



**RIEMANN MANİFOLDLARI ARASINDAKİ RIEMANN
DÖNÜŞÜMLERİN KARAKTERİZASYONLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SENA NUR DOĞDU

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**MERSİN
TEMMUZ - 2024**

**RIEMANN MANİFOLDLARI ARASINDAKİ RIEMANN
DÖNÜŞÜMLERİN KARAKTERİZASYONLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**SENA NUR DOĞDU
ORCID ID: 0009-0008-6396-8031**

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. ŞEMSİ EKEN MERİÇ
ORCID ID: 0000-0003-2783-1149**

**MERSİN
TEMMUZ 2024**

ÖZET

RIEMANN MANİFOLDLARI ARASINDAKİ RIEMANN DÖNÜŞÜMLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmanın amacı, Riemann manifoldları arasındaki Riemann dönüşümlerin total ve baz uzaylarının Ricci soliton ve Ricci-Yamabe soliton olma durumlarını çalışmaktır.

Tez beş ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, konu ile ilgili tarihsel gelişmeler ve literatürdeki yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, araştırılan konuya kaynak sağlayan bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde Riemann manifoldları arasındaki Riemann dönüşümler ele alınmış olup bir Riemann dönüşümünün total ve baz uzaylarının Ricci soliton olma durumunda $\mathcal{C}ekF_*$, $RangeF_*$ ve $(RangeF_*)^\perp$ uzaylarının Ricci soliton veya Einstein olması için gerek ve yeter koşullar incelenmiştir. Daha sonra ise benzer şekilde Riemann dönüşümünün total ve baz uzaylarının Ricci-Yamabe soliton olma durumunda $\mathcal{C}ekF_*$, $RangeF_*$ ve $(RangeF_*)^\perp$ uzaylarının Ricci-Yamabe soliton veya Einstein olması için gerek ve yeter koşullar ortaya koyularak bunlarla ilgili karakterizasyonlar verilmiştir. Total ve baz uzaylarının liflerinin Ricci-Yamabe soliton ve Einstein olması için gerekli koşullar elde edilmiştir. Beşinci bölümde ise bu tez çalışmasının sonuçları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Riemann Dönüşümler, Riemann Manifoldlar, Ricci Soliton, Ricci-Yamabe Soliton.

Danışman: Doç. Dr. Şemsi Eken Meriç, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

CHARACTERIZATIONS OF RIEMANNIAN MAPS BETWEEN RIEMANNIAN MANIFOLDS

The purpose of this study as a master's thesis is to investigate the results arising from Riemannian maps between Riemannian manifolds when the total and base spaces of such Riemannian maps are Ricci soliton and Ricci-Yamabe soliton.

The thesis consists of five main chapters. The first chapter of thesis is devoted to introduction. In the second chapter, historical developments related to the topic and previous studies in the literature are discussed. In the third chapter, basic definitions and theorems providing sources for the researched topic are included.

The fourth chapter investigates Riemannian map between Riemannian manifolds. Firstly, Riemannian map whose total manifold or base manifold admits a Ricci soliton is investigated and some necessary conditions for which any fiber of $KerF_*$, $RangeF_*$ and $(RangeF_*)^\perp$ admits a Ricci soliton or Einstein is obtained. Later on, similarly focusing on Riemannian map whose total manifold or base manifold admits a Ricci-Yamabe soliton and some necessary conditions for which any fiber of $KerF_*$, $RangeF_*$ and $(RangeF_*)^\perp$ admits a Ricci-Yamabe soliton or Einstein is obtained. In the fifth chapter, the results of this thesis are given.

Keywords: Riemann Maps, Riemann Manifolds, Ricci Soliton, Ricci-Yamabe Soliton.

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Şemsi Eken Meriç, Department of Mathematics, Mersin University, Mersin

TEŞEKKÜR

Bu tez alıőmasının her aőamasında bana rehberlik eden, zamanı, emeği, sabrı ve yardımlarıyla desteğini hiç eksik etmeyen, birlikte çalıőmaktan büyük mutluluk duyduğum ve ęrencisi olmaktan dolayı kendimi çok őanslı hissettiğim Doç. Dr. şemsi Eken Meriç'e en derin teőekkürlerimi sunarım.

Eęitim hayatım boyunca bana her daim destek olan, sevgileri ve teővikleriyle yanımda olan babam Mehmet Doğdu ve annem Esra Doğdu'ya sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca, değerli tecrübeleriyle bana yol gösteren baőta çalıőma arkadaőım Arő. Gör. Dr. őeyda Sezgek olmak üzere Mersin Üniversitesi Matematik bölümü hocalarıma ve beni daima cesaretlendiren arkadaőlarıma gönülden teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇ KAPAK	i
ONAY	ii
ETİK BEYAN	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM	5
3.1. Tensörlerle İlgili Temel Kavramlar	5
3.2. Diferansiyellenebilir Manifoldlar ve Distribüsyonlar	8
3.3. Riemann Manifoldlar	10
3.4. Riemann Altmanifoldlar	14
3.5. Riemann Submersiyonlar	16
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	25
4.1. Riemann dönüşümler	25
4.1.1. Riemann dönüşümleri için Gauss-Weingarten formülleri	26
4.1.2. Ricci, Gauss ve Codazzi denklemleri	29
4.1.3. Total Jeodezik Riemann dönüşümleri	38
4.1.4. Bir Riemann dönüşümünün Total uzayı üzerindeki Einstein metriği	39
4.2. Total manifoldu Ricci soliton olan Riemann dönüşümleri	40
4.2.1. Riemann dönüşümlerin total manifoldunun Skaler eğriliği	46
4.3. Baz manifoldu Ricci soliton olan Riemann dönüşümleri	49
4.4. Total Manifoldu Ricci-Yamabe soliton olan Riemann dönüşümleri	56
4.5. Baz manifoldu Ricci-Yamabe soliton olan Riemann dönüşümleri	61
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	67
KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ	72

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltma/Simge	Tanım
M	Riemann manifoldu
$[,]$	Lie parantez operatörü
TM	Tanjant demeti
$T^p M$	p noktasındaki tanjant uzay
$\Gamma(TM)$	M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi
\mathbb{R}	Reel sayılar
\mathbb{R}^n	n - boyutlu Öklid uzayı
$\Gamma(TM)^\perp$	M manifoldunun normal demeti
s	Manifoldun skaler eğriliği
h	Altmanifoldun ikinci temel formu
r	Liflerin boyutu
H	Ortalama eğrilik vektör alanı
N	Liflerin ortalama eğrilik vektör alanı
$F^{-1}(p)$	Vektör demetinin lifi
∇	Lineer konneksiyon
F_*	F dönüşümünün türev dönüşümü
τ	Torsiyon tensörü
R	Riemann eğrilik tensörü
Ric	Ricci tensörü
A_ν	Weingarten temel tensörü
$T_U V, A_X Y$	O'Neill tensörleri
L_ξ	Lie türevi
g	Metrik tensörü

1. GİRİŞ

Riemann manifoldları arasındaki diferansiyellenebilir dönüşümler teorisi Riemann geometrisinde geniş çapta araştırılmıştır. Bu tür dönüşümler iki manifold arasındaki geometrik yapıları karşılaştırmak için oldukça kullanışlıdır. İzometrik immersiyonlar bu tür dönüşümlerin temelidir ve Riemann metrikleri ve Jakobiyen matrisleri ile karakterize edilirler. Daha açık olarak, (M, g_1) ve (B, g_2) Riemann manifoldları olmak üzere, $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ diferansiyellenebilir dönüşümü verilsin, F_* türev dönüşümü birebir ve X ve Y , M 'de teğet vektör alanlarını göstermek üzere

$$g_2(F_*X, F_*Y) = g_1(X, Y) \quad (1.1)$$

eşitliği sağlanıyorsa F dönüşümü izometrik immersiyon olarak adlandırılır. Diğer yandan Riemann manifoldları arasında tanımlı Riemann submersiyonlar ise birbirinden bağımsız olarak O'Neill ve Gray tarafından çalışılmıştır (O'Neill, 1966; Gray, 1967). (M, g_1) ve (B, g_2) birer Riemann manifoldları olmak üzere, $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ dönüşümü için eğer, F_* türev dönüşümü örten (üzerine) ise ve $(\text{Çek}F_*)^\perp$ yatay uzayına ait olan vektör alanları (1.1) denklemini sağlarsa bu durumda F bir Riemann submersion olarak adlandırılır.

Diğer taraftan, (M, g) bir Riemann manifoldu olmak üzere M üzerindeki bir ξ vektör alanı için,

$$\frac{1}{2}(L_\xi g)(X, Y) + Ric(X, Y) + \lambda g(X, Y) = 0, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \quad (1.2)$$

denklemini sağlanırsa (M, g) Riemann manifoldu bir Ricci soliton yapısına sahiptir, denir. Burada Ric , M 'nin Ricci tensörünü, $L_\xi g$, g metrik tensörünün ξ 'ye göre Lie türevini ve λ ise bir sabiti göstermektedir. Bu durumda bir Ricci soliton (M, g, ξ, λ) ile gösterilir. Ayrıca (1.2) eşitliğinde eğer $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ veya $\lambda > 0$ ise (M, g, ξ, λ) Ricci solitonuna sırasıyla daralan, durağan veya genişleyendir denir. (1.2) denkleminde verilen ξ vektör alanının bir killing olması (yani $L_\xi g = 0$) durumunda ise M Einstein manifoldu olarak adlandırılır. Ayrıca (M, g) Riemann manifoldu üzerinde, $L_\xi g = 2fg$ ise bu durumda ξ vektör alanı M Riemann manifoldu üzerinde konformaldir denir. Burada f , ξ 'nin potansiyel fonksiyonu olarak adlandırılır.

Benzer şekilde (M, g) bir Riemann manifoldu olmak üzere M üzerinde bir ξ vektör alanı için,

$$\frac{1}{2}(L_{\xi}g)(X, Y) + \sigma Ric(X, Y) + (\lambda - \frac{\rho}{2})g(X, Y) = 0, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \quad (1.3)$$

denklemini sağlanırsa (M, g) Riemann manifoldu bir Ricci-Yamabe soliton yapısına sahiptir, denir ve Ricci-Yamabe soliton $(M, g, \xi, \lambda, \sigma, \rho)$ ile gösterilir. Burada ρ M üzerindeki skaler eğriliği, σ ise bir sabiti göstermektedir. Benzer şekilde bir $(M, g, \xi, \lambda, \sigma, \rho)$ Ricci-Yamabe solitonu için eğer $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ veya $\lambda > 0$ ise bu durumda Ricci-Yamabe solitona sırasıyla daralan, durağan veya genişleyendir, denir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Riemann dönüşümleri kavramı, 1992 yılında Fischer tarafından Eikonel denklemlerini sağlayan genelleştirilmiş altmanifoldlar ve Riemann submersiyonları şeklinde tanıtılmıştır. Riemann dönüşümler, geometrik optik ile fiziksel optik arasında bir bağlantı kurmada oldukça elverişlidir (Fischer, 1992). Fischer ayrıca, bir kuantum modeli oluşturma yaklaşımı önermiş ve Riemann dönüşümlerini kullanarak böyle bir programın başarısını ortaya koymuştur. Bu yaklaşım, matematiksel açıdan Riemann manifoldları, harmonik dönüşümler ve Lagrangian alan teorisi arasında heyecan verici bir ilişki sağlamaktadır. Ayrıca, Riemann dönüşümler yardımıyla fiziksel açıdan Maxwell denklemi ve Schrödinger denklemi arasında önemli bir bağlantı kurulabilmektedir. Bu ilişki, hem matematiksel hem de fiziksel açıdan önemli sonuçlara yol açabilecek potansiyele sahiptir. Bu nedenle, Riemann dönüşümlerin, optik ve kuantum fiziği alanında derinlemesine araştırmalar için bir temel oluşturduğu aşikardır.

Diğer yandan konformal dönüşümler tıbbi görüntüleme ve bilgisayar grafiklerinde, harmonik dönüşümler ise hem global analiz hem de diferansiyel geometride önemli olup matematik ve fizik alanında geniş uygulamalara sahiptir (Eells ve Sampson, 1964).

Altmanifoldların teorisi, Gauss'un Öklidyen uzayların yüzeyleri üzerinde yaptığı çalışmalara dayanmaktadır. Öte yandan, Riemann manifoldları arasında Riemann submersiyonlarının incelenmesi O'Neill ve Gray tarafından başlamıştır (O'Neill, 1966; Gray, 1967). Daha sonra, bu kavram geniş çapta çalışılmış olup geometrik özellikleri incelenmiştir (Falcitelli, Ianus ve Pastore, 2004). İnvaryant, anti-invaryant ve slant submersiyon gibi yeni Riemann submersiyon türleri tanıtılmış olup bu submersiyonların geometrik yapıları ortaya koyulmuştur (Şahin, 2017).

Ayrıca literatürde, Akyol ve Şahin tarafından bazı özel Riemann dönüşümler üzerine birçok çalışmalar da mevcuttur (Akyol ve Şahin, 2018; Akyol ve Şahin, 2019; Şahin, 1996; Şahin, 2014).

Öte yandan, yatay konform dönüşümler, Fuglede ve Ishihara tarafından tanımlanmış olup bu tür dönüşümler Riemannian submersiyonların bir genelleştirmesidir (Fuglede, 1978; Ishihara, 1979). Dahası, Şahin Riemannian manifoldlar arasındaki konformal Riemannian dönüşümlerin geometrisini kapsamlı bir şekilde ortaya koymuştur (Şahin, 2010).

Son yirmi yılda geometrik akışlar Riemann geometrisindeki geometrik yapıları tanımladığından dolayı literatürde yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Metriklerin difeomorfizmlerle evrildiği belirli bir çözüm kesiti, akışların tekilliklerinin incelenmesinde önemli bir yere sahiptir, çünkü bunlar olası tekillik modelleri olarak ortaya çıkar. Bunlara çoğunlukla soliton çözümleri denir. Ricci soliton 1988'de Hamilton tarafından tanımlanmıştır (Hamilton, 1988). Bir Ricci solitonu, bir Einstein metriğinin doğal bir genelleştirilmesidir.

Yamabe akış, Ricci akış ile eş zamanlı olarak Hamilton tarafından tanıtılmıştır (Hamilton, 1988). Ricci soliton ve Yamabe soliton sırasıyla Ricci akış ve Yamabe akışın özel çözümleridir. Ricci soliton ve Yamabe soliton $m > 2$ boyutu için özdeş olmamalarına rağmen $m = 2$ boyutu için

eşdeğerlerdir. Ricci soliton ve Yamabe solitonun bir genelleştirilmesi olarak Ricci-Yamabe solitonu, Ricci-Yamabe akışın solitonunun sabit noktası olarak ortaya çıkar.

Bu tez çalışmasında Riemann dönüşümler tanımlanarak bir Riemann dönüşümünün total jeodezik olması için gerek ve yeterli koşullar verilmiş daha sonra Riemann dönüşümünün total uzayının bir Einstein manifoldu olması için gerek ve yeterli koşullar incelenmiştir. Riemann manifoldlar arasında tanımlı bir Riemann dönüşümünün total manifoldunun Ricci soliton olması durumunda, böyle bir dönüşümün herhangi bir lifinin Ricci soliton, hemen hemen Ricci soliton veya Einstein olması için gerekli koşullar incelenmiştir. Ayrıca böyle bir Riemann dönüşümünün $RangeF_*$ uzayının Ricci soliton veya Einstein olması için gerekli koşullar elde edilmiş olup total manifoldun herhangi bir lifi ve $RangeF_*$ uzayının skaler eğriliği hesaplanmıştır. Devamında, Riemann manifoldları arasında tanımlı bir Riemann dönüşümünün baz manifoldunun Ricci soliton olması durumunda, $RangeF_*$ uzayının liflerinin Ricci soliton, hemen hemen Ricci soliton veya Einstein olması için gerekli koşullar incelenmiştir. Ayrıca $(RangeF_*)^\perp$ uzayının liflerinin Ricci soliton veya Einstein olması için gerekli koşullar belirlenmiş ve Ricci soliton kullanılarak $RangeF_*$ ve $(RangeF_*)^\perp$ uzaylarının skaler eğrilikleri hesaplanmıştır. Son olarak ise söz konusu dönüşümlerin total ve baz uzaylarının Ricci-Yamabe soliton olmaları durumunda, $\mathcal{C}ekF_*$, $RangeF_*$ ve $(RangeF_*)^\perp$ uzaylarının liflerinin Ricci-Yamabe soliton veya Einstein olması için gerekli koşullar belirlenmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ileriki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel bilgiler sunulmuştur. Beş alt bölümden oluşan bu kısımda sırasıyla; tensörlerle ilgili temel kavramlar, diferansiyellenebilir manifoldlar ve distribüsyonlar, Riemann manifoldlar, Riemann altmanifoldlar, Riemann submersiyonlar ile ilgili temel bilgilere yer verilmiştir.

3.1. Tensörlerle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1. V ve U , K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. Bir $F : V \rightarrow U$ dönüşümü aşağıdaki iki şartı sağlarsa bir lineer dönüşüm veya lineer transformasyon olarak adlandırılır.

- 1) Herhangi $u, t \in V$ vektörleri için $F(u+t) = F(u) + F(t)$,
- 2) Herhangi k skaları ve herhangi $u \in V$ için $F(ku) = kF(u)$ (Lipschutz; Lipson, 2009).

Tanım 3.1.2. V , K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $u, v \in V$ ve $a, b \in K$ için bir $\alpha : V \rightarrow K$ dönüşümü

$$\alpha(au + bv) = a\alpha(u) + b\alpha(v)$$

eşitliği sağlıyorsa lineer fonksiyonel olarak adlandırılır. Başka bir deyişle, V üzerinde bir lineer fonksiyonel V den K ye bir lineer dönüşümdür. $\alpha_1, \alpha_2, k \in F$, V 'de lineer fonksiyoneller olmak üzere, K cismi üzerindeki bir V vektör uzayında tanımlı fonksiyonellerin kümesi olmak üzere,

- 1) $(\alpha_1 + \alpha_2)(v) = \alpha_1(v) + \alpha_2(v)$
- 2) $(k\alpha)(v) = k\alpha(v)$

şeklinde tanımlanan toplama ve skaler çarpmaya göre K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayı V nin dual uzayı olarak adlandırılır ve V^* ile gösterilir (Lipschutz; Lipson, 2009).

Teorem 3.1.3. K cismi üzerindeki V vektör uzayının bazının $\{v_1, \dots, v_n\}$ olsun. Bu durumda $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V^*$ lineer fonksiyonelleri

$$\alpha_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ kümesi V^* dual uzayının bir bazıdır (Lipschutz; Lipson, 2009).

Tanım 3.1.4. V , sonlu boyutlu K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V üzerinde bir bilinear form, her $a, b \in K$ ve her $u_i, v_i \in V$ için,

- i) $f(au_1 + bu_2, v) = af(u_1, v) + b(u_2, v),$
- ii) $f(u, av_1 + bv_2) = af(u, v_1) + bf(u, v_2),$

olacak şekilde bir $f: V \times V \rightarrow K$ bir dönüşümdür. f bilinear formu $\forall v \in V$ için $f(v, v) \geq 0$, $f(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ bilinear formu eşitliğini sağlıyorsa f bilinear formu pozitif tanımlıdır denir (Lipschutz; Lipson, 2009).

Örnek 3.1.5. \mathbb{R}^n vektör uzayında $u = (u_i)$ ve $v = (v_i)$ vektörleri için

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

ile tanımlanan skaler çarpımını göze alalım. Bu durumda \langle, \rangle dönüşümü simetrik ve pozitif tanımlı bir bilinear formdur (Hacısalıhoğlu, 1985).

Tanım 3.1.6. V bir vektör uzayı ve V^* da V vektör uzayının dual bazı olsun. Bu durumda

$$\mathcal{G}: V \times V \dots \times V^* \times V^* \times \dots \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$$

ile tanımlanan ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ ve $v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^* \in V^*$ için

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, \lambda_1 v_k + \lambda_2 v_k, v_{k+1}, \dots) \\ &= \lambda_1 \mathcal{G}(v_1, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \dots) + \lambda_2 \mathcal{G}(v_1, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \dots) \end{aligned}$$

koşulunu sağlayan \mathcal{G} dönüşümüne m . mertebeden kovaryant ve n . mertebeden kovaryant tensör adı

verilir. Burada $v_k, v'_k \in V$ veya V^* dır. Böylece bir tensör her bir değişkenine göre lineer olan bir dönüşümdür. Genel olarak m . mertebeden kovaryant ve n . mertebeden kovaryant tensörlerin kümesi \mathfrak{S}_n^m ile gösterilir (Şahin, 2012a).

