), \\
y'(t) &= 2[u(t)q(t) + v(t)p(t)], \\
z'(t) &= 2[v(t)q(t) - u(t)p(t)] \\
\sigma(t) &= u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

formunda yazılmasıdır (Farouki, 2008).

(3.49) denklemindeki formun kuaterniyon modeliyle de ifade edilebildiği gösterilmiştir: Bir Pisagor hodograf eğrinin hodografi

$$h(t) \in \mathbb{H}[t], \text{ Reel}(h(t)) = 0, h(t) h^*(t) = \sigma^2(t) \tag{3.50}$$

olmak üzere bir kuaterniyon değerli $\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k} \in \mathbb{H}[t]$ polinomunun herhangi bir noktaya etkisi, bu etki sonucunda bulunan noktanın normuyla beraber (3.48)'de tanımlanan bir Pisagor dörtlüsü oluşturur (Choi ve Han, 2002):

$$\exists \mathcal{A} \in \mathbb{H}[t] \text{ öyle ki } h(t) = \mathcal{A}(t)\mathbf{i} \mathcal{A}^*(t). \tag{3.51}$$

Burada, $h(t)$ kuaterniyon katsayılı polinomunun $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ bileşenleri, $h(t)$ vektörünün Öklid normu $\sigma(t) = u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t)$ ile beraber $r(t)$ eğrisinin (3.49) denklemlerinde tanımlanan hodografını verir.

$$\begin{aligned} h(t) = & (u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t))\mathbf{i} \\ & + (2[u(t)q(t) + v(t)p(t)])\mathbf{j} \\ & + (2[v(t)q(t) - u(t)p(t)])\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Böylece, $r(t) = \int h(t)dt$ bir Pisagor hodograf eğridir. Sütun vektörü formunda $h(t)$:

$$\begin{bmatrix} u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t) \\ 2[u(t)q(t) + v(t)p(t)] \\ 2[v(t)q(t) - u(t)p(t)] \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

olarak yazılır. Bu sütun vektörü $\Delta = u^2 + v^2 + p^2 + q^2$ yazıldıktan sonra $U \in SO(3)$ matrisinin ilk sütununu oluşturur (Bottema ve Roth, 1979):

$$U = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} u^2 + v^2 - p^2 - q^2 & 2[-uq + vp] & 2[vq + up] \\ 2[uq + vp] & u^2 - v^2 + p^2 - q^2 & 2[-uv + pq] \\ 2[vq - up] & 2[uv + pq] & u^2 - v^2 - p^2 + q^2 \end{bmatrix}$$

Burada u , v , p ve q polinomlarına Euler-Rodrigues parametreleri denir. U matrisinin birinci sütunu $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ vektörünün görüntüsüdür. Diğer sütunlar sırasıyla, $\mathcal{A}(t)\mathbf{j}\mathcal{A}^*(t)$ ve $\mathcal{A}(t)\mathbf{k}\mathcal{A}^*(t)$ vektörel kuaterniyonlarının sütun vektörleridir. Daha sonra

$$\mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}^* = (u^2 + v^2 - p^2 - q^2)\mathbf{i} + (2[uq + vp])\mathbf{j} + (2[vq - up])\mathbf{k}$$

olarak hesaplanır. $\mathcal{A} = u + v\mathbf{i} + p\mathbf{j} + q\mathbf{k}$ olduğundan uzaysal Pisagor hodograf eğriler

$$r(t) = \int \mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}^* dt \quad (3.54)$$

denklemini ile yazılır (Choi ve Han, 2002).

3.6.4 Minkowski Pisagor Hodograf (MPH) Eğriler

Minkowski Pisagor hodograf (MPH) eğri kavramı, Pisagor hodograf eğriler kavramını genişletir. Bu eğriyi ilk kez Moon ortaya koymuştur. Burada, Minkowski Pisagor hodograf eğrisinin düzlemsel bir alanın orta eksen dönüşüm (MAT) temsili için uygun olduğu gösterilmiştir (Moon, 1999). Orta eksen dönüşümü bizi çemberlerin genel zarfına tarafından tanımlanır.

Bu bölümde, Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$ ve Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$ uzaylarındaki Pisagor hodograf eğriler tanımlanacaktır. Bu eğriler sırasıyla düzlemsel alanları ve kanal yüzeylerini tanımlamak için faydalıdır.

3.6.4.1 Orta Eksen Dönüşümü

Orta eksen dönüşümünün tanımlandığı zarf formülü tanımı yardımıyla (Choi vd., 1997) Minkowski Pisagor hodograf eğrileri incelenmiştir. Ω bir reel düzlemsel alanı kaplayan maksimum yarıçaplı bir çemberler ailesi olsun. Ω alanıyla tanımlı çemberler ailesi

$$(x - x(t))^2 + (y - y(t))^2 - r^2(t) = 0, \quad t \in I \subset \mathbb{R} \quad (3.55)$$

ile gösterilsin. $\gamma(t) = (x(t), y(t), r(t))$ eğrisi, $(x(t), y(t))$ merkezli $r(t)$ yarıçaplı çemberlerin bilgilerini kodlayan eğridir. Çemberlerin merkezlerinin oluşturduğu eğri $c(t) = (x(t), y(t))$ olsun.

$\gamma(t)$ eğrisine karşılık gelen Ω alanının sınır eğrisi olan çemberlerin zarfı olan $\tilde{c}(t)$ eğrisi

$$\begin{aligned} \tilde{c}(t) = c(t) + r(t) & \left(-\frac{r'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \mathcal{T}(t) \right. \\ & \left. \pm \frac{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) - r'^2(t)}}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \mathcal{N}(t) \right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

ile verilir. Burada, sırasıyla $\mathcal{T}(t) = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} \right)$ ve $\mathcal{N}(t) = \left(-\frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}, \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} \right)$, $c(t)$ eğrisinin teğet ve normal vektörleridir (Choi vd., 1997).

Tanım 3.25 ($\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında Minkowski Pisagor hodograf eğriler). $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında bir $\gamma(t) = (x(t), y(t), r(t))$ parametrik eğrisinin hodografı eğer Minkowski iç çarpımı

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{2,1} = x'^2(t) + y'^2(t) - r'^2(t) = \sigma^2(t) \quad (3.57)$$

bağıntısını sağlıyorsa bu eğri bir *Minkowski Pisagor hodograf (MPH) eğrisidir*. Burada, $\sigma(t)$ bir reel rasyonel polinomdur.

Öneri 3.26. $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında bir $\gamma(t) = (x(t), y(t), r(t))$ polinom eğrisi ancak ve ancak dört tane $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ ve $z(t)$ polinomları varsa ve $\gamma(t)$ eğrisinin hodografinın elemanları

$$\begin{aligned} x'(t) &= u^2(t) - v^2(t) + w^2(t) - z^2(t), \\ y'(t) &= -2u(t)z(t) - 2v(t)w(t), \\ r'(t) &= 2u(t)w(t) + 2v(t)z(t), \\ \sigma(t) &= u^2(t) - v^2(t) - w^2(t) + z^2(t) \end{aligned} \quad (3.58)$$

denklemlerini sağlıyorsa bir *Minkowski Pisagor hodograf (MPH) eğrisidir*.

Tanım 3.27 ($\mathbb{R}^{3,1}$ uzayında Minkowski Pisagor hodograf eğriler). $\mathbb{R}^{3,1}$ uzayında bir $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t), r(t))$ parametrik eğrisinin hodografı eğer Minkowski iç çarpımı

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{3,1} = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) - r'^2(t) = f_1^2(t) + f_2^2(t) \quad (3.59)$$

bağıntısını sağlıyorsa bu eğri bir *Minkowski Pisagor hodograf (MPH)* eğrisidir denir. Burada, $f_1(t)$, $f_2(t)$ reel rasyonel polinomlardır.

Eşitlik (3.59) ile tanımlanan eğriler kürelerin zarfları olan kanal yüzeyleri ile ilişkilidir. Küreler ailesi

$$(x - x(t))^2 + (y - y(t))^2 + (z - z(t))^2 - r^2(t) = 0, \quad t \in I \subset \mathbb{R} \quad (3.60)$$

denkleminde gösterilebilir. Bu Pisagor hodograf eğriler sınıfının, B-spline parametrelendirmesi ile kanal yüzeyleri ile ilişkisi incelenmiştir (Bizzarri vd., 2023).

Öneri 3.28. $\mathbb{R}^{3,1}$ uzayında bir $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t), r(t))$ polinom eğrisi ancak ve ancak $i = 1, 2$ için sekiz tane $u_i(t)$, $v_i(t)$, $w_i(t)$ ve $z_i(t)$ polinomları varsa ve $\gamma(t)$ eğrisinin hodografinin elemanları

$$\begin{aligned} x'(t) &= u_1^2(t) - v_1^2(t) - w_1^2(t) + z_1^2(t) + u_2^2(t) - v_2^2(t) - w_2^2(t) + z_2^2(t), \\ y'(t) &= -2u_1(t)v_1(t) - 2w_1(t)z_1(t) + 2u_2(t)v_2(t) + 2w_2(t)z_2(t), \\ z'(t) &= -2u_1(t)w_1(t) + 2v_1(t)z_1(t) + 2u_2(t)w_2(t) - 2v_2(t)z_2(t), \\ r'(t) &= -2u_1(t)u_2(t) + 2v_1(t)v_2(t) + 2w_1(t)w_2(t) - 2z_1(t)z_2(t), \\ f_1(t) &= u_1^2(t) + v_1^2(t) + w_1^2(t) + z_1^2(t) - u_2^2(t) - v_2^2(t) - w_2^2(t) - z_2^2(t), \\ f_2(t) &= 2u_1(t)z_2(t) - 2v_1(t)w_2(t) + 2w_1(t)v_2(t) - 2z_1(t)u_2(t) \end{aligned} \quad (3.61)$$

denklemlerini sağlıyorsa bir *Minkowski Pisagor hodograf (MPH)* eğrisidir.

3.7 Pisagor Normal (PN) Yüzeyler

Pottmann ve Wallner (2001) regle yüzeylerin birinci mertebe özelliklerini regle yüzeylerinin standart koordinat gösterimiyle detaylı bir şekilde sunmuşlardır. Bu bölümde, regle yüzey normali öncelikle standart koordinat gösterimiyle tanımlı olan notasyonlarda daha sonra Plücker koordinatlarında tanımlanmıştır. Ayrıca, Pisagor normal yüzeyine ilişkin tanımlar verilmiştir.

Tanım 3.29 (Pisagor normal yüzey). Rasyonel birim normal vektör alanına sahip bir yüzey rasyonel ofsete sahiptir ve bu yüzeyler *Pisagor normal yüzey* olarak adlandırılır (Pottmann, 1995b).

$$S: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \rightarrow S(u, v) \quad (3.62)$$

parametrik yüzeyini ele alınsın. Yüzeyin normal vektör alanı

$$N = \frac{S_u \times S_v}{\|S_u \times S_v\|} \quad (3.63)$$

denklemine eşittir. Burada, $\|\cdot\|$ Öklid iç çarpımını ve S_u ve S_v sırasıyla u ve v parametrelerine göre kısmi türevlerdir. Rasyonel (polinom) S yüzeyi N normal vektör alanı u ve v parametrelerine göre rasyonel ise *Pisagor normal yüzey* olarak adlandırılır. Böyle bir yüzeyin ofset yüzeyi $S_d = S + dN, d \in \mathbb{R}$ ile verilen bir rasyonel parametrik gösterime sahiptir (Pottmann, 1995b).

3.7.1 Regle Yüzey Normali

Bir yüzeyin teğet düzlemi, yüzeyin kısmi türevleri olan $x_u = \dot{a} + v\dot{r}$ ve $x_v = r$ vektörleri tarafından gerilir. Böylece bir x regle yüzeyinin *yüzey normali*

$$n(u, v) = x_u \times x_v = \dot{a}(u) \times r(u) + v(\dot{r}(u) \times r(u)) \quad (3.64)$$

ile verilir. $n(u, v) \neq 0$ olduğu noktalarda $x(u, v)$ yüzeyi regülerdir denir (Pottmann ve Wallner, 2001).

Eşitlik (3.39)'da verilen kartezyen koordinatlarda $x(u, v) = a(u) + vr(u)$, $u \in I$, $v \in \mathbb{R}$ olarak parametrize edilen bir regle yüzey Plücker koordinatlarında Eşitlik (3.38)'de verildiği üzere

$$R(u) = \begin{pmatrix} l(u) \\ \bar{l}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(u) \\ a(u) \times r(u) \end{pmatrix}$$

şeklinde parametrize edilebilir. Böylece, Eşitlik (3.64)'deki yüzey normali Plücker koordinatlarında

$$n(u) = \begin{pmatrix} \dot{r}(u) \times r(u) \\ \dot{a}(u) \times r(u) \times (\dot{r}(u) \times r(u)) \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

olarak yazılır. Buradan, aşağıdaki şekilde verilen $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin vektörel çarpım formülü

$$\begin{aligned} (a \times b) \times (c \times d) &= [a, b, d]c - [a, b, c]d \\ [a, b, c] &= \det(a, b, c) = a \cdot (b \times c) \end{aligned}$$

yardımla normal vektörün moment bileşeni

$$\begin{aligned} &\dot{a}(u) \times r(u) \times (\dot{r}(u) \times r(u)) \\ &= [\dot{a}(u), r(u), r(u)]\dot{r}(u) - [\dot{a}(u), r(u), \dot{r}(u)]r(u) \\ &= \left(\dot{a}(u) \cdot (r(u) \times r(u)) \right) \dot{r}(u) \\ &\quad - \left(\dot{a}(u) \cdot (r(u) \times \dot{r}(u)) \right) r(u) \\ &= - \left(\dot{a}(u) \cdot (r(u) \times \dot{r}(u)) \right) r(u) \end{aligned} \quad (3.66)$$

olarak hesaplanır. Böylece, Eşitlik (3.65)'te tanımlanan Plücker koordinatlarında regle yüzey normali

$$n(u) = \begin{pmatrix} \dot{r}(u) \times r(u) \\ - \left(\dot{a}(u) \cdot (r(u) \times \dot{r}(u)) \right) r(u) \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

formülü ile verilir.

3.7.2 İki Parametrelili Hareketin Pisagor Normal Yüzey Olma Durumu

Katsayıları $\mathbb{H}$ kuaterniyonlar kümesinden olan iki değişkenli polinomlar $\mathbb{H}[u, v]$ ile gösterilen bir halka oluştururlar. Bu halkanın elemanları kısaca kuaterniyon polinomları olarak adlandırılır.

$$\mathcal{A}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \mathcal{A}_{i,j} u^i v^j, \quad \mathcal{A}_{i,j} \in \mathbb{H} \quad (3.68)$$

$\mathcal{A}$, n . dereceden bir kuaterniyon katsayılı polinom olsun. $\mathcal{A}$, üç tane $e_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$e_i = \frac{h_i}{\|\mathcal{A}\|}, \quad i = 1, 2, 3, \quad h_1 := \mathcal{A}i\mathcal{A}^*, \quad h_2 := \mathcal{A}j\mathcal{A}^*, \quad h_3 := \mathcal{A}k\mathcal{A}^*$$

dönüşümüyle birleştirilir. Bu çarpımlar vektörel kuaterniyonlardır ve $e_i \cdot e_j = \delta_{i,j}$, burada $\delta_{i,j}$ Kronecker delta fonksiyonudur.

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} A_{i,j} u^i v^j, \quad A_{i,j} \in \mathbb{H} \\ r(u, v) &= \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{m+1-i} r_{i,j} u^i v^j \\ g_l(u, v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} B_{i,j}^l u^i v^j, \quad l = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.69)$$

olmak üzere bir r yüzeyi Pisagor normal yüzey olsun. Öyleyse, bu yüzeyin teğet vektörleri $r_u = \varphi_1 h_1 + \varphi_2 h_2 := g_1$ ve $r_v = \varphi_3 h_1 + \varphi_4 h_2 := g_2$ olmak üzere yüzeyin Pisagor normal yüzey olması için birim normal vektörü

$$N = \frac{\mathcal{A}k\mathcal{A}^*}{\|\mathcal{A}k\mathcal{A}^*\|} \quad (3.70)$$

olmalıdır (Kozak vd., 2016).



4. NOKTA HAREKETİNİN YÖRÜNGESİ VE PİSAGOR HODOGRAFI EĞRİLER

Uzayda, bir $r = \left(\frac{r_1}{r_0}, \frac{r_2}{r_0}, \frac{r_3}{r_0}\right)$, $r_i \in \mathbb{R}[t]$, $i = 0,1,2,3$ rasyonel eğrisi homojen koordinatlarda dört boyutlu bir $\mathbf{r} = (r_0 : r_1 : r_2 : r_3)$ polinomudur. r Pisagor hodograf eğrisi ise r' rasyoneldir. Böylece, r eğrisinin teğet vektörü de rasyoneldir. Ortonormal bazlı normal ve binormal vektörler için bu eğri üzerinde rasyonel bir çatı tanımlamak mümkündür. Bu çatının hareketi rasyonel bir harekettir. Pisagor hodograf özelliği aracılığıyla ilk eksen daima teğet vektör olan bir rasyonel hareket tanımlanabilir.

Bu bölümde amaç, yörüngesi Pisagor hodograf eğri olan çatılı hareketi tanımlayan bir rasyonel hareket polinomu bulmaktır. Hareketin verilen küresel görüntüsü (oryantasyon) için Pisagor hodograf yörünge eğrisi oluşturacak öteleme faktörünü hesaplayan bir algoritma oluşturmaktır.

Pisagor hodograf eğriler, çatılı bir rasyonel hareketin yörüngesi olarak tanımlanacaktır. Notasyonlar, polinomların parametresi olan t parametresi yazılmadan, örneğin; $\alpha_0(t) = \alpha_0$, $p(t) = p$ şeklinde gösterilecektir.

4.1 Bir Parametrelili Rasyonel Hareket

Tanım 4.1. Bir hareket polinomu $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$ öteleme vektörü ve $(p_1, p_2, p_3)^T$ eksen etrafında θ kadar dönmeye karşılık gelen (genelliği kaybetmeden p kuaterniyonunun birim olduğunu varsayalım) Eşitlik (3.10)'da Euler-Rodrigues parametreleriyle tanımlandığı şekilde $p = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k})$ ile

$$x = \left\{ \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right) p, \alpha_0 \in \mathbb{R}[t], p, \mathbf{t} \in \mathbb{H}[t] \right\} \quad (4.1)$$

dual kuaterniyon katsayılı $x \in \mathbb{DH}[t]$ hareket polinomunu tanımlar. Bu hareket bir t parametresine bağlı ve bir noktaya etkisi olan yörünge eğrisi rasyonel ise x 'e *bir parametrelili rasyonel hareket* denir (Selig, 2005).

Lemma 4.2. Eşitlik (4.1) ile ifade edilen bir rasyonel hareket polinomu, Study şartını ancak ve ancak kuaterniyon katsayılı $\mathbf{t}$ polinomu imajinere (vektörelse) sağlar. Bu yüzden vektör notasyonu ile gösterilmiştir.

