

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DOĞRUSAL OLMAYAN KİSMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SOLİTON
ÇÖZÜMLERİ

Sercan ŞEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Melih ÇINAR

Eş-Danışman
Prof. Dr. Yusuf ZEREN

Haziran, 2024

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DOĞRUSAL OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

Sercan ŞEN tarafından hazırlanan tez çalışması 12.06.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Melih ÇINAR
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Prof. Dr. Yusuf ZEREN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Eş-Danışman

Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Melih ÇINAR, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Neslihan ÖZDEMİR, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Fatih ŞİRİN, Üye
Haliç Üniversitesi

Danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Melih ÇINAR sorumluluğunda tarafımda hazırlanan Bazı Doğrusal Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Soliton Çözümleri başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Sercan ŞEN

İmza

Sevgili eşim ve aileme ithafen



TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesinde yardımcı olan, bilgi ve birikimi ile yol gösteren, çalışmamın planlanması ve oluşumuna katkı sağlayan kıymetli hocam ve danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Melih ÇINAR’a çok teşekkür ederim.

Ayrıca tez çalışmamı hazırlama sürecinde ve yüksek lisans eğitimimin her aşamasında desteklerini esirgemeyen kıymetli hocam Prof. Dr. Yusuf ZEREN’e teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimime başlamam için beni teşvik eden, maddi ve manevi her türlü desteği gösteren sevgili eşim Nilüfer Şeyma CEYLAN ŞEN’e çok teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Sercan ŞEN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vii
KISALTMA LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
ÖZET	xi
ABSTRACT	xiii
1 GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı	3
1.2 Literatür Özeti	3
1.3 Ön Bilgiler	13
2 METOT	22
2.1 Dalga Dönüşümünün Uygulanması	22
2.1.1 Reel Terimli Denklemler İçin	22
2.1.2 Kompleks Terimli Denklemler İçin	24
2.2 Metotların Algoritması	25
2.2.1 Kudryashov Yöntemi [78, 80]	26
2.2.2 Yeni Kudryashov Yöntemi [79, 80]	27
3 UYGULAMA	29
3.1 Birleşik pKP-BKP Denklemi [54]	29
3.1.1 Dalga Dönüşümünün Birleşik pKP-BKP Denklemine Uygulanması	30
3.1.2 Kudryashov Yönteminin Birleşik pKP-BKP Denklemine Uygulanması	30
3.1.3 Yeni Kudryashov Yönteminin Birleşik pKP-BKP Denklemine Uygulanması	40
3.2 Modifiye Edilmiş Vakhnenko-Parkes Denklemi [66]	52
3.2.1 Dalga Dönüşümünün Vakhnenko-Parkes Denklemine Uygulanması	52

3.2.2	Yeni Kudryashov Yönteminin Vakhnenko-Parkes Denklemine Uygulanması	53
4	SONUÇ	57
	KAYNAKÇA	59
	TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	69



SİMGE LİSTESİ

α	Alfa
β	Beta
δ	Delta
η	Eta
φ	Fi
γ	Gama
ξ	Ksi
λ	Lambda
ψ	Psi
θ	Teta

KISALTMA LİSTESİ

BKP	B-tipi Kadomtsev-Petviashvili
CBS	Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff
CDGSK	Caudrey–Dodd–Gibbon–Sawada–Kotera
DOADD	Doğrusal Olmayan Adi Diferansiyel Denklem
DOKDD	Doğrusal Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklem
gKP	Genelleştirilmiş Kadomtsev-Petviashvili
KdV	Korteweg-de Vries
KP	Kadomtsev-Petviashvili
mVP	Modifiye Vakhnenko-Parkes
PGI	Perturbed Gerdjikov-Ivanov
pKP	Potansiyel Kadomtsev-Petviashvili
pKP-BKP	Potansiyel Kadomtsev-Petviashvili-B-tipi Kadomtsev-Petviashvili
VP	Vakhnenko-Parkes

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1	Parlak soliton	16
Şekil 1.2	Koyu soliton	17
Şekil 1.3	Kıvrımlı soliton	18
Şekil 1.4	Ters-kıvrımlı soliton	18
Şekil 3.1	$z_1(x, 1, t)$ nin üç boyutlu grafiği	32
Şekil 3.2	$z_1(x, 1, t)$ nin eş yükselti eğrisi grafiği	33
Şekil 3.3	$z_1(x, 1, t_f)$ nin $t_f = 1, 2, 3$ için hareket eden dalga grafiği	33
Şekil 3.4	$z_2(x, 1, t)$ nin üç boyutlu grafiği	34
Şekil 3.5	$z_2(x, 1, t)$ nin eş yükselti eğrisi grafiği	35
Şekil 3.6	$z_2(x, 1, t_f)$ nin $t_f = 1, 2, 3$ için hareket eden dalga grafiği	35
Şekil 3.7	$z_1(x, 1, 1)$ nin p parametresine göre değişim grafiği	36
Şekil 3.8	$z_1(x, 1, 1)$ nin q parametresine göre değişim grafiği	37
Şekil 3.9	$z_1(x, 1, 1)$ nin r parametresine göre değişim grafiği	38
Şekil 3.10	$z_1(x, 1, 1)$ nin δ parametresine göre değişim grafiği	38
Şekil 3.11	$z_1(x, 1, 1)$ nin γ parametresine göre değişim grafiği	39
Şekil 3.12	$z_1(x, 1, 1)$ nin η parametresine göre değişim grafiği	40
Şekil 3.13	$z_1(x, 1, t)$ nin üç boyutlu grafiği	42
Şekil 3.14	$z_1(x, 1, t)$ nin eş yükselti eğrisi grafiği	43
Şekil 3.15	$z_1(x, 1, t_f)$ nin $t_f = 1, 2, 3$ için hareket eden dalga grafiği	43
Şekil 3.16	$z_2^-(x, 1, t)$ nin üç boyutlu grafiği	44
Şekil 3.17	$z_2^-(x, 1, t)$ nin eş yükselti eğrisi grafiği	45
Şekil 3.18	$z_2^-(x, 1, t_f)$ nin $t_f = 1, 2, 3$ için hareket eden dalga grafiği	45
Şekil 3.19	$z_2^+(x, 1, t)$ nin üç boyutlu grafiği	46
Şekil 3.20	$z_2^+(x, 1, t)$ nin eş yükselti eğrisi grafiği	47
Şekil 3.21	$z_2^+(x, 1, t_f)$ nin $t_f = 1, 2, 3$ için hareket eden dalga grafiği	47
Şekil 3.22	$z_2^-(x, 1, 1)$ nin p parametresine göre değişim grafiği	48
Şekil 3.23	$z_2^-(x, 1, 1)$ nin q parametresine göre değişim grafiği	49
Şekil 3.24	$z_2^-(x, 1, 1)$ nin r parametresine göre değişim grafiği	50
Şekil 3.25	$z_2^-(x, 1, 1)$ nin δ parametresine göre değişim grafiği	50
Şekil 3.26	$z_2^-(x, 1, 1)$ nin η parametresine göre değişim grafiği	51
Şekil 3.27	$z_2^-(x, 1, 1)$ nin ψ parametresine göre değişim grafiği	52
Şekil 3.28	$z_1^-(x, t)$ nin üç boyutlu grafiği	54

Şekil 3.29	$z_1^-(x, t)$ nin eş yükselti eğrisi grafiği	55
Şekil 3.30	$z_1^-(x, t_f)$ nin $t_f = 1, 2, 3$ için hareket eden dalga grafiği	55



Bazı Doğrusal Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Soliton Çözümleri

Sercan ŞEN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Melih ÇINAR

Eş-Danışman: Prof. Dr. Yusuf ZEREN

Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler; akışkanlar mekaniği, ısı transferi, optik olayları, dalga hareketleri, popülasyon değişimi gibi birçok durumu modellemek için kullanılır. Pek çok bilim insanı bu durumları açıklamak amacıyla farklı özel denklemler tanımlamış ve bu denklemlerin çözümlerini bulmak için birçok yöntem geliştirerek uygulamıştır. Bu çalışmada doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden biri olan sığ sularda, akışkanlar mekaniğinde, plazma ve optikteki dalgalar ile lokalize yapılar arasındaki davranışları modellemede kullanılan Wen-Xiu Ma tarafından tanımlanan birleştirilmiş potansiyel Kadomtsev-Petviashvili-B tipi Kadomtsev-Petviashvili denklemi ele alınmıştır. Aynı zamanda Vyacheslav Vakhnenko ve John Parkes tarafından gevşek bir ortamda yüksek frekanslı kısa dalga bozulmalarının yayılmasını modellemek için oluşturulan Vakhnenko-Parkes denklemi incelenmiştir. Birleştirilmiş potansiyel Kadomtsev-Petviashvili-B tipi Kadomtsev-Petviashvili ve modifiye edilmiş Vakhnenko-Parkes denklemlerinin analitik soliton çözümlerinin elde edilmesine ve analizine odaklanılmıştır. Bu birleştirilmiş potansiyel Kadomtsev-Petviashvili-B tipi Kadomtsev-Petviashvili, Vakhnenko-Parkes denklemlerinin soliton çözümleri klasik Kudryashov ve/veya yeni Kudryashov yöntemi uygulanarak elde edilmiştir. Bu tezde ilk olarak üzerinde çalışılacak denklemler ve yöntemler hakkında literatür taraması yapılmıştır. Diferansiyel denklemlerin, Kadomtsev-Petviashvili ve Vakhnenko-Parkes denklemlerinin tarihsel gelişimi, uygulama alanları, çözüm yöntemleri ile yapılan çalışmalar verilmiştir. Devamında ise sonraki kısımlarda

kullanılacak olan tanımlar, soliton tipleri, denge sabiti kavramlarına yer verilmiştir. İkinci bölümde yürüyen dalga dönüşümünün uygulanması, Kudryashov ve yeni Kudryashov yöntemleri açıklanmıştır. Üçüncü bölümde birleştirilmiş potansiyel Kadomtsev-Petviashvili-B tipi Kadomtsev-Petviashvili denklemine Kudryashov ve yeni Kudryashov yöntemleri, Vakhnenko-Parkes denklemine ise yeni Kudryashov yöntemi uygulanmıştır. Bu yöntemlerin uygulama aşamaları verilerek analitik soliton çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen yürüyen dalga çözümlerinin uygun parametreler altında iki ile üç boyutlu ve kontur grafikleri verilerek hız, genlik, yayılım ve yön gibi fiziksel özellikleriyle karakteristik davranışları belirtilmiştir. Ayrıca birleştirilmiş potansiyel Kadomtsev-Petviashvili-B tipi Kadomtsev-Petviashvili denklemindeki ve dalga dönüşümündeki parametrelerin çözümler üzerindeki etkisi incelenmiştir. Son bölümde ise elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Birleştirilmiş pKP-BKP denklemi, Vakhnenko-Parkes denklemi, Kudryashov yöntemi, yeni Kudryashov yöntemi.

ABSTRACT

SOLITON SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Sercan ŞEN

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Melih ÇINAR

Co-supervisor: Prof. Dr. Yusuf ZEREN

Nonlinear partial differential equations are employed to model various phenomena such as fluid mechanics, heat transfer, optical events, wave motions, and population dynamics. Numerous scientists have defined specific equations to explain these phenomena and developed various methods to find their solutions. In this study, we consider the combined potential Kadomtsev-Petviashvili and B-type Kadomtsev-Petviashvili equation, defined by Wen-Xiu Ma. This equation is used to model behaviors between waves and localized structures in shallow waters, fluid mechanics, plasma, and optics. Additionally, the Vakhnenko-Parkes equation, suggested by Vyacheslav Vakhnenko and John Parkes to model the propagation of high-frequency shortwave disturbances in a relaxing medium, is examined. We focus on obtaining the analytical soliton solutions of the combined potential Kadomtsev-Petviashvili-B type Kadomtsev-Petviashvili and modified Vakhnenko-Parkes equations which are a special class of solutions for the nonlinear partial differential equations. The soliton solutions for these combined potential Kadomtsev-Petviashvili and B-type Kadomtsev-Petviashvili, Vakhnenko-Parkes equations are obtained using the classical Kudryashov method and the new Kudryashov method. In this thesis, firstly, a literature review has been conducted on the model equation and methods under consideration. The historical development of differential equations, the considered Kadomtsev-Petviashvili and Vakhnenko-Parkes equations, their application areas, solution methods, and related studies are presented. Subsequently, definitions, types of solitons, and

the concept of equilibrium constants that will be used in the following sections are provided. In the second section, the application of the traveling wave transformation and the algorithm of the methods are given. In the third section, the Kudryashov and the new Kudryashov methods are applied to the combined potential Kadomtsev-Petviashvili-B type Kadomtsev-Petviashvili equation, and the new Kudryashov method is applied to the Vakhnenko-Parkes equation and analytical soliton solutions are obtained. Using appropriate parameters, the obtained solutions are illustrated with two-dimensional, three-dimensional, and contour plots under appropriate parameters, and their characteristic behaviors such as speed, amplitude, spread, and direction are specified. Additionally, the effects of the parameters in the combined potential Kadomtsev-Petviashvili-B-type Kadomtsev-Petviashvili equations and in the wave transform on the solutions were examined. In the final section, the results of the studies are presented.

Keywords: Combined pKP-BKP equation, Vakhnenko-Parkes equation, Kudryashov method, new Kudryashov method.

1 GİRİŞ

Günlük hayatta meydana gelen birçok olay anlaşılma çalışılarak oluşan problemler çözülmek istenir. Fizik, kimya, biyoloji, mühendislik ve ekonomi alanlarında ortaya çıkan problemlerin modellenmesinde diferansiyel denklemler kullanılır. Örneğin; ısı transferi [1], reaksiyon kinetiği [2], akışkan mekaniği, optik olayları [3], popülasyon değişimi [4], ekonomide büyüme-küçülme analizi [5], dalga hareketleri [6] gibi olayların modellenmesinde kullanılır.

Fizik alanında bir cismin temel yasa kanunları altında ivme, kütle ve kuvvet ilişkisini açıklamada diferansiyel denklemler kullanılır. Işığın optik sistemler boyunca nasıl bir şekilde ilerleyip yayıldığını, farklı yüzeylerden yansımaları, bir ortamdan diğer ortama geçerken kırılması gibi lazer davranışlarını göstermede kullanılır [3]. Ses dalgaları, radyo ve mikrodalga gibi çeşitli dalgaları içeren elektromanyetik dalgaları, denizde ve okyanusta oluşan aniden ortaya çıkan haydut dalga gibi su dalgalarının davranışlarını modellemede kullanılır [6]. Akışkanlar mekaniğinde sıvı ve gazların hareketlerini, hızlarını ve basınçlarını belirler.

Kimya alanında bir kimyasal reaksiyonda maddelere bağlı tepkime hızını belirlemede, çıkacak ürünün oluşumunu analiz etmede, bir molekülün atomik yapısının belirlenmesinde kullanılır [2]. Sıcaklık, basınç ve hacim gibi değişkenler arasındaki ilişkiyi açıklamada; ısı iletkenliği ve yayılması gibi ısı transferi olaylarını modellemede kullanılır [1]. Karışım ve ayrışım işlemleri, radyoaktif maddelerin bozulma süreçleri ve kimyasal reaksiyon kinetiği gibi durumları analiz etmede kullanılır [2].

Biyoloji ve tıp alanlarında bir popülasyonun zaman içinde büyüme ve azalma gibi değişimleri, bir ekosistemde av-avcı ilişkisi sonucu türler arası yoğunluğu belirlemede ve ekosistemdeki denge durumlarını açıklamada diferansiyel denklemler kullanılır [4]. Aynı zamanda hücrelerin oluşum ve yıkım süreci içindeki popülasyonun değişimini açıklamada, DNA'daki bilgilerin kodlanması gibi durumlarda kullanılır [4]. Sinir impuls ağlarının davranışlarını ve uyarıların iletilmesini modellemede, bir ilacın vücuttaki dağılımını ve etkisini gözlemlemede kullanılır [4]. Salgın hastalıkların toplum içinde yayılımının, canlılar arasındaki

bulaşma hızının tespit edilmesinde ve bu hastalıkların canlılar üzerinde oluşturabileceği riskleri öngörmede kullanılır. Organ ve dokuların işlevlerini açıklamada, kalp atışı esnasında kan akış hızı ve kan basıncını belirlemede, kalp pilinin uygun bir ritimde kalbi tetikleme sistemini oluşturmada kullanılır [4]. Kanseri veya tümör gibi hastalıkları görüntüleyerek bu hastalıkların yerinin belirlenmesinde, büyüme ve yayılma durumunun tespit edilmesinde ve seyrinin takip edilmesinde kullanılır [4].

Ekonomi alanında ekonomi durumunun zaman içinde büyüme ve küçülme hareketlerini, diğer faktörlerle ilişkisini modellemede; enflasyon, işsizlik, sermaye birikimi, tüketim ve gelir dengesinin analizini açıklamada diferansiyel denklemler kullanılır [5].

Diferansiyel denklemler konusu ile ilgili ilk araştırma ve çalışmalar 17. yüzyılın son kısımlarında başlamıştır. Bazı matematik tarihçilerine göre diferansiyel denklemlerin incelenmesi 1675'te Gottfried Wilhem Leibniz'in (1646-1716) bir denklem oluşturmasıyla başlamıştır [7, 8]. Isaac Newton (1642-1727) diferansiyel denklemler üzerine çalışarak çözüm yöntemlerine göre 3 sınıfa ayırarak Leibniz ile bu alanda ilk adımları atmışlardır. Devamında James Bernoulli (1654-1705) ve John Bernoulli (1667-1748) Kardeşler, Leonhard Euler (1707-1783), Alexis Claude Clairaut (1713-1765), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), Charbit, Monge, Laplace ile 18. yüzyılda diferansiyel denklemlerin temeli atılmıştır [7, 8]. Chrystal, Cauchy, Jacobi, Ampere, Darboux, Picard, Fusch ve F.G. Frobenius gibi matematikçiler ile günümüzdeki durumuna ulaşmış olup geliştirilmeye devam edilmektedir.

1834'te İskoçyalı John Scott Russell (1808-1882) en verimli tekne tasarımını belirlemek için deneyler yaparken, kanalda bir çift atın çektiği teknenin hareketlerini incelerken durmuş olan tekneden çıkan dalga ilgisini çekmiştir [9]. Bu dalganın hızında hiçbir azalma veya görünüşünde değişme olmadan dalga, tek bir yükselti şeklinde belli bir süre ilerlemiştir [9],[10]. "Yalnız/tekil dalga (solitary wave)" ya da "dalganın aktarımı (the wave of translation)" adını verdiği bu olayla ilgi yeni deneylerle araştırmalar yapmıştır [10]. Böylelikle soliton olarak adlandırılan, sahip oldukları şekli ve hızı koruyarak yayılan bu dalgalar doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü oluşturarak bu alandaki gelişmelerin önünü açmıştır. Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak her zaman kolay değildir. Bazı denklemler kolay sonuç verirken bazı denklemler ise uzun uğraşlar sonrası çözüme ulaşmaktadır ayrıca her zaman da sonuç vermeyebilir. Son yıllarda teknolojik faaliyetlerin gelişmesi, yeni yazılımların ortaya çıkması nedeniyle Matlab [11], Mathematica [12] gibi bilgisayar destekli hazır programlardan yararlanarak hızlı bir şekilde çözüme

ulaşılır. Bu denklemler tek bir çözüme sahip olmayıp birçok farklı çözüme sahip olabilmektedir. Bu sebeple matematikçiler, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için birçok yöntem geliştirmiştir. Üzerine çalışmalar yapılmış bazı yöntemler şunlardır: Kudryashov yöntemi, genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi, sonlu farklar yöntemi [13], Lie simetri analiz yöntemi [14], tanh yöntemi [15], genişletilmiş tanh yöntemi [16], varyasyonel iterasyon yöntemi [17], ters varyasyonel prensibi [18], birinci integral yöntemi [19], üstel fonksiyon yöntemi [20], homotopi analiz yöntemi [21], homotopi pertürbasyon yöntemi [22], homojen denge yöntemi [23], çoklu değişkenlere ayırma yöntemi, Hirota çift doğrusal yöntemi [24], geliştirilmiş tan açılım yöntemi [25], deneme denklem yöntemi [26], dinamik sistemler yöntemi, belirsiz katsayılar yöntemi, deneme çözüm yöntemi [27], Backlund dönüşüm yöntemi [28], (G'/G) -genişletme yöntemi [29], genişletilmiş F-genişletme yöntemi [30], Ansatz yaklaşım yöntemi [31], Adomian ayrışım yöntemi [32], geliştirilmiş Adomian ayrışım yöntemi [33].

1.1 Tezin Amacı

Bu tezin temel amacı, Kudryashov ve yeni Kudryashov yöntemlerini kullanarak birleştirilmiş potansiyel Kadomtsev-Petviashvili ve B tipi Kadomtsev-Petviashvili (pKP-BKP) denkleminin, yeni Kudryashov metodu kullanarak modifiye edilmiş Vakhnenko-Parkes denkleminin analitik formda soliton çözümlerini incelemek ve ilgili denklemlerde ve yardımcı denklemlerde bulunan parametrelerin (varsa) soliton davranışı üzerinde etkisini grafiksel olarak incelemektir.

1.2 Literatür Özeti

Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemi Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin önemli integrallenebilir iki boyutlu bir genellemesidir [34]. Kadomtsev-Petviashvili denklemi enine koordinatta yavaş bağımlılıkla doğrusal olmayan küçük genlikli sığ sularda uzun boylu dalgaları modellemek üzere iki konumsal ve bir zamansal boyutta doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir [35]. İlk olarak 1970 yılında iki Sovyet fizikçi Boris Kadomtsev (1928-1993) ve Vladimir Petviashvili (1936-1993) tarafından düşük genlikli sularda ve plazmalarda uzun akustik dalgaların incelendiği bir çalışmada KdV denkleminin KP denklemi elde edilmiştir [36].

Kadomtsev-Petviashvili denklemi şu şekilde verilmiştir [37]:

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + \alpha u_{yy} = 0. \quad (1.1)$$

Burada $u = u(x, y, t)$ olmak üzere konumsal boyutlar x ve y ile temsil edilirken u ilgili dalganın genliğini, t ise zamanı belirtir. Yukarıdaki denklem farklı katsayılarla modellenirse de bu formdaki doğrusal olmayan denklemler KP denklemi olarak anılır. Özel olarak KP denklemi α sabitine göre iki farklı şekilde isimlendirilir:

$\alpha = -1$ için oluşan denkleme KPI denklemi:

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x - u_{yy} = 0, \quad (1.2)$$

$\alpha = 1$ için oluşan denkleme KPII denklemi:

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0, \quad (1.3)$$

olarak tanımlanır. Burada $u = u(x, y, t)$ dir. KPI denklemi güçlü yüzey gerilimine sahip ortamlarda, KPII denklemi zayıf yüzey gerilimine sahip ortamlardaki hareket eden yarı tek yönlü dalgaları modellemede kullanılır. KPII denkleminde bulanıklaştırma etkisi gözlemlenirken KPI denkleminde odaklanma etkisi olduğu gözlenmiştir [38].

Genel olarak bakıldığında KP denklemleri su dalgalarının davranışlarını modellemede kullanılır. Bu denklem, gemiler ve açık deniz yapıları için tehlike meydana getirebilecek haydut dalgalar gibi dalgaların modellenmesinde kullanılmıştır. Aynı zamanda KP denklemi Dünya'nın iyonosfer katmanında veya Güneş patlamalarında ortaya çıkan plazma dalgalarını incelemek için kullanılmıştır. Başka bir çalışmada okyanusta ortaya çıkan girdapların oluşumunu incelemek ve davranışlarını modellemek için KP denklemi kullanılmıştır [39].

Birçok araştırmacı Kadomtsev-Petviashvili denklemi üzerinde çalışarak ve dönüşümler uygulayarak veya farklı katsayılar tercih ederek başka durumları modelleyen farklı versiyonlarını elde etmiştir [34].

Kullanılan formlardaki denklemlerden bazıları şu şekildedir:

(2+1)-boyutlu değişken katsayılı Kadomtsev-Petviashvili denklemi [40]:

$$(u_t + a(t)uu_x + b(t)u_{xxx})_x + f(t)u_{yy} + g(t)u_x = 0, \quad (1.4)$$

genelleştirilmiş değişken katsayılı Kadomtsev-Petviashvili denklemi [40]:

$$(u_t + a(t)uu_x + b(t)u_{xxx})_x + c(t)u_x + d(t)u_y + f(t)u_{yy} + g(t)u_{xx} + h(t)u_{xy} = 0, \quad (1.5)$$

şeklinde. Bu denklemlerde $u = u(x, y, t)$ dir.

(3+1)-boyutlu değişken katsayılı zorlanmış (variable-coefficient forced)

Kadomtsev-Petviashvili denklemi [41]:

$$(u_t + a(t)6uu_x + b(t)u_{xxx} + c(t)u + d(t)u_x + f(t)xu_x)_x + m(t)u_{yy} + n(t)u_{zz} = 0, \quad (1.6)$$

formunda olup burada $a(t), b(t), c(t), d(t), f(t), g(t), h(t), m(t), n(t)$ birer analitik yeterince türevlenebilen fonksiyonlar ve $u = u(x, y, z, t)$ dir.

(2+1)-boyutlu değiştirilmiş (modified) Kadomtsev-Petviashvili denklemi [42]:

$$4u_{tx} + (u_{xxx} - 6u^2u_x)_x + 3u_{yy} + 6u_xu_y + 6u_{xx} \int u_y dx = 0. \quad (1.7)$$

(2+1)-boyutlu genelleştirilmiş (generalized) Kadomtsev-Petviashvili (gKP) denklemi [43]:

$$(u_t + \alpha u^p u_x + u_{xxx})_x + \beta u_{yy} = 0, \quad (1.8)$$

diğer bir formda denklem [44]:

$$(u_t + \alpha u_x + \beta uu_x + \theta uu_{xt})_x + u_{yy} = 0, \quad (1.9)$$

şeklinde kullanılmıştır. Bu denklemlerde $u = u(x, y, t)$ biçimindedir.

(3+1)-boyutlu gKP denklemi [45], [42]:

$$u_{xxxy} + 3(u_x u_y)_x + u_{tx} + u_{ty} - u_{zz} = 0, \quad (1.10)$$

ve diğer bir formu olan [44]:

$$u_{xxxy} + 3(u_x u_y)_x + u_{tx} + u_{ty} + u_{tz} - u_{zz} = 0, \quad (1.11)$$

şeklinde incelenmiştir. Burada $u = u(x, y, z, t)$ dir.

(2+1)-boyutlu genişletilmiş (extended) Kadomtsev-Petviashvili denklemi [46]:

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x - u_{yy} + \alpha u_{tt} + \beta u_{ty} = 0, \quad (1.12)$$

diğer bir formu olan [47]:

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x - u_{yy} + \alpha u_{tt} + \frac{\alpha^2}{4} u_{ty} + \beta u_{tx} = 0, \quad (1.13)$$

burada $u = u(x, y, t)$ olmak üzere şeklinde kullanılmıştır.