Tanım 3.1.7. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. Eğer $\forall x, y, z \in X$ için,

- i) $x = y$ için $d(x, y) > 0$,
- ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

koşullarını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir. X bir küme ve d de bu küme üzerinde bir metrik ise, d metriği bu küme üzerinde bir tek topoloji üretir. Böylece bir metrik uzay üzerinde topoloji tanımlamak her zaman mümkündür (Şahin, 2012a).

Örnek 3.1.8. \mathbb{R} reel sayılar kümesi olmak üzere,

$$\mathbb{R}^m = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) : x_i \in \mathbb{R}\},$$

kümesi verilsin. $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$ için,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}$$

tanımlanan d fonksiyonu, \mathbb{R}^m üzerinde bir metrik tanımlar. Böylece (\mathbb{R}^m, d) ikilisi bir metrik uzaydır. Bu metrik uzaya Öklid uzayı denir (Şahin, 2012a).

Tanım 3.1.9. K cismi üzerinde V bir vektör uzayı ve $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ dönüşümü,

- 1) bilineer,
- 2) alterne, yani $\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$,
- 3) $\forall X, Y, Z \in V$ için $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,

şartlarını sağlıyor ise $[\cdot, \cdot]$ dönüşümüne V üzerinde Lie operatörü denir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 3.1.10. \mathbb{R}^n üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\Gamma(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda,

$$[,] : \Gamma(\mathbb{R}^n) \times \Gamma(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Gamma(\mathbb{R}^n)$$

dönüşümü, $\forall X, Y \in \Gamma(\mathbb{R}^n)$ ve $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ için,

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

olarak tanımlanırsa, $[,]$ bir Lie operatörüdür (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 3.1.11. $\Gamma(\mathbb{R}^n)$ üzerinde $[,]$ Lie operatörü verilsin. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(\mathbb{R}^n)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ için,

- 1) $[X, Y](fg) = f[X, Y](g) + g[X, Y](f),$
- 2) $[fX, gY] = fX(g)Y - gY(f)X + fg[X, Y],$
- 3) $[X, X] = 0,$

eşitlikleri sağlar (Hacısalıhoğlu, 1983).

3.2. Diferansiyellenebilir Manifoldlar ve Distribüsyonlar

Tanım 3.2.1. Boyutu n olan bir diferansiyellenebilir bir manifold, M kümesi ve \mathbb{R}^n 'in açık kümeleri U_α için, M 'de bir birebir $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ dönüşümlerin ailesidir, öyle ki;

- i) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M.$
- ii) $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ olan herhangi bir α, β çifti için $x_\alpha^{-1}(W)$ ve $x_\beta^{-1}(W)$ açık kümeleri \mathbb{R}^n 'de olup $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ dönüşümleri diferansiyellenebilirdir.
- iii) $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ ailesi, i) ve ii) koşulları için maksimaldir.

(U_α, x_α) çifti ya da x_α dönüşümü, p noktasındaki M 'nin parametrelendirilmesi olarak adlandırılır ve $x_\alpha(U_\alpha)$ da p noktasındaki koordinat komşuluğu olarak adlandırılır. i) ve ii) koşullarını sağlayan $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ ailesine de diferansiyellenebilir yapı denir. Bir diferansiyellenebilir manifold, diferansiyellenebilir yapı ile birlikte verilen bir kümedir (Do Carmo, 1992).

Tanım 3.2.2. M bir diferansiyellenebilir manifold olsun. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için;

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

ile tanımlı

- i) $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z,$
- ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$
- iii) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y,$
- iv) $\nabla_X(fY) = X[f] + f\nabla_X Y,$

şartlarını sağlayan ∇ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon adı verilir (O'Neill, 1983).

Teorem 3.2.3. M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için;

$$\begin{aligned} T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\rightarrow T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan T tensör alanına ∇ 'nın torsiyon tensörü, R 'ye ise ∇ 'nın eğrilik tensör alanı denir. Açıkça görülebileceği gibi, T tensör alanı (1,2) mertebeli, R tensör alanı (1,3) mertebelidir. $T = 0$ ise ∇ lineer konneksiyonu torsiyonsuz, $R = 0$ ise ∇ lineer konneksiyonu düzlemseldir, denir (Kobayashi, 1965).

Lemma 3.2.4. Bir M manifoldu üzerinde ∇ lineer konneksiyon olmak üzere, ∇ konneksiyonunun eğrilik tensör alanı R olsun. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$$

eşitliği sağlanır. M manifoldunun p noktasındaki eğrilik tensör alanı X, Y ve Z vektör alanları sadece p noktasındaki X_p, Y_p ve Z_p değerlerine bağlıdır (Şahin, 2012a).

Tanım 3.2.5. M manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyonu ∇ olsun. $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(D)$ için $\nabla_X Y \in \Gamma(D)$ ise D 'ye paralel distribüsyon denir. D distribüsyonu üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\Gamma(D)$ ile gösterilir (Kobayashi, 1965).

3.3. Riemann Manifolflar

Tanım 3.3.1. M bir diferensiyellenebilir manifold ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\Gamma(TM)$ olsun. Bu durumda

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$$

ile tanımlı g bilinear formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

- i) $g(X, Y) = g(Y, X)$,
- ii) $g(X, X) \geq 0$ ve $\forall X$ için $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$,

şartları sağlanıyorsa g bilinear formuna Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir. Bu durumda (M, g) ikilisine Riemann manifoldu denir (Do Carmo, 1992).

Örnek 3.3.2. \mathbb{R}^n Öklidyen uzayını ve bu uzay üzerinde

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

iç çarpımı verilsin. Açıkça görüleceği gibi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pozitif tanımlı, bilinear ve simetriktir. O halde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bir Riemann metrik ve $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisi bir Riemann manifoldudur.

Teorem 3.3.3. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerinde torsiyonsuz ve g metriği ile uyumlu ($\nabla g = 0$) tek bir ∇ lineer konneksiyonu vardır (Yano and Kon, 1984).

İspat: (Teklik). Kabul edelim ki $T = 0$ ve $\nabla g = 0$ olacak şekilde bir lineer konneksiyonu var olsun, Bu durumda $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $T(X, Y) = 0$ olduğundan

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad (3.1)$$

dır. Diğer taraftan $Z \in \Gamma(TM)$ için $(\nabla_X g)(Y, Z) = 0$ olduğundan,

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = \nabla_X (g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0, \quad (3.2)$$

(3.2) denkleminde,

$$Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0 \quad (3.3)$$

elde edilir (3.3)'den,

$$g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \quad (3.4)$$

eşitliği sağlanır. Lineer konneksiyon torsiyonsuz olduğundan $\nabla_X Z$ için (3.1) eşitliğini kullanarak (3.4) denkleminde,

$$g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(Y, \nabla_Z X - [X, Z]) \quad (3.5)$$

$$g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(Y, \nabla_Z X) + g(Y, [X, Z]) \quad (3.6)$$

yazılarak (3.6) eşitliğine ulaşılır. Burada $g_1(Y, \nabla_X Z)$ 'de (3.3) denklemini kullanarak,

$$g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + g(Y, [X, Z]) - \{Zg(X, Y) - g(X, \nabla_Y Z) + g(X, [Y, Z])\}, \quad (3.7)$$

$$g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + g(Y, [X, Z]) - Zg(X, Y) + g(X, \nabla_Y Z) - g(X, [Y, Z]), \quad (3.8)$$

olur. Burada yine $g_1(X, \nabla_Y Z)$ 'de (3.3) denkleminde yerine konularak,

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + g(Y, [X, Z]) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) \\ &\quad + Yg(Z, X) - g(Z, \nabla_X Y) + g(Z, [X, Y]), \end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.9) eşitliğinden Koszul formülü adı verilen,

$$g(\nabla_x Y, Z) = \frac{1}{2} \{ Xg(Y, Z) + g(Y, [X, Z]) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) + Yg(X, Z) + g(Z, [X, Y]) \}, \quad (3.10)$$

eşitliği bulunur (Bootby, 1986). Buradan (3.10) eşitliğinde g Riemann metriği pozitif tanımlı olduğundan ∇ tektir.

(Varlık). X ve Y belirli vektör alanları olmak üzere ∇ konneksiyonu (3.10)'daki gibi tanımlayalım. O halde ∇ lineerdir, $T = 0$ ve $\nabla g = 0$ şartlarını sağlayan ∇ mevcuttur. Teoremden verilen ($T = 0$ ve $\nabla g = 0$) ∇ konneksiyonuna metrik konneksiyon, Levi-Civita konneksiyonu veya Riemann konneksiyonu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.3.4. (M, g) bir Riemann manifoldu ve R, M üzerinde tanımlı eğrilik tensör alanı olsun.

$\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için;

$$K(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

ile tanımlı tensör alanına Riemann-Christoffel eğrilik tensör alanı denir (O'Neill, 1983).

Lemma 3.3.5. (M, g) Riemann manifoldu ve K Riemann-Christoffel eğrilik tensör alanı olsun.

$\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için;

- i) $K(X, Y, Z, W) + K(Y, Z, X, W) + K(Z, X, Y, W) = 0,$
- ii) $K(X, Y, Z, W) = -K(X, Y, W, Z),$
- iii) $K(X, Y, Z, W) = K(Z, W, X, Y),$

dir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.3.6. (M, g) , n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve M 'nin p noktasındaki bir tanjant uzay $T_p M$ olsun. $T_p M$ uzayının 2-boyutlu bir alt uzayı P olsun. x ve y , P düzlemini geren birim vektörler olmak üzere;

$$K(P) = K(x, y) = \frac{g(R(x, y)y, x)}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2},$$

değerine M manifoldunun P düzlemine göre kesit eğriliği denir.

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $T_p M$ 'de herhangi bir ortonormal taban olsun. $p \in M$ noktasında e_i ve e_j tarafından oluşturulan ortogonal birim vektörleriyle yayılan düzlem kesitinin kesit eğriliği K_{ij} ;

$$K(P) = K_{ij} = \frac{g(R(e_i, e_j)e_j, e_i)}{g(e_i, e_i)g(e_j, e_j) - g(e_i, e_j)^2},$$

şeklindedir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 3.3.7. (M, g) , n - boyutlu bir Riemann manifoldu ve M manifoldu üzerindeki lokal ortonormal çatı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(TM)$ için;

$$\begin{aligned} S : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\rightarrow S(X, Y) = izR(\cdot, X)Y \end{aligned}$$

dönüşümü ile tanımlı (2,0)- mertebeli

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i),$$

tensör alanına (M, g) manifoldunun Ricci tensörü denir.

M manifoldunun Ricci operatörü Ric ise;

$$g(RicX, Y) = S(X, Y),$$

ile tanımlanır. Diğer taraftan manifoldun X doğrultusundaki Ricci eğriliği $Ric(X)$;

$$Ric(X) = S(X, X) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)X, e_i),$$

ile tanımlanan Ric operatörüne M manifoldunun Ricci eğriliği denir. Ayrıca;

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i) = R(Y, e_i, e_i, X) = -R(e_i, Y, e_i, X) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, Y)X, e_i) = S(Y, X),$$

olduğundan Ricci tensörü simetriktir (Baird ve Wood, 2003).

Tanım 3.3.8. Bir (M, g) Riemann manifoldu ve $p \in M$ noktasında teğet uzay $T_p M$ olsun. $T_p M$ 'nin iki boyutlu alt uzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına M manifoldunun skaler eğriligi denir ve r ile ifade edilir. Buna göre $T_p M$ tanjant uzayının bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olmak üzere skaler eğrilik;

$$r = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i),$$

ile tanımlanır. Bununla birlikte, Ricci eğrilik;

$$Ric(e_i) = S(e_i, e_i) = \sum_{j \neq i}^n K_{ij},$$

şeklinde tanımlanır (Yano ve Kon, 1984).

3.4. Riemann Altmanifoldlar

Tanım 3.4.1. (\bar{M}, g) , m - boyutlu diferansiyellenebilir manifoldu ve M , n - boyutlu bir keyfi manifold ve $i: M \rightarrow \bar{M}$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve i dönüşümünün rankı M manifoldunun boyutuna eşitse $i: M \rightarrow \bar{M}$ dönüşümüne immersiyon denir (Hacısalıhoğlu, 1983; Şahin, 2012).

Tanım 3.4.2. \bar{M} m - boyutlu ve M , n - boyutlu diferansiyellenebilir manifoldlar iken $M \subset \bar{M}$ olsun. $i: M \rightarrow \bar{M}$ dönüşümü bir immersiyon ise M manifolduna, \bar{M} manifoldunun bir altmanifoldu denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 3.4.3. M ve \bar{M} birer Riemann manifoldları ve i dönüşümü M 'den \bar{M} 'ye bir immersiyon olsun. M 'de $i_* g$ ile tanımlı simetrik, bilinear ve pozitif tanımlı form, yani Riemann metriği indirger. Bu form g ile gösterilir. Böylece i izometrik immersiyon, (M, g) bir Riemann manifoldu olur. Ayrıca $m-n$ sayısına M altmanifoldunun ek boyutu denir (Şahin, 2012a).

Tanım 3.4.4. $p \in M$ de altmanifoldun tanjant uzayı $T_p M$ ve tanjant uzayının altvektör uzayı $T_p \bar{M}$ olsun. $T_p \bar{M}$ uzayı için

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp$$

ayrışımına sahiptir. Burada $T_p M^\perp$, p noktasında $T_p M$ uzayına dik olan tamamlayan uzayıdır. $T_p M^\perp$ uzayına normal uzay, bu uzayın oluşturduğu TM^\perp tanjant demete normal demet denir. $V \in T_p M^\perp$ vektörüne normal vektör, birim normal vektöre de normal kesit denir. Normal vektör alanlarının kümesi ile $\Gamma(TM)^\perp$ ile gösterilir (Şahin, 2012a).

Tanım 3.4.5. $\bar{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla \bar{M} ve M 'de Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda Gauss ve Weingarten formülleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X, Y), \\ \bar{\nabla}_X V &= -A_V X + \nabla_X^\perp V,\end{aligned}\tag{3.11}$$

burada $X, Y \in \Gamma(TM)$, $V \in \Gamma(TM)^\perp$ dir. (3.11) ifadesi $\bar{\nabla}_X V$ 'nin $-A_V X$ teğet, $\nabla_X^\perp V$ ise normal bileşenleri ifade eder. Ayrıca, h dönüşümüne ikinci temel form, TM normal demetinden indirgenen ∇^\perp lineer konneksiyonuna normal konneksiyon denir. Eğer h ikinci temel formu sifıra eşitse M total jeodeziktir. A_V ise V 'de ikinci temel tensör veya Weingarten dönüşümüdür. Bununla birlikte, ∇ Levi-Civita konneksiyona M 'de indirgenmiş konneksiyon denir. Ayrıca, h simetrik olup her $X, Y \in \Gamma(TM)$, $V \in \Gamma(TM)^\perp$ için

$$g(A_V X, Y) = g(h(X, Y), V)$$

eşitliği sağlanır. h simetrik ve bilineer olmasından dolayı A_V , M üzerinde self-adjoint ve lineer operatördür. A_V Weingarten temel tensörü veya şekil operatörü olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu, 1983; Şahin, 2017c).

Tanım 3.4.7. \bar{M} Riemann manifoldunun altmanifoldu M ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ altmanifoldun ortonormal çatısı olsun. Bu durumda

$$H = \frac{1}{n} izh = \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i),$$

ile verilen H vektör alanına ortalama eğrilik vektör alanı denir (Şahin, 2017c).

Tanım 3.4.8. \bar{M} Riemann manifoldunun altmanifoldu M olsun. $\sigma \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $V \in (TM)^\perp$ için $A_V = \sigma I$ koşulu sağlanırsa, M altmanifoldu V vektör alanına göre umbiliktir denir. Bununla birlikte M altmanifoldu her V normal vektör alanına göre umbilik ise M altmanifoldu total umbiliktir denir (O'Neill, 1983).

3.5. Riemann Submersiyonlar

Tanım 3.5.1. (M, g_1) ve (B, g_2) Riemann manifoldları olsun. Eğer $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ diferansiyellenebilir dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlarsa F dönüşümü, Riemann submersiyonu olarak adlandırılır:

1. F dönüşümü maksimal ranka sahiptir. ($rank(F) = boyB$)
2. Her $p \in M$ noktasında, F_{*p} dönüşümü $X_p \in \Gamma(\mathcal{H}_p)$ yatay vektörlerinin uzunluğunu korur (O'Neill, 1966).

Tanım 3.5.2. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ submersiyonunun için (M, g_1) deki integrallenebilir distribüsyonu

$$\mathcal{V}_p = \zeta ekF_{*p}$$

ile tanımlanır ve \mathcal{V}_p 'ye submersiyonunun dikey distribüsyonu denir. Dikey distribüsyona dik ve tamamlayıcı,

$$\mathcal{H}_p = (\mathcal{V}_p)^\perp$$

distribüsyona ise submersiyonunun yatay distribüsyonu denir (Şahin 2012).

Tanım 3.5.3. Bir C^∞ - submersiyon $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ dönüşümü, eğer M üzerindeki p 'nin her noktasında F_{*p} , yatay vektör alanının uzunluğunu korursa, bir Riemann submersiyon olarak adlandırılır.

F bir submersiyon olduğundan, F_{*p} , \mathcal{H}_p ve $T_{F(p)}B$ arasında tanımlı lineer izomorfizmayı korur, öyle ki;

$$g_{1p}(u, v) = g'_{2p}(F_{*p}u, F_{*p}v), \quad u, v \in \mathcal{H}_p, p \in M,$$

ifadesi yazılabilir ve \mathcal{H}_p üzerindeki F_{*p} lineer izometri gibi davranır (Falcitelli; Ianus; Pastore, 2004).

Önerme 3.5.4. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann submersiyon ve ∇ ve ∇' sırasıyla M ve B 'nin Levi-Civita konneksiyonları olsun. Eğer X, Y temel vektör alanları, X', Y' F -bağlı ise ,

- i) $g_1(X, Y) = g_1(X', Y') \circ F$;
- ii) $h[X, Y], [X', Y']$ 'ye F -bağlı bir temel vektör alanıdır,
- iii) $h(\nabla_X Y), \nabla'_{X'} Y'$ 'ye F -bağlı bir temel vektör alanıdır,
- iv) V 'nin herhangi bir dik vektör alanı için $[X, V]$ diktir (Falcitelli; Ianus; Pastore, 2004).

Bir Riemann submersiyon $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$, M üzerinde T, A iki (1,2)-tensör alanları belirler. Bunlar temel tensör alanları veya F 'nin invaryantları olarak tanımlanır ve sırasıyla dikey ve yatay projeksiyonlar $v : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ ve $h : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ şeklindedir ve aşağıdaki formüllere göre belirlenir. $\forall E, F \in \Gamma(TM)$ için;

$$A(E, F) = A_E F = h\nabla_{HE} vF + v\nabla_{HE} hF \quad (3.12)$$

$$T(E, F) = T_E F = h\nabla_{vE} vF + v\nabla_{vE} hF \quad (3.13)$$

dir. Burada ∇ , M manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonunu göstermektedir. O'Neill tensörleri,

$$T_E F = T_{vE} F, A_E F = A_{hE} F, E, F \in \Gamma(TM)$$

şeklindedir yani T ve A , sırasıyla dikey ve yatay tensör alanıdır (Falcitelli; Ianus; Pastore, 2004).

Önerme 3.5.5. T ve A tensör alanları için,

$$T_U W = T_W U, \quad U, W \in \Gamma(TM); \quad (3.14)$$

$$A_X Y = -A_Y X = \frac{1}{2} v[X, Y], \quad X, Y \in \Gamma(TM), \quad (3.15)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: (3.14) eşitliği ∇ 'nın simetrik olmasının ve dikey distribüsyonun integrallenebilirliğinin bir sonucudur. Şimdi, herhangi $X \in \Gamma(HM)$ için $A_X X$ 'in sıfırlandığı gösterilecektir. X 'in temel vektör alanı olduğunu varsayılırsa, herhangi $W \in \Gamma(TM)$ için Önerme 3.5.4.'ün iv) maddesi ve $g(X, X)$ her bir lif üzerinde sabit olduğundan,

$$g(A_X X, W) = g(\nabla_X X, W) = -g(X, \nabla_W X) = -\frac{1}{2}W(g(X, X)) = 0,$$

elde edilir. Yani, $A_X X = \nu(\nabla_X X)$ olduğundan $A_X X$ 'in yatay vektör olduğu görülmektedir. Sonuç olarak, $\forall X, Y \in \Gamma(HM)$ için

$$\nu[X, Y] = \nu(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = A_X Y - A_Y X = 2A_X Y$$

şeklindedir. (Falcitelli; Ianus; Pastore, 2004). $\forall E \in \Gamma(TM)$ için T_E ve A_E ($\Gamma(TM), g$) üzerinde anti-simetrik operatörlerdir, yatay ve dikey distribüsyonları tersine çevirirler. Ayrıca T 'nin dik $T_E = T_{\nu E}$ ve A 'nın yatay $A_E = A_{hE}$ eşitliğine sahiptir (Şahin, 2012a).