İspat. x hareket polinomuna Eşitlik (3.26) ile tanımlı olan Study şartı uygulanınca

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_0 p)(\mathbf{t}p)^* + (\mathbf{t}p)(\alpha_0 p)^* = \alpha_0 p p^* \mathbf{t}^* + \alpha_0 \mathbf{t} p p^* = \alpha_0 p p^* (\mathbf{t} + \mathbf{t}^*) \\ &\Rightarrow \mathbf{t} + \mathbf{t}^* = 0 \Rightarrow \mathbf{t}^* = -\mathbf{t} \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir. Böylece, $\mathbf{t}$ imajiner (vektörel) bir kuaterniyondur. □

Lemma 4.3. Orijin noktasının yörüngesi herhangi bir rasyonel parametrik eğri

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}[t]$$

olan rasyonel hareket

$$x = \alpha_0 p + \epsilon d \quad (4.3)$$

şeklinde yazılır. Burada, $\alpha_0 \in \mathbb{R}[t]$ bir reel katsayılı polinom ve $p, d \in \mathbb{H}[t]$ herhangi bir kuaterniyon katsayılı polinomdur ve öteleme vektörü $\mathbf{t} = t_1 \mathbf{i} + t_2 \mathbf{j} + t_3 \mathbf{k} \in \text{Im}(\mathbb{H}[t])$ olmak üzere $d = \frac{\mathbf{t}}{2} p$ formundadır. Burada $\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0}$ eğrisidir.

İspat. Yörünge eğrisi boyunca öteleme, hareket polinomunun birinci faktörü $\left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2}\right)$ tarafından gerçekleşir. Burada, $\mathbf{t}$ bir vektörel kuaterniyondur. Eşitlik (3.35) ile tanımlı dual kuaterniyonun noktaya etkisi, Eşitlik (3.32) yardımıyla dual kuaterniyonlara $\mathbf{y} = 0$ ve $x_0 = 1$ olarak gömülü olan orijin noktası için x hareket polinomunun etkisi tekrardan $x_0 = 1$ 'e indirgenir. Burada, dönmeye karşılık gelen p orijin noktasını invaryant bıraktığı için gerçekten de $\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0}$ olduğu görülür.

Diğer taraftan, öncelikle ispat adımlarında ihtiyaç duyulacağından Eşitlik (4.3)'deki hareket polinomuna Study şartı uygulanınca

$$0 = (\alpha_0 p)d^* + d(\alpha_0 p)^* = \alpha_0 p d^* + \alpha_0 d p^* = \alpha_0 (p d^* + d p^*)$$

olur. Buradan, $p d^* + d p^* = 0 \Rightarrow d p^* = -p d^*$, böylece $d p^*$ bir vektörel kuaterniyondur. Eşitlik (3.35) ile tanımlı dual kuaterniyonun noktaya etkisi formülüyle x hareket polinomunun orijin noktasına etkisi

$$\begin{aligned} x_\epsilon(1 + \epsilon \mathbf{0})x^* &= (\alpha_0 p - \epsilon d)(\alpha_0 p + \epsilon d^*) = \alpha_0^2 p p^* + \epsilon \alpha_0 (p d^* - d p^*) \\ &= \alpha_0^2 p p^* + 2\epsilon \alpha_0 p d^* = \alpha_0^2 p p^* - \epsilon \alpha_0 p p^* \mathbf{t} \end{aligned} \quad (4.4)$$

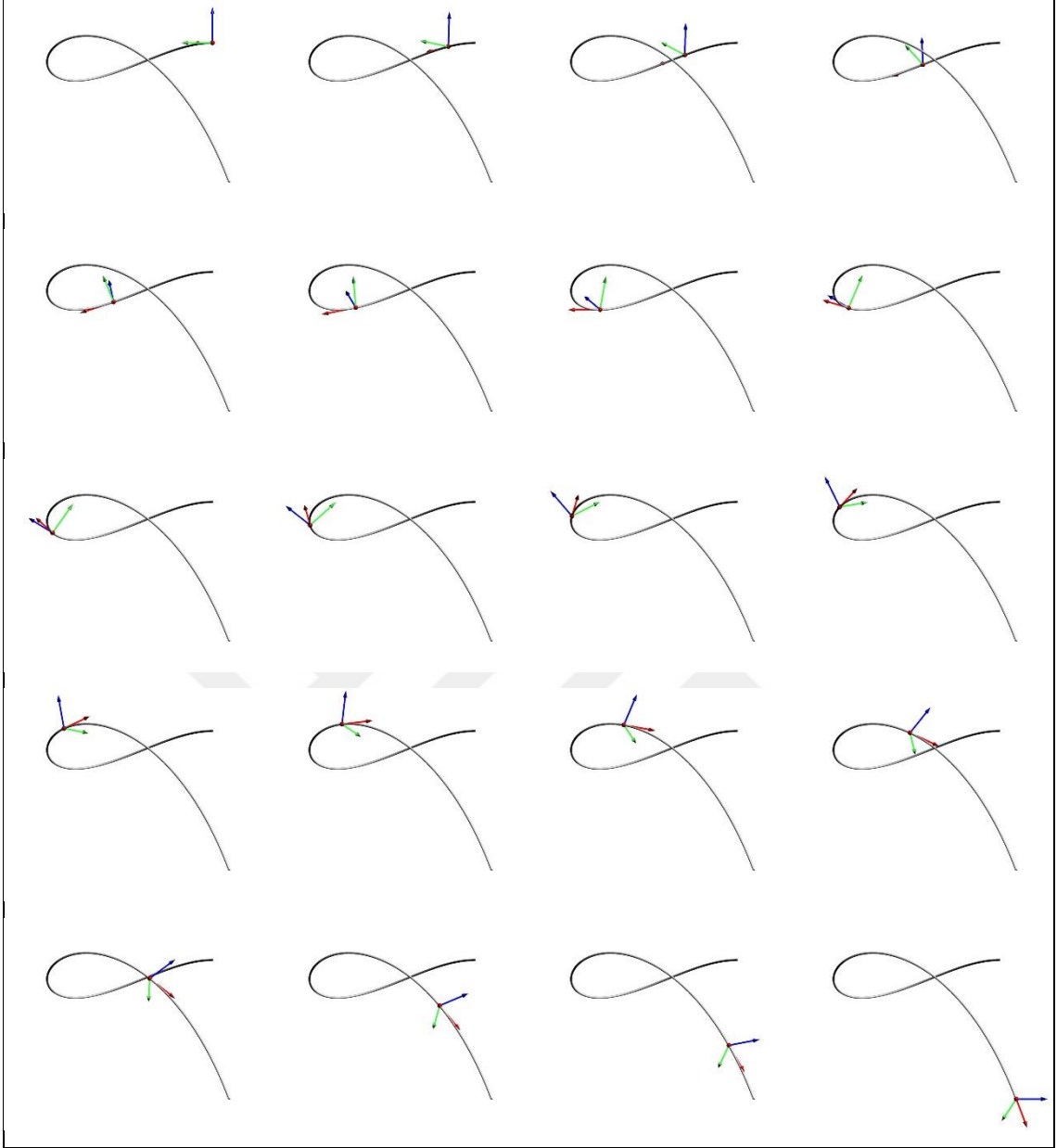
homojen koordinatlarda çalışıldığından Eşitlik (4.4) $\alpha_0^2 p p^*$ ile bölünerek $1 - \epsilon \frac{2dp^*}{\alpha_0 p p^*}$ olarak yazılabilir. Ayrıca, Eşitlik (3.32) ile tanımlı olan dual kuaterniyonlarda nokta tanımı yardımıyla kartezyen koordinat sisteminde bu ifade $\alpha = -\frac{2dp^*}{\alpha_0 p p^*}$ eğrisi olarak bulunur. Böylelikle, $x = \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2}\right)p$ ve $x = \alpha_0 p + \epsilon d$ hareket polinomları bir reel polinom çarpanına göre denklemdir ve bu yüzden $\alpha = -\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0}$ ve $\alpha = -\frac{2dp^*}{\alpha_0 p p^*}$ aynı hareketi temsil ederler.

□

4.2 Rasyonel Pisagor Hodograf Eğriler

Tanım 4.4 (Çatılı hareket). Bir $x = \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2}\right)p$ hareket polinomu $\mathbf{i}$ vektörünün p kuaterniyonu altındaki $p \mathbf{i} p^*$ görüntüsü hareketin yörünge eğrisi α eğrisine teğetse *çatılı hareket* olarak adlandırılır (Choi ve Han, 2002).

Şekil 4.1'de anlık olarak çatılı hareket görselleştirilmiştir. Burada kırmızı renkli olarak gösterilen vektör α eğrisinin teğet vektörüdür yani teğet göstergedir.



Şekil 4.1 Çatılı hareket

Teorem 4.5. Eğer bir $x = \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{t}{2}\right)p$ hareket polinomu çatılıysa yörünge eğrisi α bir Pisagor hodograf eğrisidir. Aynı şekilde, α bir Pisagor hodograf eğrisiyse buna karşılık gelen bir $x = \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{t}{2}\right)p$ çatılı hareketi vardır.

İspat. Tanım 4.4 yardımıyla bir C hareketi, yörünge eğrisinin birinci türevi olan α' hodograf eğrisi $p \dot{p}^*$ ile lineer bağımlıysa çatılıdır denir:

$$\alpha' = \mu p i p^*, \mu \in \mathbb{R}[t] \quad (4.5)$$

hodograf eğrisinin normu

$$\|\alpha'\| = \|\mu p i p^*\| = \mu \sqrt{p i p^* (p i p^*)^*} = \mu \sqrt{p i p^* (-p i p^*)} = \mu p p^* = \sigma \in \mathbb{R}[t]$$

polinom bir ifade olduğundan α bir Pisagor hodograf eğrisidir.

Ters olarak, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ bir Pisagor hodograf eğrisiyse eğrinin hızı rasyonel olmalıdır: $\alpha' = \frac{d}{dt} \left(-\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0} \right) = \sqrt{(\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2)}$ olmak üzere, α eğrisinin bir Pisagor hodograf eğri olma kabulünden $\alpha_1' \mathbf{i} + \alpha_2' \mathbf{j} + \alpha_3' \mathbf{k} = p i p^*$ ve $\|\alpha'\| = \|p i p^*\|$ olacak şekilde bir $p \in \mathbb{H}[t]$ vardır. Böylece $x = \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right) p$ aranan çatılı harekettir.

□

Yukarıdaki teorem, rasyonel Pisagor hodograf eğrilerini tanımlayan iki eşdeğer lineer denklem sistemi oluşturulmasına izin verir:

Teorem 4.6. Rasyonel Pisagor hodograf eğriler, $x = \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right) p$ hareket polinomu altında orijin noktasının yörüngesi olarak aşağıdaki özdeş şartlardan herhangi birinin sağlanmasıyla karakterize edilebilir:

- a1. $(\alpha_0 \mathbf{t}' - \alpha_0' \mathbf{t}) \times p i p^* = 0$,
- a2. $\langle \alpha_0 \mathbf{t}' - \alpha_0' \mathbf{t}, p j p^* \rangle = \langle \alpha_0 \mathbf{t}' - \alpha_0' \mathbf{t}, p k p^* \rangle = 0$.

İspat. Teorem 4.5'deki Eşitlik (4.5)'ten hareketle bu şartların x hareketinin çatılı olmasına denk olduğu gösterilmelidir. x hareketinin orijin noktasına etkisinin yörüngesi olan $\alpha = -\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0}$ eğrisinin hodografı

$$\alpha' = \frac{d}{dt} \left(-\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0} \right) = \frac{-2(\alpha_0 \mathbf{t}' - \alpha_0' \mathbf{t})}{\alpha_0^2}$$

olur. Böylece x ancak ve ancak $\alpha_0 \mathbf{t}' - \alpha'_0 \mathbf{t}$ ve $p \mathbf{i} p^*$ lineer bağımlıysa çatılıdır denir. Öyleyse, $\alpha_0 \mathbf{t}' - \alpha'_0 \mathbf{t} = \frac{\nu}{\mu} p \mathbf{i} p^*$, $\nu, \mu \in \mathbb{R}[t]$ olsun ve a1 ve a2 önermelerinde yerine konulsun:

$$a1. (\alpha_0 \mathbf{t}' - \alpha'_0 \mathbf{t}) \times p \mathbf{i} p^* = \frac{\nu}{\mu} p \mathbf{i} p^* \times p \mathbf{i} p^* = 0$$

$$a2. \langle \alpha_0 \mathbf{t}' - \alpha'_0 \mathbf{t}, p \mathbf{j} p^* \rangle = \langle \frac{\nu}{\mu} p \mathbf{i} p^*, p \mathbf{j} p^* \rangle = \frac{\nu}{\mu} \langle p \mathbf{i} p^*, p \mathbf{j} p^* \rangle = \frac{\nu}{2\mu} (p \mathbf{i} p^* (p \mathbf{j} p^*)^* + p \mathbf{j} p^* (p \mathbf{i} p^*)^*) = \frac{\nu}{2\mu} p p^* (p(\mathbf{i} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{i}) p^*) = \frac{\nu}{2\mu} p p^* (p(\mathbf{k} - \mathbf{k}) p^*) = 0.$$

Aynı şekilde, $\langle \alpha_0 \mathbf{t}' - \alpha'_0 \mathbf{t}, p \mathbf{k} p^* \rangle = 0$ olarak ispatlanır.

□

Örnek 4.7 (Polinom Pisagor hodograf eğri). $x = \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{t}{2} \right) p$ hareket polinomunda $\alpha_0 = 1$ ve $p = 21t^2 + 21t - 142 + (-21t - 63)\mathbf{i} + (42t - 34)\mathbf{j} + (-42t + 94)\mathbf{k}$ olarak alınsın. Teorem 4.6 ile belirtilen önermedeki algoritma yardımıyla $\mathbf{t}$ kuaterniyonun derecesi beş olarak belirlenmek üzere çözümlerinden biri

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = & -\frac{10}{3}\mathbf{i} + \frac{16}{7}\mathbf{j} - 11\mathbf{k} + \left(-\frac{1555510}{441}\mathbf{i} + \frac{2465320}{441}\mathbf{j} + \frac{2365000}{441}\mathbf{k} \right) t \\ & + \left(-\frac{6490}{7}\mathbf{i} - \frac{31460}{21}\mathbf{j} - \frac{5500}{3}\mathbf{k} \right) t^2 \\ & + \left(\frac{45100}{63}\mathbf{i} - \frac{2200}{63}\mathbf{j} - \frac{7480}{63}\mathbf{k} \right) t^3 + (-55\mathbf{i} + 110\mathbf{j} + 110\mathbf{k})t^4 \\ & - 22\mathbf{i}t^5 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Böylece, x hareketinin orijin noktasına etkisi olan yörünge eğrisi

$$\begin{aligned} \alpha = & \left(22t^5 + 55t^4 - \frac{45100}{63}t^3 + \frac{6490}{7}t^2 + \frac{1555510}{441}t + \frac{10}{3}, 110t^4 + \frac{2200}{63}t^3 \right. \\ & + \frac{31460}{21}t^2 - \frac{2465320}{441}t - \frac{16}{7}, -110t^4 + \frac{7480}{63}t^3 + \frac{5500}{3}t^2 \\ & \left. - \frac{2365000}{441}t + 11 \right)^T \end{aligned}$$

bir polinom Pisagor hodograf eğrisidir, öyle ki eğrinin hodografının normunun karesi $\|\alpha'\|^2 = \langle \alpha', \alpha' \rangle = \frac{12100}{441} (t^2 - 4t + 5)^2 (21t^2 + 126t + 325)^2 = \sigma^2(t)$, $\sigma(t) \in \mathbb{R}[t]$ ve $\sigma(t) = \frac{110}{21} (t^2 - 4t + 5)(21t^2 + 126t + 325)$ olmak üzere reel bir polinomun karesidir.

Örnek 4.8 (Rasyonel Pisagor hodograf eğri). $x = \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2}\right)p$ hareket polinomunda $\alpha_0 = t^3$ ve $p = t^2 - t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ olarak alınsın. Teorem 4.6 ile belirtilen önermedeki algoritma yardımıyla $\mathbf{t}$ kuaterniyonun derecesi beş olarak belirlenmek üzere çözümlerinden biri

$$\mathbf{t} = -\frac{3}{4}\mathbf{i} - \frac{9}{4}\mathbf{k}t + \left(-\frac{9}{4}\mathbf{i} + 9\mathbf{j}\right)t^2 + \left(\frac{5}{7}\mathbf{i} - \frac{1}{5}\mathbf{j} - \frac{4}{3}\mathbf{k}\right)t^3 + \left(-\frac{9}{4}\mathbf{i} + 9\mathbf{j}\right)t^4 - \frac{9}{4}\mathbf{k}t^5 - \frac{3}{4}\mathbf{i}t^6$$

olarak hesaplanır. Böylece, x hareketinin orijin noktasına etkisi olan yörünge eğrisi

$$\alpha = \left(\frac{21t^6 + 63t^4 - 20t^3 + 63t^2 + 21}{14t^3}, \frac{18t^2 + \frac{2}{5}t - 18}{t}, \frac{27t^4 + 16t^2 + 27}{6t^2} \right)^T$$

bir rasyonel Pisagor hodograf eğrisidir, öyle ki eğrinin hodografının normunun karesi $\|\alpha'\|^2 = \langle \alpha', \alpha' \rangle = \frac{81(t^2+1)^6}{4t^8} = \sigma^2(t)$ bir $\sigma(t) = \frac{9(t^2+1)^3}{2t^4} \in \mathbb{R}[t]$ rasyonel polinomunun karesidir.



5. DOĞRU HAREKETİNİN YÖRÜNGESİ VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, öncelikle bir dual kuaterniyon katsayılı hareket polinomunun bir doğruya etkisi Plücker koordinatlarında tanımlanıp ispatlanmıştır. Bu etkinin yörüngesi bir regle yüzey oluşturur. Daha sonra, bu etkinin Pisagor hodograf özelliğiyle ilişkisi bulunmuştur. Doğru hareketi detaylı bir şekilde analiz edilmiştir ve bu hareket $SE(3)$ katı cisim yer değiştirmeler grubunu tanımlamak için uygulanmıştır. Bu doğrular için Euler-Rodrigues formülü üretilip avantajları tartışılmıştır. Burada, Plücker koordinatları üzerinde çalışılmıştır. Notasyonlar, polinomların parametresi olan t parametresi yazılmadan, örneğin; $x(t) = x, p(t) = p$ şeklinde gösterilecektir.

5.1 Dual Kuaterniyonların Doğruya Etkisi

$$\begin{aligned} x &= \{\alpha_0 p + \epsilon d, x \in \mathbb{DH}[t], \alpha_0 \in \mathbb{R}[t], \\ p, d &\in \mathbb{H}[t] \mid xx^* = x^*x \in \mathbb{R}/\{0\}\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

bir katı cisim yer değiştirmesi olsun. Dual kuaterniyonların bir noktaya etkisi olan form doğruya etkisi durumunda iyi tanımlı değildir. Öncelikle dual kuaterniyonların Plücker koordinatlarında bir doğruya etki formu incelenecektir.