(2+1)-boyutlu değiştirilmiş Kadomtsev-Petviashvili denkleminin genişletilmiş

formu [48]:

$$u_t + u_{xxx} - 6u^2u_x + 6u_x\partial_x^{-1}u_y + 3\partial_x^{-1}u_{yy} + 4\alpha u_y + 4\beta u_x = 0, \quad (1.14)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu denklemde burada $u = u(x, y, t)$ dir.

(2+1)-boyutlu silindirik (cylindrical) Kadomtsev-Petviashvili denklemin formu [49], [40]:

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \frac{1}{2t}u)_x + \frac{3\alpha^2}{t^2}u_{yy} = 0, \quad (1.15)$$

(2+1)-boyutlu küresel (spherical) Kadomtsev-Petviashvili denklemin formu [50]:

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \frac{1}{t}u)_x + \frac{1}{2\alpha t^2}(u_{yy} + \frac{1}{y}u_y) = 0, \quad (1.16)$$

burada $u = u(x, y, t)$ olmak üzere olarak verilmiştir.

(2+1)-boyutlu eşleşmiş (coupled) Kadomtsev-Petviashvili denklem sistemleri [51]:

$$\begin{aligned} (u_t + u_{xxx} - \frac{3}{2}(uv)_x - \frac{3}{2}(vw)_x)_x + u_{yy} &= 0, \\ (v_t + v_{xxx} + 3(wu)_x)_x + v_{yy} &= 0, \\ (w_t + w_{xxx} + 3(uv)_x)_x + w_{yy} &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Yukarıdaki tanımlanan denklemlerin dışında KP denklemini Kdv denklemleri ile ilişkilendirilerek yeni denklemler de elde edilmiştir.

(2+1)-boyutlu Gardner–KP denklemini [52]:

$$(u_t + 6uu_x \pm 6u^2u_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0, \quad (1.18)$$

(2+1)-boyutlu Bogoyavlenskii–Kadomtsev–Petviashvili denklemini [53]:

$$u_{xxt} + u_{xxxxx} + 12u_{xx}u_{xy} + 8u_xu_{xxy} + 4u_{xxx}u_y = u_{yyy}. \quad (1.19)$$

denklemleri tanımlanarak literatürde bunlar gibi birçok KP denklemini ile ilgili denklemler yer almaktadır. Burada $u = u(x, y, t)$ dir.

KP denkleminde $u = u_x$ dönüşümü bir kez uygulanarak potansiyel (olası) Kadomtsev-Petviashvili (pKP) denklemini elde edilir. pKP denklemini şu şekilde verilmiştir:

$$u_{xt} + 6u_xu_{xx} + u_{xxxx} + \alpha u_{yy} = 0. \quad (1.20)$$

pKP denklemi yavaş, enine küçük fakat sonlu genlikli doğrusal olmayan uzun boylu dalgaların dinamiğini açıklamada kullanılır.

KP hiyerarşisinin bir alt sınıfı olarak (2+1)-boyutlu B-tipi Kadomtsev-Petviashvili (BKP) denklemi $u = u(x, y, t)$ olmak üzere genel olarak formu şu şekildedir:

$$(15(u_x)^3 + 15u_x u_{xxx} + u_{xxxxx})_x + 5(u_{xxy} + 3(u_x u_y)_x) + u_{xt} - u_{yy} = 0. \quad (1.21)$$

Bu denklem yarı ortamda ve akışkanlar mekaniğinde yayılan zayıf dağılımlı dalgaları tanımlamak için kullanılır. A.-M. Wazwaz tarafından BKP denklemi sığ su dalgalanmaları için bir model olarak ve plazmalardaki elektrostatik dalga için kullanılmıştır [54]. BKP denklemi, birçok matematikçi ve fizikçinin ilgisini çeken üstel olarak yerleştirilmiş lokalize yapılar arasındaki etkileşimleri açıklar. İki nötr fermiyon alanı tarafından üretilen bir Clifford cebirine ilişkin çift doğrusal bir özdeşlikten ortaya çıkan entegre edilebilir sistem hiyerarşisinden biridir. Ayrıca akışkanlardaki sığ su dalgası ve plazmalardaki elektrostatik dalga durumu için bir model olarak kullanılmıştır. BKP denkleminin özelliği, son yıllarda bu konuda verimli ve kesin analitik çözümlerinin ortaya çıkmasıdır [55]. Örneğin; dev (rogue) dalgaları modellemek ve çözümlerini incelemek için kullanılmıştır [56].

Ayrıca J.-b. Zhang ve W.-X. Ma tarafından [57]'daki çalışmada kullanılan BKP denklemin farklı bir formu:

$$(u_t + 15u_x u_{xxx} + 15(u_x)^3 - 15u_x u_y + u_{xxxxx})_x - 5u_{xxy} + -5u_{yy} = 0,$$

şeklinde olup integrallenebilir hiyerarşisinin ilk üyesidir ve $v = u_x$ alındığında Caudrey–Dodd–Gibbon–Sawada–Kotera (CDGSK) denkleminin:

$$v_t + 15v v_{xxx} + 15v_x v_{xx} + 45v^2 v_x + v_{xxxxx} = 0,$$

(2+1) boyutlu bir genellemesidir. Burada $v = v(x, t)$ dir. BKP denkleminin Hirota çift doğrusal yöntemi kullanarak karışık toplu-kıvrımlı çözümleri elde edilmiştir.

(2+1)-boyutlu potansiyel KP denklemi ve B-tipi KP denkleminin doğrusal bir kombinasyonunu ilk kez Wen-Xiu Ma sunarak N-soliton çözümünü elde etmiş ve bu denklemi birleşik pKP-BKP denklemi olarak isimlendirmiştir [58]. Birleştirilmiş pKP-BKP denkleminin formu:

$$\begin{aligned} & a_1(15(u_x)^3 + 15u_x u_{xxx} + u_{xxxxx})_x + a_2(6u_x u_{xx} + u_{xxxx}) \\ & + a_3(u_{xxy} + 3(u_x u_y)_x) + a_4 u_{xx} + a_5 u_{xt} + a_6 u_{yy} = 0, \end{aligned} \quad (1.22)$$

şeklindedir. Burada $u = u(x, y, t)$ yürüyen dalga çözümü, a_i rastgele sabitler ve $a_5 \neq 0$ 'dır. Bu denklem bu tezde çözülecek denklemlerden bir tanesidir.

Yukarıda verilen birleşik pKP-BKP denkleminde $a_1 = a_3 = a_4 = 0$, $a_2 = a_5 = 1$ ve $a_6 = -1$ olduğunda (2+1) boyutlu potansiyel Kadomtsev-Petviashvili denklemi türetilir. $a_1 = a_5 = 1$, $a_2 = a_4 = 0$, $a_3 = 5$ ve $a_6 = -5$ olduğunda (2+1) boyutlu B-tipi Kadomtsev-Petviashvili denklemi elde edilir. Böylece pKP ile BKP denklemlerinin tanımlamada yetersiz kaldığı durumlardaki sık sularda ve akışkanlar dinamiğinde lokalize yapılar içindeki davranışları modelleyen bir doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklem olarak ortaya çıkmıştır.

Tezde çözülecek denklemlerden bir diğeri V. O. Vakhnenko tarafından gevşek bir ortamda yüksek frekanslı kısa dalga bozulmalarının yayılmasını modellemek için 1992 yılında ortaya atılmış ve Vakhnenko denklemi olarak isimlendirilmiştir [59]. Bunun için gerçek gevşeyen fenomenlerin bulunduğu ortamlardaki yüksek frekanslı dalgaları tanımlamak için hidrodinamik bir yaklaşım fikrinden yararlanarak doğrusal olmayan bir evrim denklemi türetmiştir. Bu Vakhnenko denklemi:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) u + u = 0. \quad (1.23)$$

biçimindedir. Burada $u(x, t)$ boyutsuz basınç, x ve t konumsal değişkenlerdir [59]. Vakhnenko, bu denklemin döngü benzeri bir forma sahip tekil dalga çözümünü göstermiştir. Fakat Vakhnenko denkleminin orijinal koordinatlarda (x, t) incelenmesinde bazı zorluklarla karşılaşmıştır. Bu zorluklar için Vakhnenko denklemini yeni bağımsız koordinatlarda yazarak çözüm üretmek amaçlanmıştır. Vyacheslav Vakhnenko ve John Parkes bu koordinatları bulmayı başarmıştır. Aynı ayrı çalışarak bu tür bağımsız koordinatları birbirinden bağımsız olarak iki farklı yaklaşımla sunmuşlardır. Bu yaklaşımlarda Euler (x, t) ve Lagrange koordinatları (X, T) arasında bir dönüşüm kullanılırken diğesinde saf matematiksel bir yol kullanılmıştır. Bu yaklaşımlarla Vakhnenko denklemi yeni bir denkleme indirgenerek 1998 yılında Vakhnenko-Parkes (VP) denklemi elde edilmiştir [60]. VP denkleminin genel formu [60]:

$$uu_{xxt} - u_x u_{xt} + u^2 u_t = 0, \quad (1.24)$$

biçimindedir. Burada $u = u(x, t)$ yürüyen dalga çözümüdür. Vakhnenko ve Parkes çalışmasında VP denklemini Hirota yöntemi, ters saçılım yöntemi ve Bäcklund dönüşümü kullanılarak çözümler elde edilmiştir [61]. H.O. Roshid $\exp$ -fonksiyonu ve $\exp(-\phi(\xi))$ -genişletme yöntemleri ile VP denkleminin çözümlerini elde etmiştir [62]. Başka bir çalışmada ise VP denkleminin çözümleri karmaşık yöntemle incelenmiştir [63].

2008 yılında Victor ve çalışma arkadaşları (2+1) boyutlu Vakhnenko-Parkes denklemini türetmiştir:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\right) + u = 0. \quad (1.25)$$

Burada $u = u(x, y, t)$ dir. Bu denklem aktif barotropik içinde gevşeyen bir ortamdaki yüksek frekanslı dalgaların bozulması ve dinamik davranışını incelemek amacıyla kullanılmıştır [64].

Daha sonrasında Wazwaz yüksek boyuta genişletmek amacıyla (3+1) boyutlu Vakhnenko-Parkes denklemini şu şekilde:

$$u_{xxt} + u_{xxy} + u_{xxz} + u_x u_t + u_x u_t + u_x u_z + u_x = 0, \quad (1.26)$$

elde etmiştir [65]. S. Kumar ve N. Mann çalışmasında (3+1) boyutlu Vakhnenko-Parkes denklemine genelleştirilmiş Kudryashov yöntemini uygulayarak kesin çözümler elde etmiştir [65].

Abdul-Majid Wazwaz 2019 yılındaki bir çalışmasında VP denklemini geliştirerek ilk kez modifiye Vakhnenko-Parkes (mVP) denklemini tanıtmıştır. Wazwaz mVP denklemini:

$$u u_{xxt} - u_x u_{xt} + u^3 u_t = 0, \quad (1.27)$$

olarak tanımlamıştır [66]. Ayrıca mVP denkleminin integrallenebilir olduğunu göstererek Painlevé testini uygulamıştır [66]. Sergei Sakovich [67] çalışmasında mVP denkleminin integrallenebilirlik koşullarını inceleyerek sinüs-Gordon denklemi özelliğinde olduğunu belirtmiştir. Divya Jyoti ve Sachin Kumar mVP denkleminin Lie simetri analizini uygulayarak çözümler elde etmiştir [68]. H.M. Baskonus ve çalışma arkadaşları [69]'de mVP denkleminde genişletilmiş sinüs-Gordon yöntemini kullanmışlardır. Alhejaili ve Wazwaz VP denkleminin ailesinde Painlevé analizini uygularken mVP denklemini de incelemiştir [70]. Feiting Fan ve Xingwu Chen VP ve mVP denklemlerinin birleşmiş bir genellemesinde dinamik sistemler yaklaşımı ve tekil seyahat eden dalga teorisi ile çözümlerin davranışlarını incelemiştir [71].

N. A. Kudryashov doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin soliton çözümlerini bulmak için [72] çalışmasında etkili bir yöntem önermiştir. [73]'te yüzey dalgalanmalarını, reaksiyon-difüzyon sistemlerini veya karmaşık desenlerin oluştuğu fiziksel ve kimyasal sistemleri daha ayrıntılı bir şekilde açıklamak ve modellemede kullanılan integrallenemeyen genelleştirilmiş Kuramoto-Sivashinsky denkleminin analitik çözümlerini bulmak için bu yöntemi uygulamıştır. [74]'te

Riccati denklemleri başta olmak üzere doğrusal olmayan integrallenemeyen evrim denklemlerin çözümlerini incelemiştir. [75]'de Fisher denklemleri ailesini, [76]'da tekil manifold denklemlerini ele almıştır. [77] eserinde Riccati denklemi, Jacobi eliptik fonksiyonu denklemi, Weierstrass eliptik fonksiyonu denklemi gibi basit doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerine uygulanmasıyla doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için yeni bir yöntem sunmuştur. [78]'ta doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin kesin soliton çözümlerini bulmak için eski yöntemi ele alarak eksik kısımlarını yeniden düzenlemiştir. Son haline ulaşan yöntemin uygulanmasıyla kesin sonuç bulmada etkili olan bir yaklaşım olduğu belirtilmiştir. Bu yöntem literatürde kendi adıyla anılarak "Kudryashov yöntemi" olarak bilinmektedir. N. A. Kudryashov doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmaya yönelik çalışmasında Kudryashov yöntemini daha da geliştirerek yeni bir yöntem elde etmiştir [79, 80]. Bu yöntemle optik fiberdeki yayılımı açıklayan bir algoritma üreterek etkili bir yöntem geliştirmiştir [79]. Bu yöntem yakın zamanda birçok araştırmacı tarafından farklı isimler altında kullanılmıştır: Kudryashov'un R fonksiyonu, Kudryashov fonksiyonu, Kudryashov yöntemi (yeni versiyon), yeni Kudryashov yöntemi gibi [80]. Bu yöntem başka bir çalışmada Schrödinger-Hiroto denklemi, dördüncü dereceden NLS denklemi ve beşinci dereceden Kawahara denklemlerine uygulanmıştır. Kudryashov'un yönteminde kullandığı yeni fonksiyondan dolayı bu yöntem Kudryashov'un R fonksiyonu olarak belirtilmiştir [81]. Daha sonraki bir çalışmada yöntem, Kudryashov fonksiyonu olarak anılmıştır [82]. Başka bir çalışmada ise Kudryashov yöntemi (yeni versiyonu) olarak tanıtılıp Perturbed Gerdjikov-Ivanov (PGI) denkleminde uygulanmıştır. Bu türden PGI denklemlerinde sonuç olarak uygulanabilir olduğunu göstermiştir [83].

Bunlar gibi bazı çalışmalarda da farklı isimlerle anılsa da genellikle bu yöntem literatürde "yeni Kudryashov yöntemi" ile kullanılmaktadır.

Birçok araştırmacı yeni Kudryashov yöntemini çalışmalarında uygulayarak farklı alanlarda kullanılan diferansiyel denklemlerin soliton çözümlerini ve davranışlarını incelemiştir. Bunlardan bazıları şunlardır: Sıvılar dinamiği ve plazma fiziği gibi alanlarda kullanılan Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (CBS) diferansiyel denklemi parçacıkların belli koşullar altında nasıl davrandığını modelleme için kullanılır. Bu genelleştirilmiş (2+1) boyutlu CBS denkleminin analitik soliton çözümleri yeni Kudryashov yöntemiyle bulunmaya çalışılmıştır [84]. Başka bir çalışmada akışkanlar mekaniğinde sıvıların akışıyla ilgili problemleri modellemede kullanılan Biswas-Milović denklemi ele alınmıştır. (2+1)-Biswas-Milović denkleminin soliton çözümleri yeni Kudryashov yöntemi ile incelenmiş olup Biswas-Milović denklemi için güç ve parabolik yasanın doğrusal olmadığı sonucu belirtilmiştir [85]. Benzer

şekilde aynı alanda taşkınların potansiyel etkilerini belirlemek için kullanılan hidrolojik bir modelleme olan Biswas-Arshed denklemi yeni Kudryashov yöntemi kullanılarak incelenmiştir [86]. Genelleştirilmiş Sasa–Satsuma denklemleri; optik, plazma fiziği, hidrodinamik gibi alanlardaki dalga etkileşimlerini açıklamak ve davranışlarını analiz etmek için kullanılırken optik fiberlerdeki dalga yayılımı için de kullanılmıştır. (1+1) ve (2+1) boyutlu genelleştirilmiş Sasa–Satsuma denklemlerinin çözümü yeni Kudryashov yöntemiyle incelenmiştir [87]. Kadomtsev-Petviashvili denkleminin faydalanılarak uzun boylu su dalgaları, ferromanyetik ortam, süper akışkanlarda doğrusal olmayan dalga yayılımı, plazma fiziği ve akışkanlar dinamiği yeni Kudryashov yöntemi kullanılarak anlatılmıştır [88]. Kadomtsev-Petviashvili denklemi; su dalgalarının, yüzey dalgalarının, deniz dalgalarının, plazma dalgalarının davranışını modeller. Yine aynı denklemi içeren benzer bir çalışmada yüksek boyutlu Klein-Gordon, Kadomtsev-Petviashvili ve Boussinesq denklemlerinin kullanıldığı belirtilmiştir [89]. Bu gibi denklemlerin dışında kuantum sistemlerindeki, manyetik plazmalardaki ve diğer karmaşık sistemlerdeki dalgaların davranışlarını incelemeye kullanılan Zakharov dinamik sistemin bir genelleştirilmesinin çözümlerini bulmak için yeni Kudryashov yöntemi kullanılmıştır [90].

Birçok çalışmacı KP denklemi üzerinde çalışarak farklı katsayılar tercih ederek denklemlerin çözümlerini araştırmış ve birçok yöntem kullanmıştır. Bir çalışmada KP denklemi için Hirota'nın çift doğrusal yöntemi ile havalandırma, yumru ve X soliton çözümleri incelenmiştir [91] [92] [93]. A.-M. Wazwaz bir çalışmada KP denklemini Hirota'nın çift doğrusal ve tanh-coth yöntemleriyle çözmüştür [94]. Ayrıca [95] çalışmada da tanh ve sine–cosine yöntemlerini kullanmıştır. K. Khan ve M. A. Akbar Kadomtsev–Petviashvili denkleminin tam çözümlerini elde etmek için $\exp(-\Phi(\xi))$ -genişletme yöntemini kullanmıştır [96]. Yaning Tang ve birkaç araştırmacı tarafından [97]'deki çalışmada Kadomtsev–Petviashvili I denkleminin Hirota çift doğrusal formunun n. dereceden Wronskian determinant çözümleri verilmiştir. Bu çalışmaların dışında KP denklemi Darboux dönüşümü formülü [98], (w-g)-genişleme yaklaşımı ve Kudryashov yöntemi [99], $(G'/G, 1/G)$ -genişletme yöntemi [100] ve Coiflet dalgacık-homotopi Galerkin analiz yöntemi [101] kullanılarak çözümler elde edilmeye çalışılmıştır.

W.-X. Ma pKP denkleminin Lie vektörlerini inceleyerek yeni çözümler elde etmiştir [102]. Bu [103] çalışmada iki soliton yöntemi ve Hirota çift doğrusal yöntemi kullanılarak tam kıvrımlı dalga çözümleri ve periyodik soliton çözümleri elde edilmiştir. pKP denkleminin Painlevé analizi ve Lie klasik yöntemi ile özellikleri incelenmiştir [104]. [105]'te pKP denkleminde "Lie simetrisi" uygulanarak "kesik Painlevé yöntemi", "Backlund dönüşümü" ve "tutarlı Tanh

genişlemesi" olmak üzere birçok yöntem uygulanmıştır. Ayrıca İbrahim E. İnan ve Doğan Kaya geliştirilmiş bir tanh fonksiyonu yöntemini kullanarak bazı kesin çözümlerini bulmuştur [106]. A. J. M. Jawad [107] çalışmasında pKP denkleminin soliton çözümünü veya çözümlerini elde etmek için "tanh-coth" ile "tan-cot" yöntemleri ve "ansatz yöntemi" kullanmıştır. Başka bir makalede Gao ve Tian tarafından geliştirilen sembolik hesaplama yöntemi kullanılarak çözümler elde edilmiştir [108]. Hirota ve üstel yöntemleri [109], Adomian ayrıştırma yöntemi [110], Kudryashov yöntemi [111] ve homojen denge yöntemi [112] [113] kullanılarak soliton ilerleyen dalga çözümleri araştırılmıştır. [114] çalışmasında pKP denkleminin tam periyodik kırırım-dalga çözümü Exp-fonksiyon yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. [115]'te homoklinik test tekniği ve genişletilmiş homoklinik test tekniği kullanılarak kırırımlı dalga çözümü ve çift periyodik çözümleri elde edilmiştir.

W.-X. Ma [116]'daki çalışmasında BKP denkleminin N-soliton çözümlerini Hirota çift doğrusal yöntemiyle elde etmiştir. Peng, Tian ve Zhang tarafından bir çalışmada düzensiz dalgaların ortaya çıkma zamanının, yerinin ve toplu çözümlerin hareket yolunun izlenerek görünür solitonlarda çarpışmanın ne zaman ve nerede gerçekleşmesinin belirlenebileceği BKP denklemi kullanılarak açıklanmıştır [117]. Farklı formda olan denklem kullanılarak [118]'de BKP denkleminin soliton çözümü Pfaffian yöntemiyle oluşturulmuştur. BKP denkleminin iki üyesi için Wronskian çözümleri elde edilmiştir [119]. Bu çalışmaların dışında Ansatz yöntemi [120], (G'/G) -genişleme yöntemi [121], Bäcklund dönüşüm yöntemi [122] ve tanh fonksiyonu yöntemi [123] ile BKP denkleminin çözümleri elde edilmiştir.

Literatürde yapılan araştırma sonucu birleştirilmiş pKP-BKP denklemine birçok yöntem uygulanarak çözümler elde edilmiştir. (2+1) boyutlu birleştirilmiş potansiyel Kadomtsev-Petviashvili-B tipi Kadomtsev-Petviashvili denkleminin N-soliton çözümleri Hirota çift doğrusal yöntemi yardımıyla oluşturulmuştur [124]. Bir çalışmada Hirota çift doğrusal yöntemi tekrar uygulanarak bir dizi toplu çözümler elde edilmiştir [125]. Ayrıca başka bir çalışmada ise birleştirilmiş pKP-BKP denklemine öncelikle Hirota çift doğrusal yöntemi uygulanarak elde edilen formda polinom genişletme yöntemi uygulanmıştır [126]. [127]'de birleştirilmiş pKP-BKP denkleminin analitik çözümlerini bulmak için genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi ve üstel fonksiyon yöntemi uygulanmıştır. Bunlarla beraber (2+1) boyutlu birleştirilmiş potansiyel Kadomtsev-Petviashvili-B tipi Kadomtsev-Petviashvili denklemine Lie simetri yöntemi [128], Pfaffian yöntemi [129], doğrusal süperpozisyon prensibi yöntemi [130], Kudryashov yöntemi [111] uygulanarak birtakım çözümler elde edilmiştir.

1.3 Ön Bilgiler

Tanım 1.1 (Diferansiyel Denklem). x bağımsız $y = y(x)$ bağımlı değişken olmak üzere ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevleri $y', y'', \dots, y^{(n)}$ tarafından oluşturulan bağıntılara diferansiyel denklemler denir [131–134]. Genel olarak

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (1.28)$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 1.2 (Mertebe). Bir diferansiyel denklem içinde var olan en yüksek mertebeden türeve bu diferansiyel denklemin mertebesi denir [131–134].

Örnek 1.1. $y = y(x)$ olmak üzere;

$$3y'' + 5y + x^3 = \sin x$$

2. mertebeden diferansiyel denklemdir.

Örnek 1.2. $y = y(x)$ olmak üzere;

$$x.(y''')^7 + (y^{(v)})^2 + y^2 = p(x)$$

5. mertebeden diferansiyel denklemdir.

Tanım 1.3 (Derece). Bir diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden türevin kuvvetine diferansiyel denklemin derecesi denir [131–134].

Örnek 1.3.

$$(x^2 - 1)y''' - 2y^5 + x^2 = y'' \quad (1.29)$$

denkleminde bağımlı değişken $y = y(x)$ olmak üzere; 3. mertebeden 1. dereceden diferansiyel denklemdir.

Örnek 1.4.

$$x^3(y^{(4)})^2 + e^x(y^{(v)})^3 + y''' + 2(y'')^7 - y^2 = 0 \quad (1.30)$$

burada $y = y(x)$ olmak üzere 5. mertebeden 3. dereceden diferansiyel denklemdir.

Örnek 1.5. $y = y(x)$ olmak üzere;

$$\sin y' = xy'$$

1. mertebeden derecesi olmayan diferansiyel denklemdir.

Tanım 1.4 (Adi Diferansiyel Denklem). Tek bir bağımsız değişken, bu değişkene bağlı bir veya daha fazla bağımlı değişken ile bu bağımsız değişkene göre türevleri

tarafından oluşturulan diferansiyel denklemlere adi diferansiyel denklem denir [131–134].

Örnek 1.6. $y = y(x)$, $z = z(x)$ olmak üzere;

$$\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0 \quad (1.31)$$

1. mertebeden 1. dereceden adi diferansiyel denklemdir.

Tanım 1.5 (Kısmi Diferansiyel Denklem). Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkene göre kısmi türevlerinin bulunduğu diferansiyel denklemlere kısmi diferansiyel denklem denir. Genel olarak $z = z(x, y)$ olmak üzere;

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots), \quad (1.32)$$

şeklinde gösterilir [131–134].

Tanım 1.6 (Doğrusal Diferansiyel Denklem). Diferansiyel denklemdeki her bağımlı değişkenler ile türevleri sadece birinci dereceden ise ve türevleri ile bağımlı değişkenler çarpım şeklinde değilse bu tür denklemlere doğrusal (lineer) diferansiyel denklem denir [131–134].

Örnek 1.7. $y = y(x)$ olmak üzere;

$$x^3 y'' - 5y' + y = 0$$

2. mertebeden 1. dereceden doğrusal adi diferansiyel denklemdir.

Örnek 1.8. $z = z(x, y)$ bağımsız, x ve y bağımlı değişken olmak üzere;

$$y \frac{dz}{dx} + x \frac{dz}{dy} = xy$$

1. mertebeden 1. dereceden doğrusal kısmi diferansiyel denklemdir.

Tanım 1.7 (Doğrusal Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklem). Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken üstel, logaritmik ve trigonometrik olarak bulunuyorsa bağımlı değişken ve türevleri ikinci ya da daha fazla kuvvete sahipse bağımlı değişken ile türevler çarpımsal veya bölümsel olarak bulunuyorsa bu denklemlere doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler denir [131–134].

Örnek 1.9.

$$(y'')^2 - 5y' + 2y = 0$$

denkleminde $y = y(x)$ bağımlı değişken olmak üzere $(y'')^2$ terimine bakıldığında y'' ifadesi 2. dereceden kuvvete sahip olduğundan doğrusallık durumunu

sağlamamaktadır. Böylelikle bu denklem 2. mertebeden 2. dereceden doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemdir.