Lemma 3.5.6. (M, g_1) ve (B, g_2) Riemann manifoldları ve $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann submersiyon olsun. Herhangi $E, F, G \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned} g_1(T_E F, G) + g_1(T_E G, F) &= 0, \\ g_1(A_E F, G) + g_1(A_E G, F) &= 0, \end{aligned}$$

dır (Şahin, 2012a).

Lemma 3.5.7. Aşağıdaki formüller her $X, Y \in \Gamma(HM)$, $U \in \Gamma(TM)$ için (3.12) ve (3.13) eşitliklerinin sonuçlarıdır:

$$\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W; \quad (3.16)$$

$$\nabla_V X = T_V X + h(\nabla_V X); \quad (3.17)$$

$$\nabla_X V = A_X V + v(\nabla_X V); \quad (3.18)$$

$$\nabla_X Y = A_X Y + h(\nabla_X Y). \quad (3.19)$$

Burada $\hat{\nabla}_V W = v\nabla_V W$ dir. Diğer taraftan, eğer X temel vektör alanı ise o zaman $h(\nabla_U X) = h(\nabla_X U) = A_X U$ eşitliğine sahiptir. Burada $[X, U]$ dikeydir (Şahin, 2012a).

Lemma 3.5.8. (M, g_1) ve (B, g_2) Riemann manifoldları ve $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann submersiyon olsun. $E \in \Gamma(TM)$, $X, Y, Z, Z' \in \Gamma(HM)$, $U, V, W \in \Gamma(TM)$ ve σ dairesel toplam iken aşağıdaki eşitlikler sağlanır,

$$\begin{aligned} g_1((\nabla_E T)_U V, X) &= g_1((\nabla_E T)_V U, X), \\ g_1((\nabla_E A)_X Y, U) &= -g_1((\nabla_E A)_Y X, U), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)_Y &= -T_{A_X Y}, (\nabla_U T)_X = -T_{T_U X}, \\ (\nabla_X A)_V &= -A_{T_U V}, (\nabla_X A)_U = -A_{A_X U}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} g_1((\nabla_X T)_U V, W) &= g_1(A_X V, T_U W) - g_1(A_X W, T_U V), \\ g_1((\nabla_U A)_X V, W) &= g_1(T_U V, A_X W) - g_1(T_U W, A_X V), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} g_1((\nabla_X T)_U Y, Z) &= g_1(A_X Y, T_U Z) - g_1(A_X Z, T_U Y), \\ g_1((\nabla_X A)_Y U, V) &= g_1(T_U V, A_X W) - g_1(T_U W, A_X V), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} g_1((\nabla_U T)_V X, Y) &= g_1(T_U X, T_V Y) - g_1(T_V X, T_U Y), \\ g_1((\nabla_X A)_Y Z, Z') &= g_1(A_X Z, A_Y Z') - g_1(A_X Z', A_Y Z), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\sigma_{X,Y,X} g_1((\nabla_X A)_Y Z, U) = \sigma_{X,Y,X} g_1(A_X Y, T_U Z), \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} g_1((\nabla_U A)_X Y, V) + g_1((\nabla_V A)_X Y, U) \\ = g_1((\nabla_Y T)_U V, X) - g_1((\nabla_X T)_U V, Y), \end{aligned} \quad (3.26)$$

(Falcitelli; Ianus; Pastore, 2004).

Önerme 3.5.9. Bir Riemann submersiyonu aşağıdakilere sahiptir:

- i) Eğer A paralel ise $A \equiv 0$,
- ii) Eğer T paralel ise $T \equiv 0$.

Diğer yandan, herhangi $E, F, G \in \Gamma(TM)$ için,

$$R(E, F, G, H) = g_1(R(G, H, F), E) = g_1([\nabla_G, \nabla_H] - \nabla_{[G, H]})F, E),$$

olur. R^* , $\Gamma(HM)$ üzerinde (1,3) – tensör alanını, R' ise B manifoldunun eğrilik tensör alanını göstermek üzere $p \in M$ için $R'(F_{*p}(X_p), F_{*p}(Y_p), F_{*p}(Z_p))$ vektör alanının yatay lifi $R^*(X, Y, Z)_p$ olsun. O halde,

$$F_*(R^*(X, Y, Z)) = R'(F_*X, F_*Y, F_*Z),$$

dır. Bununla birlikte herhangi bir $X, Y, Z, G \in \Gamma(HM)$ için,

$$\begin{aligned} R^*(X, Y, Z, G) &= g(R^*(X, Y, Z), G) \\ &= R'(F_*X, F_*Y, F_*Z, F_*G) \circ F, \end{aligned}$$

olur.

(M, g_1) ve (B, g_2) Riemann manifoldları ve $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann submersiyon olsun. \hat{R} , herhangi bir lifin $(F^{-1}(x), \hat{g}_x)$ Riemann eğriliğini ifade etmek üzere, aşağıdaki denklemler submersiyonlar için sırasıyla, Gauss ve Codazzi denklemleridir.

$$R(U, V, Q, W) = \hat{R}(U, V, Q, W) + g_1(T_U W, T_V Q) - g_1(T_V W, T_U Q), \quad (3.27)$$

$$R(U, V, W, X) = g_1((\nabla_V T)(U, W), X) - g_1((\nabla_U T)(V, W), X), \quad (3.28)$$

burada $U, V, W, Q \in \Gamma(TM)$, $X \in \Gamma(HM)$ dir. Ayrıca,

$$R(X, Y, Z, V) = g((\nabla_Z A)(X, Y), V) + g(A_X Y, T_V Z) \quad (3.29)$$

$$-g(A_Y Z, T_V X) - g(A_Z X, T_V Y),$$

$$R(X, Y, Z, G) = R^*(X, Y, Z, G) - 2g(A_X Y, A_Z G) \quad (3.30)$$

$$+g(A_Y Z, A_X G) - g(A_X Z, A_Y G),$$

$$R(X, Y, V, W) = g((\nabla_V A)(X, Y), W) - g((\nabla_W A)(X, Y), V) \quad (3.31)$$

$$+g(A_X V, A_Y W) - g(A_X W, A_Y V)$$

$$-g(T_V X, T_W Y) + g(T_W X, T_V Y),$$

$$R(X, V, Y, W) = g((\nabla_X T)(V, W), Y) + g((\nabla_V A)(X, Y), W) \quad (3.32)$$

$$-g(T_V X, T_W Y) + g(A_X V, A_Y W),$$

dır (Falcitelli; Ianus; Pastore, 2004).

Lemma 3.5.10. $\forall U, V \in \Gamma(VM)$ ve $\forall X, Y \in \Gamma(HM)$ için,

$$\sum_{i=1}^n g(T_U X_i, T_V X_i) = \sum_{j=1}^r g(T_U U_j, T_V U_j), \quad (3.33)$$

$$\sum_{i=1}^n g(A_X X_i, A_Y X_i) = \sum_{j=1}^r g(A_X U_j, A_Y U_j), \quad (3.34)$$

$$\sum_{i=1}^n g(A_X X_i, T_U X_i) = \sum_{j=1}^r g(A_X U_j, T_U U_j). \quad (3.35)$$

sağlanır, burada $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$, $\{U_j\}_{1 \leq j \leq r}$ sırasıyla yatay ve dikey distribüsyon üzerindeki bir ortonormal bazı göstermektedir (Falcitelli; Ianus; Pastore, 2004).

Lemma 3.5.11. Herhangi bir lifin üzerindeki ortalama eğrilik vektör alanı H ,

$$N = rH \quad (3.36)$$

eşitliği sağlar. Burada r , F 'nin herhangi bir lifinin boyutunu ifade eder ve N ise her $E \in \Gamma(TM)$, $X \in \Gamma(HM)$ için

$$g(\nabla_E N, X) = \sum_{j=1}^r g((\nabla_E T)(U_j, U_j), X) \quad (3.37)$$

şekindedir. Ayrıca M , $Range F_*$ ve F 'nin herhangi bir lifinin Riemann eğrilik tensörlerini sırasıyla R, R' ve \hat{R} ile gösterilmek üzere her $U, V, W, Q \in \Gamma(\mathcal{C}ekF_*)$ ve $X, Y, Z, G \in \Gamma(\mathcal{C}ekF_*)^\perp$ için

$$\begin{aligned} g_1(R(U, V)W, Q) &= g_1(\hat{R}(U, V)W, Q) - g_1(T_U Q, T_V W) + g_1(T_V Q, T_U W) \\ g_1(R(X, Y)Z, G) &= g_2(R'(F_* X, F_* Y)F_* Z, F_* G) - g_2((\nabla F_*)(X, Z), (\nabla F_*)(Y, G)) \\ &\quad + g_2((\nabla F_*)(Y, Z), (\nabla F_*)(X, G)) \end{aligned}$$

dir. M üzerindeki Ricci tensörü Ric ve skaler eğrilik ise s ile gösterilir ve her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $Ric(X, Y) = iz(Z \mapsto R(Z, X)Y)$ ve $S = iz Ric(X, Y)$ şeklindedir.

Lemma 3.5.12. $F : (M, g) \rightarrow (B, g')$ bir Riemann submersiyon olsun. Her $U, V \in \Gamma(VM)$ $X, Y \in \Gamma(HM)$ için

$$Ric(U, W) = \hat{Ric}(U, W) - g_1(N, T_U W) + \sum_{j=r+1}^m \left\{ g_1((\nabla_{X_j} T)_U W, X_j) + g_1(A_{X_j} U, A_{X_j} W) \right\}, \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= Ric^{RangeF_*}(F_* X, F_* Y) + \sum_{i=1}^r \{ g_1((\nabla_X T)_{U_i} U_i, Y) + g_1((\nabla_{U_i} A)_X Y, U_i) \\ &\quad - g_1(T_{U_i} X, T_{U_i} Y) + g_1(A_X U_i, A_Y U_i) \} + g_2((\nabla F_*)(X, Y), \tau^{(ÇekF_*)^\perp}) \\ &\quad - \sum_{j=r+1}^m g_2((\nabla F_*)(X_j, Y), (\nabla F_*)(X, X_j)), \end{aligned} \quad (3.39)$$

ve

$$\begin{aligned} Ric(X, U) &= \sum_{i=1}^r \{ g_1((\nabla_U T)_{U_i} U_i, X) - g_1((\nabla_{U_i} T)_U U_i, X) \} \\ &\quad + \sum_{j=r+1}^m \{ g_1((\nabla_{X_j} A)_{X_j} X, U) + 2g_1(T_U X_j, A_{X_j} X) \}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

şeklinde. Burada $Ric^{RangeF_*}(F_* X, F_* Y)$, $RangeF_*$ 'in Ricci tensörünü ve $\{U_1, \dots, U_r\}$ ve $\{X_{r+1}, \dots, X_m\}$ sırasıyla $ÇekF_*$ ve $(ÇekF_*)^\perp$ 'in ortonormal bazlarını göstermektedir (Şahin, 2017b).

İspat: (3.38) denkleminde,

$$\begin{aligned} R(U, W) &= g_1(R(U, U_i, W, U_i)) + g_1(R(X_j, U, W, X_j)) \\ &= \sum_{i=1}^r R(U, U_i, W, U_i) + \sum_{j=r+1}^m R(X_j, U, W, X_j) \end{aligned} \quad (3.41)$$

yazılır. Burada sırasıyla (3.27) ve (3.32) denklemleri (3.41)'de yerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} R(U, W) &= \sum_{i=1}^r \{ g_1(\hat{R}(U, U_i)W, U_i) - g_1(T_{U_i} U_i, T_U W) + g_1(T_U U_i, T_{U_i} W) \} \\ &\quad + \sum_{j=r+1}^m \{ g_1((\nabla_{X_j} T)_U W, X_j) + g_1((\nabla_U A)_{X_j} X_j, W) \\ &\quad - g_1(T_U X_j, T_W X_j) + g_1(A_{X_j} U, A_{X_j} W), \end{aligned} \quad (3.42)$$

olur. (3.42) eşitliği düzenlenirse,

$$R(U, W) = Ric(\hat{U}, V) - g_1(N, T_U W) + \sum_{j=r+1}^m \{g_1((\nabla_{X_j} T)_U W, X_j) + g_1(A_{X_j} U, A_{X_j} W)\},$$

elde edilir. (3.39) denklemi için de,

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= g_1(R(X, U_i, Y, U_i)) + g_2(R'(F_* X_j, F_* X, F_* Y, F_* X_j)) \\ &= \sum_{i=1}^r R(X, U_i, Y, U_i) + \sum_{j=r+1}^m R'(F_* X_j, F_* X, F_* Y, F_* X_j), \end{aligned} \quad (3.43)$$

(3.43) eşitliği yazılır. (3.43) eşitliğine sırasıyla (3.32) ve (3.30) denklemleri uygulanıp, (3.14), (3.15), Lemma 3.5.10. ve Lemma 3.5.11. kullanılırsa,

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= \sum_{i=1}^r \{g_1(\nabla_X T)_{U_i} U_i, Y) + g_1((\nabla_{U_i} A)_X Y, U_i) - g_1(T_{U_i} X, T_{U_i} Y) + g_1(A_X U_i, A_Y U_i)\} \\ &\quad + Ric^{Range F_*}(F_* X, F_* Y) + g_2((\nabla F_*)(X, Y), \tau^{(Çek F_*)^\perp}) - \sum_{j=r+1}^m g_2((\nabla F_*)(X_j, Y), (\nabla F_*)(X, X_j)), \end{aligned}$$

elde edilir. (3.40) denklemi için de benzer şekilde,

$$\begin{aligned} Ric(X, U) &= g_1(R(X, X_j, U, X_j)) - g_1(R(U, U_i, U_i, X)) \\ &= \sum_{j=r+1}^m R(X, X_j, U, X_j) + \sum_{i=1}^r R(U, U_i, U_i, X), \end{aligned} \quad (3.44)$$

yazılır. (3.44) denklemine sırasıyla (3.29) ve (3.28) denklemleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Ric(X, U) &= \sum_{j=r+1}^m \{g_1((\nabla_{X_j} A)(X_j, X), U) + g_1(A_{X_j} X, T_U X_j) - g_1(A_X X_j, T_U X_j)\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^r \{g_1((\nabla_{U_i} T)_U U_i, X) - g_1((\nabla_U T)_{U_i} U_i, X)\}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

olur ve (3.45) eşitliği düzenlenirse,

$$\begin{aligned} Ric(X, U) = & \sum_{i=1}^r \{g_1((\nabla_U T)_{U_i} U_i, X) - g_1((\nabla_{U_i} T)_U U_i, X)\} \\ & + \sum_{j=r+1}^m \{g_1((\nabla_{X_j} A)(X_j, X), U) + 2g_1(A_{X_j} X, T_U X_j)\}, \end{aligned}$$

yazılır.

Tanım 3.5.13. Herhangi bir $X \in \Gamma(\mathcal{C}ekF_*)^\perp$, 'ın diverjansı $\tilde{\delta}(X)$ ile gösterilir ve

$$\tilde{\delta}(X) = \sum_{j=r+1}^m g(\nabla_{X_j} X, X_j) \quad (3.46)$$

ile tanımlanır (Pastore, Falcitelli ve Ianus, 2004). Dolayısıyla (3.37) denkleminde ve (3.41)'den

$$\tilde{\delta}(N) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=r+1}^m g(\nabla_{X_j} T)_{U_i} U_i, X_j) \quad (3.47)$$

dir. Burada $\{X_j\}$ ve $\{U_i\}$ sırasıyla $(\mathcal{C}ekF_*)^\perp$ ve $\mathcal{C}ekF_*$ 'nin ortonormal bazlarını göstermektedir. Ayrıca $T_p M$ 'nin ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ise,

$$g(X, Y) = \sum_{i=1}^m g(X, e_i)g_1(Y, e_i). \quad (3.48)$$

yazılabilir (Şahin, 2017c).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Riemann Dönüşümler

$F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann manifoldları arasında diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $\text{boy}M = m$ ve $\text{boy}B = b$ iken $0 < \text{Rank}F \leq \min\{m, b\}$ olsun. Türev dönüşümü F_{*p} 'nin çekirdek uzayı $p \in M$ 'de $\mathcal{V}_p = \text{Çek}F_{*p}$ ile gösterilmek üzere $\text{Çek}F_{*p}$ 'nin ortogonal tamamlayan uzayı $\mathcal{H}_p = (\text{Çek}F_{*p})^\perp$ ile tanımlanır. Böylece M 'nin Riemann manifoldu,

$$T_p M = \text{Çek}F_* \oplus (\text{Çek}F_*)^\perp = \mathcal{V}_p \oplus \mathcal{H}_p,$$

ayrışımına sahiptir. Buradaki F_* türev dönüşümünün değer kümesi $\text{Range}F_*$ ile gösterilir ve $F(p) \in B$ için, B 'nin $T_{F(p)}B$ tanjant uzayında, $(\text{Range}F_*)^\perp$ olarak adlandırılan ortogonal tamamlayan uzayını belirtir.

$\text{Rank}F \leq \min\{m, b\}$ olduğundan, $(\text{Range}F_*)^\perp \neq \{0\}$ dir. Böylece $F(p) \in B$ iken B 'nin tanjant uzayı olan $T_{F(p)}B$,

$$T_{F(p)}B = \text{Range}F_* \oplus (\text{Range}F_*)^\perp$$

ayrışımına sahiptir.

(M, g_1) ve (B, g_2) birer Riemann manifoldları olmak üzere $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ dönüşümü verilsin. $p \in M$ noktasında F dönüşümünün yatay kısıtlanması

$$F_{*p}^h : (\text{Çek}F_{*p})^\perp \rightarrow \text{Range}F_{*p},$$

eğer bir lineer izometri ise yani

$$g_2(F_*X, F_*Y) = g_1(X, Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(HM) \quad (4.1)$$

bu durumda $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann dönüşümü olarak adlandırılır. Ayrıca bir F Riemann dönüşümü verildiğinde $\text{Çek}F_* = \{0\}$ ise F bir izometrik immersiyon; $(\text{Range}F_*)^\perp = \{0\}$ ise F bir Riemann submersiyon olur (Fischer, 1992).

$F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann manifoldları arasında diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve F' nin F_* diferansiyeli, bir demetin kesiti $\text{Hom}(TM, F^{-1}TB) \rightarrow M$ olarak yazılabilir, buradaki $F^{-1}TB$ ise lifleri $p \in M$ 'de, $(F^{-1}TB)_p = T_{F(p)}B$ eşitliğine sahip olan pull-back demetidir. $\text{Hom}(TM, F^{-1}TB)$ demeti, ∇ Levi-Civita konneksiyonu ve $\overset{F}{\nabla}$ pull-back konneksiyonu tarafından üretilen bir ∇ konneksiyonunu göstermek üzere, F 'in ikinci temel formu $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$(\nabla F_*)(X, Y) = \overset{F}{\nabla}_X F_*Y - F_*(\nabla_X Y), \quad (4.2)$$

eşitliğine sahiptir. İkinci temel form simetriktir. $\forall X, Y \in \Gamma(\text{Çek}F_{*p})^\perp$ için $(\nabla F_*)(X, Y)$ 'nin $\text{Range}F_*$ 'de hiçbir bileşeni yoktur. Yani

$$(\nabla F_*)(X, Y) \in \Gamma(\text{Range}F_*)^\perp,$$

dir (Şahin, 2010).

4.1.1. Riemann Dönüşümleri İçin Gauss – Weingarten Formülleri

Lemma 4.1.1.1. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$, Riemann manifoldları arasında tanımlı bir Riemann dönüşümü olsun. O halde $\forall X, Y, Z \in \Gamma(\text{Çek}F_*)^\perp$ için,

$$g_2((\nabla F_*)(X, Y), F_*Z) = 0, \quad (4.3)$$

dir (Şahin, 2010; Şahin, 2011a).