$\mathbb{RP}^3$ uzayında bir doğru üzerinde bulunan iki nokta, homojen koordinatlarda $\{(n, q) \mid n = [n_0 : n_1 : n_2 : n_3]^T, q = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3]^T\}$ olarak seçilsin. Bu noktalar, normlanmış Plücker koordinatlarında $\{(n, q) \mid n, q \in \mathbb{H}, n = n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}, q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}\}$ formunda yazılır. Bu iki noktadan geçen Plücker koordinatlarında tanımlı L_{nq} doğrusu bulunur. Daha sonra, bu noktalara x dual kuaterniyon katsayılı hareket polinomu etki ettirilerek bu iki noktanın hareket altındaki görüntü noktalarından geçen Plücker koordinatlarında tanımlı L'_{nq} doğrusu bulunur. L'_{nq} doğrusuna denk olması gereken x hareketinin aşağıdaki şekilde Plücker koordinatlarında ifade edilen

$$\begin{aligned} L_{nq} &= [n_0q_1 - n_1q_0 : n_0q_2 - n_2q_0 : n_0q_3 - n_3q_0 : n_2q_3 \\ &\quad - n_3q_2 : n_3q_1 - n_1q_3 : n_1q_2 - n_2q_1]^T \end{aligned}$$

doğrusuna etkisi bulunacaktır. x yer değiştirmesinin n ve q noktalarına etkisi sırasıyla $n' = x_\epsilon n x^*$ ve $q' = x_\epsilon q x^*$ şeklindedir. Burada x_ϵ , x hareket polinomunun dual eşleniği x^* ise x hareket polinomunun kuaterniyon eşleniğidir. Bu noktaların x yer değiştirmesi altındaki yörüngelerinin oluşturduğu doğrunun Plücker koordinatları

$$L'_{nq} = [n'_0 q'_1 - n'_1 q'_0 : n'_0 q'_2 - n'_2 q'_0 : n'_0 q'_3 - n'_3 q'_0 : n'_2 q'_3 - n'_3 q'_2 : n'_3 q'_1 - n'_1 q'_3 : n'_1 q'_2 - n'_2 q'_1]^T$$

olarak yazılır. x yer değiştirmesinin L_{nq} doğrusuna etkisi L'_{nq} doğrusunu vermelidir. Ek 1'de verilen algoritma yardımıyla, doğru hareketi tanımlanmıştır. Bu algoritma kullanılarak bilgisayar programı yardımıyla, Plücker koordinatlarında tanımlı olan doğru normlanmış Plücker koordinatlarında tanımlanarak yer değiştirme hareketi bulunmuştur. Bu hareket iyi tanımlıdır. Böylece, x dual kuaterniyonun L_{nq} doğrusuna etkisi

$$\begin{cases} L_{nq} = n + \epsilon d \rightarrow x_\epsilon L x_\epsilon^* = x_\epsilon (n + \epsilon d) x_\epsilon^* \\ L_{nq_\epsilon} = n - \epsilon d \rightarrow x L_{nq_\epsilon} x^* = x (n - \epsilon d) x^* \end{cases} \quad (5.2)$$

olarak hesaplanır.

Örnek 5.1. $\left\{ x = \frac{2}{5} - \frac{25}{21}\mathbf{i} - \frac{25}{8}\mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k} - \epsilon \left(-\frac{15}{2}\mathbf{i} + \frac{55}{21}\mathbf{j} - \frac{25}{84}\mathbf{k} \right) \in \mathbb{DH}[t] \right\}$ dual kuaterniyonu $xx^* = x^*x = \frac{12413521}{705600} \in \mathbb{R}/\{0\}$ Study şartını sağladığından bir katı cisim yer değiştirmesidir. $n = -1 - \mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{2}{5}\mathbf{k}$ ve $q = 3 - 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ noktaları ele alınsın. Bu noktalardan geçen doğru $L_{nq} = 8\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{11}{5}\mathbf{k} - \epsilon \left(\frac{9}{10}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{7}{2}\mathbf{k} \right)$ olarak hesaplanır. x yer değiştirmesinin sırasıyla n ve q noktalarına Eşitlik (3.35) ile tanımlanan etkisi

$$\begin{aligned} n' = x_\epsilon n x^* &= -\frac{109019}{784}\mathbf{i} + \frac{953025}{1568}\mathbf{j} - \frac{90941}{1960}\mathbf{k} - \frac{268609}{784} \\ q' = x_\epsilon q x^* &= -\frac{6610979}{3920}\mathbf{i} - \frac{215797}{3920}\mathbf{j} - \frac{2381893}{3920}\mathbf{k} + \frac{805827}{784} \end{aligned} \quad (5.3)$$

olarak bulunur. Bu noktalarının yer değiştirmelerinin oluşturduğu doğrunun Plücker koordinatları

$$L'_{nq} = \frac{276877590847}{384160} \mathbf{i} - \frac{373936350629}{6146560} \mathbf{j} + \frac{786363323251}{3073280} \mathbf{k} \\ - \epsilon \left(-\frac{11428517061533}{30732800} \mathbf{i} - \frac{95939882357}{15366400} \mathbf{j} + \frac{906782886823}{878080} \mathbf{k} \right)$$

projektif vektör notasyonu formunda

$$L'_{nq} = [1 : -0.8406098204 : 0.3550139797 : 0.5159553102 \\ : 0.008662662267 : -1.432826368]^T \quad (5.4)$$

olarak bulunur. şimdi, x hareketinin dual kuaterniyon formunda L_{nq} doğrusuna Eşitlik (5.3) ile tanımlanan etkisi hesaplınsın:

$$xL_{nq}x^* = x(n - \epsilon q)x^* \\ = -\frac{4393777}{44100} \mathbf{i} + \frac{15053887}{1411200} \mathbf{j} - \frac{31152481}{3528000} \mathbf{k} \\ - \epsilon \left(\frac{2071562639}{7056000} \mathbf{i} + \frac{58414213}{235200} \mathbf{j} - \frac{440658203}{1411200} \mathbf{k} \right)$$

projektif vektör notasyonu formunda

$$[1 : -0.8406098204 : 0.3550139797 : 0.5159553102 \\ : 0.008662662267 : -1.432826368]^T \quad (5.5)$$

olur. Böylece, Eşitlik (5.4) ile tanımlı L'_{nq} doğrusu Eşitlik (5.5) doğrusuna denktir.

Lemma 5.2 (Hareketin doğruya etkisi). Rasyonel bir

$$x = \{\alpha_0 p + \epsilon d \mid \alpha_0 \in \mathbb{R}[t], p, d \in \mathbb{H}[t] \mid xx^* \in \mathbb{R}[t]\}$$

hareketinin Plücker koordinatlarında tanımlanan bir

$$L = \{\mathbf{l} + \epsilon \bar{\mathbf{l}} \mid \mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}} \in \text{Im}(\mathbb{H}[t]), \langle \mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}} \rangle = 0\}$$

doğrusuna etkisi

$$L' = x_\epsilon L x_\epsilon^* \quad (5.6)$$

veya

$$L' = x L_\epsilon x^* \quad (5.7)$$

formülleriyle hesaplanır.

İspat. Bu ispat üç adımdan oluşmaktadır. L doğrusunun x rasyonel hareketi altındaki yörüngesi olan L' doğrusunun Plücker koordinatlarında bir doğru belirtmesi için hem reel kısmın hem de dual kısmın vektörel bir ifade olması gerekmektedir. Ayrıca, $\mathbb{R}P^5$ beş boyutlu projektif uzayında bir nokta belirten L' doğrusunun Plücker kuadriği üzerinde bulunması gerekmektedir. Çünkü, $\mathbb{R}P^3$ uzayında tanımlı olan doğrular Plücker kuadriği üzerinde bulunurlar.

Birinci adımda L' doğrusunun bir vektörel dual kuaterniyon olduğu gösterilecektir. Daha sonra, ikinci adımda L' doğrusunun Plücker koordinatlarında bir doğru olduğu (yani Klein kuadriği üzerinde olduğu) ve son olarak, üçüncü adımda ise L doğrusu üzerindeki herhangi bir l_0 noktasının x hareketi altındaki görüntüsü olan l'_0 noktasının L' doğrusu üzerinde olduğu gösterilecektir. İspat adımları işlemler detaylandırılarak aşağıdaki şekilde verilir:

1. Adım: L' bir vektörel dual kuaterniyondur yani $\mathbb{R}P^5$ uzayında bir noktadır:

$$\begin{aligned}
L' &= x_\epsilon L x_\epsilon^* = (\alpha_0 p + \epsilon d)_\epsilon (1 + \epsilon \bar{1}) (\alpha_0 p + \epsilon d)_\epsilon^* \\
&= (\alpha_0 p - \epsilon d) (1 + \epsilon \bar{1}) (\alpha_0 p^* - \epsilon d^*) \\
&= \alpha_0^2 p l p^* + \epsilon \alpha_0 (\alpha_0 p \bar{l} p^* - p l d^* - d l p^*) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \alpha_0 p l p^* + \epsilon (\alpha_0 p \bar{l} p^* - p l d^* - d l p^*) = I' + \epsilon \bar{I}'
\end{aligned}$$

L' doğrusunun reel kısmı $\alpha_0^2 p l p^* \in \text{Im}(\mathbb{H}[t])$ vektörel kuaterniyondur. Çünkü, eşleniği ile toplamı sıfırdır: $p l p^* + (p l p^*)^* = p l p^* - p l p^* = 0$. L' 'nin dual kısmı ise $\alpha_0 p \bar{l} p^* - p l d^* - d l p^* = \alpha_0 p \bar{l} p^* + (d l p^*)^* - d l p^* = \alpha_0 p \bar{l} p^* + (d l p^*)^* - d l p^*$ şeklinde bulunmuştur. Burada, $\alpha_0 p \bar{l} p^*$ terimi vektörel bir kuaterniyondur. Çünkü, $\alpha_0 p \bar{l} p^* + (\alpha_0 p \bar{l} p^*)^* = \alpha_0 p \bar{l} p^* - \alpha_0 p \bar{l} p^* = 0$. Aynı şekilde $(d l p^*)^* - d l p^*$ terimi de $(d l p^*)^* - d l p^* + ((d l p^*)^* - d l p^*)^* = (d l p^*)^* - d l p^* + d l p^* - (d l p^*)^* = 0$ vektörel bir kuaterniyondur.

Böylece, $\alpha_0 p \bar{l} p^* + (d l p^*)^* - d l p^* \in \text{Im}(\mathbb{H}[t])$ olduğundan L' bir vektörel dual kuaterniyondur.

2. Adım: $L' = I' + \epsilon \bar{I}'$ vektörel dual kuaterniyonunun Plücker koordinatlarında bir doğru ifade etmesi için Plücker kuadriği üzerinde olması gerekmektedir, yani Plücker şartını $\langle I', \bar{I}' \rangle = \frac{1}{2} (I' \bar{I}'^* + \bar{I}' I'^*) = 0$ sağlamalıdır.

$$\begin{aligned}
I' \bar{I}'^* + \bar{I}' I'^* &= \alpha_0 p l p^* (\alpha_0 p \bar{l} p^* - p l d^* - d l p^*)^* \\
&\quad + (\alpha_0 p \bar{l} p^* - p l d^* - d l p^*) (\alpha_0 p l p^*)^* \\
&= \alpha_0 p l p^* (-\alpha_0 p \bar{l} p^* + p l d^* + d l p^*) \\
&\quad + (\alpha_0 p \bar{l} p^* - p l d^* - d l p^*) (-\alpha_0 p l p^*) \\
&= -\alpha_0^2 p l p^* p \bar{l} p^* + \alpha_0 p l p^* p l d^* + \alpha_0 p l p^* d l p^* \\
&\quad - \alpha_0^2 p \bar{l} p^* p l p^* + \alpha_0 p l d^* p l p^* + \alpha_0 d l p^* p l p^* \\
&= -\frac{1}{2} \alpha_0 \langle l, l \rangle p p^* (p d^* + d p^*) + \alpha_0 p l (p^* d + d^* p) l p^* \\
&\stackrel{\text{def}}{=} 0
\end{aligned}$$

Böylece, L' Plücker kuadriği üzerindedir ve Plücker koordinatlarında bir doğru ifade eder.

3. Adım: L doğrusu üzerindeki herhangi bir $l_0 = 1 + \epsilon \mathbf{x}$ noktasının $x = \alpha_0 p + \epsilon d$ hareketi altındaki görüntüsü olan $l'_0 = 1 + \epsilon \mathbf{x}'$ noktasının L' doğrusu üzerinde olması gerekmektedir. $\mathbf{l} + \epsilon \bar{\mathbf{l}}$ dual kuaterniyonu normlanmış Plücker koordinatları tanımı gereğince

$$\begin{bmatrix} \mathbf{l} \\ \bar{\mathbf{l}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{a} \times \mathbf{l} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}P^5 \quad (5.8)$$

vektörüne karşılık gelmektedir. Yukarıdaki ifade doğrultmanı $\mathbf{l}$ ve momenti $\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{a} \times \mathbf{l}$ olan bir doğruyu tanımlar. Bu doğru $\mathbf{a}$ noktasından geçer. Bu bilgiler ışığında

$$l_0 = 1 + \epsilon \mathbf{x} \in L \Rightarrow \bar{\mathbf{l}} = \mathbf{x} \times \mathbf{l}$$

olur. $l_0 = 1 + \epsilon \mathbf{x}$ noktasının $x = \alpha_0 p + \epsilon d$ hareketi altındaki görüntüsü

$$\begin{aligned} l'_0 &= x_\epsilon l_0 x^* = (\alpha_0 p + \epsilon d)_\epsilon (1 + \epsilon \mathbf{x}) (\alpha_0 p + \epsilon d)^* \\ &= (\alpha_0 p - \epsilon d)(1 + \epsilon \mathbf{x})(\alpha_0 p^* + \epsilon d^*) \\ &= \alpha_0^2 p p^* + \epsilon \alpha_0 (\alpha_0 p \mathbf{x} p^* + p d^* - d p^*) \\ &= 1 + \frac{1}{\alpha_0 p p^*} \epsilon (\alpha_0 p \mathbf{x} p^* + p d^* - d p^*) = 1 + \epsilon \mathbf{x}' \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Öyleyse,

$$l'_0 = 1 + \epsilon \mathbf{x}' \in L' \Rightarrow \bar{\mathbf{l}}' = \mathbf{x}' \times \mathbf{l}'$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' \times \mathbf{l}' &= \frac{1}{\alpha_0 p p^*} (\alpha_0 p \mathbf{x} p^* + p d^* - d p^*) \times \alpha_0 p \mathbf{l} p^* \\
&= \frac{1}{2\alpha_0 p p^*} ((\alpha_0 p \mathbf{x} p^* + p d^* - d p^*) \alpha_0 p \mathbf{l} p^* \\
&\quad - \alpha_0 p \mathbf{l} p^* (\alpha_0 p \mathbf{x} p^* + p d^* - d p^*)) \\
&= \frac{1}{2\alpha_0 p p^*} (\alpha_0^2 p \mathbf{x} p^* p \mathbf{l} p^* + \alpha_0 p d^* p \mathbf{l} p^* - \alpha_0 d p^* p \mathbf{l} p^* \\
&\quad - \alpha_0^2 p \mathbf{l} p^* p \mathbf{x} p^* - \alpha_0 p \mathbf{l} p^* p d^* + \alpha_0 p \mathbf{l} p^* d p^*) \\
&= \frac{1}{2\alpha_0 p p^*} (\alpha_0^2 p p^* p (\mathbf{x} \mathbf{l} - \mathbf{l} \mathbf{x}) p^* \\
&\quad + \alpha_0 p (p d^* p \mathbf{l} p^* + p \mathbf{l} p^* d p^*) - \alpha_0 p p^* (d \mathbf{l} p^* + p \mathbf{l} d^*)) \\
&= \alpha_0 p (\mathbf{x} \times \mathbf{l}) p^* \\
&\quad + \frac{1}{2\alpha_0 p p^*} (\alpha_0 (-d p^* p \mathbf{l} p^* - p \mathbf{l} p^* p d^*) \\
&\quad - \alpha_0 p p^* (d \mathbf{l} p^* + p \mathbf{l} d^*)) = (\alpha_0 p \bar{\mathbf{l}} p^* - p \mathbf{l} d^* - d \mathbf{l} p^*) = \bar{\mathbf{l}}'
\end{aligned}$$

olur.

Böylece, Plücker koordinatlarında L doğrusu üzerindeki herhangi bir $l_0 = 1 + \epsilon \mathbf{x}$ noktasının $\mathbf{x} = \alpha_0 p + \epsilon d$ hareketi altındaki $l'_0 = 1 + \epsilon \mathbf{x}'$ görüntüsü noktası L' doğrusu üzerindedir.

□

5.2 Doğru Etkisi ve Pisagor Hodograf Özelliği

Lemma 5.3. Orijin noktasına etkisinin yörüngesi bir rasyonel Pisagor hodograf eğri oluşturan Eşitlik (5.1) ile tanımlı dual kuaterniyon katsayılı $\mathbf{x} \in \mathbb{DH}[t]$ hareket polinomunun genelliği kaybetmeden Eşitlik (5.7) (veya (5.6)) ile tanımlı olan bir $\mathbf{i}$ doğrusuna etkisi bir tanjant açılabilir yüzeydir.

İspat. Öncelikle, bir $r(t)$ eğrisinin (3.40'da verilen tanjant açılabilir yüzeyi normlanmış Plücker koordinatlarında

$$R' := r' + \epsilon(r \times r') \quad (5.9)$$

ile verilir. Bir önceki bölümdeki hesaplamalardan bir $x = \alpha_0 p + \epsilon d$ hareketinin Plücker koordinatlarında tanımlı bir $\mathbf{i}$ doğrusuna etkisi

$$\begin{aligned} R' &= xix^* = (\alpha_0 p + \epsilon d)\mathbf{i}(\alpha_0 p^* + \epsilon d^*) \\ &= \alpha_0^2 pip^* + \epsilon \alpha_0 (pid^* + dip^*) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} pip^* + \epsilon \frac{1}{\alpha_0} (pid^* + dip^*) \\ &= \alpha_0 pip^* + \epsilon \left(\frac{pip^* pd^*}{\alpha_0 pp^*} + \frac{dp^* pip^*}{\alpha_0 pp^*} \right) \\ &= \alpha_0 pip^* + \epsilon \left(pip^* \frac{pd^*}{\alpha_0 pp^*} + \frac{dp^*}{\alpha_0 pp^*} pip^* \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

olur. Burada, x hareket polinomu Study şartını (yani $pd^* + dp^* = 0$) sağladığından $pd^* = (dp^*)^* = -dp^*$ olur. Eşleniği negatifine eşit olduğundan pd^* ve dp^* vektörel kuaterniyonlardır. Böylece, Eşitlik (3.17) yardımıyla

$$\begin{aligned} pip^* \frac{pd^*}{\alpha_0 pp^*} + \frac{dp^*}{\alpha_0 pp^*} pip^* &= -pip^* \frac{dp^*}{\alpha_0 pp^*} + \frac{dp^*}{\alpha_0 pp^*} pip^* \\ &= -\frac{2dp^*}{\alpha_0 pp^*} \times pip^* \end{aligned} \quad (5.11)$$

olur. Eşitlik (5.11)'i Eşitlik (5.10)'da yerine koyunca $pip^* = r'$ ve $-\frac{2dp^*}{\alpha_0 pp^*} = m$ olmak üzere

$$R' = r' + \epsilon(m \times r') \quad (5.12)$$

denklemleri elde edilir. Böylece $m = -\frac{2dp^*}{\alpha_0 pp^*}$ olarak hesaplanır. R' 'nin bir açılabilir tanjant yüzey olması için Eşitlik (5.9)'da görüldüğü üzere m vektörel kuaterniyonun r vektörel

kuaterniyonuna eşit olması gerekmektedir. Yani, $m = r = -\frac{2dp^*}{\alpha_0 pp^*}$ ise R' bir tanjant açılabilir yüzeydir denir.

