

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT QUASİLİNEER UZAYLARIN
BAZI YENİ ÖZELLİKLERİ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sümeyye ŞEMALİ

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

TEMMUZ 2024

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT QUASİLİNEER UZAYLARIN
BAZI YENİ ÖZELLİKLERİ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sümeyye ŞEMALİ
(36213614001)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

TEMMUZ 2024

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde büyük katkıları olan kıymetli danışmanım Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Bilgi ve deneyimlerinizi benimle paylaştığınız, her aşamada yönlendirdiğiniz için minnettarım. Sayenizde bu süreci daha anlamlı ve keyifli hale getirdim.

Yanımda değil ama hep kalbimde babam ve her zaman yanımda olan ailemi destekleriniz, sevginiz ve cesaretlendirmeniz, bu başarıda en büyük motivasyon kaynağım oldu. Sizinle bu yolculuğu paylaşmak benim için bir ayrıcalık.

Tez yazım sürecinde yardım, bilgi ve tecrübeleriyle destek olan sayın Prof. Dr. Mustafa Kemal ÖZDEMİR'e, güler yüzlerini esirgemeyen tüm Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine ve katkılarından dolayı değerli jüri üyelerine saygılarımı sunarım, teşekkür ederim.



ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Hilbert Quasilineer Uzayların Bazı Yeni Özellikleri ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Sümeyye ŞEMALİ



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iv
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Bazı önemli tanım ve önermeler.....	3
2.2 Metrik Uzay	4
2.3 Lineer Uzay	6
2.4 Normlu Uzayı	7
2.5 İç Çarpım Uzayı	8
3. QUASİLİNEER UZAYLAR.....	11
3.1 Quasilineer uzaylar	11
3.2 Normlu Quasilineer Uzaylar.....	16
3.3 İç Çarpım Quasilineer Uzaylar	17
4. $L_2([a, b], \mathbb{R})$ HİLBERT QUASİLİNEER UZAYI İLE İLGİLİ UYGULAMALAR.....	21
KAYNAKLAR.....	42
ÖZGEÇMİŞ	43

ŞEKİLLER DİZİNİ

- Şekil 4.1** : Çubuk(aralık) olan (y_n) interval-değerli dizisi, koyu noktalı olan (x_n) klasik dizisi..... 35
- Şekil 4.2** : Buradaki çubuk (aralık) dizisi (A_n) interval otokorelasyon dizisidir ve (y_n) interval dizisinin otokorelasyonudur, (b_n) ise eksik bilgiye sahip olan (x_n) dizisinin tahmini otokorelasyonunu göstermektedir. 40



SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$	:	Reel sayılarda kapalı aralıkların kümesi
$L_2(\mathbb{R})$	:	Hilbert Uzayı
$L_2(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$	:	Hilbert Quasilineer Uzayı
$L_2([a, b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$	:	$[a, b]$ aralığından $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ye tanımlı karesi integrelenebilir fonksiyonlar uzayı
$C([a, b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$	:	$[a, b]$ aralığından $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ye tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathbb{I}\ell_2$	:	Sonlu enerjili interval-değerli sinyallerin uzayı
$\mathbb{I}\omega$	:	Ayrık-Zanmanlı İnterval-Değerli sinyallerin dizi kümesi
$\ell_2(\mathbb{Z})$	:	Sonlu enerjili ayrık-zamanlı sinyallerin vektör uzayı

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HİLBERT QUASİLİNEER UZAYLARIN BAZI YENİ ÖZELLİKLERİ

SÜMEYYE ŞEMALİ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

43+vii sayfa

2024

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

“Hilbert Quasilineer Uzayların Bazı Yeni Özellikleri” başlıklı tez, dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin kapsamındaki konular hakkında bilgi verilmekte ve ilerleyen bölümlerde gerçekleştirilecek işlemler hakkında açıklamalar yapılmaktadır.

İkinci bölümde ise, tezde kullanılan temel kavramlar, tanımlar ve teoremler hakkında bilgi sunulmaktadır.

Üçüncü bölümde, lineer uzayların genelleştirilmesi olan quasilineer uzayların tanımı yapılmakta ve lineer uzaylara karşılık gelen cebirsel ifadeler açıklanmaktadır.

Dördüncü bölümde, $L_2([a, b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ interval-değerli fonksiyonların oluşturduğu uzaylar ele alınmakta, bu uzaylar üzerinde yapılan tanım ve teoremler sunulmaktadır. Ayrıca, eksik bilgiye sahip non-deterministik sinyallerin enerjilerini hesaplamak için bir yöntem önerilmekte ve bu sinyaller arasındaki hata payını ölçmek amacıyla deterministik otokorelasyon yöntemi açıklanmaktadır. Bu bağlamda, Hilbert quasilineer uzayı kullanılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Quasilineer Uzayları, Hilbert quasilineer uzayları, İnterval-değerli dizi uzayları, interval-değerli sinyaller, deterministik otokorelasyon

ABSTRACT

Master Thesis

SOME NEW PROPERTIES OF HILBERT QUASILINEAR SPACES

Sümeyye ŞEMALİ

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

43+vii pages

2024

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

The thesis titled "Some New Properties of Hilbert Quasilinear Spaces" consists of four chapters. The first chapter provides information about the topics covered in the thesis and explains the procedures to be carried out in the subsequent chapters.

In the second chapter, fundamental concepts, definitions, and theorems used in the thesis are presented.

The third chapter defines quasilinear spaces, which generalize linear spaces, and explains algebraic expressions corresponding to linear spaces.

The fourth chapter focuses on spaces formed by interval-valued functions in $L_2([a, b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$. It presents definitions and theorems concerning these spaces. Additionally, a method is proposed for calculating the energies of incomplete information non-deterministic signals, and the deterministic autocorrelation method is explained for measuring error between these signals. In this context, Hilbert quasilinear space is utilized.

Keywords: Quasilinear Spaces, Hilbert quasilinear spaces, Interval-valued sequence spaces, interval-valued signals, Deterministic autocorrelation

1. GİRİŞ

Belli bir derceye kadar belirli olan ancak genel manada belirsiz durumları modelleyebilmek için interval analizi kullanılır. İnterval analizi genel olarak kısaca interval dediğimiz reel sayıların kapalı aralıklarının oluşturduğu kümedir. Bu intervaller arasındaki toplama ve bir reel skaler sayı ile çarpma klasik analizden bilinen anlamdadır. Örneğin;

$$[1, 2] + [-3, 5] = [1 + (-3), 2 + 5] = [-2, 7] \quad \text{ve} \quad -3 \cdot [2, 4] = 3[-4, -2] = [-12, -6]$$

şeklinde. Buradaki toplama işlemine bakıldığında zaman bazı elemanların toplamaya göre tersi yoktur. Bu toplama işlemini etkisiz elemanı $[0, 0]$ aralığı, yani $\{0\}$ tek nokta kümesidir. Buna göre, örneğin $[1, 2] + [a, b] = [0, 0]$ olacak şekilde bir $[a, b]$ aralığı yoktur. Bu bize $[1, 2]$ elemanın toplamaya tersi olmadığını söyler. Böylece intervallerin oluşturduğu küme $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ kümesi toplama işlemine göre bir grup değildir. Fakat $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}}, +)$ bir monoiddir. Bunun dışında $[a, b] \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ve $[c, d] \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ için $[a, b] \subseteq [c, d] \Leftrightarrow a \leq c, b \leq d$ şeklinde tanımlı altküme bağıntısı $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ yi kısmî sıralı küme yapan bir bağıntıdır. Böylece $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}}, \subseteq)$ bir kısmî sıralı küme olur. Ayrıca biliyoruz ki bir $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda \cdot [a, b] = \begin{cases} [\lambda a, \lambda b], & \lambda \geq 0 \text{ ise} \\ [\lambda b, \lambda a], & \lambda < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı skalerle çarpma işlemi de $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ üzerinde iyi tanımlı (kapalı) bir işlemdir. Bu işlemlerle ve $\subseteq$ bağıntısı ile $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ bir quasilineer uzaydır. Quasilineer uzayları, lineer uzayların bir genelleştirmesi olup 1985 yılında S.M.Aseev'in tarafından [1] verilmiştir. Aseev bu çalışmada aynı zamanda normlu quasilineer uzay kavramını tanımlayarak bu normdan doğan metriği yani norm metriğini sunmuştur. Bu norm metriğine biz genel olarak Hausdorff metriği diyoruz, çünkü özel olarak $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ durumunda bu metrik, Hausdorff metriği ile eşdeğerdir. Çünkü $[a, b] \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ için $\|[a, b]\| = \sup_{t \in [a, b]} |t|$ şeklinde tanımlanan norm ile $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ bir normlu quasilineer uzaydır. Bu normdan doğan metrik Hausdorff metriktir. Metrik

$$\begin{aligned} d([a, b], [c, d]) &= \inf\{r \geq 0 : [a, b] \subseteq [c, d] + A_1^r, [a, b] \subseteq [c, d] + A_2^r, \|A_i^r\| \leq 1\} \\ &= \max\{|a - c|, |b - d|\} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Aseev'in verdiği bu tanım lineer cebirdeki ve analizdeki bir çok kavramı genelleştiren bir tanımdır. Fakat Aseev klasik lineer cebirin temel yapı taşı olan germe, lineer kombinasyon ve lineer bağımsızlık gibi kavramlarını genelleştirmesini vermemiştir, iyi bir quasilineer cebir oluşturabilmek için bu tür kavramların genelleştirmesi de gereklidir. [2],

[3] ve [4] numaralı çalışmalarda quasilineer kombinasyon, quasilineer germe ve quasilineer bağımsızlık kavramlarını tanımlanmıştır. Bu kavramlara dayalı olarak quasilineer uzaylarda baz ve boyut kavramları verilmiştir. Daha sonra [5] ve [6] numaralı çalışmalarda iç çarpım quasilineer tanımlanmış ve iç çarpımdan doğan metrik norm kavramı verilmiştir. Bu iç çarpımdan doğan norm ile tam olan normlu quasilineer uzaylara Hilbert quasilineer uzayı adı verilir. Hilbert quasilineer uzaylar, bilim ve mühendislikte birçok uygulamaya imkan veren uzay tipleridir. Bunun temel nedenlerden birisi Hilbert uzayların bilim ve mühendislikte birçok yeni alanın ortaya çıkmasına temel oluşturmalarıdır. Örneğin, sinyal işleme dediğimiz alanın temeli Hilbert uzayına dayanır [7]. Bu nedenle Hilbert quasilineer uzaylar sinyal işleme alanında bazı yeni problemleri çözebilme potansiyeli taşımaktadır. [8, 9] numaralı kaynaklarda bunun örneklerini veriyoruz. Bu kaynaklarda eksik bilgiye sahip bazı non-deterministik sinyallerin otokorelasyonlarını hesaplanırken $L_2(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ Hilbert quasilineer uzayını üzerindeki iç çarpımı kullanılmıştır. Bunun gibi Hilbert quasilineer uzayı başka birçok uygulamaya zemin hazırlayacağını görüyoruz. Bunun yanı sıra, intervallerin interval-değerli fonksiyonlar üzerindeki birçok uygulamada kullanıldığı gözlemlenmektedir. [10]. $L_2(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ Hilbert quasilineer uzayının klasik $L_2(\mathbb{R})$ Hilbert uzayını alt uzayı olarak barındırdığını görmek zor değildir. Bu nedenle $L_2(\mathbb{R})$ Hilbert uzayı ile ilgili birçok uygulama aslında $L_2(\mathbb{R})$, $L_2(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ Hilbert quasilineer uzayı bir uygulamadır. Biz bu çalışmamızda bu quasilineer uzayı tanıttığımız gibi bunula ilgili verilen bazı uygulamaları da tanıtacağız. Örneğin; $L_2(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ Hilbert uzayını kullanarak küme-değerli bazı dizilerin ve fonksiyonların deterministik otokorelasyon kavramını vereceğiz.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Bazı önemli tanım ve önermeler

Tanım 2.1.1. A , boş bir küme olmamak üzere, A üzerinde $\leq$ ilişkisi tanımlansın. Her $a, b, c \in A$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa:

i) $a \leq a$,

ii) $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$

iii) $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$

A üzerinde $\leq$ ilişkisi yardımıyla bir kısmî sıralı yapı oluşturulur ve bu yapı $(A, \leq)$ kısmî sıralı küme olarak adlandırılır [5].

Tanım 2.1.2. $(A, \leq)$ kısmî sıralı bir küme olsun ve her $a, b \in A$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise A üzerindeki bağıntıya tam sıralama bağıntısı denir ve $(A, \leq)$ ikilisine de tam sıralı küme (zincir) ismi alır [5].

Tanım 2.1.3. $(A, \leq)$ kısmî sıralı bir küme olsun ve $a \in A$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $x \leq a$ koşulu sağlanıyorsa, a elemanına A nın maksimum elemanı denir. Ayrıca, her $b \in A$ için $b \leq x$ olacak şekilde bir $b \in A$ mevcutsa, b elemanına A nın minimum elemanı adı verilir [5].

Tanım 2.1.4. $(A, \leq)$ kısmî sıralı bir küme olsun ve $a \in A$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $a \leq x$ ve $x = a$ koşulu sağlanıyorsa, a elemanına A nın maksimal elemanı denir. Ayrıca, $b \in A$ için $x \leq b$ ve $x = b$ koşulu sağlanıyorsa, b elemanına A nın minimal elemanı adı verilir [5].

Tanım 2.1.5. $(A, \leq)$ kısmî sıralı bir küme olsun ve $M \subset A$ olsun. Eğer her $b \in M$ için $b \leq x$ ve $b \leq y$ koşullarını sağlıyorsa, her $y \in A$ için $x \leq y$ olacak şekilde bir $x \in A$ varsa, bu eleman M nin üst sınırlarının en küçüğü veya supremumu olarak adlandırılır. Ayrıca, eğer her $b \in M$ için $x \leq b$ ve $y \leq b$ koşullarını sağlıyorsa, her $x \in A$ için $y \leq b$ olacak şekilde bir $y \in A$ varsa, bu eleman M nin alt sınırlarının en büyüğü veya infimumu olarak adlandırılır [5].