İspat: F bir Riemann dönüşümü olduğundan, (4.2) eşitliğini kullanarak,

$$g_2((\nabla F_*)(X, Y), F_*Z) = g_2(\overset{F}{\nabla}_X F_*Y, F_*Z) - g_1(\nabla_X Y, Z), \quad (4.4)$$

sağlanır. Diğer taraftan, ∇ , M 'de Levi-Civita konneksiyonu olduğundan (3.10) Koszul eşitliğinden,

$$g_1(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \{ Xg_1(Y, Z) + g_1(Y, [Z, X]) - Zg_1(X, Y) - g_1(X, [Y, Z]) + Yg_1(Z, X) + g_1(Z, [X, Y]) \}, \quad (4.5)$$

yazılabilir. $F_*([X, Y]) = [F_*X, F_*Y]$ eşitliğini ve (4.1) denklemini (4.5)'de kullanarak,

$$g_1(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \{ Xg_2(F_*Y, F_*Z) + g_2(F_*Y, [F_*Z, F_*X]) - Zg_2(F_*X, F_*Y) - g_2(F_*X, [F_*Y, F_*Z]) + Yg_2(F_*Z, F_*X) + g_2(F_*Z, [F_*X, F_*Y]) \}, \quad (4.6)$$

elde edilir. Ayrıca $\overset{B}{\nabla}$, B 'de Levi-Civita konneksiyonu olduğundan (4.6) ifadesi

$$g_1(\nabla_X Y, Z) = g_2(\overset{F}{\nabla}_X F_*Y, F_*Z), \quad (4.7)$$

olur. (4.7) eşitliği (4.4) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Lemma 4.1.1.1.'in bir sonucu olarak

$$(\nabla F_*)(X, Y) \in \Gamma(\text{Range}F_*^\perp), \forall X, Y \in \Gamma(\text{Çek}F_*^\perp),$$

olduğu görülür. Böylece $p \in M$, $X, Y \in \Gamma(\text{Çek}F_*^\perp)$ iken,

$$\overset{B}{\nabla}_X^F F_*Y(p) = F_*(\nabla_X Y)(p) + (\nabla F_*)(X, Y)(p) \quad (4.8)$$

yazılır. Burada $\overset{B}{\nabla}_X^F F_*Y(p) \in T_{F(p)}B$, $F_*(\nabla_X Y)(p) \in F_{*p}(T_pM)$ ve $(\nabla F_*)(X, Y)(p) \in (F_{*p}(T_pM))^\perp$ dir.

$F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$, Riemann manifoldları arasında tanımlı bir Riemann dönüşümü olsun. O'Neill tensör alanları T ve A , g_1 'in Levi-Civita konneksiyonu olan ∇ için (3.12), (3.13) ve (3.14) özelliklerine sahiptir. Ayrıca $X, Y \in \Gamma(\text{Çek}F_*^\perp)$ ve $V, W \in \Gamma(\text{Çek}F_*)$ iken ∇ için de (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) eşitlikleri sağlanır. Buna ilaveten, bir F Riemann dönüşümü

$$T_U V = g_1(U, V)N \quad (4.9)$$

eşitliğini sağlarsa total umbilik liflere sahip bir Riemann dönüşümü olarak adlandırılır. Burada $U, V \in \Gamma(\mathcal{C}ekF_*)$ ve N , liflerin ortalama eğrilik vektör alanıdır.

Verilen bir $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann dönüşümünde $\overset{B}{\nabla}$, B 'de Levi-Civita konneksiyonu ve aynı zamanda F boyunca pull-back'i ve $X \in \Gamma(TM), V \in \Gamma(\text{Range}F_*)^\perp$ için $(\text{Range}F_*)^\perp$ üzerindeki $\overset{B}{\nabla}_X V$ 'nin ortogonal projeksiyonu $\nabla_X^{F\perp} V$ olarak tanımlanır. Böylece $\forall U, V \in \Gamma(\text{Range}F_*)^\perp$ için,

$$\overset{B}{\nabla}_U V = \mathcal{R}(\overset{B}{\nabla}_U V) + \nabla_U^{F\perp} V,$$

şeklinde. Burada $\mathcal{R}(\overset{B}{\nabla}_U V)$, $\overset{B}{\nabla}_U V$ 'nin $\text{Range}F_*$ üzerindeki bileşenini göstermektedir.

Lemma 4.1.1.2. $\nabla^{F\perp}$, $(\text{Range}F_*)^\perp$ üzerinde $\nabla^{F\perp} g_2 = 0$ şartını sağlayan bir lineer konneksiyondur (Nore, 1986).

Lemma 4.1.1.3. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$, Riemann manifoldları arasında tanımlı bir Riemann dönüşümü olsun. Böylece

$$\overset{B}{\nabla}_{F_* X} V = -\mathcal{S}_V F_* X + \nabla_X^{F\perp} V, \quad (4.10)$$

yazılabilir. Burada $\mathcal{S}_V F_* X$, $\overset{B}{\nabla}_{F_* X} V$ 'nin (F boyunca bir vektör alanı) teğet bileşenini göstermektedir.

Ayrıca $\overset{B}{\nabla}_{F_* X} V$, $\overset{B}{\nabla}$ 'nin pull-back konneksiyonundan elde edilir. Böylece, $p_1 \in M$ noktasında

$\overset{B}{\nabla}_{F_* X} V(p_1) \in T_{F(p_1)} B$, $\mathcal{S}_V F_* X(p_1) \in F_{*p_1}(T_{p_1} M)$ ve $\nabla_X^{F\perp} V(p_1) \in (F_{*p_1}(T_{p_1} M))^\perp$ dir. Buradan,

$$g_2(\mathcal{S}_V F_* X, F_* Y) = g_2(V, (\nabla F_*)(X, Y)), \quad (4.11)$$

yazılabilir. Burada $X, Y \in \Gamma(\text{Çek}F_*)^\perp$ ve $V \in \Gamma(\text{Range}F_*)^\perp$ dir. ∇F_* simetrik olduğundan \mathcal{S}_V , $\text{Range}F_*$ 'ın bir simetrik lineer dönüşümüdür.

Altmanifoldlarda olduğu gibi, F Riemann dönüşümünde (4.8) ve (3.16)-(3.19) eşitlikleri Gauss formülüne, (4.10) ise Weingarten formülüne karşılık gelir.

Tanım 4.1.1.4. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$, Riemann manifoldları arasında tanımlı bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda

$$\mathcal{S}_V F_*(X) = f(F_*X)$$

eşitliği sağlanırsa F Riemann dönüşümüne umbilik Riemann dönüşümü denir. Burada $F_*X \in \Gamma(\text{Range}F_*)$, $V \in \Gamma(\text{Range}F_*)^\perp$ ve f M üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyondur (Şahin, 2011b).

4.1.2. Ricci, Gauss ve Codazzi Denklemleri

$F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann manifoldları arasında tanımlı bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, $F_{*p_1}^h : ((\text{Çek}F_*)^\perp(p_1), g_{1p_1((\text{Çek}F_*)^\perp(p_1))}) \rightarrow (\text{Range}F_*(p_2), g_{2p_2((\text{Range}F_*)^\perp(p_2))})$ dönüşümü verilsin. Ayrıca

$$F_{*p_1} : (T_{p_1}M, g_{1p_1}) \rightarrow (T_{p_1}B, g_{2p_1}),$$

olmak üzere F_*^h dönüşümünün adjointi

$$(*F_{*p_1}^h) : \text{Range}F_*(p_2) \rightarrow (\text{Çek}F_*)^\perp(p_1),$$

ile tanımlanır. Burada $(*F_{*p_1}^h)^h y = *F_{*p_1} y$ ve $F(p_1) = p_2$ şeklindedir.

Diğer yandan $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann manifoldları arasında bir Riemann dönüşümü olsun. O halde $\{F_*X_j\}_{r+1 \leq j \leq m}$ ve $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n_1}$ sırasıyla $\text{Range}F_*$ ve $(\text{Range}F_*)^\perp$ 'in ortonormal bazları ve F_* adjoint dönüşümü $*F_*$ olmak üzere (4.8) ve (4.10) eşitlikleri kullanılırsa, $\forall X, Y, Z \in \Gamma(\text{Çek}F_*)^\perp$ için,

$$\begin{aligned}
R^B(F_*X, F_*Y)F_*Z &= -\mathcal{S}_{(\nabla F_*)(Y,Z)}F_*X + \mathcal{S}_{(\nabla F_*)(X,Z)}F_*Y \\
&+ F_*(R(X, Y)Z) + (\nabla_X(\nabla F_*))(Y, Z) \\
&- (\nabla_Y(\nabla F_*))(X, Z),
\end{aligned} \tag{4.12}$$

şeklindedir. Burada R ve R^B sırasıyla ∇ ve $\overset{B}{\nabla}$ konneksiyonlarına ait eğrilik tensörlerini göstermektedir. Ayrıca $(\nabla_X(\nabla F_*))(Y, Z)$,

$$(\nabla_X(\nabla F_*))(Y, Z) = \nabla_X^{F^\perp}(\nabla F_*)(Y, Z) - (\nabla F_*)(\nabla_X Y, Z) - (\nabla F_*)(Y, \nabla_X Z),$$

ile verilir. Burada herhangi bir $T \in \Gamma(\text{Çek}F_*^\perp)$ için, (4.12) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
g_2(R^B(F_*X, F_*Y)F_*Z, F_*T) &= g_1(R(X, Y)Z, T) \\
&+ g_2((\nabla F_*)(X, Z), (\nabla F_*)(Y, T)) \\
&- g_2((\nabla F_*)(Y, Z), (\nabla F_*)(X, T))
\end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. Ayrıca (4.13) denkleminin $\Gamma(\text{Range}F_*^\perp)$ kısmı alınırsa,

$$(R^B(F_*X, F_*Y)F_*Z)^\perp = (\nabla_X(\nabla F_*))(Y, Z) - (\nabla_Y(\nabla F_*))(X, Z) \tag{4.14}$$

bulunur. Böylece F Riemann dönüşümü için (4.13) ve (4.14) denklemlerine sırasıyla Gauss denklemi ve Codazzi denklemi denir.

M 'ye teğet olan herhangi X, Y vektör alanları için ve $\Gamma(\text{Range}F_*)$ 'a dik olan herhangi V vektör alanı için, $(\text{Range}F_*^\perp)$ alt demetinin eğrilik tensör alanı R^{F^\perp} ,

$$R^{F^\perp}(F_*X, F_*Y)V = \nabla_X^{F^\perp}\nabla_Y^{F^\perp}V - \nabla_Y^{F^\perp}\nabla_X^{F^\perp}V - \nabla_{[X,Y]}^{F^\perp}V \tag{4.15}$$

şeklinde tanımlanır. O halde, (4.15) denkleminde (4.8), (4.10) ve (4.11) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
 R^B(F_*X, F_*Y)V &= R^{F^\perp}(F_*X, F_*Y)V \\
 &\quad -F_*(\nabla_X {}^*F_*(\mathcal{S}_V F_*Y)) + \mathcal{S}_{\nabla_X^{\perp V}} F_*Y \\
 &\quad +F_*(\nabla_Y {}^*F_*(\mathcal{S}_V F_*X)) - \mathcal{S}_{\nabla_Y^{\perp V}} F_*X \\
 &\quad -(\nabla F_*)(X, {}^*F_*(\mathcal{S}_V F_*Y)) + (\nabla F_*)(Y, {}^*F_*(\mathcal{S}_V F_*X)) \\
 &\quad -\mathcal{S}_V F_*([X, Y]),
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir. (4.16) denkleminde, $F_*([X, Y]) = \nabla_X^B F_*Y - \nabla_Y^B F_*X$ eşitliğine sahiptir ve *F_* , F_* 'ın adjoint dönüşümünü göstermektedir. Diğer yandan $F_*Z \in \Gamma(\text{Range}F_*)$ için,

$$\begin{aligned}
 g_2(R^B(F_*X, F_*Y)V, F_*Z) &= g_2((\tilde{\nabla}_Y \mathcal{S})_V F_*X, F_*Z) \\
 &\quad -g_2((\tilde{\nabla}_X \mathcal{S})_V F_*Y, F_*Z),
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

şeklindedir. Ayrıca (4.17) denklemindeki $(\tilde{\nabla}_X \mathcal{S})_V F_*Y$ ifadesi,

$$(\tilde{\nabla}_X \mathcal{S})_V F_*Y = F_*(\nabla_X {}^*F_*(\mathcal{S}_V F_*Y)) - \mathcal{S}_{\nabla_X^{\perp V}} F_*Y - \mathcal{S}_V P \nabla_X^B F_*Y$$

dir. Burada $P \nabla_X^B F_*Y$, $\nabla_X^B F_*Y$ 'nin $\text{Range}F_*$ üzerindeki kısmını göstermektedir.

Diğer taraftan, $W \in \Gamma(\text{Range}F_*)^\perp$ için,

$$\begin{aligned}
 g_2(R^B(F_*X, F_*Y)V, W) &= g_2(R^{F^\perp}(F_*X, F_*Y)V, W) \\
 &\quad -g_2((\nabla F_*)(X, {}^*F_*(\mathcal{S}_V F_*Y)), W) \\
 &\quad +g_2((\nabla F_*)(Y, {}^*F_*(\mathcal{S}_V F_*X)), W),
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edilir. Buradaki (4.18) denkleminde (4.11) kullanılırsa,

$$g_2((\nabla F_*)(X, {}^*F_*(\mathcal{S}_V F_*Y)), W) = g_2(\mathcal{S}_W F_*X, \mathcal{S}_V F_*Y), \tag{4.19}$$

bulunur. (4.19)'da \mathcal{S}_V self-adjoint olduğundan,

$$g_2((\nabla F_*)(X, {}^*F_*(\mathcal{S}_V F_*Y)), W) = g_2(\mathcal{S}_V \mathcal{S}_W F_*X, F_*Y), \tag{4.20}$$

yazılır. Böylece (4.20)'de (4.18) denklemini kullanarak,

$$g_2(R^B(F_*X, F_*Y)V, W) = g_2(R^{F^\perp}(F_*X, F_*Y)V, W) + g_2([\mathcal{S}_W, \mathcal{S}_V]F_*X, F_*Y), \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.21)'de $[\mathcal{S}_W, \mathcal{S}_V] = \mathcal{S}_W \mathcal{S}_V - \mathcal{S}_V \mathcal{S}_W$ eşitliğine sahiptir. Böylece (4.21) ifadesi bir F Riemann dönüşümü için Ricci denklemi olarak adlandırılır (Şahin 2014; Şahin 2017a).

Lemma 4.1.2.1. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann manifoldları arasında bir Riemann dönüşümü olsun.

$\forall F_*X, F_*Y \in \Gamma(\text{Range}F_*)$ ve $U, V, W \in \Gamma(\text{Range}F_*)^\perp$ için

$$g_2(R^B(F_*X, V)W, F_*Y) = -g_2(\mathcal{S}_{\nabla_V^{F^\perp} W} F_*X, F_*Y) + g_2(\nabla_V^B \mathcal{S}_W F_*X, F_*Y) - g_2(\mathcal{S}_V F_*X, \mathcal{S}_W F_*Y) - g_2(\mathcal{S}_W (\nabla_V^B F_*X), F_*Y), \quad (4.22)$$

ve

$$g_2(R^B(F_*X, V)W, U) = g_2(\nabla_X^{F^\perp} \nabla_V^{F^\perp} W - \nabla_V^{F^\perp} \nabla_X^{F^\perp} W + \nabla_{F_*(\mathcal{S}_V F_*X)}^{F^\perp} W - \nabla_{\nabla_X^{F^\perp} V}^{F^\perp} W + \nabla_{F_*(\nabla_V^B F_*X)}^{F^\perp} W, U) \quad (4.23)$$

dır (Şahin, 2017c).

Teorem 4.1.2.2. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann manifoldları arasında tanımlı bir Riemann dönüşümü

olsun. Herhangi bir $X, Y \in \Gamma(\text{Çek}F_*)^\perp$, $V, W \in \Gamma(\text{Range}F_*)^\perp$ ve $F_*X, F_*Y \in \Gamma(\text{Range}F_*)$ için

(B, g_2) deki Ricci tensörü

$$Ric^B(F_*X, F_*Y) = Ric^{\text{Range}F_*}(F_*X, F_*Y) - \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ g_2(\mathcal{S}_{\nabla_{e_k}^{F^\perp} e_k} F_*X, F_*Y) - g_2(\nabla_{e_k}^B \mathcal{S}_{e_k} F_*X, F_*Y) + g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X, \mathcal{S}_{e_k} F_*Y) - g_2(\nabla_{e_k}^B F_*X, \mathcal{S}_{e_k} F_*Y) \right\}, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
Ric^B(V, W) &= Ric^{(Range F_*)^\perp}(V, W) - \sum_{j=r+1}^m \left\{ g_2(\mathcal{S}_{\nabla_V^\perp W} F_* X_j, F_* X_j) \right. \\
&\quad + g_2(\mathcal{S}_V F_* X_j, \mathcal{S}_W F_* X_j) - \nabla_V^B g_2(\mathcal{S}_W F_* X_j, F_* X_j) \\
&\quad \left. + 2g_2(\mathcal{S}_W F_* X_j, \nabla_V^B F_* X_j) \right\},
\end{aligned} \tag{4.25}$$

ve

$$\begin{aligned}
Ric^B(F_* X, V) &= \sum_{j=r+1}^m \left\{ g_2((\tilde{\nabla}_X \mathcal{S})_V F_* X_j, F_* X_j) - g_2((\tilde{\nabla}_X \mathcal{S})_V F_* X, F_* X_j) \right\} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n_1} g_2 \left(\nabla_X^{F^\perp} \nabla_{e_k}^{F^\perp} V - \nabla_{e_k}^{F^\perp} \nabla_X^{F^\perp} V - \nabla_{\nabla_X^{F^\perp} e_k}^{F^\perp} V \right. \\
&\quad \left. + \nabla_{F_* (\mathcal{S}_{e_k} F_* X)}^{F^\perp} V + \nabla_{F_* (\nabla_{e_k}^B F_* X)}^{F^\perp} V, e_k \right),
\end{aligned} \tag{4.26}$$

eşitliklerine sahiptir (Şahin, 2017c).

İspat: $Range F_*$ ve $(Range F_*)^\perp$ 'in ortonormal bazları sırasıyla $\{F_* X_j\}_{r+1 \leq j \leq m}$ ve $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n_1}$ olmak üzere, herhangi bir $X, Y \in \Gamma(\mathcal{C}ek F_*)^\perp$ için

$$\begin{aligned}
Ric^B(F_* X, F_* Y) &= \sum_{j=r+1}^m g_2(R^B(F_* X_j, F_* X) F_* Y, F_* X_j) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n_1} g_2(R^B(e_k, F_* X) F_* Y, e_k),
\end{aligned} \tag{4.27}$$

şeklinde dir. (4.27) denkleminde

$$Ric^{Range F_*}(F_* X, F_* Y) = \sum_{j=r+1}^m g_2(R^B(F_* X_j, F_* X) F_* Y, F_* X_j), \tag{4.28}$$

eşitliği vardır. Ayrıca (4.27) denklemindeki $\sum_{k=1}^{n_1} g_2(R^B(e_k, F_* X) F_* Y, e_k)$ ifadesi için (4.22) eşitliği

kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_1} g_2(R^B(e_k, F_*X)F_*Y, e_k) &= \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ g_2(\mathcal{S}_{\nabla_{F_*}^\perp e_k} F_*X, F_*Y) \right. \\ &\quad - g_2(\nabla_{e_k}^B \mathcal{S}_{e_k} F_*X, F_*Y) + g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X, \mathcal{S}_{e_k} F_*Y) \\ &\quad \left. - g_2(\nabla_{e_k}^B F_*X, \mathcal{S}_{e_k} F_*Y) \right\}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

bulunur. Böylece (4.27) için (4.28) ve (4.29) eşitlikleri yerine yazılarak (4.24) eşitliğine ulaşılır.

Diğer yandan $V, W \in \Gamma(\text{Range}F_*)^\perp$ için

$$\begin{aligned} Ric^B(V, W) &= \sum_{j=r+1}^m g_2(R^B(F_*X_j, V)W, F_*X_j) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n_1} g_2(R^B(e_k, V)W, e_k), \end{aligned} \quad (4.30)$$

yazılabilir. (4.30) denkleminde

$$\sum_{k=1}^{n_1} g_2(R^B(e_k, V)W, e_k) = Ric^{(\text{Range}F_*)^\perp}(V, W) \quad (4.31)$$

eşitliğine sahiptir. Ayrıca (4.30) ifadesindeki $\sum_{j=r+1}^m g_2(R^B(F_*X_j, V)W, F_*X_j)$ ifadesi (4.22) eşitliği

kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{j=r+1}^m g_2(R^B(F_*X_j, V)W, F_*X_j) &= \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ -g_2(\mathcal{S}_{\nabla_{F_*}^\perp W} F_*X_j, F_*X_j) + g_2(\nabla_V^B \mathcal{S}_W F_*X_j, F_*X_j) \right. \\ &\quad \left. - g_2(\mathcal{S}_V F_*X_j, \mathcal{S}_W F_*X_j) - g_2(\mathcal{S}_W \nabla_V^B F_*X_j, F_*X_j) \right\}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

elde edilir. Burada ∇^B , B de metrik konneksiyon olduğundan

$$\nabla_V g_2(\mathcal{S}_W F_*X_j, F_*X_j) - g_2(\nabla_V^B \mathcal{S}_W F_*X_j, F_*X_j) - g_2(\mathcal{S}_W F_*X_j, \nabla_V^B F_*X_j) = 0 \quad (4.33)$$

dır. Böylece (4.32) de (4.33) eşitliği kullanılır ve (4.31) ifadesi ile birlikte (4.30)'da yerine yazılırsa (4.25) eşitliğine ulaşılır.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
Ric^B(F_*X, V) &= \sum_{j=r+1}^m g_2(R^B(F_*X_j, F_*X)V, F_*X_j) \\
&+ \sum_{k=1}^{n_1} g_2(R^B(e_k, F_*X)V, e_k),
\end{aligned} \tag{4.34}$$

yazılabilir. (4.34)'de (4.17) ve (4.23) denklemleri yerlerine yazılırsa (4.26) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2.3. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann manifoldları arasında bir Riemann dönüşümü olsun.