Diğer taraftan bir hareket polinomunun orijin noktasına etkisinin yörüngesi

$$\begin{aligned} x_\epsilon(1 + \epsilon \cdot \mathbf{0})x^* &= (\alpha_0 p - \epsilon d)(\alpha_0 p^* + \epsilon d^*) \\ &= \alpha_0^2 pp^* + \epsilon \alpha_0 (pd^* - dp^*) \end{aligned} \quad (5.13)$$

olan kartezyen koordinatlarda aşağıdaki denklemle yazılan

$$r = \frac{\alpha_0 (pd^* - dp^*)}{\alpha_0^2 pp^*} = -\frac{2dp^*}{\alpha_0 pp^*} \quad (5.14)$$

eğrisinin bir rasyonel Pisagor hodograf eğrisi olması için türevinin (yani hodografinin) $pp^* = r'$ eğrisine paralel olması gerekmektedir (Choi ve Han, 2002). Dolayısıyla, m eğrisi sabit bir faktöre göre r eğrisine denktir: $-\frac{2dp^*}{\alpha_0 pp^*} = cr, c \in \mathbb{R}$. Genelliği kaybetmeden $r = -\frac{2dp^*}{\alpha_0 pp^*}$ olur.

Böylece bir hareket polinomunun $\mathbf{i}$ doğrusuna etkisiyle oluşan regle yüzeyin tanjant açılabilir yüzey olma şartının bu hareket polinomunun orijine etkisiyle oluşan yörüngenin rasyonel Pisagor hodograf eğrisi olması şartının denk olduğu gösterilmiştir.

□

Ayrıca, Lemma 5.3'te ifade edilen R' bir açılabilir yüzey olmak üzere, Klein kuadriği üzerindeki R' ve R'' eğrileri (regle yüzeyler Klein kuadriği üzerinde bir eğri tanımlar). Bu eğrilerin parametre değerleri için noktalarını birbirine bağlayan doğrular bir doğru rulingi oluşturur:

$$\begin{aligned} R' - R'' &= r' + \epsilon(r \times r') - (r'' + \epsilon(r \times r'')) \\ &= r' - r'' + \epsilon(r \times (r' - r'')) \end{aligned}$$

Bu da Klein kuadriği üzerindedir (Klein kuadriği üzerinde bulunan doğrudur):

$$\langle r' - r'', r \times (r' - r'') \rangle = \det(r, r' - r'', r' - r'') = 0.$$

Örnek 5.4. Bir $C(t) = t^3(t^2 - (\mathbf{i} + \mathbf{j})t + \mathbf{k}) + \epsilon(t(t^6 + 12t^4 + 2t^3 - 10t^2 - 2) + t^2(t^6 + 6t^4 + t^3 + 16t^2 + t - 8)\mathbf{i} + (8t^6 + t^5 - 16t^4 - t^3 - 6t^2 - 1)\mathbf{j} + t(2t^6 + 10t^4 - 12t^2 - 1)\mathbf{k})$ hareket polinomunun orijin noktasına etkisi, kartezyen koordinatlarda sütun vektörü olarak

$$r(t) = \begin{bmatrix} \frac{-2t^{13} - 10t^{11} - 2t^{10} - 20t^9 - 4t^8 - 20t^7 - 2t^6 - 10t^5 - 2t^3}{t^6(t^4 + 2t^2 + 1)} \\ \frac{-24t^{11} - 2t^{10} - 24t^9 - 4t^8 + 24t^7 - 2t^6 + 24t^5}{t^6(t^4 + 2t^2 + 1)} \\ \frac{-6t^{12} - 14t^{10} - 16t^8 - 14t^6 - 6t^4}{t^6(t^4 + 2t^2 + 1)} \end{bmatrix}$$

eğrisidir. Bu eğri Pisagor hodograf eğrisidir; $\|r'(t)\| = \frac{36(t^2+1)^3}{t^4} = \sigma(t)$ polinomuna eşittir. Böylece $r(t)$ bir Pisagor-hodograf eğrisidir. Şimdi bu hareket polinomunun $\mathbf{i}$ doğrusuna etkisini inceleyelim. Plücker koordinatlarında sütun vektörü olarak

$$R(t) = \begin{bmatrix} t^6(t^4 - 1) \\ 4t^8 \\ 27t^7(t^2 - 1) \\ 4t^6(6t^4 + t^3 - 26t^2 - t + 6) \\ 2t^4(t^8 - 3t^6 - 2t^5 + 2t^3 + 3t^2 - 1) \\ -2t^5(8t^6 + t^5 - 24t^4 - 4t^3 - 24t^2 - t + 8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r' \\ \bar{r}' \end{bmatrix}$$

yazılır. $R(t)$ eğrisi Klein kuadriği üzerindedir çünkü bu eğri Plücker şartını sağlar: $\langle r', \bar{r}' \rangle = 0$ olur. Böylece, $R(t)$ bir regle yüzeydir denir. Bunun açılabilir regle yüzey olması için gerek ve yeter şart türevinin de Klein kuadriği üzerinde olmasıdır. Bu eğrinin türevi

$$\begin{aligned}
R'(t) &= \begin{bmatrix} 2t^3(5t^6 - 3t^2) \\ 32t^7 \\ 2t^3(9t^5 - 7t^3) \\ 2t^3(120t^6 + 18t^5 - 416t^4 - 14t^3 + 72t^2) \\ 2t^3(12t^8 - 30t^6 - 18t^5 + 14t^3 + 18t^2 - 4) \\ 2t^3(-88t^7 - 10t^6 + 216t^5 + 32t^4 + 168t^3 + 6t^2 - 40t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5t^6 - 3t^2 \\ 16t^4 \\ 9t^5 - 7t^3 \\ 120t^6 + 18t^5 - 416t^4 - 14t^3 + 72t^2 \\ 12t^8 - 30t^6 - 18t^5 + 14t^3 + 18t^2 - 4 \\ -88t^7 - 10t^6 + 216t^5 + 32t^4 + 168t^3 + 6t^2 - 40t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r'' \\ \bar{r}'' \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $R'(t)$ eğrisi de Plücker kuadriği üzerindedir çünkü Plücker şartını sağlar: $\langle r'', \bar{r}'' \rangle = 0$ olur. Böylece hem $R(t)$ eğrisi hem de $R'(t)$ eğrisi Plücker kuadriği üzerinde olduğundan $R(t)$ bir açılabilir yüzeydir denir.

Lemma 5.3'te verilen açılabilir yüzey olma durumu teorik kinematikte önemli bir yere sahiptir. Sabit aksod (fixed axode) yüzeyleri açılabilir yüzey olan twiste sahip olan hareketler Ribaucour hareketleri olarak adlandırılmaktadır (Selig ve Carricato, 2017; Bayril ve Selig, 2020).

5.3 Doğru Hareketinin Analizi

Öklidyen yer değiştirmeler grubu $SE(3)$, dual kuaterniyonlar yardımı ile iki farklı matris temsili ile 4×4 homojen koordinat transformasyon matrisi ve 3×3 dual ortogonal matrisi ile gösterilebilir. Burada, $SE(3)$ 'ün 4×4 homojen koordinat transformasyon temsili, noktanın bir katı cisim yer değiştirmesi altındaki transformasyonu ve $SE(3)$ 'ün 3×3 dual ortogonal matris temsiliyse, doğruların (vidaların) katı cisim yer değiştirmesi altındaki transformasyonunu tanımlar (Samuel vd., 1991).

$x \in \mathbb{DH}$ bir dual kuaterniyon olmak üzere, dual kuaterniyonlarda tanımlı olan $x = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} + \epsilon(c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k})$ yedi boyutlu projektif uzayda

$x \in P^7$ bir noktayı temsil eder. Homojen koordinatlarda ters kinematik dönüşüm ile bir x noktasından yer değiştirme matrisi aşağıdaki şekilde elde edilebilir (Gfrerrer, 2000):

$$\begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2(-a_0a_3 + a_1a_2) & 2(a_0a_2 + a_1a_3) & 2(-a_0c_1 + a_1c_0 - a_2c_3 + a_3c_2) \\ 2(a_0a_3 + a_1a_2) & a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 & 2(a_0a_1 + a_2a_3) & 2(-a_0c_2 + a_2c_0 - a_3c_1 + a_1c_3) \\ 2(-a_0a_2 + a_1a_3) & 2(-a_0a_1 + a_2a_3) & a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 & 2(-a_0c_3 + a_3c_0 - a_2c_2 + a_2c_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bir doğru üzerinde $\{(p, d) \mid p = [p_0:p_1:p_2:p_3]^T, q = [d_0:d_1:d_2:d_3]^T\}$ veya normlanmış doğru Plücker koordinatları gereğince

$$\{(p, d) \mid p, d \in \mathbb{H}; \quad p = p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}, \quad d = d_0 + d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j} + d_3\mathbf{k}\}$$

formunda olan bu noktalara dual kuaterniyon etkisi (adjoint etkisi) dual kuaterniyonların doğruya etkisi tanımından $x_\epsilon(p + \epsilon d)x_\epsilon^*$ veya $x(p + \epsilon d)_\epsilon x^*$ şeklindedir. Burada x^* , x dual kuaterniyonun kuaterniyon eşleniğidir, x_ϵ ise x dual kuaterniyonun dual eşleniğidir.

Reel norma sahip olan dual kuaterniyonlar cümlesi 3-boyutlu uzayda SE(3) katı cisim yer değiştirmesine izomorftur (Selig, 2005). Bir x dual hareket kuaterniyonunun (yani $xx^* = x^*x \in \mathbb{R}$ şartını bir başka deyişle $ac^* + ca^* = 0$ Study bağıntısını sağlayan dual kuaterniyonların) sırasıyla $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ve $\mathbf{k}$ doğrularına etkisi

$$\begin{aligned} L_1 = x\mathbf{i}x^* &= (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + 2\epsilon(a_0c_0 + a_1c_1 - a_2c_2 - a_3c_3))\mathbf{i} \\ &\quad + (2(a_0a_3 + a_1a_2) + 2\epsilon(a_0c_3 + a_1c_2 + a_2c_1 + a_3c_0))\mathbf{j} \\ &\quad + (2(-a_0a_2 + a_1a_3) + 2\epsilon(-a_0c_2 + a_1c_3 - a_2c_0 + a_3c_1))\mathbf{k} \\ L_2 = x\mathbf{j}x^* &= ((2(-a_0a_3 + a_1a_2) + 2\epsilon(-a_0c_3 + a_1c_2 + a_2c_1 - a_3c_0))\mathbf{i}) \\ &\quad + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + 2\epsilon(a_0c_0 - a_1c_1 + a_2c_2 - a_3c_3))\mathbf{j} \\ &\quad + (2(a_0a_1 + a_2a_3) + 2\epsilon(a_0c_1 + a_1c_0 + a_2c_3 + a_3c_2))\mathbf{k} \\ L_3 = x\mathbf{k}x^* &= ((2(a_0a_2 + a_1a_3) + 2\epsilon(a_0c_2 + a_1c_3 + a_2c_0 - a_3c_1))\mathbf{i}) \\ &\quad + (2(-a_0a_1 + a_2a_3) + 2\epsilon(-a_0c_1 - a_1c_0 + a_2c_3 + a_3c_2))\mathbf{j} \\ &\quad + (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 + 2\epsilon(a_0c_0 - a_1c_1 - a_2c_2 + a_3c_3))\mathbf{k} \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu $\{L_1, L_2, L_3\}$ doğruları sütunlarını oluşturmak üzere tanımlanan matrisi x dual kuaterniyonun normuna ($\Delta = xx^* = x^*x = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$) bölerek normalize edince aşağıdaki birim dual ortogonal matrisi (Veldkamp, 1976) elde edilir:

$$M = \frac{1}{\Delta} [L_1 | L_2 | L_3]$$

Bu matrisin doğruların (vidaların) katı cisim yer değiştirmesi altındaki transformasyon matrisine (Bottema ve Roth, 1979) denk olduğu gözlemlenmiştir. Bu hareketin twist hızı aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} S &= \dot{M}M^T \\ S &= [S_1, S_2, S_3]^T \\ S_1 &= \frac{2(a_0\dot{a}_1 - \dot{a}_0a_1 + a_2\dot{a}_3 - \dot{a}_2a_3)}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \\ &\quad \epsilon \frac{2(a_0\dot{c}_1 - \dot{a}_0c_1 - a_1\dot{c}_0 + \dot{a}_1a_0 + a_2\dot{c}_3 - \dot{a}_2c_3 - a_3\dot{c}_2 + \dot{a}_3a_2)}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ S_2 &= \frac{2(a_0\dot{a}_2 - \dot{a}_0a_2 + a_1\dot{a}_3 - \dot{a}_1a_3)}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \\ &\quad \epsilon \frac{2(a_0\dot{c}_2 - \dot{a}_0c_2 - a_1\dot{c}_3 + \dot{a}_1a_3 + a_2\dot{c}_3 - \dot{a}_2c_3 - a_3\dot{c}_2 + \dot{a}_3a_2)}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ S_3 &= \frac{2(a_0\dot{a}_3 - \dot{a}_0a_3 + a_1\dot{a}_2 - \dot{a}_1a_2)}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \\ &\quad \epsilon \frac{2(a_0\dot{c}_3 - \dot{a}_0c_3 + a_1\dot{c}_2 - \dot{a}_1a_2 - a_2\dot{c}_1 + \dot{a}_2c_1 - a_3\dot{c}_0 + \dot{a}_3a_0)}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \end{aligned}$$

Burada, bir twistin reel kısmı açısal hızını dual kısmı ise vektörel hızını verir (Samuel vd., 1991):

$$S = [\omega_1 + \epsilon v_1, \omega_2 + \epsilon v_2, \omega_3 + \epsilon v_3]^T$$

Bir sonraki bölümde L_1 doğrusunu Lie cebiri kabul eden hareket bulunup bu hareketin avantajı araştırılacaktır.

5.4 Dual Euler-Rodrigues Formülü

$\mathbb{R}^3$ uzayında bir katı cismin yer değiştirmesi, hem dönme hem de öteleme hareketlerini içerir. Bu yerdeğişiklikler üç boyutlu uzayda katı cisim dönüşümü olarak tanımlanır ve $SE(3)$ Öklidyen yer değiştirmeler grubunun elemanlarıdır. *Chasles Teoremi*, üç boyutlu uzayda bir katı cismin sınırlı hareketlerini, Mozzi-Chasles eksenini olarak adlandırılan bir eksene göre dönme ve aynı eksen boyunca öteleme kombinasyonu ile ifade edilebileceğini belirtir (Angeles, 1998). Bu üç boyutlu katı cisim dönüşümü, eksenin yönü ve konumu, eksene göre dönme açısı ve aynı eksene göre öteleme olarak bir vida adımı (eksen boyunca öteleme büyüklüğünün dönme açısına oranı) ile karakterize edilebilir. Chasles Teoremi'ne uygun olarak, s eksen yönünde, r konumunda ve h vida adımıyla vida hareketini temsil eden ve katı cisim dönüşümüne karşılık gelen bir eksen

$$T = \begin{bmatrix} s \\ s_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \times s + hs \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

şeklinde sunulur. Euler-Rodrigues formülü, verilen bir vida eksenini için yerdeğişiklik matrisini bulmayı amaçlar. Euler-Rodrigues formülasyonu farklı şekillerde yapılmıştır (Dai, 2006; 2015; Wang ve Dai, 2023).

Burada, bir dual anti simetrik matrisin üstel dönüşümünün Taylor serisi açılımı yardımıyla Euler-Rodrigues formülünün yeni bir matematiksel biçimdeki varyasyonu sunulmaktadır. Euler-Rodrigues formülünün cebirsel bir formu bulunmuştur. Bulunan Euler-Rodrigues formülü yardımıyla, $L_I = xix^*$ vidasına karşılık gelen hareket hesaplanıp bu hareketin avantajları tartışılmıştır.

Plücker kuadriği üzerinde bulunan

$$\begin{aligned} L_1 = xix^* &= (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + 2\epsilon(a_0c_0 + a_1c_1 - a_2c_2 - a_3c_3))\mathbf{i} \\ &+ (2(a_0a_3 + a_1a_2) + 2\epsilon(a_0c_3 + a_1c_2 + a_2c_1 + a_3c_0))\mathbf{j} \\ &+ (2(-a_0a_2 + a_1a_3) + 2\epsilon(-a_0c_2 + a_1c_3 - a_2c_0 + a_3c_1))\mathbf{k} \\ &= (\omega_1 + \epsilon v_1)\mathbf{i} + (\omega_2 + \epsilon v_2)\mathbf{j} + (\omega_3 + \epsilon v_3)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.16)$$

vidası $\mathbb{R}P^5$ uzayında $L = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \ v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ olarak vektör formunda yazılır. Burada,

$$\begin{aligned}\omega_1 &= a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2, \quad v_1 = 2(a_0c_0 + a_1c_1 - a_2c_2 - a_3c_3), \\ \omega_2 &= 2(a_0a_3 + a_1a_2), \quad v_2 = 2(a_0c_3 + a_1c_2 + a_2c_1 + a_3c_0), \\ \omega_3 &= 2(-a_0a_2 + a_1a_3), \quad v_3 = 2(-a_0c_2 + a_1c_3 - a_2c_0 + a_3c_1),\end{aligned}$$

formundadır. Bu denklemler, $\omega_1v_1 + \omega_2v_2 + \omega_3v_3 = 0$ ortogonallik ilişkisini sağlarlar.

