T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

z-KAPALI ALT MODÜLLER ÜZERİNE GENELLEMELER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YEŞİM AYVAZOĞLU

DENİZLİ, TEMMUZ-2024

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

z-KAPALI ALT MODÜLLER ÜZERİNE GENELLEMELER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YEŞİM AYVAZOĞLU

DENİZLİ, TEMMUZ-2024

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

YEŞİM AYVAZOĞLU

ÖZET

z-KAPALI ALT MODÜLLER ÜZERİNE GENELLEMELER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
YEŞİM AYVAZOĞLU
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. CANAN CELEP YÜCEL
DENİZLİ, TEMMUZ-2024

Bu çalışmada literatürde mevcut CS-modül sınıfının genellemeleri olan ve özel olarak CLS, C_{11}, C_{11}^z, G-extending, G^z-extending, FI-extending, PI-extending olarak adlandırılan modül sınıfları ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca G^z-extending modüllerde z-kapalı alt modüller yerine projeksiyon değişmez z-kapalı alt modüller alınarak CLS ve G-extending modüllerin genellemesi olan yeni bir modül sınıfı elde edilmiştir. ZPG-modül adı verilen bu modüllerin alt modüllerine, dik toplananlarına, dik toplamlarına ve injektif zarfına vb. taşınıp taşınmadığı araştırılmıştır. Araştırmalar neticesinde elde edilen bulgular, CS-modüller ve genellemeleri üzerine çalışma yapmak isteyen araştırmacılara yol göstermek adına derlenerek literatüre katkı sağlanması amaçlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: CS-modüller, CLS-modüller, G-extending modüller, PI-extending modüller, z-kapalı alt modüller, zp-alt modüller, C_{11}^z-modüller, G^z-extending modüller.

ABSTRACT

GENERALIZATIONS ON z-CLOSED SUBMODULES
MSC THESIS
YEŞİM AYVAZOĞLU
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. CANAN CELEP YÜCEL)
DENİZLİ, JULY-2024

In this study, the module classes which are generalizations of the CS-module class existing in the literature and specifically named as CLS, C_{11}, C_{11}^{z}, G-extending, G^{z}-extending, FI-extending, PI-extending were examined in detail. Also, in G^{z}-extending modules, instead of z-closed submodules, projection invariant z-closed submodules were taken, and a new module class, which is a generalization of CLS and G-extending modules, was obtained. These modules, named ZPG-modules, were investigated whether their submodules, direct sums, direct summands, and injective hulls were transferred. The findings obtained through the research were compiled to contribute to the literature with the aim of guiding researchers who want to work on CS-modules and their generalizations.

KEYWORDS: CS-modules, CLS-modules, G-extending modules, PI-extending modules, z-closed submodules, zp-submodules, C_{11}^{z}-modules, G^{z}-extending modules.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{X \leq M}$	**:**	X, M'nin alt modülü
$\boldsymbol{X \leq_e M}$	**:**	X, M'nin essential alt modülü
$\boldsymbol{X \leq_c M}$	**:**	X, M'nin komplement alt modülü
$\boldsymbol{X \leq_d M}$	**:**	X, M'nin dik toplananı
$\mathbf{Soc}\boldsymbol{M}$	**:**	M'nin socle kümesi
$\boldsymbol{Z(M)}$	**:**	M'nin singular (tekil) alt modülü
$\boldsymbol{Z_2(M)}$	**:**	M'nin ikinci singular (tekil) alt modülü
$\mathbf{End}(\boldsymbol{M_R})$	**:**	M_R modülünün endomorfizmalar halkası
$\mathbf{Hom}(\boldsymbol{N, M})$	**:**	N'den M'ye olan homomorfizmaların kümesi
$\boldsymbol{E(M)}$	**:**	M'nin injective hull'ı (injektif zarfı)
$\boldsymbol{\tilde{E}(M)}$	**:**	M'nin rational hull'ı (rasyonel zarfı)

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi birikimi ve deneyimleriyle bana yol gösteren, desteğini her zaman hissettiren saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Canan CELEP YÜCEL'e mükemmel rehberliği, değerli önerileri, sabırlı ve motivasyon dolu konuşmaları için sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Kendisinden yüksek lisans eğitimim sırasında ders alma şerefine nail olduğum, destek ve yardımlarını benden hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Adnan TERCAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca benim için maddi ve manevi her türlü desteği sağlayan, güvenen, sevgilerinden ve dualarından güç aldığım anneme ve anneanneme teşekkürlerimi sunarım.

Yeşim AYVAZOĞLU

1. GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Klasik cebirde modül kavramı, matematiğin biçimsel temellerinin oluşturulmasına önemli katkılarda bulunan Alman matematikçi David Hilbert tarafından 1890 yılında tanımlanmıştır. Aynı yıl içerisinde Hilbert tarafından kanıtlanan syzygy teoremi, bir idealin veya daha genel olarak bir modülün üreteçleri arasındaki bağıntılar ile ilgilidir. Daha sonra Emma Noether tarafından karakterize edilen bu kavram, vektör uzaylarının bir genellemesidir yani her vektör uzayı aynı zamanda bir modüldür. Aralarındaki en önemli farklılıklardan biri, vektör uzayında skalerin cisimden modülde ise halkadan alınmasıdır. Halkanın idealleri, o halka üzerinde bir modül yapısına sahip olduğundan modüller halka ve ideal kavramlarının karakterizasyonlarında kullanılmakta olup araştırma sahası olarak güncelliğini korumaktadır.

Modül teoride önemli bir yeri olan ve bu tez konusunun miladını oluşturan CS-modül kavramının temelleri, John von Neumann'ın 1936 yılına ait çalışmaları ile atılmıştır (von Neumann 1936a,b). Utumi bu çalışmalardan yola çıkarak regüler bir halkayı, temel sol ideallerin latisi üst sürekli ise sürekli olacak şekilde tanımlamıştır. Utumi (1961) çalışmasında ise birebir bir halka üzerinde C_1, C_2 ve C_3 olarak adlandırılan üç koşul tanımlamıştır. Regüler halka ile CS-modül (extending) kavramı arasında bir bağlantı olduğunu kanıtlayarak CS-modüllerin gelişimine katkıda bulunmuştur (Utumi 1965). Jeremy, Takeuchi ve Mohamed-Bouhy, Jeremy (1971, 1974), Mohamed ve Bouhy (1977), Takeuchi (1972) çalışmalarında elde edilen kavramları modüllere taşımıştır. Goldie, bölüm halkaları üzerine yaptığı Goldie (1958), Goldie (1960) çalışmalarında komplementleri göz önünde bulundurmuştur.

Goldie'nin bu yaklaşımı Hajarnavis'in sol CS-halkalarını düşünmesi ve Chatters ile Chatters ve Hajarnavis (1977) yi yayınlaması için ilham kaynağı olmuştur.

Teorinin gelişiminin farklı doğası nedeniyle, her yazar farklı bir terminoloji benimsemiştir. Örneğin Harada "extending modül" terimini kullanmayı tercih ederken Chatters ve Hajarnavis "complements are summands" için CS kısaltmasını, Utumi, Mohamed ve Müller ise (C_1) gösterimini kullanmışlardır.

CS-modül, modül teoride tanımlanan birçok modül sınıfından biridir ve genelleştirilmiş modül sınıfları ile birlikte hala üzerinde yapılan çalışmalar devam etmektedir. CS-modülün bu çalışmada incelenen genellemeleri CLS, C_{11}, C_{11}^z, G-extending, G^z-extending, FI-extending ve PI-extending modüllerdir. Tercan, (Tercan 1995b) makalesinde CLS-modülleri tanımlamış ve CLS-modüllerin sonlu dik toplamlarının ne zaman CLS-modül olduğunu incelemiştir. Smith ve Tercan (1993), Smith ve Tercan (2004) makalelerinde C_{11}-modül ayrıntılı olarak incelenmiştir. 2008 yılında Yücel, doktora tezi ile literatüre katkıda bulunmuştur. 2009 yılında Birkenmeier, Tercan ve Akalan G-extending modülü tanımlamışlardır (Akalan ve diğ. 2009). Birkenmeier ve Tercan'ın, Birkenmeier ve Tercan (2015) çalışmasının üzerine Kara ve Tercan, Kara ve Tercan (2018) de C_{11}^z-modülleri tanımlayarak yararlı sonuçlar elde etmişlerdir. 2022 yılında Tercan, Yaşar ve Yücel, G^z-extending modülleri literatüre kazandırmışlardır (Tercan ve diğ. 2022). Birkenmeier ve diğ. (2001), Birkenmeier ve diğ. (2002a,b), FI-extending modüller üzerine yapılan önemli çalışmalardandır. PI-extending modüller, Birkenmeier, Tercan ve Yücel tarafından tanımlanmıştır (Birkenmeier ve diğ. 2014).

1.2 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Halka cebirin en önemli temel kavramlarındandır ve modüller üzerine çalışmak halkanın iç yüzünü anlamayı sağlar. CS-modüller ve genellemeleri üzerine çalışma yapmak isteyen araştırmacılara yol gösterici olacak bulguları bir arada vermek amaçlanmıştır. Çalışmanın amacına hizmet edecek kavramlardan özellikle essential (esas) ve komplement (tümleyen) alt modüller tanıtılmış ve ispatlara da yer verilmiştir.

Bu tezde z-kapalı alt modüller ile elde edilen genellemeler ve bu genellemeler ile ilgili elde edilmiş olan tüm özellikler ve sonuçlar, bunların yanı sıra bu modül sınıflarının birbirleri ile olan ilişkileri incelenmiştir. CS-modüllerin genellemelerinden biri olan G-extending modüller araştırılıp bu modüllerde alt modül yerine özel olarak z-kapalı alt modüller alınarak elde edilen G^z-extending modül sınıfı üzerinde titizlikle durulmuştur. Bu çalışmada G^z-extending modüllerde z-kapalı alt modüller yerine projeksiyon değişmez z-kapalı alt modüller alınarak yeni bir modül sınıfı tanımlanmıştır. Elde edilen yeni modül sınıfı ile literatüre katkıda bulunulması hedeflenmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlara, bunlarla ilgili bazı özelliklere ve çalışmanın miladını oluşturan CS-modül sınıfına yer verilmiştir. Bu bölüm Hungerford (1980), Kasch (1982), Takıl (2003), Takıl (2008), Tercan ve Yücel (2016), Taştan (2021) kaynaklarından yararlanılarak oluşturulmuştur.

2.1 Ön Bilgiler

Teorem 2.1.1 (Zorn Lemma). *Boş olmayan A kısmi sıralı kümesinin her zincirinin A da bir üst sınırı varsa, A nın en az bir maksimal elemanı vardır.*

Teorem 2.1.2 (Modüler Kuralı). *M bir R-modül, $A, B, C \leq M$ olsun. Bu durumda*

$$(A \cap B) + (A \cap C) \leq A \cap (B + C)$$

dir. Eğer $B \leq A$ ise

$$A \cap (B + C) = B + (A \cap C)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $x \in A \cap (B + C)$ olsun. Bu durumda $x \in A$ ve $x \in B + C$ olup $x = b + c$ olacak şekilde $b \in B$ ve $c \in C$ vardır. $B \leq A$ olduğundan $c = x - b \in A \cap C$ olur. Buradan $x = b + c \in B + (A \cap C)$ dir. O halde

$$A \cap (B + C) \subseteq B + (A \cap C) \tag{2.1}$$

bulunur. Tersine, $B + (A \cap C) \leq B + C$ ve $B + (A \cap C) \leq B + A \leq A$ olduğundan

$$B + (A \cap C) \subseteq A \cap (B + C) \tag{2.2}$$

bulunur. Böylece (2.1) ve (2.2) den

$$A \cap (B + C) = B + (A \cap C)$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 2.1.3. *M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $M = N \oplus K$ ($N + K = M$ ve $N \cap K = 0$) olacak şekilde bir $K \leq M$ alt modülü var ise N ye M nin* ***dik toplananı*** *denir ve $N \leq_d M$ ile gösterilir. $M = 0 \oplus M$ olduğundan M ve 0 alt modüllerine M nin* ***aşikâr dik toplananları*** *denir.*

Tanım 2.1.4. *M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. Eğer M nin sıfır ve kendisinden başka hiçbir alt modülü yoksa M ye* ***basit (simple) modül*** *denir.*

Tanım 2.1.5. *M bir R-modül olsun. M nin her alt modülü bir dik toplanan ise M modülüne* ***yarı-basit (semisimple) modül*** *denir.*

Eğer M bir basit modül ise M nin alt modülleri 0 ve kendisidir. $M = 0 \oplus M$ olduğundan M yarı-basit modül olur. Böylece basit modüller aynı zamanda yarı-basit modüllerdir. Diğer yandan, bu tanıma göre 0 modülü yarı-basittir fakat Tanım 2.1.4 den 0 modülü basit değildir.

Tanım 2.1.6. *M bir R-modül olsun. M nin bütün basit (minimal) alt modüllerinin toplamına* ***M nin socle'ı*** *denir ve $Soc(M)$ ile gösterilir.*

Eğer M nin basit alt modülü yoksa $Soc(M) = 0$ dır. Ayrıca $Soc(M)$ bir yarı-basit modüldür.

Tanım 2.1.7. *M bir R-modül olsun. M nin kendisinden ve sıfırdan başka dik toplananı yoksa M ye* ***ayrıştırılamaz (indecomposable) modül*** *denir.*

Tanım 2.1.8. *P bir sağ R-modül olsun. $f : P \to B$ bir R-homomorfizma ve $g : A \to B$ bir epimorfizma olmak üzere $gh = f$ olacak biçimde bir $h : P \to A$ homomorfizması varsa, P modülüne* ***projektif modül*** *denir.*

Tanım 2.1.9. *M ve B sağ R-modülleri için $A \leq B$ ve $f : A \to M$ bir homomorfizma olmak üzere $g|_A = f$ olacak biçimde bir $g : B \to M$ dönüşümü varsa, M modülüne* ***injektif modül*** *denir.*

$M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ modülü verilsin. $M_{\mathbb{Z}}$ injektif değildir. Çünkü $f : 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dönüşümü bir $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dönüşümüne genişletilemez. Bunu göstermek için aksini kabul edelim, yani $g|_{2\mathbb{Z}} = f$ olsun. Bu durumda $1 = f(2) = g(2) = g(1) + g(1) \ \Rightarrow g(1) = 1/2$ olup bir çelişki elde edilir. O halde $M_{\mathbb{Z}}$ injektif değildir.

2.2 Özel Tipteki Alt Modüller

Tanım 2.2.1. *M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer her $0 \neq K \leq M$ için $N \cap K \neq 0$ oluyorsa veya buna denk olarak bir $L \leq M$ için $N \cap L = 0$ olduğunda $L = 0$ oluyorsa N ye M nin* ***essential (büyük, geniş) alt modülü*** *ya da M ye N nin* ***essential genişlemesi (essential extension)*** *denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir.*

Örneğin; $M_R = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünün sıfırdan farklı her alt modülü M_R de essential olarak kapsanır.

Ayrıca bu tanıma göre her M modülü kendisinin bir essential alt modülüdür. M modülünün kendisinden farklı essential alt modülüne **öz essential alt modül** denir.

Önerme 2.2.2. *M bir modül olsun. Bu durumda;*

(i) *$N \leq M$ olsun. $N \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul her $0 \neq m \in M$ için $N \cap mR \neq 0$ olmasıdır.*

(ii) *$K \leq N \leq M$ olmak üzere $K \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul $K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ olmasıdır.*

(iii) *$N \leq_e M$ ve $K \leq M$ ise $N \cap K \leq_e K$ dır.*

(iv) *$1 \leq i \leq t$ olmak üzere her $t \geq 1$ için $N_i \leq_e K_i$ ise $(N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_t) \leq_e (K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_t)$ dır.*

(v) *$K \leq N \leq M$ olmak üzere $N/K \leq_e M/K$ ise $N \leq_e M$ dir.*

(vi) *Bir $m \in M$ için $N \leq_e M$ ise $m^{-1}N \leq_e R_R$ dir.*

(vii) *Her sıfırdan farklı indis kümesi I için, $i \in I$ olmak üzere $N_i \leq_e M_i$ olması için gerek ve yeter koşul $\bigoplus\limits_{i\in I} N_i \leq_e \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ olmasıdır.*

(viii) *$f : M \to N$ bir homomorfizma ve $B \leq_e N$ ise $f^{-1}(B) \leq_e M$ dir.*

İspat.

(i) İlk olarak $N \leq_e M$ ve $0 \neq m \in M$ olsun. Bu durumda $N \cap mR \neq 0$ olur.

Tersine $0 \neq m \in K \leq M$ için $N \cap mR \neq 0$ olsun. O halde $0 \neq mr \in N \cap K$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Böylece $N \leq_e M$ elde edilir.

(ii) İlk olarak $K \leq_e M$ ve $0 \neq X \leq N$ olsun. Bu durumda $0 \neq X \leq M$ olur. $K \leq_e M$ olduğundan $K \cap X \neq 0$ dır. Her $0 \neq X \leq N$ için $K \cap X \neq 0$ olduğundan $K \leq_e N$ dir. Şimdi $0 \neq T \leq M$ olsun. Bu durumda $0 \neq K \cap T \leq N \cap T$ dir. Her $0 \neq T \leq M$ için $N \cap T \neq 0$ olduğundan $N \leq_e M$ dir.

Tersine $K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ olsun. $0 \neq Z \leq M$ için $0 \neq N \cap Z \leq N$ dir. $K \leq_e N$ olduğundan $0 \neq K \cap (N \cap Z) = K \cap Z$ dir. Her $0 \neq Z \leq M$ için $K \cap Z \neq 0$ olduğundan $K \leq_e M$ dir.

(iii) $N \leq_e M$, $K \leq M$ ve $0 \neq S \leq K$ olsun. $(N \cap K) \cap S = N \cap S \neq 0$ dır. Her $0 \neq S \leq K$ için $(N \cap K) \cap S \neq 0$ olduğundan $(N \cap K) \leq_e K$ dır.

(iv) $t = 2$ için $N_1 \leq_e K_1$ ve $N_2 \leq_e K_2 \Longrightarrow (N_1 \cap N_2) \leq_e (K_1 \cap K_2)$ olduğunu görelim. $X \leq K_1 \cap K_2$ olsun. Kabul edelim ki $(N_1 \cap N_2) \cap X = 0$ olsun. Bu durumda

$$(N_1 \cap N_2) \cap X = N_1 \cap (N_2 \cap X) = 0 \Longrightarrow N_2 \cap X = 0 \Longrightarrow X = 0$$

bulunur. O halde $(N_1 \cap N_2) \leq_e (K_1 \cap K_2)$ dir. Tümevarım yöntemi ile genel durum elde edilir.

Bu özellik sonlu olmayan bir indeks kümesi için doğru değildir. Örneğin $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünü göz önüne alalım. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z}$ dir. Fakat

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} n\mathbb{Z} = 0 \not\leq_e \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$$

dir.

(v) $X \leq M$ ve $X \cap N = 0$ olsun. Eğer $X \leq K$ ise

$$X \cap N = X = 0$$

olur. Eğer $K < X$ ise

$$0 \neq \frac{X}{K} \leq \frac{M}{K}$$

dır. Şimdi $\frac{X}{K} \cap \frac{N}{K} = \overline{0}$ olsun. $\frac{N}{K} \leq_e \frac{M}{K}$ olduğundan $\frac{X}{K} = \overline{0}$ yani $X = K$ dır. Bu da $K < X$ olmasıyla çelişir. O halde $N \leq_e M$ dir.