O halde

$$\begin{aligned}
s^B &= s^{RangeF_*} + s^{(RangeF_*)^\perp} \\
&- 2 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\mathcal{S}_{\nabla_{e_k}^\perp} F_*X_j, F_*X_j) \\
&+ \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\nabla_{e_k}^B \mathcal{S}_{e_k} F_*X_j, F_*X_j) \\
&- 2 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X_j, \mathcal{S}_{e_k} F_*X_j) \\
&- 3 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\nabla_{e_k}^B F_*X_j, \mathcal{S}_{e_k} F_*X_j) \\
&+ \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} \nabla_{e_k}^B g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X_j, F_*X_j),
\end{aligned}$$

şeklinde dir. Burada s^B , s^{RangeF_*} ve $s^{(RangeF_*)^\perp}$ sırasıyla B , $RangeF_*$ ve $(RangeF_*)^\perp$ 'in skaler eğriliklerini, $\{F_*X_j\}_{r+1 \leq j \leq m}$, $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n_1}$ ise sırasıyla $RangeF_*$ ve $(RangeF_*)^\perp$ 'in ortonormal bazlarını göstermektedir (Şahin, 2017c).

İspat: Bir $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann dönüşümü verilsin. B baz manifoldu üzerindeki skaler eğrilik

$$s^B = \sum_{j=r+1}^m Ric^B(F_*X_j, F_*X_j) + \sum_{k=1}^{n_1} Ric^B(e_k, e_k), \tag{4.35}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{F_*X_l\}_{r+1 \leq l \leq m}$ ve $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n_1}$ sırasıyla $RangeF_*$ ve $(RangeF_*)^\perp$ 'in ortonormal bazlarını göstermektedir. Yukarıda verilen (4.35) ifadesinde (4.22) ve (4.23) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{j=r+1}^m Ric^B(F_*X_j, F_*X_j) &= \sum_{l=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ Ric^{RangeF_*}(F_*X_j, F_*X_j) - g_2(\mathcal{S}_{\nabla_{e_k}^{F_*} F_*X_j}, F_*X_j) \right. \\ &\quad + g_2(\nabla_{e_k}^B \mathcal{S}_{e_k} F_*X_j, F_*X_j) - g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X_j, \mathcal{S}_{e_k} F_*X_j) \\ &\quad \left. - g_2(\nabla_{e_k}^B F_*X_j, \mathcal{S}_{e_k} F_*X_j) \right\}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_1} Ric^B(e_k, e_k) &= \sum_{j=r+1}^m \sum_{t=1}^{n_1} \left\{ Ric^{(RangeF_*)^\perp}(e_k, e_k) - g_2(\mathcal{S}_{\nabla_{e_k}^{F_*} F_*X_j}, F_*X_j) \right. \\ &\quad - g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X_j, \mathcal{S}_{e_k} F_*X_j) + \nabla_{e_k}^B g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X_j, F_*X_j) \\ &\quad \left. - 2g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X_j, \nabla_{e_k}^B F_*X_j) \right\}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

yazılır. (4.36) ve (4.37), (4.35)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} s^B &= \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ Ric^{RangeF_*}(F_*X_j, F_*X_j) - g_2(\mathcal{S}_{\nabla_{e_k}^{F_*} F_*X_j}, F_*X_j) \right. \\ &\quad + g_2(\nabla_{e_k}^B \mathcal{S}_{e_k} F_*X_j, F_*X_j) - g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X_j, \mathcal{S}_{e_k} F_*X_j) \\ &\quad - g_2(\nabla_{e_k}^B F_*X_j, \mathcal{S}_{e_k} F_*X_j) \left. \right\} + \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ Ric^{(RangeF_*)^\perp}(e_k, e_k) \right. \\ &\quad - g_2(\mathcal{S}_{\nabla_{e_k}^{F_*} F_*X_j}, F_*X_j) - g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X_j, \mathcal{S}_{e_k} F_*X_j) \\ &\quad \left. + \nabla_{e_k}^B (g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X_j, F_*X_j)) - 2g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X_j, \nabla_{e_k}^B F_*X_j) \right\}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

bulunur. (4.38)'de gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
 S^B &= S^{\text{Range}F_*} + S^{(\text{Range}F_*)^\perp} \\
 &- 2 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\mathcal{S}_{\nabla_{e_k}^\perp} F_* X_j, F_* X_j) \\
 &+ \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\nabla_{e_k}^B \mathcal{S}_{e_k} F_* X_j, F_* X_j) \\
 &- 2 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_* X_j, \mathcal{S}_{e_k} F_* X_j) \\
 &- 3 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\nabla_{e_k}^B F_* X_j, \mathcal{S}_{e_k} F_* X_j) \\
 &+ \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} \nabla_{e_k}^B g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_* X_j, F_* X_j),
 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ve bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.2.4. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann manifoldları arasında bir total jeodezik Riemann dönüşümü olsun. O zaman

$$S^B = S^{\text{Range}F_*} + S^{(\text{Range}F_*)^\perp}$$

sağlanır (Şahin, 2017c).

Sonuç 4.1.2.5. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann manifoldları arasında bir umbilik Riemann dönüşümü olsun. O zaman

$$S^B = S^{\text{Range}F_*} + S^{(\text{Range}F_*)^\perp} - 2(f + f^2)(m - r),$$

şeklinde yazılabilir (Şahin, 2017c).

İspat: F bir umbilik dönüşüm olduğundan Teorem 4.1.2.3.'de $S_\nu F_* X = fF_* X$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
s^B &= s^{RangeF_*} + s^{(RangeF_*)^\perp} - 2 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(fF_*X_j, F_*X_j) \\
&+ \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\nabla_{e_k}^B fF_*X_j, F_*X_j) - 2 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(fF_*X_j, fF_*X_j) \\
&- 3 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\nabla_{e_k}^B F_*X_j, fF_*X_j) + \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} \nabla_{e_k}^B g_2(fF_*X_j, F_*X_j)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

olur. Buradan (4.39) ifadesinin izi alınır

$$s^B = s^{RangeF_*} + s^{(RangeF_*)^\perp} - 2f(m-r) - 2f^2(m-r)$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

4.1.3. Total Jeodezik Riemann Dönüşümleri

Bu bölümde bir Riemann dönüşümünün total jeodezik olması için gerekli ve yeter şartları (3.12), (3.13) ve (4.10) denklemleriyle verilecektir.

Teorem 4.1.3.1. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann dönüşümü olsun. F aşağıdaki şartlardan herhangi birini sağlarsa total jeodeziktir:

- i. Her $X, Y \in \Gamma(\zeta ekF_*)^\perp$ için $A_X Y = 0$,
- ii. Lifler total jeodeziktir yani, her $U, V \in \Gamma(\zeta ekF_*)$ için $T_U V = 0$,
- iii. $V \in \Gamma(RangeF_*)^\perp$ ve $X \in (\zeta ekF_*)^\perp$ için $S_V F_* X = 0$ (Şahin, 2012b).

İspat: Bir $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann dönüşümünün total jeodezik olması için gerek ve yeter koşul $\forall X, Y \in \Gamma(\zeta ekF_*)^\perp, \forall U, U_1, U_2 \in \Gamma(\zeta ekF_*)$ için gerek ve yeter koşul şart $(\nabla F_*)(X, Y) = 0, (\nabla F_*)(X, U) = 0$ ve $(\nabla F_*)(U_1, U_2) = 0$ sağlanmasıdır. Burada $(\nabla F_*)(X, U) \in \Gamma(RangeF_*)$ olduğundan $\forall Y \in \Gamma(\zeta ekF_*)^\perp$ için $g_2((\nabla F_*)(X, U), F_* Y) = 0$ olur. Böylece (4.2) ve (3.12) denklemlerini kullanarak,

$$g_1(A_X U, Y) = -g_2((\nabla F_*)(X, U), F_* Y), \tag{4.40}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $(\nabla F_*)(U, V) \in \Gamma(\text{Range} F_*)^\perp$ olduğundan $\forall X \in \Gamma(\text{Çek} F_*)^\perp$ için $g_2((\nabla F_*)(U, V), F_* X) = 0$ sağlanır. O halde, (4.2) ve (3.13) denklemlerinden,

$$g_1(T_U V, X) = -g_2((\nabla F_*)(U, V), F_* X), \quad (4.41)$$

bulunur. Diğer taraftan, $(\nabla F_*)(X, Y) \in \Gamma(\text{Range} F_*)^\perp$ olduğundan, $\forall X, Y \in \Gamma(\text{Çek} F_*)^\perp$ ve $\forall V \in \Gamma(\text{Range} F_*)^\perp$ için $g_2((\nabla F_*)(X, Y), V) = 0$ şeklindedir. O zaman (4.10) denklemi kullanılırsa,

$$g_2((\nabla F_*)(X, Y), V) = g_2(F_* Y, \mathcal{S}_V F_* X), \quad (4.42)$$

elde edilir. Yukarıda verilen (3.17), (4.40) ve (4.42) denklemlerinden ispat tamamlanır.

Diğer yandan, $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann dönüşümünün ikinci temel formunun izi kullanılarak

$$\tau(F) = \text{iz}(\nabla F_*) = \sum_{i=1}^m (\nabla F_*)(e_i, e_i),$$

$\tau(F)$ tensör alanı tanımlanır. Burada $\text{boy} M = m$ ve $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, M üzerindeki ortonormal bazı göstermektedir. Ayrıca $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann dönüşümü için

$$(\nabla F_*)(X, Y) = g_1(X, Y)H'$$

eşitliği sağlanırsa F 'ye umbilik Riemann dönüşümü denir (Şahin, 2011b).

4.1.4. Bir Riemann dönüşümünün total uzayı üzerindeki Einstein metriği

Bu kısımda bir $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann dönüşümünün total uzayı üzerinde Ricci tensörü ve skaler eğrilik verilecektir.

Lemma 4.1.4.1. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda,

$$\text{Ric}(W_1, W_2) = \hat{\text{Ric}}(W_1, W_2) - r g_1(H, T_{W_1} W_2) + \sum_{j=r+1}^m \{g_1((\nabla_{X_j} T)_{W_1} W_2, X_j) + g_1(A_{X_j} W_1, A_{X_j} W_2)\},$$

şeklinde. Burada, $\hat{Ric}(W_1, W_2)$, herhangi bir lif üzerindeki Ricci tensörünü, H ise ortalama eğrilik vektör alanını göstermektedir.

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) = & \sum_{i=1}^r \left\{ g_1((\nabla_X T)_{U_i} U_i, Y) + g_1((\nabla_{U_i} A)_X Y, U_i) - g_1(T_{U_i} X, T_{U_i} Y) + g_1(A_X U_i, A_Y U_i) \right\} \\ & + Ric^{Range F_*}(F_* X, F_* Y) - \sum_{j=r+1}^m \left\{ g_2((\nabla F_*)(X_j, Y), (\nabla F_*)(X, X_j)) + g_2((\nabla F_*)(X, Y), \tau^{(\check{C}ekF_*)^\perp}) \right\}, \end{aligned}$$

burada $Ric^{Range F_*}(F_* X, F_* Y)$ $Range F_*$ üzerindeki Ricci tensörünü ve $\tau^{(\check{C}ekF_*)^\perp}$ ise torsiyon alanı τ 'nin $(\check{C}ekF_*)^\perp$ 'in bileşenidir. Ayrıca

$$\begin{aligned} Ric(X, U) = & \sum_{i=1}^r \left\{ g_1((\nabla_U T)_{U_i} U_i, X) - g_1((\nabla_{U_i} T)_U U_i, X) \right\} \\ & + \sum_{j=r+1}^m \left\{ g_1((\nabla_{X_j} A)_{X_j} X, U) + 2g_1(T_U X_j, A_{X_j} X) \right\}, \end{aligned}$$

dir. Burada $\forall W_1, W_2, U \in \Gamma(\check{C}ekF_*)$ ve $\forall X, Y \in \Gamma(\check{C}ekF)^\perp$ için $\{U_1, \dots, U_r\}$ $(\check{C}ekF_*)$ 'in ortonormal bazını, $\{X_{r+1}, \dots, X_m\}$ ise $(\check{C}ekF)^\perp$ 'in ortonormal bazını göstermektedir (Şahin, 2017b).

Teorem 4.1.4.2. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann dönüşümü olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} s = & \hat{s} + s^{Range F_*} + \left\| \tau^{(\check{C}ekF_*)^\perp} \right\|^2 - r^2 \|H\|^2 \\ & - \sum_{j,l=1}^m \left\| (\nabla F_*)(X_j, X_l) \right\|^2 + 2 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^r g_1((\nabla_{X_j} T)(U_k, U_k), X_j) + \left\| A_{X_j} U_k \right\|^2 \\ & + \sum_{l=r+1}^m \sum_{i=1}^r g_1((\nabla_{U_i} A)(X_l, X_l), U_i) - \left\| T_{U_i} X_l \right\|^2 \end{aligned} \quad (4.43)$$

dir. Burada $\{U_1, \dots, U_r\}$ $(\check{C}ekF_*)$ 'in ortonormal bazı, $\{X_{r+1}, \dots, X_m\}$ $(\check{C}ekF)^\perp$ 'in ortonormal bazı ve s , \hat{s} ve $s^{Range F_*}$ sırasıyla M 'nin skaler eğriliği, lifin skaler eğriliği ve $Range F_*$ 'in skaler eğriliğidir (Şahin, 2017b).

4.2. Total manifoldu Ricci soliton olan Riemann dönüşümleri

Bu kısımda Riemann manifoldları arasında tanımlı bir $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann dönüşümü ele alınacaktır. Total manifold (M, g_1, ξ, λ) 'ın Ricci soliton olması durumunda, F Riemann dönüşümünün liflerinin ve $Range F_*$ uzayının bazı karakterizasyonları verilecektir.

Teorem 4.2.1. (M, g_1) ve (B, g_2) manifoldlarının her biri Riemann manifoldları olmak üzere; $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir total jeodezik Riemann dönüşümü olsun. Eğer total uzayı (M, g_1, ξ, λ) olan bir Ricci soliton ise bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- i. Eğer ξ bir dikey potansiyel vektör alanı ise bu durumda F Riemann dönüşümünün her bir lifi bir Ricci solitondur.
- ii. Eğer ξ bir yatay potansiyel vektör alanı ise bu durumda F Riemann dönüşümünün her bir lifi Einstein manifoldudur (Yadav ve Meena, 2021).

İspat: i) Total uzay (M, g_1, ξ, λ) bir Ricci soliton olduğundan (1.2) eşitliğinden $\forall U, W \in \Gamma(\mathcal{C}ekF_*)$ için

$$\frac{1}{2}(L_\xi g_1)(U, W) + Ric(U, W) + \lambda g_1(U, W) = 0 \quad (4.44)$$

dir. (4.44) denkleminde (3.38) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{g_1(\nabla_U \xi, W) + g_1(\nabla_W \xi, U)\} + \hat{Ric}(U, W) - g_1(N, T_U W) \\ & + \sum_{j=r+1}^m \{g_1(\nabla_{X_j} T)_U W, X_j\} + g_1(A_{X_j} U, A_{X_j} W) + \lambda g_1(U, W) = 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

elde edilir. Burada $\{X_j\}_{1 \leq j \leq n}$, $\Gamma(\mathcal{C}ekF_*)^\perp$ yatay distribüsyonun bir ortonormal bazını, ∇ ise M üzerinde Levi-Civita konneksiyonunu göstermektedir. Eğer $\xi = V \in \Gamma(\mathcal{C}ekF_*)$ alınır ve F total jeodezik Riemann dönüşümü olduğundan, (4.45) ifadesi

$$\frac{1}{2} \{g_1(\hat{\nabla}_U V, W) + g_1(\hat{\nabla}_W V, U)\} + \hat{Ric}(U, W) + \lambda g_1(U, W) = 0$$

olur. Böylece F Riemann dönüşümünün her lifi Ricci solitondur.

ii) Diğer taraftan potansiyel vektör alanı $\xi = Z \in \Gamma(\mathcal{C}ekF_*)^\perp$ ise ve F bir total jeodezik Riemann dönüşümü olduğundan, $\forall U, W \in \Gamma(\mathcal{C}ekF_*)$ için (4.45) ifadesi

$$\frac{1}{2} \{g_1(\nabla_U Z, W) + g_1(\nabla_W Z, U)\} + \hat{Ric}(U, W) + \lambda g_1(U, W) = 0 \quad (4.46)$$

olur. Ayrıca (4.46) denkleminde metrik uyumluluğu kullanılırsa

$$\frac{1}{2} \{-g_1(\nabla_U W, Z) - g_1(Z, \nabla_W U)\} + \hat{Ric}(U, W) + \lambda g_1(U, W) = 0 \quad (4.47)$$

bulunur. (4.47) denkleminde (3.16) denklemi kullanılırsa

$$-g_1(T_U W, Z) + \hat{Ric}(U, W) + \lambda g_1(U, W) = 0 \quad (4.48)$$

olur. Burada F 'nin lifleri total jeodezik olduğundan (4.48) denklemi

$$\hat{Ric}(U, W) + \lambda g_1(U, W) = 0,$$

şeklindedir. Böylece lifler Einstein'dır.

Teorem 4.2.2. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann dönüşümü olmak üzere $V \in (\mathcal{C}ekF_*)^\perp$ için (M, g_1, V, λ) bir Ricci soliton olsun. Bu durumda $(\mathcal{C}ekF_*)^\perp$, M üzerinde bir total jeodezik foliasyon tanımlar ve F dönüşümünün lifleri total umbiliktir. Bu durumda lifler bir hemen hemen Ricci solitondur (Yadav ve Meena, 2021).

İspat: F Riemann dönüşümünün total uzayı (M, g_1) Ricci soliton olduğundan $\forall U, W \in \Gamma(\mathcal{C}ekF_*)$ için (4.44) Ricci soliton denkleminde (3.38) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{g_1(\hat{\nabla}_U V, W) + g_1(\hat{\nabla}_W V, U)\} + \hat{Ric}(U, W) - g_1(N, T_U W) \\ & + \sum_{j=r+1}^m \{(g_1(\nabla_{X_j} T)_U W, X_j) + (g_1(A_{X_j} U, A_{X_j} W))\} + \lambda g_1(U, W) = 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

elde edilir. Eğer (M, g_1, ξ, λ) Ricci solitonunun lifleri total umbilik olduğundan (4.49)'de (3.16) ve (4.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ g_1(\hat{\nabla}_U V, W) + g_1(\hat{\nabla}_W V, U) \right\} + \hat{Ric}(U, W) - g_1(N, H)g_1(U, W) \\ & + \sum_{j=r+1}^m \left\{ (\nabla_{X_j} g_1)(U, W)g_1(H, X_j) - g_1(\nabla_{X_j} H, X_j)g_1(U, W) + g_1(A_{X_j} U, A_{X_j} W) \right\} \\ & + \lambda g_1(U, W) = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

dır. Ayrıca $(\mathcal{C}ekF_*)^\perp$ total jeodezik distribüsyon tanımlandığından (4.50) denkleminde (3.46) ve (3.36) eşitliklerini kullanılarak

$$\frac{1}{2} (L_V g_1)(U, W) + \hat{Ric}(U, W) - r g_1(H, H)g_1(U, W) - \check{\delta}(H)g_1(U, W) + \lambda g_1(U, W) = 0 \quad (4.51)$$

olur. (4.51) eşitliğinden

$$\frac{1}{2} (L_V g_1)(U, W) + \hat{Ric}(U, W) - \left\{ r \|H\|^2 + \check{\delta}(H) - \lambda \right\} g_1(U, W) = 0$$

elde edilir. Böylece F 'nin herhangi bir lifi hemen hemen Ricci solitondur, bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.3. (M, g_1) ve (B, g_2) manifoldlar Riemann manifoldları olmak üzere; $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir total jeodezik Riemann dönüşümü olsun. Eğer F 'nin total uzayı (M, g_1, ξ, λ) Ricci solitonuna sahip ise aşağıdakiler sağlanır:

- i. Eğer ξ bir dikey potansiyel vektör alanı ise $RangeF_*$ bir Einstein manifoldudur.
- ii. Eğer ξ bir yatay potansiyel vektör alanı ise $RangeF_*$ bir Ricci solitondur (Yadav ve Meena, 2021).