Tanım 2.1.6. $\mathbb{N}$ doğal sayıların kümesinin tüm altkümelerinin sınıfı $\mathbb{N}$ nin kuvvet kümesi olarak bilinir ve $P(\mathbb{N})$ veya $2^{\mathbb{N}}$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.1. $A = \{1, 2, 3\} \in P(\mathbb{N})$ olduğu gibi $\mathbb{N}^{\text{sift}}$ kümesinde $P(\mathbb{N})$ nin bir elemanıdır. Şimdi $P(\mathbb{N})$ üzerine bir kısmî sıralama bağıntısı koyalım. $A, B, C \in P(\mathbb{N})$ için $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ bağıntısı

yanşıyan,geçişmeli ve ters simetrik bir bağıntıdır. Bu nedenle $(P(\mathbb{N}), \subseteq)$ bir kısmî sıralı kümedir.

$$M = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots\}$$

$$U = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \dots\}$$

kümelerini göz önüne alalım. $M, (P(\mathbb{N}), \subseteq)$ kısmî sıralı kümesinde bir zincir fakat U bir zincir değildir. Şimdi M ve U nun maksimal minimal elemanları var mıdır inceleyelim. M nin hiçbir maksimal elemanı yoktur. M nin maksimumu da yoktur. Şimdi U nun her bir elemanı bir maksimal elemanıdır fakat U nun bir maksimumu yoktur. Şimdi $\{1\}$ tek nokta kümesinde " $\subseteq$ " bağıntısına göre daha küçük bir eleman yoktur. Bu nedenle $\{1\}$, M de minimal bir elemanıdır. Aynı zamanda $\{1\}$ bütün diğer elemanlarında " $\subseteq$ " bağıntısına göre daha küçük olduğundan M nin minimumudur yani $\min M = \{1\}$ dir. Şimdi U nun bütün elemanları minimal elemanlarıdır. Fakat U nun minimumu yoktur. Fakat neyse ki infimumu vardır. Şimdi U nun tüm alt sınırlarını araştıralım. Yani her $A \in U$ için $B \subseteq A$ şartını sağlayan bir $B \in P(\mathbb{N})$ ye U nun bir alt sınırı denir. Bu şarta uyacak tek $B = \emptyset$ boş kümedir ve $P(\mathbb{N})$ nin bir elemanıdır. Yani $\inf U = \emptyset$ dur. Bu örnekte $\inf M = \{1\}$ dir. Çünkü M nin minimumu mevcut fakat $\max M$ yoktur. Bu nedenle M nin supremumunu aramak doğal bir iştir. Bunun için M nin üst sınırlarına bakmalıyız. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ve $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ elemanları $P(\mathbb{N})$ nin elemanlarıdır ve M nin üst sınırlarıdır. Bu üst sınırların en küçüğü $\mathbb{N}^+$ olduğundan $\sup M = \mathbb{N}^+$ dır. Aynı şekilde $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}^+$ elemanları U nun içinde bir üst sınır olup $\sup U = \mathbb{N}^+$ dır.

2.2 Metrik Uzay

Tanım 2.2.1. X boş olmayan herhangi bir küme olsun. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin, her $x, y, z \in X$ için

$$M_1) d(x, y) \geq 0 \text{ ve } d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$M_2) d(x, y) = d(y, x)$$

$$M_3) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

aksiyomları sağlanıyorsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay adını alır [6].

Örnek 2.2.1. $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu üzerinde $d(x, y) = |x - y|$ tanımlanan metrik, "mutlak değer metriği" veya "alışılmış metrik" olarak bilinir. Bu metrik, iki reel sayı arasındaki uzaklığı ölçmek için kullanılır ve aşağıdaki özellikleri taşır:

1) Pozitiflik: $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0$ ise $x = y$.

2) Simetri: $d(x, y) = d(y, x)$ her $x, y \in \mathbb{R}$ için geçerlidir.

3) Üçgen Eşitsizliği: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için sağlanır.

Tanım 2.2.2. Bu özellikler, $d(x, y) = |x - y|$ fonksiyonunun bir metrik olduğunu gösterir [5].

Örnek 2.2.2. $C[a, b]$ sürekli fonksiyonların uzayı; $C[a, b] = \{x \mid x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$, $d(x, y) = \max_{t \in [a, b]} [x(t) - y(t)]$ ile tanımlanan d fonksiyonunu bir metrik uzayı gösterir [5].

Tanım 2.2.3. (X, d) bir metrik uzay ve $M \subseteq X$ boş olmayan bir küme olmak üzere;

$$\text{diam}M = \sup\{d(x, y) : x, y \in M\}$$

değeri M kümesini çapı olarak adlandırır [8].

Tanım 2.2.4. (x_n) dizisi, (X, d) metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ mevcutsa (x_n) dizisine X içinde yakınsak bir dizi denir ve x bu dizinin limiti olarak adlandırılır [8].

Tanım 2.2.5. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) dizisi, her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $m, n > n_0$ olacak şekilde $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ koşulunu yerine getiriyorsa (x_n) dizisi bir *Couchy dizisi*dir. [5]

(X, d) bir metrik uzay olsun. X deki her *Couchy dizi* yakınsak ise (X, d) ye *tam metrik uzayı* adını alır [5].

Tanım 2.2.6. X boş olmayan bir küme olsun ve X in alt kümeler ailesinden oluşan τ için;

$\tau_1)$ $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$

$\tau_2)$ τ nun elemanlarının sonlu sayıda kesişimi τ nun elemanıdır.

$\tau_3)$ τ nun elemanlarının keyfi birleşimi τ nun elemanıdır.

bu koşulları sağlıyorsa τ ya X üzerinde bir *topoloji* ve (X, τ) ikilisininide *topolojik uzayı* adı verilir [5].

Tanım 2.2.7. (X, τ) bir *topolojik uzay* olmak üzere X in farklı her x ve y elemanlarının ayrık komşulukları bulunuyorsa X *topolojik uzayına Hausdorff uzayı* denir [5].

Tanım 2.2.8. M ve N iki *topolojik uzay* olsun. $f : M \rightarrow N$ fonksiyonu birebir örten ve f ve f^{-1} fonksiyonları sürekli ise f fonksiyonlarına *homeomorfizma* adı verilir [5].

Tanım 2.2.9. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere ve $M \subseteq X$ olsun. M kümesindeki her dizi limiti M kümesinde olacak şekilde yakınsak bir alt diziye sahipse M ye kompakt alt küme adı verilir [5].

2.3 Lineer Uzay

Tanım 2.3.1. $V \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathbb{K}$ (reel veya kompleks sayılar) üzerinde bir cisim olsun. V üzerinde

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$$

işlemleri tanımlansın. Her $v, w, t \in V$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ için

$$L_1) v + w = w + v$$

$$L_2) v + (w + t) = (v + w) + t$$

$$L_3) v + \theta = \theta + v = v \text{ olacak şekilde bir } \theta \in V \text{ vardır}$$

$$L_4) v + (-v) = (-v) + v = \theta \text{ olacak şekilde bir } -v \in V \text{ vardır.}$$

$$L_5) \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$$

$$L_6) (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha v + \beta v$$

$$L_7) \alpha(\beta v) = (\alpha\beta) \cdot v$$

$$L_8) 1 \cdot v = v \cdot 1 = v \text{ olacak şekilde bir } 1 \in \mathbb{K} \text{ vardır.}$$

tüm koşulları sağlanıyorsa V ye $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör veya doğrusal uzay) olarak adlandırır [6].

Tanım 2.3.2. V bir doğrusal uzay. W ise V nin boş olmayan bir altkümesi olsun. V deki vektör toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre doğrusal uzayı aksiyomları sağlanıyorsa bu W kümesine V nin bir alt uzayı denir [6].

Tanım 2.3.3. $V, \mathbb{K}$ cismi üzerinde bir doğrusal uzayı ve $A \subseteq V$ olsun. Her $x, y \in A$ için $[x, y] \in A$ oluyorsa A ya konveks küme denir [6].

Tanım 2.3.4. $V, \mathbb{K}$ cismi üzerinde bir doğrusal uzay olsun. $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k \in V$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ olmak üzere;

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k$$

şeklinde yazılan toplam, $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu (veya birleşimi) olarak adlandırılır [6].

Tanım 2.3.5. V bir doğrusal uzay olsun ve $W \neq \emptyset \subset V$ olsun. W kümesinin tüm lineer birleşimlerinin kümesine W kümesinin gereni denir ve spW ile gösterilir. $spW = V$ oluyorsa W kümesi V yi geriyor demektir [6].

Tanım 2.3.6. V bir doğrusal uzay ve $U = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) \subset V$ olsun. Eğer $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}$ olmak üzere;

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, U kümesine lineer bağımsız denir. Aksi takdirde, U kümesi lineer bağımlı olarak bilinir [6].

Tanım 2.3.7. V bir doğrusal (lineer) uzay olsun, V nin lineer bağımsız ve V yi geren bir alt kümesi varsa bu kümeye V nin bir bazı olarak adı verilir [6].

2.4 Normlu Uzayı

Tanım 2.4.1. X bir lineer uzayı olsun. $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $u, v \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için;

$$N_1) \|u\| \geq 0 \text{ ve } \|u\| = 0 \iff u = \theta$$

$$N_2) \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$$

$$N_3) \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

şartları sağlıyorsa fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu uzayı denir

Örnek 2.4.1. $C[a, b] = \{f \mid f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$ kümesi fonksiyonların toplama ve skalarla çarpma işlemine göre bir lineer uzayıdır. $f \in C[a, b]$ olmak üzere;

$$\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|$ fonksiyonu $C[a, b]$ üzerinde bir normdur ve $(C[a, b], \|\cdot\|)$ ise bir normlu uzayıdır [6].

Tanım 2.4.2. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzayı olsun

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

olarak tanımlanan $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, d metriğine normdan üretilen normlu metrik veya norm metriği denir [6].

Sonuç 2.4.1. Norm metriği ile tam olan metrik uzayına Banach uzay denir [6].

Tanım 2.4.3. V ve W iki lineer uzay olsun. $T : V \longrightarrow W$ operatörü için, her $\alpha, \beta \in K$ için

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

şartını gerçekleştiriyorsa T operatörüne lineer operatör olarak adını alır [6].

Tanım 2.4.4. V ve W iki normlu uzay ve $T : V \longrightarrow W$ bir lineer operatörü olsun. Her $v \in V$ için $\|T(v)\| \leq m \|v\|$ eşitsizliğini sağlayan bir m pozitif reel sayısı varsa T ye sınırlı lineer operatör denir.

2.5 İç Çarpım Uzayı

Tanım 2.5.1. X bir vektör uzay ve $\langle, \rangle : X \times X \longrightarrow K$ fonksiyonu olsun. Her $a, b, c \in X$ ve $\lambda \in K$ için;

$$I_{\zeta 1}) \langle a, a \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle a, a \rangle = 0 \iff a = 0$$

$$I_{\zeta 2}) \langle a, b \rangle = \overline{\langle a, b \rangle}$$

$$I_{\zeta 3}) \langle \lambda \cdot a, b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$$

$$I_{\zeta 4}) \langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$$

şartlarını gerçekleştiren fonksiyonuna X üzerinde bir iç çarpım ve $(X, \langle, \rangle)$ ikilisine iç çarpım uzayı adını alır [6].

Tanım 2.5.2. X iç çarpım uzay ve $x, y \in X$ olsun.

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, y - x \rangle}$$

metriğine iç çarpım metriği olarak bilinir [6].

Sonuç 2.5.1. İç çarpım metriği ile tam olan iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [6].

Tanım 2.5.3. V ve W kümeleri için $\mathbb{R}^n$ in boş olmayan bir altkümesi olmak üzere ;

$$d_H(V, W) = \max \left\{ \sup_{v \in V} d(v, W), \sup_{w \in W} d(w, V) \right\}$$

ifadesine W nin V den Housdorff ayrımı denir [6].

Tanım 2.5.4. $\mathbb{R}^n$ boş olmayan bir küme, V, W ve T alt kümeleri arasında

$$D(V, W) = \max\{d_H(V, W), d_H(W, V)\}$$

değerine Hausdurff uzaklığı adı verilir.

$$D(V, W) \geq 0$$

$$D(V, W) = 0 \iff V = W$$

$$D(V, W) = D(W, V)$$

$$D(V, W) \leq D(V, T) + D(T, W)$$

aksiyomları sağlandığı için $\mathbb{R}^n$ in boştan farklı altkümeler ailesi üzerinde bir metrik tanımlar ve bu metriğe Hausdorff metriği denir [6].

$\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ yi düşünelim. Bu kümenin yukarıdaki D fonksiyonu yani Hausdorff bir metrik tanımları bu nedenle $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}}, D)$ bir metrik uzayıdır. Bu uzay çalışmamızda karşımıza çıkacak en popüler uzay olacak. Yukarıdaki tanımlanan Hausdurff metriği daha kolay bir şekilde $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ (kapalı aralıkların kümesi) için $n = 1$ halinde şu şekilde verilir; $X, Y \in \Omega_c(\mathbb{R}) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ise $X = [\underline{X}, \bar{X}]$ ve $Y = [\underline{Y}, \bar{Y}]$ şeklinde yazılır. Burada $\bar{X}$ aralığın üst sınırını, $\underline{X}$ aralığın alt sınırını gösterir.

$$D(X, Y) = \max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\bar{X} - \bar{Y}|\}$$

dir. Verilen D tanımı sadece $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ üzerinde hesaplayabiliriz. Çünkü, $\Omega_c(\mathbb{R}^2)$ yi alalım. $\Omega_c(\mathbb{R}^2)$ nin elemanları bir aralık olmak zorunda olmadığından dolayı $\Omega_c(\mathbb{R}^2)$ nin elemanları arasındaki mesafeyi kolayca hesaplanmaz diğer D nin ana tanımı ile hesaplanır. Çalışmalarımızda önemli olacak bir küme de reel sayılardan veya bir kapalı aralığın $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ya tanımlı fonksiyonların uzay tipleri olacaktır. Bunlardan iki tanesi uygulamalarda önemli yerlere sahiptir. Birincisi; $C([a, b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ fonksiyon uzayıdır. Bu uzay $[a, b]$ aralığından $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ya tanımlanmış bütün sürkli fonksiyonların uzayıdır. Yani;

$$C([a, b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}}) = \{f \mid f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{R}}\}$$

şeklinde kısaca tanımlanır. Buradaki f nin sürekli olması kavramı, $[a, b]$ aralığı üzerindeki bilinen mutlak değer topolojisine ve $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ Hausdurff metriğinin $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ de ürettiği topolojiye göre tanımlanmaktadır. Örneğin; $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{R}}, f(t) = [0, 1 + \cos(t)]$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur ve görüldüğü gibi $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ değerlidir. Örneğin; $t = \frac{\pi}{3}$ için $f(\frac{\pi}{3}) = [0, \frac{3}{2}]$ aralığıdır.