Örnek 1.10. $y = y(x)$ olmak üzere;

$$y'' + 2x^3y' + y^2 = 0$$

denkleminde x^3y' teriminde bağımsız değişken 3 kuvvetine sahip olmasına rağmen doğrusallık koşulu bozulmaz. Fakat y^2 teriminde bağımlı değişken 2. kuvvetten olması sebebiyle bu denklem 2. mertebeden 1.dereceden doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemdir.

Örnek 1.11.

$$y.y''' + 3y'' + x = 0$$

denkleminde $y = y(x)$ bağımlı değişken ve türevleri 2 ya da daha fazla kuvvete sahip olmamasına rağmen $y.y'''$ teriminde bağımlı değişken ve türevleri çarpımsal durumda olduğundan bu denklem doğrusal olmayan bir diferansiyel denklemdir.

Örnek 1.12.

$$y'' + \sin y - 3x^2 = 0$$

denklemindeki $\sin y$ terimi $y = y(x)$ bağımlı değişkenin trigonometrik bir ifadesini içermesi nedeniyle doğrusal olmayan bir diferansiyel denklemdir.

Örnek 1.13. $y = y(x)$ bağımlı değişken olmak üzere;

$$y' - e^y = 0$$

denkleminde e^y teriminde bağımlı değişkenin üstel formda olmasından dolayı doğrusal olmayan diferansiyel denklemdir.

Tanım 1.8 (Soliton [135]). Sabit bir hızda yayılım gösterirken kendi şeklini koruyan ve kendi kendini güçlendiren tekil dalgalara **soliton** denir.

Genel bir tanımı olmamakla beraber aşağıdaki özelliklere sahiptir:

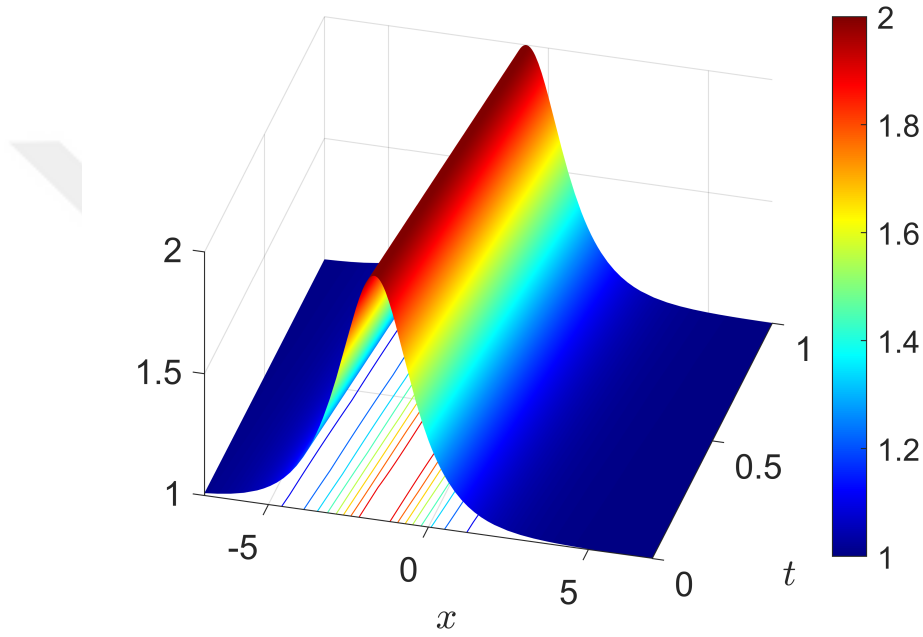
1. Solitonlar kalıcıdır.
2. Bölgeler içinde lokalizedir yani sınırlandırılmıştır.
3. Diğer solitonlarla etkileşimlerinden (patlama ve faz kayması hariç) değişmeden kurtulabilir, karakterini değiştirmez.

Tanım 1.9 (Parlak Soliton). Yoğunluğu arka plandan daha büyük olan soliton darbesidir. Parlak solitonlar, homojen bir arka plan üzerinde lokalize bir yoğunluk

ile karakterize edilir. Parlak solitonlar bir optik fiberdeki grup hızı dağılımı anormal olduğunda oluşur. Bu durumda taşıyıcı dalga solitonların oluşumuna izin veren dalga modülasyonuna göre kararsızdır. Modülasyon eşiğinin üzerindeki derin sularda görülür [136]. Genellikle

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^M a_i \text{sech}^2(R^i(\xi)),$$

şeklindeki sech^2 içeren çözümlerin grafiklerinde oluşur.

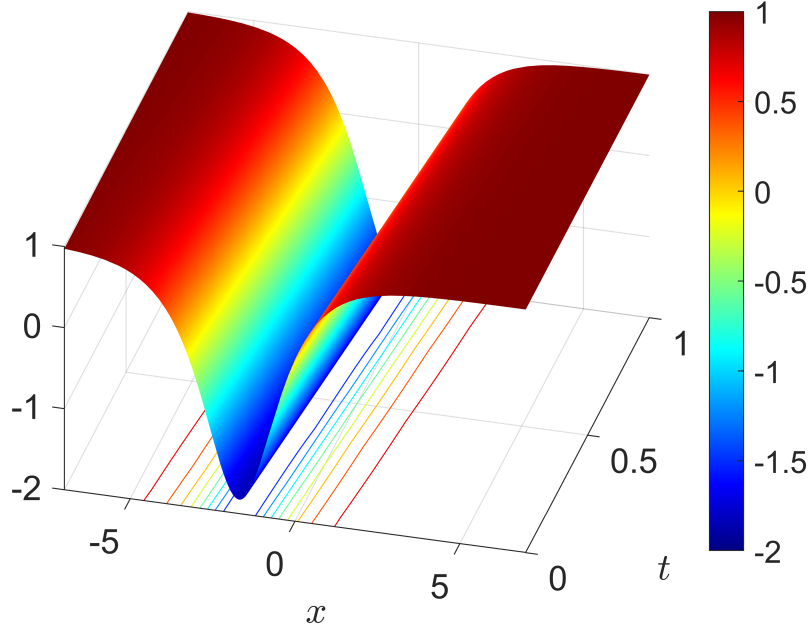


Şekil 1.1 Parlak soliton

Tanım 1.10 (Koyu Soliton). Yoğunluğu arka plandan daha düşük olan soliton darbesidir. Koyu solitonlar, sürekli bir dalga arka planı üzerinde lokalize bir yoğunluk deliği ile tanımlanır. Koyu solitonlar bir optik fiberdeki grup hızı dağılımı normal olduğunda oluşur. Bu durumda taşıyıcı dalga solitonların oluşumuna izin veren dalga modülasyonuna göre kararlıdır. Modülasyon eşiğinin altındaki sığ sularda görülür [136]. Genellikle

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^M a_i \tanh(R^i(\xi)),$$

şeklindeki $\tanh$ içeren çözümlerin grafiklerinde oluşur.

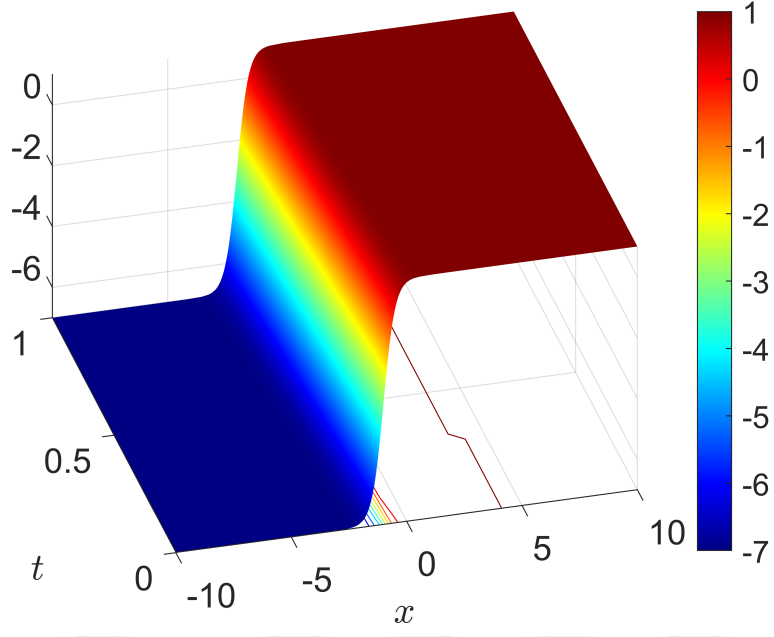


Şekil 1.2 Koyu soliton

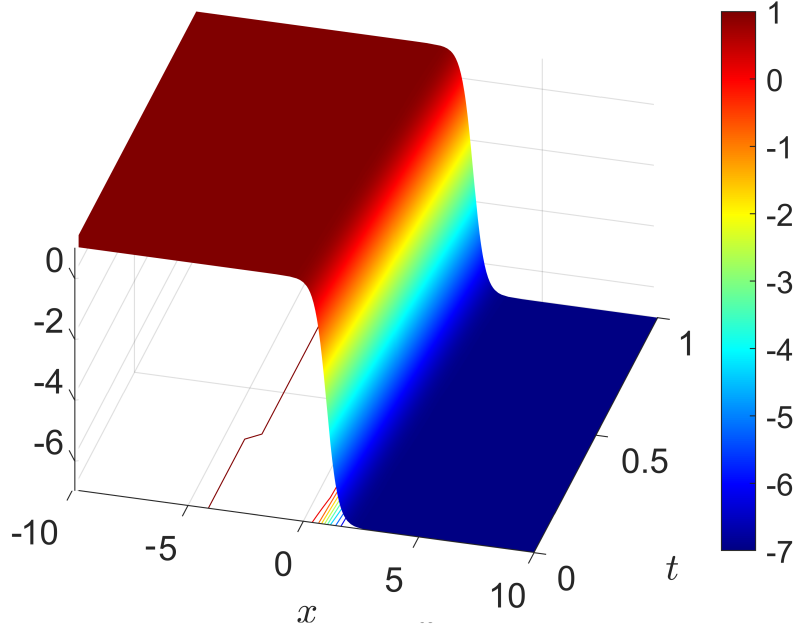
Tanım 1.11 (Kıvrımlı Soliton). Bir alt sınır ile bir üst sınır arasında asimtotik bir şekilde artan ya da azalan şekilde yol alan soliton darbelerine kıvrımlı (kink) solitonlar denir. Genliği hızından bağımsız sabit vida şekli gibi dönme hareketinde olan dalgadır. Yükselerek hareket eden dalgalara kıvrımlı soliton, alçalarak hareket eden dalgalara ters-kıvrımlı soliton denir. Bu kıvrımlı solitonlar, topolojik soliton olarak da adlandırılır. Yükselti kısmına yamaç veya blok duvarı denir. Genellikle

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^M a_i \arctan(R^i(\xi)),$$

şeklindeki $\arctan$ içeren çözümlerin grafiklerinde oluşur [137].



Şekil 1.3 Kıvrımlı soliton



Şekil 1.4 Ters-kıvrımlı soliton

Tanım 1.12 (Tekil Soliton). Dalga profillerinin merkezinde tekillikler bulunan solitonlar tekil solitonlar olarak adlandırılır. Tekil solitonlar sonlu enerji ve genliğe sahip parlak ve koyu solitonların aksine dalga merkezinde sınırsız genliğe sahiptir. Bu solitonlar genelde oldukça kararsız oldukları için çok uzak mesafelere

yayılamazlar. Genel olarak

$$u(x, t) = A.\operatorname{cosech}^p(B.(x - ct)),$$

şeklindeki *cosech* içeren çözümlerin grafiklerinde oluşur [37].

Tanım 1.13 (Denge Sabiti). x ve t bağımsız değişkenler ve u bağımlı değişken olmak üzere:

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \dots) = 0, \quad (1.33)$$

polinom formunda olan doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemin çözümlerini elde etmek amacıyla $\xi = x - ct$ dalga dönüşümü uygulanarak $u(x, t) = u(\xi)$ biçimine dönüştürülür.

Böylelikle doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklem, değişken değiştirmeyle

$$F(u, u', u'', u''', \dots) = 0, \quad (1.34)$$

formundaki adi diferansiyel denkleme dönüştürülmüş olur.

Bu adi diferansiyel denklemin çözümü şu şekildedir:

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^M a_i R^i(\xi), \quad (1.35)$$

burada $a_M \neq 0$ ve $a_0, a_1, a_2, \dots, a_M$ bilinmeyen sabitlerdir.

Yukarıda verilen toplam biçimindeki çözüm fonksiyonunun üst sınırını temsil eden M sabitine "denge sabiti" denir.

Denge sabiti olan M pozitif tam sayısını belirlemek için

$$u \longrightarrow M$$

$$u^n \longrightarrow n.M$$

$$u' \longrightarrow M + 1$$

$$u'' \longrightarrow M + 2$$

$$\vdots$$

$$u^{(r)} \longrightarrow M + r$$

şeklinde verilen şematik sistem kullanılarak doğrusal olmayan bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden doğrusal olan terim ile en yüksek dereceden doğrusal olmayan terim eşitlenerek dengelenir.

Yani doğrusal olmayan bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeli doğrusal

terim $\frac{d^q u}{d\xi^q}$ ve en yüksek dereceli doğrusal olmayan terim $u^p \left(\frac{d^r u}{d\xi^r} \right)^s$ olmak üzere u 'ya gerekli dönüşümler yapılarak homojenleştirilip dereceler eşitlenerek dengelenmesiyle burada p, q, r, s birer doğal sayı ve M homojen denge sabiti olmak üzere:

$$M + q = M.p + s.(M + r) \quad (1.36)$$

homojen dengeleme bağıntısı elde edilir.

Yorum 1.1. Özellikle bazı denklemlerde denge sabitini elde ederken yardımcı denklem de göz önüne alınarak hesaplama yapılır.

Örnek 1.14.

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + \alpha u_{yy} = 0,$$

denkleminde denge sabitini bulmak için

$$u(x, y, t) = U(\xi), \quad \xi = px + qy - rt,$$

yürüyen dalga dönüşümü uygulanırsa:

$$-prU'' + 6p^2(U')^2 + 6p^2UU'' + p^4U^{(4)} + \alpha q^2U'' = 0,$$

elde edilir. Burada $U = U(\xi)$ dir. Bu denklemde doğrusal olmayan en yüksek dereceli $(U')^2$ terim ile en yüksek mertebeden doğrusal olan $U^{(4)}$ terim dengelenirse

$$2.(M + 1) = M + 4$$

$$2M + 2 = M + 4$$

$$M = 2$$

olarak denge sabiti bulunur.

Örnek 1.15. $(2 + 1)$ -boyutlu değiştirilmiş Zakharov-Kuznetsov denklemi:

$$16u_t + 20(u^{\frac{3}{2}})_x + (u_{xx} + u_{yy})_x = 0,$$

için denge sabiti bulmak amacıyla

$$u(x, y, t) = U(\xi), \quad \xi = px + qy - rt,$$

yürüyen dalga dönüşümü uygulanırsa:

$$-16rU' + 20p(U^{\frac{3}{2}})' + (p^3 + pq^2)U''' = 0,$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemde doğrusal olmayan en yüksek dereceli $(U^{\frac{3}{2}})'$ terim

ile en yüksek mertebeden doğrusal olan U''' terim dengelenmesi için

$$\begin{aligned} U^{\frac{3}{2}} &\longrightarrow \frac{3}{2}M \\ (U^{\frac{3}{2}})' &\longrightarrow \frac{3}{2}M + 1 \\ U''' &\longrightarrow M + 3 \end{aligned}$$

ifadeleri göz önünde bulundurularak eşitlenirse:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}M + 1 &= M + 3 \\ \frac{M}{2} &= 2 \\ M &= 4 \end{aligned}$$

olarak denge sabiti bulunur.

Örnek 1.16. (1+1)-boyutlu Caudrey–Dodd–Gibbon–Sawada–Kotera (CDGSK) denkleminin:

$$u_t + 15uu_{xxx} + 15u_xu_{xx} + 45u^2u_x + u_{xxxxx} = 0,$$

denge sabitini bulmak için

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = px - rt,$$

yürüyen dalga dönüşümü uygulanırsa:

$$-rU' + 15p^3UU''' + 15p^3U'U'' + 45pU^2U' + U^{(5)} = 0,$$

elde edilir. Bu denklemde doğrusal olmayan en yüksek dereceli U^2U' terim ile en yüksek mertebeden doğrusal olan $U^{(5)}$ terim dengelenirse:

$$\begin{aligned} (2M) + (M + 1) &= M + 5 \\ 3M + 1 &= M + 5 \\ M &= 2 \end{aligned}$$

olarak denge sabiti bulunur.

Bu bölümde öncelikle kısmi diferansiyel denklemlerin dalga dönüşümü uygulanarak adi diferansiyel denklemlere dönüştürülmesi ele alınacak, sonrasında elde edilen diferansiyel denklemlerin çeşitli Kudryashov yöntemleriyle çözümleri bulunacaktır.

2.1 Dalga Dönüşümünün Uygulanması

Bilimsel birçok alanda ve mühendislikteki çoğu uygulamalarda kullanılan kısmi diferansiyel denklemler biçim, tipik özellikler bakımından farklı olması nedeniyle genel analitik çözümleri elde etmek çok karmaşık olup zordur. Bununla birlikte çoğu problemlerin sayısal çözümlerini bulmak için birçok yöntem ve algoritma geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden biri de yürüyen dalga yöntemidir. Yürüyen dalga yöntemi kullanılarak analitik bir çözüm elde edilir. Böylece kısmi diferansiyel denklemlerin sıralı türevlerinin hesaplanması, sınır koşullarının uygulanması ve sayısal bir çözüm gerektiren diğer durumlara genişletilebilir. Çözümleri elde edebilmek için kullanılan birçok yöntemde yürüyen dalga dönüşümünden faydalanılır.

2.1.1 Reel Terimli Denklemler İçin

$u = u(x, t)$ reel bir bilinmeyen fonksiyon olmak üzere doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklemin aşağıdaki gibi genel formunu ele alalım:

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}, \dots\right) = 0. \quad (2.1)$$

x ve t bağımsız değişkenler olmak üzere $u(x, t) = U(\xi)$ ve $\xi = \xi(x, t)$ değişken değiştirmesi yapılırsa denklem (2.1) şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} & f \left(U, \frac{dU}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{dU}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dU}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dU}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dU}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right], \dots \right) \\ &= f \left(U, \frac{dU}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{dU}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{dU}{d\xi} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) + \frac{d^2 U}{d\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2, \right. \\ & \left. \frac{dU}{d\xi} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} \right) + \frac{d^2 U}{d\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right), \dots \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Eğer özel olarak $\xi = \xi(x, t) = k(x - ct)$ seçilirse denklem (2.2)'de kısmi türevler aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -kc, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= k, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} = \dots = 0. \end{aligned}$$

$\xi = \xi(x, t) = k(x - ct)$ şeklinde seçilen fonksiyon durumu genellikle yürüyen dalga dönüşümü olarak adlandırılır. Çünkü t 'ye göre x eksenı boyunca doğrusal bir ötelemeye karşılık gelir, burada k dalga sayısı ve c dalga hızını gösteren keyfi sabitlerdir.

Böylece dönüşüm yapıp, ilgili türevler yerine yazıldıktan sonra denklem (2.2)

$$f \left(U, k \frac{dU}{d\xi}, (-kc) \frac{dU}{d\xi}, k^2 \frac{d^2 U}{d\xi^2}, -k^2 c \frac{d^2 U}{d\xi^2}, -k^3 c \frac{d^3 U}{d\xi^3}, \dots \right), \quad (2.3)$$

veya

$$\frac{dU}{d\xi} = f \left(U, \frac{dU}{d\xi}, \frac{d^2 U}{d\xi^2}, \frac{d^3 U}{d\xi^3}, \dots \right), \quad (2.4)$$

formunu alır.

Böylece denklem (2.4), ξ cinsinden bir adi diferansiyel denkleme dönüşür.

Genel olarak bakıldığında yürüyen dalga dönüşümünün önemi, bir kısmi diferansiyel denklemi bir adi diferansiyel denkleme dönüştürmesidir.

Denklem (2.4)'te $U(\xi)$ için bir çözüm bulunabilirse $u(x, t) = U(\xi)$ olarak çözümün aşamaları devam ettirilerek denklem (2.1)'in çözümü elde edilmiş olur.

2.1.2 Kompleks Terimli Denklemler İçin

$u = u(x, t)$ kompleks bir bilinmeyen fonksiyon olmak üzere doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklemin aşağıdaki gibi genel formunu ele alalım:

$$\mathbf{F} \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}, \dots \right) = 0, \quad (2.5)$$

x ve t bağımsız değişkenler olmak üzere $u(x, t) = U(\xi)e^{i\Theta}$ ve $\xi = \xi(x, t)$ değişken değiştirmesi yapılırsa denklem (2.5) şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{F} \left(Ue^{i\Theta}, \frac{\partial(Ue^{i\Theta})}{\partial x}, \frac{\partial(Ue^{i\Theta})}{\partial t}, \frac{\partial^2(Ue^{i\Theta})}{\partial x^2}, \dots \right) = 0, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{F} \left(Ue^{i\Theta}, \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} e^{i\Theta} + \frac{\partial(e^{i\Theta})}{\partial x} U, \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} e^{i\Theta} + \frac{\partial(e^{i\Theta})}{\partial t} U, \right. \\ \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 e^{i\Theta} + 2 \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial(e^{i\Theta})}{\partial x} + U \frac{\partial^2(e^{i\Theta})}{\partial x^2}, \dots \right) = 0. \quad (2.7)$$

Yukarıdaki denklemde $e^{i\Theta}$ türevleri dikkate alınarak düzenlendiğinde

$$\mathbf{F} (Ue^{i\Theta}, a_1 U' e^{i\Theta}, a_2 U'' e^{i\Theta}, a_3 U''' e^{i\Theta}, \dots) = 0, \quad (2.8)$$

şeklinde ya da standart hâli olarak

$$\mathbf{G} (U(\xi), a_1 U'(\xi), a_2 U''(\xi), a_3 U'''(\xi), \dots) = 0, \quad (2.9)$$

elde edilir. Burada $a_1, a_2, a_3, \dots$ keyfi sabitlerdir. Böylece karmaşık terime sahip denklem (2.5), ξ cinsinden bir adi diferansiyel denkleme dönüşür.

Genellikle karmaşık terimli diferansiyel denklemleri

$$u(x, t) = U(\xi)e^{i\Theta}, \quad \xi = x - rt, \quad \Theta(x, t) = \alpha x + \beta t + \varphi,$$

olacak şekilde ilerleyen dalga dönüşümü uygulanarak adi diferansiyel denkleme dönüştürülür. Burada $u(x, t)$ kompleks değerli bir fonksiyon, $U(\xi)$ ve $\Theta(x, t)$ ifadeleri sırasıyla reel değerli genlik ve faz fonksiyonları olmak üzere r dalga hızını, α frekansı, β dalga sayısını, φ_0 faz sabitini ifade eder [138].

Örnek 2.1. Bağımlı değişkeni kompleks fonksiyon olan doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden biri olan (1+1)-boyutlu Schrödinger denklemini (SD):

$$iu_t + u_{xx} + u|u|^2 = 0,$$

ele alalım. Burada $u(x, t)$ kompleks değerli bir fonksiyondur.

$$u(x, t) = U(\xi)e^{i\Theta}, \quad \xi = px - rt, \quad \Theta(x, t) = \alpha x + \beta t,$$

şeklindeki ilerleyen dalga dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} u_t &= -rU'e^{i\Theta} + i\beta Ue^{i\Theta} = (-rU' + i\beta U)e^{i\Theta}, \\ u_x &= pU'e^{i\Theta} + i\alpha Ue^{i\Theta} = (pU' + i\alpha U)e^{i\Theta}, \\ u_{xx} &= (p^2U'' + i2\alpha pU' - \alpha^2U)e^{i\Theta}, \end{aligned}$$

kısmi türevleri elde edilir. Burada $U = U(\xi)$ dir. Ayrıca kompleks terimli ifadelerde

$$|u|^2 = u\bar{u} = Ue^{i\Theta}Ue^{-i\Theta} = U^2$$

olduğu göz önüne alınarak bu ifadeler SD'de yerine yazılırsa:

$$(-irU' - \beta U)e^{i\Theta} + (p^2U'' + i2\alpha pU' - \alpha^2U)e^{i\Theta} + U^3e^{i\Theta} = 0, \quad (2.10)$$

$$[(-\beta U + p^2U'' - \alpha^2U + U^3) + i(-rU' + 2\alpha pU')]e^{i\Theta} = 0, \quad (2.11)$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$p^2U'' - (\alpha^2 + \beta)U + U^3 = 0, \quad (2.12)$$

$$(2\alpha p - r)U' = 0, \quad (2.13)$$

şeklinde doğrusal olmayan adi diferansiyel denkleme indirgenmiş olur.

2.2 Metotların Algoritması

x, y ve t bağımsız değişkenlerine bağlı doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denkleminin (DOKDD) genel formunu:

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \dots\right) = 0, \quad (2.14)$$

ele alalım. Burada $u(x, y, t)$; DOKDD'nin çözümüdür.

Aşağıdaki yürüyen dalga dönüşümlerini:

$$u(x, y, t) = U(\xi), \quad \xi = v_1x + v_2y + v_3t + \varphi_0, \quad (2.15)$$

ele alalım. Burada v_1, v_2, v_3 , ve φ_0 sıfırdan farklı reel sabitlerdir. v_1 ve v_2

parametreleri sırasıyla x ve y yönlerinde solitonun ters genişliğini, v_3 dalga hızını temsil ederken φ_0 fazını ifade eder [139].

Bu yürüyen dalga dönüşümü kullanılarak oluşturulan gerekli türevleri denklem (2.14) içine yerleştirerek bir doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem:

$$G(U(\xi), U'(\xi), U''(\xi), \dots) = 0, \quad (2.16)$$

elde ederiz.

2.2.1 Kudryashov Yöntemi [78, 80]

Önceki bölümlerde de belirtildiği gibi N. A. Kudryashov'un çalışmalarından sonra birçok araştırmacı bu yöntemi farklı adlarda kullanmış olup genellikle "Kudryashov yöntemi" adı altında kullanmaya başlamıştır. Bu yöntemler birçok araştırmacı tarafından da yaygın olarak kullanılmaktadır. [140]'da ve [141]'deki çalışmalar incelenebilir.

Adım 1: Denklem (2.16) ile verilen DOADD'nin çözüm formunun:

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i (R(\xi))^i, \quad a_m \neq 0, \quad (2.17)$$

şeklinde olduğunu varsayalım.