(vi) Öncelikle $m^{-1}N \leq R_R$ olduğunu görelim. $0 \in R$ ve $m0 = 0 \in N$ olduğundan $m^{-1}N \neq \emptyset$ dir. $r_1, r_2 \in m^{-1}N$ ve $s \in R$ alalım.

$$m(r_1 - r_2) = mr_1 - mr_2 \in N$$

olduğundan $(r_1 - r_2) \in m^{-1}N$ dir.

$$(mr_1)s = m(r_1 s) \in N$$

olduğundan $r_1 s \in m^{-1}N$ dir. O halde $m^{-1}N \leq R_R$ dir. $N \leq_e M$, $m \in M$ ve $0 \neq I \leq R_R$ olsun. Eğer $mI = 0$ ise

$$I \cap m^{-1}N = I \neq 0$$

dır. Eğer $mI \neq 0$ ise
$N \leq_e M$ olduğundan $mI \cap N \neq 0$ dır. Bu durumda bir $0 \neq r \in I$ için $mr \in N$ olur.

$$mr \in N \Longrightarrow r \in m^{-1}N$$

olduğundan $I \cap m^{-1}N \neq 0$ dır. Sonuç olarak $m^{-1}N \leq_e R_R$ dir.

(vii) Keyfi $0 \neq m \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ alalım. $m = m_{i_1} + \cdots + m_{i_j}$; $m_{i_j} \in M_{i_j}(j = 1, \ldots, n)$ biçiminde yazılabilir. n ye göre tümevarımla $0 \neq mr \in \bigoplus_{i\in I} N_i$ olacak biçimde $r \in R$ olduğunu gösterelim. $n = 1$ için açıktır. $n = k$ için $N_i \leq_e M_i (1 \leq i \leq k) \Longrightarrow \bigoplus_{i\in I} N_i \leq_e \bigoplus_{i\in I} M_i$ nin doğru olduğunu varsayarak $n = k+1$ için doğruluğunu görelim; $m^{'} = m_{i_1} + \cdots + m_{i_k}$ için (i) den

$$0 \neq m^{'} s \in N_{i_1} \oplus \cdots \oplus N_{i_k}$$

olacak biçimde $s \in R$ vardır. Eğer $m_{i_{k+1}} s \in N_{i_{k+1}}$ ise

$$ms \in \bigoplus_{i\in I} N_i \text{ ve } N_{i_{k+1}} \cap (N_{i_1} \oplus \cdots \oplus N_{i_k}) = 0$$

olduğundan $ms \neq 0$ dır. Eğer $m_{i_{k+1}} s \notin N_{i_{k+1}}$ ise $N_{i_{k+1}} \leq_e M_{i_{k+1}}$ olduğundan (i) den $0 \neq (m_{i_{k+1}} s)t \in N_{i_{k+1}}$ olacak şekilde bir $t \in R$ vardır. O halde $r = st \in R$ için $mr \in \bigoplus_{i\in I} N_i$ ve $\bigoplus_{i\in I} N_i$ dik toplam olduğundan $mr \neq 0$ dır. Sonuç olarak $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq_e \bigoplus_{i\in I} M_i$ dir.

Tersine $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq_e \bigoplus_{i\in I} M_i$ ve $N_1 \nleq_e M_1$ olsun. O halde $0 \neq L_1 \leq M_1$ için $N_1 \cap L_1 = 0$ dır. Bir $l_1 \in (\bigoplus_{i\in I} N_i) \cap L_1$ alalım. Bu durumda $l_1 = n_1 + \cdots + n_n$ olacak şekilde $n_i \in N_i$ vardır.

$$l_1 - n_1 = n_2 + \cdots + n_n \in M_1 \cap (M_2 \oplus M_3 \oplus \cdots \oplus M_n) = 0$$

olduğundan $l_1 = n_1 \in L_1 \cap N_1 = 0$ dır. Buradan $(\bigoplus_{i\in I} N_i) \cap L_1 = 0$ dır. $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq_e \bigoplus_{i\in I} Mi$ ve $L_1 \leq M_1 \leq M$ olduğundan $L_1 = 0$ dır. Bu da $N_1 \nleq_e M_1$ olmasıyla çelişir. O halde her $i \in I$ için $N_i \leq_e M_i$ dir.

(viii) $f : M \to N$ bir homomorfizma ve $B \leq_e N$ olsun. $f^{-1}(B) \cap U = 0$ olacak biçimde bir $U \leq M$ alalım. $x \in B \cap f(U)$ için $x = f(u)$ olacak biçimde $u \in U$ vardır. $x = f(u) \in B$ olduğundan $u \in U \cap f^{-1}(B) = 0$ dır. Bu durumda $x = f(u) = f(0) = 0$ dır. Yani $B \cap f(U) = 0$ dır. $B \leq_e N$ olduğundan $f(U) = 0$ dır. O halde

$$U \leq Kerf = f^{-1}(0) \leq f^{-1}(B)$$

olduğundan $U = f^{-1}(B) \cap U = 0$ dır.

Tanım 2.2.3. *Herhangi bir M modülü için $Soc(M_R) = \bigcap\{N : N \leq_e M\}$ dir.*

Tanım 2.2.4. *M sıfırdan farklı R-modül olsun. Eğer her $0 \neq U \leq M$ için $U \leq_e M$ oluyorsa M ye **uniform (düzgün) modül** denir. Örneğin, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ bir düzgün modüldür.*

Tanım 2.2.5. *M bir R-modül ve $L \leq M$ olsun. $K \cap L = 0$ özelliğine göre maksimal olan bir K alt modülüne L nin M deki **komplementi** denir.*

Tanım 2.2.5 deki K alt modülü tek olmak zorunda değildir. Aşağıda verilen önerme, bir M modülündeki her alt modülün bir komplementinin var olduğunu ifade eder. Bu da komplement alt modülleri oldukça kullanışlı hale getirmektedir.

Önerme 2.2.6. *M bir modül olmak üzere M nin L ve N alt modülleri için $N \cap L = 0$ olsun. Bu durumda L nin M de bir K komplementi vardır ki, $N \subseteq K$ dır.*

İspat. $S = \{X \leq M : N \leq X$ ve $X \cap L = 0\}$ kümesini tanımlayalım. $N \in S$ olduğundan $S \neq \emptyset$ dır. $\{X_i : i \in I\}$, S de bir zincir olsun. S tam sıralıdır. $U = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ alalım. Herhangi iki $X_i, X_j \in S$ için $X_i \subseteq X_j$ ya da $X_j \subseteq X_i$ olduğundan U bir alt modüldür. Her $i \in I$ için $N \leq X_i$ olduğundan $N \leq \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ dir. Her $i \in I$ için $X_i \cap L = 0$ olduğundan $\left(\bigcup\limits_{i \in I} X_i\right) \cap L = 0$ olup $U \in S$ olur. Yani U, $\{X_i : i \in I\}$ zincirinin bir üst sınırıdır. Böylece Zorn Lemma dan S nin bir maksimal elemanı vardır. Bu K ile gösterilirse, $K \cap L = 0$ olduğundan K, L nin M deki bir komplementidir. Ayrıca S nin tanımından $N \subseteq K$ dır.

Aşağıda ispatı ile verilen önerme, bir modülde essential alt modüller üretmek için bir teknik sağlamaktadır.

Önerme 2.2.7. *M bir modül ve L, M nin bir alt modülü ve K, L nin M de herhangi bir komplementi olsun. Bu durumda $K \oplus L \leq_e M$ dir.*

İspat. $N \leq M$ ve $(K \oplus L) \cap N = 0$ alalım. $K \subseteq K + N$ olduğu açıktır. Bu durumda K, L nin M de herhangi bir komplementi olduğundan $(K+N) \cap L \neq 0$ olur. Buradan $n \in N$ ve $0 \neq x \in L$ için $x = k + n$ olacak şekilde bir $k \in K$ vardır. Böylece $n = x - k \in (K \oplus L) \cap N = 0$ olduğundan $n = 0$ elde edilir. $x = k \in K \cap L = 0$ ise $x = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $K = K + N$ dir. Böylece $N \leq K$ ise $N \leq K \oplus L$ olur. $(K \oplus L) \cap N = N = 0$ olduğundan $N = 0$ dır. Dolayısıyla $K \oplus L \leq_e M$ elde edilir.

Tanım 2.2.8. *M bir modül ve K, M nin bir alt modülü olsun. Eğer K, M de herhangi bir alt modülün komplementi ise K ya M de bir* ***komplement alt modül*** *denir ve $K \leq_c M$ ile gösterilir.*

0 ve M modülünün M nin komplementi olduğu açıktır. Fakat dik toplanan olan aşikar alt modüller haricindeki her dik toplanan için daha genel olarak aşağıdaki sonuç verilmiştir.

Sonuç 2.2.9. *Bir M modülünün her dik toplananı M nin bir komplement alt modülüdür.*

Gerçekten; $M = A \oplus B$, $A \leq N \leq M$ ve $N \cap B = 0$ olsun. Modüler kuralından

$$N = N \cap M = N \cap (A \oplus B) = A \oplus (N \cap B) = A$$

dır. Fakat Sonuç 2.2.9 da verilen önermenin tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin; F bir cisim ve V de F üzerinde boyutu 2 olan bir vektör uzayı olsun. $V = v_1F \oplus v_2F$ alalım. Bu durumda $R = \left\{ \begin{bmatrix} f & v \\ 0 & f \end{bmatrix} : f \in F, v \in V \right\}$ matris işlemleri ile birimli, değişmeli ve ayrıştırılamaz bir halkadır. $I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & v_1f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : f \in F \right\} \leq R_R$ ve $J = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & v_2f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : f \in F \right\} \leq R_R$ olmak üzere I, J nin (benzer olarak J, I nın) komplementidir. Yani $I \leq_c R_R$ dir. Ancak I, R_R nin bir dik toplananı değildir.

Önerme 2.2.10. *M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda $N \leq_e K$ olacak şekilde bir $K \leq_c M$ vardır.*

İspat. N', M de N nin bir komplementi olsun. Böylece $N' \cap N = 0$ dir ve N' nün bir K komplementi vardır ve Önerme 2.2.6 dan $N \subseteq K$ dır. $0 \neq L \leq K$ olsun. $N' \subseteq L + N'$ olduğundan $(L + N') \cap N \neq 0$ olur. Böylece $0 \neq n \in (L + N') \cap N$ ise $n \in (L + N')$ ve $n \in N$ olur. $x \in L, n' \in N'$olmak üzere $n = x + n'$ dır. Buradan $n' = n - x \in N' \cap K = 0$ olduğundan $n' = 0$ dır. Böylece $n = x \in N \cap L$ olup $N \cap L \neq 0$ olur. Yani $N \leq_e K$ elde edilir.

Önerme 2.2.10 da varlığı ispatlanan K alt modülüne N nin M deki **kapanışı (closure)** denir.

Tanım 2.2.11. *M bir R-modül olsun. Eğer M nin her alt modülü M de bir tek kapanışa sahip ise M ye **tek kapanışa sahip modül** ya da kısaca **UC-modül** denir.*

Düzgün, yarı-basit ve nonsingüler modülleri UC-modüllere örnek olarak verebiliriz (Goodearl 1976).

Aşağıdaki önerme komplementliğin karakterizasyonunu ifade eder.

Önerme 2.2.12. *M bir modül ve K, M nin bir alt modülü olsun. Bu durumda $K \leq_c M$ olması için gerek ve yeter koşul $K \leq_e L \leq M$ ise $K = L$ olmasıdır.*

İspat. Varsayalım ki $K \leq_c M$ ve $K \leq_e L \leq M$ olsun. Bu durumda K, X in M de bir komplementi olacak şekilde $X \leq M$ vardır. Böylece $K \cap X = 0$ olur. $0 = K \cap X \leq_e L \cap X$ olduğundan $L \cap X = 0$ dır. K, $K \cap X = 0$ koşulu altında maksimal olduğundan $K = L$ olur.
Tersine, $K \leq M$ olduğundan Önerme 2.2.10 dan K nın M de bir L kapanışı vardır. Yani $K \leq_e L \leq_c M$ dır. $K = L$ olduğundan $K \leq_c M$ dir.

Önerme 2.2.13. *M bir modül ve $K, N \leq M$ olsun. Eğer $K \leq_c N$ ve $N \leq_c M$ ise $K \leq_c M$ dir.*

İspat. $K \leq_c N$ ve $N \leq_c M$ olduğunu kabul edelim. Buradan bir $K' \leq N$ için K, K' nün N deki komplementi ve bir $N' \leq M$ için de N, N' nün M deki komplementi olur. $x \in K \cap (K^{'} + N^{'})$ alalım. $k^{'} \in K^{'}$, $n^{'} \in N^{'}$ için $x = k^{'} + n^{'}$ dür. $x - k^{'} = n^{'} \in N^{'} \cap N = 0$ olur. Böylece $x = k^{'} \in K^{'} \cap K = 0$ olduğundan $K \cap (K^{'} + N^{'}) = 0$ elde edilir. Varsayalım ki, $K \leq_e L \leq M$ olsun. O halde $0 = K \cap (K^{'} + N^{'}) \leq_e L \cap (K^{'} + N^{'})$ olup $L \cap (K^{'} + N^{'}) = 0$ dır. Buradan $[N \cap (L + N^{'})] \cap K^{'} = (N \cap K^{'}) \cap (L + N^{'}) = K^{'} \cap (L + N^{'}) = 0$ olur. Fakat $K \subseteq N$ ve $K \subseteq L + N^{'}$ olduğundan $K \subseteq N \cap (L + N^{'})$ dır. K, $K^{'}$ nün N deki komplementi olduğundan $K \cap K^{'} = 0$ koşulu altında $K^{'}$ maksimal alt modüldür. $K \subseteq N \cap (L + N^{'})$ ve $[N \cap (L+N^{'})] \cap K^{'} = 0$ olduğundan $K = N \cap (L+N^{'})$ olur. Böylece $(N+L) \cap N^{'} = 0$ dır. N, $N^{'}$ nün M deki komplementi olduğundan $N \cap N^{'} = 0$ koşulu altında $N^{'}$ maksimal alt modüldür. $N \subseteq N + L$ olduğundan $N = N + L$ dir. Buradan $L \leq N$ olur. $L = L \cap (L + N^{'}) \leq N \cap (L + N^{'}) = K$ olduğundan $K = L$ dir. Önerme 2.2.10 dan $K \leq_c M$ elde edilir.

2.3 CS-Modüller

Bir önceki bölümde Sonuç 2.2.9 ile ifade edilen önermenin tersinin genel olarak doğru olmadığı bir örnek yardımıyla görülmüştür. Ancak her komplement alt modülü aynı zamanda bir dik toplanan olan modüller vardır ve bu modüller özel olarak CS-modül olarak adlandırılırlar. Günümüzde birçok araştırmacının odaklandığı ve bu tez çalışması için başlangıç oluşturma niteliğine sahip CS-modüller bu kısımda incelenecektir.

Tanım 2.3.1. *M bir R-modül olsun. Eğer M modülünün her K komplement alt modülü M de bir dik toplanan oluyorsa M ye* ***CS-modül*** *ya da* ***extending modül*** *denir (Smith 1990).*

Bu tanıma denk koşullardan biri M nin her N alt modülünün M nin bir dik toplananında essential olarak kapsanmasıdır.

CS-modüllere yarı basit modüller, düzgün modüller, injektif modüller ve sonlu ranklı serbest Abel gruplar örnek verilebilir. $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z} = M_{\mathbb{Z}}$ ise CS olmayan bir modüldür (Dung 1994).

Tanım 2.3.2. *Bir R halkası için R_R, CS-modül ise R ye **sağ CS-halka** denir. Yani her $I \leq R_R$ sağ ideali için $I \leq_e eR$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ vardır (Tercan 1995a).*

Bir CS-modülün her alt modülü CS-modül olmayabilir. Örneğin; M, CS olmayan bir R-modül ve $E(M)$ de M nin injektif zarfı olsun. Bu durumda, $M \leq E(M)$ ve $E(M)$, CS-modüldür.

Ön Teorem 2.3.3. *M, CS-modül ve N, M nin bir dik toplanan alt modülü olsun. Bu durumda N, CS-modüldür.*

İspat. N, M nin bir dik toplanan alt modülü olduğundan $M = N \oplus K$ olacak şekilde $K \leq M$ vardır. $X \leq_c N$ alalım. N, M de bir dik toplanan olduğundan $X \leq_c N \leq_c M$ olur. Komplementlerde geçişme özelliğinden $X \leq_c M$ dir ve M, CS-modül olduğundan X, M de dik toplanandır. Buradan $M = X \oplus Y$ olacak şekilde $Y \leq M$ vardır. $N = N \cap M = N \cap (X \oplus Y) = X \oplus (N \cap Y)$ olduğundan X, N nin bir dik toplananıdır. Böylece N, CS-modüldür.

Sonuç 2.3.4. *M, CS-modül ve $N \leq_c M$ ise N, CS-modüldür.*

İspat. Ön Teorem 2.3.3 den açıktır.

Örnek 2.3.5. *$M_R = (\mathbb{Z}[x] \oplus \mathbb{Z}[x])_{\mathbb{Z}[x]}$ modülü CS-modül değildir.*

İspat. Öncelikle M_R bir nonsingüler modüldür. $\mathbb{Z}[x]_{\mathbb{Z}[x]}$ düzgün modül olduğundan CS-modüldür. Şimdi $C = \{(xr, 2r) : r \in R\} \leq M_R$ modülünü ele alalım. Bu durumda $Z(M/C) = 0$ dır. Gerçekten, $(f, g) + C \in Z(M/C)$ olsun. O halde$[(f, g) + C]E = C$ olacak şekilde bir $E \leq_e R_R$ vardır. Yani $(fE, gE) \in C$ dir. Böylece $fE = xr$ ve $gE = 2r$ dir. Buradan $2f = xg$ olur. $f = x(g/2) \in R$ ve $g/2 \in R$

dir. Bu durumda $(f, g) + C = (x(g/2), g) + C = (x(g/2), 2(g/2)) + C = C$ olur. Yani $(f, g) \in C$ dir. $(f, g) + C = \overline{0}$ elde edilir. Dolayısıyla $Z(M/C) = 0$ dır. Yücel (2008) Önteorem 1.4.3 den $C \leq_c M_R$ dir. Farzedelim ki C, M de dik toplanan olsun. O halde $M = C \oplus D$ olacak sekilde $D \leq M_R$ vardır. $\pi : M \to C$ kanonik projeksiyon olsun. $a \in C$, $b \in D$ olmak üzere $\pi(a, b) = a$ olarak tanımlansın. $\pi(1, 0) = (xr, 2r)$ ve $\pi(0, 1) = (xs, 2s)$ olsun. Böylece $(x, 2) \in C$ için $(x, 2) = \pi(x, 2) = \pi(x, 0) + \pi(0, 2) = x\pi(1, 0) + 2\pi(0, 1) = x(xr, 2r) + 2(xs, 2s) = (x^2r + 2xs, 2xr + 4s)$ olur. Buradan $1 = xr + 2s$ dir. Yani $R = xR + 2R$ dir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla M_R, CS-modül değildir.

Örnek 2.3.6. $R_R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ *modülü CS-modül değildir.*

İspat. R_R nin nonsingüler modül olduğu açıktır. $M_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ olarak alırsak $R_R = M_1 \oplus M_2$ olur. M_1 ve M_2 düzgün modüller olduğundan CS-modüllerdir. Fakat R_R, CS-modül değildir. Gerçekten, $u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in R$ alalım. $uR = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 2x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{Z} \right\}$ olup uR, R nin düzgün alt modülüdür ve böylece $dim(uR) = 1$ dir. $dimR = 2$ ve $dim(uR) = 1$ olduğundan $uR \nleq_e R$ dir. Diğer yandan, eğer R, CS-modül olsaydı $uR \leq_e eR$ olacak biçimde bir $e^2 = e \in R$ olurdu. Buradan $u \in R$ olduğundan $u \in eR$ dir. O halde, $r \in R$ için $u = er$ ise $eu = er = u$ olur. Yani $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dir ve $\begin{bmatrix} 0 & a + 2b \\ 0 & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ elde edilir. Buradan $c = 1$ ve $a + 2b = 1$ bulunur. Böylece $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur. $\begin{bmatrix} a^2 & (a+1)b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olup, $a = 0, 1$ elde edilir. $a = 0$ ise $b = 1/2 \notin \mathbb{Z}$ dir. Eğer $a = 1$ ise $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur. Buradan $eR = R$ bulunur. Fakat $uR \nleq_e R$ olduğu için bu bir çelişkidir. O halde R_R, CS-modül değildir.