Bir L doğrusunu twist olarak kabul eden hareket Lie cebirinin üstel dönüşümü yardımıyla bulunabilir. Bu dönüşüm, bir Lie cebiri elemanının tanımladığı anti-simetrik matrisi kullanarak Euler-Rodrigues formülünü yardımıyla Lie grubunun elemanı olan bir ortogonal matrise dönüştürür. Öncelikle, L vidasına karşılık gelen dual anti-simetrik matris

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 - \epsilon v_3 & \omega_2 + \epsilon v_2 \\ \omega_3 + \epsilon v_3 & 0 & -\omega_1 - \epsilon v_1 \\ -\omega_2 - \epsilon v_2 & \omega_1 + \epsilon v_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

formunda yazılır. $S^3 = (-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2) \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 - \epsilon v_3 & \omega_2 + \epsilon v_2 \\ \omega_3 + \epsilon v_3 & 0 & -\omega_1 - \epsilon v_1 \\ -\omega_2 - \epsilon v_2 & \omega_1 + \epsilon v_1 & 0 \end{bmatrix}$

matrisine eşit olduğundan $\theta = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$ olmak üzere $S^3 + \theta S = 0$ bağıntısı sağlanır. Üstel formun Taylor serisi açılımı yardımıyla:

$$\begin{aligned}T &= e^M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^n}{n!} = I + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \frac{S^4}{4!} + \dots \\ &= I + S + \frac{S^2}{2!} - \frac{\theta S}{3!} - \frac{\theta S^2}{4!} + \frac{\theta^2 S}{5!} + \dots \\ &= I + \left(1 - \frac{\theta}{3!} + \frac{\theta^2}{5!} - \frac{\theta^3}{7!} + \dots\right) S \\ &\quad + \left(\frac{1}{2!} - \frac{\theta}{4!} + \frac{\theta^2}{6!} - \frac{\theta^3}{8!} + \dots\right) S^2 \\ &= I + \sin \sqrt{\theta} \frac{S}{\sqrt{\theta}} + (1 - \cos \sqrt{\theta}) \frac{S^2}{\theta}\end{aligned} \quad (5.18)$$

olarak hesaplanır. Bu bir S Lie cebiri elemanından T Lie grup elamanına üstel dönüşüm formülünü verir.

$L_1 = xix^*$, vidası için $\theta = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2$ tam kare ifadesine eşit olduğundan θ değeri yerine konunca L vidasını Lie cebiri kabul eden Lie grubu olan dönüşüm matrisi

$$T = I + \sin(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \frac{S}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + (1 - \cos(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)) \frac{S^2}{(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2}$$

olarak hesaplanır. S vidasına karşılık gelen dönüşüm matrisi radikal terimler içeren bir matris olarak hesaplanmıştır. L_1 vidasına karşılık gelen dönüşüm matrisinin ise rasyonel olduğu gözlemlenmiştir. Uygulanabilirlik açısından hareketin rasyonel olarak ifade edilmesi oldukça önemlidir.

6. DÜZLEM HAREKETİNİN YÖRÜNGESİ OLARAK PİSAGOR HODOGRAFI EĞRİLER VE PİSAGOR NORMAL YÜZEYLER

6.1 Dual Kuaterniyonların Düzleme Etkisi

Lemma 6.1 (Hareketin düzleme etkisi). Bir

$$x = \{\alpha_0 p + \epsilon d, \alpha_0 \in \mathbb{R}[t], p, d \in \mathbb{H}[t] \mid xx^* \in \mathbb{R}[t]\}$$

hareketinin dual kuaterniyonlarda Eşitlik (3.34) ile tanımlı bir

$$E = \{\mathbf{p} + \epsilon d_0, \mathbf{p} \in \text{Im}(\mathbb{H}[t]), d_0 \in \mathbb{R}[t]\}$$

düzlemine etkisi

$$E' = x_\epsilon E x^* \quad (6.1)$$

formülüyle hesaplanır.

İspat. Bu ispat iki adımdan oluşmaktadır. Birinci adımda E' 'nin bir düzlem olduğu gösterilecektir. Daha sonra, ikinci adımda E düzlemi üzerindeki herhangi bir noktanın x hareketi altındaki görüntüsünün E' düzlemi üzerinde olduğu gösterilecektir.

1. Adım: E' bir düzlemdir. Öyleyse, E' 'nin düzlem belirtmesi için reel kısmının bir vektörel kuaterniyon ve dual kısmının bir skaler olması gerekmektedir:

$$\begin{aligned} E' &= x_\epsilon E x^* = (\alpha_0 p + \epsilon d)_\epsilon (\mathbf{p} + \epsilon d_0) (\alpha_0 p + \epsilon d)^* \\ &= (\alpha_0 p - \epsilon d) (\mathbf{p} + \epsilon d_0) (\alpha_0 p^* + \epsilon d^*) \\ &= \alpha_0^2 p \mathbf{p} p^* + \epsilon \alpha_0 (\alpha_0 d_0 p p^* + p \mathbf{p} d^* - d \mathbf{p} p^*) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha_0 p \mathbf{p} p^* + \epsilon (\alpha_0 d_0 p p^* + p \mathbf{p} d^* - d \mathbf{p} p^*) \end{aligned}$$

Burada, reel kısım $\alpha_0^2 p p p^* \in \text{Im}(\mathbb{H}[t])$ vektörel kuaterniyon ve dual kısım $\alpha_0 d_0 p p^* + p p d^* - d p p^* = \alpha_0 d_0 p p^* + p p d^* + d p^* p^* = \alpha_0 d_0 p p^* + \langle p p, d \rangle$ ise bir skalerdir. Böylece, $\alpha_0 d_0 p p^* + \langle p p, d \rangle \in \mathbb{R}[t]$ olduğundan E' bir düzlemdir.

2. Adım: E düzleminde bulunan bir $e_0 = 1 + \epsilon x$ noktasının $x = \alpha_0 p + \epsilon d$ hareketi altındaki görüntüsü E' düzlemi üzerinde bir noktadır:

Öncelikle, e_0 noktası E düzlemi üzerinde olduğuna göre aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned} e_0 \in E &\Leftrightarrow \langle e_0, E \rangle = 0 \\ \langle e_0, E \rangle &= e_0 E^* + E e_0^* = (1 + \epsilon x)(p + \epsilon d_0)^* + (p + \epsilon d_0)(1 + \epsilon x)^* \\ &= (1 + \epsilon x)(-p + \epsilon d_0) + (p + \epsilon d_0)(1 - \epsilon x) \\ &= \epsilon(2d_0 - x p - p x) = 2\epsilon(d_0 + \langle x, p \rangle) \end{aligned}$$

Böylece, $\langle e_0, E \rangle = 0 \Rightarrow d_0 + \langle x, p \rangle = 0$ olur. Öyleyse, $\langle x, p \rangle = -d_0$ olmalıdır. $e_0 = 1 + \epsilon x$ noktasının $x = \alpha_0 p + \epsilon d$ hareketi altındaki görüntüsü olan e'_0 noktası:

$$\begin{aligned} e'_0 &= x_\epsilon e_0 x^* = (\alpha_0 p + \epsilon d)_\epsilon (1 + \epsilon x)(\alpha_0 p + \epsilon d)^* \\ &= (\alpha_0 p - \epsilon d)(1 + \epsilon x)(\alpha_0 p^* + \epsilon d^*) \\ &= \alpha_0^2 p p^* + \epsilon \alpha_0 (\alpha_0 p x p^* + p d^* - d p^*) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha_0 p p^* + \epsilon (\alpha_0 p x p^* + p d^* - d p^*) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu nokta E' düzlemi üzerinde olmalıdır: $e'_0 \in E' \Leftrightarrow \langle e'_0, E' \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle e'_0, E' \rangle &= e'_0 E'^* + E' e'_0^* \\ &= (\alpha_0 p p^* + \epsilon (\alpha_0 p x p^* + p d^* - d p^*)) (\alpha_0 p p p^* + \epsilon (\alpha_0 d_0 p p^* + p p d^* - d p p^*))^* \\ &\quad + (\alpha_0 p p p^* + \epsilon (\alpha_0 d_0 p p^* + p p d^* - d p p^*)) (\alpha_0 p p^* + \epsilon (\alpha_0 p x p^* + p d^* - d p^*))^* \\ &= 2\alpha_0^2 d_0 (p p^*)^2 + \alpha_0^2 p^* p (-p p x p^* - p x p p^*) \\ &\quad + \alpha_0 p p^* (p p d^* - d p p^*) + \alpha_0 (-p d^* p p p^* + p p p^* d p^*) \\ &= 2\alpha_0^2 d_0 (p p^*)^2 + 2\alpha_0^2 p^* p \langle x, p \rangle p^* + 2\alpha_0 p p^* \langle p p, d \rangle - 2\alpha_0 p p^* \langle p p, d \rangle \\ &= 2\alpha_0^2 d_0 (p p^*)^2 - 2\alpha_0^2 d_0 (p p^*)^2 = 0. \end{aligned}$$

Böylece, e'_0 noktası E' düzlemi üzerindedir. Sonuç olarak, Eşitlik (6.1) bir düzlemin dual kuaterniyonlarda katı cisim yer değiştirme hareketini tanımlar.

□

6.2 Düzlem Hareketinin Pisagor Hodograf Özelliği

Farouki ve Šír bir eğrinin oskülatör düzlemlerini kullanarak bu düzlemlerin zarfı olan eğriyi alarak rasyonel Pisagor hodograf eğri elde etmede bir yöntem oluşturmuşlardır. Ancak düzlemlerin zarfını alma işleminde elde edilen eğrinin polinom derecesi yüksek çıkmaya meyillidir (Farouki ve Šír, 2020).

Bu bölümde, düzleme bir rasyonel hareket etki ettirilerek hareketin düzlem yörüngelerinin zarfını almak yerine bu yörünge düzlemlerini oskülatör, rektifyen veya normal düzlem kabul eden eğriye Pisagor hodograf şartı uygulanarak daha pratik bir yöntem öne sürülmüştür. Bu yöntem, daha düşük dereceli eğri vermeyi garantiler ve cebirsel geometride daha iyi bir şekilde derece analizine imkan sağlar.

Lemma 6.2. Orijin noktasına etkisinin yörüngesi bir rasyonel Pisagor hodograf eğrisi oluşturan hareket polinomunun bir $\mathbf{i}$ düzlemine etkisi ilgili Pisagor hodograf eğrisinin normal düzlemidir.

İspat. Öncelikle, bir x hareketinin orijin noktasına etkisinin yörüngesi

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= x_\epsilon(1 + \epsilon\mathbf{0})x^* = (\alpha_0p + \epsilon d)_\epsilon(\alpha_0p + \epsilon d)^* = (\alpha_0p - \epsilon d)(\alpha_0p^* + \epsilon d^*) \\ &= \alpha_0^2pp^* + \epsilon\alpha_0(pd^* - dp^*) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \epsilon \frac{2dp^*}{\alpha_0pp^*}\end{aligned}$$

olan $\alpha = -\frac{2dp^*}{\alpha_0pp^*}$ eğrisi Pisagor hodograf eğrisi ise α eğrisinin hodografi $\alpha' \parallel pip^*$ ilişkisine sahiptir. Genelliği kaybetmeden $\alpha' = pip^*$ olsun. Diğer taraftan, bir x hareketinin bir $\mathbf{i}$ düzlemine etkisi

$$\begin{aligned}
E_i &= x_\epsilon \mathbf{i} x^* = (\alpha_0 p + \epsilon d)_\epsilon \mathbf{i} (\alpha_0 p + \epsilon d)^* = (\alpha_0 p - \epsilon d) \mathbf{i} (\alpha_0 p^* + \epsilon d^*) \\
&= \alpha_0^2 p \mathbf{i} p^* + \epsilon \alpha_0 (p \mathbf{i} d^* - d \mathbf{i} p^*) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_0 p \mathbf{i} p^* + \epsilon (p \mathbf{i} d^* - d \mathbf{i} p^*) \\
&= \alpha_0 p \mathbf{i} p^* + \frac{\epsilon}{pp^*} (p \mathbf{i} p^* p d^* - d p^* p \mathbf{i} p^*) \\
&= \alpha_0 p \mathbf{i} p^* + \frac{\epsilon}{pp^*} (p \mathbf{i} p^* p d^* - d p^* p \mathbf{i} p^*) = \alpha_0 \alpha' + \frac{\epsilon}{pp^*} (\alpha' p d^* - d p^* \alpha') \\
&= \alpha_0 \alpha' - \epsilon \alpha_0 \langle \alpha', -\frac{2dp^*}{\alpha_0 pp^*} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \alpha' - \epsilon \langle \alpha, \alpha' \rangle
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $\alpha' - \epsilon \langle \alpha, \alpha' \rangle$ düzlemi α eğrisinin normal ve binormal vektörlerinin gerdiği düzlemdir. Böylece, E_i düzlemi α Pisagor hodograf eğrisinin (3.30)'da verilen normal düzlemler ailesidir.

□

Lemma 6.2 Euler-Rodrigues çatısı tanımından (Choi ve Han, 2002) aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

Lemma 6.3. Rasyonel bir hareketin $\mathbf{i}$ düzlemine etkisi ile oluşan düzlemler ailesi bir Pisagor hodograf eğrinin normal düzlemler ailesidir.

İspat. x rasyonel hareketinin bir $\mathbf{i}$ düzlemine etkisi

$$E_i = \alpha_0 p \mathbf{i} p^* - \epsilon \langle \alpha_0 p \mathbf{i} p^*, -\frac{2dp^*}{\alpha_0 pp^*} \rangle$$

olarak hesaplanır. Herhangi bir α eğrisinin normal düzlemler ailesi dual kuaterniyonlarda $\alpha' - \epsilon \langle \alpha, \alpha' \rangle$ olarak hesaplanır. Böylece, $\alpha = -\frac{2dp^*}{\alpha_0 pp^*}$ 'ye eşitse E_i , α eğrisinin normal düzlemler ailesidir. Bir α eğrisinin türevi $\alpha' \parallel p \mathbf{i} p^*$ ilişkisine sahipse Pisagor hodografır. Genelliği kaybetmeden $\alpha_0 p \mathbf{i} p^* = \alpha'$ kabul edilsin. Böylece, E_i normal düzlemler ailesine sahip olan α eğrisi Pisagor hodograf eğridir.

□

Lemma 6.4. Lemma 6.3'te olduğu gibi orijin noktasına etkisinin yörüngesi bir rasyonel Pisagor hodograf eğrisi oluşturan hareket polinomunun $\mathbf{j}, \mathbf{k}$ düzlemlerine etkisi ilgili Pisagor hodograf eğrisinin sırasıyla rektifyen ve oskülatör düzlemleridir.

İspat. Lemma 6.3'ün ispatında olduğu gibi $\alpha = -\frac{2dp^*}{\alpha_0 pp^*}$ eğri bir Pisagor hodograf eğri olsun. Bu yüzden genelliği kaybetmeden $\alpha' = p\dot{p}^*$ olsun. Diğer taraftan, bir x hareketinin bir $\mathbf{j}$ ve $\mathbf{k}$ düzlemlerine etkisi sırasıyla

$$E_j = x_\epsilon \mathbf{j} x^* = \alpha_0 \left(p\dot{p}^* - \epsilon \left\langle \frac{2dp^*}{pp^*}, p\dot{p}^* \right\rangle \right)$$

$$E_k = x_\epsilon \mathbf{k} x^* = \alpha_0 \left(p\dot{k}p^* - \epsilon \left\langle \frac{2dp^*}{pp^*}, p\dot{k}p^* \right\rangle \right)$$

olarak hesaplanır. α eğrisinin teğet vektörü $\mathbf{t} \parallel \alpha' = p\dot{p}^*$. Aynı şekilde sırasıyla normal ve binormal vektörleri $\mathbf{n} \parallel p\dot{p}^*$ ve $\mathbf{b} \parallel p\dot{k}p^*$. $pp^* = 1$ olduğu varsayılarak $\mathbf{n} = p\dot{p}^*$ ve $\mathbf{b} = p\dot{k}p^*$ olsun. Böylece,

$$E_j = \mathbf{n} - \epsilon \langle \alpha, \mathbf{n} \rangle$$

$$E_k = \mathbf{b} - \epsilon \langle \alpha, \mathbf{b} \rangle$$

düzlemleri yazılabilir. $\mathbf{n} - \epsilon \langle \alpha, \mathbf{n} \rangle$ düzlemi α eğrisinin binormal ve teğet vektörlerinin ve $\mathbf{b} - \epsilon \langle \alpha, \mathbf{b} \rangle$ düzlemi ise α eğrisinin teğet ve normal vektörlerinin gerdiği düzlemdir. Böylece, E_j ve E_k düzlemleri α Pisagor hodograf eğrisinin sırasıyla (3.29) ve Eşitlik (3.31)'de verilen rektifyen ve oskülatör düzlemler ailesidir.

□

Lemma 6.5. Rasyonel bir hareketin $\mathbf{k}$ düzlemine etkisi ile oluşan düzlemler ailesi bir Pisagor hodograf eğrinin oskülatör düzlemler ailesidir.

İspat. Lemma 6.4'ün ispatında olduğu gibi, bir x hareketinin bir $\mathbf{k}$ düzlemine etkisi bir α eğrisinin oskülatör düzlemler ailesi olarak alınsın: $E_k = p\dot{k}p^* - \epsilon \left\langle -\frac{2dp^*}{\alpha_0 pp^*}, p\dot{k}p^* \right\rangle$.

Öyleyse, E_k oskulator düzlemler ailesine sahip olan eğri $\alpha = -\frac{2dp^*}{\alpha_0 p p^*}$ eğrisidir. Ayrıca, E_k , α eğrisinin oskulator düzlemleri ve eğrinin binormal vektörü Euler-Rodrigues çatısı tanımından $\mathbf{b} = p\mathbf{k}p^*$ ($pp^* = 1$ olduğu varsayılın) olduğundan bu α Pisagor-Hodograf eğrisi olduğunu garanti eder.

□

6.3 Pisagor Normal Yüzey Olarak Regle Yüzeyler

Lemma 6.6. Bir regle yüzey Pisagor normal (PN) yüzeydir.

İspat. Pisagor normal vektör alanına sahip olan yüzeyler Pisagor hodograf eğri özelliklerinin yüzeylerde çalışılmasıyla tanıtılmıştır (Peternell ve Pottmann, 1998). Bir $x = a(u) + vr(u)$ regle yüzeyinin yüzey normali Eşitlik (3.38) yardımıyla dual kuaterniyonlarda

$$n(u, v) = x_u \times x_v = \dot{a}(u) \times r(u) + v(\dot{r}(u) \times r(u))$$

ile verilir. Kartezyen koordinatlarda $n(u, v)$ regle yüzey normalinin Pisagor şartını sağlaması Plücker koordinatlarında tanımlandığı zaman Eşitlik (3.3) ile verilmiş olan Klein (Plücker) kuadriği üzerinde olması veya normlanmış doğru Plücker koordinatlarında (dual kuaterniyonlar) normalinin normunun bir reel polinom olmasıyla karakterize edilebilir:

$$\begin{aligned} n(u) &= \begin{pmatrix} n(u) \\ \bar{n}(u) \end{pmatrix} \mid \langle n(u), \bar{n}(u) \rangle = 0 \text{ veya} \\ n(u) &= n_1(u)\mathbf{i} + n_2(u)\mathbf{j} + n_3(u)\mathbf{k} \\ &\quad + \epsilon(\bar{n}_1(u)\mathbf{i} + \bar{n}_2(u)\mathbf{j} + \bar{n}_3(u)\mathbf{k}) \mid \|n(u)\| \in \mathbb{R}[u] \end{aligned}$$

Standart koordinatlarda tanımlı regle yüzeylerin normalinin normu

$$\begin{aligned}
\|n(u, v)\| &= \|x_u \times x_v\| = \|\dot{a}(u) \times r(u) + v(\dot{r}(u) \times r(u))\| \\
&= \left(\left(\dot{a}(u) \times r(u) + v(\dot{r}(u) \times r(u)) \right) \left(\dot{a}(u) \times r(u) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + v(\dot{r}(u) \times r(u)) \right) \right)^{1/2} = ((\|a \times r\| + v\|r \times \dot{r}\|)^2)^{1/2} \\
&= \|a \times r\| + v\|r \times \dot{r}\| \in \mathbb{R}[u, v]
\end{aligned} \tag{6.2}$$

olarak hesaplanır. Böylece, regle yüzeyler bir Pisagor normal yüzeylerdir.