Denklem (2.17) denkleminde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ bilinmeyenler ve m dengeleme sabitidir. Dengeleme sabiti denklem (2.16) içindeki en yüksek mertebeden doğrusal terim ve doğrusal olmayan terim dengelenerek elde edilir. $R(\xi)$, denklem (2.21) denkleminin bir çözümüdür:

$$R(\xi) = \frac{1}{1 \mp \eta e^{\delta \xi}}, \quad (2.18)$$

veya hiperbolik formda,

$$R(\xi) = \frac{1}{1 \mp \eta (\cosh(\delta \xi) + \sinh(\delta \xi))}. \quad (2.19)$$

Eğer $\eta = 1$ olarak seçilirse ($\mp$) için sırasıyla aşağıdaki formları yazabiliriz:

$$R(\xi) = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{\delta}{2}\xi\right) \right] \text{ ya da } R(\xi) = \frac{1}{2} \left[1 - \coth\left(\frac{\delta}{2}\xi\right) \right], \quad (2.20)$$

denklem (2.18) ve denklem (2.21)'de η, δ sıfırdan farklı reel sabitlerdir ve $R(\xi)$ aşağıdaki birinci dereceden Riccati diferansiyel denklemini sağlar:

$$R'(\xi) = \frac{dR(\xi)}{d\xi} = \delta R(\xi)(R(\xi) - 1). \quad (2.21)$$

Adım 2: Denklem (2.17) ve gerekli türevlerini denklem (2.16) içine yerleştirerek $R(\xi)$ ye göre bir polinom elde edilir. Polinomdaki $R(\xi)$ nin aynı kuvvetlerini içeren terimleri bir araya getirip her terimin katsayısını sıfıra eşitleyerek $v_1, v_2, v_3, \varphi_0, \alpha, \beta, \omega, \delta, \eta$ ve $a_0, a_1, \dots, a_M$ için bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Adım 3: Bu cebirsel sistem çözülerek önceki adımda bilinmeyen parametrelerin uygun değerleri bulunur. Son olarak denklem (2.18), denklem (2.15) ve bulunan çözüm kümelerini denklem (2.17)'de yerine yazarsak denklem (2.14)'teki DOKDD'nin çözümleri elde edilir.

Yorum 2.1. Denklem (2.18) ve denklem (2.21)'i sırasıyla aşağıdaki gibi alırsak Kudryashov yönteminin daha genelleştirilmiş biçimine şekilde ulaşılabilir:

$$\begin{aligned} R(\xi) &= \frac{1}{\beta \mp \eta e^{\delta \xi}}, \\ R'(\xi) &= \frac{dR(\xi)}{d\xi} = \delta R(\xi)(\beta R(\xi) - 1), \end{aligned} \quad (2.22)$$

burada β sıfırdan farklı reel parametredir ve hiperbolik form aşağıdaki biçimde düzenlenebilir:

$$R(\xi) = \frac{1}{\beta \mp \eta(\cosh(\delta \xi) + \sinh(\delta \xi))}. \quad (2.23)$$

2.2.2 Yeni Kudryashov Yöntemi [79, 80]

Adım 1: Denklem (2.16) ile verilen DOADD'nin çözüm formunun:

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^M \Phi_i \kappa^i(\xi), \quad \Phi_M \neq 0, \quad (2.24)$$

burada $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_M$ belirlenmesi gereken reel parametreler ve M dengeleme sabitidir. $\kappa(\xi)$ ise aşağıdaki DOADD'nin çözümüdür:

$$\left[\frac{d\kappa(\xi)}{d\xi} \right]^2 = \delta^2 \kappa^2(\xi) [1 - \eta \kappa^2(\xi)], \quad (2.25)$$

burada

$$\kappa(\xi) = \frac{4\psi}{4\psi^2 e^{\delta\xi} + \eta e^{-\delta\xi}}. \quad (2.26)$$

dır. Denklem (2.25) ve denklem (2.26) içinde bulunan δ, η ve ψ daha sonra belirlenecek olan sıfırdan farklı reel sabitlerdir.

Adım 2: Denklem (2.24) ve gerekli türevlerini denklem (2.16)'da yerine koyarsak $\kappa(\xi)$ ye göre bir polinom elde edilir. Polinomdaki $\kappa(\xi)$ nin aynı kuvvetlerini içeren terimleri bir araya getirip her terimin katsayısını sıfıra eşitleyerek $v_1, v_2, v_3, \varphi_0, \alpha, \beta, \omega, \delta, \eta, \psi$ ve $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_M$ için bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Adım 3: Bu cebirsel sistem çözülerek önceki adımda bilinmeyen parametrelerin uygun değerleri bulunur. Son olarak denklem (2.26), denklem (2.15) ve bulunan çözüm kümelerini denklem (2.24)'te yerine yazarsak denklem (2.14)'teki DOKDD'nin çözümleri elde edilir.

Bu bölümde birleşik pKP-BKP denkleminin Kudryashov ve yeni Kudryashov yöntemleriyle, Vakhnenko-Parkes denkleminin ise yeni Kudryashov yöntemiyle analitik formda soliton çözümleri araştırılacaktır.

3.1 Birleşik pKP-BKP Denklemi [54]

$u = u(x, y, t)$ olmak üzere potansiyel Kadomtsev-Petviashvili denklemi şu şekildedir:

$$u_{xt} + 6u_x u_{xx} + u_{xxxx} + a u_{yy} = 0. \quad (3.1)$$

Ayrıca (2+1)-boyutlu entegre edilebilir B-tipi Kadomtsev-Petviashvili denklemi şu şekildedir:

$$(15(u_x)^3 + 15u_x u_{xxx} + u_{xxxxx})_x + 5(u_{xxxy} + 3(u_x u_y)_x) + u_{xt} - u_{yy} = 0. \quad (3.2)$$

Burada $u = u(x, y, t)$ dir. İlgili denklem, üstel olarak lokalize yapılar arasındaki etkileşimleri tanımlar; sığ su dalgalanmaları için bir model olarak ve plazmalardaki elektrostatik dalga potansiyeli için kullanılmıştır.

Son zamanlarda Ma tarafından verilen denklem (3.1)'deki pKP ile denklem (3.2)'deki BKP denkleminin birleştirilmiş formu, pKP-BKP denklemi olarak aşağıdaki formda sunulmuştur:

$$\begin{aligned} & a_1(15(z_x)^3 + 15z_x z_{xxx} + z_{xxxxx})_x + a_2(6z_x z_{xx} + z_{xxxx}) \\ & + a_3(z_{xxxy} + 3(z_x z_y)_x) + a_4 z_{xx} + a_5 z_{xt} + a_6 z_{yy} = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

burada $z = z(x, y, t)$ olmak üzere a_i rastgele sabitler ve $a_5 \neq 0$ 'dır.

3.1.1 Dalga Dönüşümünün Birleşik pKP-BKP Denkleminde Uygulanması

Yöntemleri uygulamadan önce birleşik pKP-BKP denkleminde uygun bir dalga dönüşümü uygulayarak bir adi diferansiyel denkleme dönüştürelim. Yani denklem (3.3)'e aşağıdaki dalga dönüşümünü uygulayalım:

$$z(x, y, t) = \mathcal{Z}(\xi), \quad \xi = px + qy - rt. \quad (3.4)$$

Yukarıda verilen dalga dönüşümünü denklem (3.3)'e uygularsak aşağıdaki doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemi (DOADD) elde ederiz. Burada p ve q parametreleri sırasıyla x ve y yönlerinde solitonun genliğini, r dalga hızını ifade eder.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}'' \left(15a_1p^5\mathcal{Z}^{(3)} + 45a_1p^4(\mathcal{Z}')^2 + 6p^2\mathcal{Z}'(a_2p + a_3q) + a_4p^2 + a_6q^2 \right) \\ + a_1p^6\mathcal{Z}^{(6)} + 15a_1p^5\mathcal{Z}^{(4)}\mathcal{Z}' + p^3\mathcal{Z}^{(4)}(a_2p + a_3q) = a_5pr\mathcal{Z}'', \end{aligned} \quad (3.5)$$

burada $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\xi)$ ve $'$ gibi üst indisler ve parantez içindeki üsler ise $\mathcal{Z}$ 'nin ξ 'ye göre ilgili mertebeden adi türevlerini göstermektedir.

3.1.2 Kudryashov Yönteminin Birleşik pKP-BKP Denkleminde Uygulanması

Denklem (3.5)'teki DOADD'nin çözümlerinin aşağıdaki formda olduğunu kabul edelim [78, 80]:

$$\mathcal{Z}(\xi) = \sum_{i=0}^{\mu} A_i \varphi^i(\xi), \quad A_{\mu} \neq 0. \quad (3.6)$$

Denklem (3.5)'teki $\mathcal{Z}^{(6)}$ ve $\mathcal{Z}'\mathcal{Z}^{(4)}$ terimleri arasında homojen dengeleme kuralını uygularsak:

$$\mu + 6 = \mu + 1 + \mu + 4$$

$$\mu + 6 = 2\mu + 5$$

$$\mu = 1$$

dengeleme sabitini $\mu = 1$ olarak elde ederiz. Dolayısıyla denklem (3.6) aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathcal{Z}(\xi) = A_0 + A_1\varphi(\xi), \quad A_1 \neq 0. \quad (3.7)$$

Burada $\varphi(\xi)$, denklem (3.8) adi diferansiyel denkleminin çözümünü göstermektedir:

$$\varphi'(\xi) = \delta\varphi(\xi)(\gamma\varphi(\xi) - 1), \quad (3.8)$$

burada δ, γ sıfırdan farklı reel sayılardır. Denklem (3.8) Kudryashov yönteminde önerildiği gibi aşağıdaki formda çözüme sahiptir:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\gamma + \eta \exp(\delta \xi)}, \quad (3.9)$$

burada η sıfır olmayan reel sabittir. Denklem (3.9) ve bu denklemin gerekli türevlerini denklem (3.5)'te yerine koyalım. Sonra bu denklemde $\varphi(\xi)$ 'nin aynı kuvvetine sahip tüm terimleri ortak çarpan parantezine alıp ardından bu terimlerin katsayılarını sıfıra eşitlersek aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned} \varphi^1(\xi) : & A_1 \delta^2 (a_1 \delta^4 p^6 + a_2 \delta^2 p^4 + a_3 \delta^2 p^3 q + a_4 p^2 - a_5 p r + a_6 q^2) = 0, \\ \varphi^2(\xi) : & A_1 \delta^2 (a_1 \delta^3 p^5 (10A_1 + 21\gamma \delta p) + a_2 \delta p^3 (2A_1 + 5\gamma \delta p) + C_0) = 0, \\ \varphi^3(\xi) : & A_1 \delta^2 (a_1 \delta^2 p^4 (390A_1 \gamma \delta p + 45A_1^2 + 602\gamma^2 \delta^2 p^2) + 2\gamma C_1) = 0, \\ \varphi^4(\xi) : & A_1 \gamma \delta^3 p^2 (A_1 + 2\gamma \delta p) (5a_1 \delta p^2 (3A_1 + 14\gamma \delta p) + 2\gamma (a_2 p + a_3 q)) = 0, \\ \varphi^5(\xi) : & A_1 \gamma^2 \delta^3 p^2 (A_1 + 2\gamma \delta p) (5a_1 \delta p^2 (27A_1 + 112\gamma \delta p) + 4\gamma (a_2 p + a_3 q)) = 0, \\ \varphi^6(\xi) : & a_1 A_1 \gamma^3 \delta^4 p^4 (6A_1 \gamma \delta p + A_1^2 + 8\gamma^2 \delta^2 p^2) = 0, \\ \varphi^7(\xi) : & a_1 A_1 \gamma^4 \delta^4 p^4 (6A_1 \gamma \delta p + A_1^2 + 8\gamma^2 \delta^2 p^2) = 0. \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} C_0 &= 2a_3 A_1 \delta p^2 q + 5a_3 \gamma \delta^2 p^3 q + a_4 \gamma p^2 - a_5 \gamma p r + a_6 \gamma q^2, \\ C_1 &= a_2 \delta p^3 (12A_1 + 25\gamma \delta p) + a_3 \delta p^2 q (12A_1 + 25\gamma \delta p) + \gamma (a_4 p^2 - a_5 p r + a_6 q^2), \end{aligned} \quad (3.10)$$

dır. Yukarıdaki cebirsel denklem sistemi sembolik bir hesaplama yazılımı kullanılarak çözümlürse aşağıdaki çözüm kümeleri elde edilir:

Çözüm Kümesi 1.

$$a_3 = -\frac{a_1 \delta^4 p^6 + a_2 \delta^2 p^4 + a_4 p^2 - a_5 p r + a_6 q^2}{\delta^2 p^3 q}, \quad A_1 = -2\gamma \delta p. \quad (3.11)$$

Çözüm Kümesi 2.

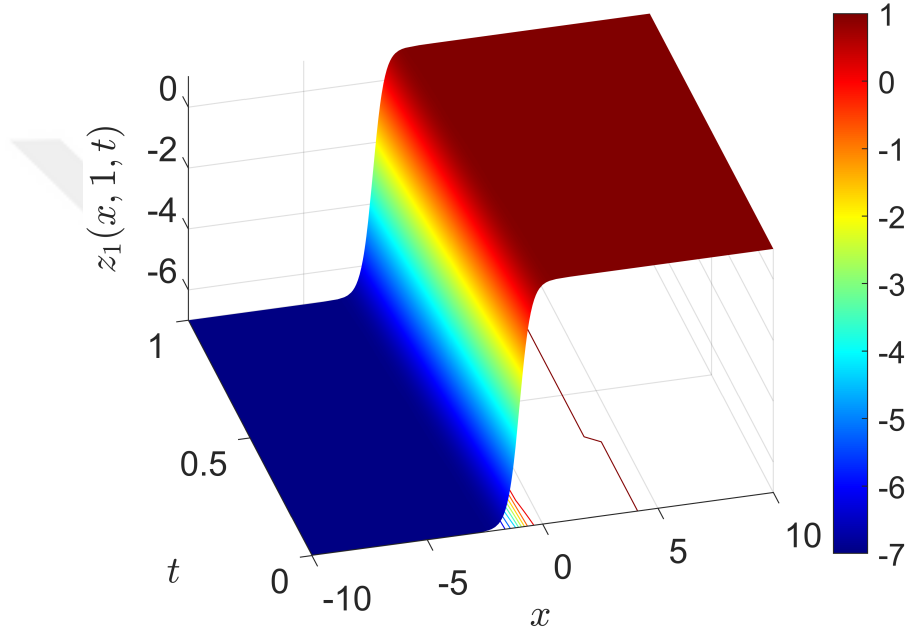
$$a_1 = \frac{a_4 p^2 - a_5 p r + a_6 q^2}{4\delta^4 p^6}, \quad a_3 = -\frac{4a_2 \delta^2 p^4 + 5a_4 p^2 - 5a_5 p r + 5a_6 q^2}{4\delta^2 p^3 q}, \quad A_1 = -4\gamma \delta p. \quad (3.12)$$

Yukarıdaki çözüm kümeleri 1 ve 2, denklem (3.9) ve denklem (3.4) kullanılarak sırasıyla denklem (3.3)'ün aşağıdaki analitik çözümleri elde edilir:

$$z_1(x, y, t) = A_0 - \frac{2\gamma \delta p}{\gamma + \eta e^{\delta(px+qy-rt)}}. \quad (3.13)$$

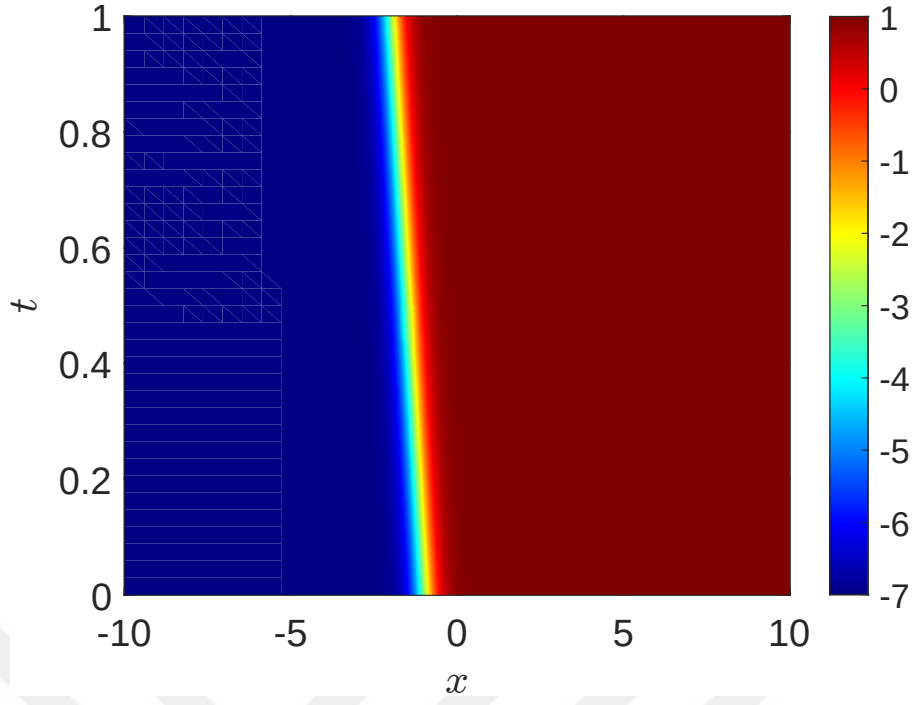
$$z_2(x, y, t) = A_0 - \frac{4\gamma\delta p}{\gamma + \eta e^{\delta(px+qy-rt)}}. \quad (3.14)$$

Bu kısımda birleşik pKP-BKP denkleminde Kudryashov yöntemi uygulanmasıyla elde ettiğimiz kesin soliton çözümlerinin davranışlarını anlamak için grafikleri bilgisayar programları yardımıyla çizdirerek inceleyeceğiz. Bu çözüm kümelerinin sonuçları belirtilmemiş keyfi sabit parametrelerle ilişkili olduğundan çözümleri anlamlandırabilmek amacıyla farklı öznel parametreler seçerek soliton dalga gösterimleri oluşturulmaktadır.



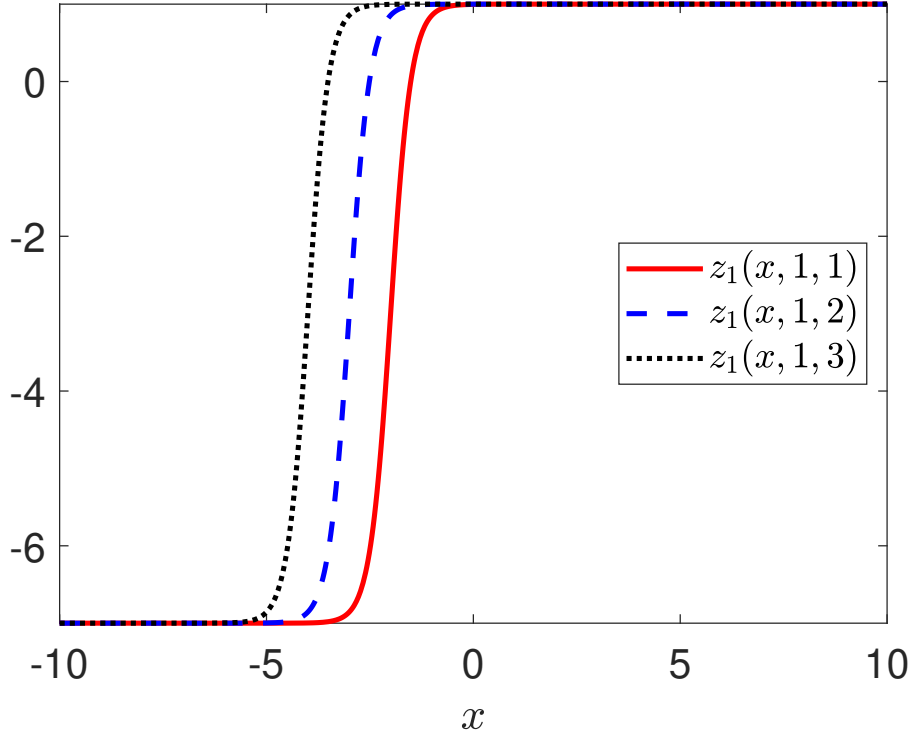
Şekil 3.1 $z_1(x, 1, t)$ nin üç boyutlu grafiği

Şekil 3.1’de $p = 1, q = 1, \gamma = 1, \delta = 4, \eta = 1, A_0 = 1$ parametreleri ile $r = -1$ dalga hızı için ve $y = 1$ seçilerek oluşturulan soliton $z_1(x, 1, t)$ çözümünü temsil eden dalganın 3 boyutlu grafiği elde edilmiştir. Böylece genel bir soliton profili meydana gelir. Ortaya çıkan soliton şekil olarak arctan x grafiğine ve bir yamaç sırtına benzetilerek kıvrımlı (kink) soliton çözümüne sahip olduğu görülür. Bu grafikte yapının yayılımı $0 \leq x \leq 5$ ve $0 \leq t \leq 1$ aralıkları ile özetlenmiştir.



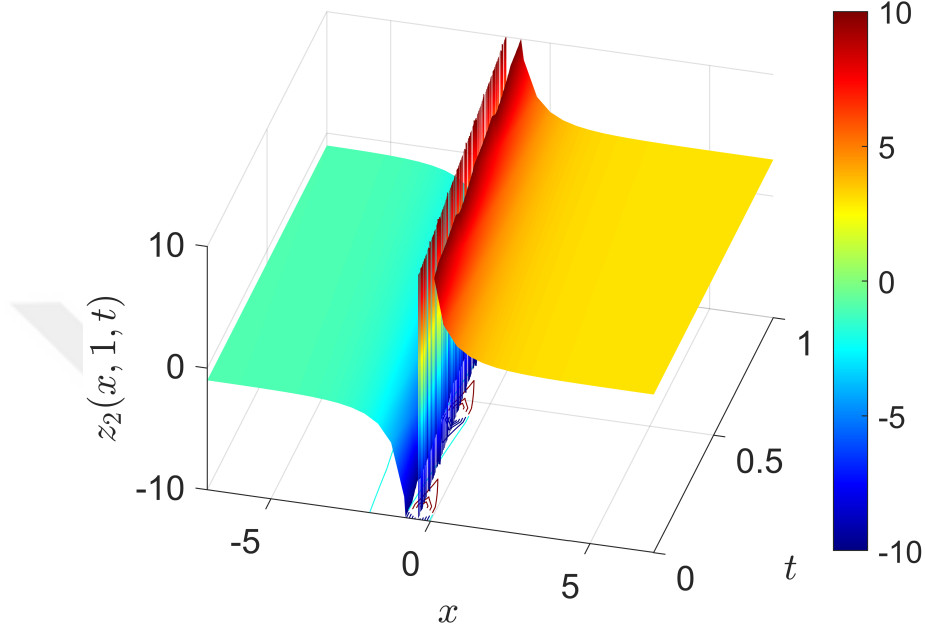
Şekil 3.2 $z_1(x, 1, t)$ nin eş yükselti eğrisi grafiği

Şekil 3.2’de ise $p = 1, q = 1, \gamma = 1, \delta = 4, \eta = 1, A_0 = 1$; dalga hızı $r = -1$ ve $y = 1$ seçilerek 3-boyutlu grafiği verilen $z_1(x, 1, t)$ kıvrımlı solitonun bükülmesini daha iyi açıklamak için üst yüzey görünümü olan eş yükselti grafiği verilmiştir. Bu grafikte solitondaki büyümede ani bir değişim olduğu görülmektedir.



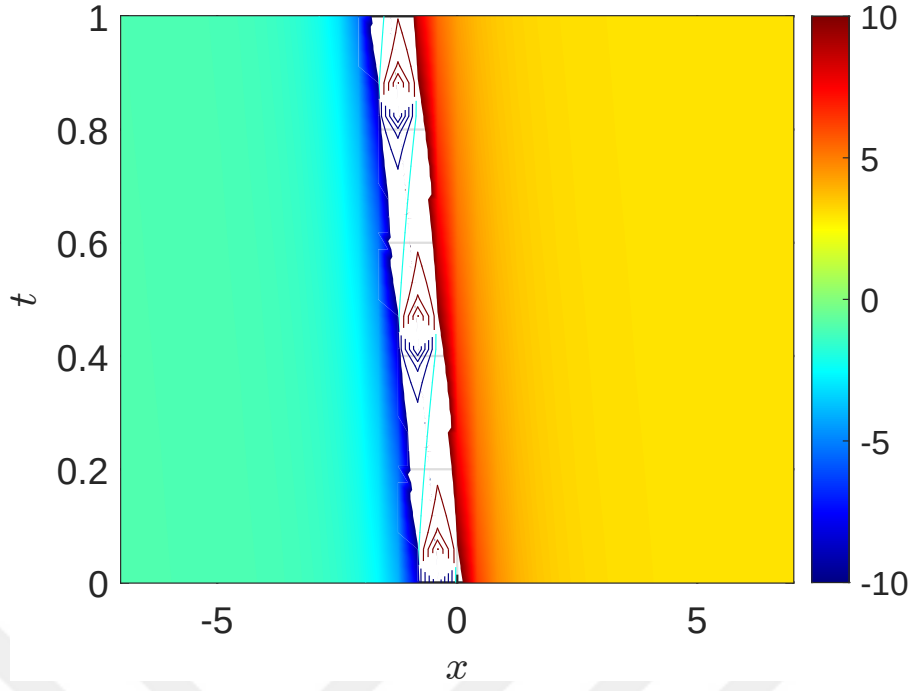
Şekil 3.3 $z_1(x, 1, t_f)$ nin $t_f = 1, 2, 3$ için hareket eden dalga grafiği

Şekil 3.3'te elde edilmiş olan $p = 1, q = 1, r = -1, \gamma = 1, \delta = 4, \eta = 1, A_0 = 1$, ve $y = 1$ parametreleri altındaki $z_1(x, 1, t_f)$ solitonun hangi yöne nasıl ilerlediğini göstermek için farklı t değerleri seçilerek 2-boyutlu hareket grafiği elde edilmiştir. Burada $y = 1$ ve $t = 1$ kırmızı, $t = 2$ mavi, $t = 3$ siyah eğrilerle grafikte gösterildiği üzere soliton x-ekseninde sağa doğru hareket etmektedir.