3. CS-MODÜLLERİN GENELLEMELERİ

Bu bölümde CS-modüllerin genellemeleri olan CLS, C_{11}, C_{11}^z, G-extending, G^z-extending, FI-extending ve PI-extending modüller detaylı olarak incelenmiştir. Bu modül sınıfları ile ilgili elde edilen önemli sonuçlar verilerek örneklerle desteklenmiştir.

3.1 CLS-Modüller

Bu kısımda z-kapalı alt modüller hakkında bazı temel bilgiler verildikten sonra Tercan'ın (Tercan 1995b) de CS-modüllerin bir genellemesi olarak tanımladığı ve araştırdığı CLS-modüller ele alınacaktır.

Tanım 3.1.1. *$N \leq M$ olmak üzere M/N nonsingüler ise N, M nin z-kapalı bir alt modülüdür.*

Aşağıdaki ön teorem (Sandomierski, 1968, Lemma 2.3) den alınmıştır.

Ön Teorem 3.1.2. *M_R bir modül olsun.*

(i) Her z-kapalı alt modül komplementtir.

(ii) Eğer M nonsingüler ise, o zaman her komplement z-kapalıdır.

İspat.

(i) Varsayalım ki K, M nin z-kapalı bir alt modülü olsun. $K \leq_e N$ olacak şekilde $N \leq M$ olsun. O zaman $N/K \leq Z(M/K)$ olduğu için $N/K = Z(M/K)$ ve buradan da $N/K = 0$ dır ve dolayısıyla $K = N$ dir. Böylece K, M de bir komplementtir.

(ii) Varsayalım ki K, M nin z-kapalı olmayan komplement bir alt modülü olsun. O zaman M/K nonsingüler değildir. $m \in M$, $m \notin K$ vardır öyle ki R nin essential sağ ideali E için $mE \leq K$ dır. $r \in R$, $k \in K$ olsun ve $mr + k$ göz önüne alınsın.

F in aşağıdaki gibi olduğunu kabul edelim.

$$F = \{r \in R : rs \in E\}$$

O zaman $F \leq_e R_R$ ve $(mr + k)F \leq K$ dır. Eğer $mr + k \neq 0$ olsaydı, o zaman $(mr+k)F \neq 0$ ve dolayısıyla $K \cap (mr+k)R \neq 0$ olurdu. Böylece $K \leq_e mR+K$ olduğundan K, M de bir komplement değildir.

Bir sonraki örnek, genel olarak bir komplement alt modülün z-kapalı olması gerekmediğini göstermektedir.

Örnek 3.1.3. *K bir cisim ve V, K üzerinde $dim_K V \geq 2$ olan bir vektör uzayı olsun.*

$$R = \begin{bmatrix} K & V \\ 0 & K \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} k & v \\ 0 & k \end{bmatrix} : k \in K, v \in V \right\};$$

R değişmeli bir halkadır öyle ki z-kapalı olmayan komplement bir ideal içerir.

İspat. $E = \begin{bmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. O zaman $E \leq_e R_R$ dir. $F_v = \begin{bmatrix} 0 & Kv \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v \in V$ olsun. Varsayalım ki $G \leq R$ iken $F_v \leq_e G$ olsun. Böylece $F_v \leq_e G \cap E$ ve dolayısıyla $F_v = G \cap E$ dir. $w \in V$, $0 \neq k \in K$ için $\begin{bmatrix} k & w \\ 0 & k \end{bmatrix} \in G$ dir. $x \in V$ iken $x \notin Kv$ olsun. Böylelikle,

$$\begin{bmatrix} k & w \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (1/k)x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in G \cap E \text{ dir.}$$

Bu nedenle, $x \in Kv$ dir ve bu bir çelişkidir. Böylece $k = 0$ dır. Dolayısıyla, $G \leq E$ olduğundan $F_v = G$ dir. Buradan her $v \in V$ için F_v, R de bir komplement idealdir. Fakat $E^2 = 0$ olduğundan $E^2 \leq F_v$ dir. Ancak E, F_v de değildir. Böylece F_v, R nin z-kapalı bir ideali değildir.

Tanım 3.1.4. *M nin her z-kapalı alt modülü M nin bir dik toplananı ise M_R modülü, **CLS-modül** olarak adlandırılır.*

Değişmeli bir tamlık bölgesi üzerinde, herhangi bir *torsion modülü* CLS-modüldür (Lam 1999).

Sonuç 3.1.5.

(i) Her CS-modül bir CLS-modüldür.

(ii) Her nonsingüler CLS-modül CS-modüldür.

İspat. Ön Teorem 3.1.2 den yararlanılarak ispatlanır.

Bir sonraki örnek CLS-modüllerin CS-modüllerden farklı olduğunu gösterir.

Örnek 3.1.6. *p bir pozitif asal tam sayı olmak üzere $M = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p) \oplus (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3)$ modülünü alalım. $M_{\mathbb{Z}}$ modülü CLS-modüldür ancak CS-modül değildir.*

İspat. $M_{\mathbb{Z}}$ singüler olduğundan M, CLS-modüldür. $M_1 = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p \oplus 0)$ ve $M_2 = (0 \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3)$ olsun. M_1 ve M_2 düzgün modül olduklarından CS-modüllerdir. Şimdi M nin CS-modül olmadığını gösterelim. $K = \mathbb{Z}(1+\mathbb{Z}p, p+\mathbb{Z}p^3)$ alt modülünü alalım. O zaman K, $M_{\mathbb{Z}}$ in dik toplanan olmayan, mertebesi p^2 olan komplement alt modülüdür. $M_{\mathbb{Z}}$ in CS-modül olması için M deki her komplementin M nin dik toplananı olması gerekir. Fakat K komplementi M nin bir dik toplananı olmadığından $M_{\mathbb{Z}}$, CS-modül değildir.

Ön Teorem 3.1.7. *Bir CLS-modülün herhangi bir dik toplananı, CLS-modüldür.*

İspat. M bir CLS-modül olsun. M nin bazı K ve K' alt modülleri için $M = K \oplus K'$ olduğunu varsayalım. L, K nın z-kapalı bir alt modülü olsun.

$$\frac{M}{L \oplus K'} = \frac{K \oplus K'}{L \oplus K'} \cong \frac{K}{L}$$

olduğundan M öyle bir $L \oplus K'$ z-kapalı alt modülüne sahiptir ki, $L \oplus K'$ M nin dik toplananıdır ve bu durum L nin M nin dik toplananı olduğu anlamına gelir. O zaman L, K nın bir dik toplananıdır. Buradan K bir CLS-modüldür.

CLS-modüllerin dik toplamı genel olarak bir CLS-modül olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek bunu açıklamaktadır.

Örnek 3.1.8. *$M_{\mathbb{Z}}$ modülü $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ olsun, burada $\mathbb{Z}_2 = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b$ tektir$\}$ dir. Şimdi açıkça, $M_{\mathbb{Z}}$ torsion-freedir ve $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$ CLS-modüldür. Ancak M bir CLS-modül değildir (Mohamed ve Muller 1990).*

3.2 C_{11} ve C_{11}^z-Modüller

Bu kısımda ilk olarak Smith ve Tercan'ın tanımladığı C_{11}-modüller ele alınmıştır Smith ve Tercan (1993, 2004). Daha sonra Kara ve Tercan'ın Kara ve Tercan (2018) de tanımlayıp araştırdıkları C_{11}^z-modüller üzerine yapılan çalışmalar detaylı olarak incelenmiştir.

Tanım 3.2.1. *M modülünde eğer her $N \leq M$ alt modülünün dik toplanan olan bir komplementi varsa M ye C_{11}-modül (veya M, C_{11} özelliğini sağlar) denir.*

İkinci bölümde CS-modüllerin dik toplananlarının da CS-modül olduğu fakat CS-modüllerin dik toplamının genel olarak CS-modül olmak zorunda olmadığı belirtilmiştir. C_{11}-modüllerin dik toplamları ve dik toplananları için aynı durum geçerli değildir. Yani C_{11}-modüllerin her dik toplananı C_{11}-modül olmayabilir (Yücel, 2008, Örnek 3.1.4). C_{11}-modüllerin dik toplamı da C_{11}-modüldür ve buna dair aşağıda verilen teorem (Smith ve Tercan, 1993, Theorem 2.4) de ispatlanmıştır.

Teorem 3.2.2. *C_{11}-modüllerin dik toplamı da C_{11}-modüldür.*

Özel olarak düzgün modüller, yarı-basit modüller ve injektif modüller C_{11}-modüldür. (Smith ve Tercan, 1993, Proposition 2.1) den herhangi bir M modülü C_1 koşulunu sağlıyorsa yani CS-modül ise aynı zamanda C_{11}-modül olduğu açıktır çünkü M nin herhangi bir komplement alt modülü M de bir dik toplanandır. Ancak C_{11}-modüllerin CS-modül olması gerekmez. Örneğin bir p asal tam sayısı için $M = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p) \oplus (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3)$, $\mathbb{Z}$-modülü ele alındığında $K = \mathbb{Z}(1 + \mathbb{Z}p, p + \mathbb{Z}p^3)$ alt modülü $M_{\mathbb{Z}}$ nin komplementidir fakat dik toplananı değildir. Bu nedenle $M_{\mathbb{Z}}$, CS-modül değildir. Fakat $M_1 = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p \oplus 0)$ ve $M_2 = (0 \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3)$ düzgün alt modüller olduğundan $M_{\mathbb{Z}}$, C_{11}-modüldür. Dolayısıyla bunların dik toplamı da C_{11}-modüldür. Böylece düzgün modüllerin dik toplamının genellikle CS-modül olmadığı da görülmektedir.

Sonuç 3.2.3. *CS-modüllerin herhangi bir dik toplamı C_{11}-modüldür.*

İspat. CS-modüller C_{11}-modül olup (Smith ve Tercan, 1993, Theorem 2.4) den istenen elde edilir.

Sonuç 3.2.4. *Düzgün modüllerin herhangi bir dik toplamı C_{11}-modüldür.*

İspat. Her düzgün modül aynı zamanda bir CS-modül olduğundan, Sonuç 3.2.3 den istenen elde edilir.

Tanım 3.2.5. *M modülünde eğer her z-kapalı alt modülünün dik toplanan olan bir komplementi varsa M ye C_{11}^z-modül denir.*

Aşağıdaki ön teorem z-kapalı alt modüller açısından C_{11}^z-modüllerin bir karakterizasyonunu verir.

Ön Teorem 3.2.6. *M modülünün bir C_{11}^z-modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her N, z-kapalı alt modülü için $N \cap K = 0$ ve $K \oplus N \leq_e M$ olacak biçimde bir K dik toplananı olmasıdır.*

Önerme 3.2.7. *M modülü için aşağıdaki durumları düşünelim.*

(i) *M bir CS-modüldür.*

(ii) *M bir CLS-modüldür.*

(iii) *M bir C_{11}-modüldür.*

(iv) *M bir C_{11}^z-modüldür.*

$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iv)$ *ve* $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ *dir fakat bu önermelerin tersleri genel olarak doğru değildir.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ (Tercan ve Yücel, 2016, Corollary 5.60 (i)) den açıktır. Her CS-modül aynı zamanda CLS-modüldür.

$(i) \Rightarrow (iii)$ $X \leq M$ alalım. Bu durumda $X \leq_e K$ olacak şekilde $K \leq_d M$ vardır. O halde $K' \leq M$ için $M = K \oplus K'$ olur. $X \cap K' \leq K \cap K' = 0$ olduğundan $X \cap K' = 0$ dır ve $X \oplus K' \leq_e M$ olduğundan (Smith ve Tercan, 1993, Proposition 2.3 (iii)) den CS-modül olması için C_{11}-modül olması yeterlidir. Dolayısıyla M bir C_{11}-modüldür.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ M bir CLS-modül, X de M nin z-kapalı bir alt modülü olsun. $X \leq_d M$ olduğundan M bir C^z_{11}-modüldür.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Y, M nin z-kapalı alt modülü olsun. O zaman (Tercan ve Yücel, 2016, Lemma 5.58 (i)) den yani her z-kapalı alt modül komplement olduğundan Y, M nin bir komplementidir. (Tercan ve Yücel, 2016, Proposition 4.25) den K, X in M deki komplementi olacak şekilde X in bir K dik toplananı vardır. O zaman M, C^z_{11}-modüldür.

$(iii) \not\Rightarrow (i)$ ve $(ii) \not\Rightarrow (i)$ p bir pozitif asal tam sayı olmak üzere $M = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p) \oplus (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3)$ modülünü alalım. $M_{\mathbb{Z}}$ modülü CLS-modüldür ancak CS-modül değildir. Aynı zamanda $M_{\mathbb{Z}}$ bir C_{11}-modüldür.

$(iv) \not\Rightarrow (ii)$ $\mathbb{Z}_2 = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b \text{ tektir}\}$ olmak üzere $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ olsun. $M_{\mathbb{Z}}$, C_{11} ve C^z_{11}-modüldür ancak CLS-modül değildir.

$(iv) \not\Rightarrow (iii)$ F bir cisim ve V, F üzerinde boyutu 2 olan bir vektör uzayı olsun. O zaman $R = \begin{bmatrix} F & V \\ 0 & F \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} f & v \\ 0 & f \end{bmatrix} : f \in F, v \in V \right\}$ bir ayrıştırılamaz R-modüldür. R düzgün modül olmadığından C_{11}-modül değildir. $v_1, v_2 \in V$ olmak üzere R yalnızca $I_1 = \begin{bmatrix} 0 & v_1F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 0 & v_2F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $I_3 = \begin{bmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ aşikar olmayan R-alt modüllerine sahiptir. $\mathbb{Z}(R_R) \neq 0$ olduğundan 0, z-kapalı ideal değildir. Diğer yandan, $I_3 \leq_e R_R$ dir. Böylece R/I_3 singülerdir yani I_3, R nin z-kapalı alt modülü değildir. Dahası $I_3^2 = 0$ olduğundan $I_3^2 \leq I_1$ dir. Ancak I_3, I_1 de değildir. Buradan I_1, R nin z-kapalı alt modülü değildir, benzer bir şekilde I_2 de değildir. R sadece kendinde z-kapalı alt modüldür. Dolayısıyla R_R, C^z_{11}-modüldür.

Ön Teorem 3.2.8.

(i) M bir nonsingüler modül olsun. O zaman M, C^z_{11}-modüldür gerek ve yeter koşul M bir C_{11}-modüldür.

(ii) Aşağıdaki durumlar nonsingüler ayrıştırılamaz bir M modülü için denktir.

(1) M düzgündür.

(2) M CS-modüldür.

(3) M C_{11}-modüldür.

(4) M C^z_{11}-modüldür.

İspat.

(i) M bir C^z_{11}-modül ve X, M de bir komplement olsun. Tercan ve Yücel (2016) den M, nonsingüler ise her komplement z-kapalı olduğundan X, M de z-kapalı alt modüldür. Dolayısıyla M nin bir D dik toplananı vardır öyle ki $X \cap D = 0$ ve $X \oplus D \leq_e M$ dir. (Tercan ve Yücel, 2016, Proposition 4.25) den M, C_{11}-modüldür. Tersi Önerme 3.2.7 den açıktır.

(ii) (i) kısmından ve Önerme 3.2.7 den açıktır.

Önerme 3.2.9. *M bir C^z_{11}-modül ve X, M nin z-kapalı alt modülü olsun. M nin herhangi bir dik toplananı ile X in kesişimi, X in dik toplananı oluyorsa, o zaman X bir C^z_{11}-modüldür.*

İspat. X, M nin z-kapalı alt modülü ve Y de X in z-kapalı alt modülü olsun. O zaman $(M/Y)/(X/Y) \cong (M/X)$ nonsingülerdir. Ayrıca (X/Y) nonsingülerdir ve dolayısıyla (M/Y) de nonsingülerdir. Böylece Y, M nin bir z-kapalı alt modülüdür. O zaman M nin bir D dik toplananı vardır öyle ki $Y \cap D = 0$ ve $Y \oplus D \leq_e M$ dir. Varsayımdan, $X \cap D \leq_d X$ dir. $Y \cap (X \cap D) = 0$ ve $X \cap (Y \oplus D) \leq_e X$ olduğundan $X \cap (Y \oplus D) = (X \cap D) \oplus Y \leq_e X$ dir. Böylece X, C_{11}^z-modüldür.

Sonuç 3.2.10. *M bir C_{11}^z-modül olsun. Eğer her $e^2 = e \in End(M_R)$ için $e(N) \in N$ olacak şekilde N, M nin bir z-kapalı alt modülü ise, N bir C_{11}^z-modüldür. Özellikle, M nin her fully invariant z-kapalı alt modülü C_{11}^z-modüldür.*

İspat. N, M nin z-kapalı alt modülü olmak üzere, her $e^2 = e \in End(M_R)$ için $e(N) \subseteq N$ ve K, M nin bir dik toplananı olsun. $\pi : M \to K$ kanonikal projeksiyon olmak üzere $\pi(N) = N \cap K$, N nin dik toplananıdır. Dolayısıyla N, Önerme 3.2.9 dan C_{11}^z-modüldür.

Teorem 3.2.11. *C_{11}^z-modüllerin herhangi bir dik toplamı C_{11}^z-modüldür.*

İspat. $M_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ C_{11}^z özelliğine sahip modüller ve $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ olsun. N, M nin z-kapalı alt modülü olsun. Λ', Λ nın boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere,

$$\mathcal{S} = \{(\Lambda', N, K) | \Lambda' \subseteq \Lambda,\ N\ M\text{'nin } z\text{-kapalı alt modülüdür ve } N \cap K = 0 \text{ ve}$$
$$N \oplus K \leq_e M \text{ olacak şekilde } K,\ M\text{'nin bir dik toplananıdır}\}$$

kümesini alalım. $(\Lambda_1, N_1, K_1) \leq (\Lambda_2, N_2, K_2) \Leftrightarrow \Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, $N_1 \leq N_2$, $K_1 \leq K_2$ ile tanımlanan bileşen açısından sıralı $\leq$ bağıntısına göre $\mathcal{S}$ kısmi sıralı kümedir. $\lambda \in \Lambda$ için $(\{\lambda\}, M_\lambda, 0) \in \mathcal{S}$ dir, bu sebeple $\mathcal{S} \neq \emptyset$ dır. Zorn Lemma dan $\mathcal{S}$ nin bir (Λ_1, N_1, K_1) maksimal elemanı vardır. Şimdi $\Lambda = \Lambda_1$ olduğunu iddia edelim. Aksini varsayalım yani $\Lambda \neq \Lambda_1$ olsun. O zaman $\mu \in \Lambda_1$ vardır öyle ki $\mu \notin \Lambda_1$ dir. $\Lambda_2 = \Lambda_1 \cup \{\mu\}$ ve $M'' = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_2} M_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_1} M_\lambda \oplus M_\mu = M_1 \oplus M_\mu$. M_μ nin, her z-kapalı alt modülü N_μ için M_λ, C_{11}^z-modül olduğu için $N_\mu \cap K_\mu = 0$ ve $N_\mu \oplus K_\mu \leq_e M_\mu$ olacak şekilde M_μ nin bir K_μ dik toplananı vardır. $K_\mu \cap K_1 = 0$ ve $K'' = K_\mu \oplus K_1$, M'' nin dik toplananıdır. Şimdi N_1 ve N_μ sırasıyla M_1 ve M_μ nin z-kapalı alt modülleri iken $N_1 \oplus N_\mu$, M'' nin alt modülü olsun. $\frac{M''}{N_1 \oplus N_\mu} \cong \frac{M_1}{N_1} \oplus \frac{M_\mu}{N_\mu}$ olduğundan $\frac{M''}{N_1 \oplus N_\mu}$ nonsingülerdir ve dolayısıyla $N'' = N_1 \oplus N_\mu$, M'' nin z-kapalı alt modülüdür. $N'' \cap K'' = 0$ ve $N'' \oplus K'' \leq_e M''$ dir. Buradan $(\Lambda_2, N'', K'') \in \mathcal{S}$ dir. Ayrıca $(\Lambda_1, N_1, K_1) \leq (\Lambda_2, N'', K'')$ olması (Λ_1, N_1, K_1) in $\mathcal{S}$ de maksimal eleman olmasıyla çelişir. Böylece $\Lambda = \Lambda_1$ dir. Buradan M bir C_{11}^z-modüldür.