İkinci olarak, önemli bir kümemiz; $L_2([a, b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ kümesi olacaktır. Şimdi bu küme de bu kısımda tanıtalım. $[a, b]$ aralığından $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ya tanımlı karesi integralenabilen uzay bu $L_2([a, b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ ile gösterilmektedir. Burada $[a, b]$ aralığından $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ya tanımlı bir f fonksiyonun integrallerinin nasıl hesaplanabileceğine $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ üzerindeki Hausdorff metriği kullanarak karar verebiliriz. Buna ilişkin örnekler tezin ileri bölümlerinde karşımıza çıkacaktır.

Örnek 2.5.1. $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ye

$$f(t) = \begin{cases} [0, t^2], & -1 \leq t < 0 \quad \text{ise} \\ [3, 3+t], & 0 \leq t \leq 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonu 0 da süreksiz fonksiyondur. Yani $f \notin C([-1, 1], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ dır. Fakat $f \in L_2([-1, 1], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ olur. Çünkü $\int_{-1}^1 \|f(t)\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}}^2 < \infty$ dur. Yani f karesi integrallenebilir bir fonksiyondur.

3. QUASİLİNEER UZAYLAR

3.1 Quasilineer uzaylar

Quasilineer kavramının türkçe karşılığı lineerimsi uzay demektir. Buradan da anlaşıldığı üzere lineer gibi olan uzay lineer uzaylara benzeyen uzay tiplerine quasilineer uzay diyeceğiz. Birazdan vereceğimiz quasilineer tanımından da anlaşılabileceği üzere birçok şart vektör uzayın şartları ile aynıdır. Ancak fazladan ekstra şartlar eklenmiştir, tanımı verdikten sonra göreceğiz ki bu kavramı klasik vektör uzayın kavramının bir genelleştirmesidir ve genelleştirmeyi sağlayan şey ise bir kısmî sıralama bağıntısının küme üzerine empoze edilmesidir. Şimdi Aseev'in 1985 yılında [1] tanımını verelim. Quasilineer uzay lineer gibi veya lineer uzaylara benzeyen uzay türlerine denir. 1985 yılında Aseev'in [1] verdiği quasilineer uzayın tanımını verelim.

Tanım 3.1.1. Bir X kümesine , kendisi üzerinde her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartları verilen bir $\preceq$ kısmî sıralama bağıntısı, bir "+" cebirsel toplama işlemi ve " $\cdot$ " reel skalerle çarpma işlemi tanımlıysa bir quasilineer uzay denir.

iq1) $x \preceq x$

iq2) $x \preceq y, y \preceq z \implies x \preceq z$

iq3) $x \preceq y, y \preceq x \implies x = y$

iq4) $x + y = y + x$

iq5) $x + (y + z) = (x + y) + z$

iq6) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

iq7) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$

iq8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

iq9) $1 \cdot x = x$

iq10) $0 \cdot x = \theta$

iq11) $(\alpha + \beta) \cdot x \preceq \alpha x + \beta x$

iq12) $x \preceq y, z \preceq v \implies x + z \preceq y + v$

iq13) $x \preceq y \implies \alpha x \preceq \alpha y$

tanımdan anlaşılacağı üzere birçok şart lineer uzay şartlarına benzerdir, fakat burada kümenin kısmî sıralı olması da istendiği için ekstra şartlar eklenmiştir [1]. Bu ekstra şartların bazıları toplama ve skalarla çarpma işlemlerinin kısmî sıralama bağıntısı ile uyumlu olması için zorunlu olarak verilen şartlardır. Aseev quasilineer uzayları sadece reel sayılar cismi için inşa etmiştir [2,3] numaralı kaynaklarda cisim genel olarak $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{R}$ seçilerek quasilineer uzayları göz önüne alınmıştır. Biliyoruz ki her X küme üzerinde “=” bağıntısı bir kısmî sıralama bağıntısıdır ve biz herhangi bir X vektör uzayını “=” kısmî sıralama bağıntısı ile düşünersek her vektör uzay bu bağıntı ile quasilineer uzay olur. Bu nedenle bu alanda çalışanların hiç unutmaması gereken şu önerme verilmiştir "Her vektör uzayı bir quasilineer uzayıdır" söylemi daha çok kullanılmaktadır. Tabiki bu uzayların yapısını daha iyi anlamak için lineer uzay olmayan bazı quasilineer uzayları tanımamız gereklidir.

Örnek 3.1.1. *Tüm kapalı reel aralıkların oluşturduğu küme $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ile gösterilir. aralıkların toplanması ve bir reel skalarla çarpılması işlemlerini hatırlayalım. Örneğin; $[3, 7] + [-2, 5] = [3 + (-2), 7 + 5] = [1, 12]$ toplama işlemi ve $(-7) \cdot [3, 7] = [-49, -21]$ şeklinde tanımlı skalarla çarpma işlemlerinin düşünelim. Ayrıca $[a, b] \leq [c, d] \iff [a, b] \subseteq [c, d]$ şeklinde tanımlı alt küme olma bağıntısını göz önüne alalım. Bu işlemler ve bu bağıntı ile birlikte $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ nin bir quasilineer uzay olduğunu gösterilmiştir. Bu uzay bir lineer uzay değildir. Çünkü her elemanın toplamaya göre var olduğunu söylemeyiz. Uzayda $[0, 0] = \{0\}$ aralığı $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ nin sıfır elemanı yani etkisiz elemanıdır. Ayrıca $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[a, a]$ şeklindeki aralıklara *dejenere aralık* denir ve bu elemanların toplamaya göre tersleri mevcuttur. Örneğin; $[3, 3]$ bir *dejenere aralıktır* ve $[-3, -3] = (-1) \cdot [3, 3]$ *dejenere aralığı* $[3, 3]$ ün toplamaya göre tersidir. Fakat $[3, 5]$ *dejenere değildir* $a \neq b$ ve $a < b$ olmak üzere $[a, b]$ şeklinde yazılan bütün aralıklar *dejenere olmayan aralıklardır* ve bunların toplamaya göre tersleri bulunmaz. Ayrıca a reel sayısı için $[-a, a]$ şeklinde yazılan aralıklara *simetrik aralık* veya *simetrik eleman* denir. Genel olarak $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ nin elemanları $[\underline{x}, \bar{x}]$ şeklinde gösterilir, $\underline{x}$ reel sayısına aralığının alt sınır, $\bar{x}$ reel sayısına da üst sınır adı verilir. $[\underline{x}, \bar{x}]$ ve $[\underline{y}, \bar{y}] \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ise $[\underline{x}, \bar{x}] + [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$ şeklinde tanımlanır ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için*

$$\lambda \cdot [\underline{x}, \bar{x}] = \begin{cases} [\lambda \underline{x}, \lambda \bar{x}], & \lambda \geq 0 \text{ ise} \\ [\lambda \bar{x}, \lambda \underline{x}], & \lambda < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $[\underline{x}, \bar{x}]$ bir simetrik eleman ise $\underline{x} = -\bar{x}$ dır.

Tanım 3.1.2. $(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay, $v \in V \subseteq X$ olsun. “ $\preceq$ ” kısmî sıralama bağıntısına göre v den önce gelen V içindeki regüler elemanların kümesine v nin V üzerindeki zemini denir.

Ayrıca v den önce gelen X içindeki regüler elemanların kümesine v nin X üzerindeki zemini denir.ve sırasıyla F_v^V ve F_v^X ile gösterilir.

$$F_v^V = \{x \in V \mid x \preceq v \text{ ve } x \text{ regüler}\}$$

ve

$$F_v^X = \{x \in X \mid x \preceq v \text{ ve } x \text{ regüler}\}$$

şeklinde tanımlanır [5].

Tanım 3.1.3. X bir quasilineer uzay ve $x \in X$ olsun. $(-1) \cdot x = -x$ şeklinde gösterilir. x in toplamaya göre tersi varsa x elemanına regüler eleman denir. Eğer x in toplamaya göre tersi yoksa x elemanına singüler eleman denir. Ayrıca $x = -x$ özelliğini sağlayan x elemanına simetrik eleman denir. X in tüm regüler elemanlarının kümesi X_r ile ve X in tüm singüler elemanlarının kümesine sıfır da ekleyerek oluşturduğumuz küme X_s ile gösteririz. X in tüm simetrik elemanlarının oluşturduğu küme ise X_{sym} sembolü ile gösterilir [3].

Tanım 3.1.4. X bir quasilineer uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. X in işlemleri ve X üzerindeki kısmî sıralama bağıntısıyla birlikte Y de bir quasilineer uzay ise Y kümesine X in bir alt uzay veya alt quasilineer uzayı adı verilir. Eğer $Y \neq X$ ise Y ye X in bir öz alt uzayı adı verilir [3].

Uyarı 3.1.1. Bir X quasilineer uzayının üç tane önemli alt quasilineer uzayı vardır. Birincisi; X in non-dejenere X in dejenere olmayan alt uzayıdır ve bu uzay X_s ile gösterilir, yani X_s toplamaya göre tersi mevcut olmayan elemanlarının oluşturduğu kümeye sıfır elemanını da dahil ederek oluşturulan kümedir. İkinci önemli alt uzayı ise X in dejenere elemanlarının oluşturduğu, yani toplamaya göre tersi mevcut olan elemanlarının kümedir ve bu küme de X ile gösterilir. Dejenere elemanlar regüler elemanlar olarakta bilinir. Non-dejenere ise singüler elemanlar olarak bilinir ve X_r de X in önemli alt uzayıdır. Son olarak bahsedecğimiz alt uzayı ise X in simetrik elemanlarından oluşmuş kümedir ve bu küme de X_{sym} ile gösterilir. X in bir x elemanına $x = -x = (-1) \cdot x$ olması halinde simetrik eleman diyoruz. X_{sym} aynı zamanda X_s nin de bir alt uzayıdır. Çünkü, simetrik elemanlarda (sıfır hariç) non-dejenere elemanlardır.

Teorem 3.1.1. X bir quasilineer uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Y nin bir alt uzayı olması için gerek ve yeter şart her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve her $x, y \in Y$ için $\alpha x + \beta y \in Y$ olmasıdır [3].

Örnek 3.1.2. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ intervalların (kapalı aralıkların) quasilineer uzayını düşünelim. Tüm dejenere aralıkların yani has aralıkların oluşturduğu kümeye $[0, 0]$ aralığı da ekleyerek oluşturduğumuz $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_s$ daha açık olarak

$$(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_s = \{[a, \bar{a}] \mid a, \bar{a} \in \mathbb{R} \text{ ve } a < \bar{a}\}$$

şeklinde yazılan kapalı aralıkların kümesidir. Örneğin; $[1, 3] \in (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_s$ iken $[1, 1] \notin (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r$ dir. Tüm dejenere aralıkların kümesi $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r$ alt uzayını oluşturur. Yani $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r$ tüm tek nokta kümelerinin oluşturduğu altuzayıdır. Örneğin; $[1, 3] \notin (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r$ ama $[1, 1] \in (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r$ dir. $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_s \cap (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r = [0, 0]$. Son olarak

$$(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_{sym} = \{[\underline{a}, \bar{a}] : \underline{a}, \bar{a} \in \mathbb{R} \text{ ve } \underline{a} = -\bar{a}\}$$

özelliğini sağlayan simetrik altkümesidir. Örneğin; $[-2, 2] \in (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_{sym}$, fakat $[1, 3] \notin (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_{sym}$ non-dejenere aralıklar da $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_{sym}$ de bulunmaz [4].

Tanım 3.1.5. X kümesi $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir quasilineer uzay olsun. $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ olsun.

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k = z$$

olacak şekilde yazılan bir z elemanına $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ elemanlarının bir lineer kombinasyonu denir. Bunun dışında $\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k \preceq z$ şeklinde yazılabilen X in bir z elemanını ise $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ elemanlarının bir quasilineer kombinasyonu denir. Quasilineer kombinasyon sözcüğü kısaca ql-kombinasyon şeklinde yazılır [3].

Uyarı 3.1.2. $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ elemanlarının bir lineer kombinsyonu bu elemanlarının bir quasilineer kombinasyonudur. Fakat tersi doğru değil, yani $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ bir quasilineer kombinasyonu $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ elemanlarının lineer kombinasyonu olmayabilir.

Örnek 3.1.3. $x = [1, 2]$ bir lineer kombinasyondur. Örneğin; $3 \cdot [1, 2] = [3, 6]$ yani $[3, 6]$ lineer kombinasyondur. $-3 \cdot [1, 2] = [-6, -3]$ bir lineer kombinasyonudur. Örneğin, $[0, 2]$ aralığının $[1, 2]$ aralığı bir lineer kombinasyonu değildir. Fakat bir quasilineer kombinasyondur $1 \cdot [1, 2] \subseteq [0, 2]$ dir.