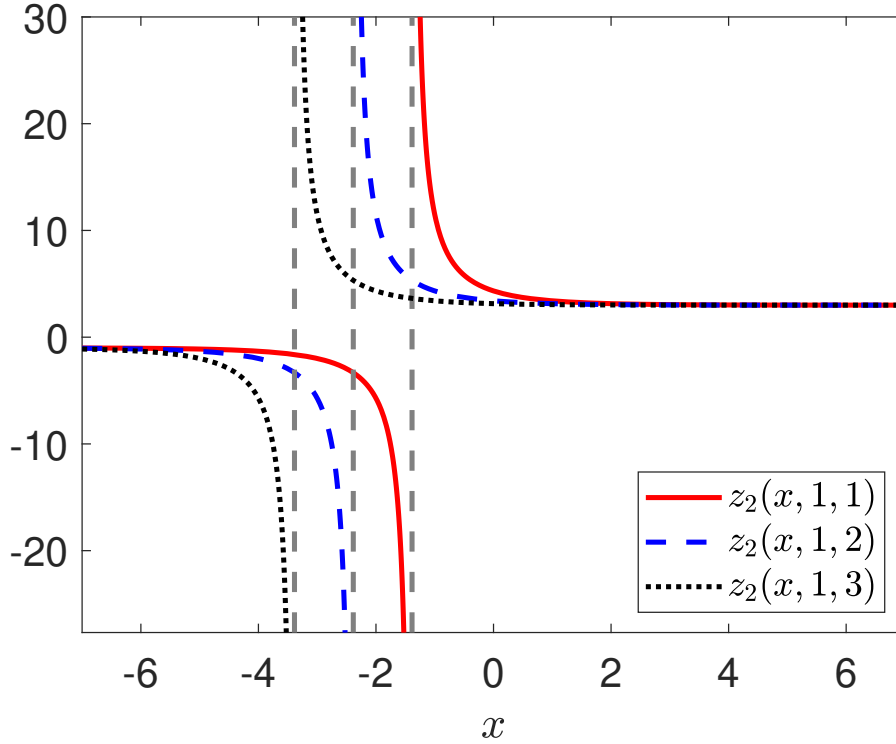
Şekil 3.4 $z_2(x, 1, t)$ nin üç boyutlu grafiği

Şekil 3.4'teki grafikte Kudryashov yönteminde elde edilmiş olan $z_2(x, y, t)$ çözümü için $p = 1, q = 1, r = 1, \delta = 1, \eta = 1, \gamma = -1, A_0 = 1$ ve $y = 1$ seçilerek oluşturulan $z_2(x, 1, t)$ solitonunun 3 boyutlu şekli gösterilmektedir. Elde edilen yürüyen dalga çözümü merkezde sonsuz genliğe sahip olan tekil soliton tipindeki bir görünüme sahiptir. Şekildeki tekil solitona bakıldığında sol kısmı koyu ve sağ kısmı parlak soliton özelliğindedir.



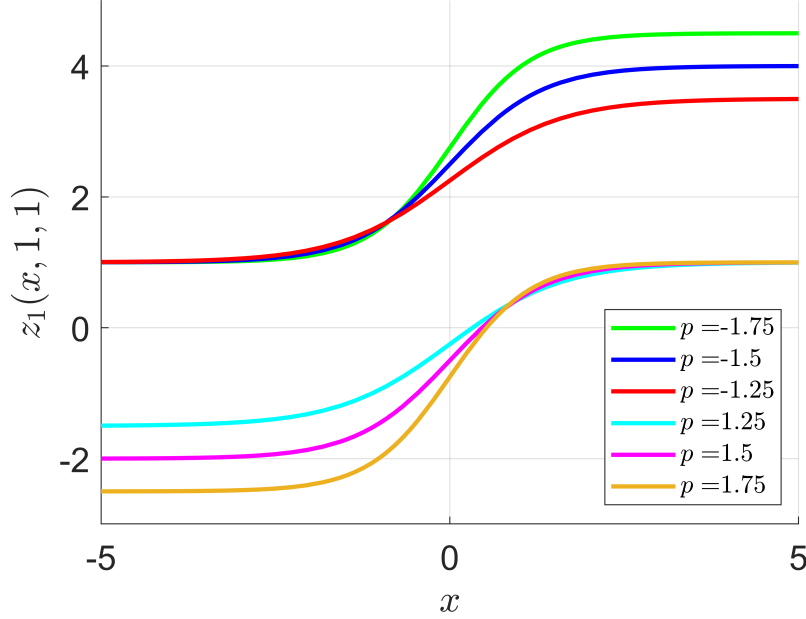
Şekil 3.5 $z_2(x, 1, t)$ nin eş yükselti eğrisi grafiği

Şekil 3.5 görselinde $p = 1, q = 1, r = 1, \delta = 1, \eta = 1, \gamma = -1, A_0 = 1$, ve $y = 1$ olarak seçilmiş parametreler ile elde edilen ve 3 boyutlu grafiği verilen tekil soliton tipindeki $z_2(x, 1, t)$ solitonun yüzeyde oluşan hareket görünümü verilmektedir. Merkezdeki açıklık, yükseklik ve genlik değişimi vurgulanmıştır.



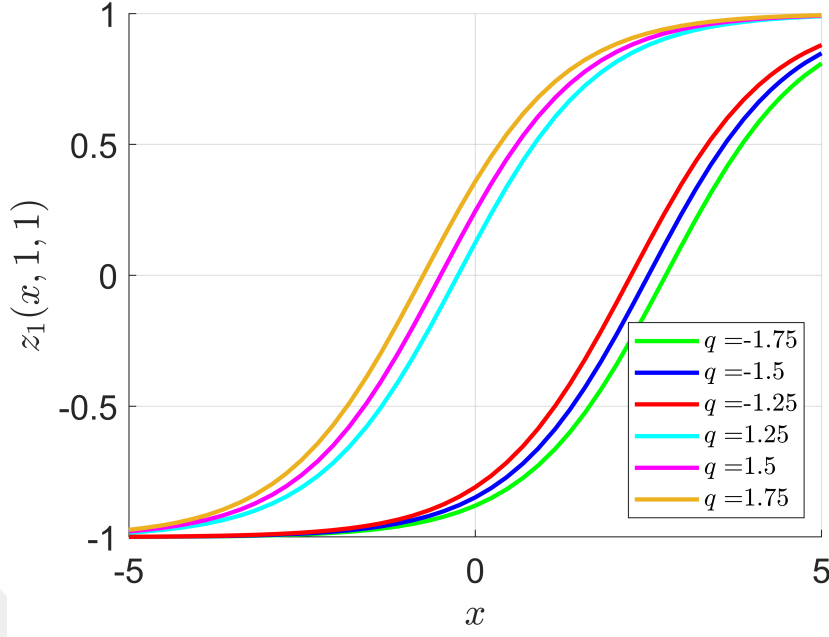
Şekil 3.6 $z_2(x, 1, t_f)$ nin $t_f = 1, 2, 3$ için hareket eden dalga grafiği

Şekil 3.6 grafiğinde $p = 1, q = 1, r = 1, \delta = 1, \eta = 1, \gamma = -1, A_0 = 1$, ve $y = 1$ olmak üzere $z_2(x, 1, t)$ tekil solitonun farklı zamanlarda oluşan durumları açıklanmıştır. Burada $t = 1$ anındaki durumu kırmızı, $t = 2$ anındaki durumu mavi, $t = 3$ anındaki durumu siyah eğrilerle grafikte gösterilmiştir. Bunlara göre elde edilen tekil soliton sol tarafa doğru hareket etmektedir.



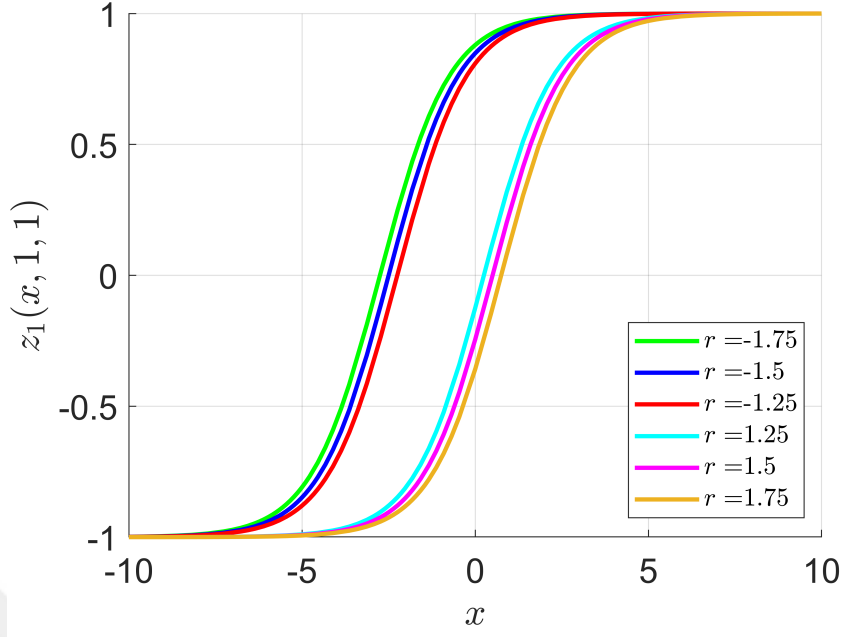
Şekil 3.7 $z_1(x, 1, 1)$ nin p parametresine göre değişim grafiği

Şekil 3.7'deki grafikte Kudryashov yöntemi ile elde edilen $z_1(x, y, t)$ çözümü için $q = 1, r = 1, \delta = 1, \eta = 1, \gamma = -1, A_0 = 1$ ve $y = 1$ alınarak $t = 1$ anındaki $z_1(x, 1, 1)$ 'in farklı p değerleri için oluşan solitonlarının hareket durumları verilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi pozitif ve negatif p değerleri için oluşan yürüyen dalga çözümleri kırımlı soliton tipindedir. Oluşan kırımlı solitonları için pozitif p değerleri artarken ya da negatif p değerleri azalırken genliklerinin arttığı görülmektedir.



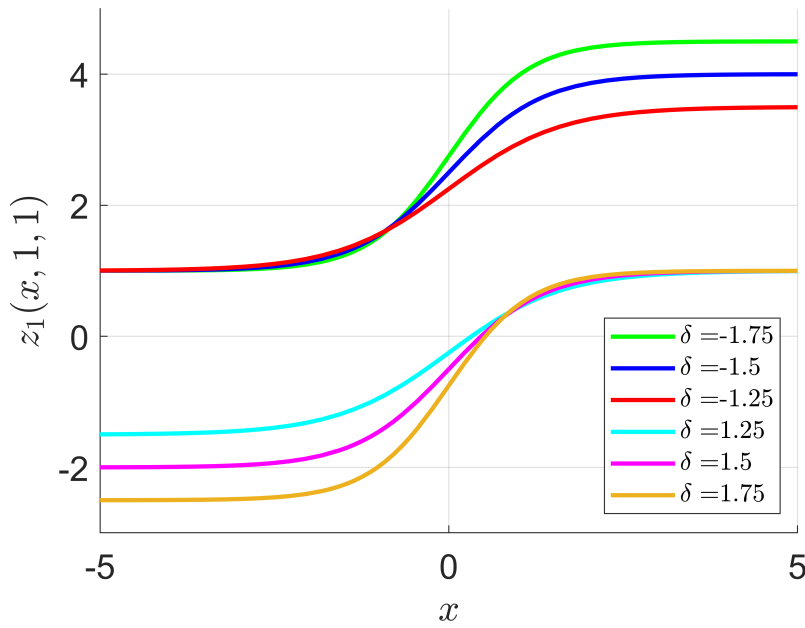
Şekil 3.8 $z_1(x, 1, 1)$ nin q parametresine göre değişim grafiği

Şekil 3.8'deki grafikte $p = 1, r = 1, \delta = 1, \eta = 1, \gamma = -1, A_0 = 1, y = 1$ ve $t = 1$ seçilerek oluşan $z_1(x, 1, 1)$ ilerleyen dalga çözümünün $q = -1.75, -1.50, -1.25, 1.25, 1.50, 1.75$ değişkenleri için hareket durumları gösterilmiştir. Yukarıda belirtilen her q değeri için oluşan çözümlere bakıldığında tek tip olup kıvrımlı soliton biçimindedir. Solitonların genliklerinde farklılıklar gözlenmezken q değerleri büyüdükçe hareketleri x-eksenine göre sol tarafta oluşmaktadır.



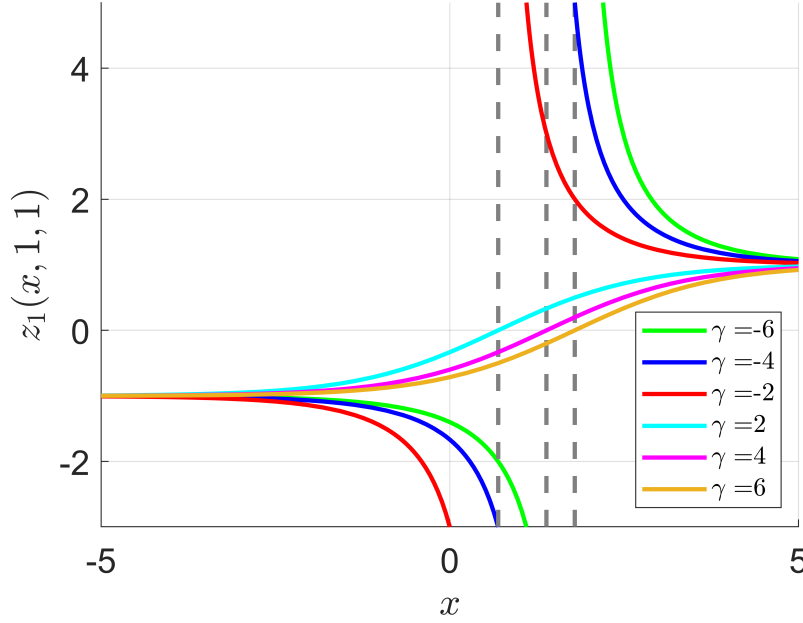
Şekil 3.9 $z_1(x, 1, 1)$ nin r parametresine göre değişim grafiği

Şekil 3.9'daki grafikte $z_1(x, 1, 1)$ çözümünün $r = -1.75, -1.50, -1.25, 1.25, 1.50, 1.75$ dalga hızları altında oluşan görünüşleri verilmiştir. Burada $z_1(x, 1, 1)$ için parametreler $p = 1, q = 1, \delta = 1, \eta = 1, \gamma = -1, A_0 = 1, y = 1$ ve $t = 1$ olarak alınmıştır. Oluşan her bir soliton kıvrımlı soliton tipinde olup genlikleri eşittir. Aynı q değerlerinde oluşan solitonlardan farklı olarak r değerlerinde büyümede oluşan solitonlar x -eksenine göre sağ tarafta oluşmaktadır.



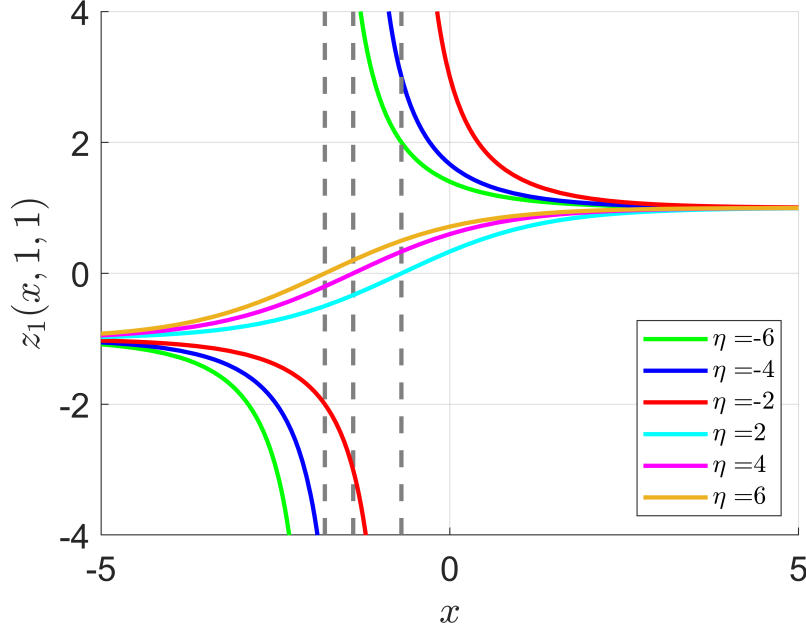
Şekil 3.10 $z_1(x, 1, 1)$ nin δ parametresine göre değişim grafiği

Şekil 3.10'daki grafikte $p = 1, q = 1, r = 1, \eta = 1, \gamma = -1, A_0 = 1, y = 1$ ve $t = 1$ iken $z_1(x, 1, 1)$ soliton çözümünün δ değerine göre değişimi gösterilmektedir. Burada $\delta = -1.75, -1.50, -1.25, 1.25, 1.50, 1.75$ değerleri için oluşan yürüyen dalga çözümlerinin kıvrımlı soliton şekline sahip olduğu gösterilmiştir. Bu şekilde δ 'nın negatif değerlerinden 0'a yaklaştıkça genliği azalırken pozitif değerlerden 0'dan uzaklaştıkça genliği büyüdüğü çıkarılmaktadır.



Şekil 3.11 $z_1(x, 1, 1)$ nin γ parametresine göre değişim grafiği

Şekil 3.11'deki grafikte $p = 1, q = 1, r = 1, \delta = 1, \eta = 1, A_0 = 1, y = 1$ ve $t = 1$ için $z_1(x, 1, 1)$ çözümünde γ değişkeninin etkisi gösterilmiştir. $\gamma = 2, 4, 6$ pozitif değerleri seçilerek oluşturulan yürüyen dalga çözümü kıvrımlı soliton biçimindedir fakat $\gamma = -2, -4, -6$ negatif değerleri seçilerek oluşturulan solitonlar ise tekil soliton biçimindedir. Negatif γ değerleri büyüdükçe meydana gelen kıvrımlı solitonlar daha sol tarafta oluşurken pozitif γ değerleri büyüdükçe meydana gelen kıvrımlı solitonlar daha sağ tarafta oluşmaktadır.



Şekil 3.12 $z_1(x, 1, 1)$ nin η parametresine göre değişim grafiği

Şekil 3.12'deki grafikte ise $p = 1, q = 1, r = 1, \delta = 1, \gamma = -1, A_0 = 1, y = 1$ ve $t = 1$ iken $z_1(x, 1, 1)$ çözümünde γ değişkenindekine benzer şekilde $\eta = 2, 4, 6$ değerleri için kıvrımlı solitonları oluşurken $\eta = -2, -4, -6$ değerleri için tekil solitonları oluşur. Fakat γ değişkeninden farklı olarak η için pozitif değerlerindeki büyüme sonucu kıvrımlı solitonlar daha solda, negatif değerlerindeki büyüme sonucu tekil solitonlar daha sağda oluşmaktadır.

3.1.3 Yeni Kudryashov Yönteminin Birleşik pKP-BKP Denklemine Uygulanması

Denklem (3.5)'teki DOADD'nin çözümlerinin aşağıdaki formda olduğunu kabul edelim [79, 80]:

$$\mathcal{Z}(\xi) = \sum_{i=0}^{\mu} A_i \varphi^i(\xi), \quad A_{\mu} \neq 0. \quad (3.15)$$

Denklem (3.5)'teki $\mathcal{Z}^{(6)}$ ve $\mathcal{Z}'' \mathcal{Z}^{(4)}$ terimleri arasında homojen dengeleme kuralını uygularsak dengeleme sabitini $\mu = 1$ olarak elde ederiz. $\mu = 1$ olduğu için denklem (3.15) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathcal{Z}(\xi) = A_0 + A_1 \varphi(\xi), \quad A_1 \neq 0. \quad (3.16)$$

Burada $\varphi(\xi)$, denklem (3.17) adi diferansiyel denkleminin çözümünü göstermektedir:

$$(\varphi'(\xi))^2 = \delta^2 \varphi(\xi)^2 (1 - \eta \varphi(\xi)^2), \quad (3.17)$$

burada δ, γ sıfırdan farklı reel sayılardır. Denklem (3.17) yeni Kudryashov yönteminde önerildiği gibi aşağıdaki formda çözüme sahiptir:

$$\varphi(\xi) = \frac{4\psi}{\eta \exp(-\delta\xi) + 4\psi^2 \exp(\delta\xi)}, \quad (3.18)$$

burada η sıfır olmayan reel sabittir. Denklem (3.18) ve bu denklemin gerekli türevlerini denklem (3.5)'te yerine koyalım. Sonra bu denklemde $\varphi(\xi)$ 'nin aynı kuvvetine sahip tüm terimleri ortak çarpan parantezine alıp ardından bu terimlerin katsayılarını sıfıra eşitlersek aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned} \varphi^1(\xi) : & A_1 \delta^2 (a_1 \delta^2 p^5 (30A_1 C_2 + \delta^2 p) + a_2 p^3 (6A_1 C_2 + \delta^2 p) + C_3) = 0, \\ \varphi^3(\xi) : & A_1 (-\delta^2) (a_1 \delta^2 p^4 (420A_1 \eta p C_2 - 45A_1^2 + 182\delta^2 \eta p^2) + 2\eta C_4) = 0, \\ \varphi^5(\xi) : & A_1 \delta^4 \eta p^3 (5a_1 p (36A_1 \eta p C_2 - 9A_1^2 + 56\delta^2 \eta p^2) + 8\eta (a_2 p + a_3 q)) = 0, \\ \varphi^7(\xi) : & A_1 \delta^4 \eta^2 p^4 (A_1^2 - 8\delta^2 \eta p^2) = 0. \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} C_2 &= \sqrt{\delta^2 \varphi(\xi)^2 (1 - \eta \varphi(\xi)^2)}, \\ C_3 &= 6a_3 A_1 p^2 q C_2 + a_3 \delta^2 p^3 q + a_4 p^2 - a_5 p r + a_6 q^2, \\ C_4 &= (2a_2 p^3 (3A_1 C_2 + 5\delta^2 p) + 2a_3 p^2 q (3A_1 C_2 + 5\delta^2 p) + a_4 p^2 - a_5 p r + a_6 q^2), \end{aligned} \quad (3.19)$$

dir. Yukarıdaki cebirsel denklem sistemi sembolik bir hesaplama yazılımı kullanılarak çözümlürse aşağıdaki çözüm kümeleri elde edilir:

Çözüm Kümesi 1.

$$a_1 = 0, a_2 = -\frac{a_3 q}{p}, a_4 = \frac{a_5 p r - a_6 q^2}{p^2}. \quad (3.20)$$

Çözüm Kümesi 2[±].

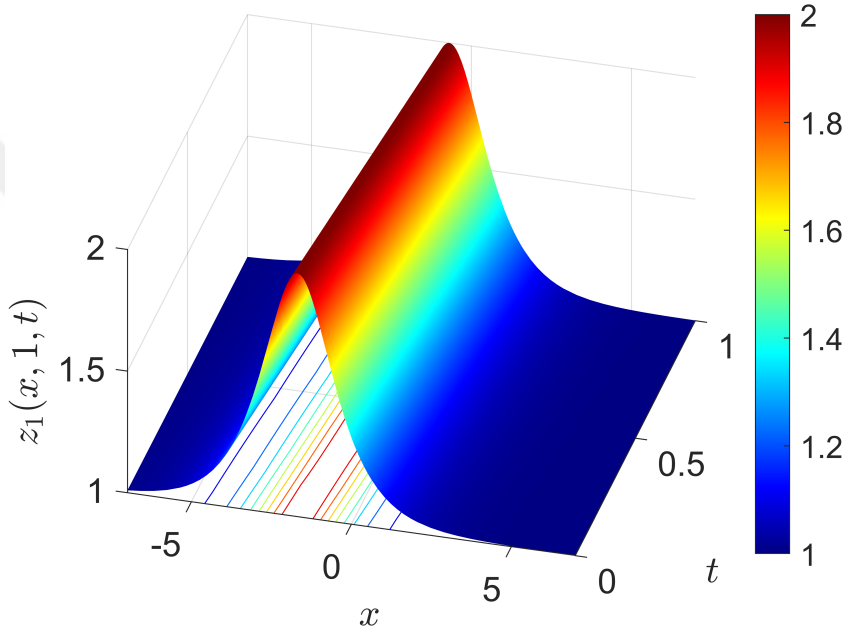
$$a_1 = 0, a_2 = -\frac{a_3 q}{p}, a_4 = \frac{a_5 p r - a_6 q^2}{p^2}, A_1 = \mp 2\sqrt{2}\delta\sqrt{\eta}p. \quad (3.21)$$

Yukarıdaki çözüm kümeleri 1 ve 2, denklem (3.18) ve denklem (3.4) kullanılarak sırasıyla denklem (3.3)'ün aşağıdaki analitik çözümleri elde edilir:

$$z_1(x, y, t) = A_0 + \frac{4A_1\psi e^{\delta(px+qy-rt)}}{\eta + 4\psi^2 e^{2\delta(px+qy-rt)}} \quad (3.22)$$

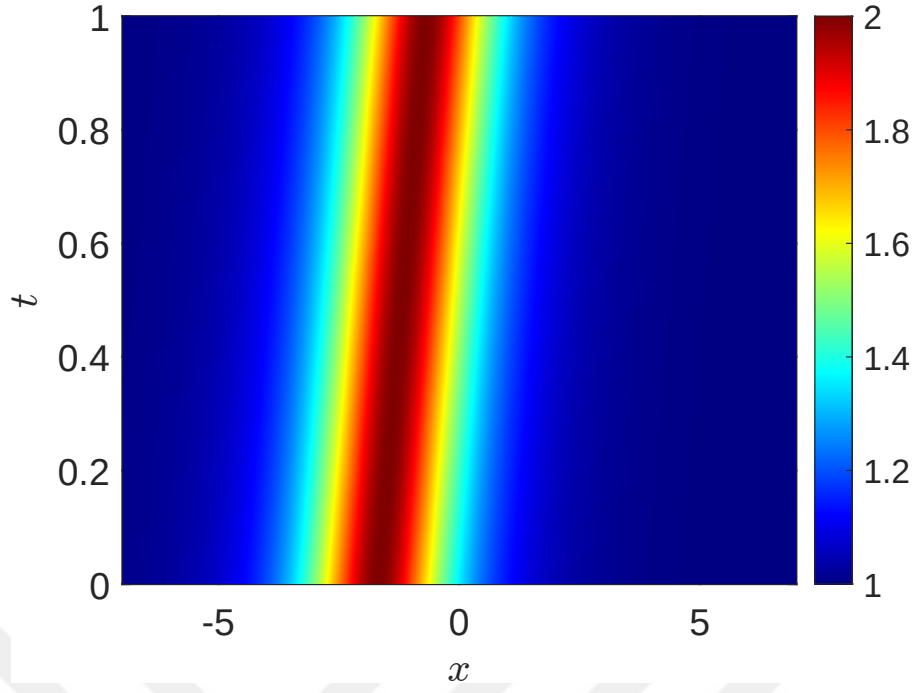
$$z_2^\mp(x, y, t) = A_0 \mp \frac{8\sqrt{2}\delta\sqrt{\eta}p\psi e^{\delta(px+qy-rt)}}{\eta + 4\psi^2 e^{2\delta(px+qy-rt)}}. \quad (3.23)$$

Buna göre birleşik pKP-BKP denkleminde yeni Kudryashov yöntemi uygulanmasıyla yukarıda belirtildiği gibi $z_1(x, y, t)$ ve $z_2^\mp(x, y, t)$ şeklinde çözümler elde ettik. Bu çözüm kümelerinin grafiklerini bazı özel parametreler tercih ederek çizdirdiğimizde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.