Sonuç 3.2.12. *Düzgün (ya da CS, C_{11}) modüllerin herhangi bir dik toplamı C_{11}^z özelliğini sağlar.*

İspat. Ön Teorem 3.2.8 ve Teorem 3.2.11 den açıktır.

Sonuç 3.2.13. *Herhangi bir serbest Abelian grup C_{11}^z özelliğini sağlar.*

İspat. Teorem 3.2.11 in bir sonucudur.

Teorem 3.2.14. *$\mathbb{R}$ reel cisim ve $n \geq 3$ olmak üzere n, herhangi bir tek tam sayı olsun. $x_1, \ldots, x_n$ bilinmeyenler olmak üzere S, $\mathbb{R}$ üzerinde $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ polinom halkası olsun. $s = x_1^2 + \cdots + x_1^2 - 1$ olmak üzere $R = S/Ss$ halkası olsun. Bu durumda serbest R-modül $M = R^{(n)}$, C_{11}^z özelliğini sağlar fakat C_{11}^z-modül olmayan ayrıştırılamaz bir D_R dik toplananını içerir.*

İspat. R, Krull boyutu 2 olan, değişmeli Noetherian tamlık bölgesi olsun. O zaman Teorem 3.2.11 den serbest R-modül M bir C_{11}^z-modüldür. $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde her $a_i \in S$ için $\alpha(a_1 + Ss, \ldots, a_n + Ss) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + Ss$ ile tanımlanan $\alpha : M \to R$ bir örten homomorfizmadır. Dolayısıyla M nin bir $D' \cong R$ alt modülü için $M = D \oplus D'$ olacak şekilde $D = Ker\alpha$, M nin bir dik toplananıdır. D_R düzgün modül değildir. D_R, S^{n-1} $(n-1)$-küresinin en az bir değişkeni sıfırdan farklı olan teğet demetine karşılık gelir. D_R ayrıştırılamaz modüldür. Ayrıca R bir nonsingüler modüldür ve bu yüzden D_R de nonsingülerdir. Ön Teorem 3.2.8 (ii) den D_R bir C_{11}^z-modül değildir.

Önerme 3.2.15. *M düzgün modüllerin bir dik toplamı olacak şekilde $\mathbb{Z}$-modül olsun. O zaman M nin her dik toplananı C_{11}^z-modüldür.*

İspat. K, M nin bir dik toplananı olsun. O zaman K (Smith ve Tercan, 1993, Theorem 5.5) den düzgün modüllerin bir dik toplamıdır. Dolayısıyla Sonuç 3.2.12 den K bir C_{11}^{z}-modüldür.

Ön Teorem 3.2.16. *M nin M_1 ve M_2 alt modüllerinin bir dik toplamı $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. O zaman M_1 bir C_{11}^{z}-modüldür ancak ve ancak M_1 in her z-kapalı alt modülü N için $M_2 \subseteq K$, $K \cap N = 0$ ve $K \oplus N \leq_e M$ olacak şekilde M nin bir K dik toplananı vardır.*

İspat. M_1 in bir C_{11}^{z}-modül olduğunu varsayalım. N, M_1 in bir z-kapalı alt modülü olsun. O zaman $N \cap K_1 = 0$ ve $N \oplus K_1 \leq_e M_1$ olacak şekilde M_1 in bir K_1 dik toplananı vardır. Buradan $K_1 \oplus M_2$, M nin bir dik toplananı olur. $M_2 \subseteq K_1 \oplus M_2$, $(K_1 \oplus M_2) \cap N = 0$ ve $K_1 \oplus M_2 \oplus N \leq_e M$ dir.
Tersine, M_1 in belirtilen özelliğe sahip olduğunu varsayalım. H, M_1 in bir z-kapalı alt modülü olsun. O zaman hipotezden $M_2 \subseteq K$, $K \cap H = 0$ ve $K \oplus H \leq_e M$ olacak şekilde M nin bir K dik toplananı vardır. $K \cap M_1$, M nin ve dolayısıyla da M_1 in bir dik toplananıdır. Böylelikle $H \cap (K \cap M_1) = 0$ ve $H \oplus (K \cap M_1) = M_1 \cap (H \oplus K) \leq_e M_1$ dir. Dolayısıyla M_1 bir C_{11}^{z}-modüldür.

Teorem 3.2.17. *M nin M_1 ve M_2 alt modülleri için $M = M_1 \oplus M_2$, C_{11}^{z}-modül olsun. M nin her K dik toplananı için $K \cap M_2 = 0$ ve $K \oplus M_2$, M nin bir dik toplananıdır. O zaman M_1 bir C_{11}^{z}-modüldür.*

İspat. N, M_1 in z-kapalı alt modülü olsun. $\frac{M}{N \oplus M_2} \cong \frac{M_1}{N}$ bir nonsingüler modüldür ve dolayısıyla $N \oplus M_2$, M nin bir z-kapalı alt modülüdür. O zaman $K \cap (N \oplus M_2) = 0$, $K \oplus (N \oplus M_2) \leq_e M$ olacak şekilde M nin bir K dik toplananı vardır. Ön Teorem 3.2.16 dan ispat tamamlanmış olur.

M nin herhangi K ve L dik toplananları için M, C_3 koşulunu sağlarsa $K \cap L = 0$ ve $K \oplus L$, M nin dik toplananları olur (Mohamed ve Muller 1990) ya da Tercan ve Yücel (2016).

Sonuç 3.2.18. *M, C_3 koşulunu sağlayan bir C_{11}^z-modül olsun. O zaman M nin her dik toplananı C_{11}^z-modüldür.*

İspat. Teorem 3.2.17 den ispat açıktır.

3.3 G-extending ve G^z-extending Modüller

Bu kısımda CS-modüllerin bir genellemesi olan G-extending modüller ele alınmıştır. Burada kullanılan β bağıntısını Goldie tarafından 1960 yılında tanımlanmıştır. Goldie nin çalışmalarından esinlenen Birkenmeier, Tercan ve Akalan 2009 yılında G-extending modülleri literatüre kazandırmışlardır. G-extending modüllerin bir dik toplamının ve bir G-extending modülün bir dik toplananının G-extending modül olabilmesi için gerekli koşullar ele alınacaktır. Bu bölümü oluşturan tanım ve elde edilen sonuçlar (Akalan ve diğ. 2009) ve (Tercan ve diğ. 2022) den alınmıştır.

Tanım 3.3.1. *M bir modül olsun. M nin alt modüllerinin kümesi üzerinde aşağıdaki bağıntılar tanımlıdır:*

(i) $X\alpha Y \iff X \leq_e K$ *ve* $Y \leq_e K$ *olacak şekilde* $K \leq M$ *vardır.*

(ii) $X\beta Y \iff X \cap Y \leq_e X$ *ve* $X \cap Y \leq_e Y$.

α yansımalı ve simetriktir fakat her zaman geçişme özelliğine sahip olmayabilir. Örneğin M bir UC-modül iken α geçişmelidir. β nın bir denklik bağıntısı olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 3.3.2. *Her $X \leq M$ için, $X\beta D$ (yani $X \cap D \leq_e X$ ve $X \cap D \leq_e D$) olacak şekilde bir $D \leq_d M$ varsa M ye **G-extending (Goldie extending) modül** denir.*

Önerme 3.3.3. *M bir CS-modüldür ancak ve ancak her $X \leq M$ için $X\alpha D$ olacak şekilde M nin bir D dik toplananı vardır.*

Aşağıdaki önerme ile G-extending modüller karakterize edilir.

Önerme 3.3.4. *M bir modül olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *M G-extending modüldür.*

(ii) *Her $Y \leq M$ için, $X \leq_e Y$ ve $X \leq_e D$ olacak şekilde M nin bir D dik toplananı ve $X \leq M$ vardır.*

(iii) *Her $Y \leq M$ için, $Y \beta K$ olacak şekilde $L \leq_c Y$, $K \leq_c L$ vardır ve her $f : K \oplus L \longrightarrow M$ homomorfizması bir $\overline{f} : M \longrightarrow M$ homomorfizmasına genişler.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ $Y \leq M$ olsun. Tanımdan $Y \beta D$ olacak şekilde M nin bir D dik toplananı vardır. Bu durumda $Y \cap D \leq_e Y$ ve $Y \cap D \leq_e D$ dir. $X = Y \cap D$ alınırsa istenen elde edilir.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ $Y \leq M$ olsun. Hipotezden bir $X \leq M$ ve bir $D \leq_d M$ vardır öyle ki $X \leq_e Y$ ve $X \leq_e D$ dir. Buradan $M = D \oplus D^{'}$ olacak şekilde bir $D^{'} \leq M$ vardır. $X \cap D^{'} \leq_e D \cap D^{'} = 0$ ve $X \cap D^{'} \leq_e Y \cap D^{'}$ olduğundan $X \cap D^{'} = 0$ ve $Y \cap D^{'} = 0$ olmalıdır. $X \leq_e Y \cap D \leq Y$ ve $X \leq_e Y$ olduğundan $Y \cap D \leq_e Y$ bulunur. Diğer yandan, $X \leq_e Y \cap D \leq D$ ve $X \leq_e D$ olduğundan $Y \cap D \leq_e D$ bulunur. Kabul edelim ki, $D^{'} \leq E$ ve $Y \cap E = 0$ olacak şekilde bir $E \leq M$ olsun. $0 = (Y \cap D) \cap E \leq_e D \cap E$ olduğundan $D \cap E = 0$ olmalıdır. $E = M \cap E = (D \oplus D^{'}) \cap E = (D \cap E) \oplus D^{'} = D^{'}$ bulunur. O halde $D^{'}$, Y nin bir komplementidir. $D = K$ ve $D^{'} = L$ alınırsa $\overline{f}_{|K \oplus L} = f$ elde edilir.
$(iii) \Rightarrow (i)$ (Smith ve Tercan, 1992, Lemma 2) ve (iii) den K, M nin bir dik toplananıdır. Dolayısıyla M bir G-extending modüldür.

Önerme 3.3.5. *M modülü için aşağıdaki durumları düşünelim.*

(i) *M bir CS-modüldür.*

(ii) *M bir G-extending modüldür.*

(iii) M *bir* C_{11}*-modüldür.*

$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ *dir fakat bu önermelerin tersi genel olarak doğru değildir.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ Her CS-modülün aynı zamanda bir G-extending modül olduğu açıktır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ $Y \leq M$ olsun. $Y \beta D$ yani $Y \cap D \leq_e$ Y ve $Y \cap D \leq_e D$ ve $M = D \oplus D'$ olacak şekilde $D, D' \leq M$ vardır. O zaman D', Y nin bir komplementi ve M nin bir dik toplananıdır. Böylece M bir C_{11}-modüldür.

$(iii) \not\Rightarrow (ii)$ A bir sağ Ore domain iken $R = T_2(A)$ bir bölüm halkası değildir. (Smith ve Tercan, 1993, Theorem 2.4) den, R bir sağ C_{11}-modüldür. $0 \neq x \in A$ ve $x \neq 1$ için $u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix} \in R$ olsun. O zaman uR, R nin bir düzgün alt modülüdür. uR nin sıfırdan farklı bir X alt modülü olduğunu varsayalım. X, R nin essential olmayan bir dik toplananıdır. Önerme 3.3.4 den, R_R bir sağ G-extending modül değildir.

Önerme 3.3.6. *M bir modül olsun.*

(i) M *bir ayrıştırılamaz modül olsun. O zaman* M *bir G-extending modüldür ancak ve ancak* M *bir düzgün modüldür.*

(ii) M *bir nonsingüler modül olsun. O zaman* M *bir G-extending modüldür ancak ve ancak* M *bir CS-modüldür.*

(iii) $End(M_R)$ *Abelian halka,* $X \leq M$ *olmak üzere her* $h_i \in End(M_R)$ *için* $X = \sum_{i \in I} h_i(M)$ *olsun. Bu durumda* M *nin bir G-extending modül olması için gerek ve yeter koşul* M *nin bir CS-modül olmasıdır.*

İspat. (i) M ayrıştırılamaz, G-extending modül ve $0 \neq N \leq M$ olsun. Bu durumda M nin bir D dik toplananı için $N \cap D \leq_e N$ ve $N \cap D \leq_e D$ olur. M ayrıştırılamaz olduğundan $D = 0$ veya $D = M$ dir. $0 \neq N$ olduğundan $D = M$ dir. Böylece $N \cap M = N \leq_e M$ olup M düzgün modül olur.

Tersine M ayrıştırılamaz ve düzgün modül olsun. Önerme 3.3.5 den M, G-extending modüldür.

(ii) ve (iii) Bu kısımlar (Birkenmeier ve Tercan, 2015, Proposition 1.3) ve Önerme 3.3.5 in sonuçlarıdır.

Önerme 3.3.7. *$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, her M_i nin G-extending modül olduğu bir dik toplam olsun. Eğer $Soc(M) \leq_e M$ ve M nin her basit alt modülü M_i de bulunuyorsa M, G-extending modüldür.*

İspat. S, M nin bir yarı-basit alt modülü olsun. Bu durumda $X_i = S \cap M_i$ için $S = \bigoplus_{i \in I} X_i$ dir. (Akalan ve diğ. 2009) Proposition 1.8(v) den $X_i \leq_e A_i$ iken $M = A_i \oplus B_i$ dir. Dolayısıyla $S \leq_e \bigoplus_{i \in I} A_i$ dir. $M = (\bigoplus_{i \in I} A_i) \oplus (\bigoplus_{i \in I} B_i)$ olduğu için (Akalan ve diğ. 2009) Proposition 1.8(v) den M bir G-extending modüldür.

Önerme 3.3.8. *M boyutu 2 olan bir düzgün modül olsun.*

(i) M nin bir C_{11}-modül olması için gerek ve yeter koşul M nin düzgün alt modüllerin bir dik toplamı olmasıdır.

(ii) M nin bir G-extending modül olması için gerek ve yeter koşul M nin düzgün alt modüllerin bir dik toplamı olmasıdır.

İspat. (i) M, C_{11}-modül ve $0 \neq U$, M nin bir düzgün alt modülü olsun. U nun bir komplement alt modülü K için $M = B \oplus K$ dir. O zaman $B \leq_c K$ ve $K \leq_c U$ olduğu için K ve B düzgün olmalıdır. Tersinin sağlandığı (Smith ve Tercan, 1993, Lemma 4.1) den görülür.

(ii) Önerme 3.3.5 in ve (i) kısmının bir sonucudur.

Bundan sonraki kısımda Tercan, Yaşar ve Yücel'in (Tercan ve diğ. 2022) de tanımlayıp araştırdıkları CS-modüllerin bir genellemesi olan G^z-extending modüller üzerinde yapılan çalışmalar detaylı olarak incelenecektir. G^z-extending modül kavramı, G-extending modülleri genelleştirir ve ayrıca her komplement alt modülden ziyade yalnızca her z-kapalı alt modülün bir dik toplananla β bağıntılı olmasından dolayı CS ve CLS modülleri de genelleştirir. Yani G-extending, CLS ve CS-modül sınıfı, G^z-extending modül sınıfını içerir.

Tanım 3.3.9. *M nin her z-kapalı alt modülü X için, $X\beta D$ olacak şekilde bir $D \leq_d M$ varsa M ye **G^z-extending modül** denir.*

Aşağıdaki önerme G^z-extending özelliğine denk koşulları verir.

Önerme 3.3.10. *M bir modül olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) M, G^z-extending modüldür.

(ii) M nin her z-kapalı alt modülü Y için, $X \leq_e Y$ ve $X \leq_e D$ olacak şekilde M nin bir D dik toplananı ve $X \leq M$ vardır.

(iii) M nin her z-kapalı alt modülü Y için, $Y\beta K$ olacak şekilde $L \leq_c Y$, $K \leq_c L$ vardır ve her $f : K \oplus L \longrightarrow M$ homomorfizması bir $g : M \longrightarrow M$ homomorfizmasına genişler.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ Y, M nin z-kapalı alt modülü olsun. Tanımdan $Y\beta D$ olacak şekilde M nin bir D dik toplananı vardır. Bu durumda $Y \cap D \leq_e Y$ ve $Y \cap D \leq_e D$ dir. $X = Y \cap D$ alınırsa istenen elde edilir.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Y, M nin z-kapalı alt modülü olsun. Hipotezden bir $X \leq M$ ve bir $D \leq_d M$ vardır öyle ki $X \leq_e Y$ ve $X \leq_e D$ dir. Buradan $M = D \oplus D^{'}$ olacak şekilde bir $D^{'} \leq M$ vardır. $X \cap D^{'} \leq_e D \cap D^{'} = 0$ ve $X \cap D^{'} \leq_e Y \cap D^{'}$ olduğundan $X \cap D^{'} = 0$ ve $Y \cap D^{'} = 0$ olmalıdır. $X \leq_e Y \cap D \leq Y$ ve $X \leq_e Y$ olduğundan $Y \cap D \leq_e Y$ bulunur. Diğer yandan, $X \leq_e Y \cap D \leq D$ ve $X \leq_e D$ olduğundan $Y \cap D \leq_e D$ bulunur. Kabul edelim ki, $D^{'} \leq C$ ve $Y \cap C = 0$ olacak şekilde bir $C \leq M$ olsun. $0 = (Y \cap D) \cap C \leq_e D \cap C$ olduğundan $D \cap C = 0$ olmalıdır. $C = M \cap C = (D \oplus D^{'}) \cap C = (D \cap C) \oplus D^{'} = D^{'}$ bulunur. O halde $D^{'}$, Y nin bir komplementidir. $D = K$ ve $D^{'} = L$ alınırsa istenen elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$ (iii) den $Y \leq_c M$ dir ve (Tercan ve Yücel, 2016, Lemma 3.97) den K, M nin bir dik toplananıdır. Dolayısıyla M bir G^z-extending modüldür.

Önerme 3.3.11. *M modülü için aşağıdaki durumları düşünelim.*

(i) *M bir CS-modüldür.*

(ii) *M bir G-extending modüldür.*

(iii) *M bir CLS-modüldür.*

(iv) *M G^z-extending modüldür.*

(v) *M bir C_{11}-modüldür.*

$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v)$ *dir fakat bu önermelerin tersi genel olarak doğru değildir.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ ve $(iii) \Rightarrow (iv)$ açıktır.
$(iv) \Rightarrow (v)$ Önerme 3.3.5 den sağlandığı görülür.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ N, M nin z-kapalı alt modülü olsun. Bir $D \leq_d M$ vardır öyle ki $N \cap D \leq_e N$ ve $N \cap D \leq_e D$ dir. $M/N \cong M/(N \cap D)/N/(N \cap D)$ olduğundan $N/(N \cap D)$, $M/(N \cap D)$ de z-kapalıdır. Dolayısıyla $Z(Z(M/(N \cap D))) \leq Z(N/(N \cap D)) = N/(N \cap D) \leq Z(M/(N \cap D))$ den $Z(M/(N \cap D)) = N/(N \cap D)$ bulunur. O halde $D/(D \cap N) = Z(D/(D \cap N)) \leq Z(M/(N \cap D)) = N/(N \cap D)$ dir. Buradan $D/(N \cap D) \leq N/(N \cap D)$ yani $N \cap D \leq D \leq N$ dir. $N \cap D \leq_e N$ olduğu için $D = N$ dir. Böylece M bir CLS-modüldür.
$(ii) \nRightarrow (i)$ Herhangi bir p asal sayısı için M, $\mathbb{Z}$-modül $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p) \oplus \mathbb{Q}$ olsun. $M_{\mathbb{Z}}$, (Akalan ve diğ. 2009) Corollary 3.3 den G-extending modüldür. Ancak $M_{\mathbb{Z}}$, CS-modül değildir (Smith ve Tercan, 1992, Example 10).
$(iii) \nRightarrow (ii)$ F bir cisim ve V, F üzerinde boyutu 2 olan bir vektör uzayı ve $R = \begin{bmatrix} F & V \\ 0 & F \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} f & v \\ 0 & f \end{bmatrix} : f \in F, v \in V \right\}$ olsun. R_R CLS-modüldür çünkü uygun bir z-kapalı alt modülü yoktur. R_R düzgün olmayan bir ayrıştırılamaz modüldür. O halde Önerme 3.3.6, (i) den G-extending modül değildir.