İspat: i) Total uzayı (M, g_1, ξ, λ) olan bir Ricci soliton olduğundan $\forall U, W \in \Gamma(\mathcal{C}ekF_*)$ için (4.44) Ricci soliton denkleminde (3.38) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \{g_1(\nabla_X \xi, Y) + g_1(\nabla_Y \xi, X)\} + Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + \\
& + \sum_{i=1}^r \{g_1((\nabla_X T)_{U_i} U_i, Y) + g_1((\nabla_{U_i} A)_X Y, U_i) - g_1(T_{U_i} X, T_{U_i} Y) + g_1(A_X U_i, A_Y U_i)\} \\
& - \sum_{j=r+1}^m g_2((\nabla F_*)(X_j, Y), (\nabla F_*)(X, X_j)) + g_2((\nabla F_*)(X, Y), \tau^{(ÇekF_*)^\perp}) + \lambda g_1(X, Y) = 0,
\end{aligned} \tag{4.52}$$

yazılabilir. Ayrıca F total jeodezik olduğundan (4.52) denkleminde

$$\frac{1}{2} \{g_1(\nabla_X \xi, Y) + g_1(\nabla_Y \xi, X)\} + Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + \lambda g_1(X, Y) = 0, \tag{4.53}$$

bulunur. Burada eğer $\xi = V \in \Gamma(VM)$ ise o halde (4.53) den

$$\frac{1}{2} \{g_1(h\nabla_X V, Y) + g_1(h\nabla_Y V, X)\} + Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + \lambda g_1(X, Y) = 0, \tag{4.54}$$

elde edilir. F bir Riemann dönüşümü olduğundan (4.54) denkleminde (4.1) eşitliğini kullanılırsa

$$\frac{1}{2} \{g_2(F_*(\nabla_X V), F_*Y) + g_2(F_*(\nabla_Y V), F_*X)\} + Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + \lambda g_1(X, Y) = 0 \tag{4.55}$$

yazılır. (4.55) denkleminde (4.2) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \{g_2(-(\nabla F_*)(X, V) + \nabla_X^F F_*V, F_*Y) + g_2(-(\nabla F_*)(Y, V) + \nabla_Y^F F_*V, F_*X)\} \\
& + Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + \lambda g_1(X, Y) = 0
\end{aligned} \tag{4.56}$$

bulunur. F total jeodezik ve V dikey vektör alanı olduğundan $F_*V = 0$ dır. O halde (4.56)'dan

$$Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + \lambda g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \tag{4.57}$$

elde edilir. Böylece $RangeF_*$ Einstein'dır ve (i) ispatlanır.

ii) Diğer yandan $\xi = Z \in \Gamma(HM)$ olsun. O halde (4.53)'den

$$\frac{1}{2}(L_Z g_1)(X, Y) + Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + \lambda g_1(X, Y) = 0, \quad (4.58)$$

yazılabilir. Ayrıca F bir Riemann dönüşümü olduğundan (4.58)'de (4.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ g_2(F_*(\nabla_X Z), F_*Y) + g_2(F_*X, F_*(\nabla_Y Z)) \} + Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) \\ & + \lambda g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

dır. Dahası (4.59) eşitliğinde (4.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ g_2(-(\nabla F_*)(X, Z) + \nabla_X^F F_*Z, F_*Y) + g_2(-(\nabla F_*)(Y, Z) + \nabla_Y^F F_*Z, F_*X) \} \\ & + Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + \lambda g_1(F_*X, F_*Y) = 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

şekindedir. Burada $(\nabla F_*)(X, Y) \in \Gamma(RangeF_*)^\perp$ olduğundan (4.60) ifadesi,

$$\frac{1}{2} \{ g_2(\nabla_X^F F_*Z, F_*Y) + g_2(\nabla_Y^F F_*Z, F_*X) \} + Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + \lambda g_1(F_*X, F_*Y) = 0$$

şeklinde olur. Böylece $RangeF_*$ Ricci solitondur ve (ii) ispatlanır.

Teorem 4.2.4. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann manifoldundan Einstein manifolduna tanımlı total jeodezik bir Riemann dönüşümü olsun. Eğer $Z \in (ÇekF_*)^\perp$ olmak üzere (M, g_1, Z, λ) bir Ricci soliton yapısına sahip ise bu durumda Z vektör alanı, $(ÇekF_*)^\perp$ yatay distribüsyonu üzerinde konformaldır (Yadav ve Meena, 2021).

İspat: (M, g_1, Z, λ) bir Ricci soliton olduğundan, her $X, Y \in \Gamma(ÇekF_*)^\perp$ için (1.2) eşitliğinden

$$\frac{1}{2}(L_Z g_1)(X, Y) + Ric(X, Y) + \lambda g_1(X, Y) = 0, \quad (4.61)$$

dır. (4.61) denkleminde (3.39) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(L_Z g_1)(X, Y) + Ric^{Range F_*}(F_* X, F_* Y) + \sum_{i=1}^r \left\{ g_1((\nabla_X T)_{U_i} U_i, Y) + g_1((\nabla_{U_i} A)_X Y, U_i) \right. \\
& - g_1(T_{U_i} X, T_{U_i} Y) + g_1(A_X U_i, A_Y U_i) \left. \right\} - \sum_{j=r+1}^m \left\{ g_2((\nabla F_*)(X_j, Y), (\nabla F_*)(X, X_j)) \right. \\
& \left. + g_2((\nabla F_*)(X, Y), \tau^{(ÇekF_*)^\perp}) \right\} + \lambda g_1(X, Y) = 0
\end{aligned} \tag{4.62}$$

elde edilir. Burada $\{X_j\}_{1 \leq j \leq r}$, $(ÇekF_*)^\perp$ 'in ortonormal bazıdır. Ayrıca F total jeodezik bir dönüşüm olduğundan (4.62)'den

$$\frac{1}{2}(L_Z g_1)(X, Y) + Ric^{Range F_*}(F_* X, F_* Y) + \lambda g_1(X, Y) = 0, \tag{4.63}$$

bulunur. F Riemann dönüşümü olduğundan (4.63) denkleminde (4.1) kullanılırsa

$$\frac{1}{2}(L_Z g_1)(X, Y) + Ric^{Range F_*}(F_* X, F_* Y) + \lambda g_2(F_* X, F_* Y) = 0,$$

yazılır. Ayrıca (B, g_2) Einstein manifoldu olduğundan $Range F_*$ 'da Einstein'dır. Bu da Z vektör alanının konformal olması demektir.

4.2.1. Total manifoldu Ricci Soliton olan Riemann Dönüşümlerinin Skaler eğrilikleri

Bu kısımda Riemann manifoldları arasında tanımlı bir $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann dönüşümü ele alınacaktır. Total manifold (M, g_1, ξ, λ) 'nin bir Ricci soliton olması durumunda, F Riemann dönüşümünün liflerinin ve $Range F_*$ uzayının skaler eğrilikleri hesaplanacaktır.

Teorem 4.2.1.1. (M, g_1) ve (B, g_2) birer Riemann manifoldları olmak üzere; $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ total jeodezik bir Riemann dönüşümü olsun. Eğer $\xi \in \Gamma(TM)$ için total manifoldu (M, g_1, ξ, λ) bir Ricci soliton ise bu durumda M 'nin sabit skaler eğriliği $-\lambda m$ dir (Yadav ve Meena, 2021).

İspat: (M, g_1, ξ, λ) bir Ricci soliton olduğundan her $X, Y, \xi \in \Gamma(TM)$ için (1.2)'den

$$\frac{1}{2} \{g_1(\nabla_X \xi, Y) + g_1(\nabla_Y \xi, X)\} + Ric(X, Y) + \lambda g_1(X, Y) = 0, \quad (4.64)$$

yazılır. Varsayalım ki X, Y ve ξ vektör alanları $X = \hat{X} + X^\perp$, $Y = \hat{Y} + Y^\perp$ ve $\xi = \hat{\xi} + \xi^\perp$ olsun. Burada “ $\hat{}$ ”, $\mathcal{C}ekF_*$ ’ın ve “ \perp ”, $(\mathcal{C}ekF_*)^\perp$ ’in bileşenidir. Bu durumda yukarıda verilen (4.64) eşitliği aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{g_1(\nabla_{\hat{X}+X^\perp} \hat{\xi} + \xi^\perp, \hat{Y} + Y^\perp) + g_1(\nabla_{\hat{Y}+Y^\perp} \hat{\xi} + \xi^\perp, \hat{X} + X^\perp)\} + Ric(\hat{X}, \hat{Y}) + Ric(X^\perp, Y^\perp) \\ & + Ric(\hat{X}, X^\perp) + Ric(\hat{Y}, Y^\perp) + \lambda \{g_1(\hat{X}, \hat{Y}) + g_1(X^\perp, Y^\perp)\} = 0 \end{aligned} \quad (4.65)$$

şeklinde. (4.65)’in izi alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ 2 \sum_{i=1}^r g_1(\nabla_{U_i} U_i, U_i) + 2 \sum_{j=r+1}^m g_1(\nabla_{X_j} X_j, X_j) \right\} + \sum_{i=1}^r Ric(U_i, U_i) + \sum_{j=r+1}^m Ric(X_j, X_j) \\ & + 2 \sum_{i,j} Ric(U_i, X_j) + \lambda \left\{ \sum_{i=1}^r g_1(U_i, U_i) + \sum_{j=r+1}^m g_1(X_j, X_j) \right\} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\{U_i\}_{1 \leq i \leq r}$ ve $\{X_j\}_{r+1 \leq j \leq n}$ sırasıyla $\mathcal{C}ekF_*$ ve $(\mathcal{C}ekF_*)^\perp$ ’in ortonormal bazlarını göstermektedir. F total jeodezik bir Riemann dönüşümü olduğundan (3.38), (3.39) ve (3.40) eşitliklerinden

$$\sum_{i=1}^r g_1(\nabla_{U_i} U_i, U_i) + \sum_{j=r+1}^m g_1(\nabla_{X_j} X_j, X_j) + \hat{s} + s^{RangeF_*} + \lambda(r+m-r) = 0 \quad (4.66)$$

olur. Burada \hat{s} ve s^{RangeF_*} sırasıyla $\mathcal{C}ekF_*$ ve $RangeF_*$ ’in skaler eğriliklerini göstermektedir.

∇ , M ’de metrik konneksiyon olduğundan (4.66) denkleminde

$$\frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^r \nabla_{U_i} (g_1(U_i, U_i)) + \sum_{j=r+1}^m \nabla_{X_j} (g_1(X_j, X_j)) \right\} + \hat{s} + s^{RangeF_*} + \lambda m = 0 \quad (4.67)$$

olur ve (4.67) denklemi ile

$$\frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^r U_i (g_1(U_i, U_i)) + \sum_{j=r+1}^m X_j (g_1(X_j, X_j)) \right\} + \hat{s} + s^{\text{Range}F_*} + \lambda m = 0,$$

yazılır. Yani $\hat{s} + s^{\text{Range}F_*} + \lambda m = 0$ ya da $s + \lambda m = 0$ olduğundan, $s = -\lambda m$ dir. Böylece ispat tamamlanır. Burada s , M 'de skaler eğriliktir (Yadav ve Meena, 2021).

Teorem 4.2.1.2. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ total jeodezik bir Riemann dönüşümü olsun. Eğer herhangi bir $Z \in \Gamma(HM)$ için (M, g_1, Z, λ) bir Ricci soliton ise bu durumda liflerin skaler eğriliği $-\lambda r$ dir (Yadav ve Meena, 2021).

İspat: Total manifold bir Ricci soliton olduğundan

$$\hat{Ric}(U, W) + \lambda g_1(U, W) = 0 \quad (4.68)$$

dir. (4.68) eşitliğinin izi alınırsa

$$\sum_{i=1}^r \hat{Ric}(U_i, U_i) + \lambda \sum_{i=1}^r g_1(U_i, U_i) = 0 \quad (4.69)$$

olur. (4.69) eşitliğinden

$$\hat{s} + \lambda r = 0,$$

sağlanır. Burada $\{U_i\}_{1 \leq i \leq r}$, $\mathcal{C}ekF_*$ 'in ortonormal bazı ve \hat{s} liflerin skaler eğriliğidir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.1.3. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ total jeodezik bir Riemann dönüşümü olsun. Eğer herhangi bir $Z \in \Gamma(HM)$ için (M, g_1, Z, λ) bir Ricci soliton ise bu durumda $\text{Range}F_*$ uzayının skaler eğriliği $-\lambda(m-r)$ dir (Yadav ve Meena, 2021).

İspat: Total manifold bir Ricci soliton olduğundan (4.57)'nin izini alarak

$$\sum_{j=r+1}^m Ric^{RangeF_*}(F_*X_j, F_*X_j) + \lambda \sum_{j=r+1}^m g_2(F_*X_j, F_*X_j) = 0 \quad (4.70)$$

eşitliği elde edilir. (4.70) eşitliği

$$s^{RangeF_*} + \lambda(m-r) = 0$$

anlamına gelir. Burada $\{X_j\}_{r+1 \leq j \leq m}$, $(ÇekF_*)^\perp$ 'in ve s^{RangeF_*} , $RangeF_*$ 'in skaler eğriliğidir, böylece ispat tamamlanır.

4.3. Baz Manifoldu Ricci Soliton olan Riemann dönüşümleri

(M, g_1) ve (B, g_2) birer Riemann manifoldları olmak üzere; $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann dönüşümü olsun. Herhangi bir $V_1, V_2 \in \Gamma(RangeF_*)^\perp$ için

$$\nabla_{V_1} V_2 = (\nabla_{V_1} V_2)^T + (\nabla_{V_1}^\perp V_2)$$

eşitliği vardır. Burada $(\nabla_{V_1} V_2)^T$ ve $(\nabla_{V_1}^\perp V_2)$ terimleri sırasıyla $\nabla_{V_1} V_2$ 'in $RangeF_*$ ve $(RangeF_*)^\perp$ üzerindeki bileşenlerini göstermektedir. Buradan itibaren F Riemann dönüşümünün $(RangeF_*)^\perp$ -total jeodezik olduğu kabul edilecektir, yani herhangi bir $V_1, V_2 \in \Gamma(RangeF_*)^\perp$ için $\nabla_{V_1} V_2 = (\nabla_{V_1}^\perp V_2)$ şeklindedir.

Bu kısımda Riemann manifoldları arasında tanımlı bir $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann dönüşümü ele alınacak olup baz manifoldu bir (B, g_2, ξ, λ) Ricci soliton olan bir F Riemann dönüşümü ile ilgili bazı karakterizasyonlar verilecektir.

Teorem 4.3.1. (M, g_1) ve (B, g_2) birer Riemann manifoldları olmak üzere; $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir total jeodezik Riemann dönüşümü olsun. Eğer baz uzay (B, g_2, ξ, λ) bir Ricci soliton ise aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- i. $Z \in \Gamma(ÇekF_*)^\perp$ olmak üzere eğer $\xi = F_*Z \in \Gamma(RangeF_*)$ ise $RangeF_*$ 'in herhangi bir lifi bir Ricci solitondur.
- ii. Eğer $\xi = V \in \Gamma(RangeF_*)^\perp$ ise $RangeF_*$ 'in herhangi lifi bir Einstein'dır (Yadav ve Meena, 2021).

İspat: i) Bir $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ baz manifoldu (B, g_2, ξ, λ) bir Ricci soliton olduğundan her $F_*X, F_*Y \in \Gamma(\text{Range}F_*)$ için (1.2) eşitliğinden

$$\frac{1}{2}(L_\xi g_2)(F_*X, F_*Y) + Ric^B(F_*X, F_*Y) + \lambda g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \quad (4.71)$$

yazılabilir. Burada Ric^B , B manifoldu üzerindeki Ricci tensörünü göstermektedir. (4.71)'den

$$\frac{1}{2}\left\{g_2(\overset{B}{\nabla}_{F_*X} \xi, F_*Y) + g_2(\overset{B}{\nabla}_{F_*Y} \xi, F_*X)\right\} + Ric^B(F_*X, F_*Y) + \lambda g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \quad (4.72)$$

elde edilir. Ayrıca F total jeodezik olduğundan ve (4.72) ifadesinde (4.24) eşitliği kullanılırsa

$$\frac{1}{2}\left\{g_2(\overset{B}{\nabla}_{F_*X} \xi, F_*Y) + g_2(\overset{B}{\nabla}_{F_*Y} \xi, F_*X)\right\} + Ric^{\text{Range}F_*}(F_*X, F_*Y) + \lambda g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \quad (4.73)$$

bulunur. Ayrıca, eğer $\xi = F_*Z \in \Gamma(\text{Range}F_*)$ alınırsa (4.73) denkleminde

$$\frac{1}{2}\left\{g_2(\overset{B}{\nabla}_{F_*X} F_*Z, F_*Y) + g_2(\overset{B}{\nabla}_{F_*Y} F_*Z, F_*X)\right\} + Ric^{\text{Range}F_*}(F_*X, F_*Y) + \lambda g_2(F_*X, F_*Y) = 0$$

elde edilir. Böylece $\text{Range}F_*$ 'ın herhangi bir lifi bir Ricci solitondur.

ii) Diğer yandan, eğer $\xi = V \in \Gamma(\text{Range}F_*)^\perp$ alınarak (4.73) eşitliğinden

$$\frac{1}{2}\left\{g_2(\overset{B}{\nabla}_{F_*X} V, F_*Y) + g_2(\overset{B}{\nabla}_{F_*Y} V, F_*X)\right\} + Ric^{\text{Range}F_*}(F_*X, F_*Y) + \lambda g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \quad (4.74)$$

yazılır. Burada $Ric^{\text{Range}F_*}$, $\text{Range}F_*$ üzerindeki Ricci tensörünü göstermektedir. (4.74) denkleminde (4.10) eşitliğini kullanarak

$$-\frac{1}{2}\left\{g_2(\mathcal{S}_V F_*X, F_*Y) + g_2(\mathcal{S}_V F_*Y, F_*X)\right\} + Ric^{\text{Range}F_*}(F_*X, F_*Y) + \lambda g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \quad (4.75)$$

elde edilir. Ayrıca \mathcal{S}_V self adjoint olduğundan (4.75) denkleminde

$$-g_2(\mathcal{S}_V F_* X, F_* Y) + Ric^{Range F_*}(F_* X, F_* Y) + \lambda g_2(F_* X, F_* Y) = 0 \quad (4.76)$$

eşitliği sağlanır. F Riemann dönüşümü total jeodezik olduğundan (4.76) ifadesinden

$$Ric^{Range F_*}(F_* X, F_* Y) + \lambda g_2(F_* X, F_* Y) = 0$$

elde edilir. Böylece $Range F_*$ 'in herhangi lifi bir Einstein'dır.

Sonuç 4.3.2: $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir total jeodezik Riemann dönüşümü ve $\xi = V \in \Gamma(Range F_*)^\perp$ olmak üzere (B, g_2, ξ, λ) bir Ricci soliton olsun. Bu durumda $Range F_*$ 'in skaler eğriliği $-\lambda(m-r)$ dir, burada $boy(Range F_*) = m-r$ dir (Yadav ve Meena, 2021).

İspat: (4.57) denkleminde $Ric^{Range F_*}(F_* X, F_* Y) = s^{Range F_*}$ ve $boy(Range F_*) = m-r$ eşitlikleri yazılırsa

$$s^{Range F_*} = -\lambda(m-r)$$

elde edilir.

Teorem 4.3.3. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir total jeodezik Riemann dönüşümü olsun. Eğer baz uzay (B, g_2, ξ, λ) bir Ricci soliton ise aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- i. Eğer $\xi = V \in \Gamma(Range F_*)^\perp$ ise $(Range F_*)^\perp$ 'in herhangi lifi bir Ricci solitondur.
- ii. Eğer $\xi = F_* X \in \Gamma(Range F_*)$ ise $(Range F_*)^\perp$ 'in herhangi lifi bir Einstein'dır (Yadav ve Meena, 2021).