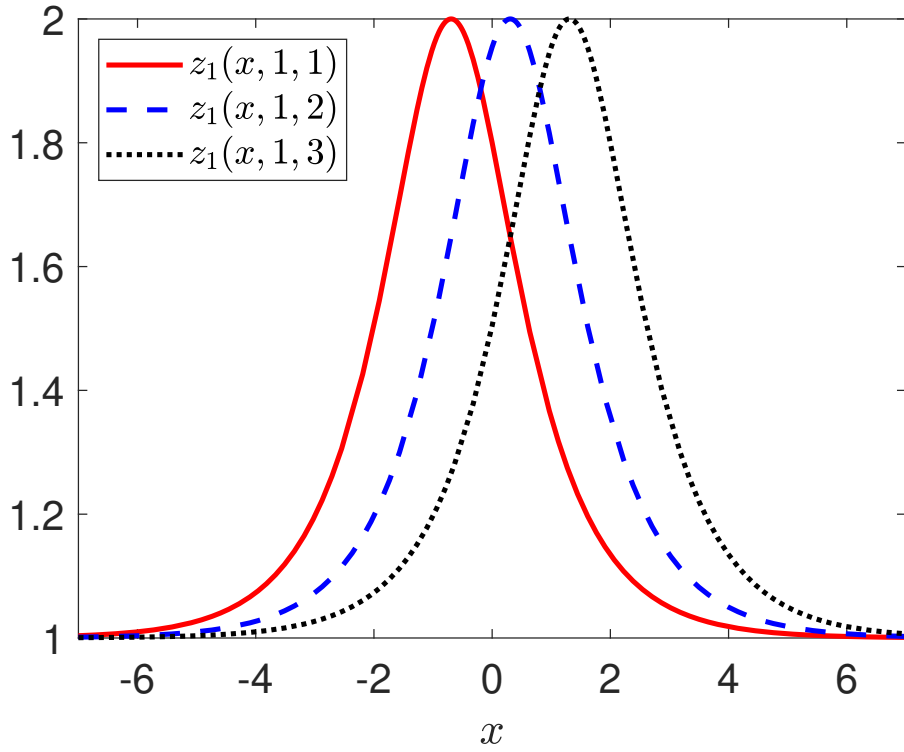
Şekil 3.13 $z_1(x, 1, t)$ nin üç boyutlu grafiği

Şekil 3.13'teki grafikte $z_1(x, y, t)$ yürüyen dalga çözümünün $y = 1$ iken ve $r = 1, q = 1, p = 1, \delta = 1, \eta = 1, \psi = 1, A_0 = 1$ parametreleri seçilerek oluşturulan 3-boyutlu görüntüsü verilmiştir. Bu görseldeki soliton tipine bakıldığında bir tepe yükseltisi ve çan şeklinde olduğu yani parlak soliton tipinde olduğu görülmektedir.



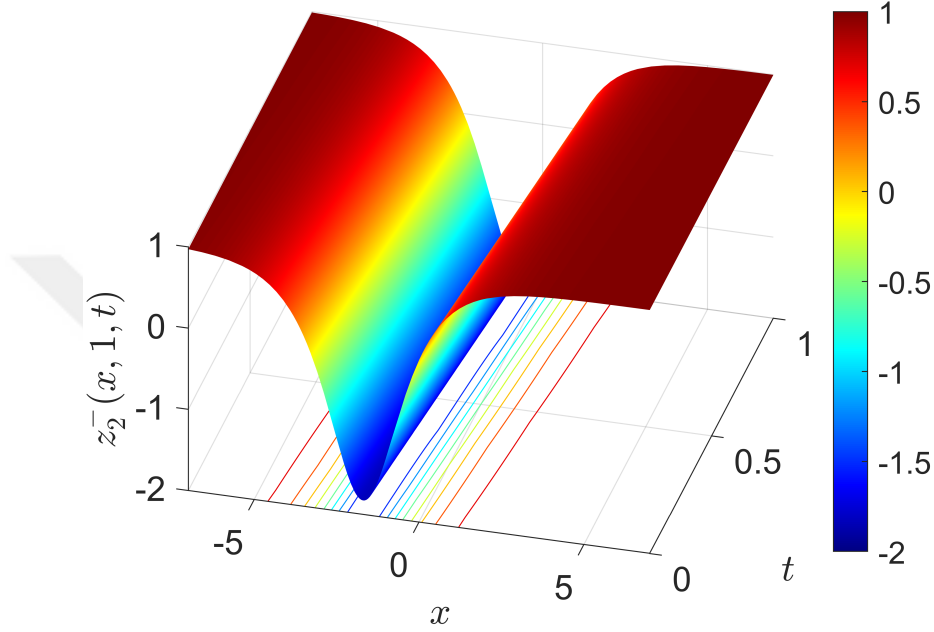
Şekil 3.14 $z_1(x, 1, t)$ nin eş yükselti eğrisi grafiği

Şekil 3.14'teki grafikte yukarıda ortaya çıkan $r = 1, q = 1, p = 1, \delta = 1, \eta = 1, \psi = 1, A_0 = 1$, ve $y = 1$ değerleri için $z_1(x, 1, t)$ soliton çözümünün eş yükselti eğri grafiği verilmektedir.



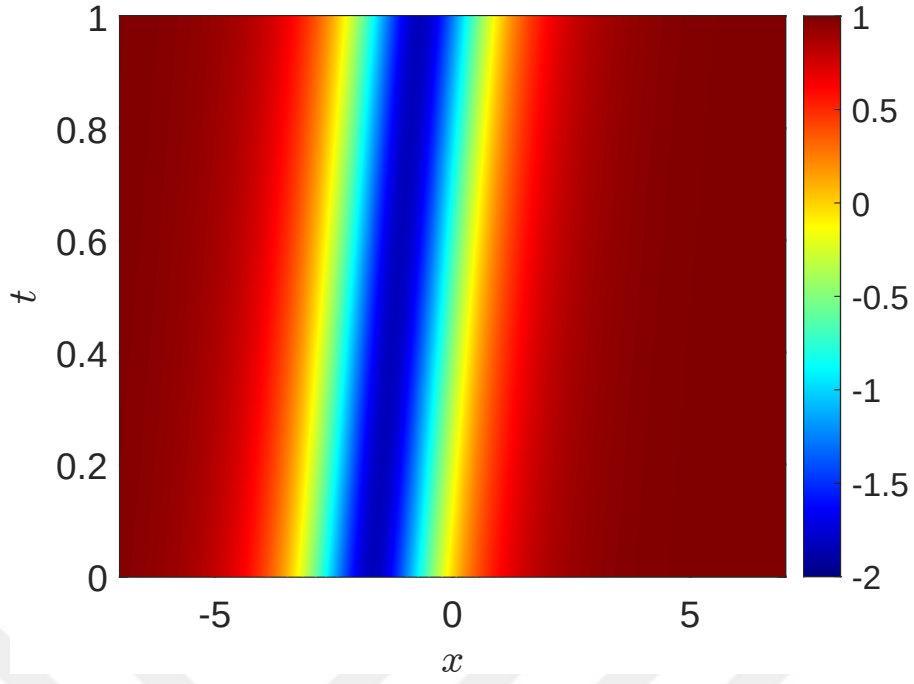
Şekil 3.15 $z_1(x, 1, t_f)$ nin $t_f = 1, 2, 3$ için hareket eden dalga grafiği

Şekil 3.15'teki grafikte $z_1(x, 1, t)$ çözümünde $r = 1, q = 1, p = 1, \delta = 1, \eta = 1, \psi = 1, A_0 = 1$, ve $y = 1$ değerleri ile ortaya çıkan parlak solitonun hareket yönünü belirten 2-boyutlu dalga grafiği verilmiştir. Parlak solitonun $t = 1$ anındaki konumu kırmızı, $t = 2$ anındaki konumu mavi ve $t = 3$ anındaki konumu siyah renk ile gösterilmektedir. Böylece parlak solitonun sağ tarafa doğru ilerlediği gözlenmektedir.



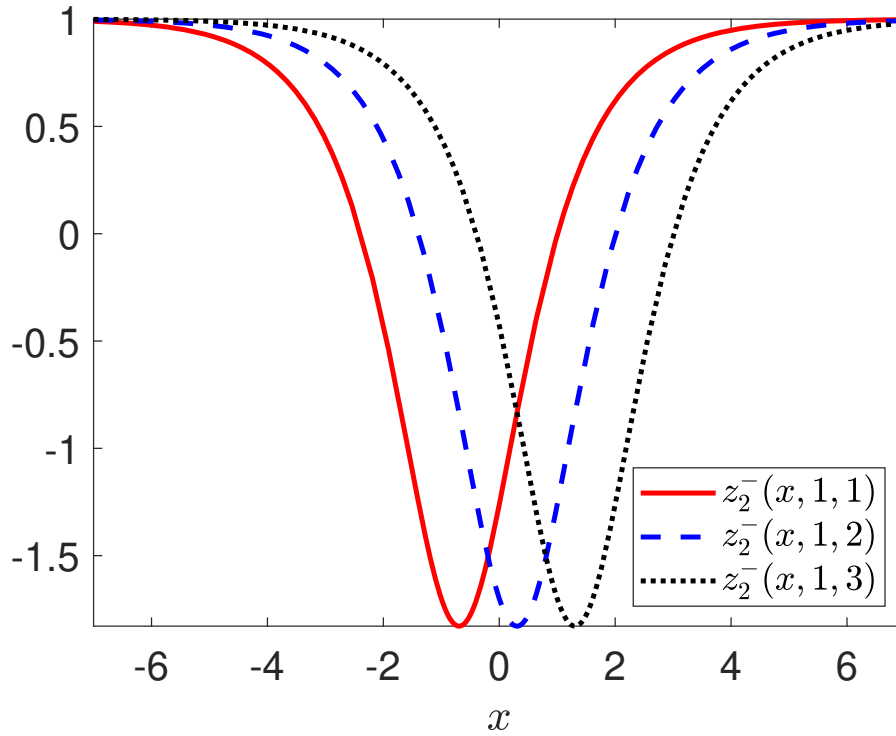
Şekil 3.16 $z_2^-(x, 1, t)$ nin üç boyutlu grafiği

Şekil 3.16'daki grafikte $p = 1, q = 1, \delta = 1, \eta = 1, \psi = 1, A_0 = 1$ parametreleri ile $y = 1$ ve dalga hızı $r = 1$ alındığında yani $z_2^-(x, 1, t)$ özel hali için oluşan soliton çözümünün 3-boyutlu görünümü elde edilmiştir. Elde edilen grafik incelendiğinde $z_2^-(x, 1, t)$ çözümü dar genlikte ters çan şekline benzer ve çukurluk oluşturup koyu soliton çözümüne sahip olduğu ortaya çıkar. Grafikte $0 \leq x \leq 5$ ve $0 \leq t \leq 1$ aralıklarındaki temsili alınarak yayılımı belirtilmiştir.



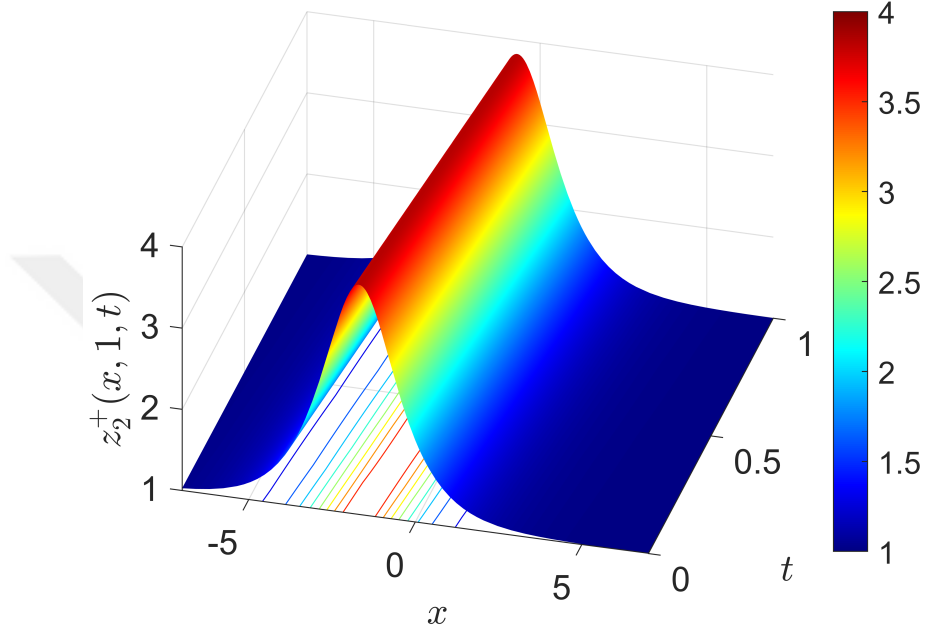
Şekil 3.17 $z_2^-(x, 1, t)$ nin eş yükselti eğrisi grafiği

Şekil 3.17’de ise $p = 1, q = 1, \delta = 1, \eta = 1, \psi = 1, A_0 = 1, r = 1$ dalga hızı ve $y = 1$ alınarak oluşturulan $z_2^-(x, 1, t)$ çözümü için yukarıda da 3-boyutlu grafiği belirtilen koyu solitonun genliğine bağlı meydana gelen yükselti değişiminin üst yüzeydeki görünümünü gösteren eş yükselti eğri grafiği verilmiştir. Bu grafikte oluşan yarığın açıklığı ile derinleşme süreci gözlenmektedir.



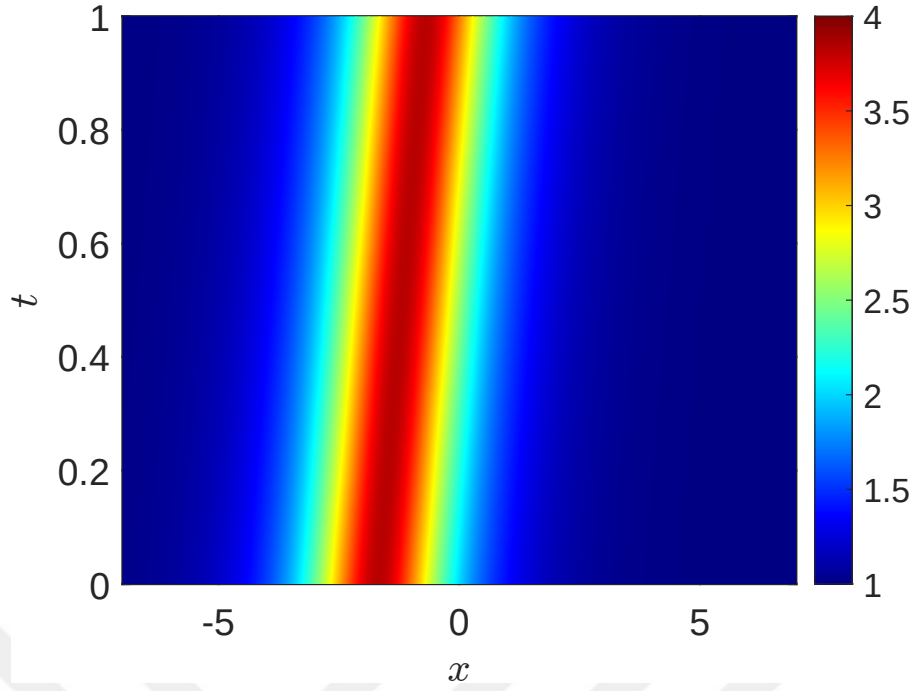
Şekil 3.18 $z_2^-(x, 1, t_f)$ nin $t_f = 1, 2, 3$ için hareket eden dalga grafiği

Şekil 3.18'deki grafikte aynı $r = 1, q = 1, p = 1, \delta = 1, \eta = 1, \psi = 1, A_0 = 1$, ve $y = 1$ parametreleri altında koyu solitonun değişken zamanlardaki hareketinin ne tarafa doğru ilerlediğini göstermek için 2-boyutlu dalga grafiği verilmiştir. Burada $t = 1$ anındaki dalga konumu kırmızı eğriyle, $t = 2$ anındaki dalga konumu mavi eğriyle ve $t = 3$ anındaki dalga konumu siyah eğriyle verilmiştir. Bunlara göre grafikte koyu solitonun sağ tarafa doğru ilerlediği görülmektedir.



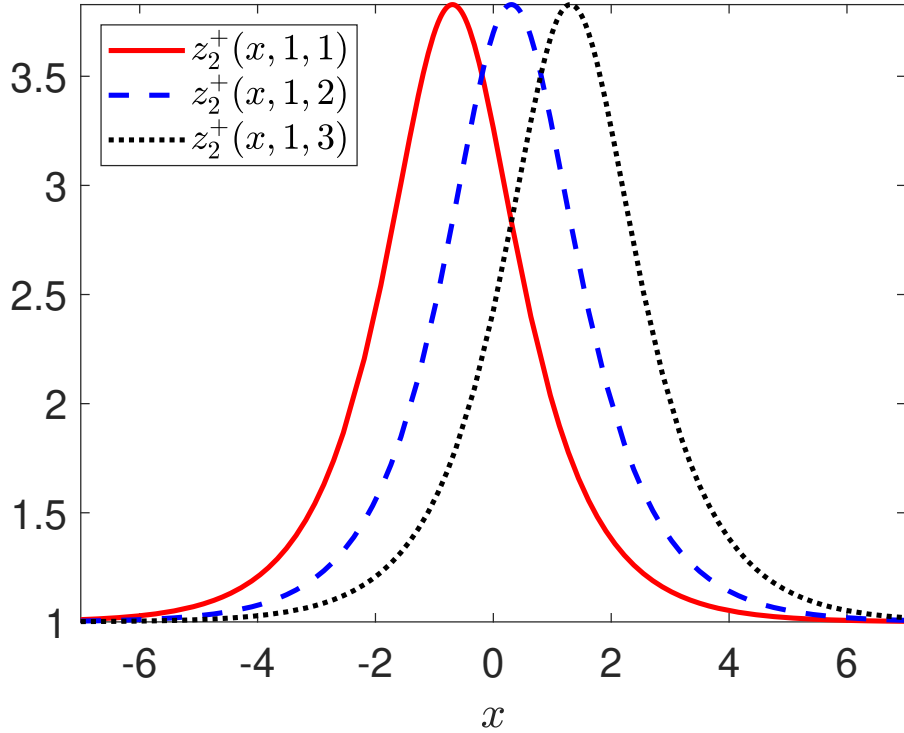
Şekil 3.19 $z_2^+(x, 1, t)$ nin üç boyutlu grafiği

Şekil 3.19'da $z_2^+(x, y, t)$ çözümü için $y = 1$ özel halinde $r = 1, q = 1, p = 1, \delta = 1, \eta = 1, \psi = 1, A_0 = 1$ olarak seçildiğinde meydana gelen $z_2^+(x, 1, t)$ solitonun 3-boyutlu grafiği verilmiştir. Elde edilen bu soliton parlak solitonu temsil etmektedir. $z_2^+(x, 1, t)$ parlak solitonun genliği $z_1(x, 1, t)$ solitonun genliğinden daha yüksektir.



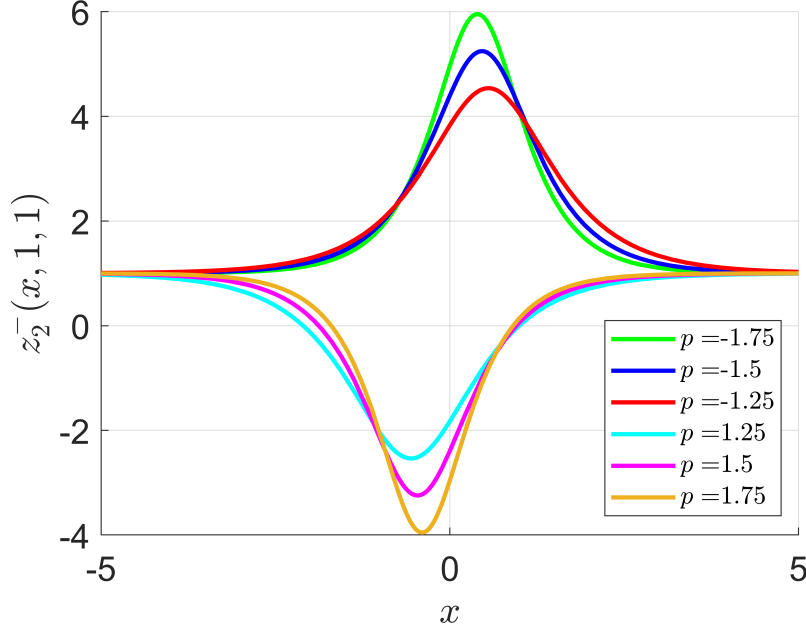
Şekil 3.20 $z_2^+(x, 1, t)$ nin eş yükselti eğrisi grafiği

Şekil 3.20'deki grafikte de $r = 1, q = 1, p = 1, \delta = 1, \eta = 1, \psi = 1, A_0 = 1$, ve $y = 1$ seçilerek soliton oluşturulmuş olup $z_2^+(x, 1, t)$ çözümü için elde edilen parlak solitonun eş yükselti grafiği verilerek genlik ve dalga boyu nicelikleri açıklanmaktadır.



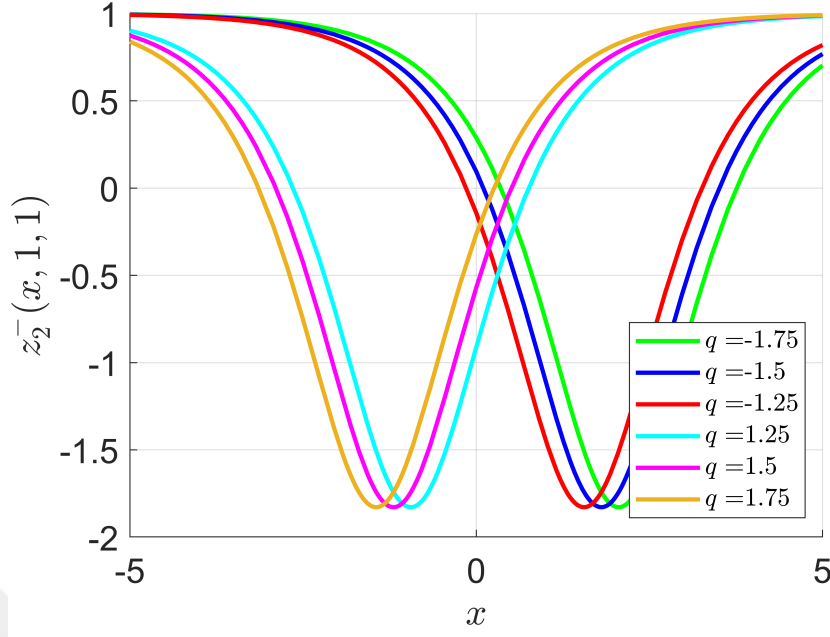
Şekil 3.21 $z_2^+(x, 1, t_f)$ nin $t_f = 1, 2, 3$ için hareket eden dalga grafiği

Şekil 3.21'deki görselde $r = 1, q = 1, p = 1, \delta = 1, \eta = 1, \psi = 1, A_0 = 1$, ve $y = 1$ tercih edilerek oluşturulmuş $z_2^+(x, 1, t)$ parlak solitonun zaman içindeki hareketi gösterilmektedir. $t = 1$ anındaki dalga konumu kırmızı eğriyle, $t = 2$ anındaki dalga konumu mavi eğriyle ve $t = 3$ anındaki dalga konumu siyah eğriyle verilerek bu parlak solitonun sağa doğru hareket ettiği gözlenmektedir.



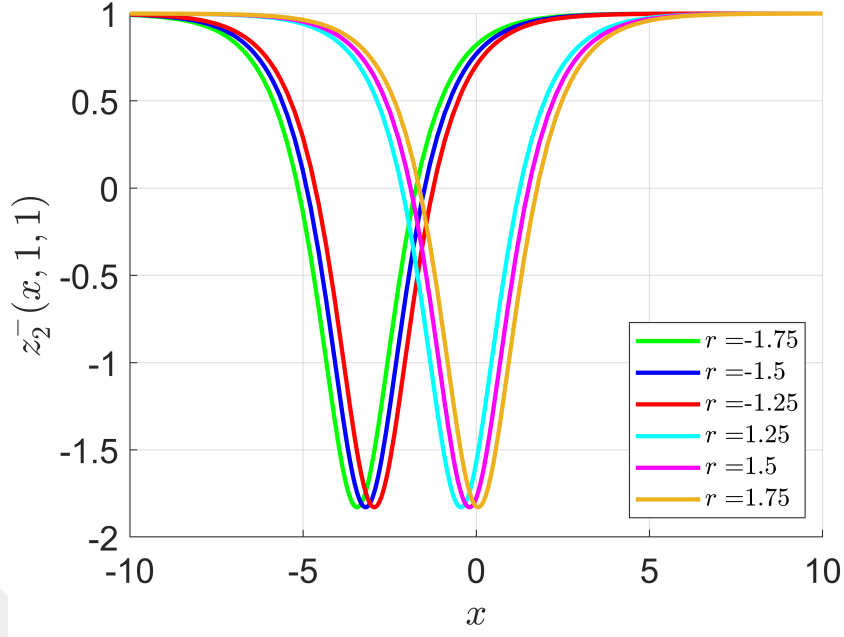
Şekil 3.22 $z_2^-(x, 1, 1)$ nin p parametresine göre değişim grafiği

Şekil 3.22'deki grafikte $z_2^-(x, y, t)$ çözümünün $y = 1$ için $t = 1$ anında oluşan $z_2^-(x, 1, 1)$ solitonun $q = 1, r = 1, \delta = 1, \eta = 1, \psi = 1, A_0 = 1$ değerlerinde p parametresine bağlı değişimi gösterilmektedir. p niceliği pozitif değerli iken oluşan soliton çözümleri koyu soliton biçiminde olup p değerleri büyüdükçe genliği artmaktadır. Diğer yandan p niceliği negatif değerli iken oluşan soliton çözümleri parlak soliton biçiminde olup değerleri azaldıkça genliği artmaktadır. Böylece p ifadesinin mutlak değeri ile solitonun genliği doğru orantılıdır.



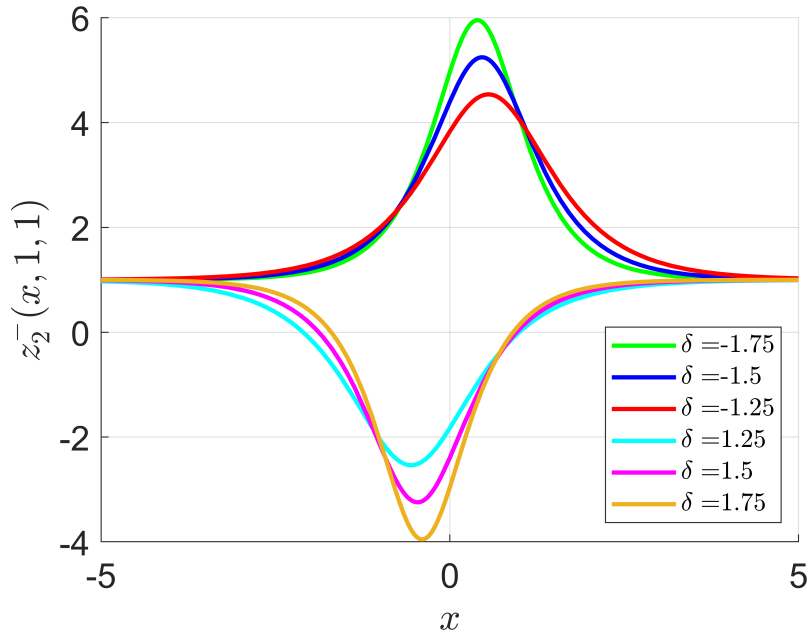
Şekil 3.23 $z_2^-(x, 1, 1)$ nin q parametresine göre değişim grafiği

Şekil 3.23'teki grafikte $r = 1, p = 1, \delta = 1, \eta = 1, \psi = 1, A_0 = 1, y = 1$ ve $t = 1$ değerleri için $z_2^-(x, 1, 1)$ solitonun q niceliğine bağlı değişimi belirtilerek $q = -1.75, -1.50, -1.25, 1.25, 1.50, 1.75$ değerlerinde oluşan soliton çözümleri gösterilmiştir. q ifadesindeki değişimler sonucunda soliton tipinde değişme olmayıp daima koyu soliton biçimindedir. Şekildeki q ifadesinin değerleri büyüdükçe solitonların genliğinde değişme olmayıp x-eksenine göre daha sol tarafta meydana gelmektedir.