$(iv) \not\Rightarrow (iii)$ K, karakteristiği $p > 0$ olan bir cisim olsun. $G = \langle x : x^p = 1 \rangle$, mertebesi p olan devirli grup olsun. R, $K[G]$ grup cebirini göstersin. O halde R, Quasi-Frobenious cebiridir ve dolayısıyla self-injektif Artinian halkadır (Passman, 1977, Sayfa 79 ve 405). R_R düzgün modüldür ve bunun sonucu olarak R bir CS-halkadır. R nin tek maksimal ideali $P = R(x-1)$ dir ve idealleri sadece $R > P > P^2 > \cdots > P^p = 0$ dır. R-modül M, $R \oplus (R/P)$ olsun. (Tercan ve diğ. 2022) Corollary 3.4(ii) den M, G^z-extending R-modüldür. Diğer yandan, $N = P \oplus \overline{0}$, M nin bir alt modülüdür ve $Z(M/N) = Z((R \oplus R/P)/(P \oplus \overline{0})) = Z(R/P) \oplus Z(R/P) = \overline{0} \oplus \overline{0}$ dır. Buradan N, M nin bir z-kapalı alt modülüdür. Eğer N, M nin bir dik toplananı olsaydı P, R nin bir dik toplananı olurdu ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla M_R, CLS-modül değildir.

$(v) \not\Rightarrow (iv)$ R, tam sayılar üzerindeki $2x2$ tipinde üst üçgen matrislerin halkası yani $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ olsun. O zaman R_R, Teorem 3.2.2 den C_{11}-modül ve dolayısıyla C_{11}^z-modüldür. $Z(R_R) = 0$ dır ve R_R, CS-modül değildir. Böylelikle R_R, G^z-extending modül değildir.

Ön Teorem 3.3.12. *M bir modül ve $End(M_R)$ Abelian olsun. Eğer X, M nin bir z-kapalı alt modülü ise her $h_i \in End(M_R)$ için $X = \sum_{i \in I} h_i(M)$ dir. Bu durumda M nin C_{11}^z-modül olması için gerek ve yeter koşul M nin bir CLS-modül olmasıdır.*

İspat. Varsayalım ki, M bir C_{11}^z-modül ve X, M nin bir z-kapalı alt modülü olsun. Her $h_i \in End(M_R)$ için $X = \sum_{i \in I} h_i(M)$ dir. Varsayımdan $e = e^2 \in End(M_R)$ vardır öyle ki eM, X in M deki komplementidir. $0 \neq x \in X$ olsun. O halde $x = ex + (1-e)x$ dir. $m_i \in M$ olmak üzere $x = \sum_{i \in I} h_i(m_i)$ dir. Böylece $ex = e(\sum_{i \in I} h_i(m_i)) = \sum_{i \in I} h_i(em_i) \in X \cap eM = 0$ dir. Buradan $X \leq_e (1-e)M$ dir. X, M nin bir z-kapalı alt modülü olduğundan $X = (1-e)M$ dir. Dolayısıyla $X \leq_d M$ dir. Böylelikle M, CLS-modüldür. Tersi Önerme 3.3.11 den açıktır.

Önerme 3.3.13. *M bir modül olsun.*

(i) *M bir UC-modül (ya da M nonsingüler) olsun. Bu durumda M nin G^z-extending modül olması için gerek ve yeter koşul M nin bir CLS-modül olmasıdır.*

(ii) *M bir modül ve $End(M_R)$ Abelian olsun. Eğer X, M nin bir z-kapalı alt modülü ise her $h_i \in End(M_R)$ için $X = \sum\limits_{i \in I} h_i(M)$ dir. Bu durumda M nin G^z-extending modül olması için gerek ve yeter koşul M nin bir CLS-modül olmasıdır.*

İspat. (i) M nin bir G^z-extending modül olduğunu varsayalım. X, M nin herhangi bir z-kapalı alt modülü olsun. O zaman $X \beta D$ olacak şekilde bir $D \leq_d M$ vardır. Buradan $X \cap D \leq_e X$ ve $X \cap D \leq_e D$ dir. X, M de bir komplement olduğu için, UC-modül kabulünden $X = D$ dir. Buradan $X \leq_d M$ dir. Böylece M bir CLS-modüldür. Tersi Önerme 3.3.11 den açıktır.
(ii) Bu kısım Önerme 3.3.11 ve Ön Teorem 3.3.12 nin bir sonucudur.

3.4 FI-extending Modüller

Bu başlık altında Birkenmeier ve diğer yazarların Birkenmeier ve diğ. (2001), Birkenmeier ve diğ. (2002a,b) de CS-modüllerin bir genellemesi olarak tanımladığı ve araştırdığı, literatürde yer alan birçok modül sınıfını kapsayan FI-extending modüller incelenecektir.

Tanım 3.4.1. *M modülünün her fully invariant alt modülü, M nin bir dik toplananında essential olarak kapsanıyorsa M modülüne FI-extending modül denir.*

CS modüllerin FI-extending modül olduğu Tanım 3.4.1 in bir sonucu olarak açıktır. FI-extending modüllerin CS modüllerden farklı olduğunu gösteren bir örnek vermeden önce aşağıdaki sonuçları vermek uygun olacaktır.

Ön Teorem 3.4.2. *M bir modül olsun.*

(i) *M nin fully invariant alt modüllerinin herhangi toplamı veya kesişimi de fully invariant alt modüldür.*

(ii) Eğer $X \leq Y \leq M$ ve Y, M nin X de Y nin fully invariant bir alt modülü ise X, M nin fully invariant bir alt modülüdür.

(iii) Eğer $M = \bigoplus_{i \in I} X_i$ ve S, M nin bir fully invariant alt modülü ise, π_i, M nin i. projeksiyon homomorfizması olmak üzere $S = \bigoplus_{i \in I} \pi_i(S) = \bigoplus_{i \in I} (X_i \cap S)$ dir.

İspat. (Birkenmeier ve diğ., 2002a, Lemma 1.1) e bakınız.

Teorem 3.4.3. *X_i $(i \in I)$ ler FI-extending modüller ise $M = \bigoplus_{i \in I} X_i$ modülü de FI-extending modüldür.*

İspat. Varsayalım ki her X_i, FI-extending modül ve S de M nin fully invariant alt modülü olsun. $0 \neq s \in S$ alalım. $S \leq M$ olduğundan $s = x_1 + \cdots + x_n$ dir. Bir $i \in I$ için $s \neq 0$ kabul ettiğimizden $x_i \neq 0$ dır. $\pi_i(S) = x_i \neq 0$ olur. $f : X_i \to X_i$ endomorfizma olsun. Buradan $f(\pi_i(S)) = f(X_i) = X_i = \pi_i(S)$ dir. Dolayısıyla her $i \in I$ için $\pi_i(S) \neq 0$ olacak şekilde $\pi_i(S)$, X_i nin fully invariant alt modülü olur. Buradan X_i, FI-extending modül olduğundan $\pi_i(S) \leq_e D_i$ olacak biçimde X_i nin bir D_i dik toplananı vardır. Ön Teorem 3.4.2 (iii) den $S = \bigoplus_{i \in I} \pi_i(S) \leq_e \bigoplus_{i \in I} D_i$ dir. Buradan $\bigoplus_{i \in I} D_i$, M nin bir dik toplananıdır. Böylece M, FI-extending modüldür.

Sonuç 3.4.4. *R bir sağ FI-extending halka ise her n pozitif tam sayısı için $M_n(R)$ matris halkası da FI-extending halkadır.*

İspat. (Birkenmeier ve diğ., 2002a, Proposition 2.3) e bakınız.

Örnek 3.4.5. *D Prüfer olmayan bir değişmeli bölge olsun. $n \geq 2$ bir tam sayı ve $R = M_n(D)$ olarak alalım. Sonuç 3.4.4 ten R_R, FI-extending modüldür. Ancak D Prüfer olmadığından (Dung 1994) Corollary 12.10 dan R, CS-modül değildir.*

Ön Teorem 3.4.6. *M bir modül olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.*

(i) M, FI-extending modüldür.

(ii) M nin her fully invariant alt modülünün dik toplanan olan bir komplementi vardır.

(iii) *M nin her fully invariant alt modülü X için M nin bir komplement alt modülü L ve L nin bir K komplementi vardır ki; $X \leq_e L$ ve her $f : L \oplus K \to M$ homomorfizması bir $g : M \to M$ endomorfizmasına genişler.*

İspat. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ X, M nin bir fully invariant alt modülü olsun. İlk önce M nin FI-extending modül olduğunu kabul edelim. Bu durumda $X \leq_e eM$ olacak şekilde $e = e^2 \in End(M_R)$ vardır. Böylece $(1-e)^2 = (1-e)$ idempotent olduğundan $(1-e)M$ de M nin dik toplananıdır. Buradan $X \cap (1-e)M \leq_e eM \cap (1-e)M = 0$ olur ve $X \cap (1-e)M = 0$ elde edilir. Ayrıca $X \oplus (1-e)M \leq_e eM \oplus (1-e)M = M$ olduğundan $X \oplus (1-e)M \leq_e M$ dir. Böylece $(1-e)M$, X in M deki komplementidir. Tersine, $c = c^2 \in End(M_R)$ olmak üzere cM, X in komplementi olsun. $x \in X$ alalım. Bu durumda $x = cx + (1-c)x$ olur. X fully invariant alt modül olduğundan $cx \in X \cap cM = 0$ dır. Buradan $X \subseteq (1-c)M$ dir. Böylece $X \leq_e (1-c)M$ elde edilir. Yani M, FI-extending modüldür.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Bu denklik (Birkenmeier ve Tercan, 2015, Lemma 1.1) den açıktır.

Önerme 3.4.7. *M bir modül olsun.*

(i) *M, CS-modüldür.*

(ii) *M, C_{11} koşulunu sağlar.*

(iii) *M, FI-extending modüldür.*

$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ dir. Fakat bu önermelerin tersleri genel olarak doğru değildir.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ açıktır.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Bu çıkarım Ön Teorem 3.4.6 $(ii) \Rightarrow (i)$ önermesinin doğrudan bir sonucudur. R, tam sayılar üzerindeki $2x2$ tipinde üst üçgen matrislerin halkası yani $R = T_2(\mathbb{Z})$ olsun. O zaman R_R, Teorem 3.2.2 den C_{11} koşulunu sağlar. Bununla birlikte R_R, (Tercan ve Yücel, 2016, Example 3.84) e göre CS-modül değildir.

Teorem 3.4.8. *(i) Bir M_R modülü için $End(M_R)$ Abel ve $X \leq M$ için $h_i \in End(M_R)$ olmak üzere $X = \sum\limits_{i \in I} h_i(M)$ olsun. Bu durumda M nin yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul M nin C_{11} koşulunu sağlamasıdır.*

(ii) M komplement sınırlı bir modül olsun. Bu durumda M nin C_{11} koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul M nin FI-extending modül olmasıdır.

İspat. (i) Varsayalım ki M, C_{11} koşulunu sağlasın ve $X \leq M$ olsun. Bu durumda her $h_i \in End(M_R)$ için $X = \sum\limits_{i \in I} h_i(M)$ dir. $e = e^2 \in End(M_R)$ homomorfizması için eM, X in bir komplementidir. $0 \neq x \in X$ alalım. Böylece $x = ex + (1-e)x$ olur. Fakat $m_i \in M$ için $x = \sum\limits_{i \in I} h_i(m_i)$ dir. Böylece $ex = e\sum\limits_{i \in I} h_i(m_i) = \sum\limits_{i \in I} h_i(em_i) \in X \cap eM = 0$ elde edilir. $eM \oplus X \leq_e eM \oplus (1-e)M = M$ ve $X \leq (1-e)M$ olduğundan $X \leq_e (1-e)M$ dir. Dolayısıyla M, CS-modüldür. $End(M_R)$ Abel olduğundan M, (C_3) koşulunu da sağlar.

Gerçekten; K ve L, M nin $K \cap L = 0$ koşulunu sağlayan iki dik toplanan alt modülü olsun. Bu durumda $K = eM$ ve $L = fM$ olacak şekilde $e^2 = e \in End(M_R)$ ve $f^2 = f \in End(M_R)$ vardır. $(e+f)^2 = e + f + 2ef$ ve $End(M_R)$ Abel olduğundan $(ef)(m) = e(f(m)) \in eM$, $(ef)(m) = (fe)(m) = f(e(m)) \in fM$ elde edilir. Böylece $ef \in eM \cap fM = K \cap L = 0$ olduğundan $(e+f)^2 = e + f \in End(M_R)$ olur. $(e+f)M \subseteq K + L$ ve $K + L \subseteq (e+f)M$ olduğundan $K + L = (e+f)M$ dır. Dolayısıyla $K + L$, M nin dik toplananıdır. Böylece M, yarı-sürekli modül olur. O halde M modülü yarı-sürekli modüldür.

Tersi Önerme 3.4.7 den açıktır.

(ii) M komplement sınırlı ve FI-extending modül olsun. $Y \leq M$ ve K, Y nin bir komplementi olsun. Eğer $K = 0$ ise K, M nin bir dik toplananıdır. $K \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda M nin bir X fully invariant alt modülü vardır ki X, K nın içerdiği M nin fully invariant alt modüllerinin toplamıdır. Bu durumda (Yücel, 2008, Önteorem 4.1.11) den $X \leq_e K$ dır. Ayrıca M, FI-extending modül olduğundan $e^2 = e \in End(M_R)$ için $X \leq_e eM$ dir. Böylece $Y \cap eM = 0$ ve $Y \oplus eM \leq_e M$ dir. (Smith ve Tercan, 1992, Proposition 2.3) den M, C_{11} koşulunu sağlar.

Tersi Önerme 3.4.7 den açıktır.

Sonuç 3.4.9. *M bir R-modül olsun. Aşağıdaki koşullardan herhangi biri sağlanırsa M modülünün CS-modül olması için gerek ve yeter koşul M nin bir C_{11}-modül olmasıdır.*

(i) Bir $M_R = R_R$ ve R Abeldir.

(ii) M modülü devirli ve R değişmelidir.

(iii) M bir çarpımsal modül ve R değişmelidir.

İspat. (i) R Abel olduğundan dolayı $End(R_R)$ de Abeldir. Şimdi $0 \neq X \leq R_R$ sağ idealini alalım. $0 \neq x_i \in X$ için $h_i : R \to R$ homomorfizmasını $h_i(r) = x_i r$ olarak tanımlayalım. O halde $X = \sum\limits_{i \in I} h_i(R)$ olup Teorem 3.4.8 (i) den sonuç elde edilir.

(ii) M modülü devirli ve R değişmeli olsun. Buradan $B_R \leq R_R$ için M, R/B ye izomorftur. Y/B R-modülü, R/B nin bir alt modülü olsun. Böylece her $y_i \in Y$ için $Y/B = (\sum\limits_{i \in I} y_i R) + B = (\sum\limits_{i \in I} y_i + B)R$ dir. $h_i : R/B \to R/B$ dönüşümü $h_i(r + B) = y_i r + B$ olarak tanımlansın. Bu durumda $h_i \in End((R/B)_R)$ olur. Buradan $Y/B = \sum\limits_{i \in I} h_i(R/B)$ dir. R değişmeli olduğundan $End((R/B)_R)$ de değişmelidir. Böylece Teorem 3.4.8 (i) den sağlanır.

(iii) Varsayalım ki, M çarpımsal ve R değişmeli olsun. $A \leq M$ olmak üzere $X = MA$ alalım. Her $a \in A$ için $h_a : M \to M$ dönüşümü $m \in M$ olmak üzere $h_a(m) = ma$ olarak tanımlansın. Bu durumda $X = MA = \sum\limits_{a \in A} h_a(M)$ dir. Ayrıca $N \leq M$ olsun. M çarpımsal olduğundan $N = MA$ olacak şekilde $A \leq M$ vardır. Her $f \in End(M_R)$ için $x \in f(N)$ ise $x = f(ma)$ dır. f homomorfizma olduğundan $x = f(ma) \in MA = N$ olur. Buradan $x \in N$ elde edilir. Böylece $f(N) \subseteq N$ olur ve N, M nin fully invariant alt modülüdür. Yani çarpımsal bir modülün her alt modülü fully invariant alt modüldür. (Birkenmeier ve diğ., 2002a, Lemma 1.9) dan $e = e^2 \in End(M_R)$ ise $e, (1-e) \in S_1(End(M_R))$ dır. M nin her alt modülü fully invariant alt modül olduğundan $e = e^2 \in End(M_R)$ için eM, M nin fully invariant alt modülü olup

$e \in S_1(End(M_R))$ ve $(1-e)M$ de M nin fully invariant alt modülü olup $(1-e) \in S_1(End(M_R))$ olur. Buradan $ex = exe$ ve $(1-e)x = (1-e)x(1-e)$ dir. Yani $ex = xe$ olduğundan e merkezleyendir. Dolayısıyla $End(M_R)$ Abeldir. Teorem 3.4.8 (i) den sonuç sağlanır.

3.5 PI-extending Modüller

Bu bölümde 2014 yılında Birkenmeier, Tercan ve Yücel tarafından CS-modüllerde her alt modül yerine projeksiyon değişmez alt modül alınarak tanımlanan önemli bir genelleme verilecektir. Her C_{11}-modül bir PI-extending modüldür. Her PI-extending modül aynı zamanda bir FI-extending modüldür. Bu önermelerin tersleri genel anlamda doğru değildir. Bu nedenle PI-extending modül sınıfı CS-modül genellemeleri arasında önemli bir yere sahiptir. Aşağıda bu modül sınıfı ile ilgili elde edilmiş sonuçlar (Birkenmeier ve diğ. 2014) kaynağından yararlanılarak verilmiştir.

Tanım 3.5.1. *M bir R-modül ve $X \leq M$ olsun. Her $e^2 = e \in End_R(M)$ için $e(X) \subseteq X$ oluyorsa X, M nin* ***projection invariant (projeksiyon değişmez)*** *alt modülü olarak adlandırılır.*

Projeksiyon değişmez alt modüller, PI-extending modül sınıfını oluşturan yapıtaşlarıdır. Bu nedenle projeksiyon değişmez alt modüller ile ilgili elde edilen temel sonuçlar verilecektir.

Aşağıdaki örnek fully invariant olmayan bir projeksiyon değişmez alt modülün var olduğunu gösterir.

Örnek 3.5.2. *R bir reel sayılar cismi ve $R[x, y, z]$ polinom halkası olsun. $R = \frac{R[x,y,z]}{(x^2+y^2+z^2-1)}$ değişmeli tamlık bölgesi olsun. $M_R = R \oplus R \oplus R$ olsun. O zaman M, fully invariant olmayan projeksiyon değişmez bir alt modül içerir.*

İspat. $K' \cong R$, K, boyutu 2 olan düzgün modüle sahip ve ayrıştırılamaz olacak şekilde $M = K \oplus K'$ dır. K_R, Birkenmeier ve diğ. (2002a) dan FI-extending modüldür ve $f^2 = f \in End(M)$ ve $f^2 = f = 0$ dır. K_R, $U_1 \oplus U_2 \leq_e K_R$ olacak şekilde U_1 ve U_2 düzgün alt modüllerine sahiptir. Bu sebeple $U_i \leq K_R$ projeksiyon değişmez alt modüldür. Ancak U_i, K_R de fully invariant bir alt modül değildir.