Tanım 3.1.6. (Germe ve Quasi-germe): X bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir quasilineer uzay olsun. $M = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \subseteq X$ olsun. M nin gerdiği uzay spM sembolüyle gösterilir ve

$$spM = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k : v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in M \text{ ve } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \right\}$$

şeklinde tanımlanır . M nin quasi-gerdiği uzay ise $QspM$ ile gösterilir ve

$$QspM = \{v \in X : \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k \preceq v ; \alpha_k \in \mathbb{K} \text{ ve } v_k \in X\}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer, $QspM = X$ oluyorsa M kümesi X uzayını quasi-geriyor denir. Eğer $spM = X$ oluyorsa M kümesi X quasilineer uzayını geriyor denir. Açık olarak M nin gerdiği uzay M nin quasi-gerdiği uzayı demektir. Açık olarak görülmektedir [4].

$$spM \subseteq QspM$$

Örnek 3.1.4. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ quasilineer uzayında $M = [2, 5]$ aralığı quasi – gereni aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$Qsp\{[2, 5]\} = \{x \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}} : \alpha.[2, 5] \subseteq x, \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

burada $\alpha = 1$ için $\alpha.[1, 5] \subseteq [2, 5]$ olduğundan $[1, 5] \in QspM$ dir. Diğer taraftan $\alpha.[1, 5] \subseteq [2, 5]$ olacak şekilde bir α reel sayısı olmadığından $[2, 5] \notin SpM$ dir. Bu şekilde $QspM \neq \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ olur. $\alpha = 2$ için $2.[1, 5] \subseteq [2, 11]$ olduğundan $[2, 11] \in QspM$.Fakat $\alpha.[1, 5] = [2, 11]$ olacak şekilde bir α reel sayısı olmadığından $[2, 11] \notin SpA$ dir. Başka bir örnek verirsek; $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ quasilineer uzayında $B = \{\{3\}\}$ kümesi verilsin. Her $x \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ için $\alpha.\{3\} \subseteq x$ olacak şekilde bir $\alpha \in \mathbb{R}$ mevcut olduğundan B nin quasi-gereni

$$QspB = \{x \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}} : \alpha.\{3\} \subseteq x, \quad \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$$

dir [4].

Örnek 3.1.5. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ quasilineer uzayında $\{[1, 5]\}$ kümesi verilsin $\{0\} \subseteq \alpha[1, 5]$ bu durumu sağlanmak için sadece $\alpha = 0$ gerçekleşiyor. Bu durumda $[1, 5]$ ql-bağımsızdır. Diğer yandan $\{0\} \subseteq \alpha.[-1, 5]$ durumu için tüm $\alpha \in \mathbb{R}$ sayıları için sağlandığından $\{[-1, 5]\}$ kümesi ql-bağımlıdır. Sonuç olarak $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ de 0 ı içeren bir kapalı aralığın oluşturduğu tek nokta kümesi ql-bağımlıdır. Bu durum da lineer cebirde $\{0\}$ tek nokta kümesinin lineer bağımlı olmasına benzemektedir. Bu da bize bir quasilineer uzayında θ (sıfır) elemanına bağlantılı olan her eleman bir quasilineer bağımlı ifadesini verir. Yani, $\theta \subseteq \{x\}$ ve $x \in X$ için X bir quasilineer uzay oluyorsa $\{x\}$ ql-bağımlı olmak zorundadır. Eğer $\theta \notin \{x\}$ oluyorsa $\{x\}$ ql-bağımsız olmak zorundadır [4].

Tanım 3.1.7. X quasilineer uzayının bir M altkümesi olsun. M kümesi quasilineer bağımsız ve $QspM = X$ ise M ye X in bir bazı (Hamel Bazı) adı verilir [4].

Örnek 3.1.6. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ quasilineer uzayında $M = \{\{3\}\}$ kümesi verilsin. Bu durumda $0 \subseteq \{3\}$ sadece $\alpha = 0$ olduğunda bu kapsamı sağlandığından M kümesi ql-bağımsızdır. Ayrıca, her $x \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ için

$$QspB = \{x \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}} : \alpha.\{3\} \subseteq x, \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$$

olacak şekilde bir $\alpha \in \mathbb{R}$ bulunabileceğinden $QspM = \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ dir. Sonuç olarak $x \in \mathbb{R}$ ve $x \neq 0$ olmak üzere $\{\{x\}\}$ kümesi $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ için bazıdır [4].

Tanım 3.1.8. X bir quasilineer uzay olsun. X in singüler alt uzayının ql-bağımsız elemanların maksimum sayısına X in singüler boyutu denir, s –boyut yazılır ve $s - boyX$ ile gösterilir. X

in regüler alt uzay uzayının boyutuna X in regüler boyutu denir, r -boyut yazılır ve r -boyut X ile gösterilir. Eğer bir quasilineer uzayda r -boyut $X = a$ ve s -boyut $X = b$ ise bu uzaya (a_r, b_s) boyutlu quasilineer uzay adı alır. Buradan n -boyutlu bir lineer uzay $(n_r, 0_s)$ ise X , n -boyutlu bir lineer uzaydır [4].

Örnek 3.1.7. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ quasilineer uzayının singüler alt uzayına V diyelim. $V_r = \{0\}$ olduğundan r -boyut $V = 0$ dir. Ayrıca, $\{[1, 3]\}$, V_s nin quasilineer bağımsız bir elemanı olduğundan s -boyut $V = 1$ olur. Bu şekilde V , $(0_r, 1_s)$ boyutlu bir quasilineer uzay olur. Yani, $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ quasilineer uzayının regüler alt uzayının boyutu $(0_r, 1_s)$ dir [4].

3.2 Normlu Quasilineer Uzaylar

Tanım 3.2.1. X quasilineer uzay olsun, X den $\mathbb{R}$ ye tanımlı $\|\cdot\|$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir norm denir.

nq1) $\|x\| = 0 \iff x = \theta$

nq2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

nq3) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \|x\|$

nq4) $x \preceq y \implies \|x\| \leq \|y\|$

nq5) Her $r > 0$ için en az bir $x_r \in X$ vardır öyle ki $x \preceq y + x_r$ ve $\|x_r\| \leq r \implies x \preceq y$

Bu şartları sağlayan X normlu uzayına, normlu quasilineer uzay denir. [4]

Tanım 3.2.2. X bir reel Banach uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

$$h_X(x, y) = \inf\{\varepsilon \geq 0 : x \preceq y + x_1^\varepsilon, x \preceq y + x_2^\varepsilon, \|x_i^\varepsilon\|_X \leq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlanan metriğe X üzerinde Hausdorff metrik veya diğer bir adıyla norm metriği denir [1].

Örnek 3.2.1. X bir reel Banach uzay olsun. Bu halde X bir tam normlu quasilineer uzaydır. Yani X eşitlik bağıntısıyla, bir Banach quasilineer uzaydır [1].

3.3 İç Çarpım Quasilineer Uzaylar

Tanım 3.3.1. X bir quasilineer uzay olsun. X üzerinde $\langle ., . \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ şeklinde tanımlanan ve aşağıdaki şartları sağlayan fonksiyona bir iççarpım fonksiyonu denir. Her $u, v, t, h \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için;

ipq1) $u, v \in X_r$ ise $\langle u, v \rangle \in (\mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r \equiv \mathbb{R}$ dir.

ipq2) $\langle u + v, t \rangle \subseteq \langle u, t \rangle + \langle v, t \rangle$

ipq3) $\langle \lambda . u, v \rangle = \lambda . \langle u, v \rangle$

ipq4) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

ipq5) $u \in X_r$ için $\langle u, u \rangle \geq 0$ ve $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = \theta$

ipq6) $\|\langle u, v \rangle\| = \sup \left\{ \|\langle a, b \rangle\| : a \in F_u^{\hat{X}}, b \in F_v^{\hat{X}} \right\}$

ipq7) $u \preceq v$ ve $t \preceq h$ ise $\langle u, t \rangle \subseteq \langle v, h \rangle$ dir

ipq8) Her $\varepsilon > 0$ için $u_{\varepsilon} \in X$ olacak şekilde bir eleman vardır. Öyleki; $u \preceq v + u_{\varepsilon}$ ve $\langle u_{\varepsilon}, u_{\varepsilon} \rangle \subseteq S_{\varepsilon}(\theta)$ olursa $u \preceq v$ olur. Bu iç çarpımı ile birlikte X quasilineer uzayına quasilineer iç çarpım uzayı denir. $u \in X$ için

$$\|u\| = \sqrt{\|\langle u, u \rangle\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}}}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona iççarpım normu denir [5].

Tanım 3.3.2. Normlu bir quasilineer uzay, norm metriği yani Hausdorff metriğine göre tam ise bu uzaya Banach quasilineer uzay adını alır. Diğer taraftan bir iççarpım quasilineer uzayı verildiğinde norm metriğine tam oluyorsa Hilbert quasilineer uzay denir [5].

Lemma 3.3.1. $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda.

$$\int_{[a,b]} F(t) dt = \left[\int_{[a,b]} \overline{F(t)} dt, \int_{[a,b]} \overline{F(t)} dt \right]$$

dir [10].

Örnek 3.3.1. $\|[a, \bar{a}]\| = \sup_{t \in [a, b]} |t| = \max\{|a|, |\bar{a}|\}$ normuyla $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ nin bir normlu uzay olduğunu söylemiştik. Aynı zamanda bu normdan doğan metrik olan Hausdorff metriğidir.

$$h_X([a, \bar{a}], [b, \bar{b}]) = \max\{|[a, \bar{a}]|, |[b, \bar{b}]|\}$$

Bu interval analiz ile ilgili birçok kaynakta da belirtildiği gibi bu metrik ile $I_{\mathbb{R}}$ bir tam metrik uzaydır. $I_{\mathbb{R}}$ tamdır. Böylece $I_{\mathbb{R}}$ bu örnekte belirttiğimiz normla bir Banach quasilineer uzaydır. $I_{\mathbb{R}}$ quasilineer uzayı $[\underline{a}, \bar{a}], [\underline{b}, \bar{b}] \in I_{\mathbb{R}}$ olmak üzere;

$$\langle [\underline{a}, \bar{a}], [\underline{b}, \bar{b}] \rangle = [\min\{\underline{a}.\underline{b}, \underline{a}.\bar{b}, \bar{a}.\underline{b}, \bar{a}.\bar{b}\}, \max\{\underline{a}.\underline{b}, \underline{a}.\bar{b}, \bar{a}.\underline{b}, \bar{a}.\bar{b}\}]$$

İç çarpımıyla bir Hilbert quasilineer uzaydır [5].

Örnek 3.3.2. $[-1, 3], [-5, -2] \in I_{\mathbb{R}}$ için

$$\langle [-1, 3], [-5, -2] \rangle = [\min\{5, 2, -15, -6\}, \max\{5, 2, -15, -6\}] = [-15, 5]$$

Şimdi, diğer önemli bir örnek olan $L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ quasilineer uzayından bahsedelim. Burada $[a, b]$ belirli bir kompakt aralık tarafından belirlenmiş küme-değerli fonksiyonlar uzayı olacaktır. Özellikle fonksiyonların diğer uzayı aralıklardan oluştuğu için bu uzay interval-değerli fonksiyonlar uzayı da denir. Bu uzay birçok uygulamaya imkan tanıyan bir uzayıdır [10].

Örnek 3.3.3. $L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ quasilineer uzayı $[a, b]$ aralığında $I_{\mathbb{R}}$ ya tanımlı karesi integralenebilir fonksiyonların uzayı $L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ ile gösterilir. Burada küme-değerli daha doğrusu interval-değerli fonksiyonların integralinden bahsedildiğinden bu integralin Aumanın anlamında integrali olduğunu belirtmek isteriz. Ancak, bazı araştırmalar, burada bahsedilen integralin hesaplanmasında bazı kolaylıkların elde edildiğini göstermektedir. Bu kolaylıkları *İntrodaction to Interval Analysis* isimli kitaptaki 9. bölümde görebiliriz [10].

Örnek 3.3.4. $L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ bir quasilineer uzayıdır. Ayrıca $\forall f \in L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ için

$$\|f\| = \left(\int_{[a, b]} \|f(t)^2\| dt \right)^{1/2}$$

normuyla $L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ bir Banach uzayıdır. Ayrıca bu önemli uzayın

$$\langle f, g \rangle = \int_{[a, b]} \langle f(t), g(t) \rangle_{I_{\mathbb{R}}} = \left\langle [\underline{f}(t), \overline{f}(t)], [\underline{g}(t), \overline{g}(t)] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}}$$

İç çarpıma göre bir Hilbert quasilineer uzay olduğunu da biliyoruz [5] [9].

Örnek 3.3.5. $f(t) = [0, t^2]$, $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$, ve $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$, $g(t) = [0, 1 + t]$ ise $f, g \in L_2([0, 1], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ olduğu görmektedir. Şimdi $\langle f, g \rangle$ yi bulalım.

$$\begin{aligned}
 \langle f, g \rangle &= \int_{[0,1]} \langle [0, t^2], [0, 1 + t] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} dt \\
 &= [\min\{0, 0, 0, t^2 \cdot (1 + t)\}, \max\{0, 0, 0, t^2 \cdot (1 + t)\}] dt \\
 &= [\int_0^1 0 dt, \int_0^1 t^2 \cdot (1 + t) dt] \quad \text{lemma 3.3.1} \\
 &= [0, (\frac{t^3}{3}, \frac{t^4}{4}) \Big|_0^1] \\
 &= [0, \frac{7}{12}]
 \end{aligned}$$

$L_2([a, b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ diğer önemli bir konusu bu uzay üzerinde ortonormal sistemlerin olup olmadığıdır. Bir X quasilineer iç çarpım uzayında $x, y \in X$ olduğunda $\|\langle x, y \rangle\| = 0$ oluyorsa x ve y elemanlarına ortogonaldır denir. Eğer $\|x\| = \|y\| = 1$ ise bu iki elemana ortonormaldır denir. Şimdi $A \subseteq X$ ve A daki her iki eleman ortogonal ise A kümesine X iççarpım quasilineer uzayında ortogonal küme denir. Üstelik A daki her elemanın normu 1 oluyorsa A ya ortonormal küme denir. Buradan anlıyoruzki X daki $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpımın sonucu $\Omega(\mathbb{C})$ nin elemanıdır. Yani iç çarpımın sonucu $\mathbb{C}$ kompleks sayıların bir kompakt altkümesidir. Öyleyse quasilineer uzaylar üzerinde tanımladığımız bu iç çarpım küme değerlidir. Bu tanım [8] de verilmiştir. $L_2([a, b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ nin Hilbert quasilineer uzay olduğunu hatırlayalım. Bu uzayda ortonormal bir kümenin quasilineer bağımsız olduğunu söylemiştik. Amacımız bu uzayda ortonormal bir dizi ortaya çıkarmaktır. Sonra bu kümenin ql-bağımsız olduğunu göstereceğiz.