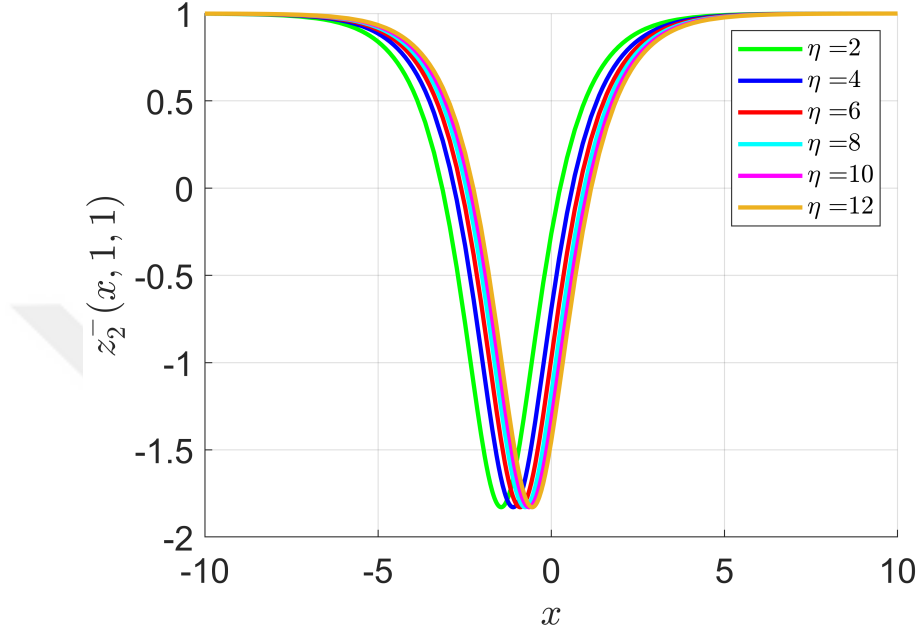
Şekil 3.24 $z_2^-(x, 1, 1)$ nin r parametresine göre değişim grafiği

Şekil 3.24'teki grafikte $p = 1, q = 1, \delta = 1, \eta = 1, \psi = 1, A_0 = 1, y = 1$ ve $t = 1$ değerleri alınarak oluşturulan $z_2^-(x, 1, 1)$ soliton çözümünün r dalga hızına göre değişimi verilmiştir. Burada $r = -1.75, -1.50, -1.25, 1.25, 1.50, 1.75$ değerleri için oluşan çözümlerin koyu soliton tipinde olduğu gözlemlenirken genliklerinde değişme meydana gelmemektedir. Fakat r değerleri büyüdükçe koyu solitonlar x -eksenine göre daha sağ tarafta oluşmaktadır.



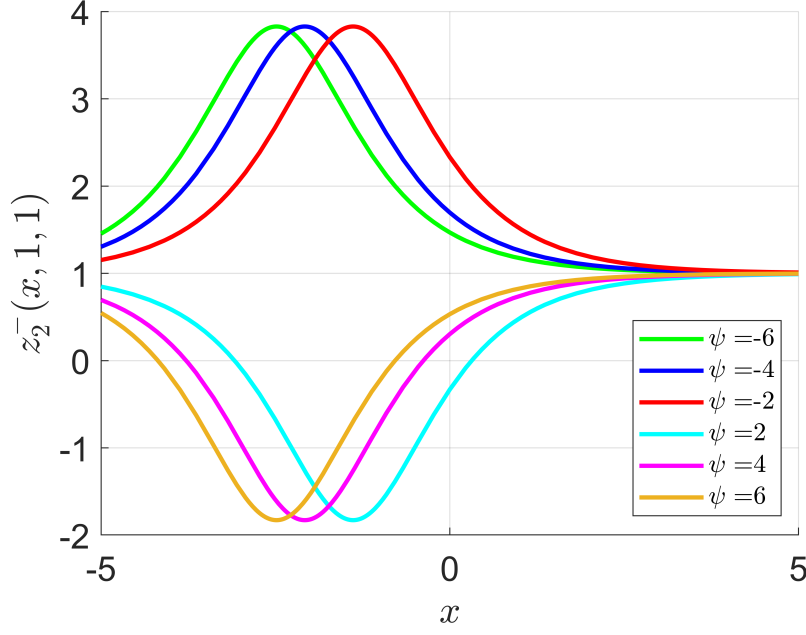
Şekil 3.25 $z_2^-(x, 1, 1)$ nin δ parametresine göre değişim grafiği

Şekil 3.25'teki grafikte $r = 1, q = 1, p = 1, \delta = 1, \eta = 1, \psi = 1, A_0 = 1, y = 1$ ve $t = 1$ alınarak oluşturulan $z_2^-(x, 1, 1)$ solitonunun bazı δ değerlerindeki davranışları açıklanmıştır. p parametresindeki değişimlerdeki gibi δ pozitif olarak büyüdükçe genliği büyüyen koyu soliton oluşurken negatif olarak büyüdükçe genliği azalan parlak soliton oluşmaktadır.



Şekil 3.26 $z_2^-(x, 1, 1)$ nin η parametresine göre değişim grafiği

Şekil 3.26'da $\eta = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ değerleri için $z_2^-(x, 1, 1)$ solitonun üzerindeki değişim gösterilmektedir. $z_2^-(x, 1, 1)$ solitonunda kullanılan parametreler ise $r = 1, p = 1, q = 1, \delta = 1, \psi = 1, A_0 = 1, y = 1$ ve $t = 1$ dir. Burada η değerleri arttıkça solitonun sağa daha doğru yavaşlayan bir ivme ile hareketi söz konusudur.



Şekil 3.27 $z_2^-(x, 1, 1)$ nin ψ parametresine göre değişim grafiği

Şekil 3.27'deki grafikte $r = 1, p = 1, q = 1, \delta = 1, \eta = 1, A_0 = 1, y = 1$ ve $t = 1$ ile oluşan $z_2^-(x, 1, 1)$ çözümünün $\psi = -6, -4, -2, 2, 4, 6$ değerleri için konumu gösterilmiştir. Pozitif ψ değerleri için çözümler koyu soliton şeklinde iken negatif ψ değerleri için çözümler parlak soliton şeklinde oluşmaktadır. Şekilde görüldüğü gibi ψ değerleri değişse de genlik değişmemektedir. Fakat ψ 'nin mutlak değeri büyüdükçe solitonlar x-eksenine göre daha solda meydana gelmektedir.

3.2 Modifiye Edilmiş Vakhnenko-Parkes Denklemini [66]

Modifiye edilmiş Vakhnenko-Parkes (mVP) denklemi şu şekilde verilmiştir [66]:

$$zz_{xxt} - z_x z_{xt} + z^3 z_t = 0, \quad (3.24)$$

Burada $z = z(x, t)$ dir.

3.2.1 Dalga Dönüşümünün Vakhnenko-Parkes Denklemine Uygulanması

Şimdi denklem (3.24)'e aşağıdaki dalga dönüşümünü uygulayalım:

$$z(x, t) = \mathcal{Z}(\xi), \quad \xi = px - rt. \quad (3.25)$$

Yukarıda verilen dalga dönüşümünü denklem (3.24)'e uygularsak aşağıdaki doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemi elde ederiz. Burada p parametresi x

yönünde solitonun genliğini, r dalga hızını ifade eder.

$$p^2 \mathcal{Z}(\eta) \mathcal{Z}^{(3)}(\eta) + \mathcal{Z}'(\eta) (\mathcal{Z}(\eta)^3 - p^2 \mathcal{Z}''(\eta)) = 0. \quad (3.26)$$

Burada $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\xi)$ ve $'$ gibi üst indisler ve parantez içindeki üsler ise $\mathcal{Z}$ 'nin ξ 'ye göre ilgili mertebeden adi türevlerini göstermektedir.

3.2.2 Yeni Kudryashov Yönteminin Vakhnenko-Parkes Denkleminin Uygulanması

Denklem (3.26)'daki DOADD'nin çözümlerinin aşağıdaki formda olduğunu kabul edelim:

$$\mathcal{Z}(\xi) = \sum_{i=0}^{\mu} A_i \varphi^i(\xi), \quad A_{\mu} \neq 0. \quad (3.27)$$

Denklem (3.26)'da homojen dengeleme kuralını uygularsak (Riccati denklemini de göz önünde bulundurarak) dengeleme sabitini $\mu = 1$ olarak elde ederiz. $\mu = 1$ olduğu için denklem (3.27) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathcal{Z}(\xi) = A_0 + A_1 \varphi(\xi), \quad A_1 \neq 0. \quad (3.28)$$

Burada $\varphi(\xi)$, denklem (3.29) adi diferansiyel denkleminin çözümünü göstermektedir:

$$(\varphi'(\xi))^2 = \delta^2 \varphi(\xi)^2 (1 - \eta \varphi(\xi)^2), \quad (3.29)$$

burada δ, γ sıfırdan farklı reel sayılardır. Denklem (3.29) yeni Kudryashov yönteminde önerildiği gibi aşağıdaki formda çözüme sahiptir:

$$\varphi(\xi) = \frac{4\psi}{\eta \exp(-\delta\xi) + 4\psi^2 \exp(\delta\xi)}, \quad (3.30)$$

burada η sıfır olmayan reel sabittir. Denklem (3.30) ve bu denklemin gerekli türevlerini denklem (3.26)'da yerine koyalım. Sonra bu denklemde $\varphi(\xi)$ 'nin aynı kuvvetine sahip tüm terimleri ortak çarpan parantezine alıp ardından bu terimlerin katsayılarını sıfıra eşitlersek aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned} A_0 A_1 (A_0^2 + \delta^2 p^2) C_2 &= 0, \\ 3A_0^2 A_1^2 C_2 &= 0, \\ 3A_0 A_1 (A_1^2 - 2\delta^2 \eta p^2) C_2 &= 0, \\ A_1^2 (A_1^2 - 4\delta^2 \eta p^2) C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Burada

$$C_2 = \sqrt{\delta^2 \varphi(\xi)^2 (1 - \eta \varphi(\xi)^2)}, \quad (3.31)$$

dir. Yukarıdaki cebirsel denklem sistemi sembolik bir hesaplama yazılımı kullanılarak çözümlürse aşağıdaki çözüm kümeleri elde edilir:

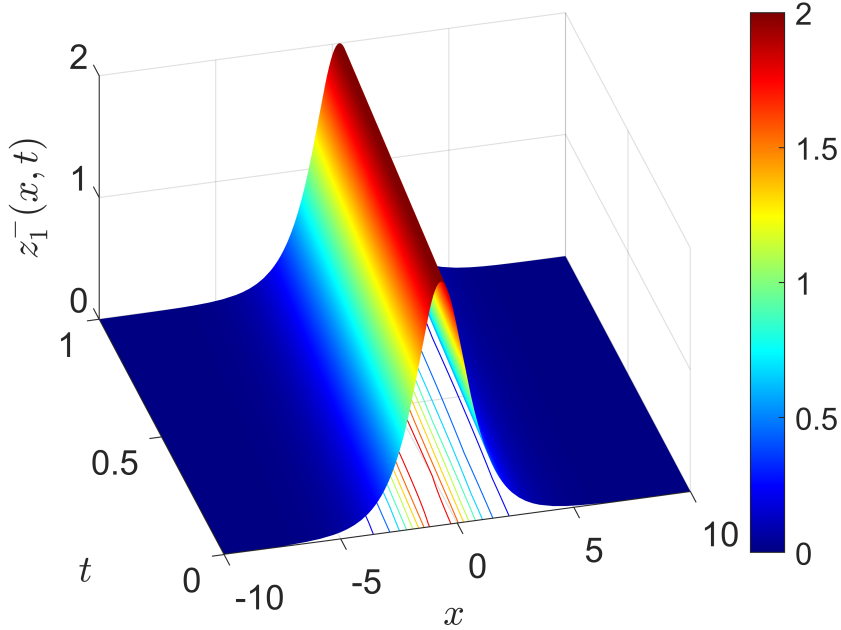
Çözüm Kümesi 1[±].

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \mp 2\delta\sqrt{\eta}p. \quad (3.32)$$

Yukarıdaki çözüm kümesi, denklem (3.30) ve denklem (3.25) kullanılarak sırasıyla denklem (3.24)'ün aşağıdaki analitik çözümleri elde edilir:

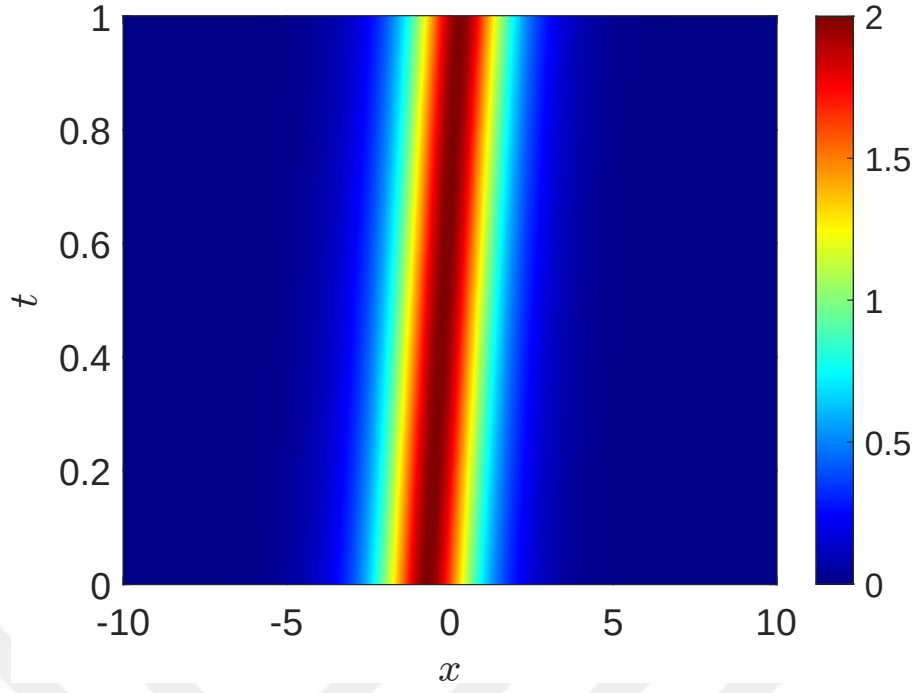
$$z_1^\mp(x, t) = \mp \frac{8\delta\sqrt{\eta}p\psi}{\eta e^{-(\delta(px-rt))} + 4\psi^2 e^{\delta(px-rt)}}. \quad (3.33)$$

Buna göre mVP denkleminde yeni Kudryashov yöntemi uygulanmasıyla yukarıda belirtildiği gibi $z_1^\mp(x, t)$ şeklinde çözüm elde ettik. Bu çözüm kümelerinin grafiklerini bazı özel parametreler tercih ederek çizdirdiğimizde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.



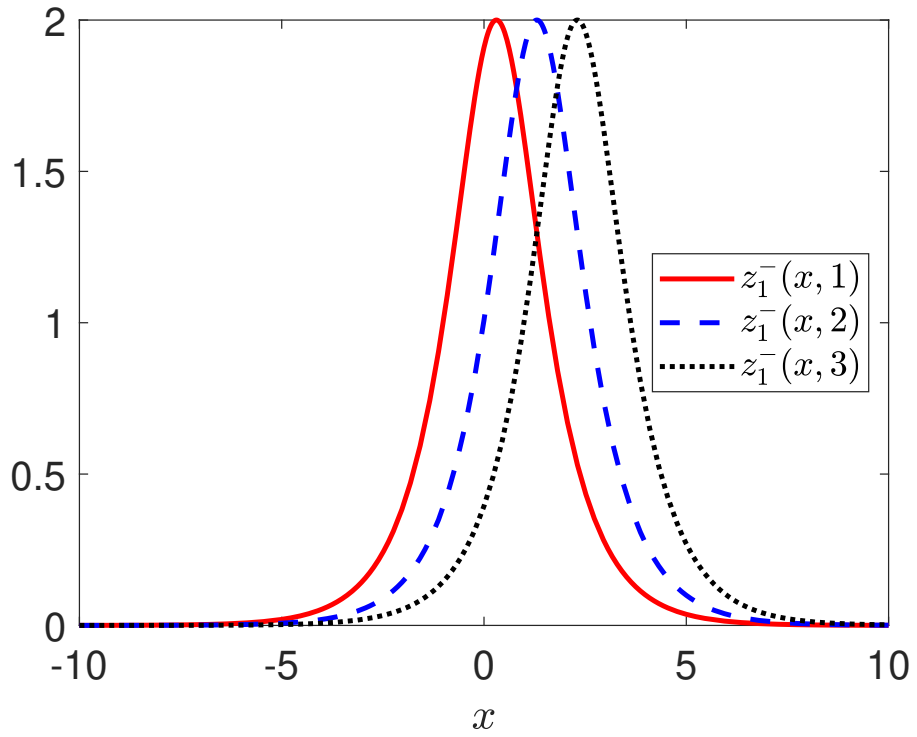
Şekil 3.28 $z_1^-(x, t)$ nin üç boyutlu grafiği

Şekil 3.28'deki grafikte elde edilen $z_1^-(x, t)$ yürüyen dalga çözümü için $p = 1, r = 1, \delta = 1, \eta = 1, \psi = 1$ parametreleri seçilerek oluşan durumun 3-boyutlu görüntüsü verilmiştir. Bu parametreler ile $z_1^-(x, t)$ için parlak soliton tipinde çözüm elde edilmiştir.



Şekil 3.29 $z_1^-(x, t)$ nin eş yükselti eğrisi grafiği

Şekil 3.29'daki grafikte yukarıda ortaya çıkan $p = 1, r = 1, \delta = 1, \eta = 1, \psi = 1$ değerleri için $z_1^-(x, t)$ parlak soliton çözümünün eş yükselti eğri grafiği verilmektedir.



Şekil 3.30 $z_1^-(x, t_f)$ nin $t_f = 1, 2, 3$ için hareket eden dalga grafiği

Şekil 3.30'da $z_1^-(x, t)$ çözümünde $p = 1, r = 1, \delta = 1, \eta = 1, \psi = 1$ değerleri kullanılarak oluşmuş olan parlak solitonun zamana göre hareketini belirten 2-boyutlu dalga grafiği verilmiştir. $z_1^-(x, t)$ parlak solitonun $t = 1$ anındaki konumu kırmızı, $t = 2$ anındaki konumu mavi ve $t = 3$ anındaki konumu siyah eğriyle gösterilmektedir. Grafikte de belirtildiği üzere parlak solitonun sağ tarafa doğru ilerlediği gözlenmektedir.



4 SONUÇ

Kısmi diferansiyel denklemler; fizikten mühendisliğe, biyolojiden elektrofizyolojiye kadar geniş bir yelpazede fenomenlerin ve süreçlerin matematiksel modellenmesinde kritik bir role sahiptir. Bu denklemler; elektrik, akışkanlar mekaniği, ısı transferi ve kuantum mekaniği gibi fizik alanlarının yanı sıra köprü yapımı, biyofilm oluşumu, hücre göçü ve kanser hücrelerinin yayılması gibi mühendislik ve biyoloji problemlerini analiz etmede temel oluşturur. Kısmi diferansiyel denklemler; özellikle difüzyon, göç, büyüme ve ölüm gibi etkileşimleri içeren biyolojik süreçlerin yanı sıra sinir hücrelerinin elektriksel aktiviteleri gibi karmaşık fenomenleri açıklamada kullanılır. Hodgkin-Huxley modeli gibi modeller, sinir hücrelerinin aksiyon potansiyellerini açıklayarak elektrofizyoloji alanında önemli bir yer tutar. Dalga denklemleri ise dalgaların matematiksel analizinde kısmi diferansiyel denklemlerin bir alt dalı olarak ön plana çıkar. Akustik, elektromanyetik, mekanik dalgaların yanı sıra yapısal analiz, titreşim analizi ve hidrodinamik gibi mühendislik uygulamalarında dalga denklemleri temel bir araçtır. Bu denklemler; dalgaların hızı, frekansı, yayılma yönü ve enerji dağılımı gibi özelliklerinin yanı sıra binaların ve köprülerin titreşim davranışlarının modellenmesinde kullanılarak yapısal sağlamlığı değerlendirmeye, titreşim azaltma stratejilerinin geliştirilmesine ve tasarımın optimizasyonuna katkı sağlar. Kısacası kısmi diferansiyel denklemler, çeşitli disiplinlerdeki karmaşık problemlerin çözümünde vazgeçilmez bir araç olarak öne çıkar; bu süreçlerin daha iyi anlaşılmasını sağlar ve bilimsel ilerlemenin temel taşlarından biri olmaya devam eder.

Bu tezde Kudryashov ve yeni Kudryashov yöntemleri kullanılarak son zamanlarda tanıtılan birleşik pKP-BKP ve mVP denklemlerinin analitik soliton çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca diferansiyel denklemlerin tarihsel gelişimi, uygulama alanları ve çözüm yöntemleri ön bilgi olarak verilmiştir. Birleşik pKP-BKP ve mVP denklemleri ele alınarak bu denklemler hakkında daha önce yapılan çalışmalar belirtilmiştir. Kudryashov ve yeni Kudryashov yöntemlerinin uygulanma aşamaları

açıklanmıştır. Bu yöntemler, sırasıyla birleşik pKP-BKP ve mVP denklemlerine uygulanmıştır. Birleşik pKP-BKP ve mVP denklemlerinin çözüm kümesi ile yürüyen dalga dönüşümündeki parametrelerine birtakım değerler verilerek parlak, koyu, kıvrımlı ve tekil soliton çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen soliton çözümlerinin 3-boyutlu görüntüsü, 2-boyutlu eş yükselti eğrisi ve hareket eden dalga grafikleri verilmiştir. Ayrıca her bir parametre için yapılan değişikliklerin soliton davranışları üzerindeki etkileri grafiksel olarak analiz edilmiştir. Bunun sonucunda bazı soliton çözümlerinde parametrelerin negatif ve pozitif değerleri için soliton tiplerinde değişme meydana gelmiştir. Örneğin, şekil 3.11'de γ 'nın negatif değerleri için çözümler, tekil soliton iken pozitif değerleri için kıvrımlı soliton şeklinde değişmektedir. Yine aynı biçimde şekil 3.22'de p 'nin negatif değerleri için çözüm, koyu soliton tipindeyken pozitif değerler için parlak soliton tipine dönüşmektedir.

Özellikle optik fiberlerdeki yayılım, sıvılar dinamiği ve plazma fiziği gibi alanlarda uygulama alanlarına sahip bu denklemlerin tez kapsamında elde edilen çözümleri ve denklemdaki/dalga dönüşümündeki parametrelerin soliton davranışı üzerindeki etkisinin incelenmesi gelecekteki çalışmalara ışık tutabilir.

Öte yandan gelecek çalışmalar için yapay zeka, kısmi diferansiyel denklemlerden elde edilen çözümlerle ilgili parametreler ve soliton tipleri arasındaki karmaşık ilişkileri anlamada güçlü bir araç olarak kullanılabilir. Özellikle makine öğrenimi algoritmaları, büyük veri kümelerinden elde edilen sonuçları analiz ederek, parametre değişikliklerinin soliton tipleri üzerindeki etkilerini öngörebilir ve bu etkileşimleri modelleyebilir. Bu sayede, belirli parametrelerin nasıl ayarlandığında solitonların parlak, koyu, kıvrımlı veya tekil forma dönüştüğü veya dalga boyu/genliğinin nasıl etkilendiği gibi ilişkiler daha hızlı ve doğruluğu yüksek bir şekilde saptanabilir. Yapay zeka tabanlı bu yaklaşımlar, sadece mevcut çözümleri optimize etmekle kalmayıp, aynı zamanda yeni çözüm tiplerinin keşfedilmesine de olanak tanıyarak, diferansiyel denklemlerle ilgili analizlerin derinleştirilmesine katkı sağlar. Bu tür analizler, teorik bulguları zenginleştirmenin yanı sıra, mühendislik ve fizik gibi uygulama alanlarında da ileriki çalışmalar için önemli faydalar sunabilir.

- [1] A. Sommerfeld, *Partial differential equations in physics*. Academic press, 1949.
- [2] G. Scholz F. Scholz, “First-order differential equations in chemistry,” *ChemTexts*, c. 1, ss. 1–12, 2015.
- [3] B. D. Guenther, *Modern optics*. OUP Oxford, 2015.
- [4] D. S. Jones, M. Plank B. D. Sleeman, *Differential equations and mathematical biology*. Chapman ve Hall/CRC, 2009.
- [5] W.-B. Zhang, *Differential equations, bifurcations, and chaos in economics*. World Scientific, 2005, c. 68.
- [6] P. J. Olver ve diğ., *Introduction to partial differential equations*. Springer, 2014, c. 1.
- [7] J. E. Sasser, “History of ordinary differential equations: the first hundred years,” *Proceedings of the Midwest Mathematics History Society*, c. 1, 1992.
- [8] A. Erdem, “Adi diferansiyel denklemler notlari,” *Kocaeli Üniversitesi*, ss. 12–13, 2009.
- [9] A. Kasman, *Glimpses of soliton theory: the algebra and geometry of non-linear PDEs*. American Mathematical Society, 2023, c. 100.
- [10] J. Russell, *Report on Waves: Made to the Meetings of the British Association in 1842-43*. 1845.
- [11] T. M. Inc., *MATLAB version: 9.13.0 (R2022b)*, Natick, Massachusetts, United States, 2022. erişim adresi: <https://www.mathworks.com>.
- [12] W. R. Inc., *Mathematica, Version 14.0*, Champaign, IL, 2024. erişim adresi: <https://www.wolfram.com/mathematica>.
- [13] G. D. Smith, *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Oxford university press, 1985.
- [14] G. W. Bluman, *Applications of symmetry methods to partial differential equations*. Springer, 2010.
- [15] A.-M. Wazwaz, “The tanh method for traveling wave solutions of nonlinear equations,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 154, no. 3, ss. 713–723, 2004.
- [16] E. Fan, “Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations,” *Physics Letters A*, c. 277, no. 4-5, ss. 212–218, 2000.
- [17] J.-H. He, “Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique: some examples,” *International journal of non-linear mechanics*, c. 34, no. 4, ss. 699–708, 1999.