Ön Teorem 3.5.3. *M_R bir modül ve $M_R = M_1 \oplus M_2$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *M_1, M_R nin projeksiyon değişmez alt modülüdür.*

(ii) *M_1, M_R nin fully invariant alt modülüdür.*

(iii) $Hom_R(M_1, M_2) = 0$.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ Varsayalım ki M_1, M_R nin bir projeksiyon değişmez alt modülü ve $h \in End(M)$ olsun. $M_1 \leq_d M$ olduğundan bir $e^2 = e \in End(M)$ vardır öyle ki $M_1 = eM$ dir. $(e + he - ehe)^2 = (e + he - ehe)$ ve M_1, M_R nin bir projeksiyon değişmez alt modülü olduğundan $(e + he - ehe)M_1 \subseteq M_1$ dir. $m \in M_1$ olsun. O zaman $(e+he-ehe)m = em+hm-ehem \in M_1$ dir. Dolayısıyla $hem = hm \in M_1$ dir. Böylece M_1, M_R nin fully invariant alt modülüdür.
$(ii) \Rightarrow (i)$ M_1 in M_R nin bir fully invariant alt modülü olduğunu varsayalım. Bu durumda, her $f \in End(M)$ için $f(M_1) \subseteq M_1$ dir. Bu sebeple her $f = f^2 \in End(M)$ için $f(M_1) \subseteq M_1$ dir. Dolayısıyla M_1, M_R nin bir projeksiyon değişmez alt modülüdür.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ $\theta \in Hom_R(M_1, M_2)$ olsun. $\overline{\theta} \in End(M)$ ile $\overline{\theta} = \theta\pi_1$, M den M_1 e π_1 projeksiyonunu tanımlayalım. M_1 fully invariant alt modül ve $\pi_1^2 = \pi_1$ olduğundan $\overline{\theta}(M) = \theta\pi_1^2(M) = \theta\pi_1(M_1) = \overline{\theta}(M_1) \subseteq M_1 \cap M_2 = 0$ dir. Buradan $0 = \overline{\theta}(M_1) = \theta(M_1)$ dir. Böylece $Hom_R(M_1, M_2) = 0$ dır.
$(iii) \Rightarrow (i)$ $e = e^2 \in M$ olsun. Varsayalım ki, $m_1 \in M_1$ ve $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ iken $e(m_1) = x_1 + x_2$ olsun. Fakat π_2, M den M_2 ye bir projeksiyon iken $0 = \pi_2 e|_{M_1}$ dir. Dolayısıyla $x_2 = 0$ dır. Bu sebeple $e(M_1) \subseteq M_1$ dir. Böylece M_1, M_R nin bir projeksiyon değişmez alt modülüdür.

Ön Teorem 3.5.4. *M bir modül olsun.*

i. M nin projeksiyon değişmez alt modüllerinin herhangi bir kesişimi de M nin projeksiyon değişmez alt modülüdür.

ii. $K \leq N \leq M$ olacak şekilde K, N de projeksiyon değişmez alt modül ve N, M de projeksiyon değişmez alt modül ise o zaman K, M de projeksiyon değişmez alt modüldür.

iii. $M = \bigoplus_{i \in J} K_i$ ve A, M nin bir projeksiyon değişmez alt modülü ise o zaman π_i M nin i yinci projeksiyon homomorfizması iken $A = \bigoplus_{i \in J} \pi_i(A) = \bigoplus_{i \in J} (K_i \cap A)$ dir.

İspat. İspat açıktır.

Önerme 3.5.5. *$M = H \oplus K = L \oplus N$ ve H, M nin projeksiyon değişmez alt modülü olsun. Bu durumda $H = (H \cap L) \oplus (H \cap N)$, $L = (H \cap L) \oplus L'$, $N = (H \cap N) \oplus N'$ ve $L' \oplus N' \cong K$ olacak şekilde N nin bir N' ve L nin bir L' dik toplananı vardır.*

İspat. $L = \lambda(M), N = \mu(M)$ olmak üzere $\lambda, \mu \in End(M)$ iki idempotent ve $\lambda + \mu = 1$ olsun. H, M nin projeksiyon değişmez alt modülü olduğundan $\lambda' = \lambda|_H$ ve $\mu' = \mu|_H$ homomorfizmaları idempotenttir. Ayrıca $\lambda(H) \subseteq H$ olduğundan $\lambda(H) = \lambda(\lambda(H)) = \lambda'(\lambda(H)) = \lambda'(H)$ ve benzer olarak $\mu(H) = \mu'(H)$ elde edilir. Dolayısıyla $H = \lambda'(H) \oplus \mu'(H) = \lambda(H) \oplus \mu(H)$ dır. $\lambda(H) \subseteq H \cap L$ ve $\lambda|_{H \cap L} = i$ olduğundan $H \cap L = \lambda(H \cap L) \subseteq \lambda(H)$ elde edilir. Bu durumda $\lambda(H) = H \cap L$ ve benzer olarak $\mu(H) = H \cap N$ dir. Buradan $H = (H \cap L) \oplus (H \cap N)$ elde edilir. $L \cap H \leq_d H$, $N \cap H \leq_d H$ ve $H \leq_d M$ olduğundan $L \cap H \leq_d M$ ve $N \cap H \leq_d M$ dir. Fakat $H \cap L \subseteq L$ olduğu için $L' \leq L$ ve $N' \leq N$ vardır ki $L = (H \cap L) \oplus L'$ ve $N = (H \cap N) \oplus N'$ dir. Dolayısıyla $M = H \oplus K = L \oplus N = (H \cap L) \oplus (H \cap N) \oplus L' \oplus N' = H \oplus L' \oplus N'$ ve $L' \oplus N' \cong M/H \cong K$ dır.

Sonuç 3.5.6. *H, M nin bir ayrıştırılamaz alt modülü olsun. O zaman H, M nin projeksiyon değişmez alt modülüdür gerek ve yeter koşul $M = L \oplus N \Rightarrow H \subseteq L$ veya $H \subseteq N$ olmasıdır.*

İspat. ($\Rightarrow$) Ön Teorem 3.5.4 den, $H = (H \cap L) \oplus (H \cap N)$ dir. H bir ayrıştırılamaz alt modül olduğundan ya $H = H \cap L$ ya da $H = H \cap N$ dir. Dolayısıyla $H \subseteq L$ veya $H \subseteq N$ dir.

($\Leftarrow$) $K \leq M$ için $H = H \oplus K$ olsun. $Hom_R(H, K) = 0$ olduğunu gösterelim. $\varphi \in Hom_R(H, K)$ ve $H' = \{h + \varphi(h) \in H \oplus K : h \in H\}$ olsun. Buradan $M = H' \oplus K$ dir. Hipotezden $H \subseteq H'$ veya $H \subseteq K$ dir. $H \cap K = 0$ olduğundan $H \subseteq H'$ dir. Dolayısıyla her $h \in H$ için $h + \varphi(h) \in H'$ ve $h \in H'$ dır. Bu durumda, $\varphi(h) \in H'$ dır. Ancak $\varphi(h) \in K$ ve $H' \cap K = 0$ dır. Dolayısıyla $\varphi(h) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ dır. Ön Teorem 3.5.3 den H, M nin projeksiyon değişmez alt modülüdür.

Teorem 3.5.7. *K, M nin bir projeksiyon değişmez alt modülü olsun.*

(i) M bir G-extending modül olsun. Bu durumda $\exists M_1$, $M_2 \leq M$ modülleri vardır öyle ki $M = M_1 \oplus M_2$ ve $K \leq_e M_2$ dir.

(ii) M bir G-extending modül ve K, bir tek essential kapanışa sahip olsun. Bu durumda $\exists M_1$, $M_2 \leq M$ alt modülleri vardır öyle ki $M = M_1 \oplus M_2$, $K \leq_e M_2$ ve M_1, M_2 birer G-extending modüldür.

İspat.

(i) M, G-extending modül olduğundan bir $e^2 = e \in End_R(M)$ için $K\beta eM$ dir. Yani $K \cap eM \leq_e K$ ve $K \cap eM \leq_e eM$ dir. $k \in K$ olmak üzere $ek \in eK$ olsun. K, projeksiyon değişmez alt modül olduğundan $ek \in eK \subseteq K$ dır. Buradan $ek \in K$ ve $ek \in eM$ olduğundan $ek \in K \cap eM$ dir. O halde $eK \subseteq K \cap eM$ bulunur. Şimdi $x \in K \cap eM$ olsun. Bu durumda $x = k = em$ olacak şekilde $\exists m \in M, k \in K$ vardır. Buradan $ek = e^2m = em = k \in eK$ dır. O halde $K \cap eM \subseteq eK$ bulunur. Böylece $eK = K \cap eM$ dir. Diğer yandan, $(1-e)k \in (1-e)K$ olsun. $eK \subseteq K$ olduğundan $(1-e)k = k - ek \in K$ dır. O halde $(1-e)K \subseteq K \cap (1-e)M$ dir. Şimdi $y \in K \cap (1-e)M$ olsun. Böylece $y = k = (1-e)m$ olacak şekilde $\exists m \in M, k \in K$ vardır. Buradan

$$(1-e)k = (1-e)(1-e)m = (1-e-e+e^2)m = (1-e)m = k \in (1-e)K$$

dır. O halde $K \cap (1-e)M \subseteq (1-e)K$ dır. Böylece $(1-e)K = K \cap (1-e)M$ dir. Şimdi $K = eK \oplus (1-e)K$ olduğunu gösterelim. $K \subseteq eK + (1-e)K$ olduğu açıktır. $ek_1 + (1-e)k_2 \in eK + (1-e)K$ alalım. $eK \subseteq K$ olduğundan $ek_1 + (1-e)k_2 = ek_1 + k_2 - ek_2 \in K$ dır. O halde $eK + (1-e)K \subseteq K$ dır. Böylece $K = eK + (1-e)K$ bulunur. $a \in eK \cap (1-e)K$ olsun. Bu durumda $a = ek = (1-e)k^{'}$ olacak şekilde $k, k^{'} \in K$ elemanları vardır. Buradan $ek = e^2k = (e-e^2)k^{'} = 0$ dır. Yani $eK \cap (1-e)K = 0$ dır. Sonuç olarak, $K = eK \oplus (1-e)K$ elde edilir. $eK = K \cap eM \leq_e K$ ve $eK = K \cap eM \leq_e eM$ dir. $eK \cap (1-e)M \leq_e eM \cap (1-e)M = 0$ olduğundan $eK \cap (1-e)M = 0$ dır. $0 = eK \cap (1-e)M \leq_e K \cap (1-e)M$ olduğundan $K \cap (1-e)M = 0$ bulunur. O halde $(1-e)K = 0$ bulunur. Böylece $K = eK \oplus (1-e)K$ olduğundan $K = eK \leq_e eM$ dir. Eğer $M_1 = (1-e)M$ ve $M_2 = eM$ alınırsa $M = M_1 \oplus M_2$ ve $K \leq_e M_2$ elde edilir.

(ii) (i) den $e^2 = e \in End_R(M)$, $M_1 = (1-e)M, M_2 = eM$ ve $K \leq_e M_2$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ dir.

İddia 1. M_2 bir G-extending modüldür.

$Y \leq M_2 = eM$ olsun. M, G-extending olduğundan bir $d^2 = d \in End_R(M)$ için $Y \beta dM$ dir. Yani $Y \cap dM \leq_e Y$ ve $Y \cap dM \leq_e dM$ dir. (i) den $dK = K \cap dM$, $(1-d)K = K \cap (1-d)M$ olmak üzere $K = dK \oplus (1-d)K$ dır. $K \leq_e eM$ olduğundan $Y \cap K \leq_e Y$ dir. O halde $Y \cap K \cap dM \leq_e Y \cap dM \leq_e dM$ olduğundan $Y \cap dK \leq_e dM$ bulunur. $Y \cap dK \leq dK \leq dM$ ve $Y \cap dK \leq_e dM$ olduğundan $Y \cap dK \leq_e dK$ ve $dK \leq_e dM$ bulunur. Böylece $K = dK \oplus (1-d)K \leq_e dM \oplus (1-d)K$ dır. K nın M deki tek kapanışı eM olduğundan $dM \subseteq eM = M_2$ olur. Sonuç olarak, M_2 bir G-extending modüldür.

İddia 2. M_1 bir G-extending modüldür.

$X \leq M_1 = (1-e)M$ olsun. M, G-extending olduğundan bir $d^2 = d \in End_R(M)$

için $X\beta dM$ dir. Yani $X \cap dM \leq_e X$ ve $X \cap dM \leq_e dM$ dir. O halde $X \cap dM = X \cap dM \cap (1-e)M \leq_e dM \cap (1-e)M \leq dM$ dir. Buradan $X \cap dM \leq_e dM$ olduğundan $dM \cap (1-e)M \leq_e dM$ dir. Böylece $0 = dM \cap (1-e)M \cap eM \leq_e dM \cap eM$ olduğundan $dM \cap eM = 0$ olmalıdır. (i) den $dK = dM \cap K$, $(1-d)K = (1-d)M \cap K$ olmak üzere $K = dK \oplus (1-d)K$ dır. $dK = dM \cap K \leq dM \cap eM = 0$ olduğundan $dK = 0$ olmalıdır. O halde $K = (1-d)K \leq (1-d)M$ dir. Şimdi C, K nın $(1-d)M$ deki bir kapanışı olsun. $(1-d)M$, M nin kapalı alt modülü olduğundan C, K nın M deki bir kapanışıdır. Fakat K, M de bir tek kapanışa sahip olduğundan $C = eM \subseteq (1-d)M$ dir. Her $m \in M$ için $em = (1-d)m^{'}$ olacak şekilde bir $m^{'} \in M$ vardır. $dem = d(1-d)m^{'} = (d-d^2)m' = 0$ ve $d(1-e) = d-de = d$ dir. Böylece $[(1-e)d]^2 = (1-e)d$ dir. Şimdi $dM \cap (1-e)M \leq (1-e)dM$ olduğunu gösterelim.

$dm = (1-e)m^{'}$ olsun. $(1-e)dm = (1-e)(1-e)m^{'} = (1-e)m^{'} = dm \in (1-e)dM$ dir. O halde $dM \cap (1-e)M \leq (1-e)dM$ dir. Bir $0 = (1-e)dm \in (1-e)dM$ alalım. $dM \cap (1-e)M \leq_e dM$ olduğundan $0 = dmr \in dM \cap (1-e)M$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Böylece $0 = dmr = (1-e)dmr \in dM \cap (1-e)M$ olup $dM \cap (1-e)M \leq_e (1-e)dM$ dir. Böylece $dM\beta(1-e)dM$ bulunur. $X\beta dM$ ve $dM\beta(1-e)dM$ olduğundan $X\beta(1-e)dM$ elde edilir. Ayrıca $M_1 = (1-e)M = (1-e)(dM \oplus (1-d)M) = (1-e)dM \oplus (1-e)(1-d)M$ olduğundan $(1-e)dM \leq_d M_1$ dir. Sonuç olarak, M_1 bir G-extending modüldür.

Sonuç 3.5.8. *M, G-extending modül ve her M_i, M nin projeksiyon değişmez alt modülü olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Bu durumda her M_i, G-extending modüldür.*

İspat. Teorem 3.3.7 de $K = M_i$ alınırsa istenilen elde edilir.

Tanım 3.5.9. *M bir R-modül olmak üzere M nin her projeksiyon değişmez alt modülü, M nin bir dik toplananında essential oluyorsa M ye **PI-extending modül** denir.*

Ön Teorem 3.5.10. *M_R bir ayrıştırılamaz modül olsun. M_R bir PI-extending modüldür gerek ve yeter koşul M_R nin düzgün modül olmasıdır.*

İspat. Kabul edelim ki M_R bir düzgün modül olsun. M_R nin PI-extending modül olduğu açıktır.
Tersine, M_R ayrıştırılamaz PI-extending modül ve $0 \neq N \leq M$ olsun. Dolayısyla N, M nin projeksiyon değişmez alt modülüdür. M_R bir PI-extending modül olduğundan M nin bir L dik toplananı vardır ki $N \leq_e L$ dir. M_R bir ayrıştırılamaz modül ve $N \neq 0$ olduğundan $L = M$ elde edilir. Buradan $N \leq_e M$ dir. M_R nin düzgün modül olduğu görülür.

Ön Teorem 3.5.11. *M_R, C_{11} koşulunu sağlayan bir modül olsun. O zaman M_R PI-extending modüldür.*

İspat. N, M nin bir projeksiyon değişmez alt modülü olsun. Bu durumda M nin bir K dik toplananı vardır öyle ki $N \cap K = 0$ ve $N \oplus K \leq_e M$ dir. $M = K \oplus K'$ yi sağlayan M nin bir K' alt modülü vardır. $\pi : M \to K'$ bir projeksiyon olsun. Dolayısıyla $\pi(N) \oplus K = N \oplus K \leq_e M$ dir. Buradan $\pi(N) \oplus K \leq_e M$ dir. N, M nin bir projeksiyon değişmez alt modülü olduğundan $\pi(N) \subseteq N$ dir. $x \in N$ olsun. Buradan $x \in N \oplus K = \pi(N) \oplus K$ dir. $n \in N$ ve $k \in K$ için $x = \pi(n) + k \Rightarrow x - \pi(n) = k \in K \cap N = 0 \Rightarrow x = \pi(n) \in \pi(N)$ dir. Böylece $N \subseteq \pi(N)$ elde edilir. O zaman $N = \pi(N)$ dir. $\pi(N) \oplus K = N \oplus K \leq_e K \oplus K'$ ve $N = \pi(N) \subseteq K'$ olduğundan $N \leq_e K'$ elde edilir. Böylece M_R bir PI-extending modüldür.

Önerme 3.5.12. *M bir modül ve X, M nin bir projeksiyon değişmez alt modülü olsun. M bir PI-extending modül ise X bir PI-extending modüldür.*

İspat. M bir PI-extending modül ve S, X in bir projeksiyon değişmez alt modülü olsun. Ön Teorem 3.5.4 (ii) den, S, M nin bir projeksiyon değişmez alt modülüdür. O zaman $S \leq_e D$ olacak şekilde M nin bir D dik toplananı vardır. $\pi : M \to D$ bir projeksiyon olsun. $S \leq D$ olduğundan $S = \pi(S)$ ve $S \leq X$ olduğundan $\pi(S) \leq \pi(X)$ elde edilir. $\pi(S) = S$ ve $\pi(S) \leq_e D$ kullanılarak $S \leq \pi(X) \cap D$ elde edilir. Ancak $X \leq M$ olduğundan $\pi(X) \leq \pi(M) = D$ dir. Böylece $S = \pi(S) \leq \pi(X) \cap D = \pi(X)$ dir. $S \leq \pi(X) \leq D$ ve $S \leq_e D$ olduğundan $S \leq_e \pi(X)$ elde edilir. X, PI-extending modül olduğu için Ön Teorem 3.5.4 (iii) den $X = (D \cap X) \oplus (D' \cap X)$ elde edilir. O zaman $\pi(X) = D \cap X \Rightarrow \pi(X) \leq_d X$ dir. Böylece X bir PI-extending modüldür.

Sonuç 3.5.13. *M_R bir PI-extending modül ve M_1, M_R nin bir fully invariant dik toplanan alt modülü ise M_1 PI-extending modüldür.*

Teorem 3.5.14. *$M = \bigoplus\limits_{i \in I} X_i$ olsun. Her X_i bir PI-extending modül ise M bir PI-extending modüldür.*

İspat. Varsayalım ki her X_i bir PI-extending modül ve S, M nin bir projeksiyon değişmez alt modülü olsun. $0 \neq s \in S$ olsun. $x_i \in X_i$ için $s = x_1 + \cdots + x_n$ elde edilir. $s \neq 0$ olduğundan $i \in I$ vardır öyle ki $x_i \neq 0$ dır. Böylece $\pi_i(s) = x_i \neq 0$ dır. $f : X_i \to X_i$, $f^2 = f \in End(M)$ koşulunu sağlayan bir homomorfizma olsun. O halde $f(\pi_i(s)) = f(x_i) = x_i = \pi_i(s)$ dir. Dolayısıyla $\pi_i(S)$, X_i nin bir projeksiyon değişmez alt modülüdür. X_i bir PI-extending modül olduğundan $\pi_i(S) \leq_e D_i$ olacak şekilde bir $D_i \leq_d X_i$ vardır. Ön Teorem 3.5.4 (iii) den $S = \bigoplus\limits_{i \in I} \pi_i(S) \leq_e \bigoplus\limits_{i \in I} D_i$ elde edilir. $\bigoplus\limits_{i \in I} D_i \leq_d M$ olduğundan M bir PI-extending modüldür.