İspat: i) Bir $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann dönüşümünün baz manifoldu (B, g_2, ξ, λ) bir Ricci soliton olduğundan her $U, W \in \Gamma(Range F_*)^\perp$ için (1.2) eşitliğinden

$$\frac{1}{2}(L_\xi g_2)(U, W) + Ric(U, W) + \lambda g_2(U, W) = 0 \quad (4.77)$$

yazılabilir. O halde (4.77) denkleminde

$$\frac{1}{2} \left\{ g_2(\nabla_U^B \xi, W) + g_2(\nabla_W^B \xi, U) \right\} + Ric^B(U, W) + \lambda g_2(U, W) = 0 \quad (4.78)$$

elde edilir. Ayrıca F total jeodezik olduğundan (4.78) eşitliğinde (4.25) denklemi kullanılırsa

$$\frac{1}{2} \left\{ g_2(\nabla_U^B \xi, W) + g_2(\nabla_W^B \xi, U) \right\} + Ric^{(Range F_*)^\perp}(U, W) + \lambda g_2(U, W) = 0 \quad (4.79)$$

bulunur. Buradan $\xi = V \in \Gamma(Range F_*)^\perp$ alınır (4.79) ifadesi

$$\frac{1}{2} \left\{ g_2(\nabla_U^B V, W) + g_2(\nabla_W^B V, U) \right\} + Ric^{(Range F_*)^\perp}(U, W) + \lambda g_2(U, W) = 0 \quad (4.80)$$

şeklinde olur. Ayrıca $(Range F_*)^\perp$ total jeodezik olduğundan (4.80) ifadesinden

$$\frac{1}{2} \left\{ g_2(\nabla_U^{F^\perp} V, W) + g_2(\nabla_W^{F^\perp} V, U) \right\} + Ric^{(Range F_*)^\perp}(U, W) + \lambda g_2(U, W) = 0$$

yazılabilir. Böylece $(Range F_*)^\perp$ 'in herhangi lifi bir Ricci solitondur.

ii) Öte yandan $\xi = F_* X \in \Gamma(Range F_*)$ alınır (4.79)'dan

$$\frac{1}{2} \left\{ g_2(\nabla_U^B F_* X, W) + g_2(\nabla_W^B F_* X, U) \right\} + Ric^{(Range F_*)^\perp}(U, W) + \lambda g_2(U, W) = 0 \quad (4.81)$$

yazılabilir. ∇^B metrik konneksiyon olduğundan (4.81) denkleminde metrik uyumluluk bağıntısını kullanarak

$$-\frac{1}{2} \left\{ g_2(\nabla_U^B W, F_* X) + g_2(\nabla_W^B U, F_* X) \right\} + Ric^{(Range F_*)^\perp}(U, W) + \lambda g_2(U, W) = 0 \quad (4.82)$$

elde edilir. Ayrıca $(RangeF_*)^\perp$ total jeodezik olduğundan (4.82) denkleminde $\nabla_U^B W = \nabla_U^{F^\perp} W$ eşitliğini kullanarak

$$Ric^{(RangeF_*)^\perp}(U, W) + \lambda g_2(U, W) = 0 \quad (4.83)$$

elde edilir. Böylece $(RangeF_*)^\perp$ 'in herhangi lifi bir Einstein'dır.

Sonuç 4.3.4. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir total jeodezik Riemann dönüşümü ve $\xi = F_*X \in \Gamma(RangeF_*)$ olmak üzere (B, g_2, ξ, λ) bir Ricci soliton olsun. Bu durumda $(RangeF_*)^\perp$ 'in skaler eğriliği $-\lambda n_1$ dir, burada $boy(RangeF_*)^\perp = n_1$ dir (Yadav ve Meena, 2021).

İspat: (4.83) eşitliğinde $Ric^{(RangeF_*)^\perp}(U, W) = s^{(RangeF_*)^\perp}$ ve $boy(RangeF_*)^\perp = n_1$ eşitliğini kullanarak

$$Ric^{(RangeF_*)^\perp}(U, W) + \lambda g_2(U, W) = s^{(RangeF_*)^\perp} + \lambda n_1 = 0 \quad (4.84)$$

elde edilir, (4.84)'den

$$s^{(RangeF_*)^\perp} = -\lambda n_1$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.3.5. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir total umbilik Riemann dönüşümü olsun. Eğer baz uzay (B, g_2, ξ, λ) bir Ricci soliton ise aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- i. Eğer $\xi = V \in \Gamma(RangeF_*)^\perp$ ise $RangeF_*$ 'in herhangi lifi bir Einstein'dır.
- ii. Eğer $\xi = F_*Z \in \Gamma(RangeF_*)$ ise $RangeF_*$ 'in herhangi lifi bir Ricci solitondur (Yadav ve Meena, 2021).

İspat: i) Baz manifoldu (B, g_2, ξ, λ) bir Ricci soliton ve $\xi = V \in \Gamma(RangeF_*)^\perp$ olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(RangeF_*)$ için (4.78)'de (4.10) ve (4.24) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ g_2(-\mathcal{S}_V F_* X + \nabla_X^{F^\perp} V, F_* Y) + g_2(-\mathcal{S}_V F_* Y + \nabla_Y^{F^\perp} V, F_* X) \right\} \\
& + Ric^{Range F_*}(F_* X, F_* Y) + \lambda g_2(F_* X, F_* Y) \\
& - \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ g_2(\mathcal{S}_{\nabla_{e_k}^{F^\perp}} F_* X, F_* Y) - g_2(\nabla_{e_k}^B \mathcal{S}_{e_k} F_* X, F_* Y) \right. \\
& \left. + g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_* X, \mathcal{S}_{e_k} F_* Y) + g_2(\nabla_{e_k}^B F_* X, \mathcal{S}_{e_k} F_* Y) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{4.85}$$

elde edilir, burada $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n_1}$, $(Range F_*)^\perp$ 'in ortonormal bazıdır. Ayrıca \mathcal{S}_V self adjoint olduğundan (4.85) denklemi

$$\begin{aligned}
& -g_2(\mathcal{S}_V F_* X, F_* Y) + Ric^{Range F_*}(F_* X, F_* Y) - \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ g_2(\mathcal{S}_{\nabla_{e_k}^{F^\perp}} F_* X, F_* Y) \right. \\
& \left. - g_2(\nabla_{e_k}^B \mathcal{S}_{e_k} F_* X, F_* Y) + g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_* X, \mathcal{S}_{e_k} F_* Y) + g_2(\nabla_{e_k}^B F_* X, \mathcal{S}_{e_k} F_* Y) \right\} \\
& + \lambda g_2(F_* X, F_* Y) = 0
\end{aligned} \tag{4.86}$$

şeklinde yazılabilir. Dahası F Riemann dönüşümü umbilik olduğundan $\mathcal{S}_V F_*(X) = f(F_* X)$ eşitliği sağlanır. (4.86) denkleminde yerine yazılarak,

$$\begin{aligned}
& -2fg_2(F_* X, F_* Y) + Ric^{Range F_*}(F_* X, F_* Y) \\
& - f^2 g_2(F_* X, F_* Y) + \lambda g_2(F_* X, F_* Y) = 0
\end{aligned} \tag{4.87}$$

bulunur. Böylece (4.87) denkleminden

$$Ric^{Range F_*}(F_* X, F_* Y) - \mu g_2(F_* X, F_* Y) = 0$$

elde edilir. Burada $\mu = 2f + f^2 - \lambda$ bir diferansiyellenebilir fonksiyondur, böylece (i) sağlanır.

ii) Diğer yandan $\xi = F_* Z \in \Gamma(Range F_*)$ olsun. (4.24) eşitliği (4.71)'de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(L_{F_*Z}g_2)(F_*X, F_*Y) + Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) \\
& - \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ g_2(\mathcal{S}_{\nabla_{e_k} F_*X, F_*Y} - g_2(\nabla_{e_k} \mathcal{S}_{e_k} F_*X, F_*Y) \right. \\
& \left. + g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X, \mathcal{S}_{e_k} F_*Y) + g_2(\nabla_{e_k}^B F_*X, \mathcal{S}_{e_k} F_*Y) \right\} + \lambda g_2(F_*X, F_*Y) = 0
\end{aligned} \tag{4.88}$$

elde edilir. F Riemann dönüşümü umbilik ve $\mathcal{S}_V F_*(X) = f(F_*X)$ eşitliği (4.88)'de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(L_{F_*Z}g_2)(F_*X, F_*Y) + Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) \\
& - fg_2(F_*X, F_*Y) - f^2 g_2(F_*X, F_*Y) + \lambda g_2(F_*X, F_*Y) = 0
\end{aligned} \tag{4.89}$$

olur. Böylece (4.89) düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(L_{F_*Z}g_2)(F_*X, F_*Y) + Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) \\
& -(f - f^2 - \lambda)g_2(F_*X, F_*Y) = 0
\end{aligned}$$

bulunur, böylece $RangeF_*$ 'ın herhangi lifi bir Ricci solitondur.

Teorem 4.3.6. (M, g_1) bir Riemann manifoldu ve (B, g_2) bir Einstein manifoldu olmak üzere $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann dönüşümü olsun Eğer baz uzay (B, g_2, ξ, λ) bir Ricci soliton ise ξ, B baz manifoldu üzerinde bir Killing vektör alanıdır (Yadav ve Meena, 2021).

İspat: Baz manifoldu (B, g_2) Einstein manifoldu olduğundan, $F_*X, F_*Y \in \Gamma(RangeF_*)$ için $Ric(F_*X, F_*Y) = -\lambda g_2(F_*X, F_*Y)$ sağlanır. Burada (1.2) eşitliğinden

$$\frac{1}{2}(L_{\xi}g_2)(F_*X, F_*Y) = 0$$

yazılabilir. Ayrıca B Einstein olduğundan, $Ric(U, V) = -\lambda g_2(U, V)$ şeklindedir. O halde (1.2) eşitliğinden $U, V \in \Gamma(RangeF_*)^\perp$ için

$$\frac{1}{2}(L_{\xi}g_2)(U, V) = 0$$

olur. Benzer şekilde $F_*X \in \Gamma(\text{Range}F_*)$ ve $V \in \Gamma(\text{Range}F_*)^\perp$ için

$$\frac{1}{2}(L_{\xi}g_2)(F_*X, V) = 0$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.7. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann dönüşümü olsun. $U \in \Gamma(\text{Çek}F_*)$ olmak üzere (B, g_2, F_*U, λ) bir Ricci soliton ise bu durumda B baz manifoldu Einstein'dır (Yadav ve Meena, 2021).

İspat: Her $U \in \Gamma(\text{Çek}F_*)$ için $F_*U = 0$ dır. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann dönüşümünün baz manifoldu (B, g_2, F_*U, λ) bir Ricci soliton olduğundan ve $X, Y \in \Gamma(TB)$ için (1.2) eşitliğinden

$$\text{Ric}(X, Y) + \lambda g_2(X, Y) = 0$$

elde edilir. Böylece B baz manifoldu Einstein'dır.

4.4. Total Manifoldu Ricci-Yamabe soliton olan Riemann dönüşümleri

Bu kısımda Riemann manifoldları arasında tanımlı bir $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann dönüşümü ele alınacaktır. Total manifoldu $(M, g_1, \xi, \lambda, \sigma, \rho)$ olan bir Ricci-Yamabe solitonun bazı karakterizasyonları verilecektir.

Teorem 4.4.1. (M, g_1) ve (B, g_2) Riemann manifoldları olmak üzere; $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir total jeodezik Riemann dönüşümü olsun. Total manifold $(M, g_1, \xi, \lambda, \sigma, \rho)$ Ricci-Yamabe soliton ise aşağıdaki şartlar sağlanır:

- i) Eğer $\text{Range}F_*$ uzayının skaler eğriliği sabit ise, bu durumda lifler bir Ricci-Yamabe solitondur.

- ii) Eğer M total manifoldunun skaler eğriliği sabit ise, o halde $RangeF_*$ bir Einstein manifoldudur.

İspat: i) Total manifold $(M, g_1, \xi, \lambda, \sigma, \rho)$ bir Ricci-Yamabe soliton olduğundan, her $U, W \in \Gamma(\mathcal{C}ekF_*)$ için (1.3) eşitliğinden

$$\frac{1}{2}(L_\xi g_1)(U, W) + \sigma Ric(U, W) + (\lambda - \frac{\rho}{2}s)g_1(U, W) = 0 \quad (4.90)$$

yazılabilir. O halde (3.38) denklemini (4.90) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\{g_1(\nabla_U \xi, W) + g_1(\nabla_W \xi, U)\} + \sigma \hat{Ric}(U, W) - g_1(N, T_U W) \\ & + \sum_{i=1}^m \{g_1((\nabla_{X_j} T)_U W, X_j) + g_1(A_{X_j} U, A_{X_j} W)\} + (\lambda - \frac{\rho}{2}s)g_1(U, W) = 0 \end{aligned} \quad (4.91)$$

elde edilir. Burada $\{X_j\}$, $(\mathcal{C}ekF_*)^\perp$ 'in ortonormal bazıdır. Burada (4.91)'de (4.43) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\{g_1(\nabla_U \xi, W) + g_1(\nabla_W \xi, U)\} + \sigma \hat{Ric}(U, W) - g_1(N, T_U W) \\ & + \sum_{i=1}^m \{g_1((\nabla_{X_j} T)_U W, X_j) + g_1(A_{X_j} U, A_{X_j} W)\} + (\lambda - \frac{\rho}{2})(\hat{s} + s^{RangeF_*}) \\ & + \left\| \mathcal{T}^{(\mathcal{C}ekF_*)^\perp} \right\|^2 - r^2 \|H\|^2 - \sum_{j,l=1}^m \|(\nabla F_*)(X_j, X_l)\|^2 \\ & + 2 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^r g_1((\nabla_{X_j} T)(U_k, U_k), X_j) + \left\| A_{X_j} U_k \right\|^2 + \sum_{l=r+1}^m \sum_{i=1}^r g_1((\nabla_{U_i} A)(X_l, X_l), U_i) \\ & - \left\| T_{U_i} X_l \right\|^2) g_1(U, W) = 0 \end{aligned} \quad (4.92)$$

sağlanır. F total jeodezik bir dönüşüm olduğundan, (4.92) denklemi

$$\frac{1}{2}\{g_1(\nabla_U \xi, W) + g_1(\nabla_W \xi, U)\} + \sigma \hat{Ric}(U, W) + (\lambda - \frac{\rho}{2})(\hat{s} + s^{RangeF_*})g_1(U, W) = 0 \quad (4.93)$$

şeklinindedir. Ayrıca $RangeF_*$ sabit skaler eğriliğe sahip olduğundan (4.93) denklemi

$$\frac{1}{2} \left\{ (L_{\xi} \hat{g}_1)(U, W) \right\} + \sigma \hat{Ric}(U, W) + \left(\lambda - \frac{\rho}{2} \hat{s} \right) g_1(U, W) = 0$$

biçiminde yazılabilir. F 'nin herhangi bir lifi, ξ potansiyel alanına sahip bir Ricci-Yamabe solitondur ve böylece (i) elde edilir.

ii) Ayrıca $(M, g_1, \xi, \lambda, \sigma, \rho)$ bir Ricci-Yamabe soliton olduğundan, her $X, Y \in \Gamma(\mathcal{C}ekF_*^\perp)$ için (1.3) ifadesinden

$$\frac{1}{2} (L_{\xi} g_1)(X, Y) + \sigma Ric(X, Y) + \left(\lambda - \frac{\rho}{2} s \right) g_1(X, Y) = 0 \quad (4.94)$$

yazılır. O halde (3.39) denklemini (4.94)'de kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ g_1(\nabla_X \xi, Y) + g_1(\nabla_Y \xi, X) \right\} + \sigma (Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + \sum_{i=1}^r \left\{ g((\nabla_X T)_{U_i} U_i, Y) \right. \\ & + g_1((\nabla_{U_i} A)_X Y, U_i) - g_1(T_{U_i} X, T_{U_i} Y) + g_1(A_X U_i, A_Y U_i) \left. \right\} \\ & + g_2((\nabla F_*)(X, Y), \tau^{(\mathcal{C}ekF_*^\perp)}) - \sum_{j=r+1}^m \left\{ g_2((\nabla F_*)(X_j, Y), (\nabla F_*)(X, X_j)) \right\} \\ & + \left(\lambda - \frac{\rho}{2} s \right) g_1(X, Y) = 0 \end{aligned} \quad (4.95)$$

elde edilir. (4.95)'de (4.43) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ g_1(\nabla_X \xi, Y) + g_1(\nabla_Y \xi, X) \right\} + \sigma (Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + \sum_{i=1}^r \left\{ g((\nabla_X T)_{U_i} U_i, Y) \right. \\ & + g_1((\nabla_{U_i} A)_X Y, U_i) - g_1(T_{U_i} X, T_{U_i} Y) + g_1(A_X U_i, A_Y U_i) \\ & + g_2((\nabla F_*)(X, Y), \tau^{(\mathcal{C}ekF_*^\perp)}) - \sum_{j=r+1}^m \left\{ g_2((\nabla F_*)(X_j, Y), (\nabla F_*)(X, X_j)) \right\} \\ & + \left(\lambda - \frac{\rho}{2} (\hat{s} + s^{RangeF_*} + \left\| \tau^{(\mathcal{C}ekF_*^\perp)} \right\|^2 - r^2 \|H\|^2 - \sum_{j,l=1}^m \left\| (\nabla F_*)(X_j, X_l) \right\|^2 \right. \\ & + 2 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^r g_1((\nabla_{X_j} T)(U_k, U_k), X_j) + \left\| A_{X_j} U_k \right\|^2 \\ & \left. + \sum_{l=r+1}^m \sum_{i=1}^r g_1((\nabla_{U_i} A)(X_l, X_l), U_i) - \left\| T_{U_i} X_l \right\|^2 \right) g_1(X, Y) = 0 \end{aligned} \quad (4.96)$$

elde edilir. F total jeodezik dönüşüm olduğundan (4.96) eşitliği, her $X, Y \in \Gamma(\mathcal{C}ekF_*^\perp)$ için

$$\sigma Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + (\lambda - \frac{\rho}{2}s)g_1(X, Y) = 0 \quad (4.97)$$

olur. Dahası total manifold M sabit bir skaler eğriliğe sahip olduğundan, (4.97) eşitliği

$$\sigma Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + (\lambda - \frac{\rho}{2}s)g_2(F_*X, F_*Y) = 0$$

dır. Böylece

$$Ric^{RangeF_*} = -\frac{1}{\sigma}(\lambda - \frac{\rho}{2}s)g_2$$

bulunur. Burada s skaler eğrilik sabit olduğundan, son eşitlikten $RangeF_*$ 'ın Einstein olduğu görülür, böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.2. (M, g_1) ve (B, g_2) birer Riemann manifoldları; $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir total jeodezik Riemann dönüşümü olsun. Total manifold $(M, g_1, \xi, \lambda, \sigma, \rho)$ Ricci-Yamabe soliton ise aşağıdaki şartlar sağlanır:

- i) Eğer $\mathcal{C}ekF_*$ uzayının skaler eğriliği sabit ise, $RangeF_*$ bir Ricci-Yamabe solitondur.
- ii) Eğer total manifold M 'nin skaler eğriliği sabit ise, $\mathcal{C}ekF_*$ bir Einstein manifoldudur.