Örnek 3.3.6. $x_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$, $x_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \dots, x_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \dots$ şeklinde tanımlı $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ dizisi $L_2([0, \pi], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ quasilineer uzayında ortonormal bir dizi olup quasilineer bağımsızdır. Burada (x_k) dizisi tek nokta küme dizisi yani klasik bir dizisidir.

$$\langle x_m, x_n \rangle = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin mx \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx$$

Uyarı 3.3.1. (x_k) dizisi tek nokta küme dizisi yani klasik bir dizisidir.

$$\langle x_m, x_n \rangle = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin mx \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx$$

Burada iki durum var, birinci durum $m \neq n$ olursa

$$\begin{aligned}
 \langle x_m, x_n \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(m-n) - \cos(m+n)] \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\underbrace{\int_0^{\pi} \underbrace{\cos(m-n)}_{\neq 0} \, dx}_{=0} - \underbrace{\int_0^{\pi} \underbrace{\cos(m+n)}_{\neq 0} \, dx}_{=0} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} [\sin(m-n)|_0^{\pi} - \sin(m+n)|_0^{\pi}] = 0
 \end{aligned}$$

ikinci durum $m = n$ olursa ,

$$\begin{aligned}
 \langle x_m, x_n \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} [x - \sin 2nx]_0^{\pi} = 1
 \end{aligned}$$

olur Ayrıca $\langle x_m, x_n \rangle = |1^2| = 1$ olup bu dizi ortonormaldir. Bu dizi tek nokta kümelerinden yani $L_2([0, \pi], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ nin regüler altuzayından seçilmiş bir dizidir. Yani $L_2([0, \pi], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r$ den seçilmiş bir dizidir. Bir quasilinear uzayın regüler altuzayı bir lineer uzaydır. Bu nedenle bu dizide ortonormallik klasik iç çarpım uzaylarında olduğu gibi araştırılır. Ayrıca Fonksiyonel Analizden biliyoruzki bir iç çarpım uzayında ortonormal bir küme lineer bağımsızdır. Bu nedenle bu dizi $L_2([0, \pi], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})_r$ de lineer bağımsızdır. Dolayısıyla $L_2([0, \pi], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ de ql-bağımsızdır.

4. $L_2([a, b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ HİLBERT QUASİLİNEER UZAYI İLE İLGİLİ UYGULAMALAR

Tıpkı klasik $L_2(\mathbb{R})$ fonksiyonlar uzayının bilimde birçok uygulaması olduğu gib $L_2([a, b], \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$ Hilbert quasilineer uzayının da bir çok uygulamasının olacağını düşünüyoruz. Bu uygulamalardan biri de sinyal işleminde yapılmaktadır. Örneği, [8] [9] numaralı kaynaklara bakabiliriz. Kaynaklarda bazı non-deterministik sinyallerin belli şartlar altında tahmini olarak otokorelasyonlarına ait bilgiler elde edilmiştir. Genel olarak bazı uygulamalarda $L_2(\mathbb{R})$ sonlu enerji sinyallerinin uzayı olarak adlandırılmaktadır. Eğer bir f sinyali $L_2(\mathbb{R})$ Hilbert uzayı değilse $\|f\|^2$ fiziksel sinyallerin enerjisine karşılık gelmektedir. Tabiki bu fizik ve elektronikteki çalışmalarda $\|f\|^2$ nin anlamını ifade etmektedir. Başka bir bilim dalında uğraşıyorken $\|f\|^2$ nin veya $\|f\|$ nin başka anlamlara karşılık geleceğini yadırgamamalıyız.

Örnek 4.0.1. *Elektronikte sinüzoidal sinyallerin oldukça önemlidir. Şimdi; $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$; $f(t) = \cos 2t$ sinyallerin enerjisin hesaplayalım.*

$$\begin{aligned}
 E_f &= \|f\|^2 = \int_0^{2\pi} (\cos 2t)^2 dt \quad \text{burada } u = 2t \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos u)^2 du \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 u du \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2u}{2} du \\
 &= \frac{1}{4} \left(\int_0^{2\pi} du + \int_0^{2\pi} \cos 2u du \right) \\
 &= \frac{u}{4} + \frac{\sin 2u}{8} \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \frac{2t}{4} + \frac{\sin 2.2t}{8} \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

Problem 4.0.1. $F : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$, $F(t) = \begin{cases} [\sin t, \cos t] & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \text{ ise} \\ [\cos t, \sin t] & \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ ise} \end{cases}$ *interval-değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Buna göre bu interval-değerli sinyallerin enerjisi $E_F = \|F\|^2$ yi hesaplayalım.*

$$\|E_F\|_{L_2} = \int_{[0, \frac{\pi}{2}]} \|F(t)\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}}^2 dt$$

Burada önce $\|F(t)\|_{\mathbb{R}}$ yi hesaplamalıyız,

$$\begin{aligned}\|[\sin t, \cos t]\| &= \max\{|\sin t|, |\cos t|\}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ &= \cos t\end{aligned}$$

olduğunda

$$\begin{aligned}\|E_{F_1}\| &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t \, dt \right) \\ &= \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi fonksiyonun diğer tarafı çözelim.

$$\begin{aligned}\|[\cos t, \sin t]\| &= \max\{|\cos t|, |\sin t|\}, \quad t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \\ &= \sin t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|E_{F_2}\| &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \, dt \right) \\ &= \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Bu enerjileri toplarsak

$$\begin{aligned}\|E_F\| &= \|E_{F_1}\| + \|E_{F_2}\| \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Sonuç 4.0.1. İnterval sinyallerin genel olarak değerleri belli bir aralığa veya belli bir kare bölgeye sıkıştığı bilinen non-detirmenistik sinyallerin enerjisini tahmin etmede kullanılır.

Görüldüğü gibi bu problemde bu iki sinüzoidal dalga arasında olan non-deterministik bir fiziksel sinyal enerjisini $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ yi aşmayacağını sonucuna ulaşıyoruz.

İç çarpım quasilineer uzayların bir diğer önemli uygulaması da ayrık-zamanlı sinyallerin bir genelleştirmesi olan interval-değerli ayrık-zamanlı sinyallerin işlenmesinde karşımıza çıkmaktadır. Buna ilişkin önemli bir uygulama [8] nolu kaynakta görülmektedir. Bu kaynakta discrete-time bir interval-değerli sinyalin deterministik otokorelasyonu hesaplanmıştır. Bunun yardımıyla değerleri belli bir aralığa sıkışmış eksik bilgiye sahip bir ayrık-zamanlı sinyalin otokorelasyonu ile ilgili tahminler elde edilmiştir. Şimdi discrete-time klasik sinyallerle ilgili temel bilgiler [10] kaynaktan kısaca verelim. Bir ayrık-zamanlı sinyal veya discrete-time sinyal dediğimiz şey şu şekilde yazılan çift taraflı diziden başka birşey değildir:

$$X = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$$

öyleki; $x_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ bu tip sinyallerde önemli yer tutan vektör uzayı $\ell_2(\mathbb{Z})$ vektör uzayıdır. Bu uzay sonlu enerjiye sahip discrete-time sinyallerin vektör uzayı olarak bilinir ve ayrık-zamanlı sinyal işlemlerinin temelini oluşturan bir uzayıdır. Bir zaman sinyalinin discrete-time Fourier transformunu aldığımızda oluşan dizi yine $\ell_2(\mathbb{Z})$ de bir dizidir ve terimlerin frekansını ifade eden bir dizidir. $\ell_2(\mathbb{Z})$ nin dizilerin toplanması ve bir skalarlar ile çarpılması işlemine göre bir vektör uzayı olduğunu biliyoruz. Aynı zamanda $\ell_2(\mathbb{Z})$ uzayı

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i y_i^*$$

iç çarpımıyla bir Hilbert uzayıdır ve bu iç çarpımdan doğan norm $\|x\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 \right)^{1/2}$ bu şekilde tanımlıdır. Ayrık-zamanlı olan bir x sinyalin deterministik otokorelasyonu $a = (a_n)$ şeklinde bir dizidir. Öyleki ;

$$a_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \cdot x_{k-n}^*$$

şeklinde tanımlıdır. Burada x_{k-n}^* elemanı x_{k-n} nin kompleks sayının eşleniğidir. Ayrıca

$$a_n = a_{-n}$$

$$a_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 = \|x\|^2$$

şeklinde belirlenir. Ayrıca, şunu da biliyoruz ki $a_n = a_{-n}$ özelliğini sağlar. Yani bir x dizisinin deterministik otokorelasyonu olan a dizisi sıfır noktasına göre simetrik olmak zorundadır.

Şimdi discrete-time bir interval sinyal ayrık-zamanlı interval sinyali ile intervallerinin iki taraflı bir dizisini kastediyoruz. Öyleki;

$$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = ([\underline{x}_n, \overline{x}_n])_{n \in \mathbb{Z}} = (\dots, [\underline{x}_{-2}, \overline{x}_{-2}], [\underline{x}_{-1}, \overline{x}_{-1}], [\underline{x}_0, \overline{x}_0], [\underline{x}_1, \overline{x}_1], [\underline{x}_2, \overline{x}_2], \dots)$$

Şeklinde bir dizidir. Bu şekilde tanımlı interval-değerli diziler üzerinde

$$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \preceq (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \iff [\underline{x}_n, \overline{x}_n] \subseteq [\underline{y}_n, \overline{y}_n]$$

Her $n \in \mathbb{Z}$ için şekilde tanımlanan bağıntı bir kısmî sıralama bağıntısıdır. Böylece bu şekilde tanımlı bütün interval dizilerin kümesi $\mathbb{I}_\omega$ ile gösterilirse $\mathbb{I}_\omega$ bu bağıntıyla bir quasilineer uzay olur. $\mathbb{I}_\omega$ üzerindeki toplama işlemi yani iki interval dizisinin toplamı her bir dizinin karşılıklı koordinatlarındaki intervallerin toplamı şeklinde; bir interval dizisinin bir λ reel skaleri ile çarpımı her bir koordinatındaki intervalin λ skaleri ile çarpımı şeklinde tanımlanır. Bu skalerinin bir intervalle çarpımı;

$$\lambda \cdot [\underline{x}_n, \overline{x}_n] = \begin{cases} [\lambda \underline{x}_n, \lambda \overline{x}_n] & \text{eğer } \lambda \geq 0 \\ [\lambda \overline{x}_n, \lambda \underline{x}_n] & \text{eğer } \lambda < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olduğunu unutmamalıyız. Şimdi $\mathbb{I}_\omega$ quasilineer uzayının önemli bir alt uzayı olan $\mathbb{I}_{\ell_2}$ yi tanıtalım.

$$\mathbb{I}_{\ell_2} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{I}_\omega : \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\|x\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}}$ de dediğimiz norm

$$\begin{aligned} \|x_n\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} &= \|[\underline{x}_n, \overline{x}_n]\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\ &= |[\underline{x}_n, \overline{x}_n]| \\ &= \max\{|\underline{x}_n|, |\overline{x}_n|\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu tanım interval analizinde bir aralığın mutlak değeri kavramıdır ve bu mutlak değer $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ üzerindeki norm olarak bilinir ve böylece $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ nin bir normlu quasilineer uzay hatta Banach quasilineer uzayı olduğu bilinir. $\mathbb{I}_{\ell_2}$ yi sonlu enerjili interval değerli ayrık-zamanlı sinyaller uzayı olarak da nitelendirebiliriz. Bu tip sinyaller aslında doğal olarak karşımıza çıkan sinyaller değildir. Eksik bilgiye sahip non-deterministik sinyalleri işleyebilmek için oluşturulan model sinyal tiplerinden birisidir. Şimdi bu uzayın yani $\mathbb{I}_{\ell_2}$ nin üzerinde doğal olarak

$$\begin{aligned} \|(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\mathbb{I}_{\ell_2}} &= \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\max\{|\underline{x}_n|, |\overline{x}_n|\})^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

fonksiyonu bir norm tanımlar ve $\mathbb{I}\ell_2$ bu normla bir normlu quasilineer uzayıdır. Hatta bir Banach quasilineer uzayıdır. $\mathbb{I}\ell_2$ yi bir açıdan sonlu enerjiye sahip interval-değerli ayrık-zamanlı sinyallerin uzayı olarak da görebiliriz. Şimdi bu tip sinyallerin otokorelasyonun kavramını tanıyabilmek için önemli yer tutacak özelliğini verelim [8].

Teorem 4.0.1. $\mathbb{I}\ell_2$ uzayı

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\underline{x_n}, \overline{x_n}] \cdot [\underline{y_n}, \overline{y_n}]$$

şeklinde tanımlanan iç çarpımı ile bir iççarpım quasilineer uzayıdır. Bu tanım [8] verilmiştir. Ayrıca bu iç çarpımdan doğan normun $\mathbb{I}\ell_2$ için yukarıda tanımlanan norm olduğu da gösterilmiştir. Aynı kaynakta [8] yukarıda tanımladığımız iç çarpım kullanarak bir ayrık-zamanlı bir interval-değerli sinyal otokorelasyonu şu şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 4.0.1. $\mathbb{I}\ell_2$ de bir $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ dizisinin deterministik otokorelasyonu her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$A_n = \langle (x_n), (y_n) \rangle_{\mathbb{I}\ell_2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x_k, x_{k-n} \rangle_{\mathbb{I}\mathbb{R}}$$

$$A_n = \dots + \langle x_{-2}, x_{-2-n} \rangle + \langle x_{-1}, x_{-1-n} \rangle + \langle x_0, x_{-n} \rangle + \langle x_1, x_{1-n} \rangle + \dots$$

şartını sağlayan bir $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dizisidir

Örnek 4.0.2.

$$(x_n) = (\dots, 0, 0, [\frac{-1}{2}, 0], [0, 0], [0, 1], [0, \frac{1}{2}], [0, \frac{1}{2^2}], [0, \frac{1}{2^3}], \dots)$$

ve

$$(y_n) = (\dots, [\frac{-1}{2^2}, 0], [\frac{-1}{2}, 0], 0, [0, 1], [0, \frac{1}{2}], 0, 0, \dots)$$

(x_n) ve $(y_n) \in \mathbb{I}\ell_2$ olduğunu göstererek $\langle (x_n), (y_n) \rangle$ bulunuz.