Sonuç 3.5.15. *Eğer M, CS-modüllerin bir dik toplamı ise M bir PI-extending modüldür.*

Önerme 3.5.16. *M bir PI-extending modüldür gerek ve yeter koşul M nin her S projeksiyon değişmez alt modülü için $S \leq_e e(E(M))$ ve $e(M) \subseteq M$ olacak şekilde $e^2 = e \in End(E(M))$ vardır.*

İspat. Varsayalım ki M bir PI-extending modül ve S, M nin bir projeksiyon değişmez alt modülü olsun. $S \leq_e X$ olacak şekilde M nin bir X dik toplananı vardır. O halde $M = X \oplus Y$ olacak şekilde M nin bir Y alt modülü vardır. Dolayısıyla $E(M) = E(X) \oplus E(Y)$ olacak şekilde $E(X)$ ve $E(Y)$ injektif zarfları vardır. $e : E(M) \to E(X)$ projeksiyon endomorfizma olsun. O halde $S \leq_e e(E(M))$ ve $e(M) \subseteq M$ dir.

Tersine S, M nin bir projeksiyon değişmez alt modülü olsun. $S \leq_e e(E(M))$ olduğundan $M \cap S \leq_e M \cap e(E(M))$ ve $S \leq_e M \cap e(E(M))$ dir. Ancak, $e(M) \subseteq M$ ve $e(M) \subseteq e(E(M))$ olduğundan $M \cap e(E(M)) = e(M)$ elde edilir. $e(M)$, M nin bir dik toplananıdır. Böylece M, PI-extending modüldür.

Ön Teorem 3.5.17. *M bir modül olsun. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.*

(i) *M, PI-extending modüldür.*

(ii) *M nin her projeksiyon değişmez alt modülü, M nin dik toplananı olan bir komplemente sahiptir.*

(iii) *Her $X \leq M$ projeksiyon değişmez alt modülü için, $X \leq_e L$ olacak şekilde bir $K \leq_c L$ ile M nin bir L kapalı alt modülü vardır ve her $f : L \oplus K \longrightarrow M$ homomorfizması bir $g : M \longrightarrow M$ endomorfizmasına genişler.*

İspat. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ M bir PI-extending modül ve $X \leq M$, projeksiyon değişmez alt modül olsun. Dolayısıyla tanımdan $X \leq_e eM$ olacak şekilde $e^2 = e \in End(M)$ vardır. $X \leq_e eM$ ve $(1-e)^2 = (1-e)$ olduğundan $X \cap (1-e)M \leq_e eM \cap (1-e)M = 0$ ve $X \cap (1-e)M = 0$ elde edilir. Yine $X \oplus (1-e)M \leq_e eM \oplus (1-e)M = M$ olduğundan $X \oplus (1-e)M \leq_e M$ elde edilir. Böylece $(1-e)M$ istenen komplementtir. Tersine $c^2 = c \in End(M)$ olmak üzere cM, X in bir komplementi olsun. $x \in X$ olsun. O halde $x = cx + (1-c)x$ dir. X, projeksiyon değişmez alt modül olduğundan $cx \in X \cap cM = 0$ dir. Buradan $X \subseteq (1-c)M$ dir. Dolayısıyla $X \leq_e (1-c)M$ dir. $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Bu denklik (Smith ve Tercan, 1992, Lemma 2) nin bir sonucudur.

Önerme 3.5.18. *M bir modül olsun.*

(i) *M, CS-modüldür.*

(ii) *M, C_{11} koşulunu sağlar.*

(iii) *M, PI-extending modüldür.*

(iv) M*, FI-extending modüldür.*

$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ *önermeleri sağlanır. Fakat genel olarak önermelerin tersi doğru değildir.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ açıktır.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Bu çıkarım Ön Teorem 3.5.9 un doğrudan bir sonucudur.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ M bir PI-extending modül olsun. M nin her fully invariant alt modülü bir projeksiyon değişmez alt modüldür. Bu sebeple M, FI-extending modüldür.
Şimdi sağlanmayan gerektirmelere bazı örnekler verelim.
$(ii) \not\Rightarrow (i)$ Örneğin, $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ olsun. Örnek 2.3.5 den R_R, CS-modül değildir. Ancak (Birkenmeier ve Tercan, 2015, Corollary 3.3) ten R_R bir C_{11}-modüldür.
$(iii) \not\Rightarrow (ii)$ Örneğin, $M_R = \left(\Pi_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}\right)_{\mathbb{Z}}$ (Specker grup) bir modül olsun. O zaman $M_{\mathbb{Z}}$ bir C_{11}-modül değildir.
$(iv) \not\Rightarrow (iii)$ Örneğin, R sağ Ore olmayan herhangi bir tamlık bölgesi olsun. Birkenmeier ve diğ. (2002a) den R_R, FI-extending modüldür. R_R, düzgün olmayan ayrıştırılamaz bir modül olduğundan R_R nin PI-extending modül olmadığı sonucuna varılır.

Ön Teorem 3.5.19. *M_R bir ayrıştırılamaz modül olsun. O zaman M nin bir PI-extending modül olması için gerek ve yeter koşul M_R bir düzgün modül olmasıdır.*

İspat. M_R bir ayrıştırılamaz ve PI-extending modül olsun. $0 \neq N$ nin M_R nin bir projeksiyon değişmez alt modülü olduğunu varsayalım. O zaman, $N \leq_e D$ olacak şekilde M_R nin bir D dik toplananı vardır. $N \neq 0$ olduğundan $D = M$ dir. Buradan N, M_R nin bir essential alt modülüdür. Dolayısıyla, M_R bir düzgün modüldür.
Tersine M_R bir düzgün modül olsun. M_R nin bir PI-extending modül olduğu kolaylıkla görülür.

4. ZPG-MODÜLLER

Goldie 1960 yılında “Semi-prime rings with maximum conditions” da bir halkanın sağ idealleri için bir β denklik bağıntısı tanımlamıştır. Bir M modülünün, her bir X alt modülü için $X \alpha D$ olacak şekilde M nin bir D dik toplananı varsa kolayca extending özelliğini sağladığı görülür. Extending koşulunun α ile karakterizasyonu ve Goldie (1960), Smith ve Tercan (1993) çalışmalarında yer alan β kullanımından ilham alan Birkenmeier, Tercan ve Akalan 2009 yılında G-extending modülü tanımlamışlardır.

Belirli endomorfizmalar altında değişmez kalan alt modüller ailesi için, CS-modül koşulunun bu aileye kısıtlanmasıyla elde edilen PI-extending modüller 2014 yılında Birkenmeier, Tercan ve Yücel tarafından tanımlanmıştır.

“Goldie extending property on the class of z-closed submodules” da bir modülün bütün z-kapalı alt modüllerinin kümesi üzerinde G-extending özelliğini inceleyen Tercan, Yaşar ve Yücel, G^z-extending modüllerin çeşitli temel özelliklerini sunarak 2022 yılında bu modülleri literatüre kazandırmışlardır. Ayrıca bu çalışmalarında her komplement alt modülden ziyade yalnızca her z-kapalı alt modülün bir dik toplananla β bağıntılı olması istendiğinden G^z-extending modül kavramının CS, G-extending ve CLS modülleri genelleştirdiğine dikkat çekmişlerdir. Tercan, Yaşar ve Yücel yine aynı yılda özel tipteki halkalarda da G^z-extending özelliğinin sağlandığını göstermiş ve bu özelliğin matrislere taşındığını kanıtlamışlardır.

Bu bölümde G^z-extending modüllerde z-kapalı alt modüller yerine z-kapalı projeksiyon değişmez alt modüller (zp-alt modüller) alarak elde ettiğimiz ZPG-modüller incelenmiştir. Ayrıca literatüre katkı sağlayacak bu özgün bölümde, ZPG-modüllerin alt modüllerine, dik toplananlarına, dik toplamlarına, injektif zarfına vb. taşınıp taşınmadığı ve bir önceki bölümde bahsedilen tüm modül sınıfları ile arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Bu alanda yapılacak yeni çalışmalara ışık tutmak adına elde edilen önemli sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

4.1 zp- Alt Modüller

zp-alt modüller, ZPG-modüllerin kuruluşunun yapı taşları olduğundan bu başlık altında zp-alt modüllerle ilgili elde edilen bazı temel özellikler ve sonuçlara yer verilecektir.

Tanım 4.1.1. *z-kapalı projeksiyon değişmez alt modüle zp-alt modül denir.*

Ön Teorem 4.1.2. *M bir modül olsun.*

(i) *M nin projeksiyon değişmez alt modüllerinin herhangi bir kesişimi de M nin projeksiyon değişmez alt modülüdür.*

(ii) *$K \leq N \leq M$ olacak şekilde K, N de projeksiyon değişmez alt modül ve N, M de projeksiyon değişmez alt modül ise o zaman K, M de projeksiyon değişmez alt modüldür.*

(iii) *$M = \bigoplus_{i \in J} K_i$ ve A, M nin bir projeksiyon değişmez alt modülü ise o zaman π_i M nin i yinci projeksiyon homomorfizması iken $A = \bigoplus_{i \in J} \pi_i(A) = \bigoplus_{i \in J} (K_i \cap A)$ dir.*

İspat. İspat açıktır.

Ön Teorem 4.1.3. *M_R bir modül olsun.*

(i) *M_R nin zp-alt modüllerinin herhangi bir kesişimi yine M_R nin zp-alt modülüdür.*

(ii) *X ve Y, M_R nin alt modülleri olmak üzere $X \leq Y$ olsun. Eğer X, Y nin ve Y, M_R nin bir zp-alt modülü ise, o zaman X, M_R nin bir zp-alt modülüdür.*

(iii) *M_1, M_R nin bir zp-alt modülü iken $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. M_2 nin herhangi bir N zp-alt modülü için $M_1 \oplus N$, M_R nin bir zp-alt modülüdür.*

İspat.

(i) A ve B, M_R nin zp-alt modülleri olsun. O zaman A ve B, M_R de projeksiyon değişmez alt modüldür ve $Z(M/A) = Z(M/B) = 0$ dır. Ön Teorem 3.5.4 den, $A \cap B$, M_R de projeksiyon değişmez alt modüldür. $\alpha : M \to (M/A) \oplus (M/B)$ homomorfizması ve $m \in M_R$ olmak üzere $\alpha(m) = (m+A, m+B)$ alalım. $M/(A \cap B) \cong \alpha(M) \leq (M/A) \oplus (M/B)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $Z(M/(A \cap B)) = 0$ dır. Böylece $A \cap B$, M_R nin bir zp-alt modülüdür.

(ii) X, Y nin ve Y, M_R nin bir zp-alt modülü olsun. O zaman X, Y nin ve Y, M_R nin bir projeksiyon değişmez alt modülüdür. İlaveten, $Z(M/Y) = Z(Y/X) = 0$ dır. Ön Teorem 3.5.4 den, X, M_R de projeksiyon değişmez alt modüldür. $M/Y \cong (M/X)/(Y/X)$ olduğundan, Y/X, M/X de bir z-kapalı alt modüldür. Buradan $Z(M/X) \leq Y/X$ dir. O zaman, $Z(Z(M/X)) = Z(M/X) = (M/X) \cap (Y/X) = 0$ dır. Buradan X in M_R nin bir zp-alt modülü olduğu kolayca görülür.

(iii) (Jeremy, 1971, Lemma 4.122) den $M_1 \oplus N$, M nin bir projeksiyon değişmez alt modülüdür. $M/M_1 \oplus N \cong M_2/N$ ve $Z(M_2/N) = 0$ olduğundan $M_1 \oplus N$, M nin bir z-kapalı alt modülüdür. Dolayısıyla $M_1 \oplus N$, M nin bir zp-alt modülüdür.

4.2 ZPG-Modüller

Tanım 4.2.1. *M nin her zp-alt modülü X için, $X\beta D$ (yani $X \cap D \leq_e X$ ve $X \cap D \leq_e D$) olacak şekilde bir $D \leq_d M$ varsa M ye* ***ZPG-modül*** *denir.*

Önerme 4.2.2. *M bir modül olsun.*

(i) M bir G-extending modüldür.

(ii) M bir C_{11}-modüldür.

(iii) M bir PI-extending modüldür.

(iv) M bir ZPG-modüldür.

Bu durumda $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ dir. Bu önermelerin tersleri genel olarak doğru değildir.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ Adı geçen modül sınıflarının tanımlarından kolayca elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ X, M nin bir zp-alt modülü olsun. $X \leq_e cM$ olacak şekilde $c^2 = c \in End(M_R)$ vardır. Buradan M, ZPG-modüldür.

Şimdi sağlanmayan önermelere bazı örnekler verelim.

$(ii) \not\Rightarrow (i)$ Önerme 3.3.5 de ispatı verilmiştir.

$(iv) \not\Rightarrow (iii)$ K bir cisim ve V_K, K üzerinde boyutu 2 olan bir vektör uzayı olsun. O zaman $R = \begin{bmatrix} K & V \\ 0 & K \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} k & v \\ 0 & k \end{bmatrix} : k \in K, v \in V \right\}$ bir ayrıştırılamaz R-modüldür. R düzgün modül olmadığından, Ön Teorem 3.5.5 den PI-extending modül değildir. R yalnızca $v_1, v_2 \in V$ olmak üzere $X_1 = \begin{bmatrix} 0 & v_1K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 0 & v_2K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $X_3 = \begin{bmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ aşikar olmayan R-alt modüllerine sahiptir. $\mathbb{Z}(R_R) \neq 0$ olduğundan 0, z-kapalı ideal değildir. Diğer yandan, $X_3 \leq_e R_R$ dir. Böylece R/X_3 singülerdir yani X_3, R nin z-kapalı alt modülü değildir.Dahası $X_3^2 = 0$ olduğundan $X_3^2 \leq X_1$ dir. Ancak X_3, X_1 de değildir. Buradan X_1, R nin z-kapalı alt modülü değildir, benzer bir şekilde X_2 de değildir (Kara ve Tercan, 2018, Example 5.59). R sadece kendinde z-kapalı alt modüldür. Bir ayrıştırılamaz modülün her alt modülü projeksiyon değişmez alt modül olduğundan R bir zp-alt modüldür. Dolayısıyla R_R, ZPG-modüldür.

Not (Açık Soru): Önerme 4.2.2 de $(iii) \Rightarrow (ii)$ gerektirmesinin sağlanmadığını varsayıyoruz ancak bunu destekleyecek herhangi bir örneğimiz henüz bulunmamaktadır.

Sonuç 4.2.3. *M bir ayrıştırılamaz modül olsun. M bir ZPG-modül ise, o zaman M bir C_{11}^z-modüldür.*

İspat. $0 \neq A$, M nin bir z-kapalı alt modülü olsun. Bir ayrıştırılamaz modülün her alt modülü projeksiyon değişmez alt modül olduğundan A bir zp-alt modüldür. $A\beta D$

olacak şekilde M de dik toplanan olan bir D alt modülü vardır. (Kara ve Tercan, 2018, Lemma 5.58) den A, M de bir komplement alt modüldür. Böylece $A = M$ dir. Dolayısıyla, M bir C_{11}^{z}-modüldür.

Önerme 4.2.4. *M bir modül ve $End(M_R)$ Abelian olsun. Eğer N, M nin bir z-kapalı alt modülü ise her $h_i \in End(M_R)$ için $N = \sum_{i \in I} h_i(M)$ dir. Bu durumda M nin ZPG-modül olması için gerek ve yeter koşul M nin bir CLS-modül olmasıdır.*

İspat. Varsayalım ki, M bir ZPG-modül ve N, M nin bir z-kapalı alt modülü olsun. $eN = e\sum_{i \in I} h_i(M) = \sum_{i \in I} h_i(eM) \subseteq N$ olacak şekilde $e = e^2 \in End(M_R)$ vardır. Sonuç olarak N, M nin bir zp-alt modülüdür. Hipotezden $N\beta eM$ dir. Buradan $N = eN \oplus (1-e)N$ dir. N nin M de projeksiyon değişmez alt modül olduğu göz önüne alınırsa, Ön Teorem 3.5.4 den $N = (N \cap eM) \oplus (N \cap (1-e)M)$ dir. Dolayısıyla $N \cap eM = eN$ hem eM hem de N de essentialdır. Bu nedenle $N \cap (1-e)M = 0$ dır. Böylece $N = eN$ dir. N, M nin bir z-kapalı alt modülü olduğundan $eM/N = Z(eM/N) \subseteq Z(M/N) = 0$ yani $N = eM$ dir. Sonuç olarak, M bir CLS-modül olur.

Tersine, M bir CLS-modül ve Y, M nin zp-alt modülü olsun. O zaman (Kara ve Tercan, 2018, Lemma 5.58) den Y, M nin bir dik toplananıdır. Böylece M bir ZPG-modül olur.

Şimdi ZPG-modül tanımını karakterize eden sonuçlar verilecektir.

Önerme 4.2.5. *M bir modül olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.*

(i) *M bir ZPG-modüldür.*

(ii) *Her $K \leq M$ zp-alt modülü için, $N \leq_e K$ ve $N \leq_e D$ olacak şekilde $N \leq M$ ve $D \leq_d M$ vardır.*

(iii) *Her $K \leq M$ zp-alt modülü için, $K\beta T$ olacak şekilde $T \leq_c L \leq_c K$ vardır ve her $f : T \oplus L \longrightarrow M$ homomorfizması bir $\overline{f} : M \longrightarrow M$ homomorfizmasına genişler.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ $K \leq M$, zp-alt modül olsun. Dolayısıyla tanımdan $K\beta D$ olacak şekilde M nin bir D dik toplananı vardır. $N = K \cap D$ alınırsa istenen elde edilir.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ (ii) den, $K \cap D \leq_e K$, $K \cap D \leq_e D$ ve $M = D \oplus D'$ olacak şekilde M nin D ve D' alt modülleri vardır. $D = T$ ve $D' = L$ alınırsa istenen elde edilir.
$(iii) \Rightarrow (i)$ $K \leq M$, zp-alt modül olsun. (Kara ve Tercan, 2018, Lemma 5.58) den K, M nin bir komplementidir. (Kara ve Tercan, 2018, Lemma 3.97) den, T, M nin bir dik toplananıdır. Dolayısıyla M bir ZPG-modüldür.

Teorem 4.2.6. *M bir modül olsun. M bir ZPG-modül olması için gerek ve yeter koşul her $X \leq M$ zp-alt modülü için, $X\beta e(E(M))$ ve $eM \leq M$ olacak şekilde $e^2 = e \in End(E(M))$ olmasıdır.*

İspat. X, M nin zp-alt modülü olsun. M bir ZPG-modül olduğundan $X \cap D$, X ve D de essential olacak şekilde M nin bir D dik toplananı vardır. D nin bir B komplement alt modülü için $M = B \oplus D$ olduğunu varsayalım. Buradan $E(M) = E(B) \oplus E(D)$ dir. $e : E(M) \to E(D)$ kanonikal projeksiyon olsun. Eğer $m \in M$ için $b \in B$ ve $d \in D$ olmak üzere $m = b + d$ ise o zaman $e(m) = e(d) = d$ dir. Dolayısıyla $X \cap D \leq X \cap E(D) \leq X$ ve $X \cap E(D) \leq_e X$ dir. $X \cap D \leq_e D \leq_e E(D)$ olduğundan, $X \cap D \leq_e E(D)$ dir. Bu sebeple $X\beta E(D) = X\beta e(E(M))$ dir. Ayrıca $eM \subset D \subseteq M$ dir.
Tersine, X in M nin bir zp-alt modülü olduğunu kabul edelim. Bu yüzden, $X\beta e(E(M))$ ve $eM \leq M$ olacak şekilde $e^2 = e \in End(E(M))$ vardır. Buradan, $X\beta E(D)$ olacak şekilde M nin bir D dik toplananı vardır. $X \cap D \leq_e X \cap E(D)$ olduğundan, $X \cap D$ hem X hem de $E(D)$ de essentialdır. Bu sebeple $X \cap D \leq_e D$ dir. Dolayısıyla $X\beta D$ ve X bir ZPG-modüldür.