Ayrıca, Plücker koordinatlarında ifade edilen bir regle yüzeyin Pisagor hodograf özelliğini sağlaması Klein kuadriği üzerinde olmasıyla karakterize edilebileceği belirtilmişti. Öyleyse, Plücker koordinatlarında

$$n(u) = \begin{pmatrix} \dot{r}(u) \times r(u) \\ -\langle \dot{a}(u), (r(u) \times \dot{r}(u)) \rangle r(u) \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

yüzey normalinin Klein kuadriği üzerinde olduğunu ispatlansın:

$$\begin{aligned}
&(\dot{r}(u) \times r(u)) \cdot (\langle \dot{a}(u), (r(u) \times \dot{r}(u)) \rangle r(u)) \\
&= (\dot{r}(u) \times r(u)) \cdot ([\dot{a}(u), r(u), \dot{r}(u)] r(u)) \\
&= [\dot{a}(u), r(u), \dot{r}(u)] (\dot{r}(u) \times r(u)) \cdot r(u) \\
&= [\dot{a}(u), r(u), \dot{r}(u)] [r(u), \dot{r}(u), r(u)] = 0
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Böylece, yüzey normali Klein kuadriği üzerindedir ve $R(u)$ regle yüzeyi bir Pisagor normal yüzeydir. Daha sonra, Eşitlik (6.3)'de verilen regle yüzeyin normal vektörü normlanmış doğru Plücker koordinatlarındaki ilk üç ve son üç bileşeni olan $\dot{r}(u) \times r(u)$ ve $-\langle \dot{a}(u), (r(u) \times \dot{r}(u)) \rangle r(u)$ vektörleri imajiner kuaterniyon olarak yazılmak üzere

$$n(u) = \dot{r}(u) \times r(u) - \epsilon \left(\langle \dot{a}(u), (r(u) \times \dot{r}(u)) \rangle r(u) \right) \tag{6.5}$$

olarak yazılır. $n(u)$ dual kuaterniyonun normu

$$\begin{aligned}
\|n(u)\| &= \left\| \dot{r}(u) \times r(u) - \epsilon \left(\langle \dot{a}(u), (r(u) \times \dot{r}(u)) \rangle r(u) \right) \right\| \\
&= \left(\left(\dot{r}(u) \times r(u) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \epsilon \left(\langle \dot{a}(u), (r(u) \times \dot{r}(u)) \rangle r(u) \right) \right) \left(\dot{r}(u) \times r(u) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \epsilon \left(\langle \dot{a}(u), (r(u) \times \dot{r}(u)) \rangle r(u) \right) \right)^* \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \langle r(u) \times \dot{r}(u), r(u) \times \dot{r}(u) \rangle = (\|r(u) \times \dot{r}(u)\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|r(u) \times \dot{r}(u)\| \in \mathbb{R}[u]
\end{aligned} \tag{6.6}$$

reel bir polinomdur. Böylece, Plücker doğru koordinatlarında ve normlanmış Plücker doğru koordinatlarında regle yüzeylerin Pisagor normal karakterizasyonları yapılmıştır.

□

Regle yüzeyler zarf yüzeylerdir ve zarf yüzeylerin Pisagor normal yüzeyler olduğu regle yüzeyin standart koordinatlardaki gösterimiyle çalışılmıştır (Bizzarri vd., 2017).. Lemma 6.6’da regle yüzeyler, regle yüzeylerinin dual gösterimi olan Plücker doğru koordinatlarında tanımlanmıştır. Dual gösterimde regle yüzeyler Klein (Plücker) kuadriğinde bir eğri belirtir. Böylece, bir regle yüzeyin Pisagor normal yüzey olmasının da normal vektörünün Klein kuadriği üzerinde olması koşuluna bağlı olduğu gösterilmiştir. Aynı şekilde, normlanmış doğru Plücker koordinatlarında dual kuaterniyonlara gömülü olan regle yüzeyin normal vektörünün normunun reel bir polinoma eşit olması (dual bir polinom olmaması) şartı Pisagor normal yüzey olmasını karakterize eder.

Öneri 6.7. Bir $R(u) = x(u)\mathbf{i}x(u)^*$ regle yüzeyinin üreteçlerinin yönü bir Pisagor hodograf eğrinin hodografıdır.

$$\begin{aligned}
R(u) &= x(u)\mathbf{i}x(u)^* = (\alpha_0 p + \epsilon d)\mathbf{i}(\alpha_0 p^* + \epsilon d^*) \\
&= \alpha_0^2 p\mathbf{i}p^* + \epsilon\alpha_0(p\mathbf{i}d^* + d\mathbf{i}p^*) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} p\mathbf{i}p^* + \epsilon \frac{1}{\alpha_0}(p\mathbf{i}d^* + d\mathbf{i}p^*) \\
&= p\mathbf{i}p^* + \epsilon \left(\frac{p\mathbf{i}p^* p d^*}{\alpha_0 p p^*} + \frac{d p^* \mathbf{i} p^*}{\alpha_0 p p^*} \right) \\
&= p\mathbf{i}p^* + \epsilon \left(p\mathbf{i}p^* \frac{p d^*}{\alpha_0 p p^*} - \frac{p d^*}{\alpha_0 p p^*} p\mathbf{i}p^* \right) \\
&= p\mathbf{i}p^* + \frac{2}{\alpha_0 p p^*} \epsilon (p\mathbf{i}p^* \times p d^*)
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Dual kuaterniyonlarda, Eşitlik (6.7) ile hesaplanan $R(u)$ regle yüzeyi, kartezyen koordinatlarda $x(u, v) = \frac{2p(u)d^*(u)}{\alpha_0(u)p(u)p^*(u)} + vp(u)\mathbf{i}p^*(u)$ olarak yazılır. $x(u, v)$ regle yüzeyinin üreteçlerinin yönü $p(u)\mathbf{i}p^*(u)$ eğrisi olmak üzere bu eğrinin normu

$$\begin{aligned}
\left((p(u)\mathbf{i}p^*(u))(p(u)\mathbf{i}p^*(u))^* \right)^{1/2} &= \left((p(u)\mathbf{i}p^*(u))(-p(u)\mathbf{i}p^*(u)) \right)^{1/2} \\
&= \left((p(u)p^*(u))^2 \right)^{1/2} = p(u)p^*(u) \in \mathbb{R}[u]
\end{aligned}$$

bir polinom eğrisidir. Böylece, Pisagor hodagraf eğrinin hodografı olan eğridir.

6.4 Pisagor Normal Yüzey Olarak Düzlem Hareketinin Zarf Yüzeyi

Pisagor normal yüzeyler, iki parametrelili bir hareketin yörüngesi ve bir düzlem hareketinin yörüngesinin zarfı olarak tanımlanacaktır. Notasyonlar, polinomların parametresi olan u, v parametresi yazılmadan, örneğin; $p(u, v) = A, \mathbf{t}(u, v) = \mathbf{t}, \alpha_0(u, v) = \alpha_0$ şeklinde gösterilecektir.

Buradaki bilgiler ışığında, bir x katı cisim hareketi, önce öteleme ardından da dönme uygulanarak $x = \left\{ \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right) p, \alpha_0 \in \mathbb{R}[u, v], p, \mathbf{t} \in \mathbb{H}[u, v] \right\}$ formunda yazılabilir. Pisagor normal yüzeylerine ulaşmak için x hareket polinomu iki-değişkenli bir polinom olarak alınır. Burada, Study şartı kısıtlamasıyla $xx^* \in \mathbb{R}[u, v]$

$$\begin{aligned}
xx^* &= \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2}\right) p \left(\left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2}\right) p \right)^* = \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2}\right) pp^* \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}^*}{2}\right) \\
&= pp^* (\alpha_0^2 + \epsilon \alpha_0 (\mathbf{t}^* + \mathbf{t})), \quad x^* \in \mathbb{R}[u, v] \Rightarrow \mathbf{t} + \mathbf{t}^* = 0
\end{aligned}$$

$\mathbf{t} = t_1 \mathbf{i} + t_2 \mathbf{j} + t_3 \mathbf{k} \in \text{Im}(\mathbb{H}[t])$ bir vektörel kuaterniyondur. İki değişkenli hareket polinomunu homojen koordinatlarda genelliği kaybetmeden orijin noktasına etki ettirilsin (çünkü, katı cisim hareketleri koordinattan bağımsızdır (Hacısalıhoğlu, 1998)).

$$\begin{aligned}
x_\epsilon(1 + \epsilon \mathbf{0})x^* &= (\alpha_0 p - \epsilon d)(\alpha_0 p + \epsilon d^*) \\
&= \alpha_0^2 pp^* + \epsilon \alpha_0 (pd^* - dp^*) = \alpha_0^2 pp^* + 2\epsilon \alpha_0 pd^* \\
&= \alpha_0^2 pp^* - \epsilon \alpha_0 pp^* \mathbf{t}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Kartezyen koordinatlarda orijin noktasının yörüngesi

$$r = -\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0} \tag{6.9}$$

olarak elde edilir. Bu yörünge bir yüzey oluşturur; $x = \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2}\right) p$ hareket polinomunda verilen p ve α_0 için (çünkü kuaterniyon durumunda çalışılmıştır) dual kısım olan $\mathbf{t}$ incelenerek yüzeyin Pisagor normal yüzeyi olma durumu araştırılacaktır.

$r = -\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0}$ yüzeyinin bir Pisagor normal yüzeyi olması için birim normal vektörü

$$\mathbf{n} = \frac{p\mathbf{k}p^*}{\|p\mathbf{k}p^*\|} \tag{6.10}$$

olmalıdır. $\mathbf{n} = \frac{p\mathbf{k}p^*}{\|p\mathbf{k}p^*\|}$ için $\langle r_u, \mathbf{n} \rangle = \langle r_v, \mathbf{n} \rangle = 0$ ilişkileri yardımıyla aşağıdaki kısıtlayıcı denklemler elde edilir:

$$\langle r_u, \mathbf{n} \rangle = \left\langle \left(-\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0} \right)_u, \mathbf{n} \right\rangle = \left\langle -\frac{\alpha_0 \mathbf{t}_u - \alpha_{0_u} \mathbf{t}}{\alpha_0}, \mathbf{n} \right\rangle = 0 \quad (6.11)$$

$$\Rightarrow \langle \alpha_0 \mathbf{t}_u - \alpha_{0_u} \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

$$\langle r_v, \mathbf{n} \rangle = \left\langle \left(-\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0} \right)_v, \mathbf{n} \right\rangle = \left\langle -\frac{\alpha_0 \mathbf{t}_v - \alpha_{0_v} \mathbf{t}}{\alpha_0}, \mathbf{n} \right\rangle = 0 \quad (6.12)$$

$$\Rightarrow \langle \alpha_0 \mathbf{t}_v - \alpha_{0_v} \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

Bilgisayarlı hesaplama programları yardımıyla bu iki denklemden $\mathbf{t}$ kuaterniyonun çözümü bulunur. İki denklem ve ancak ikiden fazla değişken olduğundan çözüm $\mathbf{t}$ 'nin katsayıları arasında bir ilişki verir. Bunlara rastgele değer atayarak $\mathbf{t}$ kuaterniyonu $r = -\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0}$ yüzeyi Pisagor normal yüzeyi olacak şekilde hesaplanır. Böylece, $\langle \alpha_0 \mathbf{t}_u - \alpha_{0_u} \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$ ve $\langle \alpha_0 \mathbf{t}_v - \alpha_{0_v} \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$ şartları ile rasyonel Pisagor normal yüzey karakterize edilebilir. Bir başka deyişle, yüzeyin parametrelerine göre kısmi türevleri olan r_u ve r_v , $\mathbf{n} = \frac{p\mathbf{k}p^*}{\|p\mathbf{k}p^*\|}$ normal vektör alanının ortogonal tümleyeninin elemanıysa, yani $r_u, r_v \in \mathbf{n}^\perp$, r yüzeyi bir Pisagor normal yüzeydir denir.

Öneri 6.8. Bir x katı cisim hareketi önce öteleme ardından da dönme uygulanarak $x = \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right) p$ olarak yazılabilir. Pisagor normal yüzeylerine ulaşmak için x hareket polinomu iki-değişkenli polinom $x(u, v) \in \mathbb{DH}[u, v]$ olarak alınır. Burada, Study şartından dolayı $\mathbf{t} = t_1 \mathbf{i} + t_2 \mathbf{j} + t_3 \mathbf{k} \in \text{Im}(\mathbb{H}[u, v])$ vektörel kuaterniyon, $p \in \mathbb{H}[u, v]$ ve α_0 ise iki değişkenli $\alpha_0 \in \mathbb{R}[u, v]$ bir polinom olsun. Bu iki değişkenli hareket polinomunu homojen koordinatlarda genelliği kaybetmeden orijin noktasına etki ettirilsin:

$$\begin{aligned} x_\epsilon (1 + 0. \epsilon) x^* &= \left(\alpha_0 - \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right) p (1 + 0. \epsilon) p^* \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}^*}{2} \right) \\ &= pp^* \left(\alpha_0^2 + \epsilon \left(\alpha_0 \frac{\mathbf{t}^*}{2} - \frac{\mathbf{t}}{2} \alpha_0 \right) \right). \end{aligned}$$

Kartezyen koordinatlarda orijin noktasının yörüngesi

$$\frac{\alpha_0 \mathbf{t}^* - \alpha_0 \mathbf{t}}{2\alpha_0^2} = \frac{\mathbf{t}^* - \mathbf{t}}{2\alpha_0}$$

olarak elde edilir. $\mathbf{t}$ vektörel kuaterniyon olduğundan $\mathbf{t}^* = -\mathbf{t}$ öyleyse orijinin yörüngesi $-\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0}$ olarak bulunur. Bu yörünge bir yüzey oluşturur; $r = -\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0}$. Verilen p ve α_0 için (çünkü kuaterniyon durumunda çalışılmıştır) dual kısım olan $\mathbf{t}$ 'yi inceleyerek yüzeyin Pisagor normal yüzeyi olma durumunu araştırılacaktır. r yüzeyinin teğet vektörleri $g_1 := r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = \varphi_1 p \mathbf{i} p^* + \varphi_2 p \mathbf{j} p^*$ ve $g_2 := r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = \varphi_3 p \mathbf{i} p^* + \varphi_4 p \mathbf{j} p^*$ (Kozak vd., 2016) olmak üzere birim normal vektörü

$$\mathbf{n} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\|} = \frac{p \mathbf{k} p^*}{p p^*}$$

olarak hesaplanır. Öyleyse,

$$\langle r_u, \mathbf{n} \rangle = \langle r_v, \mathbf{n} \rangle = 0 \quad (6.13)$$

şartı ile rasyonel Pisagor normal yüzeyi karakterize edilebilir. Bir başka deyişle, r_u ve r_v , $\mathbf{n}$ normal vektör alanının ortogonal tümleyeninin elemanıysa; $r_u, r_v \in \mathbf{n}^\perp$ Pisagor normal yüzeydir denir. Ancak, bu yüzeylere orijin noktasının hareketinin yörüngesi yerine bir düzlem hareketinin yörüngesinin zarfı yaklaşımıyla daha genel bir form elde edilir.

Teorem 6.9. p , iki değişkenli bir kuaterniyon polinomu olmak üzere, bir $\mathcal{S}$ Pisagor normal yüzeyi, yüzeyin normal vektörü $\mathbf{n} = \frac{p \mathbf{k} p^*}{p p^*} \in \mathbb{H}[u, v]$ ve orijine olan uzaklığı ise $d_0 \in \mathbb{R}[u, v]$ olmak üzere $\mathcal{S}$ parametrik yüzeyi

$$-\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0} - \frac{1}{\det(\mathbf{n}, \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v)} \left(\left\langle \mathbf{n}, \left(\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0} \right)_u \right\rangle \mathbf{n}_v \times \mathbf{n} + \left\langle \mathbf{n}, \left(\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0} \right)_v \right\rangle \mathbf{n} \times \mathbf{n}_u \right) \quad (6.14)$$

formunda yazılır.