Çözüm 4.0.1.

$$\|(x_n)\|_{\mathbb{I}\ell_2} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|x_k\|_{\mathbb{I}\mathbb{R}}^2 \right)^{1/2} < \infty \iff \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|x_k\|_{\mathbb{I}\mathbb{R}} < \infty$$

gösterelim. Her $k \in \mathbb{Z}$ için $\|x_k\|_{\mathbb{I}\mathbb{R}} = ?$

$$k < -1 \text{ için } \|x_k\|_{\mathbb{I}\mathbb{R}} = 0$$

$$k = -1 \text{ için } \|x_k\| = \|x_{-1}\| = \left\| \left[-\frac{1}{2}, 0 \right] \right\| = \max \left\{ \left| -\frac{1}{2} \right|, |0| \right\} = \frac{1}{2}$$

$$k = 0 \text{ için } \|x_0\| = \|0\| = 0$$

$$k = 1 \text{ için } \|x_1\| = \|[0, 1]\| = \max\{|0|, |1|\} = 1$$

$$\|x_2\| = \frac{1}{2}, \quad \|x_3\| = \frac{1}{4}, \quad \|x_n\| = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{her } n > 1 \text{ için}$$

$$\|x_k\|_{\mathbb{I}\mathbb{R}}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|x_k\|_{\mathbb{I}\mathbb{R}}^2 = \frac{1}{4} + 0 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k-1}} \right)^2 = \frac{1}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-2}} < \infty \in \mathbb{I}\ell_2$$

çünkü seri yakınsaktır. $(y_n) = (... , [\frac{-1}{2^2}, 0], [\frac{-1}{2}, 0], 0, [0, 1], [0, \frac{1}{2}], 0, 0, ...)$ için $\|y_k\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}}$ yi hesaplayalım.

$$\|(y_n)\|_{\mathbb{I}_{\ell_2}} = (\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|y_k\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}}^2)^{1/2} < \infty \iff \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|y_k\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} < \infty$$

$$k = -2 \text{ için } \|y_k\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \left\| \left[-\frac{1}{2^2}, 0 \right] \right\| = \max \left\{ \left| -\frac{1}{2^2} \right|, |0| \right\} = \frac{1}{4}$$

$$k = -1 \text{ için } \|y_k\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \frac{1}{2}, k = 0; \|y_k\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = 0$$

$$k = 1, \|y_k\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = 1, k = 2 \text{ için } \|y_k\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \frac{1}{2}, k = 3; \|y_k\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = 0$$

$$\|y_k\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \frac{1}{2^{-k}} \quad \text{her } k < 0 \text{ için}$$

$$\|y_k\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|y_k\|_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}}^2 = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} + 0 + 1 + \frac{1}{4} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} + \frac{5}{4} < \infty \in \mathbb{I}_{\ell_2}$$

seri yakınsaktır. Şimdi $\langle (x_n), (y_n) \rangle$ yi bulalım.

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\underline{x_n}, \overline{x_n}] \cdot [\underline{y_n}, \overline{y_n}]$$

$n < -1$ için,

$$\begin{aligned} \langle (x_n), (y_n) \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\underline{x_n}, \overline{x_n}] \cdot [\underline{y_n}, \overline{y_n}] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} [0, 0] \cdot \left[-\frac{1}{2^2}, 0 \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\min \left\{ \underbrace{(0 \cdot -\frac{1}{2^2}), (0 \cdot 0), (0 \cdot -\frac{1}{2^2}), (0 \cdot 0)}_{S_1}, \max S_1 \right\} \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} [0, 0] = 0 \end{aligned}$$

$n = -1$ için,

$$\langle (x_{-1}), (y_{-1}) \rangle = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right] \cdot \left[-\frac{1}{2}, 0 \right] = \left[0, \frac{1}{4} \right] = [0, 0.25]$$

$n = 0$ için,

$$\langle (x_0), (y_0) \rangle = [0, 0] \cdot [0, 0] = [0, 0] = 0$$

$n = 1$ için,

$$\langle (x_1), (y_1) \rangle = [0, 1] \cdot [0, 1] = [0, 1]$$

$n = 2$ için,

$$\langle (x_2), (y_2) \rangle = \left[0, \frac{1}{2} \right] \cdot \left[0, \frac{1}{2} \right] = \left[0, \frac{1}{4} \right] = [0, 0.25]$$

$n = 3$ için,

$$\langle (x_3), (y_3) \rangle = \left[0, \frac{1}{2^2}\right] \cdot [0, 0] = [0, 0]$$

$n > 3$ için,

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = 0$$

Bu da bize

$$\begin{aligned} \langle (x_n), (y_n) \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} [x_n, \bar{x}_n] \cdot [y_n, \bar{y}_n] \\ &= [0, 0] + [0, 0.25] + [0, 0] + [0, 1] + [0, 0.25] + [0, 0] + [0, 0] \\ &= [0, 1.5] \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, iç çarpım da sonlu bir değer olacaktır. Dolayısıyla, hem (x_n) hem de (y_n) dizileri $\mathbb{I}\ell_2$ uzayında yer alır ve iç çarpım belirli terimler üzerinden hesaplandığında sonlu bir değere ulaşır.

Örnek 4.0.3. Yukarıdaki (x_n) interval dizisinin deterministik otokorelasyonunu tanımlayarak hesaplayalım. A_0 ı hesaplayalım.

$$\begin{aligned} A_0 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x_k, x_{k-0} \rangle_{I_{\mathbb{R}}} = \cdots + \langle x_{-1}, x_{-1} \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle x_0, x_0 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle x_1, x_1 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle x_2, x_2 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} \\ &\quad + \langle x_3, x_3 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle x_4, x_4 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle x_5, x_5 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \cdots \\ &= \cdots + \left\langle \left[\frac{-1}{2}, 0 \right], \left[\frac{-1}{2}, 0 \right] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 1], [0, 1] \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2} \right], \left[0, \frac{1}{2} \right] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} \\ &\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^2} \right], \left[0, \frac{1}{2^2} \right] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^3} \right], \left[0, \frac{1}{2^3} \right] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^4} \right], \left[0, \frac{1}{2^4} \right] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \cdots \\ &= \cdots + \left(\left[\frac{-1}{2}, 0 \right] \cdot \left[\frac{-1}{2}, 0 \right] \right) + ([0, 0] \cdot [0, 0]) + ([0, 1] \cdot [0, 1]) + \left(\left[0, \frac{1}{2} \right] \cdot \left[0, \frac{1}{2} \right] \right) \\ &\quad + \left(\left[0, \frac{1}{2^2} \right] \cdot \left[0, \frac{1}{2^2} \right] \right) + \left(\left[0, \frac{1}{2^3} \right] \cdot \left[0, \frac{1}{2^3} \right] \right) + \left(\left[0, \frac{1}{2^4} \right] \cdot \left[0, \frac{1}{2^4} \right] \right) + \cdots \\ &= \left[0, \frac{1}{2^2} \right] + [0, 0] + [0, 1] + \left[0, \frac{1}{2^2} \right] + \left[0, \frac{1}{2^4} \right] + \left[0, \frac{1}{2^6} \right] + \left[0, \frac{1}{2^8} \right] + \cdots \\ &= \left[0, \frac{1}{2} \right] + \left[0, 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \cdots \right] \\ &= \left[0, \frac{1}{2} \right] + \left(\left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^0 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^1 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^3 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^4 \right] + \cdots \right) \\ &= \left[0, \frac{1}{2} \right] + \left[0, \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right] = \left[0, \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \right] \\ &= [0, 1.833333333] \end{aligned}$$

şimdi $A_{\pm 1}$ i hesaplayalım

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x_k, x_{k-1} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \cdots + \langle x_{-1}, x_{-2} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_0, x_{-1} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_1, x_0 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_2, x_1 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \langle x_3, x_2 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_4, x_3 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_5, x_4 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \cdots \\
&= \cdots + \left\langle \left[\frac{-1}{2}, 0 \right], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, 0], \left[\frac{-1}{2}, 0 \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 1], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2} \right], [0, 1] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^2} \right], \left[0, \frac{1}{2} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^3} \right], \left[0, \frac{1}{2^2} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^4} \right], \left[0, \frac{1}{2^3} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \cdots \\
&= \cdots + \left(\left[\frac{-1}{2}, 0 \right] \cdot [0, 0] \right) + ([0, 0] \cdot [0, 1]) + ([0, 1] \cdot [0, 0]) + \left(\left[0, \frac{1}{2} \right] \cdot [0, 1] \right) + \\
&\quad \left(\left[0, \frac{1}{2^2} \right] \cdot \left[0, \frac{1}{2} \right] \right) + \left([0, 0] \cdot \left[0, \frac{1}{2^2} \right] \right) + \left(\left[0, \frac{1}{2^4} \right] \cdot \left[0, \frac{1}{2^3} \right] \right) + \cdots \\
&= [0, 0] + [0, 0] + [0, 0] + \left[0, \frac{1}{2} \right] + \left[0, \frac{1}{2^3} \right] + \left[0, \frac{1}{2^5} \right] + \left[0, \frac{1}{2^7} \right] + \cdots \\
&= \left[0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \cdots \right] \\
&= [0, 0] + \frac{1}{2} \left(\left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^0 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^1 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^3 \right] + \cdots \right) \\
&= \left[0, \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) \right] = \left[0, \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \right] = [0, 0.6666666667]
\end{aligned}$$

A_{-1} in otokorelasyonunu hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
A_{-1} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x_k, x_{k+1} \rangle_{I_{\mathbb{R}}} = \cdots + \langle x_{-1}, x_0 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle x_0, x_1 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle x_1, x_2 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle x_2, x_3 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \langle x_3, x_4 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle x_4, x_5 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle x_5, x_6 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \cdots \\
&= \cdots + \left\langle \left[\frac{-1}{2}, 0 \right], [0, 0] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 0], [0, 1] \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, 1], \left[0, \frac{1}{2} \right] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2} \right], \left[0, \frac{1}{2^2} \right] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^2} \right], \left[0, \frac{1}{2^3} \right] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^3} \right], \left[0, \frac{1}{2^4} \right] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^4} \right], \left[0, \frac{1}{2^5} \right] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \cdots \\
&= [0, 0] + [0, 0] + [0, 0] + \left[0, \frac{1}{2} \right] + \left[0, \frac{1}{2^3} \right] + \left[0, \frac{1}{2^5} \right] + \left[0, \frac{1}{2^7} \right] + \left[0, \frac{1}{2^9} \right] + \cdots \\
&= [0, 0] + \frac{1}{2} \left(\left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^0 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^1 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^3 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^4 \right] + \cdots \right) \\
&= \left[0, \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) \right] = \left[0, \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \right] = [0, 0.666666667]
\end{aligned}$$

$A_{\pm 2}$ yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
A_2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x_k, x_{k-2} \rangle_{I_{\mathbb{R}}} = \cdots + \langle x_{-1}, x_{-3} \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle x_0, x_{-2} \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle x_1, x_{-1} \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle x_2, x_0 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \langle x_3, x_1 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle x_4, x_2 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle x_5, x_3 \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \cdots \\
&= \cdots + \left\langle \left[\frac{-1}{2}, 0 \right], [0, 0] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, 1], \left[\frac{-1}{2}, 0 \right] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2} \right], [0, 0] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^2} \right], [0, 1] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^3} \right], \left[0, \frac{1}{2} \right] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^4} \right], \left[0, \frac{1}{2^2} \right] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^5} \right], \left[0, \frac{1}{2^3} \right] \right\rangle_{I_{\mathbb{R}}} \cdots \\
&= [0, 0] + [0, 0] + \left[\frac{-1}{2}, 0 \right] + [0, 0] + \left[0, \frac{1}{2^2} \right] + \left[0, \frac{1}{2^4} \right] + \left[0, \frac{1}{2^6} \right] + \left[0, \frac{1}{2^8} \right] + \cdots \\
&= \left[\frac{-1}{2}, 0 \right] + \frac{1}{4} \left(\left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^0 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^1 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^3 \right] + \cdots \right) \\
&= \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right] = \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \right] = [-0.5, 0.333333333]
\end{aligned}$$

A_{-2} yi bulalım.

$$\begin{aligned}
A_{-2} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x_k, x_{k+2} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \cdots + \langle x_{-1}, x_1 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_0, x_2 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_1, x_3 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \langle x_2, x_4 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_3, x_5 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_4, x_6 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_5, x_7 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \cdots \\
&= \cdots + \left\langle \left[\frac{-1}{2}, 0 \right], [0, 1] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, 0], \left[0, \frac{1}{2} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, 1], \left[0, \frac{1}{2^2} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2} \right], \left[0, \frac{1}{2^3} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^2} \right], \left[0, \frac{1}{2^4} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^3} \right], \left[0, \frac{1}{2^5} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^4} \right], \left[0, \frac{1}{2^6} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \cdots \\
&= \left[\frac{-1}{2}, 0 \right] + [0, 0] + \left[0, \frac{1}{2^2} \right] + \left[0, \frac{1}{2^4} \right] + \left[0, \frac{1}{2^6} \right] + \left[0, \frac{1}{2^8} \right] + \left[0, \frac{1}{2^{10}} \right] + \cdots \\
&= \left[\frac{-1}{2}, 0 \right] + \frac{1}{4} \left(\left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^0 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^1 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(\left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^3 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^4 \right] \right) + \cdots \\
&= \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) \right] = \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \right] = [-0.5, 0.333333333]
\end{aligned}$$

$A_{\pm 3}$ yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
A_3 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x_k, x_{k-3} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \cdots + \langle x_{-1}, x_{-4} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_0, x_{-3} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_1, x_{-2} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_2, x_{-1} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \langle x_3, x_0 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_4, x_1 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_5, x_2 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_6, x_3 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \cdots \\
&= \cdots + \left\langle \left[\frac{-1}{2}, 0 \right], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 1], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{2} \right], \left[\frac{-1}{2}, 0 \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^2} \right], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^3} \right], [0, 1] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^4} \right], \left[0, \frac{1}{2} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^5} \right], \left[0, \frac{1}{2^2} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \cdots \\
&= \cdots + [0, 0] + [0, 0] + [0, 0] + \left[\frac{-1}{4}, 0 \right] + [0, 0] + \left[0, \frac{1}{2^3} \right] + \left[0, \frac{1}{2^5} \right] + \left[0, \frac{1}{2^7} \right] + \cdots \\
&= \left[\frac{-1}{4}, 0 \right] + \frac{1}{8} \left(\left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^0 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^1 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] + \cdots \right) \\
&= \left[\frac{-1}{4}, 0 \right] + \frac{1}{8} \left(\left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^0 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^1 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] + \cdots \right) \\
&= \left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) \right] = [-0.25, 0.166666667]
\end{aligned}$$