Önerme 4.2.7. *M bir ayrıştırılamaz modül olsun. Eğer M bir ZPG-modül ve K, M nin bir zp-alt modülü ise o zaman M/K bir ZPG-modüldür.*

İspat. N/K, M/K nın zp-alt modülü olsun. M ayrıştırılamaz ve $M/N \cong (M/K)/(N/K)$ olduğundan Y, M nin bir zp-alt modülüdür. Hipotezden $N\beta eM$

olacak şekilde $e^2 = e \in End(M_R)$ vardır. K, M de projeksiyon değişmez alt modül olduğundan, $K = (K \cap eM) \oplus (K \cap (1-e)M)$ dir. Buradan $K \cap eM = K \cap (N \cap eM) \leq_e K \cap N = K$ dır. Bu sebeple $K \leq eM$ dir. Dolayısıyla eM/K M/K nın bir dik toplananıdır. $N\beta eM$ ve K, M nin bir zp-alt modülü olduğundan, (Kara ve Tercan, 2018, Proposition 1.4) den, $(N/K)\beta(eM/K)$ elde edilir. Buradan M/K nın bir ZPG-modül olduğu görülür.

4.3 ZPG-Modüllerin Dik Toplamları ve Ayrışımları

Bu kısımdan itibaren ZPG modül sınıfının dik toplamları ve toplananları incelenecektir. ZPG özelliğine sahip modüllerin dik toplamının da bir ZPG modül olduğu kanıtlanacaktır. ZPG modüllerin her dik toplananı ZPG-modül değildir. Ancak bazı koşullar yardımıyla ZPG özelliğinin dik toplananlarına taşındığı gösterilmiştir.

Teorem 4.3.1. *$M = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ bir modül olsun. Eğer her $X_i (i \in I)$ bir ZPG-modül ise o zaman M bir ZPG-modüldür.*

İspat. Bu teoremi n üzerinden tümevarımla ispatlayalım. İlk olarak $n = 2$ için doğru olduğunu gösterelim. $M = X_1 \oplus X_2$ ve N, M nin herhangi bir zp-alt modülü olsun. Ön Teorem 4.1.2 den, $N \cap X_1$, X_1 in bir zp-alt modülü ve $N \cap X_2$, X_2 nin bir zp-alt modülüdür. Öyleyse $(N \cap X_1) \cap D_1 = N \cap D_1 \leq_e D_1$ ve $N \cap D_1 \leq_e N \cap X_1$, benzer olarak $N \cap D_2 \leq_e D_2$ ve $N \cap D_2 \leq_e N \cap X_2$ olacak şekilde X_1 in D_1 ve X_2 nin D_2 dik toplananı vardır. Böylece $(N \cap D_1) \oplus (N \cap D_2) \leq N \cap (D_1 \oplus D_2) \leq D_1 \oplus D_2$ olduğundan $N \cap (D_1 \oplus D_2) \leq_e D_1 \oplus D_2$ dir. Buradan $(N \cap D_1) \oplus (N \cap D_2) \leq N \cap (D_1 \oplus D_2) \leq (N \cap X_1) \oplus (N \cap X_2) = N$ dir. O halde $N \cap (D_1 \oplus D_2) \leq_e N$ dir. $D_1 \oplus D_2$, M nin bir dik toplananı olduğundan M bir ZPG-modüldür.

Ön Teorem 4.3.2. *M bir modül ve K, M nin bir zp-alt modülü olsun. Eğer M bir ZPG-modül ise o zaman K da bir ZPG-modüldür.*

İspat. Farzedelim ki N, K nın bir zp-alt modülü olsun. Ön Teorem 4.1.2 den N, M nin bir zp-alt modülüdür. O halde $N\beta D$ olacak şekilde M nin bir D dik toplananı vardır. $\pi : M \to D$ projeksiyon endomorfizma olsun. Öyleyse $N \cap D = \pi(N \cap D) \leq \pi(K) \cap D = \pi(K)$ dır. Bundan dolayı $N \beta \pi(K)$ dır. Ön Teorem 3.5.4 den, $M = D \oplus D'$ iken $K = (D \cap K) \oplus (D' \cap K)$ dır. Böylece $\pi(K) = D \cap K$ dır. $\pi(K)$, K nın bir dik toplananıdır. Dolayısıyla K bir ZPG-modüldür.

Sonuç 4.3.3. *$M = X_1 \oplus X_2$, X_1 ve X_2 düzgün modüllerinin bir dik toplamı olsun. O zaman M nin her dik toplananı bir ZPG-modüldür.*

İspat. $0 \neq D$, M nin bir dik toplananı olsun. $D = M$ ise o zaman D, Ön Teorem 3.5.5 den ve Önerme 4.2.2 den bir ZPG-modüldür. $D \neq M$ ise D düzgün modül ve dolayısıyla bir ZPG-modüldür.

Eğer herhangi bir K dik toplananı için $M = K \oplus X' \oplus Y'$ olacak şekilde $X' \leq X$ ve $Y' \leq Y$ varsa $M = X \oplus Y$ **exchangeable (değiştirilebilir)** olarak adlandırılır (Smith ve Tercan, 1993, Definition 4).

Önerme 4.3.4. *Eğer M bir ZPG-modül, $M = X_1 \oplus X_2$ değiştirilebilir ve X_1, M nin bir zp-alt modülü ise o halde X_1 ve X_2 ZPG-modüldür.*

İspat. Teorem 4.2.8 den, X_1 bir ZPG-modüldür. X, X_2 nin bir zp-alt modülü olsun. Ön Teorem 4.1.2 (iii) den, $X_1 \oplus X$, M nin bir zp-alt modülüdür. M, ZPG-modül olduğundan $Y \leq_e X_1 \oplus X$ ve $X_i' \leq X_i$ $(i = 1, 2)$ olacak şekilde $Y \leq_e D$ ve $D \leq_d M$ vardır. M değiştirilebilir olduğundan $M = D \oplus X_1' \oplus X_2'$ dir. Dolayısıyla $Y \cap X_1' = 0$ ve $X_1' = 0$ dir. Böylece $X_2 = X_2' \oplus (D \cap X_2)$ dir. $Y \leq_e D$ ve $Y \leq_e X_1 \oplus X$ den $Y \cap X_2 \leq_e D \cap X_2$ ve $Y \cap X_2 \leq_e (X_1 \oplus X) \cap X_2 = X \oplus X_1 \cap X_2 = X$ elde edilir. Böylelikle X_2 bir ZPG-modüldür.

Bir ZPG-modülün dik toplananlarının da ZPG-modül olması için belirli koşullara ihtiyaç vardır. Bu koşullar Kara ve Tercan (2018) dan alınarak aşağıda verilmiştir.

(i) Herhangi bir $N \leq M$, M nin bir dik toplananına izomorf ise M modülü C_2 özelliğini sağlar.

(ii) N_1 ve N_2, M nin $N_1 \cap N_2 = 0$ koşulunu sağlayan herhangi iki dik toplananı ise M modülü C_3 özelliğini sağlar. O zaman $N_1 \oplus N_2$, M de bir dik toplanandır.

Önerme 4.3.5. *X_1, M nin bir zp-alt modülü olmak üzere X_1 ve X_2 modüllerinin bir dik toplamı $M = X_1 \oplus X_2$ olsun. M, C_3 özelliğini sağlayan bir ZPG-modül ise X_1 ve X_2 alt modülleri ZPG-modüldür.*

İspat. Ön Teorem 4.3.2 den X_1 bir ZPG-modüldür. X, X_2 nin herhangi bir zp-alt modülü olsun. Ön Teorem 4.1.2 (iii) den, $X_1 \oplus X$, M nin bir zp-alt modülüdür. Hipotezden $(X_1 \oplus X) \cap Y$ hem $X_1 \oplus X$ hem de Y de essential olmak üzere M nin bir Y dik toplananı vardır. M, C_3 özelliğini sağladığından $X_1 \oplus Y$, M nin bir dik toplananıdır. $\pi : X_1 \to X_2$ bir kanonikal projeksiyon olsun. (Tercan ve Yücel, 2016, Lemma 2.71) den, $X_1 \oplus Y = X_1 \oplus \pi(Y)$ dir. O zaman $\pi(Y)$, X_2 nin bir dik toplananıdır. $0 \neq y \in \pi(Y)$ ve $0 \neq x \in Y$ için $y = \pi(x)$ dir. $0 \neq xr \in (X_1 \oplus X) \cap Y$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Bu sebeple $x_1 \in X$, $m_1 \in X_1$ ve $x_2 \in Y$ iken $xr = m_1 + x_1 = x_2$ dir. Dolayısıyla $0 \neq xr = \pi(xr) = x_1 = \pi(x_2) \in X \cap \pi(Y)$ dır. Buradan yola çıkarak $X \cap \pi(Y) \leq_e \pi(Y)$ olduğu görülür. O zaman $\pi(Y) = X_2 \cap (X_1 \oplus \pi(Y)) = X_2 \cap (X_1 \oplus Y)$ dir. Ayrıca $X \cap \pi(Y) = X \cap (X_1 \oplus Y) \leq_e X$ dir. Böylece X_2 nin de bir ZPG-modül olduğu görülür.

Sonuç 4.3.6. *X_1, M nin bir zp-alt modülü olmak üzere X_1 ve X_2 modüllerinin bir dik toplamı $M = X_1 \oplus X_2$ olsun. M, C_2 özelliğini sağlayan bir ZPG-modül ise X_1 ve X_2 alt modülleri ZPG-modüldür.*

İspat. Bir modül C_2 koşulunu sağlıyor ise C_3 koşulunu da sağlayacağından Önerme 4.3.5 den ispat açıktır.

Önerme 4.3.7. *M bir modül ve X, M nin bir zp-alt modülü olsun. M bir ZPG-modül ise $e^2 = e \in End(M_R)$ vardır öyle ki $M = X_1 \oplus X_2$ ve $X \leq_e X_2$ dir.*

İspat. Varsayalım ki M bir ZPG-modül ve X, M nin bir zp-alt modülü olsun. O zaman bir $e^2 = e \in End(M_R)$ vardır ki $X \beta e M$ dir. Öte yandan X, M nin projeksiyon değişmez alt modülü olduğundan $(1-e)X = X \cap (1-e)M$ dir. Kabulden $eX \leq_e eM$ ve $eX \leq_e X$ dir. Buradan $X \cap (1-e)M = 0$ dir. Böylece $X = eX \leq_e eM$ dir. $X_1 = (1-e)M$ ve $X_2 = eM$ alınırsa ispat tamamlanır.

4.4 ZPG-Modüllerin Genişleme Özellikleri

Bu kısımda, bir modül veya halkanın ZPG essential genişlemeleri (essential extensions) araştırılmaktadır. Bir halka sağ ZPG-modül ise essential üst halkası (essential overring) da bir ZPG-modüldür. Son olarak ZPG özelliğinin bir modülün rasyonel zarfına (rational hull) taşındığı da gösterilmiştir.

Tanım 4.4.1. *$R_R \leq_e S_R$ olmak üzere S, R nin bir üst halkası ise S, R halkasının bir sağ essential üst halkasıdır (Tercan ve Yücel (2016)).*

Teorem 4.4.2. *S, R halkasının bir sağ essential üst halkası olsun. R_R bir ZPG-modül ise o zaman S_R ve S_S, ZPG-modüldür.*

İspat. Y_R, S_R nin bir zp-alt modülü ve $X = Y \cap R$ olsun. Önerme 4.2.5 den, $K_R \leq_e X_R$ ve $K_R \leq_e eR_R$ olmak üzere $e^2 = e \in R$ ve $K_R \leq R_R$ vardır. O zaman $K_R \leq_e X_R = Y \cap R \leq_e Y \cap S = Y_R$ dir. Bu sebeple $K_R \leq_e Y_R$ dir. $0 \neq es \in eS$ olsun. O zaman $0 \neq esr_1 \in eR$ olmak üzere $r_1 \in R$ vardır. Buradan $D \neq esr_1r_2 \in K$ olacak şekilde $r_2 \in R$ vardır. Dolayısıyla $K_R \leq_e eS_R$dir. Önerme 4.2.5 den, S_R bir ZPG-modüldür. Benzer olarak KS_S nin Y_S ve eS_S de essential olduğu gösterilir. Böylece S_S bir ZPG-modüldür.

Önerme 4.4.3. *$T = T_m(R)$ ve $M = M_m(R)$ olsun. T_T, ZPG-modül ise o zaman M_T ve M_M, ZPG-modüldür.*

İspat. M, T nin rasyonel genişlemesi olduğundan ve Teorem 4.3.8 den istenen elde edilir.

Aşağıdaki teorem ZPG özelliğini sağlayan bir modülün rasyonel zarfının da ZPG özelliğini sağladığını gösterir.

Teorem 4.4.4. *M bir ZPG-modül ise M nin rasyonel zarfı $\tilde{E}(M)$ de ZPG-modüldür.*

İspat. Varsayalım ki K, $\tilde{E}(M)$ in bir zp-alt modülü olsun. O zaman Ön Teorem 4.1.2 (ii) den $X = K \cap M$, M nin bir zp-alt modülüdür. Hipotezden, $Y \leq M_R$ ve $e^2 = e \in End(M_R)$ vardır öyle ki $Y \leq_e X$ ve $Y \leq_e eM$ dir. $Y \leq_e K$ idi. (Lam 1999) den $f \in End(\tilde{E}(M))$ vardır öyle ki $f|_M = e$ dir. $E(M)$ injektif olduğundan $\overline{e} \in End(\tilde{E}(M))$ vardır öyle ki $\overline{e}|_{\tilde{E}(M)} = f$ dir. $m \in M$ olsun. O zaman $[\overline{e} - \overline{e}^2](m) = (e - e^2)(m) = 0$ dir. $\tilde{E}(M)$ ın tanımından her $y \in \tilde{E}(M)$ için $[\overline{e} - \overline{e}^2](y) = 0$ dir. Dolayısıyla $f = f^2$ dir. $k \in K$ için $fk - k \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $0 \neq (fk - k)r$ ve $kr \in M$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. O zaman $kr \in X$ dir. Bu nedenle $(fk - k)r = fkr - kr = ekr - kr = 0$ dir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $K \leq f\tilde{E}(M)$ dir. $0 \neq fr \in \tilde{E}(M)$ olsun. $0 \neq frs$ ve $rs \in M$ olacak şekilde $s \in R$ vardır. O halde $0 \neq frst \in X \leq K$ dır. Buradan $K \leq_e f\tilde{E}(M)$ dir. Dolayısıyla, $\tilde{E}(M)$ bir ZPG-modüldür.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında CS-modülleri ve bu modül sınıfının bazı genellemelerini detaylı olarak inceleyerek ve var olan sonuçlardan istifade ederek yeni bir modül sınıfı elde ettik. ZPG-modül olarak adlandırdığımız bu modüller ile alakalı elde edilen veriler dördüncü bölümde açıkça ifade edilmiştir.

6. KAYNAKLAR

Akalan, E., Birkenmeier, G. F., Tercan, A., "Goldie Extending Modules", *Communications in Algebra*, (2009).

Birkenmeier, G. F., Calugareanu, G., Fuchs, L., Goeters, H. P., "The fully invariant extending property for Abelian groups", *Communications in Algebra*, (673-685), (2001).

Birkenmeier, G. F., Müller, B. J., Rivzi, S. T., "Modules in which every fully invariant submodule is essential in a direct summand", *Communications in Algebra*, (1395-1415), (2002).

Birkenmeier, G. F., Park, J. K., Rivzi, S. T., "Modules with fully invariant submodule essential in fully invariant summands", *Communications in Algebra*, (1833-1852), (2002).

Birkenmeier, G. F., Tercan, A., Yücel, C. C., "The Extending Condition Relative to Sets of Submodules", *Communications in Algebra*, (2014).

Birkenmeier, G. F., Tercan, A., "When some complement of a submodule is a summand", *Communications in Algebra*, (2015).

Chatters, A.W., Hajarnavis, C.R., "Rings in which every complement right ideal is a direct summand", *Quarterly Journal of Mathematics: Oxford Journal*, (1977).

Dung, N. V., Huynh, D. V., Smith, P. F., Wisbauer, R., "Extending Modules", *Longman Scientific and Technical*, Harlow, Essex, England, (1994).

Goldie, A. W., "The structure of prime rings under ascending chain conditions", *Proc. London Math. Soc.*, (589-608), (1958).

Goldie, A. W., "Semi-prime rings with maximum conditions", *Proc. London Math. Soc.*, (201-220), (1960).

Goodearl, K. R., *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*, Marcel, Dekker, New York (1976).

Hungerford, T. W., *Algebra*, Springer-Verlag, New York (1980).

Jeremy, L., "Sur les modules et anneaux quasi-continus", *Comptes Rendus de Academie Sciences*, Paris, (1971).

Jeremy, L., "Modules et anneaux quasi-continus", *Canadian Mathematical Bulletin*, (217-228) (1974).

Kara, Y., Tercan, A., "When some complement of a z-closed submodule is a summand", *Communications in Algebra*, (2018).

Kasch, F., *Modules and Rings*, Academic Press., New York, London, (1982).

Lam, T. Y., *Lectures on Modules and Rings*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (1999).

Mohamed, S. H., Bouhy, T., "Continuous modules", *Arabian J. Sci. Eng.*, 107-122 (1977).

Mohamed, S., Muller, B. J., "Continuous and Discrete Modules", *Cambridge Univ. Press.*, (1990).

Passman, D. S., *The Algebraic Structure of Group Rings*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, New York, (1977).

Sandomierski, F. L., "Nonsingular Rings", *Proceedings of the American Mathematical Society*, (225-230), (1968).

Smith, P. F., "CS-modules and weak CS-modules", Noncommutative Ring Theory, Springer LNM, (1990).

Smith, P. F., Tercan, A., "Continuous and quasi-continuous modules", *Houston J. Math.*, (1992).

Smith, P. F., Tercan, A., "Generalizations of CS-modules", *Communications in Algebra*, (1993).

Smith, P. F., Tercan, A., "Direct summands of modules which satisfy (C_{11})", *Algebra Colloq.*, (2004).

Takeuchi, T., "On direct modules", *Hokkaido Math. J.*, (168–177), (1972).

Takıl, F., "Mutlak Dik Toplanan Özelliğine Sahip Modüller Üzerine", Yüksek Lisans Tezi, *Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir, (2003).

Takıl, F., "Genelleştirilmiş CS-Modüller ve Genişleme Özellikleri Üzerine Araştırmalar", Doktora Tezi, *Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir, (2008).

Taştan, E., "Genelleştirilmiş Extending Koşulları Üzerine Araştırmalar", Yüksek Lisans Tezi, *Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir, (2021).

Tercan, A., "On certain CS-rings", *Communications in Algebra*, (1995a).

Tercan, A., "On CLS-modules", *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, (1995b).

Tercan, A., Yücel, C. C., *Module Theory, Extending Modules and Generalizations*, Springer, Bassel, (2016).

Tercan, A., Yaşar, R., Yücel, C. C., "Goldie extending property on the class of z-closed submodules", *Korean Math Society*, (2022).

Utumi, Y., "On continuous regular rings", *Canadian Mathematical Bulletin*, (1961).

Utumi, Y., "On continuous rings and self-injective rings", *Transactions of the American Mathematical Society*, (1965).

von Neumann, J., "Continuous geometry", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 22, (92-100), (1936).

von Neumann, J., "Examples of countinous geometries", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 22, (101-108), (1936).

Yücel, C.C., "CS-modüller ve genelleştirilmiş CS-halka ve modül sınıfları üzerine araştırmalar", Doktora Tezi, *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, (2008).