İspat: i) Total manifold M bir Ricci-Yamabe soliton olduğundan, her $X, Y \in \Gamma(\mathcal{C}ekF_*)^\perp$ için (1.3) eşitliğinden

$$\frac{1}{2}(L_\xi g_1)(X, Y) + \sigma Ric(X, Y) + (\lambda - \frac{\rho}{2}s)g_1(X, Y) = 0 \quad (4.98)$$

dır. O zaman (3.39) denklemini (4.98) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \{g_1(\nabla_X \xi, Y) + g_1(\nabla_Y \xi, X)\} + \sigma Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + \sum_{i=1}^r \{g((\nabla_X T)_{U_i} U_i, Y) \\
& + g_1((\nabla_{U_i} A)_X Y, U_i) - g_1(T_{U_i} X, T_{U_i} Y) + g_1(A_X U_i, A_Y U_i)\} \\
& + g_2((\nabla F_*)(X, Y), \tau^{(\zeta_{ekF_*})^\perp}) - \sum_{j=r+1}^m \{g_2((\nabla F_*)(X_j, Y), (\nabla F_*)(X, X_j))\} \\
& + (\lambda - \frac{\rho}{2} s) g_1(X, Y) = 0
\end{aligned} \tag{4.99}$$

elde edilir. (4.99) eşitliğinde (4.43) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \{g_1(\nabla_X \xi, Y) + g_1(\nabla_Y \xi, X)\} + \sigma Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + \sum_{i=1}^r \{g_1((\nabla_X T)_{U_i} U_i, Y) \\
& + g_1((\nabla_{U_i} A)_X Y, U_i) - g_1(T_{U_i} X, T_{U_i} Y) + g_1(A_X U_i, A_Y U_i) \\
& + g_2((\nabla F_*)(X, Y), \tau^{(\zeta_{ekF_*})^\perp}) - \sum_{j=r+1}^m \{g_2((\nabla F_*)(X_j, Y), (\nabla F_*)(X, X_j))\} \\
& + (\lambda - \frac{\rho}{2} (\hat{s} + s^{RangeF_*} + \|\tau^{(\zeta_{ekF_*})^\perp}\|^2 - r^2 \|H\|^2 - \sum_{j,l=1}^m \|(\nabla F_*)(X_j, X_l)\|^2 \\
& + 2 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^r g_1((\nabla_{X_j} T)(U_k, U_k), X_j) + \|A_{X_j} U_k\|^2 \\
& + \sum_{l=r+1}^m \sum_{i=1}^r g_1((\nabla_{U_i} A)(X_l, X_l), U_i) - \|T_{U_i} X_l\|^2)) g_1(X, Y) = 0
\end{aligned} \tag{4.100}$$

olur. F bir total jeodezik dönüşüm olduğundan, her $X, Y \in \Gamma(\zeta_{ekF_*})^\perp$ için (4.100) eşitliği

$$\frac{1}{2} (L_\xi g_1)(X, Y) + \sigma Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + (\lambda - \frac{\rho}{2} (\hat{s} + s^{RangeF_*})) g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \tag{4.101}$$

şeklinde yazılır. ζ_{ekF_*} bir \hat{s} sabit skaler eğriliğine sahip olduğundan (4.101) eşitliğinden

$$\frac{1}{2} (L_{\xi'} g_2)(F_*X, F_*Y) + \sigma Ric^{RangeF_*}(F_*X, F_*Y) + (\lambda' - \frac{\rho}{2} s^{RangeF_*}) g_2(F_*X, F_*Y) = 0$$

elde edilir. Böylece $RangeF_*$ 'ın bir Ricci-Yamabe solitonu olduğu görülür. Burada $\lambda = \lambda' - \frac{\rho}{2} \hat{s}$ ve

$F_*\xi = \xi'$ dir ve (i) ispatlanır.

ii) Diğer yandan total manifold M bir Ricci-Yamabe soliton olduğundan, her $U, W \in \Gamma(\mathcal{C}ekF_*)$ için (1.3) eşitliğinden

$$\frac{1}{2}(L_{\xi}g_1)(U, W) + \sigma Ric(U, W) + (\lambda - \frac{\rho}{2}s)g_1(U, W) = 0 \quad (4.102)$$

yazılır. Ayrıca (3.38) denklemi (4.102) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\{g_1(T_U\xi, W), g_1(T_W\xi, U)\} + \sigma \hat{Ric}(U, W) - \sigma g_1(N, T_U W) \\ & + \sigma \sum_{j=r+1}^m \{g_1((\nabla_{X_j} T)_U W, X_j) + g_1(A_{X_j} U, A_{X_j} W)\} \\ & + (\lambda - \frac{\rho}{2}s)g_1(U, W) = 0 \end{aligned} \quad (4.103)$$

olur. F Riemann dönüşümü total jeodezik dönüşüm olduğundan, (4.103) denklemi kullanılarak

$$\sigma \hat{Ric}(U, W) + (\lambda - \frac{\rho}{2}s)g_1(U, W) = 0 \quad (4.104)$$

elde edilir. Total manifold M bir s sabit skaler eğriliğe sahip olduğundan, (4.104) eşitliğinden

$$\hat{Ric} = -\frac{1}{\sigma}(\lambda - \frac{\rho}{2}s)g_1$$

sağlanır. F 'nin herhangi lifinin bir Einstein olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

4.5. Baz manifoldu Ricci-Yamabe soliton olan Riemann dönüşümleri

Bu kısımda Riemann manifoldları arasında tanımlı bir $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ bir Riemann dönüşümü ele alınacaktır. Baz manifoldu $(B, g_2, \xi, \lambda, \sigma, \rho)$ Ricci-Yamabe soliton olan F Riemann dönüşümü ile ilgili bazı karakterizasyonlar verilecektir.

Teorem 4.5.1. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ total jeodezik bir Riemann dönüşümü ve $\xi \in \Gamma(\text{Range}F_*)$ olmak üzere baz manifoldu $(B, g_2, \xi, \lambda, \sigma, \rho)$ bir Ricci-Yamabe soliton olsun. Eğer $(\text{Range}F_*)^\perp$ uzayının skaler eğriliği sabit ise bu durumda $\text{Range}F_*$ 'ın herhangi lifi bir Ricci-Yamabe solitondur.

İspat: $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ Riemann dönüşümünün baz manifoldu $(B, g_2, \xi, \lambda, \sigma, \rho)$ bir Ricci-Yamabe soliton olduğundan her $F_*X, F_*Y \in \Gamma(\text{Range}F_*)$ için (1.3) eşitliğinden

$$\frac{1}{2}(L_\xi g_2)(F_*X, F_*Y) + \sigma \text{Ric}^B(F_*X, F_*Y) + (\lambda - \frac{\rho}{2}s^B)g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \quad (4.105)$$

yazılabilir. Bu durumda (4.105) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ g_2(\nabla_{F_*X}^B \xi, F_*Y) + g_2(\nabla_{F_*Y}^B \xi, F_*X) \right\} + \sigma \text{Ric}^B(F_*X, F_*Y) \\ & + (\lambda - \frac{\rho}{2}s^B)g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \end{aligned} \quad (4.106)$$

elde edilir. (4.106) denkleminde (4.24) ve Teorem 4.1.2.3. kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ g_2(\nabla_{F_*X}^B \xi, F_*Y) + g_2(\nabla_{F_*Y}^B \xi, F_*X) \right\} + \sigma(\text{Ric}^{\text{Range}F_*}(F_*X, F_*Y) \\ & - \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ g_2(\mathcal{S}_{\nabla_{e_k}^{F_*}} F_*X, F_*Y) - g_2(\nabla_{e_k}^B \mathcal{S}_{e_k} F_*X, F_*Y) + g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X, \mathcal{S}_{e_k} F_*Y) \right. \\ & \left. - g_2(\nabla_{e_k}^B F_*X, \mathcal{S}_{e_k} F_*Y) \right\} + (\lambda - \frac{\rho}{2}(s^{\text{Range}F_*} + s^{(\text{Range}F_*)^\perp} - 2 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\mathcal{S}_{\nabla_{e_k}^{F_*}} F_*X_j, F_*X_j) \\ & + \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\nabla_{e_k}^B \mathcal{S}_{e_k} F_*X_j, F_*X_j) - 2 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X_j, \mathcal{S}_{e_k} F_*X_j) \\ & - 3 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\nabla_{e_k}^B F_*X_j, \mathcal{S}_{e_k} F_*X_j) + \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} \nabla_{e_k}^B g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X_j, F_*X_j)))g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \end{aligned} \quad (4.107)$$

olur, burada $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n_1}$, $(\text{Range}F_*)^\perp$ 'in ortonormal bazını göstermektedir. Ayrıca F Riemann dönüşümü total jeodezik olduğundan (4.107) denkleminde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ g_2(\nabla_{F_*X}^B \xi, F_*Y) + g_2(\nabla_{F_*Y}^B \xi, F_*X) \right\} + \sigma(\text{Ric}^{\text{Range}F_*}(F_*X, F_*Y)) \\ & + (\lambda - \frac{\rho}{2} (s^{\text{Range}F_*} + s^{(\text{Range}F_*)^\perp})) g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \end{aligned} \quad (4.108)$$

eşitliği sağlanır. $(\text{Range}F_*)^\perp$ uzayı, $s^{(\text{Range}F_*)^\perp}$ sabit skaler eğriliğine sahip olduğundan $F_*X, F_*Y \in \Gamma(\text{Range}F_*)$ için (4.108) eşitliği

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ g_2(\nabla_{F_*X}^B \xi, F_*Y) + g_2(\nabla_{F_*Y}^B \xi, F_*X) \right\} + \sigma(\text{Ric}^{\text{Range}F_*}(F_*X, F_*Y)) \\ & + (\mu - \frac{\rho}{2} s^{\text{Range}F_*}) g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \end{aligned}$$

olur, burada $\mu = \lambda - \frac{\rho}{2} s^{(\text{Range}F_*)^\perp}$ dir. Böylece, $\text{Range}F_*$ 'ın herhangi lifi bir Ricci-Yamabe solitondur.

Teorem 4.5.2. $F : (M, g_1) \rightarrow (B, g_2)$ total jeodezik bir Riemann dönüşümü ve $\xi \in \Gamma(\text{Range}F_*)^\perp$ olmak üzere $(B, g_2, \xi, \lambda, \sigma, \rho)$ bir Ricci-Yamabe soliton olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- i. Eğer $\text{Range}F_*$ uzayının skaler eğriliği sabit ise bu durumda $(\text{Range}F_*)^\perp$ 'ın herhangi lifi bir Ricci-Yamabe solitondur.
- ii. Eğer B baz manifoldu skaler eğriliğe sabit ise bu durumda $\text{Range}F_*$ 'ın herhangi lifi bir Einstein manifoldudur.

İspat: i) Baz manifold $(B, g_2, \xi, \lambda, \sigma, \rho)$ bir Ricci-Yamabe soliton olduğundan her $U, V \in \Gamma(\text{Range}F_*)^\perp$ için

$$\frac{1}{2} (L_\xi g_2)(U, V) + \sigma \text{Ric}^B(U, V) + (\lambda - \frac{\rho}{2} s^B) g_2(U, V) = 0 \quad (4.109)$$

yazılabilir. O halde (4.109) ifadesi

$$\frac{1}{2} \left\{ g_2(\nabla_U^B \xi, V) + g_2(\nabla_V^B \xi, U) \right\} + \sigma \text{Ric}^B(U, V) + (\lambda - \frac{\rho}{2} s^B) g_2(U, V) = 0 \quad (4.110)$$

şeklinde olur. (4.110) denkleminde (4.25) ve Teorem 4.1.2.3. uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ g_2(\nabla_U^B \xi, V) + g_2(\nabla_V^B \xi, U) \right\} + \sigma Ric^{(Range F_*)^\perp}(V, W) \\
& - \sum_{j=r+1}^m \left\{ g_2(\mathcal{S}_{\nabla_V^B F_* X_j} F_* X_j, F_* X_j) + g_2(\mathcal{S}_V F_* X_j, \mathcal{S}_W F_* X_j) \right. \\
& \left. - \nabla_V^B g_2(\mathcal{S}_W F_* X_j, F_* X_j) + 2g_2(\mathcal{S}_W F_* X_j, \nabla_V^B F_* X_j) \right\} \\
& + \left(\lambda - \frac{\rho}{2} (s^{Range F_*} + s^{(Range F_*)^\perp}) - 2 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\mathcal{S}_{\nabla_{e_k}^B F_* X_j} F_* X_j, F_* X_j) \right. \\
& \left. + \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\nabla_{e_k}^B \mathcal{S}_{e_k} F_* X_j, F_* X_j) - 2 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_* X_j, \mathcal{S}_{e_k} F_* X_j) \right. \\
& \left. - 3 \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} g_2(\nabla_{e_k}^B F_* X_j, \mathcal{S}_{e_k} F_* X_j) \right. \\
& \left. + \sum_{j=r+1}^m \sum_{k=1}^{n_1} \nabla_{e_k}^B g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_* X_j, F_* X_j) \right) g_2(U, V) = 0
\end{aligned} \tag{4.111}$$

elde edilir. Burada $Range F_*$ 'in sabit skaler eğriliği $s^{Range F_*}$, $(Range F_*)^\perp$ 'in sabit skaler eğriliği $s^{(Range F_*)^\perp}$ dir ve $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n_1}$, $(Range F_*)^\perp$ 'in ortonormal bazıdır. F total jeodezik bir dönüşüm olduğundan (4.111) ifadesinden

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ g_2(\nabla_U^B \xi, V) + g_2(\nabla_V^B \xi, U) \right\} + \sigma Ric^{(Range F_*)^\perp}(U, V) \\
& + \left(\lambda - \frac{\rho}{2} (s^{Range F_*} + s^{(Range F_*)^\perp}) \right) g_2(U, V) = 0
\end{aligned} \tag{4.112}$$

elde edilir. Ayrıca $Range F_*$ 'in sabit skaler eğriliği $s^{Range F_*}$ olduğundan (4.112) ifadesi düzenlenirse,

$$\frac{1}{2} (L_\xi g_2)(U, V) + \sigma Ric^{(Range F_*)^\perp}(U, V) + \left(\mu - \frac{\rho}{2} s^{(Range F_*)^\perp} \right) g_2(U, V) = 0 \tag{4.113}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mu = \frac{\rho}{2} s^{Range F_*}$ dir. Böylece (4.113) denkleminde, $(Range F_*)^\perp$ 'in herhangi lifi bir Ricci-Yamabe solitondur.

ii) (B, g_2) manifoldu potansiyel vektör alanı $\xi = \Gamma(\text{Range}F_*)^\perp$ olan bir Ricci-Yamabe soliton olduğundan $F_*X, F_*Y \in \Gamma(\text{Range}F_*)$ için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ g_2(\nabla_{F_*X}^B \xi, F_*Y) + g_2(\nabla_{F_*Y}^B \xi, F_*X) \right\} + \sigma \text{Ric}^B(F_*X, F_*Y) \\ & + (\lambda - \frac{\rho}{2} s^B) g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \end{aligned} \quad (4.114)$$

dır. (4.114) denklemde (4.10) eşitliğini kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left\{ g_2(\mathcal{S}_\xi F_*X, F_*Y) + g_2(\mathcal{S}_\xi F_*Y, F_*X) \right\} + \sigma \text{Ric}^B(F_*X, F_*Y) \\ & + (\lambda - \frac{\rho}{2} s^B) g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \end{aligned} \quad (4.115)$$

elde edilir. (4.24) denklemi (4.115) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left\{ g_2(\mathcal{S}_\xi F_*X, F_*Y) + g_2(\mathcal{S}_\xi F_*Y, F_*X) \right\} + \sigma (\text{Ric}^{\text{Range}F_*}(F_*X, F_*Y)) \\ & - \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ g_2(\mathcal{S}_{\nabla_{e_k}^{\perp} F_*X} F_*X, F_*Y) - g_2(\nabla_{e_k}^B \mathcal{S}_{e_k} F_*X, F_*Y) + g_2(\mathcal{S}_{e_k} F_*X, \mathcal{S}_{e_k} F_*Y) \right. \\ & \left. - g_2(\nabla_{e_k}^B F_*X, \mathcal{S}_{e_k} F_*Y) \right\} + (\lambda - \frac{\rho}{2} s^B) g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \end{aligned} \quad (4.116)$$

eşitliği sağlanır. F total jeodezik ve s^B bir sabit skaler eğrilik olduğundan $F_*X, F_*Y \in \Gamma(\text{Range}F_*)$ olmak üzere (4.116) ifadesinden

$$\sigma \text{Ric}^{\text{Range}F_*}(F_*X, F_*Y) + (\lambda - \frac{\rho}{2} s^B) g_2(F_*X, F_*Y) = 0 \quad (4.117)$$

yazılabilir ve (4.117) ifadesinden

$$\text{Ric}^{\text{Range}F_*} = -\frac{1}{\sigma} (\lambda - \frac{\rho}{2} s^B) g_2$$

elde edilir, böylece $\text{Range}F_*$ 'in herhangi lifi bir Einstein'dır ve ispat tamamlanmış olur.



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada elde edilen bulgular ve sonuçlar aşağıdaki gibi verilebilir:

1. Total manifoldu bir Ricci-Yamabe soliton olan total jeodezik bir Riemann dönüşümü ele alındı ve $RangeF_*$ ve $ÇekF_*$ uzaylarının sabit skaler eğriliklere sahip olmaları durumunda F Riemann dönüşümünün liflerinin de bir Ricci-Yamabe soliton olduğu elde edildi. Ayrıca M total manifoldunun sabit skaler eğrilğe sahip olması durumunda ise $RangeF_*$ ve $ÇekF_*$ uzaylarının Einstein olduğu ortaya koyuldu.
2. Baz manifoldu bir Ricci-Yamabe soliton olan total jeodezik bir Riemann dönüşümü ele alındı ve $(RangeF_*)^\perp$ 'in sabit skaler eğrilğine sahip olması durumunda $RangeF_*$ 'ın liflerinin bir Ricci-Yamabe soliton olduğu elde edildi.
3. Benzer şekilde baz manifoldu bir Ricci-Yamabe soliton olan total jeodezik bir Riemann dönüşümü ele alındı ve eğer $RangeF_*$ uzayı sabit skaler eğrilğine sahip ise $(RangeF_*)^\perp$ uzayının liflerinin bir Ricci-Yamabe soliton olduğu; eğer B baz manifoldu sabit skaler eğrilğine sahip ise bu durumda $RangeF_*$ uzayının liflerinin Einstein olduğu bulundu.



KAYNAKLAR

Abraham, R., Marsden, J. E., Ratiu, T. (1988). "Manifolds; Tensor analysis, and applications." Applied mathematical sciences.

Akyol, M. A., & Sahin, B. (2018). Conformal anti-invariant Riemannian maps to Kähler manifolds. UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics, 80(4), 187-198.

Akyol, M. A., & Sahin, B. (2019). Conformal semi-invariant Riemannian maps to Kähler manifolds. Revista de la Union Matematica Argentina, 60(2), 459-468.

Baird, P., Wood, J. C. (2003). Harmonic morphisms between Riemannian manifolds (No. 29). Oxford University Press.

Bootby, W.M. (1986). An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press Inc.

Do Carmo, M. P., Flaherty Francis, J. (1992). Riemannian geometry (Vol. 2). Boston: Birkhäuser.

Eells, J., & Sampson, J. H. (1964). Harmonic mappings of Riemannian manifolds. American journal of mathematics, 86(1), 109-160.

Fuglede, B. (1978). Harmonic morphisms between Riemannian manifolds. In Annales de l'institut Fourier (Vol. 28, No. 2, pp. 107-144).

Gray, A. (1967). Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions. Journal of Mathematics and Mechanics, 16(7), 715-737.

Hacısalihoglu, H.H. (1983), Diferansiyel Geometri. 1.Cilt, İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Malatya.

Hamilton, R. S. (1988). The Ricci flow on surfaces, Mathematics and general relativity. Contemp. Math., 71, 237-261.

Ishihara, T. (1979). A mapping of Riemannian manifolds which preserves harmonic functions. Journal of Mathematics of Kyoto University, 19(2), 215-229.

Kobayashi, S. (1965); Nomizu, K., Foundations of Differential Geometry. Interscience Publish, New York.

Lipschutz, S., Lipson, M. L. (2009). Linear Algebra. McGraw-Hill.

Nore, T. (1986). Second fundamental form of a map. Annali di Matematica pura ed applicata, 146, 281-310.

O'Neill, B. (1966). "The fundamental equations of a submersion." Michigan Mathematical Journal, 13(4), pp. 459-469.

O'Neill, B. (1983). Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic press.

Şahin, B. (1996). CR-Altmanifoldların Geometrisi, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya.

Şahin, B. (2014). Holomorphic Riemannian maps. Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom., 10:422-429.

Şahin, B. (2010). "Invariant and anti-invariant Riemannian maps to Kähler manifolds." International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 7(03), pp. 337-355.

Şahin, B. (2011a). Biharmonic Riemannian maps. Annales Polonici Mathematici, 102:39-49.

Şahin, B. (2011b). "Semi-invariant Riemannian maps to Kähler manifolds." International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 8(07), pp. 1439-1454.

Şahin, B. (2012a). Manifoldların diferensiyel geometrisi. Nobel Yayınevi.

Şahin, B. (2012b). "Semi-invariant Riemannian maps from almost Hermitian manifold." Indagationes Mathematicae, 23(1-2), pp. 80-94.

Şahin, B. (2014). Holomorphic Riemannian maps. Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom., 10:422-429.

Şahin, B. (2017a). A survey on differential geometry of Riemannian maps between Riemannian manifolds. An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat.(NS), 63(1), 151-167.

Şahin, B. (2017b). "Notes on Riemannian maps." UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics, Vol. 79, No. 3, pp. 131-138.

Şahin, B. (2017c). Riemannian submersions, Riemannian maps in Hermitian geometry, and their applications, Academic Press.

Pastore, A. M., Falcitelli, M., Ianus, S. (2004). Riemannian submersions and related topics, World Scientific.

Yadav, A., Meena, K. (2021). Riemannian maps whose total manifolds admit a Ricci soliton. Journal of Geometry and Physics, 168, 104317.

Yadav, A., & Meena, K. (2021). Riemannian maps whose base manifolds admit a Ricci soliton. arXiv preprint arXiv:2107.01049.

Yano K., Kon, M. (1984). Structures on Manifolds. Vol. 3 of Series in Pure Mathematics, World Scientific Publishing, Singapore.