A_{-3} için

$$\begin{aligned}
A_{-3} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x_k, x_{k+3} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \cdots + \langle x_{-1}, x_2 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_0, x_3 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_1, x_4 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \langle x_2, x_5 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_3, x_6 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_4, x_7 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_5, x_8 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \cdots \\
&= \cdots + \left\langle \left[\frac{-1}{2}, 0 \right], \left[0, \frac{1}{2} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, 0], \left[0, \frac{1}{2^2} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, 1], \left[0, \frac{1}{2^3} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{2} \right], \left[0, \frac{1}{2^4} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^2} \right], \left[0, \frac{1}{2^5} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^3} \right], \left[0, \frac{1}{2^6} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^4} \right], \left[0, \frac{1}{2^7} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \cdots \\
&= \cdots + \left[\frac{-1}{4}, 0 \right] + [0, 0] + \left[0, \frac{1}{2^3} \right] + \left[0, \frac{1}{2^5} \right] + \left[0, \frac{1}{2^7} \right] \\
&\quad + \left[0, \frac{1}{2^9} \right] + \left[0, \frac{1}{2^7} \right] + \left[0, \frac{1}{2^{10}} \right] + \cdots \\
&= \left[\frac{-1}{4}, 0 \right] + \frac{1}{8} \left(\left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^0 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^1 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] \right) \\
&\quad + \frac{1}{8} \left(\left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^3 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^4 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right] + \cdots \right) \\
&= \left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) \right] = [-0.25, 0.166666667]
\end{aligned}$$

$A_{\pm 4}$ için

$$\begin{aligned}
A_4 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x_k, x_{k-4} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \cdots + \langle x_{-1}, x_{-5} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_0, x_{-4} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_1, x_{-3} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_2, x_{-2} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \langle x_3, x_{-1} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_4, x_0 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_5, x_1 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_6, x_2 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_7, x_3 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_8, x_4 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle x_9, x_5 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \cdots \\
&= \cdots + \left\langle \left[\frac{-1}{2}, 0 \right], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 1], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2} \right], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^2} \right], \left[\frac{-1}{2}, 0 \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^3} \right], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^4} \right], [0, 1] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^5} \right], \left[0, \frac{1}{2} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^6} \right], \left[0, \frac{1}{2^2} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^7} \right], \left[0, \frac{1}{2^3} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^8} \right], \left[0, \frac{1}{2^4} \right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \cdots \\
&= \cdots + [0, 0] + [0, 0] + [0, 0] + [0, 0] + [0, 0] + \left[\frac{-1}{2^3}, 0 \right] + [0, 0] \\
&\quad + \left[0, \frac{1}{2^4} \right] + \left[0, \frac{1}{2^6} \right] + \left[0, \frac{1}{2^8} \right] + \left[0, \frac{1}{2^{10}} \right] + \left[0, \frac{1}{2^{12}} \right] + \cdots \\
&= \left[\frac{-1}{2^3}, 0 \right] + \left[0, \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{12}} + \cdots \right] \\
&= \left[\frac{-1}{2^3}, 0 \right] + \frac{1}{16} \left(\left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^0 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^1 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^3 \right] + \left[0, \left(\frac{1}{4} \right)^4 \right] + \cdots \right) \\
&= \left[\frac{-1}{2^3}, \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right] = [-0.125, 0.0833333333]
\end{aligned}$$

A_{-4} de aynı sonuç verir.

$$A_n \cong \{ \dots, [-0.5, 0.33], \underbrace{[0, 0.66]}_{A_{-1}}, \underbrace{[0, 1.83]}_{A_0}, \underbrace{[0, 0.66]}_{A_1}, [-0.5, 0.33], [-0.25, 0.16], [-0.125, 0.083], \dots \}$$

otokorelasyonu bu şekilde hesaplanır.

Teorem 4.0.2. (x_n) ve (y_n) interval-değerli diziler $\mathbb{I}\ell_2$ quasilineer uzayının herhangi iki eleman olsun. Eğer $(x_k) \preceq (y_k)$ yani, her k için $[\underline{x}_k, \overline{x}_k] \subseteq [\underline{y}_k, \overline{y}_k]$ oluyorsa bu durumda

$$A_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x_k, x_{k-n} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \subseteq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle y_k, y_{k-n} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = B_n$$

olur. Yani $(A_n) \preceq (B_n)$ olur.

İspat: Hipotez gereği her $k \in \mathbb{Z}$ için $[\underline{x}_k, \overline{x}_k] \subseteq [\underline{y}_k, \overline{y}_k]$ olduğundan, her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned}
\langle x_k, x_{k-n} \rangle_{I_{\mathbb{R}}} &= [\underline{x}_k, \overline{x}_k] \cdot [\underline{x}_{k-n}, \overline{x}_{k-n}] \\
&= \left[\min \left\{ \underbrace{\underline{x}_k \cdot \underline{x}_{k-n}, \underline{x}_k \cdot \overline{x}_{k-n}, \overline{x}_k \cdot \underline{x}_{k-n}, \overline{x}_k \cdot \overline{x}_{k-n}}_{S_1}, \max \{S_1\} \right\}, \max \{S_1\} \right] \\
&= \left[\min \left\{ \underbrace{\underline{y}_k \cdot \underline{y}_{k-n}, \underline{y}_k \cdot \overline{y}_{k-n}, \overline{y}_k \cdot \underline{y}_{k-n}, \overline{y}_k \cdot \overline{y}_{k-n}}_{S_2}, \max \{S_2\} \right\}, \max \{S_2\} \right] \\
&= \langle y_k, y_{k-n} \rangle_{I_{\mathbb{R}}}
\end{aligned}$$

yazarız. Böylece toplama gelirse

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x_k, x_{k-n} \rangle_{I_{\mathbb{R}}} \subseteq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle y_k, y_{k-n} \rangle_{I_{\mathbb{R}}}$$

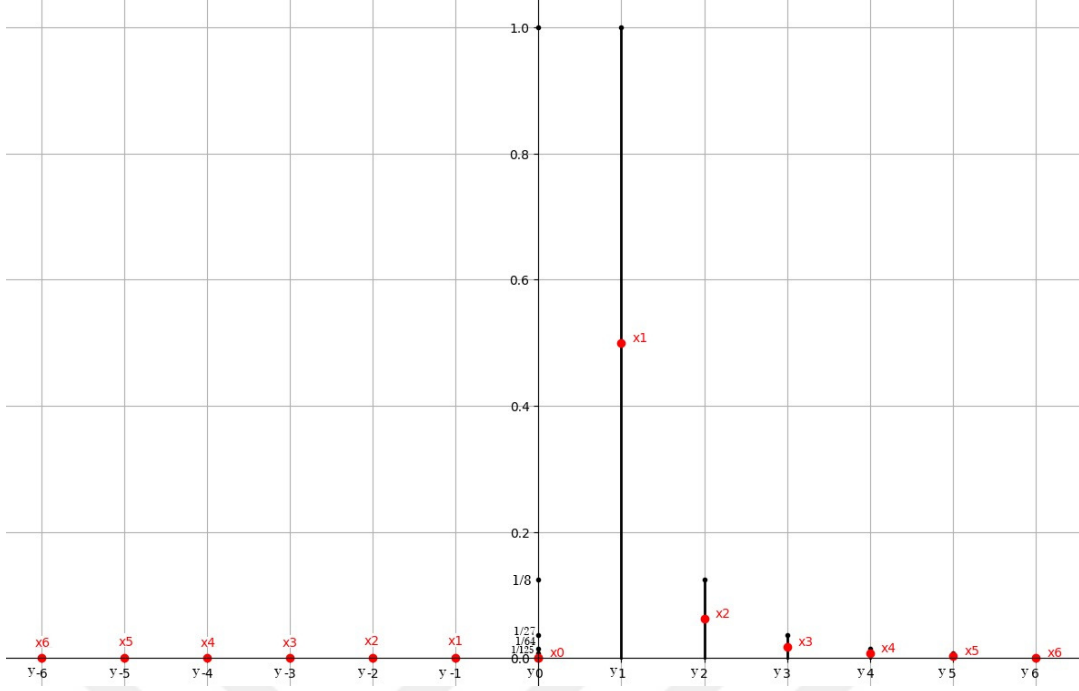
sonucuna ulaşılır. Buradan ispatı elde ederiz. Bu ispatta iki intervalin çarpım tanımını hatırlanmalı çünkü intervallerin uzayı $I_{\mathbb{R}}$ deki iç çarpım bir interval çarpımıdır ve $I_{\mathbb{R}}$ bir iç çarpımı ile bir Hilbert quasilineer uzayıdır.

Örnek 4.0.4. $[-3, 7], [2, 5] \in I_{\mathbb{R}}$ için , buradaki iç çarpım

$$\begin{aligned}
\langle [-3, 7], [2, 5] \rangle &= [-3, 7] \cdot [2, 5] \\
&= [\min \{-3 \cdot 2, -3 \cdot 5, 7 \cdot 2, 7 \cdot 5\}, \max \{-3 \cdot 2, -3 \cdot 5, 7 \cdot 2, 7 \cdot 5\}] \\
&= [\min \{-6, -15, 14, 35\}, \max \{-6, -15, 14, 35\}] \\
&= [-15, 35]
\end{aligned}$$

Şimdi non-deterministik olan ve eksik bilgiye sahip bir discrete-time sinyalin deterministik otokorelasyonuna ilişkin bir tahmin geliştirmeye çalışacağız.

Uyarı 4.0.1. Bir sinyalin deterministik otokorelasyonu veya diğer bir deyişle deterministik öz bağlantısı, bu discrete-time sinyalin farklı zaman noktalarındaki değerleri arasındaki iç bağlantısıdır (korelasyonudur). Başka bir söylem ile discrete-time sinyalin değerleri arasındaki uyumu veya bir ölçüde benzerliğini zamana bağlı bir fonksiyon olarak belirtmesidir. Deterministik otokorelasyonun analizi yapıldığında sinyalin tekrar eden kısımlarının tanınması, sinyalin temel frekansının kayıp kısımlarının tespit edilmesi mümkün olur. Otokorelasyon analizi bu amaca hizmet eden matematiksel bir araçtır. Örneğin; çoklu regrasyon analizinde deterministik otokorelasyonu kullanarak hata miktarının veya hatalı sinyalin değerleri birbirini



Şekil 4.1 : Çubuk(aralık) olan (y_n) interval-değerli dizisi, koyu noktalı olan (x_n) klasik dizisi

izleyen kısımların arasındaki ilişkiyi tespit edebiliriz. Böyle bir duruma karşılaştığımızda doğrusal olan regresyon modelimizi belirlediğimiz bir varsayımdan sapmalar yaşadığı sonucuna varırız.

Şimdi interval-değerli sinyalleri kullanarak bir non-deterministik (eksik bilgiye sahip) sinyalin deterministik otokorelasyonu ile ilgili sonuçlar çıkarmaya çalışacağız.

Problem 4.0.2. Şimdi farzedelimki non-deterministik discrete-time bir $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sinyali şu şekilde elde edilmiş olsun; (x_n) sinyali bir zaman sinyali ve $n = 1, 2, 3, 4, 5$ zaman noktalarındaki değerleri 0 ve $\frac{1}{n^3}$ zaman değerleri arasında bulunmakta ve 1, 2, 3, 4, 5 zaman noktaları dışında sinyal alınmamakta, yani sinyal değeri 0 olmaktadır. Böyle bir zaman sinyalinin yani (x_n) nin eksik bilgiye sahip bir non-deterministik bir sinyal olduğunu söyleriz. Şimdi bu sinyalin deterministik otokorelasyonu ile ilgili bilgi elde etmeye çalışacağız. Bunun için interval-değerli dizileri kullanacağız. Daha açık olarak bir interval-değerli (y_n) sinyali tanımlayacağız öyleki $x_n \in y_n$ olacak. Bu model sinyallerimiz, yukarıdaki bilgilere göre

$$(y_n)_{n \in \mathbb{Z}} = \left(\dots, 0, 0, 0, [0, 1], [0, \frac{1}{8}], [0, \frac{1}{27}], [0, \frac{1}{64}], [0, \frac{1}{125}], 0, 0, \dots \right)$$

şeklinde tanımlı, sonlu bir interval-değerli dizi olarak ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $x_n \in y_n$ şartı verilen bilgiler doğrultusunda sağlanacak. Açık olarak görülmektedir ki $(y_n) \in \mathbb{I}\ell_2$ dir ve $\mathbb{I}\ell_2$

Hilbert quasilineer uzayındaki iç çarpımı kullanarak (y_n) interval sinyalinin deterministik otokorelasyonu hesaplanacak. Bu (y_n) dizisinin deterministik otokorelasyon dizisini (A_n) ile gösterelim. Şimdi önceden verdiğimiz tanımdan otokorelasyon formunu tekrardan yazalım.

$$A_n = \langle x_k, x_{k-n} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x_k, x_{k-n} \rangle$$

Buna göre (y_n) dizisi için otokorelasyon formülü

$$A_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle y_k, y_{k-n} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}}$$

Bu forma göre $A_0, A_{\pm 1}, A_{\pm 2}, \dots$ değerlerini teker teker hesaplamalıyız. Öncelikle A_0 ı hesaplayalım.

$$\begin{aligned} A_0 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle y_k, y_{k-0} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \dots + \langle y_{-1}, y_{-1} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_0, y_0 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_1, y_1 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\ &\quad + \langle y_2, y_2 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_3, y_3 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_4, y_4 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_5, y_5 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\ &= \dots + 0 + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 1], [0, 1] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^3}\right], \left[0, \frac{1}{2^3}\right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\ &\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{3^3}\right], \left[0, \frac{1}{3^3}\right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{4^3}\right], \left[0, \frac{1}{4^3}\right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{5^3}\right], \left[0, \frac{1}{5^3}\right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\ &= \dots + 0 + [0, 0] \cdot [0, 0] + [0, 1] \cdot [0, 1] + \left[0, \frac{1}{2^3}\right] \cdot \left[0, \frac{1}{2^3}\right] \\ &\quad + \left[0, \frac{1}{3^3}\right] \cdot \left[0, \frac{1}{3^3}\right] + \left[0, \frac{1}{4^3}\right] \cdot \left[0, \frac{1}{4^3}\right] + \left[0, \frac{1}{5^3}\right] \cdot \left[0, \frac{1}{5^3}\right] \\ &= \dots + 0 + 0 + [0, 1] + \left[0, \frac{1}{2^6}\right] + \left[0, \frac{1}{3^6}\right] + \left[0, \frac{1}{4^6}\right] + \left[0, \frac{1}{5^6}\right] \\ &= \left[0, 1^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{3}\right)^6 + \left(\frac{1}{4}\right)^6 + \left(\frac{1}{5}\right)^6\right] \\ &= [0, 0.0174197099] \end{aligned}$$