- [18] H. Stommel G. Veronis, "Variational inverse method for study of oceanic circulation," *Deep Sea Research Part A. Oceanographic Research Papers*, c. 28, no. 10, ss. 1147–1160, 1981.
- [19] M. Ekici ve diğ., "Optical soliton perturbation with fractional-temporal evolution by first integral method with conformable fractional derivatives," *Optik*, c. 127, no. 22, ss. 10 659–10 669, 2016.
- [20] J.-H. He X.-H. Wu, "Exp-function method for nonlinear wave equations," *Chaos, Solitons & Fractals*, c. 30, no. 3, ss. 700–708, 2006.
- [21] S. Liao, "On the homotopy analysis method for nonlinear problems," *Applied mathematics and computation*, c. 147, no. 2, ss. 499–513, 2004.
- [22] J.-H. He, "Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique," *Applied Mathematics and computation*, c. 135, no. 1, ss. 73–79, 2003.
- [23] M. Wang, Y. Zhou Z. Li, "Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics," *Physics Letters A*, c. 216, no. 1-5, ss. 67–75, 1996.
- [24] W.-X. Ma, "Soliton solutions by means of Hirota bilinear forms," *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, c. 5, s. 100 220, 2022.
- [25] J. Manafian, "Optical soliton solutions for Schrödinger type nonlinear evolution equations by the $\tan(\Phi(\xi)/2)$ -expansion method," *Optik*, c. 127, no. 10, ss. 4222–4245, 2016.
- [26] Y. Gurefe, A. Sonmezoglu E. Misirli, "Application of the trial equation method for solving some nonlinear evolution equations arising in mathematical physics," *Pramana*, c. 77, ss. 1023–1029, 2011.
- [27] A. Biswas, M. Mirzazadeh, M. Eslami, Q. Zhou, A. Bhrawy M. Belic, "Optical solitons in nano-fibers with spatio-temporal dispersion by trial solution method," *Optik*, c. 127, no. 18, ss. 7250–7257, 2016.
- [28] R. Hirota J. Satsuma, "Nonlinear evolution equations generated from the Bäcklund transformation for the Boussinesq equation," *Progress of Theoretical Physics*, c. 57, no. 3, ss. 797–807, 1977.
- [29] A. Bekir, "Application of the (G'/G) -expansion method for nonlinear evolution equations," *Physics Letters A*, c. 372, no. 19, ss. 3400–3406, 2008.
- [30] J. Liu K. Yang, "The extended F-expansion method and exact solutions of nonlinear PDEs," *Chaos, Solitons & Fractals*, c. 22, no. 1, ss. 111–121, 2004.
- [31] A. Biswas ve diğ., "Singular solitons in optical metamaterials by ansatz method and simplest equation approach," *Journal of Modern Optics*, c. 61, no. 19, ss. 1550–1555, 2014.
- [32] A.-M. Wazwaz, "A reliable modification of Adomian decomposition method," *Applied mathematics and computation*, c. 102, no. 1, ss. 77–86, 1999.
- [33] T. A. Abassy, "Improved Adomian decomposition method," *Computers & mathematics with applications*, c. 59, no. 1, ss. 42–54, 2010.

- [34] L. Akinyemi, M. Şenol, O. Tasbozan A. Kurt, “Multiple-solitons for generalized $(2+1)$ -dimensional conformable Korteweg-de Vries-Kadomtsev-Petviashvili equation,” *Journal of Ocean Engineering and Science*, c. 7, no. 6, ss. 536–542, 2022.
- [35] G. Biondini D. Pelinovsky, “Kadomtsev-Petviashvili equation,” *Scholarpedia*, c. 3, no. 10, s. 6539, 2008.
- [36] B. B. Kadomtsev V. I. Petviashvili, “On the stability of solitary waves in weakly dispersing media,” *Doklady Akademii Nauk*, Russian Academy of Sciences, c. 192, 1970, ss. 753–756.
- [37] A.-M. Wazwaz, *Partial differential equations and solitary waves theory*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [38] T. Grava, C. Klein G. Pitton, “Numerical study of the Kadomtsev–Petviashvili equation and dispersive shock waves,” *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, c. 474, no. 2210, s. 20170458, 2018.
- [39] M. E. Islam, M. M. Hossain, K. M. Helal, U. S. Basak, R. C. Bhowmik M. Akbar, “Solitary wave analysis of the Kadomtsev–Petviashvili model in mathematical physics,” *Arab Journal of Basic and Applied Sciences*, c. 30, no. 1, ss. 329–340, 2023.
- [40] S.-F. Tian H.-Q. Zhang, “On the integrability of a generalized variable-coefficient Kadomtsev–Petviashvili equation,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, c. 45, no. 5, s. 055203, 2012.
- [41] C.-Q. Su, Y.-T. Gao, J.-W. Yang Z. Gao, “Nonautonomous solitons and Wronskian solutions for the $(3+1)$ -dimensional variable-coefficient forced Kadomtsev–Petviashvili equation in the fluid or plasma,” *Applied Mathematics Letters*, c. 61, ss. 42–48, 2016.
- [42] A.-M. Wazwaz S. El-Tantawy, “A new $(3+1)$ -dimensional generalized Kadomtsev–Petviashvili equation,” *Nonlinear Dynamics*, c. 84, ss. 1107–1112, 2016.
- [43] S. C. Anco, M. Gandarias E. Recio, “Conservation laws, symmetries, and line soliton solutions of generalized KP and Boussinesq equations with p -power nonlinearities in two dimensions,” *Theoretical and Mathematical Physics*, c. 197, ss. 1393–1411, 2018.
- [44] H. Zhang, J. Manafian, G. Singh, O. A. Ilhan A. O. Zekiy, “ N -lump and interaction solutions of localized waves to the $(2+1)$ -dimensional generalized KP equation,” *Results in Physics*, c. 25, s. 104168, 2021.
- [45] S. Kumar, W.-X. Ma A. Kumar, “Lie symmetries, optimal system and group-invariant solutions of the $(3+1)$ -dimensional generalized KP equation,” *Chinese Journal of Physics*, c. 69, ss. 1–23, 2021.
- [46] S. Manukure, Y. Zhou W.-X. Ma, “Lump solutions to a $(2+1)$ -dimensional extended KP equation,” *Computers & Mathematics with Applications*, c. 75, no. 7, ss. 2414–2419, 2018.
- [47] Y.-L. Ma, A.-M. Wazwaz B.-Q. Li, “Novel bifurcation solitons for an extended Kadomtsev–Petviashvili equation in fluids,” *Physics Letters A*, c. 413, s. 127585, 2021.

- [48] A. Wazwaz, “Multi-front waves for extended form of modified Kadomtsev-Petviashvili equation,” *Applied Mathematics and Mechanics*, c. 32, ss. 875–880, 2011.
- [49] J.-W. Xia, Y.-W. Zhao X. Lü, “Predictability, fast calculation and simulation for the interaction solutions to the cylindrical Kadomtsev-Petviashvili equation,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, c. 90, s. 105 260, 2020.
- [50] J.-k. Xue, “A spherical KP equation for dust acoustic waves,” *Physics Letters A*, c. 314, no. 5-6, ss. 479–483, 2003.
- [51] A.-M. Wazwaz, “Completely integrable coupled KdV and coupled KP systems,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, c. 15, no. 10, ss. 2828–2835, 2010.
- [52] A.-M. Wazwaz, “Solitons and singular solitons for the Gardner–KP equation,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 204, no. 1, ss. 162–169, 2008.
- [53] C. Wang H. Fang, “General high-order localized waves to the Bogoyavlenskii–Kadomtsev–Petviashvili equation,” *Nonlinear Dynamics*, c. 100, no. 1, ss. 583–599, 2020.
- [54] A.-M. Wazwaz, “New Painlevé Integrable (3+1)-Dimensional Combined pKP-BKP Equation: Lump and Multiple Soliton Solutions,” *Chinese Physics Letters*, c. 40, no. 12, s. 120 501, Ara. 2023, issn: 0256-307X.
- [55] F. Yuan, J. He Y. Cheng, “The degeneration of the breathers for the BKP equation,” *Chinese Journal of Physics*, c. 71, ss. 190–201, 2021.
- [56] L.-L. Feng, S.-F. Tian, X.-B. Wang T.-T. Zhang, “Rogue waves, homoclinic breather waves and soliton waves for the (2+ 1)-dimensional B-type Kadomtsev–Petviashvili equation,” *Applied Mathematics Letters*, c. 65, ss. 90–97, 2017.
- [57] J.-b. Zhang W.-X. Ma, “Mixed lump-kink solutions to the BKP equation,” *Computers & Mathematics with Applications*, c. 74, no. 3, ss. 591–596, 2017.
- [58] W.-X. Ma, “N-soliton solution of a combined pKP–BKP equation,” *Journal of Geometry and Physics*, c. 165, s. 104 191, 2021.
- [59] V. Vakhnenko, “Solitons in a nonlinear model medium,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, c. 25, no. 15, s. 4181, 1992.
- [60] V. Vakhnenko E. Parkes, “The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation,” *Nonlinearity*, c. 11, no. 6, s. 1457, 1998.
- [61] V. Vakhnenko E. Parkes, “Approach in Theory of Nonlinear Evolution Equations: The Vakhnenko-Parkes Equation,” *Advances in Mathematical Physics*, c. 2016, no. 1, s. 2 916 582, 2016.
- [62] H.-O. Roshid, M. R. Kabir, R. C. Bhowmik B. K. Datta, “Investigation of Solitary wave solutions for Vakhnenko-Parkes equation via exp-function and $\text{Exp}(-\phi(\xi))$ -expansion method,” *SpringerPlus*, c. 3, ss. 1–10, 2014.

- [63] Y. Gu, W. Yuan, N. Aminakbari Q. Jiang, “Exact solutions of the Vakhnenko-Parkes equation with complex method,” *Journal of Function Spaces*, c. 2017, no. 1, s. 6 521 357, 2017.
- [64] K. K. Victor, B. B. Thomas T. C. Kofane, “On high-frequency soliton solutions to a $(2+ 1)$ -dimensional nonlinear partial differential evolution equation,” *Chinese Physics Letters*, c. 25, no. 2, s. 425, 2008.
- [65] S. Kumar N. Mann, “Abundant closed-form solutions of the $(3+ 1)$ -dimensional Vakhnenko-Parkes equation describing the dynamics of various solitary waves in ocean engineering,” *Journal of Ocean Engineering and Science*, 2022.
- [66] A.-M. Wazwaz, “The integrable Vakhnenko–Parkes (VP) and the modified Vakhnenko–Parkes (MVP) equations: multiple real and complex soliton solutions,” *Chinese journal of physics*, c. 57, ss. 375–381, 2019.
- [67] S. Sakovich, “On a modified Vakhnenko-Parkes equation,” *arXiv preprint arXiv:1812.11351*, 2018.
- [68] D. Jyoti S. Kumar, “Modified Vakhnenko–Parkes equation with power law nonlinearity: Painlevé analysis, analytic solutions and conservation laws,” *The European Physical Journal Plus*, c. 135, no. 9, ss. 1–12, 2020.
- [69] H. M. Baskonus, J. L. G. Guirao, A. Kumar, F. S. V. Causanilles G. R. Bermudez, “Complex mixed dark-bright wave patterns to the modified α and modified Vakhnenko-Parkes equations,” *Alexandria Engineering Journal*, c. 59, no. 4, ss. 2149–2160, 2020.
- [70] W. Alhejaili, A.-M. Wazwaz S. El-Tantawy, “New $(3+ 1)$ -dimensional integrable extensions of the modified Vakhnenko–Parkes equation,” *Romanian Journal of Physics*, c. 68, s. 102, 2023.
- [71] F. Fan X. Chen, “Dynamical behavior of traveling waves in a generalized VP-mVP equation with non-homogeneous power law nonlinearity,” *AIMS Math.*, c. 8, ss. 17 514–17 538, 2023.
- [72] N. Kudryashov, “Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics,” *Journal of applied mathematics and mechanics*, c. 52, no. 3, ss. 361–365, 1988.
- [73] N. A. Kudryashov, “Exact solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation,” *Physics Letters A*, c. 147, no. 5-6, ss. 287–291, 1990.
- [74] N. Kudryashov, “On types of nonlinear nonintegrable equations with exact solutions,” *Physics Letters A*, c. 155, no. 4-5, ss. 269–275, 1991.
- [75] N. A. Kudryashov, “Exact solutions of a family of Fisher equations,” *Theoretical and Mathematical Physics*, c. 94, no. 2, ss. 211–218, 1993.
- [76] N. A. Kudryashov, “Singular manifold equations and exact solutions for some nonlinear partial differential equations,” *Physics Letters A*, c. 182, no. 4, ss. 356–362, 1993, issn: 0375-9601.
- [77] N. A. Kudryashov, “Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations,” *Chaos, Solitons Fractals*, c. 24, no. 5, ss. 1217–1231, 2005, issn: 0960-0779.

- [78] N. A. Kudryashov, "One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, c. 17, no. 6, ss. 2248–2253, Haz. 2012, issn: 1007-5704.
- [79] N. A. Kudryashov, "Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations," *Optik*, c. 206, s. 163 550, 2020, issn: 0030-4026.
- [80] M. Ozisik, A. Secer, M. Bayram H. Aydin, "An encyclopedia of Kudryashov's integrability approaches applicable to optoelectronic devices," *Optik*, c. 265, s. 169 499, 2022, issn: 0030-4026.
- [81] J. Dan, S. Sain, A. Ghose-Choudhury S. Garai, "Solitary wave solutions of nonlinear PDEs using Kudryashov's R function method," *Journal of Modern Optics*, c. 67, no. 19, ss. 1499–1507, 2020.
- [82] S. Sain, A. Choudhury S. Garai, "Solitary wave solutions for the KdV-type equations in plasma: a new approach with the Kudryashov function," *The European Physical Journal Plus*, c. 136, Şub. 2021.
- [83] K. Hosseini, M. Mirzazadeh, M. Ilie S. Radmehr, "Dynamics of optical solitons in the perturbed Gerdjikov–Ivanov equation," *Optik*, c. 206, s. 164 350, 2020.
- [84] M. Cinar, A. Secer M. Bayram, "Analytical solutions of (2+1)-dimensional Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff equation in fluid mechanics/plasma physics using the New Kudryashov method," *Physica Scripta*, c. 97, no. 9, s. 094 002, Ağus. 2022.
- [85] S. Altun, M. Ozisik, A. Secer M. Bayram, "Optical solitons for Biswas–Milovic equation using the new Kudryashov's scheme," *Optik*, c. 270, s. 170 045, 2022.
- [86] M. Ozisik, A. Secer M. Bayram, "The bell-shaped perturbed dispersive optical solitons of Biswas–Arshed equation using the new Kudryashov's approach," *Optik*, c. 267, s. 169 650, 2022.
- [87] M. Cinar, A. Secer, M. Ozisik M. Bayram, "Optical soliton solutions of (1+ 1)-and (2+ 1)-dimensional generalized Sasa–Satsuma equations using new Kudryashov method," *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, c. 20, no. 02, s. 2 350 034, 2023.
- [88] H. Esen, A. Secer, M. Ozisik M. Bayram, "Soliton solutions to the nonlinear higher dimensional Kadomtsev–Petviashvili equation through the new Kudryashov's technique," *Physica Scripta*, c. 97, no. 11, s. 115 104, 2022.
- [89] S. Malik, M. S. Hashemi, S. Kumar, H. Rezazadeh, W. Mahmoud M. Osman, "Application of new Kudryashov method to various nonlinear partial differential equations," *Optical and Quantum Electronics*, c. 55, no. 1, s. 8, 2023.
- [90] A. Secer ve diğ., "Nonlinear Complex Generalized Zakharov Dynamical System in Conformal Sense Utilizing New Kudryashov Method," *Physica Scripta*, 2024.

- [91] J.-Y. Yang W.-X. Ma, “Abundant interaction solutions of the KP equation,” *Nonlinear Dynamics*, c. 89, ss. 1539–1544, 2017.
- [92] W.-X. Ma, “Lump solutions to the Kadomtsev–Petviashvili equation,” *Physics Letters A*, c. 379, no. 36, ss. 1975–1978, 2015.
- [93] X. Zhang, Y. Chen Y. Zhang, “Breather, lump and X soliton solutions to nonlocal KP equation,” *Computers & Mathematics with Applications*, c. 74, no. 10, ss. 2341–2347, 2017.
- [94] A.-M. Wazwaz, “Multiple-soliton solutions for the KP equation by Hirota’s bilinear method and by the tanh–coth method,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 190, no. 1, ss. 633–640, 2007.
- [95] A.-M. Wazwaz, “The tanh method and the sine–cosine method for solving the KP-MEW equation,” *International Journal of Computer Mathematics*, c. 82, no. 2, ss. 235–246, 2005.
- [96] K. Khan M. A. Akbar, “Exact traveling wave solutions of Kadomtsev–Petviashvili equation,” *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, c. 23, no. 2, ss. 278–281, 2015.
- [97] Y. Tang, J. Ma, B. Zhou J. Zhou, “From 2Mth-order wronskian determinant solutions to Mth-order lump solutions for the $(2+1)$ -Dimensional Kadomtsev–Petviashvili I equation,” *Wave Motion*, c. 104, s. 102 746, 2021.
- [98] T. Xiao Y. Zeng, “Generalized Darboux transformations for the KP equation with self-consistent sources,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, c. 37, no. 28, s. 7143, 2004.
- [99] H. Alotaibi, “Explore optical solitary wave solutions of the KP equation by recent approaches,” *Crystals*, c. 12, no. 2, s. 159, 2022.
- [100] Y.-J. Yang Y. He, “New application of the-expansion method to KP equation,” *Applied Mathematical Sciences*, c. 7, no. 20, ss. 959–967, 2013.
- [101] Y. Zhou H. Xu, “Accurate Coiflet wavelet solution of extended $(2+1)$ -dimensional Kadomtsev–Petviashvili equation using the novel wavelet-homotopy analysis approach,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, c. 125, s. 107 393, 2023.
- [102] W.-X. Ma, E. Y. A. E. Seoud, M. R. Ali R. Sadat, “Dynamical behavior and wave speed perturbations in the $(2+1)$ pKP equation,” *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, c. 22, no. 1, s. 2, 2023.
- [103] X. Zeng, Z. Dai, D. Li, S. Han H. Zhou, “Some exact periodic soliton solutions and resonance for the potential Kadomtsev–Petviashvili equation,” *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, c. 96, 2008, s. 012 149.
- [104] R. Gupta A. Bansal, “Painlevé analysis, Lie symmetries and invariant solutions of potential Kadomstev–Petviashvili equation with time dependent coefficients,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 219, no. 10, ss. 5290–5302, 2013.
- [105] B. Ren, J. Yu X.-Z. Liu, “Nonlocal symmetries and interaction solutions for potential Kadomtsev–Petviashvili equation,” *Communications in Theoretical Physics*, c. 65, no. 3, s. 341, 2016.

- [106] I. E. Inan D. Kaya, "Some exact solutions to the potential Kadomtsev–Petviashvili equation and to a system of shallow water wave equations," *Physics Letters A*, c. 355, no. 4-5, ss. 314–318, 2006.
- [107] A. J. M. Jawad, M. D. Petković A. Biswas, "Soliton solutions for nonlinear Calogero–Degasperis and potential Kadomtsev–Petviashvili equations," *Computers & Mathematics with Applications*, c. 62, no. 6, ss. 2621–2628, 2011.
- [108] D.-s. Li H.-q. Zhang, "New soliton-like solutions to the potential Kadomtsev–Petviashvili (PKP) equation," *Applied mathematics and computation*, c. 146, no. 2-3, ss. 381–384, 2003.
- [109] K. Hosseini, K. Sadri, F. Rabiei M. Mirzazadeh, "The (2+ 1)-dimensional potential Kadomtsev–Petviashvili equation: Its solitons and complexiton," *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, c. 5, s. 100 316, 2022.
- [110] D. Kaya S. M. El-Sayed, "Numerical soliton-like solutions of the potential Kadomtsev–Petviashvili equation by the decomposition method," *Physics Letters A*, c. 320, no. 2-3, ss. 192–199, 2003.
- [111] C. M. Khalique M. Y. T. Lephoko, "Conserved vectors and solutions of the two-dimensional potential KP equation," *Open Physics*, c. 21, no. 1, s. 20 230 103, 2023.
- [112] M. Senthilvelan, "On the extended applications of homogenous balance method," *Applied Mathematics and Computation*, c. 123, no. 3, ss. 381–388, 2001.
- [113] D.-s. Li H.-q. Zhang, "Symbolic computation and various exact solutions of potential Kadomtsev–Petviashvili equation," *Applied mathematics and computation*, c. 145, no. 2-3, ss. 351–359, 2003.
- [114] X. Da-Quan D. Zheng-De, "Application of Exp-function method to potential Kadomtsev–Petviashvili equation," *Chaos, Solitons & Fractals*, c. 42, no. 5, ss. 2653–2659, 2009.
- [115] Z. Dai, J. Liu Z. Liu, "Exact periodic kink-wave and degenerative soliton solutions for potential Kadomtsev–Petviashvili equation," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, c. 15, no. 9, ss. 2331–2336, 2010.
- [116] W.-X. Ma, X. Yong X. Lü, "Soliton solutions to the B-type Kadomtsev–Petviashvili equation under general dispersion relations," *Wave Motion*, c. 103, s. 102 719, 2021.
- [117] W.-Q. Peng, S.-F. Tian T.-T. Zhang, "Analysis on lump, lumpoff and rogue waves with predictability to the (2+ 1)-dimensional B-type Kadomtsev–Petviashvili equation," *Physics Letters A*, c. 382, no. 38, ss. 2701–2708, 2018.
- [118] J.-H. Chang, "Real Line Solitons of the BKP Equation," *arXiv preprint arXiv:2303.02385*, 2023.
- [119] Y. Kang, Y. Zhang L. Jin, "Soliton solution to BKP equation in Wronskian form," *Applied Mathematics and Computation*, c. 224, ss. 250–258, 2013.

- [120] Y.-Q. Yuan X.-H. Zhao, “Resonant solitons of the B-type Kadomtsev-Petviashvili equation,” *Physics Letters A*, c. 458, s. 128 592, 2023.
- [121] H. Zhang, “A note on exact complex travelling wave solutions for (2+ 1)-dimensional B-type Kadomtsev–Petviashvili equation,” *Applied mathematics and computation*, c. 216, no. 9, ss. 2771–2777, 2010.
- [122] Y.-X. Ma, B. Tian, Q.-X. Qu, C.-C. Wei X. Zhao, “Bäcklund transformations, kink soliton, breather-and travelling-wave solutions for a (3+ 1)-dimensional B-type Kadomtsev–Petviashvili equation in fluid dynamics,” *Chinese Journal of Physics*, c. 73, ss. 600–612, 2021.
- [123] H.-C. Ma, Y. Wang Z.-Y. Qin, “New exact complex traveling wave solutions for (2+ 1)-dimensional BKP equation,” *Applied mathematics and computation*, c. 208, no. 2, ss. 564–568, 2009.
- [124] Z.-Y. Ma, J.-X. Fei, W.-P. Cao H.-L. Wu, “The explicit solution and its soliton molecules in the (2+1)-dimensional pKP–BKP equation,” *Results in Physics*, c. 35, s. 105 363, 2022, issn: 2211-3797.
- [125] H. Ma, S. Yue A. Deng, “Lump and interaction solutions for a (2+ 1)-dimensional combined pKP-BKP equation in fluids,” *Modern Physics Letters B*, c. 36, no. 13, s. 2 250 069, 2022.
- [126] K. U. Tariq, A. Wazwaz R. Tufail, “Lump, periodic and travelling wave solutions to the (2+ 1)-dimensional pKP-BKP model,” *The European Physical Journal Plus*, c. 137, no. 10, ss. 1–22, 2022.
- [127] M. Awadalla, A. Akbulut J. Alahmadi, “Simulation of a Combined (2+ 1)-Dimensional Potential Kadomtsev–Petviashvili Equation via Two Different Methods,” *Mathematics*, c. 12, no. 3, s. 427, 2024.
- [128] M. Sebogodi, B. Muatjetjeja A. Adem, “Exact solutions and conservation laws of a (2+ 1)-dimensional combined potential kadomtsev-petviashvili-b-type kadomtsev-petviashvili equation,” *International Journal of Theoretical Physics*, c. 62, no. 8, s. 165, 2023.
- [129] F.-Y. Liu, Y.-T. Gao X. Yu, “Pfaffian, soliton, breather and hybrid solutions for a (2+ 1)-dimensional combined potential Kadomtsev-Petviashvili-B-type Kadomtsev-Petviashvili equation in fluid mechanics,” *Nonlinear Dynamics*, c. 111, no. 6, ss. 5681–5692, 2023.
- [130] Y. Feng S. Bilige, “Resonant multi-soliton, M-breather, M-lump and hybrid solutions of a combined pKP-BKP equation,” *Journal of Geometry and Physics*, c. 169, s. 104 322, 2021.
- [131] M. Aydın, B. Kuryel, G. Oturanç G. Gündüz, *Diferansiyel denklemler ve uygulamaları*. Baris Yayinlari Fakulteler Kitabevi, 2019, c. 14.
- [132] Y. Aksoy M. Özkan, *Diferansiyel Denklemler*, 2017.
- [133] Z. Ahsan, *Differential equations and their applications*. PHI Learning Pvt. Ltd., 2016.
- [134] M. Tekkoyun, *DİFERANSİYEL DENKLEMLER DERS NOTLARI*. Mehmet Tekkoyun, 2023.

- [135] P. G. Drazin R. S. Johnson, *Solitons: an introduction*. Cambridge university press, 1989, c. 2.
- [136] I. Gandzha Y. V. Sedletsky, “Bright and dark solitons on the surface of finite-depth fluid below the modulation instability threshold,” *Physics Letters A*, c. 381, no. 21, ss. 1784–1790, 2017.
- [137] M. Remoissenet, *Waves called solitons: concepts and experiments*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [138] M. Ozisik, M. Cinar, A. Secer M. Bayram, “Optical solitons with Kudryashov’s sextic power-law nonlinearity,” *Optik*, c. 261, s. 169 202, 2022.
- [139] S. Rayhanul Islam, D. Kumar, E. Fendzi-Donfack M. İnç, “Impact of nonlinearity and wave dispersion parameters on the soliton pulses of the $(2+ 1)$ -dimensional Kundu-Mukherjee-Naskar equation,” *Revista mexicana de fisica*, c. 68, no. 6, ss. 0–0, 2022.
- [140] P. N. Ryabov, D. I. Sinelshchikov M. B. Kochanov, “Application of the Kudryashov method for finding exact solutions of the high order nonlinear evolution equations,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 218, no. 7, ss. 3965–3972, 2011.
- [141] A. Yusuf, T. A. Sulaiman, E. Khalil, M. Bayram H. Ahmad, “Construction of multi-wave complexiton solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation via two efficient analyzing techniques,” *Results in Physics*, c. 21, s. 103 775, 2021.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. S. Sen, M. Cinar, ve Y. Zeren, "Investigation of Traveling Wave Solutions of Combined pKP–BKP Equation," *International Conference on Mathematical Advances and Applications*, Istanbul, TÜRKİYE, 2024.