İspat. Bir $x \in \mathbb{D}\mathbb{H}[u, v]$ iki parametrelili hareket polinomu

$$x = \left\{ \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right) p \mid p, \mathbf{t} \in \mathbb{H}[u, v], \alpha_0 \in \mathbb{R}[u, v] \right\}$$

şeklinde tanımlansın. x hareket tanımladığı için Study şartını sağlar, yani normu reel bir polinomdur. $xx^* = x^*x = \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right) pp^* \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}^*}{2} \right) = pp^* \left(\alpha_0^2 + \epsilon \alpha_0 \left(\frac{\mathbf{t}}{2} + \frac{\mathbf{t}^*}{2} \right) \right)$

öyleyse $\mathbf{t} + \mathbf{t}^* = 0 \Rightarrow \mathbf{t}^* = -\mathbf{t}$ olur, böylece $\mathbf{t}$ bir vektörel kuaterniyondur. x 'nin $\mathbf{k}$ düzlemine (xy –düzlemi) etkisi Tanım 6.1 gereğince

$$\begin{aligned} x_\epsilon \mathbf{k} x^* &= \left(\left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right) p \right)_\epsilon \mathbf{k} \left(\left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right) p \right)^* \\ &= \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right)_\epsilon p \mathbf{k} p^* \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right)^* \\ &= \left(\alpha_0 - \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right) p \mathbf{k} p^* \left(\alpha_0 - \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right) \\ &= \alpha_0^2 p \mathbf{k} p^* - \epsilon \alpha_0 \left(p \mathbf{k} p^* \frac{\mathbf{t}}{2} + \frac{\mathbf{t}}{2} p \mathbf{k} p^* \right) \end{aligned} \tag{6.15}$$

olarak hesaplanır. Burada, $p \mathbf{k} p^* \in \text{Im}(\mathbb{H}[u, v])$ ve $p \mathbf{k} p^* \frac{\mathbf{t}}{2} + \frac{\mathbf{t}}{2} p \mathbf{k} p^* \in \mathbb{R}[u, v]$ olmak üzere bir düzlem belirtir. Bu düzlemler ailesi $\mathcal{T}$ olarak adlandırılmsın.

$$\mathcal{T} = \alpha_0 p \mathbf{k} p^* - \frac{\epsilon}{2} (p \mathbf{k} p^* \mathbf{t} + \mathbf{t} p \mathbf{k} p^*) = \alpha_0 \mathbf{n} - \epsilon d_0 \tag{6.16}$$

Homojen koordinatlarda çalışıldığından bir çarpım faktörüne göre değişmezdir, bu yüzden α_0 faktörü yok edilir. Bu düzlemin dual olmayan kısmı vektöreldir; düzlem normalinin yönünü temsil eder ve dual kısmı ise skaler değerdir; orijine olan uzaklığını temsil eder. $\mathcal{T}$ düzlemlerinin zarf yüzeyi

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} \cap \mathcal{T}_u \cap \mathcal{T}_v \tag{6.17}$$

ile hesaplanır. Öyleyse, $\mathcal{S}: \det \left(\begin{bmatrix} d_0 & d_{0u} & d_{0v} & x_0 \\ \alpha_0 \mathbf{n} & (\alpha_0 \mathbf{n})_u & (\alpha_0 \mathbf{n})_v & \mathbf{x} \end{bmatrix} \right) = 0$, ayrıca homojen koordinatlarda $X = [x_0 : \mathbf{x}] = [x_0 : x : y : z]$ düzlem üzerinde temsili bir noktadır.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}: \det \left(\begin{bmatrix} d_0 & d_{0u} & d_{0v} & x_0 \\ \alpha_0 \mathbf{n} & (\alpha_0 \mathbf{n})_u & (\alpha_0 \mathbf{n})_v & \mathbf{x} \end{bmatrix} \right) \\ = \det(\alpha_0 \mathbf{n}, (\alpha_0 \mathbf{n})_u, (\alpha_0 \mathbf{n})_v) x_0 \\ + \langle \det(d_0, (\alpha_0 \mathbf{n})_u, (\alpha_0 \mathbf{n})_v) + \det(d_{0u}, (\alpha_0 \mathbf{n})_v, \alpha_0 \mathbf{n}) \\ + \det(d_{0v}, \alpha_0 \mathbf{n}, (\alpha_0 \mathbf{n})_u), (x, y, z) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

$\det(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3) = \langle \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_3 \rangle$ bağıntısı yardımıyla Kartezyen koordinatlarda $\mathcal{S}$ yüzeyi

$$\frac{\langle d_0, (\alpha_0 \mathbf{n})_u \times (\alpha_0 \mathbf{n})_v \rangle + \langle d_{0u}, (\alpha_0 \mathbf{n})_v \times \alpha_0 \mathbf{n} \rangle + \langle d_{0v}, \alpha_0 \mathbf{n} \times (\alpha_0 \mathbf{n})_u \rangle}{\det(\alpha_0 \mathbf{n}, (\alpha_0 \mathbf{n})_u, (\alpha_0 \mathbf{n})_v)}$$

olarak hesaplanır. Paydadaki $\det(\alpha_0 \mathbf{n}, (\alpha_0 \mathbf{n})_u, (\alpha_0 \mathbf{n})_v) = \alpha_0^3 \det(\mathbf{n}, \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v)$ 'a eşittir.

Ayrıca, $d_0 = -\frac{1}{2}(\mathbf{p} \mathbf{k} \mathbf{p}^* \mathbf{t} + \mathbf{t} \mathbf{p} \mathbf{k} \mathbf{p}^*) = -\frac{1}{2}(\mathbf{n} \mathbf{t} + \mathbf{t} \mathbf{n}) = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle$ yerine konunca

$$\begin{aligned} \langle d_0, (\alpha_0 \mathbf{n})_u \times (\alpha_0 \mathbf{n})_v \rangle &= \langle -\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle, (\alpha_{0u} \mathbf{n} + \alpha_0 \mathbf{n}_u) \times (\alpha_{0v} \mathbf{n} + \alpha_0 \mathbf{n}_v) \rangle \\ &= \langle -\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle, \alpha_0 (\alpha_{0u} \mathbf{n} \times \mathbf{n}_v + \alpha_{0v} \mathbf{n}_u \times \mathbf{n} + \alpha_0 \mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v) \rangle \\ \langle d_{0u}, (\alpha_0 \mathbf{n})_v \times \alpha_0 \mathbf{n} \rangle &= \langle -\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle_u, (\alpha_{0v} \mathbf{n} + \alpha_0 \mathbf{n}_v) \times \alpha_0 \mathbf{n} \rangle \\ &= \langle -\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle_u, \alpha_0^2 \mathbf{n}_v \times \mathbf{n} \rangle \\ \langle d_{0v}, \alpha_0 \mathbf{n} \times (\alpha_0 \mathbf{n})_u \rangle &= \langle -\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle_v, \alpha_0 \mathbf{n} \times (\alpha_{0u} \mathbf{n} + \alpha_0 \mathbf{n}_u) \rangle \\ &= \langle -\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle_v, \alpha_0^2 \mathbf{n} \times \mathbf{n}_u \rangle \end{aligned} \quad (6.19)$$

Böylece,

$$\mathcal{S} = - \left(\frac{\langle \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle, (\alpha_{0u} \mathbf{n} \times \mathbf{n}_v + \alpha_{0v} \mathbf{n}_u \times \mathbf{n} + p \mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v) \rangle}{\alpha_0^2 \det(\mathbf{n}, \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v)} \right. \\ \left. + \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle_u, \alpha_0 \mathbf{n}_v \times \mathbf{n} \rangle}{\alpha_0^2 \det(\mathbf{n}, \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v)} + \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle_v, \alpha_0 \mathbf{n} \times \mathbf{n}_u \rangle}{\alpha_0^2 \det(\mathbf{n}, \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v)} \right) \quad (6.20)$$

tekrardan gruplanınca,

$$\mathcal{S} = - \left(\frac{\alpha_0 \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}{\alpha_0^2 \det(\mathbf{n}, \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v)} \mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v + \frac{\alpha_0 \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle_u - \alpha_{0u} \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}{\alpha_0^2 \det(\mathbf{n}, \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v)} \mathbf{n}_v \times \mathbf{n} \right. \\ \left. + \frac{\alpha_0 \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle_v - \alpha_{0v} \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}{\alpha_0^2 \det(\mathbf{n}, \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v)} \mathbf{n} \times \mathbf{n}_u \right) \\ = - \frac{\mathbf{t}}{\alpha_0} - \left(\frac{\langle \mathbf{n}, \alpha_0 \mathbf{t}_u - \alpha_{0u} \mathbf{t} \rangle}{\alpha_0^2 \det(\mathbf{n}, \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v)} \mathbf{n}_v \times \mathbf{n} + \frac{\langle \mathbf{n}, \alpha_0 \mathbf{t}_v - \alpha_{0v} \mathbf{t} \rangle}{\alpha_0^2 \det(\mathbf{n}, \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v)} \mathbf{n} \times \mathbf{n}_u \right) \\ = - \frac{\mathbf{t}}{\alpha_0} - \frac{1}{\det(\mathbf{n}, \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v)} \left(\langle \mathbf{n}, \left(\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0} \right)_u \rangle \mathbf{n}_v \times \mathbf{n} + \langle \mathbf{n}, \left(\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0} \right)_v \rangle \mathbf{n} \times \mathbf{n}_u \right)$$

olarak sadeleştirilir. Böylece, bir düzlemin zarfından Pisagor normal yüzeyi üretilir.

□

Bir $x(u, v)$ hareket polinomunun etkisiyle orijin noktasının yörüngesi

$$x_\epsilon(\mathbf{1} + \epsilon \cdot \mathbf{0})x^* = \left(\left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right) p \right)_\epsilon (\mathbf{1} + \epsilon \cdot \mathbf{0}) \left(\left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right) p \right)^* \\ = \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right)_\epsilon p (\mathbf{1} + \epsilon \cdot \mathbf{0}) p^* \left(\alpha_0 + \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right)^* \\ = \left(\alpha_0 - \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right) p (\mathbf{1} + \epsilon \cdot \mathbf{0}) p^* \left(\alpha_0 - \epsilon \frac{\mathbf{t}}{2} \right) = \alpha_0^2 p p^* - \epsilon \alpha_0 p p^* \mathbf{t}$$

olarak hesaplanır. Öyleyse, Kartezyen koordinatlarda

$$-\frac{\alpha_0 p p^* \mathbf{t}}{\alpha_0^2 p p^*} = -\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0} := S$$

olarak yazılır. Bu yüzeyin Pisagor normal yüzey olması için $\mathbf{n} \parallel S_u \times S_v = p\mathbf{k}p^*$ olmak üzere yüzeyin normali $\mathbf{n}$ 'ye paralel olmalıdır. Öyleyse,

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \perp S_u &\Rightarrow \langle \mathbf{n}, S_u \rangle = \langle \mathbf{n}, -\frac{\alpha_0 \mathbf{t}_u - \alpha_{0_u} \mathbf{t}}{\alpha_0^2} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{n}, \alpha_0 \mathbf{t}_u - \alpha_{0_u} \mathbf{t} \rangle = 0, \\ \mathbf{n} \perp S_v &\Rightarrow \langle \mathbf{n}, S_v \rangle = \langle \mathbf{n}, -2\frac{\alpha_0 \mathbf{t}_v - \alpha_{0_v} \mathbf{t}}{\alpha_0^2} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{n}, \alpha_0 \mathbf{t}_v - \alpha_{0_v} \mathbf{t} \rangle = 0\end{aligned}$$

bağıntılarını sağlamalıdır. Bir Pisagor normal zarf yüzeyinde bu şartlar empoze edildiğinde

$$-\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0} - \frac{1}{\det(\mathbf{n}, \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v)} \left(\langle \mathbf{n}, \left(\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0} \right)_u \rangle \mathbf{n}_v \times \mathbf{n} + \langle \mathbf{n}, \left(\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0} \right)_v \rangle \mathbf{n} \times \mathbf{n}_u \right) = -\frac{\mathbf{t}}{\alpha_0}$$

rasyonel yüzeyi elde edilir. Aynı zamanda yörüngesi orijin noktasının hareketi olan zarf yüzeyi Pisagor normal zarf yüzeylerinin özel bir durumudur.

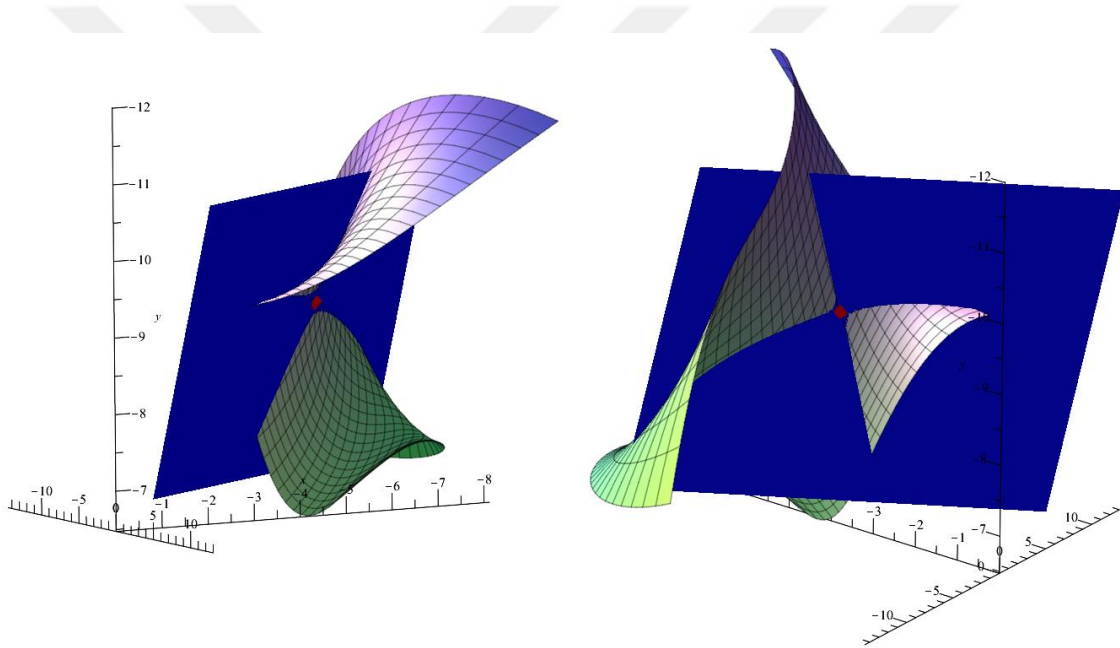
Örnek 6.10. $p := u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ve $\alpha_0 := (uv + u + v)(uv - 1)$ olsun. İki parametrelili $\mathcal{C}$ hareket polinomunun $\mathbf{k}$ düzlemine etkisiyle oluşan $\mathcal{T} = \alpha_0 \mathbf{n} - \epsilon d_0$ teğet düzlemler ailesinin zarf düzlemi hesaplınsın. Burada,

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= 2u(uv + u + v)(uv - 1)\mathbf{i} + 2v(uv + u + v)(uv - 1)\mathbf{j} \\ &\quad + (1 - u^2 - v^2)(uv + u + v)(uv - 1)\mathbf{k} \\ d &= \frac{1}{2} \left(u^5 + \left(\frac{8}{45}v^2 - \frac{94}{45}v + \frac{20}{9} \right) u^4 + \left(\frac{14}{45}v^2 + \frac{8}{3}v + 2 \right) u^3 + \right. \\ &\quad \left(\frac{8}{45}v^4 - \frac{584}{135}v^3 + \frac{424}{297}v^2 - \frac{188}{45}v + \frac{244}{33} \right) u^2 + \left(-\frac{31}{45}v^4 + \frac{8}{3}v^3 - \frac{62}{45}v^2 + \right. \\ &\quad \left. 8v - \frac{22208}{1485} \right) u - \frac{302}{135}v^5 - \frac{12}{11}v^4 - \frac{604}{135}v^3 - \frac{28}{11}v^2 - \frac{39632}{1485}v - \frac{8}{11} \Big) (uv + \\ &\quad u + v)(uv - 1)\end{aligned}$$

olmak üzere bu $\mathcal{T}$ düzlemlerinin zarfı olan $\mathcal{S}$ Pisagor normal polinom yüzeyi

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{4}{15}u^3v^2 + \frac{4}{45}uv^4 - \frac{3}{4}u^4 + \frac{94}{45}u^3v + \frac{29}{18}u^2v^2 - \frac{104}{45}uv^3 - \frac{31}{180}v^4 - \frac{10}{9}u^3 - 2u^2v + \right. \\ & \left. \frac{698}{297}uv^2 + \frac{2}{3}v^3 + \frac{3}{2}u^2 - \frac{94}{45}uv - \frac{31}{90}v^2 + \frac{10}{3}u + 2v - \frac{5552}{1485} \right) \mathbf{i} + \left(2u - \frac{18}{11}v + \frac{14}{15}u^2v^2 - \right. \\ & \left. \frac{778}{297}u^2v - 2uv^2 + \frac{6}{11}v^3 + \frac{151}{90}v^4 + \frac{2}{3}u^3 - \frac{47}{90}u^4 - \frac{151}{45}v^2 - \frac{47}{45}u^2 - \frac{31}{45}uv - \frac{9908}{1485} + \right. \\ & \left. \frac{4}{45}vu^4 - \frac{4}{15}v^3u^2 - \frac{83}{45}u^3v + \frac{31}{45}uv^3 \right) \mathbf{j} + \left(-u^2v^2 - 2u^3 + \frac{188}{45}u^2v + \frac{62}{45}uv^2 + \frac{604}{135}v^3 - \right. \\ & \left. \frac{10}{3}u^2 - 4uv + \frac{18}{11}v^2 - \frac{4}{11} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

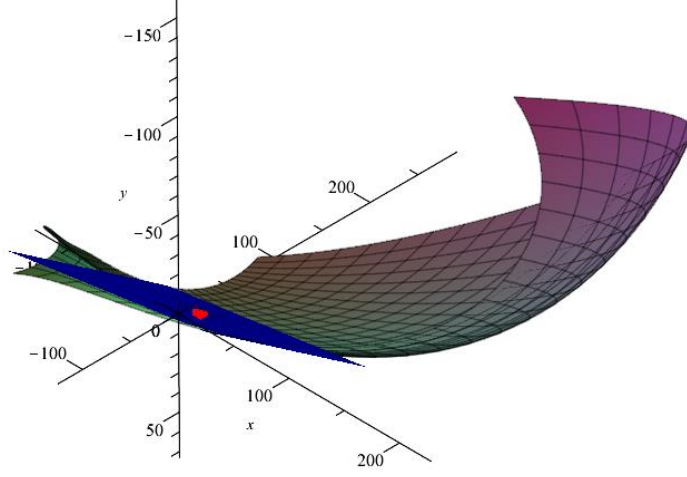
yazılır. Şekil 6.1’de $u = -0.5, v = 0.5$ parametre değerlerine karşılık gelen $\mathcal{S}(-0.5, 0.5)$ noktası yüzey üzerinde kırmızı noktayla belirtilmiştir.



Şekil 6.1 $\mathbf{k}$ düzleminin x hareketinin etkisiyle oluşan düzlemler ailesini teğet düzlem kabul eden polinom Pisagor normal zarf yüzeyi

Örnek 6.11. $\mathcal{C}$ hareket polinomunda $p := uv + u\mathbf{i} + v(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) + (1 - \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$ ve $\alpha_0 := (uv + u + 2v + 1)(uv + 3u + 2v - 1)$ alınsın. Bu durumda, buna karşılık gelen iki parametrelili $\mathcal{C}$ hareket polinomunun $\mathbf{k}$ düzlemine etkisiyle oluşan $\mathcal{T} = \alpha_0\mathbf{n} - \epsilon d_0$ teğet düzlemler ailesinin zarf düzlemi hesaplınsın. Burada, $\mathbf{n} = (2uv^2 + 6uv + 2v^2 + 2u + 2v + 2)\mathbf{i} + (-2u^2v - 2uv^2 + 2uv + 2v^2 - 2u + 4v + 6)\mathbf{j} + (u^2v^2 - u^2 - v^2 + 2u - 3)\mathbf{k}$ olmak üzere Şekil 6.2’de, $\mathcal{T}$ düzlemlerinin zarfı olan $\mathcal{S}$ Pisagor normal

yüzeyi ve $u = -0.2, v = 0.2$ parametre değerlerine karşılık gelen $\mathcal{S}(-0.2, 0.2)$ noktası gösterilmiştir. Mavi düzlem yüzeyin bu noktasındaki teğet düzlemi gösterir.



Şekil 6.2 $\mathbf{k}$ düzleminin x hareketinin etkisiyle oluşan düzlemleri teğet düzlemi kabul eden rasyonel Pisagor normal zarf yüzeyi

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, Pisagor hodograf eğri ve Pisagor normal yüzey özellikleri bir rasyonel hareketin yörüngesi olarak elde edilmiştir. Pisagor hodograf eğri ve Pisagor normal yüzey özelliklerinin rasyonel olma durumunda rasyonel polinomların integrali genellikle rasyonel olmadığı veya rasyonel polinomlar her zaman integrallenebilir olmadığı için bir zorlukla karşılaşılmaktadır. Bu zorluğun aşılması için rasyonel eğri veya rasyonel yüzey bir rasyonel hareketin yörüngesi olarak bulunmuştur.

Rasyonel hareket polinomunun dual kuaterniyonlarda tanımlanan noktaya, doğruya ve düzleme etkisiyle oluşan yörüngeleri hesaplanmıştır. Bu yörüngelerin Pisagor hodograf eğrileriyle ve Pisagor normal yüzeylerle ilişkileri elde edilmiştir.