Şimdi $A_{\pm 1}$ hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle y_k, y_{k-1} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \dots + \langle y_{-1}, y_{-2} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_0, y_{-1} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_1, y_0 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \langle y_2, y_1 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_3, y_2 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_4, y_3 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_5, y_4 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_6, y_5 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&= \dots + 0 + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 1], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, \frac{1}{2^3}], [0, 1] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, \frac{1}{3^3}], [0, \frac{1}{2^3}] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle [0, \frac{1}{4^3}], [0, \frac{1}{3^3}] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, \frac{1}{5^3}], [0, \frac{1}{4^3}] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, 0], [0, \frac{1}{5^3}] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&= \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + [0, \frac{1}{2^3}] + [0, \frac{1}{6^3}] + [0, \frac{1}{12^3}] + [0, \frac{1}{20^3}] + 0 \\
&= \left[0, \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \left(\frac{1}{6} \right)^3 + \left(\frac{1}{12} \right)^3 + \left(\frac{1}{20} \right)^3 \right] = [0, 0.130333333]
\end{aligned}$$

A_{-1} ise

$$\begin{aligned}
A_{-1} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle y_k, y_{k+1} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \dots + \langle y_{-1}, y_0 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_0, y_1 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_1, y_2 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \langle y_2, y_3 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_3, y_4 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_4, y_5 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_5, y_6 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_6, y_7 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&= \dots + 0 + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 0], [0, 1] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, 1], [0, \frac{1}{2^3}] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, \frac{1}{2^3}], [0, \frac{1}{3^3}] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle [0, \frac{1}{3^3}], [0, \frac{1}{4^3}] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, \frac{1}{4^3}], [0, \frac{1}{5^3}] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, \frac{1}{5^3}], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&= \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + [0, \frac{1}{2^3}] + [0, \frac{1}{6^3}] + [0, \frac{1}{12^3}] + [0, \frac{1}{20^3}] + 0 + 0 \\
&= \left[0, \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \left(\frac{1}{6} \right)^3 + \left(\frac{1}{12} \right)^3 + \left(\frac{1}{20} \right)^3 \right] = [0, 0.130333333]
\end{aligned}$$

Şimdi $A_{\pm 2}$ hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
A_2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle y_k, y_{k-2} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \dots + \langle y_{-1}, y_{-3} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_0, y_{-2} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_1, y_{-1} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \langle y_2, y_0 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_3, y_1 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_4, y_2 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_5, y_3 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&= \dots + 0 + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 1], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, \frac{1}{2^3}], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle [0, \frac{1}{3^3}], [0, 1] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, \frac{1}{4^3}], [0, \frac{1}{2^3}] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, \frac{1}{5^3}], [0, \frac{1}{3^3}] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&= \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + [0, \frac{1}{3^3}] + [0, \frac{1}{8^3}] + [0, \frac{1}{15^3}] \\
&= \left[0, \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \left(\frac{1}{8} \right)^3 + \left(\frac{1}{15} \right)^3 \right] = [0, 0.0392864583]
\end{aligned}$$

A_{-2} ise

$$\begin{aligned}
A_{-2} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle y_k, y_{k+2} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \dots + \langle y_{-1}, y_1 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_0, y_2 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_1, y_3 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \langle y_2, y_4 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_3, y_5 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_4, y_6 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_5, y_7 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&= \dots + 0 + \langle [0, 0], [0, 1] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, 0], [0, \frac{1}{2^3}] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, 1], [0, \frac{1}{3^3}] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, \frac{1}{2^3}], [0, \frac{1}{4^3}] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle [0, \frac{1}{3^3}], [0, \frac{1}{5^3}] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, \frac{1}{4^3}], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, \frac{1}{5^3}], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&= \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + [0, \frac{1}{3^3}] + [0, \frac{1}{8^3}] + [0, \frac{1}{15^3}] + 0 + 0 \\
&= \left[0, \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \left(\frac{1}{8} \right)^3 + \left(\frac{1}{15} \right)^3 \right] = [0, 0.0392864583]
\end{aligned}$$

Şimdi A_3 ün otokorelasyonunu hesaplayalım.

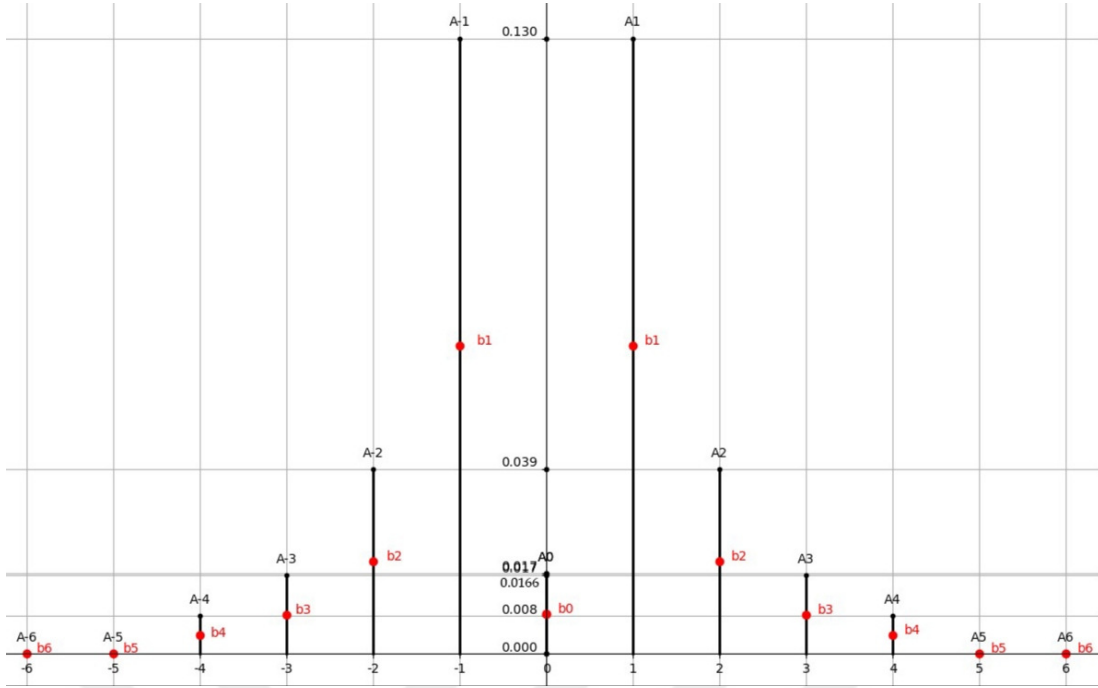
$$\begin{aligned}
A_3 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle y_k, y_{k-3} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \dots + \langle y_{-1}, y_{-4} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_0, y_{-3} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_1, y_{-2} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \langle y_2, y_{-1} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_3, y_0 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_4, y_1 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_5, y_2 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_6, y_3 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&= \dots + 0 + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 1], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^3}\right], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{3^3}\right], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{4^3}\right], [0, 1] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{5^3}\right], \left[0, \frac{1}{2^3}\right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, 0], \left[0, \frac{1}{3^3}\right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&= \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \left[0, \frac{1}{4^3}\right] + \left[0, \frac{1}{10^3}\right] + 0 \\
&= [0, 0.016625]
\end{aligned}$$

Aynı sonuç A_{-3} verir. $A_{\pm 4}$ ü hesaplayalım

$$\begin{aligned}
A_4 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle y_k, y_{k-4} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \dots + \langle y_{-1}, y_{-5} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_0, y_{-4} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_1, y_{-3} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \langle y_2, y_{-2} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_3, y_{-1} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_4, y_0 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_5, y_1 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_6, y_2 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&= \dots + 0 + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 1], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^3}\right], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{3^3}\right], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{4^3}\right], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{5^3}\right], [0, 1] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle [0, 0], \left[0, \frac{1}{2^3}\right] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&= \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \left[0, \frac{1}{5^3}\right] + 0 = [0, 0.008]
\end{aligned}$$

benzer sonuç A_{-4} veriyor. A_5 in otokorelasyonunu hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
A_5 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle y_k, y_{k-5} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = \dots + \langle y_{-1}, y_{-6} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_0, y_{-5} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_1, y_{-4} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \langle y_2, y_{-3} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_3, y_{-2} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_4, y_{-1} \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_5, y_0 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle y_6, y_1 \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&= \dots + 0 + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 0], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 1], [0, 0] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{2^3}\right], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{3^3}\right], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \left\langle \left[0, \frac{1}{4^3}\right], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \left\langle \left[0, \frac{1}{5^3}\right], [0, 0] \right\rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} + \langle [0, 0], [0, 1] \rangle_{\mathbb{I}_{\mathbb{R}}} = [0, 0]
\end{aligned}$$



Şekil 4.2 : Buradaki çubuk (aralık) dizisi (A_n) interval otokorelasyon dizisidir ve (y_n) interval dizisinin otokorelasyonudur, (b_n) ise eksik bilgiye sahip olan (x_n) dizisinin tahmini otokorelasyonunu göstermektedir.

A_{-5} i de aynı sonuç verir. Buna göre interval otokorelasyon dizisi

$$A_n \cong \left(\dots, 0, 0, [0, 0.008], [0, 0.016], [0, 0.039], \underbrace{[0, 0.13]}_{A_{-1}}, \underbrace{[0, 0.017]}_{A_0}, \underbrace{[0, 0.13]}_{A_1}, [0, 0.039], [0, 0.016], [0, 0.008], 0, \dots \right)$$

şeklinde interval-değerli bir dizidir. Teorem 4.0.2 den (x_n) non-deterministik sinyalinin klasik anlamda deterministik otokorelasyonunun (A_n) interval dizisi içerisine hapsediği sonucuna ulaşırız. Yani (x_n) nin otokorelasyon dizisi olan (b_n) klasik dizisi için $b_n \in A_n$ olmak zorundadır. Yukarıdaki çubuk(aralık) dizisi (A_n) interval-değerli otokorelasyon dizisini göstermektedir. Bu dizinin (y_n) interval dizisinin deterministik otokorelasyonu olduğunu hatırlayalım. Şekilde koyu noktalarla ortaya çıkan (b_n) klasik dizisi ise non-deterministik olan (x_n) dizisinin otokorelasyon dizisini göstermektedir. Görüldüğü gibi (y_n) nin deterministik otokorelasyonu olan (A_n) nin en büyük çubuğu olan A_1 aralığının çapı $|[0, 0.130333333]| \cong |[0, 0.13]| \cong 0.13$ dir. Bu ise bize, (x_n) non-deterministik dizisinin otokorelasyonunun terimleri arasındaki hatanın 0.13 birimi asla geçmeyeceğini söylemektedir. Problem kabullerine göre non-deterministik sinyalin otokorelasyonunda hata payının bu ölçeği geçmeyeceğini görerek, (x_n) sinyalinin sağlam (robust) bir yorumu yapabiliriz. Zira otokorelasyon dizisi terimleri arasındaki farklar nispeten çok küçük olduğu görünmektedir. Bu durumda genelde ana sinyalin yani (x_n) nin çevresel

etkilerden, örneğin parazit bulaşması vs gibi olumsuzluklardan etkilenme ihtimalinin düşük olduğu gibi yorumları yapabilme kabiliyetini bize verebilir. Veya tersine hata payı belli bir değerden yüksek ise, sinyalin çevresel etkilerden çok fazla etkilendiğini ve bu nedenle sağlamlığının zayıf olduğu yorumunu yapabiliriz. Tabii ki başka yorumlar da yapılabilir. Bu yorumlar problemin hangi tür fiziksel olay veya gözlem sonucunda elde edilen sinyal değerlerine bağlı olarak belirlenen duruma bağlıdır.



KAYNAKLAR

- [1] **Aseev, S.M.**, (1985). Quasilinear operators and their application in the theory of multivalued mappings, *cilt167*, s.25–52, 276, current problems in mathematics. Mathematical analysis, algebra, topology.
- [2] **Çakan, S. ve Yılmaz, Y.**, (2015). Normed proper quasilinear spaces, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 08(05), 816–836.
- [3] **Yılmaz, Y., Çakan, S. ve Aytekin, Ş.**, (2012). Topological Quasilinear Spaces, *Abstract and Applied Analysis*, 2012, 1–10.
- [4] **Musayev, B. ve Alp, M.**, (2000). *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları.
- [5] **Bozkurt, H. ve Yılmaz, Y.**, (2016). New Inner Product Quasilinear Spaces on Interval Numbers, *Journal of Function Spaces*, 2016, 1–9.
- [6] **Bozkurt, H. ve Yılmaz, Y.**, (2016). Some new results on inner product quasilinear spaces, *Cogent Mathematics*, 3(1), 1194801.
- [7] **Aumann, R.J.**, (1965). Integrals of set-valued functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 12(1), 1–12.
- [8] **Yılmaz, Y. ve Levent, H.**, (2021). Inner-product quasilinear spaces with applications in signal processing, *Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal*, 14(4), 125–146.
- [9] **Levent, H. ve Yılmaz, Y.**, (2022). Analysis of signals with inexact data by using interval-valued functions, *The Journal of Analysis*, 30(4), 1635–1651.
- [10] **Moore, R.E.**, (2009). *Introduction to interval analysis*, sayı110 in Other titles in applied mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), Philadelphia, Pa., system requirements: Adobe Acrobat Reader.
- [11] **Levent, H.K.**, (2019). *Küme Değerli Fonksiyon Uzayları Üzerindeki Operatörler ve Bazı Uygulamaları* (Doktora Tezi). İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad: Sümeyye ŞEMALİ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2021, Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği
- **Y. Lisans:** 2024, İnönü Üniversitesi, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi, Matematik

MESLEKİ DENEYİMLER:

- Matematik Öğretmenliği Yapmaktadır.