Hareketin noktaya etkisi bir yörünge eğrisi çizer. Bu eğrinin Pisagor hodograf eğri olma durumu bulunup bu yörünge eğrisi ile dual kuaterniyonlar yardımıyla Pisagor hodograf eğri tanımlanmıştır. Hareketin doğruya etkisiyle oluşan regle yüzeyinin açılabilir yüzey olması ile yörünge eğrisinin Pisagor hodograf eğri olması arasında önemli bir özellik bulunmuştur. Açılabilir yüzeyler (veya torsal yüzeyler) literatürde önemli bir yere sahiptir.

Hareketin doğruya etkisi yardımıyla birim dual matrislerin açık formu elde edilmiştir. Ayrıca, bu doğruları vida eksenini kabul eden hareketin her zaman rasyonel olduğu keşfedilmiştir ve bu kinematik hesaplamalarında büyük bir avantaja sahiptir.

Hareketin düzleme etkisiyle oluşan düzlemler ailesini normal düzlemler ailesi kabul eden eğrinin her zaman bir Pisagor hodograf eğri olduğu bulunmuştur. Ardından, hareket iki parametrelili olarak alınıp bir düzleme etki ettirildiğinde zarf yüzeyi Pisagor normal yüzey olarak elde edilmiştir.

Farklı geometrik nesnelerin bir rasyonel hareketin etkisiyle oluşan yörüngelerinin Pisagor hodograf eğrileriyle ve Pisagor normal yüzeyleriyle çeşitli ilişkileri bulunmuştur. Bu yöntemle, oldukça düşük dereceli polinom ve rasyonel ifadeler edilir.



KAYNAKLAR

- Abhyankar, S. S. (1988). What is the difference between a parabola and a hyperbola?. *The Mathematical Intelligencer*, 10(4), 36-43. doi:10.1007/BF03023744
- Albrecht, G., Beccari, C. V., Canonne, J. C., Romani, L. (2017). Planar Pythagorean-Hodograph B-Spline curves. *Computer Aided Geometric Design*, 57, 57-77. doi:10.1016/j.cagd.2017.09.001
- Albrecht, G., Beccari, C. V., Romani, L. (2020). Spatial Pythagorean-Hodograph B-Spline curves and 3D point data interpolation. *Computer Aided Geometric Design*, 80, 101868. doi: 10.1016/j.cagd.2020.101868
- Albrecht, G., Farouki, R. T. (1996). Construction of C2 Pythagorean - Hodograph interpolating splines by the homotopy method. *Advances in Computational Mathematics*, 5(4), 417-442. doi:10.1007/bf02124754
- Angeles, J. (1998). The application of dual algebra to kinematic analysis. .In J. Angeles ve E. Zakhariiev (Ed) **Computational methods in mechanical systems: Mechanism analysis, synthesis, and optimization** (Vol. 161, pp. 3-32). NATO ASI Series, Springer, Berlin, Heidelberg. doi:10.1007/978-3-662-03729-4_1
- Bayril, D., Selig, J. M. (2020). On plane-symmetric rigid-body motions. *Journal of Geometry*, 111(29). doi:10.1007/s00022-020-00543-6
- Bizzarri, M., Kadlec, K., Lávička, M., Šír, Z. (2023). B-Spline Pythagorean Hodograph curves in Clifford algebras. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 33(9). doi:10.1007/s00006-022-01255-7
- Bizzarri, M., Lávička, M., Šír, Z., Vršek, J. (2017). Hermite interpolation by piecewise polynomial surfaces with polynomial area element. *Computer Aided Geometric Design*, 51, 30-47. doi:10.1016/j.cagd.2017.02.003
- Bottema, O., Roth, B. (1979). **Theoretical kinematics**. North-Holland Publishing Company.
- Choi, H. I., Choi, S. W., Moon, H. P. (1997). Mathematical theory of medial axis transform. *Pacific Journal of Mathematics*, 181(1), 57-88. doi:10.2140/pjm.1997.181.57
- Choi, H. I., Han, C. Y. (2002). Euler-Rodrigues frames on spatial Pythagorean-hodograph curves. *Computer Aided Geometric Design*, 19(8), 603-620. doi:10.1016/S0167-8396(02)00165-6
- Choi, H. I., Lee, D. S., Moon, H. P. (2002). Clifford algebra, spin representation, and rational parameterization of curves and surfaces. *Advances in Computational Mathematics*, 17, 5-48. doi:10.1023/A:1015294029079
- Clifford, W. K. (1873). Preliminary sketch of bi-quaternions. *Proceedings of London Mathematical Society*, 4, 381-395. doi: 10.1112/plms/s1-4.1.381
- Dai, J. S. (2006). An historical review of the theoretical development of rigid body displacements from Rodrigues parameters to the finite twist. *Mechanism and Machine Theory*, 41(1), 41-52. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2005.04.004
- Dai, J. S. (2015). Euler-Rodrigues formula variations, quaternion conjugation and intrinsic connections. *Mechanism and Machine Theory*, 92, 144-152. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2015.03.004
- Dietz, R., Hoschek, J., Jiittler, B. (1993). An algebraic approach to curves and surfaces on the sphere and on other quadrics. *Computer Aided Geometric Design*, 10, 211-229. doi:10.1016/0167-8396(93)90037-4
- Do Carmo, M. (1976). **Differential geometry of curves and surfaces**. Prentice Hall.

- Eisenhart, L. P. (1960). *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*. Dover Publications.
- Fang, L., Peng, Y., Li, Y., Cao, J. (2022). Classification of polynomial minimal surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 96, 102106. doi:10.1016/j.cagd.2022.102106
- Farouki, R. T., Han, C. Y. (2006). Algorithms for spatial Pythagorean hodograph curves. In R. Klette ... J. Weickert (Ed.), *Geometric properties for incomplete data* (pp. 43-58). Springer Netherlands: Dordrecht. doi:10.1007/1-4020-3858-8_3
- Farouki, R. T. (1994). The conformal map $z \rightarrow z^2$ of the hodograph plane. *Computer Aided Geometric Design*, 11(4), 363-390. doi:10.1016/0167-8396(94)90204-6
- Farouki, R. T. (2008). *Pythagorean-Hodograph curves: Algebra and geometry inseparable, geometry and computing*. Springer, Berlin.
- Farouki, R. T. (2016). Construction of G1 planar Hermite interpolants with prescribed arc lengths. *Computer Aided Geometric Design*, 46, 64-75. doi:10.1016/j.cagd.2016.05.003
- Farouki, R. T., Gentili, G., Giannelli, C., Sestini, A., Stoppato, C. (2017). A comprehensive characterization of the set of polynomial curves with rational rotation-minimizing frames. *Advances in Computational Mathematics*, 43(1), 1-24. doi:10.1007/s10444-016-9473-0
- Farouki, R. T., Giannelli, C., Sestini, A. (2019). New developments in theory, algorithms, and applications for Pythagorean-Hodograph curves. In C. Giannelli ve H. Speleers (Ed.), *Advanced methods for geometric modeling and numerical simulation* (pp. 127-177). Springer International Publishing: Cham. doi:10.1007/978-3-030-27331-6_7
- Farouki, R. T., Knez, M., Vitrih, V., Žagar, E. (2021). Spatial C2 closed loops of prescribed arc length defined by Pythagorean-hodograph curves. *Applied Mathematics and Computation*, 391, 125653. doi:10.1016/j.amc.2020.125653
- Farouki, R. T., Knez, M., Vitrih, V., Žagar, E. (2022). On the construction of polynomial minimal surfaces with Pythagorean normals. *Applied Mathematics and Computation*, 435, 127439. doi:10.1016/j.amc.2022.127439
- Farouki, R. T., Sakalis, T. (1990). Pythagorean hodographs. *IBM Journal of Research and Development*, 34(5), 736-752. doi: 10.1147/rd.345.0736
- Farouki, R. T., Sakalis, T. (1994). Pythagorean-hodograph space curves. *Advances in Computational Mathematics*, 2, 41-66. doi:10.1007/BF02519035
- Farouki, R. T., Šír, Z. (2011). Rational Pythagorean-hodograph space curves. *Computer Aided Geometric Design*, 28(2), 75-88. doi:10.1016/j.cagd.2011.01.002
- Farouki, R. T., Šír, Z. (2020). Mapping rational rotation-minimizing frames from polynomial curves on to rational curves. *Computer Aided Geometric Design*, 78, 101833. doi:10.1016/j.cagd.2020.101833
- Fiorot, J. C., Gensane, T. (1994). Characterizations of the set of rational parametric curves with rational offsets. P.J. Laurent, A. Le Méhauté ve L.L. Schumaker (Ed), *Curves and surfaces in geometric design* (pp. 153-160). AK Peters, Wellesley, MA.
- Fulton, W., Weiss, R. (1969). *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry*. University of Michigan.
- Gfrerrer, A. (2000). Study's kinematic mapping-a tool for motion design. In J., Lenarčič ve M. M. Stanišić (Ed.), *Advances in robot kinematics* (pp. 7-16). Springer, Dordrecht. doi:10.1007/978-94-011-4120-8_1
- Hacısalıhoğlu, H. H. (2000). *Diferansiyel geometri II*. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi.

- Hacısalıhoğlu, H. H. (1983). *Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi*. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1998). *Lineer cebir, Cilt I*. Hacısalıhoğlu Yayınları.
- Hamilton, W. R. (1866). *Elements of quaternions*. London: Longmans, Green, & Company.
- Hao, Y. X. (2020). A new method to construct polynomial minimal surfaces. *Computational and Applied Mathematics*, 39(275). doi:10.1007/s40314-020-01324-2
- Hussein Tefvik Pacha. (1882). *Linear algebra*. A. H. Boyajian.
- Karakaş, B. (2024). *Diferansiyel geometri*. Palme Yayınevi.
- Kim, G. Il, Lee, S. (2008). Pythagorean-hodograph preserving mappings. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 216(1), 217-226. doi:10.1016/j.cam.2007.04.026
- Knez, M., Pelosi, F., Sampoli, M. L. (2022). Construction of G2 planar Hermite interpolants with prescribed arc lengths. *Applied Mathematics and Computation*, 426, 127092. doi:10.1016/j.amc.2022.127092
- Knez, M., Pelosi, F., Sampoli, M. L. (2024). Construction of G2 spatial interpolants with prescribed arc lengths. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 441, 115684. doi:10.1016/j.cam.2023.115684
- Kong, J. H., Lee, S., Kim, G. (2016). Minkowski Pythagorean-hodograph preserving mappings. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 308, 166-176. doi:10.1016/j.cam.2016.05.032
- Kosinka, J., Lávička, M. (2010). On rational Minkowski Pythagorean hodograph curves. *Computer Aided Geometric Design*, 27(7), 514-524. doi:10.1016/j.cagd.2010.06.003
- Kosinka, J., Lávička, M. (2014). Pythagorean hodograph curves: A Survey of recent advances. *Journal for Geometry and Graphics*, 18(1), 23-43.
- Kosinka, J., Šír, Z. (2010). C2 Hermite interpolation by Minkowski Pythagorean hodograph curves and medial axis transform approximation. *Computer Aided Geometric Design*, 27(8), 631-643. doi:10.1016/j.cagd.2010.04.005
- Kozak, J., Krajnc, M., Vitrih, V. (2016). A quaternion approach to polynomial PN surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 47, 172-188. doi:10.1016/j.cagd.2016.05.007
- Krasauskas, R. (2017). Unifying theory of Pythagorean-Normal surfaces based on geometric algebra. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27(1), 491-502. doi:10.1007/s00006-016-0691-9
- Kreyszig, E. (2013). *Differential geometry*. Courier Corporation.
- Kubota, K. K. (1972). Pythagorean triples in unique factorization domains. *The American Mathematical Monthly*, 79(5), 503-505. doi:10.1080/00029890.1972.11993074
- McCarthy, J. M. (1990). *Introduction to theoretical kinematics*. MIT press.
- Moon, H. P. (1999). Minkowski Pythagorean hodographs. *Computer Aided Geometric Design*, 16, 739-753. doi:10.1016/S0167-8396(99)00016-3
- Peternell, M., Pottmann, H. (1998). A Laguerre geometric approach to rational offsets. *Computer Aided Geometric Design*, 15(3), 223-249. doi:10.1016/S0167-8396(97)00024-1
- Peternell, M., Pottmann, H., Ravani, B. (1999). On the computational geometry of ruled surfaces. *Computer-Aided Design*, 31(1), 17-32. doi:10.1016/S0010-4485(98)00077-3

- Piegl, L., Tiller, W. (1997). **The NURBS book**. Springer.
- Pottmann, H. (1995a). Curve design with rational Pythagorean-hodograph curves. *Advances in Computational Mathematics*, 3, 147-170. doi:10.1007/BF03028365
- Pottmann, H. (1995b). Rational curves and surfaces with rational offsets. *Computer Aided Geometric Design*, 12(2), 175-192. doi:10.1007/BF03028365
- Pottmann, H., Wallner, J. (2001). **Computational line geometry**. Springer.
- Ravani, B., Wang, J. W. (1990). Computer aided geometric design of line constructs. **International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference**, Chicago, Illinois, USA.
- Richter-Gebert, J. (2011). **Perspectives on projective geometry: A guided tour through real and complex geometry**. Springer.
- Romani, L., Montagner, F. (2019). Algebraic-Trigonometric Pythagorean-Hodograph space curves. *Advances in Computational Mathematics*, 45(1), 75-98. doi:10.1007/s10444-018-9606-8
- Romani, L., Saini, L., Albrecht, G. (2014). Algebraic-Trigonometric Pythagorean-Hodograph curves and their use for Hermite interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, 40, 977-1010. doi: 10.1007/s10444-013-9338-8
- Samuel, A. E., McAree, P. R., Hunt, K. H. (1991). Unifying screw geometry and matrix transformations. *International Journal of Robotics Research*, 10(5), 454-472. doi:10.1177/027836499101000502
- Selig, J. (2005). **Geometrical foundations of robotics**. World Scientific Publishing Co Pte Ltd.
- Selig, J., Carricato, M. (2017). Persistent rigid-body motions and study's "Ribaucour" problem. *Journal of Geometry*, 108(1), 149-169. doi:10.1007/s00022-016-0331-5
- Selig, J. M. (2000). Clifford algebra of points, lines and planes. *Robotica*, 18(5), 545-556. doi:10.1017/S0263574799002568
- Šír, Z. (2020). Classification of planar Pythagorean hodograph curves. *Computer Aided Geometric Design*, 80, 101866. doi:10.1016/j.cagd.2020.101866
- Struik, D. J. (1950). **Lectures on classical differential geometry**. Addison-Wesley, Reading.
- Ueda, K. (1998). Pythagorean-hodograph curves on isothermal surfaces. **The Mathematics of Surfaces VIII**, Birmingham, UK.
- Veldkamp, G. R. (1976). On the use of dual numbers, vectors and matrices in instantaneous, spatial kinematics. *Mechanism and Machine Theory*, 11(2), 141-156. doi:10.1016/0094-114X(76)90006-9
- Wang, K., Dai, J. S. (2023). The dual Euler-Rodrigues formula in various mathematical forms and their intrinsic relations. *Mechanism and Machine Theory*, 181, 105184. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2022.105184
- Žagar, E. (2023). Arc length preserving G2 Hermite interpolation of circular arcs. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 424, 115008. doi:10.1016/j.cam.2022.115008
- Zhang, X., Zhu, L., Ding, H., Xiong, Y. (2012). Kinematic generation of ruled surface based on rational motion of point-line. *Science China Technological Sciences*, 55(1), 62-71. doi:10.1007/s11431-011-4609-4

EKLER

Ek 1. Plücker Doğrusunun Hesaplanması ve Yer değiştirme Algoritması

Girdi:	- a, b - İki nokta (vektör veya dual kuaterniyon formunda) - B yer değiştirmesi (dual kuaterniyon)
Başlangıç	- Lineer Cebir kütüphanesini yükle. - Dual kuaterniyonlar modülünü yükle.
Plücker prosedürünü tanımla:	- Eğer girdi vektör tipindeyse, iki noktadan geçen Plücker doğrusunu hesapla. - Değilse, girdileri vektöre çevir ve Plücker doğrusunu hesapla. - İki farklı konvansiyon kullanarak sonucu dönüştür.
a ve b noktalarını tanımla:	a ve b noktalarını dual kuaterniyonlarda tanımla.
P Plücker doğrusunu hesapla:	a ve b noktalarını kullanarak P'yi hesapla.
B yer değiştirmesini tanımla:	B yer değiştirmesini dual kuaterniyonları olarak tanımla.
Ba ve Bb noktalarını hesapla:	a ve b noktalarının B yer değiştirmesi altındaki görüntülerini hesapla.
P1 ve Q1 Plücker doğrularını hesapla:	- İki farklı formül kullanarak P1'i hesapla. - Ba ve Bb kullanarak Q1'i hesapla
P1 ve Q1'i vektör formuna çevir:	P1 ve Q1'i dual kuaterniyondan vektöre çevir.
Vektörleri sadeleştir:	P1 ve Q1 vektörlerini ilk elemanlarına bölerek sadeleştir.
Sonuçları karşılaştır:	P1 ve Q1'in eşit olup olmadığını kontrol et (Study şartı altında).
Çıktı:	P1 ve Q1 Plücker doğruları ve eşitlik durumu.



ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Bahar KALKAN TAŞDEMİR

Eğitim Bilgileri

Lisans :
Üniversite : Fatih Üniversitesi
Fakülte : Fen-Edebiyat Fakültesi
Bölüm : Matematik
Mezuniyet Yılı : 2014

Yüksek Lisans :
Üniversite : Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi
Enstitü : Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı : Matematik
Mezuniyet Yılı : 2018

Akademik Yayınlar

- Kalkan, B., Baydaş, Ş., Karakaş, B. (2020). Kinematic analysis and MATLAB applications of 2-3RRR Mechanism Chain. *Journal of Informatics & Mathematical Sciences*, 12(2). doi:10.26713/jims.v12i2.1099
- Kalkan, B., Li, Z., Schröcker, H. P., Siegele, J. (2022). The Study variety of conformal kinematics. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 32(4), 44. doi:10.1007/s00006-022-01227-x
- Kalkan, B., Scharler, D. F., Schröcker, H. P., Şir, Z. (2022). Rational framing motions and spatial rational Pythagorean hodograph curves. *Computer Aided Geometric Design*, 99, 102160. doi:10.1016/j.cagd.2022.102160

VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih/...../.....

Tez Başlığı: Pisagor Hodograf Eğriler ve Pisagor Normal Yüzeyler Üzerinde Rasyonel Hareketlerin Geometrisi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın, kapak sayfası, giriş, ana bölümler ve sonuç bölümlerinden oluşan toplam (.....) sayfalık kısmına ilişkin,/...../..... tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre tezimin benzerlik oranı %..... (.....) dır.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit match size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Bahar KALKAN TAŞDEMİR

Öğrenci No: 17910002185

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Statüsü: () Yüksek lisans () Doktora

DANIŞMAN
UYGUNDUR

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR