



**ZZ –DÖNÜŞÜMÜ METODUYLA BİRİNCİ TÜR  
LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL  
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ**

**Erhan ÖZDEMİR**

**Danışman: Prof. Dr. Ercan ÇELİK**  
**Yüksek Lisans Tezi**  
**Matematik Ana Bilim Dalı**  
**2021**  
(Her hakkı saklıdır.)

T.C.  
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**$zz$  –DÖNÜŞÜMÜ METODUYLA BİRİNCİ TÜR LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL  
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ**

(The Solution of First Kind Volterra Integral Equations With  $zz$  –Transform Method)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Erhan ÖZDEMİR

Danışman: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

Erzurum  
Eylül, 2021

## KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Erhan ÖZDEMİR tarafından hazırlanan “ZZ-Dönüşümü Metoduyla Birinci Tür Lineer Volterra İntegral Denklemlerinin Çözümü” başlıklı çalışması 24 /09 / 2021 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU  
*Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi*

Aslı ıslak imzalıdır

Danışman: Prof. Dr. Ercan ÇELİK  
*Atatürk Üniversitesi*

Aslı ıslak imzalıdır

Jüri Üyesi: Doktor Öğrt. Üyesi Mesut KARABACAK  
*Atatürk Üniversitesi*

Aslı ıslak imzalıdır

Enstitü Yönetim Kurulunun  
.../.../.... tarih ve ..... sayılı  
kararı.

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

**Prof. Dr. Saltuk Buğrahan CEYHUN**

Aslı ıslak imzalıdır

**Enstitü Müdürü**

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak Prof. Dr. Ercan ÇELİK danışmanlığında sunulan “ZZ-Dönüşümü Metoduyla Birinci Tür Lineer Volterra İntegral Denklemlerinin Çözümü” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

| Tez Bölümleri      | Tezin Benzerlik Oranı (%) | Maksimum Oran (%) |
|--------------------|---------------------------|-------------------|
| Giriş              | 19                        | 30                |
| Kuramsal Temeller  | 28                        | 30                |
| Materyal ve Yöntem | 20                        | 35                |
| Bulgular           | 20                        | 20                |
| Tartışma           | 0                         | 20                |
| Tezin Geneli       | 22                        | 25                |

**Not:** Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

| Tez Yazarı (Öğrenci)       | Tez Danışmanı              |
|----------------------------|----------------------------|
| Erhan ÖZDEMİR              | Prof. Dr. Ercan ÇELİK      |
| 14.9.2021                  | 14.9.2021                  |
| İmza: Aslı ıslak imzalıdır | İmza: Aslı ıslak imzalıdır |

\* Tez ile ilgili YÖKTEZ'de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun ....../....../.... tarih ve ..... sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun ....../....../.... tarih ve ..... sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

## TEŞEKKÜR

Tez sürecimin başlangıç öncesi ve sonrasındaki aşamalarında her türlü desteğini bana sağlayan, beni yönlendiren ve benden anlayışını esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Ercan ÇELİK'e katkılarından ötürü öncelikle teşekkürlerimi sunarım. Atatürk Üniversitesi'nde geçirdiğim dört yıl süren lisans ve iki yıl süren yüksek lisans öğrenimim boyunca benden her türlü desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi de ayrıca bir borç bilirim.

Erhan ÖZDEMİR



## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

### **$ZZ$ –DÖNÜŞÜMÜ METODUYLA BİRİNCİ TÜR LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ**

**Erhan ÖZDEMİR**

**Danışman: Prof. Dr. Ercan ÇELİK**

**Amaç:** Bu tezde, birinci tür lineer Volterra integral denklemlerini çözmek için bir metot sunulmuştur.

**Yöntem:**  $ZZ$  –Dönüşümü için Konvolüsyon teoremi elde edilmiştir. Daha sonra bu Konvolüsyon teoremi kullanılarak birinci tür lineer Volterra integral denklemleri  $ZZ$  –Dönüşümüyle çözülmüştür.

**Bulgular:** Dört farklı birinci tür lineer Volterra integral denklemi ele alınmıştır ve  $ZZ$  –Dönüşümü metoduyla çözülmüştür.

**Sonuç:**  $ZZ$  –Dönüşümü metodunun birinci tür lineer Volterra integral denklemlerinin çözümü için etkili bir metot olduğu görülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** İntegral denklemler, Birinci tür lineer Volterra integral denklemleri,  $ZZ$  –Dönüşümü, Konvolüsyon teoremi.

**Eylül 2021, 42 sayfa**

## ABSTRACT

### MASTER'S THESIS

#### THE SOLUTION OF THE FIRST KIND LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS WITH $ZZ$ –TRANSFORM METHOD

Erhan ÖZDEMİR

Supervisor: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

**Purpose:** In this thesis, a method for solving the first kind linear Volterra integral equations is presented.

**Method:** Convolution threorem is ontained for  $ZZ$  –Transform. Then, using this convolution theorem, The first kind linear Volterra integral equations are solved by  $ZZ$  –Transform.

**Findings:** Four different first kind linear volterra integral equations are considered and solved by the  $ZZ$  –Transform method.

**Results:** The  $ZZ$  –Transform method has been found to be an effective method for solving the first kind linear Volterra integral equations.

**Keywords:** Integral equations, The first kind linear Volterra integral equations,  $ZZ$  –Transform, Convolution theorem.

September 2021, 42 sayfa

## İÇİNDEKİLER

|                                                              |      |
|--------------------------------------------------------------|------|
| KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....                                  | i    |
| ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU .....                   | ii   |
| TEŞEKKÜR .....                                               | iii  |
| ÖZET .....                                                   | iv   |
| ABSTRACT .....                                               | v    |
| İÇİNDEKİLER.....                                             | vi   |
| TABLolar DİZİNİ.....                                         | vii  |
| ŞEKİLLER DİZİNİ .....                                        | viii |
| SİMGELER DİZİNİ .....                                        | ix   |
| GİRİŞ.....                                                   | 1    |
| KURAMSAL TEMELLER.....                                       | 3    |
| Gamma Fonksiyonu .....                                       | 6    |
| Beta Fonksiyonu .....                                        | 8    |
| İntegral Denklem.....                                        | 11   |
| İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması..... | 12   |
| İntegral Sınırlarına Göre Sınıflandırma .....                | 13   |
| MATERYAL VE YÖNTEM .....                                     | 16   |
| ZZ-Dönüşümü Yöntemi.....                                     | 16   |
| ZZ- Dönüşümünün Özellikleri .....                            | 19   |
| Türevlerin ZZ- Dönüşümleri .....                             | 20   |
| İntegrallerin ZZ-Dönüşümü.....                               | 21   |
| Bazı Fonksiyonların ZZ-Dönüşümleri.....                      | 22   |
| ARAŞTIRMA BULGULARI .....                                    | 25   |
| Test Problemi 1 .....                                        | 25   |
| Test Problemi 2 .....                                        | 25   |
| Test Problemi 3 .....                                        | 26   |
| Test Problemi 4 .....                                        | 27   |
| SONUÇ VE TARTIŞMA.....                                       | 29   |
| KAYNAKLAR.....                                               | 30   |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                                | 31   |

## TABLÖLAR DİZİNİ

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| <b>Tablo 1.</b> Bazı Fonksiyonların ZZ- Dönüşümleri ..... | 22 |
|-----------------------------------------------------------|----|



## ŞEKİLLER DİZİNİ

|                                           |   |
|-------------------------------------------|---|
| Şekil 1. Gamma Fonksiyonunun Grafiği..... | 7 |
|-------------------------------------------|---|



## SİMGELER DİZİNİ

|                            |                                         |
|----------------------------|-----------------------------------------|
| $\varepsilon$              | Epsilon                                 |
| $\delta$                   | Delta                                   |
| $\tau$                     | To                                      |
| $\Gamma$                   | Gamma Fonksiyonu                        |
| $\beta$                    | Beta Fonksiyonu                         |
| $\mathcal{L}\{f\}$         | $f$ fonksiyonunun laplası               |
| $\mathcal{L}^{-1}\{f\}$    | $f$ fonksiyonunun ters laplası          |
| $\mathcal{Z}\{f(t)\}$      | $f(t)$ nin $\mathcal{Z}$ –Dönüşümü      |
| $\mathcal{Z}^{-1}\{f(t)\}$ | $f(t)$ nin Ters $\mathcal{Z}$ –Dönüşümü |

## GİRİŞ

İntegral dönüşümleri, fen, mühendislik ve özellikle uygulamalı matematik alanlarında karşılaşılan birçok başlangıç-değer problemleri, sınır-değer problemleri, diferansiyel denklemler ve integral denklemlerin çözümlerinde kullanılmaktadır. Bundan dolayı yeni integral dönüşümleri sunulma gereği duyulmuş ve mevcut integral dönüşüm tabloları daha da genişletilmiştir. Literatürde, Laplace Dönüşümü, Fourier Dönüşümü, Sumudu Dönüşümü, Elzaki Dönüşümü, Tarık Dönüşümü, Doğal Dönüşüm ve Aboodh Dönüşümü gibi birçok integral dönüşümü vardır. Bunlardan en yaygın olarak kullanılan dönüşüm Laplace dönüşümüdür.  $ZZ$  –Dönüşümü de bir integral dönüşümdür.  $ZZ$  –Dönüşümü ilk kez 2016 yılında Zain UI Abadin Zafar tarafından verilmiştir (Eltayeb 2010, Elzaki 2011, Mohand 2015, Zafar 2016, Najafi 2017, Aboodh 2018; Aggarval 2019).

İntegral denklemlerle ilgili ilk çalışmalar on dokuzuncu yüzyılın ilk yarısında başladı. Önceleri dağınık ve rastgele araştırmalar yapılmışken on dokuzuncu yüzyılın sonlarına doğru daha sistematik ve bilinçli araştırmaların yapıldığı ve birtakım sonuçların alınmaya başlandığı görülmektedir. 1823 yılında Abel incelediği mekanik probleminde ilk defa integral denklemle karşılaşmıştır. Daha sonra Du Bois Reymond' un Crelle, Vol.103(1888) de yayınlanan bir çalışmasında İntegral Denklem deyimini önermiştir (Aggarval 2018).

Bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler integral denklemler olarak tanımlanmaktadır. Ancak bu tanım yetersiz kalmaktadır. Başka bir deyişle, bu tanımdan yola çıkarak, integral denklemlerin bütün türlerini kapsayacak teoriyi kurmak imkansızdır. Bundan dolayı, birbirinden bağımsız integral denklemleri ayrı ayrı incelemek gereği duyulmuştur. Böylece araştırma alanı genişlemiş olmakta ve bu alan dağınık bir araştırma alanı olmuştur (Aksoy, 1998).

Bu tezde Laplace ve Sumudu dönüşümlerine benzer dönüşüm olan  $ZZ$  –Dönüşümü birinci tür lineer volterra integral denklemlerine uygulanmıştır.  $ZZ$  –Dönüşümü birinci tür lineer volterra integral denklemlerin çözümüne uygulandı.  $ZZ$  –Dönüşümünün etkili bir çözüm olduğu görüldü.

Tez beş bölümden oluşmaktadır.

- Birinci bölümde yani giriş bölümünde,  $ZZ$  –Dönüşümü ve birinci tür lineer volterra integral denklemlerinin tarihçesinden bahsedildi.

- İkinci bölümde yani kuramsal temellerde, tezimizde kullandığımız bazı temel tanım ve teoremler verildi.
- Üçüncü bölümde yani Materyal ve yöntem kısmında,  $ZZ$  –Dönüşümü,  $ZZ$  –dönüşümünün özellikleri  $ZZ$  –Dönüşümü için Konvolüsyon teoreminin ispatı verildi.
- Dördüncü bölümde yani Araştırma Bulguları kısmında, dört tane birinci tür lineer volterra integral denkleminin çözümüne  $ZZ$  –Dönüşümü uygulanarak çözümleri elde edildi.
- Beşinci bölümde yani Sonuç ve Tartışma kısmında, birinci tür lineer Volterra integral denkleminin çözümüne uygulanan  $ZZ$  –Dönüşümünün etkinliği tartışıldı.



## KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

**Tanım 1 (Diferansiyel Denklem):** Bilinmeyen fonksiyon ve türevlerini ihtiva eden denkleme diferansiyel denklem denir.

Genel olarak  $y$  bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, diferansiyel denklem

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

şeklinde gösterilir. Burada  $y^{(n)}$ ,  $y$  nin  $x$  e göre  $n$  inci türevidir. (1) denklemini  $y^{(n)}$  ye göre çözülebilirse;

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

formu elde edilir. Bu ise (1) ifadesinin açık formda yazılmış şeklidir.

**Tanım 2 (Değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem):**  $x$  bir reel değişken olmak üzere

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

şeklindeki denklemlere lineer diferansiyel denklem denir. Burada, eşitliğin sağ tarafındaki  $r(x)$  ve sol tarafta ki  $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_{n-1}(x), p_n(x)$  katsayıları  $x$ 'e bağlıdır. Eğer  $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_{n-1}(x), p_n(x)$  katsayıları sabit ise denkleme sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem denir. En az biri değişken ise denkleme *değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem* denir.

**Tanım 3 (Limit):**  $D \subset R$ ,  $f: D \rightarrow R$  bir fonksiyon ve  $c, D$  nin yığılma noktası olsun.

$\forall \varepsilon > 0$  için  $0 < |x - c| < \delta$  olduğunda  $|f(x) - K| < \varepsilon$  olacak şekilde  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  sayısı varsa  $x, c$  ye yaklaşırken  $f(x)$  fonksiyonunun *limiti*  $K$  dır denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$$

olarak yazılır.

Bu tanımda

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = K$$

olması  $0 < |x - c| < \delta$  eşitliğini sağlayan  $\forall x$  için  $|f(x) - K| < \varepsilon$  eşitsizliğinin sağlaması gerektiğini vurgulanmaktadır. Ayrıca  $\varepsilon > 0$  ne kadar küçük olursa, ona bağlı olan,  $\delta$  da o kadar küçük olacaktır (Kadıoğlu, 2005).

**Tanım 4 (Süreklilik):**  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $c \in D$  olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için

$|x - c| < \delta$  olduğunda  $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$  olacak şekilde  $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$  sayısı varsa

$f$  fonksiyonu  $c$  noktasında *süreklidir* denir. Burada  $\delta = \delta(\varepsilon, c)$ ,  $\delta$  nın hem  $\varepsilon$  hem de  $c$  ye bağlı olarak değişeceğini gösterir. Sürekliliğin bu şekildeki tanımı  $\varepsilon, \delta$  tekniği ile süreklilik tanımı olarak adlandırılır.  $c \in D$ ,  $D$  nin yığılma noktası olması durumunda limitin tanımlanacağı bilinmektedir. O halde,  $c \in D$ ,  $D$  nin yığılma noktası olması durumunda sürekliliğin tanımını şu şekilde verebiliriz.  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $c \in D$  olsun.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

oluyorsa  $f$  fonksiyonu  $c$  noktasında *süreklidir* denir. Buna göre:  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun verilen bir  $c \in \mathbb{R}$  noktasında sürekli olması için

1.  $f$  fonksiyonunun  $c$  noktasında tanımlıdır.
2.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  mevcuttur.
3.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Şartlarını sağlaması gerekir.

**Tanım 5 (Süreklilik çeşitleri):**  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında tanımlansın

i.  $c \in [a, b)$  için

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$

oluyor ise  $f$  fonksiyonuna  $c$  noktasında sağdan süreklidir denir.

ii.  $c \in (a, b]$  için

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$$

oluyor ise  $f$  fonksiyonuna  $c$  noktasında soldan süreklidir denir.

Bir  $f$  fonksiyonunun  $[a, b]$  aralığında sürekliliğinden söz ettiğimiz zaman.  $a$  noktasında sağdan,  $b$  noktasında soldan sürekli olduğu anlaşılabacaktır.

## Tanım 6 (Süreksizlik ve süreksizlik çeşitleri)

- i. Eğer  $f$  fonksiyonunun bir  $c$  noktasında limiti var ve süreksiz ise bu fonksiyon  $c$  noktasında

$$f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

olarak tanımlarsak, bu noktada, sürekli bir fonksiyon elde ederiz. Bu tip süreksizlere kaldırılabilir *süreksizlik* denir. Eğer fonksiyonun süreksiz olduğu noktada limiti yoksa bu süreksizliklere de kaldırılamaz süreksizlik denir.

- ii.  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$  ve  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$  limitleri var ve birbirinden farklı ise  $f$  fonksiyonu  $c$  noktasında *sıçramalı süreksizliğe* sahiptir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

sayısına  $f$  nin  $c$  noktasındaki sıçraması denir.

- iii.  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$  ve  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$  limitlerden en az biri  $+\infty$  veya  $-\infty$  ise , veya mevcut değilse, bu fonksiyon  $c$  noktasında sonsuz süreksizliğe sahiptir denir.

**Örnek 1 :** i.  $f(x) = \sin x$  fonksiyonunun  $x = 0$  noktasında süreksiz olduğunu biliyoruz. Çünkü bu noktada tanımsızdır. Yine biliyoruz ki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

dir. O halde,  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = 0$  noktasında kaldırılabilir bir süreksizliği vardır. Bu fonksiyon

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığında da, sürekli bir fonksiyon olur.

- ii.  $f(x)$  fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

olarak veriliyor.  $x = 0$  noktasında

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

olduğundan,  $f$  fonksiyonunu bu noktada sıçrama süreksizliği vardır ve sıçrama

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 - (-1) = 2$$

olur

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

olmadığından dolayı kaldırılamaz süreksizlik vardır.

iii.  $f(x) = \frac{1}{x}$  fonksiyonunun sıfır noktasında sağdan ve soldan limiti olmadığından bu noktada kaldırılamaz bir süreksizlik vardır.

### Gamma Fonksiyonu

Diferansiyel hesaplamalarında kullanılan en temel fonksiyon, Gamma fonksiyonudur. Bu fonksiyon  $n!$  hesabındaki  $n$  sayısını, tamsayı olmayan sayıları ve karmaşık sayıları da içerecek şekilde genelleştirir. Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad z \in \mathbb{R} \quad (3)$$

integral yardımıyla tanımlanır. Bu fonksiyonun en önemli özelliklerinden biri,

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (4)$$

eşitliğidir. Böylece

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z \Gamma(z) \end{aligned} \quad (5)$$

eşitliğiyle gösterilir. (4) eşitliğinden görüleceği gibi  $\Gamma(1) = 1$  olup  $z = 1, 2, 3, \dots$  için

$$\Gamma(2) = 1. \Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2. \Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(z + 1) = z. \Gamma(z) = z. (z - 1)! = z!$$

şeklinde genelleştirilebilir (Podlubny 1999).

$z > 0$  için (3) denklemi ile verilen gamma fonksiyonu yakınsaktır. Böylece  $a > 0$  ve  $\forall [a, b]$  sonlu aralığında  $\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$  integrali düzgün yakınsaktır. O halde gamma fonksiyonunun diğer özellikleri aşağıdaki gibidir:

$\Gamma[z]$  nin tanım bölgesi  $\{z: z > 0\}$  dır.

$\Gamma[z]$  fonksiyonu  $z > 0$  için süreklidir.

$\Gamma[z]$  için verilen integral, her sonlu  $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$  aralığında düzgün yakınsak olduğundan  $\Gamma[z]$  nin türevide elde edilebilir.

Ayrıca  $\Gamma[z]$  nin diğer tamsayı mertebeden türevleride benzer şekilde hesaplanır.

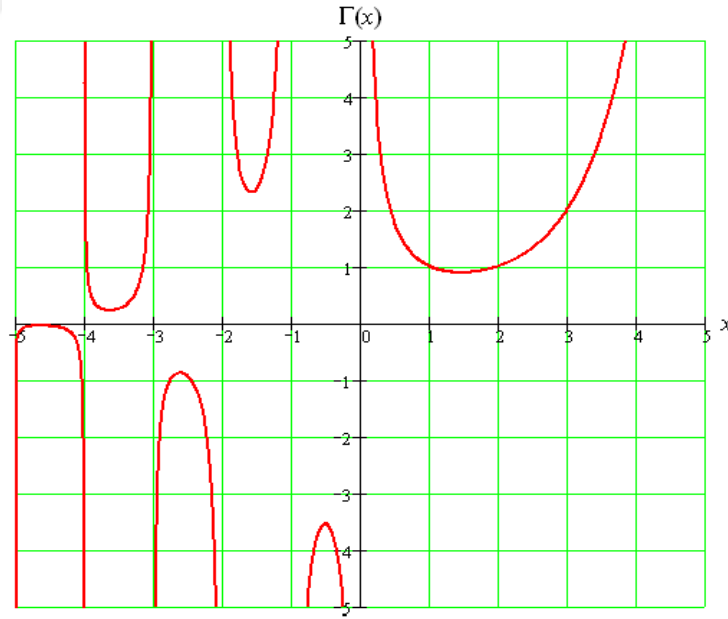
Örneğin,

$$\Gamma'[z] = \int_0^\infty t^{z-1} \ln(t) e^{-t} dt, \Gamma''[z] = \int_0^\infty t^{z-1} [\ln(t)]^2 e^{-t} dt, \dots$$

şeklinde yazılır (Podlubyn 1999).

#### Tanım 7 (Genelleştirilmiş gamma fonksiyonu):

Gamma fonksiyonunun tanım kümesi tüm reel eksendir.



Şekil 1. Gamma fonksiyonunun grafiği

(4) eşitliğinden faydalanılarak  $1 \leq z \leq 2$  ve  $\forall z \in \mathbb{R}$  için  $\Gamma(z)$  elde edilebilir. Negatif  $z$  değerleri için düşünüldüğünde,  $-1 < z < 0$  için  $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$  de  $0 < z+1 < 1$  olacağından  $\Gamma(z+1)$  değeri bilindiğinden  $z \in (-1, 0)$  için  $\Gamma(z)$  ler bulunabilir. Genel olarak  $-n < z < -n+1$  ise  $0 < z+n < 1$  olup,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n-1)} \quad (6)$$

eşitliğinden gamma fonksiyonunun değerleri hesaplanabilir. Gamma fonksiyonun tanım kümesi tüm Reel eksen olduğundan, gamma fonksiyonunun sıfır ve negatif tamsayı değerleri sonsuzdur. Böylece,

$$\Gamma(z) > \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt > \int_0^1 t^{z-1} dt = \frac{1}{e^z}$$

olup,

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \Gamma(z) > \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^z} \rightarrow \infty$$

olur. Faktöriyel özelliğinden,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z-1)\Gamma(z-1) \rightarrow \infty$$

olur.

**Tanım 8:** Gamma fonksiyonunun limit gösterimi  $Re(z) > 0$  olmak üzere,

$$\Gamma(z) = \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)} \quad (7)$$

şeklindedir.

### Beta Fonksiyonu

$Re(z) > 0$  ve  $Re(w) > 0$  olmak üzere  $\tau = \frac{t}{n}$  olmak üzere

$$\beta(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau \quad (8)$$

integrali ile tanımlanan fonksiyona beta fonksiyonu denir.

Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasında

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Burada  $h_{z,w}(t)$  fonksiyonunun  $t^{z-1}$  ile  $t^{w-1}$  in konvülasyonu olduğu ve  $h_{z,w}(1) = \beta(z, w)$  eşitliğinin olduğu görülmektedir.

$H_{z,w}(s)$ ,  $h_{z,w}(t)$  fonksiyonunun Laplace fonksiyonu olmak üzere,

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z} \frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}} t^{z+w-1}$$

eşitliği ters laplace dönüşümüyle de elde edilir. Bu durumda  $t = 1$  için,

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)}$$

olur. Buradan da  $\beta(z, w) = \beta(w, z)$  olduğu görülür (Podlubny 1999).

**Tanım 9:**  $f$ ,  $[0, \infty)$  aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer tüm  $x > x_0$  ler için

$$|f(x)| \leq Me^{\alpha x}$$

olacak şekilde,  $x_0, M$  ve  $\alpha$  pozitif sabitleri mevcut ise,  $f$  fonksiyonuna  $\alpha$  üstel mertebededir denir.

Eğer  $f$ ,  $[0, \infty)$  aralığında artan bir fonksiyon ise  $|f(x)| \leq Me^{\alpha x}$  koşulu geometrik olarak  $f$  nin  $[x_0, \infty)$  aralığındaki  $y = Me^{\alpha x}$  üstel fonksiyonundan daha hızlı artmadığını ifade eder.

Örneğin  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x$  ve  $h(x) = 2\cos x$  fonksiyonları  $x > 0$  için  $a = 1$  üstel mertebededir.

Çünkü bu fonksiyonlar için sırasıyla  $|x| \leq e^x$ ,  $|e^{-x}| \leq e^x$  ve  $|2\cos x| \leq 2e^x$  dir.

Örneğin  $f(x) = e^{x^2}$  fonksiyonu ise  $[0, \infty) -$  aralığında üstel mertebeden değildir. Çünkü bu fonksiyon  $x > x_0 > 0$  için  $e^x$  den daha hızlı artar.

**Tanım 10:**  $f$ ,  $[0, \infty)$  aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer  $\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$  integrali mevcut (veya yakınsak) ise,  $s$  nin bir fonksiyon olan

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx \quad (9)$$

ifadesine  $f$  nin Laplace dönüşümü denir.

$f$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) \text{ veya } \mathcal{L}\{f\} = F$$

biçiminde gösterilir. (9) da  $s$  reel veya kompleks bir değişkendir. Burada  $s$  nin reel olduğunu varsayarsak (9) daki integral has olmayan integraldir. Bilindiği gibi, eğer

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-sx} f(x)dx$$

limiti mevcut ise (9) daki has olmayan integral mevcuttur (veya yakınsaktır) denir.  $F(s)$  nin tanım cümlesi şüphesiz (9) daki integralin mevcut olduğu  $s$  değerlerinden ibarettir.

Örneğin  $f(x) = 2$  ve  $(x \geq 0)$  fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.

Tanımdan

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} 2 dx = 2 \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-sx} dx = 2 \lim_{A \rightarrow \infty} -\frac{e^{-sx}}{s} \Big|_0^{x=A} = 2 \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{s} - \frac{e^{-sA}}{s} \right]$$

yazılabilir. Dikkat edelim ki  $s > 0$  için  $-sA < 0$  olup  $A \rightarrow \infty$  iken  $e^{-sA} \rightarrow 0$  dır.

$s \leq 0$  için  $-sA \geq 0$  olup  $A \rightarrow \infty$  iken  $e^{-sA} \rightarrow \infty$  dır. Buradan  $2 \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{s} - \frac{e^{-sA}}{s} \right]$   $s > 0$  için mevcuttur. Ve  $\frac{2}{s}$  ye eşittir. Yani  $\mathcal{L}\{1\} = \frac{2}{s}$  ( $s > 0$ ) dır.

Örneğin  $f(x) = e^{2x}$ ,  $(x \geq 0)$  fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.

$$\mathcal{L}\{e^{2x}\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{2x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(s-2)x} dx = \frac{1}{s-2}, \quad s > 2$$

bulunur.

### **Teorem 1 (Laplace dönüşümünün varlığı):**

$f$ ,  $[0, \infty)$  – aralığında parçalı sürekli ve  $x > x_0$  için  $\alpha$  – üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. Bu takdirde  $s > \alpha$  için  $\mathcal{L}\{f(x)\}$  mevcuttur.

**İspat:**  $\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$  integralinin  $s > \alpha$  için yakınsak olduğunu göstereceğiz. Bunun için integrali

$$\int_0^{x_0} e^{-sx} f(x) dx + \int_{x_0}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \quad (10)$$

biçiminde iki ayrı integralin toplamı olarak yazalım.  $f(x)$  ve dolayısıyla  $e^{-sx} f(x)$ , tespit edilmiş herhangi bir  $s$  için  $[0, x_0]$  aralığında parçalı sürekli olduğundan, (10) daki birinci integral mevcut yani yakınsaktır. (10) daki ikinci integralin yakınsak olduğunu göstermek için has olmayan integraller için karşılaştırma kuralını kullanacağız.

$f$ ,  $\alpha$ - üstel mertebeden olduğundan  $x > x_0$  için

$$|f(x)| \leq M e^{\alpha x}$$

ve dolayısıyla tüm  $x > x_0$  lar için

$$|e^{-sx} f(x)| = e^{-sx} |f(x)| \leq M e^{-(s-\alpha)x}$$

yazılabilir. Öte yandan  $s > \alpha$  için

$$\int_0^{\infty} M e^{-(s-a)x} dx = M \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} dx = \frac{M e^{-(s-a)x_0}}{s-a} < \infty$$

dır.  $x \geq x_0$  için  $|e^{-sx} f(x)| \leq M e^{-(s-a)x}$  olduğundan ve daha büyük bir fonksiyonun has olmayan integrali  $s > \alpha$  için yakınsaktır. Böylece (10) daki her iki integral mevcut olduğundan,  $s > \alpha$  için  $\mathcal{L}\{f(x)\}$  mevcuttur (Çağlıyan 2016).

**Tanım 11 (Ters Laplace Dönüşümü):** Bir  $F(s)$  fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$$

olacak biçimde bir  $f(x)$  fonksiyonu var ise,  $f$  ye  $F$  nin *Ters Laplace Dönüşümü* denir.  $F$  nin Ters Laplace Dönüşümü

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{F\} \text{ veya } f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

biçiminde gösterilir.

Bir  $F$  fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü tek olmayabilir. Yani  $\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{g(x)\}$  iken  $f(x) \neq g(x)$  olabilir. Örneğin

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} \quad (s > -3)$$

fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü

$$f(x) = e^{-3x} \text{ ve } g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 1 \\ e^{-3x} & , \quad x \neq 1 \end{cases}$$

fonksiyonlarıdır. Ters Laplace dönüşümünün tek olması için hangi koşulların sağlanması aşağıdaki teoremle verilmektedir.

**Teorem 2 (Ters Laplace dönüşümünün tekliği):**

$f$  ve  $g$ ,  $[0, \infty)$  – aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden iki fonksiyon olsun. Eğer tüm  $s > s_0$  lar için  $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$  olacak şekilde bir  $s_0$  sabiti mevcutsa, bu takdirde sonlu sayıda süreksizlik noktaları hariç tüm  $x > 0$  lar için  $f(x) = g(x)$  dir (Çağlıyan 2016).

## İntegral Denklem

İntegral denklem, integral işareti altında bilinmeyen fonksiyonlardan meydana gelen bir eşitliktir. Bu bir veya daha fazla integral işareti altındaki bilinmeyen fonksiyonun, fonksiyonel eşitliğe dahil olduğu anlamına gelmektedir. Örneğin,

$$y(x) = f(x) + 5 \int_0^1 e^{t+x} y(t) dt \quad (11)$$

bir integral denklemdir. İntegral denklemler lineerliğe, bilinmeyen fonksiyonun sınırlarına, homojenliğe ve bulunduğu yere göre çeşitli şekilde sınıflandırılmaktadır.

**Tanım 12 (Lineer ve lineer olmayan integral denklemler):**

Bir integral denklemde  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyon olsun.  $u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)u(t)dt$  yapısındaki integral denklemde,  $u(t)$  lineerse integral denkleme *linear integral denklem*,  $u(t)$  lineer değilse yani  $u^n(t)$  şeklinde ise integral denkleme *linear olmayan integral denklem* denir. Lineer olan ve olmayan integral denklemler

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad (12)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)u^n(t)dt \quad (13)$$

şeklinde gösterilir (Aksoy, 1998)

**Tanım 13 (Tekil olan ve olmayan integral denklemler):**

Bu sınıflandırma  $K(x, t)$  çekirdek fonksiyonunun sürekliliğine göre yapılır. Eğer  $K(x, t)$  fonksiyonu  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq t \leq b$  aralığında sürekli olmayan veya integral denklem sınırlarından en az biri sonsuz olan,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^\infty K(x, t)u(t)dt \quad (14)$$

şeklinde ise bu integral denklemlere *tekil integral denklemler* denir.

İntegral denklemin sınır aralıklarında  $K(x, t)$  çekirdek fonksiyonu sürekli olan ve integral sınırları sonsuz olmayan integral denklemlere *tekil olmayan integral* denir.

**İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması**

Burada üç çeşit sınıflandırma yapılmaktadır.

- 1. Birinci Tip İntegral Denklemler:** Bilinmeyen fonksiyonun  $u(x)$ , çekirdek fonksiyonunun  $K(x, t)$  olduğu integral denklem için  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonun sadece integral denklem içinde bulunduğu,

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (15)$$

şeklindeki integral denklemler birinci tip integral denklemlerdir.

- 2. İkinci Tip İntegral Denklemler:** Bilinmeyen fonksiyonun  $u(x)$ , çekirdek fonksiyonunun  $K(x, t)$  olduğu integral denklem için  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonun hem integral içinde hem de integral dışında bulunduğu,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (16)$$

şeklindeki integral denklemler ikinci tip integral denklemlerdir.

- 3. Üçüncü Tip İntegral Denklemler:** Bilinmeyen fonksiyonun  $u(x)$ , çekirdek fonksiyonunun  $K(x, t)$  olduğu integral denklem için  $u(x)$  bilinmeyen fonksiyonun hem integral içinde hem de integral dışında başka bir fonksiyon ile çarpım durumunda olduğu,

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (17)$$

şeklindeki integral denklemler üçüncü tip integral denklemlerdir.

**Tanım 14 (Homojen olan veya olmayan integral denklemler):**

Bu integral denklemler bilinen  $f(x)$  fonksiyonunun var olup olmadığına göre sınıflandırılır. İkinci tip,

$$u(x) = \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (18)$$

şeklindeki  $f(x)$  fonksiyonu bulunmayan integral denklemlere homojen integral denklem denir.

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (19)$$

şeklindeki integral denklemlere homojen olmayan integral denklem denir (Fındık 2012).

## İntegral Sınırlarına Göre Sınıflandırma

### 1. Fredholm İntegral Denklemleri

Birinci tip lineer Fredholm integral denklem,

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt = 0 \quad (20)$$

şeklinde tanımlanır. Birinci tip lineer olmayan integral denklem ise,

$$f(x) + \lambda \int_a^b K_0(t, x, y(t))u(t)dt \quad (21)$$

şeklindedir. İkinci tip lineer Fredholm integral denklemi,

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(t, x)y(t)dt \quad (22)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $y(x)$  bilinmeyen fonksiyon iken  $f(x)$  ve  $K(t, x)$  bilinen fonksiyonlardır ve  $\lambda$  ise sayısal parametredir.

İkinci tip lineer olmayan Fredholm integral denklemi ise,

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_0(t, x, y(t)) dt \quad (23)$$

şeklindedir. Burada  $K_0(t, x, y(t)) \neq K(t, x)y(t)$  dir.

## 2. Volterra İntegral Denklemi

Birinci tip lineer Volterra integral denklemi,

$$f(x) + \lambda \int_{x_0}^x K(t, x)y(t)dt = 0 \quad (24)$$

şeklinde tanımlanır. Birinci tip lineer olmayan Volterra integral denklemi ise,

$$f(x) + \lambda \int_{x_0}^x K_0(t, x, y(t))dt = 0 \quad (25)$$

şeklindedir. İkinci tip lineer Volterra integral denklemi,

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{x_0}^x K(t, x)y(t)dt \quad (26)$$

şeklindedir. Burada  $y(x)$  bilinmeyen fonksiyon iken  $f(x)$  ve  $K(t, x)$  bilinen fonksiyonlardır ve  $\lambda$  ise sayısal parametredir.

İkinci tip lineer olmayan Volterra integral denklemi,

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{x_0}^x K_0(t, x, y(t))dt \quad (27)$$

şeklindedir. Burada  $K_0(t, x, y(t)) \neq K(t, x)y(t)$  dir.

## 3. Volterra-Fredholm İntegral Denklemi

İlk olarak (23) eşitliğindeki integral denklemi göz önüne alalım.

$$y(x) = C_1 + \frac{C_2 - C_1}{x_1 - x_0}(x - x_0) - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - t)\psi(t) + \int_{x_0}^x (x - t)\psi(t)dt \quad (28)$$

Bu denklemde iki tip integral bulunmaktadır. İlki sonlu aralığa sahip iken diğeri değişken aralığa sahiptir. Bu integral denklemi ele almanın iki yolu bulunmaktadır.

**Birinci Yol.**  $(x, t) \in [x_0, x_1]$  ve  $x_0, x_1 \in R$  için,

$$y(x) = C_1 + \frac{C_2 - C_1}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) + \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} H(x, t)\psi(t)dt \quad (29)$$

şeklindeki eşitlik yazılabilir. Bu eşitlikteki  $H(x, t)$ ,

$$H(x, t) = \{-(x - x_0)(x_1 - t) + (x_1 - x_0)(x - t), x \leq t$$

şeklindedir. Görüldüğü üzere (24) eşitliği Fredholm integral denklemine benzemektedir.

**İkinci Yol.** (23) integral denklemi  $t \in [x_0, x_1]$  ve  $x \in R$  için birinci yoldaki gibi çözümlenemez. Bu tip integral denklemlere homojen olmayan lineer *Volterra-Fredholm integral denklemi* denir (Upadhyay ve Rai 2015).

#### 4. İki Boyutlu İntegral Denklemler

$u(x, t)$  bilinmeyen fonksiyonlar,  $f(x, t)$  bilinen fonksiyonlar ve  $k(x, t, y, z)$  çekirdek fonksiyonlar olmak üzere bilinmeyen fonksiyonun iki katlı integralin içinde bulunduğu integral denklemlere *iki boyutlu integral denklemler* denir. İki boyutlu Fredholm integral denklemleri,

$$u(x, t) = f(x, t) + \int_a^b \int_c^d k(x, t, y, z)u(y, z)dydz \quad x \in [a, b], t \in [c, d] \quad (30)$$

şeklinde iken; iki boyutlu Volterra integral denklemler ise,

$$u(x, t) = f(x, t) + \int_0^t \int_0^x k(x, t, y, z)u(y, z)dydz \quad (31)$$

şeklindedir.

#### 5. Parametrelili İntegral Denklemler

$\lambda$  gibi bir parametrenin integral denklemlere eklenmesiyle integral denklemler daha genel bir yapıya kavuşur. Şimdiye kadar ele alınan integral denklemler,  $\lambda \neq 0, 1$  olmak üzere daha genel haliyle

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (32)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad (33)$$

şekillerinde ifade edilebilir. Bu tip integral denklemlere *parametrelili integral denklemler* denir.

## MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde  $ZZ$  –Dönüşümünü, temel özelliklerini ve  $ZZ$  –Dönüşümü için Konvolüsyon teoremin ispatı verildi.

### $ZZ$ –Dönüşümü Yöntemi

$f(t)$ , her  $t \geq 0$  için tanımlanmış bir fonksiyon olsun.  $f(t)$  'nin  $ZZ$  – Dönüşümü  $Z(u, s)$  fonksiyonudur. Böylece

$$Z(u, s) = Z\{f(t)\} = s \int_0^{\infty} f(ut) e^{-st} dt \quad (34)$$

şeklinde tanımlanır. Sağ taraftaki integralin olması şartıyla. (34) 'deki  $f(t)$  fonksiyonu,  $Z(u, s)$  dönüşümü ile gösterilir

(34) 'deki uygun bir dönüşüm sonucunda

$$Z\{f(t)\} = \frac{s}{u} \int_0^{\infty} f(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt \quad (35)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Örneğin  $f(t) = e^{at}$  olsun, burada  $t \geq 0$ , ve  $a$  bir sabittir, bu durumda bu fonksiyonun  $ZZ$  –Dönüşümü

$$\begin{aligned} Z\{e^{at}\} &= \frac{u}{s} \int_0^{\infty} e^{at} e^{-\frac{s}{u}t} dt = \frac{s}{u} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{s}{u}-a\right)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{s}{u} \int_0^b e^{-\left(\frac{s}{u}-a\right)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{s}{u} \left( \frac{1}{-\left(\frac{s}{u}-a\right)} e^{-\left(\frac{s}{u}-a\right)t} \right) \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{s}{-s + au} e^{-\left(\frac{s}{u}-a\right)t} \right) \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{s}{-s + au} e^{-\left(\frac{s}{u}-a\right)b} + \frac{s}{s - ua} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{s}{s - ua}$$

Yani,

$$\mathcal{Z}\{e^{at}\} = \frac{s}{s - ua}$$

şeklindedir.

### 1. Birim Adım Fonksiyonu:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\{1\} = 1$$

şeklindedir.

**2.  $f(t) = t^n$  için sonuç:** Burada  $t$  ve  $t^2$  nin  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$  -Dönüşümünü bulacağız. Sonra bu kuralı  $t^n$  için genelleştireceğiz.

$f(t) = t$  olsun, o zaman

$$\mathcal{Z}\{t\} = \frac{u}{s}$$

dir.

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = \mathcal{Z}\{t\} = \frac{s}{u} \int_0^{\infty} t e^{-\frac{s}{u}t} dt$$

integralini kısmi integral yardımıyla bulalım.

$$t = u \quad e^{-\frac{s}{u}t} dt = dv$$

ve

$$dt = du \quad -\frac{u}{s} e^{-\frac{s}{u}t} = v$$

olur.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f(t)\} &= \mathcal{Z}\{t\} = \frac{s}{u} \int_0^{\infty} t e^{-\frac{s}{u}t} dt = \frac{s}{u} \left( -\frac{u}{s} e^{-\frac{s}{u}t} t \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left( -\frac{u}{s} e^{-\frac{s}{u}t} \right) dt \right) \\ &= \frac{s}{u} \left( 0 + \frac{u}{s} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{u}t} dt \right) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{u}t} dt \\ &= -\frac{u}{s} e^{-\frac{s}{u}t} \Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

$$= -\frac{u}{s} (0 - 1)$$

$$= \frac{u}{s}$$

eğer  $f(t) = t^2$  alınırsa;

$$\mathcal{Z}\{t^2\} = 2! \frac{u^2}{s^2}$$

dir.

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = \mathcal{Z}\{t^2\} = \frac{s}{u} \int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{s}{u}t} dt$$

integralini kısmi integral yardımıyla bulalım.

$$t^2 = u$$

$$e^{-\frac{s}{u}t} dt = dv$$

ve

$$2t dt = du$$

$$-\frac{u}{s} e^{-\frac{s}{u}t} = v$$

olur.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f(t)\} = \mathcal{Z}\{t^2\} &= \frac{s}{u} \int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{s}{u}t} dt = \frac{s}{u} \left( -\frac{u}{s} e^{-\frac{s}{u}t} t^2 \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left( -\frac{u}{s} e^{-\frac{s}{u}t} \right) 2t dt \right) \\ &= \frac{s}{u} \left( 0 + 2 \frac{u}{s} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{u}t} t dt \right) \\ &= \frac{s}{u} \left( 2 \frac{u}{s} \int_0^{\infty} t e^{-\frac{s}{u}t} dt \right) \\ &= 2 \int_0^{\infty} t e^{-\frac{s}{u}t} dt \end{aligned}$$

tekrar kısmi integral uygulanırsa

$$t = u_1$$

$$e^{-\frac{s}{u}t} dt = dv_1$$

ve

$$dt = du_1$$

$$-\frac{u}{s} e^{-\frac{s}{u}t} = v_1$$

$$= 2 \left( -\frac{u}{s} e^{-\frac{s}{u}t} t \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left( -\frac{u}{s} e^{-\frac{s}{u}t} \right) dt \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left( 0 + \frac{u}{s} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{u}t} dt \right) \\
&= 2 \frac{u}{s} \left( -\frac{u}{s} e^{-\frac{s}{u}t} \Big|_0^{\infty} \right) \\
&= -2 \frac{u^2}{s^2} (0 - 1) \\
&= 2 \frac{u^2}{s^2}
\end{aligned}$$

Bu sonuçları genelleterek  $f(t) = t^n$  sonucunu elde ederiz. Yani

$$Z\{t^n\} = n! \frac{u^n}{s^n} = \Gamma(n+1) \frac{u^n}{s^n}$$

olarak bulunur.

### 3. $\cos at$ , $\sin at$

$f(t) = \begin{cases} \cos at \\ \sin at \end{cases}$  olsun, o zaman

$$\begin{aligned}
Z\{f(t)\} &= \frac{s}{u} \int_0^{\infty} \cos(at) f(t) \cdot e^{-\frac{s}{u}t} dt \\
Z\{\cos at\} &= \frac{s^2}{s^2 + a^2 u^2}
\end{aligned}$$

ve

$$Z\{\sin at\} = \frac{aus}{s^2 + a^2 u^2}$$

### $ZZ$ – Dönüşümünün Özellikleri

1.  $ZZ$  –Dönüşümü doğrusaldır(lineerdir), yani  $a$  ve  $b$  herhangi bir sabit ve  $f(t)$  ve  $g(t)$  iki fonksiyon olsun, o zaman

$$Z\{af(t) + b g(t)\} = aZ\{f(t)\} + bZ\{g(t)\}$$

dır.

2.  $f(t)$  bir fonksiyon ve  $f(t) \geq 0$  olsun, o zaman

$$Z\{e^{at} f(t)\} = \frac{s}{s - au} Z\left\{\frac{us}{s - au}\right\}$$

dır.

3.  $Z\{f(t)\} = Z(u, s)$  olsun, o zaman

$$Z\{f(at)\} = \frac{1}{a} Z\left\{u, \frac{s}{a}\right\}$$

dır.

#### Türevlerin ZZ – Dönüşümleri

4.  $Z\{f(t)\} = Z(u, s)$  olsun. O zaman

$$\text{i. } Z\{f'(t)\} = Z(u, s) - \frac{s}{u} f(0)$$

$$\text{ii. } Z\{f''(t)\} = \frac{s^2}{u^2} Z(u, s) - \frac{s^2}{u^2} f(0) - \frac{s}{u} f'(0)$$

⋮

$$\text{iii. } Z\{f^{(n)}(t)\} = \frac{s^n}{u^n} Z(u, s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{n-k}}{u^{n-k}} f^{(k)}(0)$$

şeklindedir. Şimdi  $t$  'yi ispat edelim.

$$Z\{f(t)\} = \frac{s}{u} \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt \quad \text{ve} \quad Z\{f'(t)\} = \frac{s}{u} \int_0^\infty f'(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt \quad \text{dir.}$$

$$Z\{f(t)\} = Z(u, s) = \frac{s}{u} \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt$$

integralini kısmi integral yardımıyla hesaplayalım. İlk olarak

$$f(t) = u \quad e^{-\frac{s}{u}t} dt = dv$$

ve

$$f'(t)dt = du \quad -\frac{u}{s} e^{-\frac{s}{u}t} = v$$

dönüşümleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned} Z\{f(t)\} = Z(u, s) &= \frac{s}{u} \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt = \frac{s}{u} \left[ \left( -\frac{u}{s} e^{-\frac{s}{u}t} f(t) \right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left( -\frac{u}{s} e^{-\frac{s}{u}t} \right) f'(t) dt \right] \\ &= f(0) + \int_0^\infty f'(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt \end{aligned}$$

olur. Yani,

$$Z(u, s) = f(0) + \int_0^\infty f'(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı  $\frac{s}{u}$  ile çarpılırsa,

$$\frac{s}{u} Z(u, s) = \frac{s}{u} f(0) + \frac{s}{u} \int_0^\infty f'(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt$$

$$\frac{s}{u} Z(u, s) - \frac{s}{u} f(0) = Z\{f'(t)\}$$

olur.

5.  $Z\{f(t)\} = Z(u, s)$  olsun. Bu durumda

$$\text{a) } Z\{t f(t)\} = \frac{u^2}{s} \frac{d}{du} (Z(u, s)) + \frac{u}{s} Z(u, s)$$

$$\text{b) } Z\{t f'(t)\} = \frac{u^2}{s} \frac{d}{du} \left( \frac{s}{u} Z(u, s) \right) + Z(u, s)$$

$$\text{c) } Z\{t f''(t)\} = s \frac{d}{du} (Z(u, s)) - \frac{s}{u} Z(u, s) + \frac{s}{u} f(0)$$

⋮

dir.

### İntegrallerin ZZ –Dönüşümü

6.  $Z\{f(t)\} = Z(u, s)$  olsun, o zaman

$$Z\left\{\int_0^t f(p) dp\right\} = \frac{u}{s} Z(u, s)$$

eşitliği elde edilir.

## Bazı Fonksiyonların $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$ –Dönüşümleri

**Tablo 1.** Bazı Fonksiyonların  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$  – Dönüşümleri

| S.No. | $f(t)$           | $\mathcal{Z}\{f(t)\}$                                                                         |
|-------|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | 1                | 1                                                                                             |
| 2     | $t$              | $\frac{u}{s}$                                                                                 |
| 3     | $e^{at}$         | $\frac{u}{s - au}$                                                                            |
| 4     | $\sin at$        | $\frac{aus}{s^2 + a^2u^2}$                                                                    |
| 5     | $\cos at$        | $\frac{s^2}{s^2 + a^2u^2}$                                                                    |
| 6     | $t^n$            | $n! \frac{u^n}{s^n}$                                                                          |
| 7     | $t^n$            | $\Gamma(n + 1) \frac{u^n}{s^n}$                                                               |
| 8     | $e^{at} \sin bt$ | $\frac{b \frac{s}{u}}{\left(\frac{s}{u} - a\right)^2 + b^2}$                                  |
| 9     | $e^{at} \cos bt$ | $\frac{\frac{s^2}{u^2} - \frac{as}{u}}{\left(\frac{s}{u} - a\right)^2 + b^2}$                 |
| 10    | $t \cos at$      | $\frac{\frac{s}{u} \left(\frac{s^2}{u^2} - a^2\right)}{\left(\frac{s^2}{u^2} + a^2\right)^2}$ |
| 11    | $t \sin at$      | $\frac{2a \frac{s^2}{u^2}}{\left(\frac{s^2}{u^2} + a^2\right)^2}$                             |

**Teorem 3 (ZZ –Dönüşümünün Varlığı)**

$f(t)$  her sonlu aralık  $0 \leq t \leq K$  ve üstel mertebeden  $\gamma$  için parçalı sürekli ise  $t > K$  olmak üzere ZZ – dönüşümü  $Z(u, s)$  her  $s > \gamma$ ,  $u > \gamma$  için mevcuttur.

**İspat:** Her pozitif  $K$  sayısı için;

$$Z(u, s) = \frac{s}{u} \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt = \frac{s}{u} \int_0^K f(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt + \frac{s}{u} \int_K^\infty f(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt$$

olup  $f(t)$  her sonlu  $0 \leq t \leq K$  aralığında parçalı sürekli olduğundan, sağ taraftaki birinci integral vardır. Ayrıca sağ taraftaki ikinci integral de vardır.  $t > K$  için  $f(t)$ ,  $\gamma$  üstel mertebeden olup ikinci integralinde var olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \left| \frac{s}{u} \int_K^\infty f(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt \right| &\leq \frac{s}{u} \int_K^\infty |f(t) e^{-\frac{s}{u}t}| dt \\ &\leq \frac{s}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{u}t} |f(t)| dt \leq \frac{s}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{u}t} M e^{\gamma t} dt \\ &\leq \frac{sM}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{u}t} e^{\gamma t} dt \leq \frac{sM}{u} \int_0^\infty e^{-(\frac{s}{u}-\gamma)t} dt \\ &= \frac{sM}{u} \frac{e^{-(\frac{s}{u}-\gamma)t}}{\left(-\frac{s}{u}-\gamma\right)} \Big|_0^\infty = \frac{sM}{s-\gamma u} \end{aligned}$$

olur.

**Tanım 15 (Ters ZZ – Dönüşümü):** Bir  $F(s)$  fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer

$$Z\{f(x)\} = F(s)$$

olacak biçiminde bir  $f(x)$  fonksiyonu var ise ,  $f$  ye  $F$  nin *Ters ZZ – Dönüşümü* denir.  $F$  nin Ters ZZ Dönüşümü

$$f = Z^{-1}\{F\} \text{ veya } f(x) = Z^{-1}\{F(s)\}$$

biçiminde gösterilir.

Örneğin,  $Z(s) = \frac{s}{s-2u}$  fonksiyonunun Ters ZZ –Dönüşümü

$$Z^{-1}\left\{\frac{s}{s-2u}\right\} = e^{2t}$$

şeklindedir.

**Teorem 4 (Ters ZZ –Dönüşümünün tekliği):**

$f$  ve  $g$ ,  $[0, \infty)$  – aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden iki fonksiyon olsun. Eğer her  $s > s_0$  lar için  $Z^{-1}\{f\} = Z^{-1}\{g\}$  olacak şekilde bir  $s_0$  sabiti mevcutsa bu takdirde sonlu sayıda süreksizlik noktaları hariç her  $x > 0$  için  $f(x) = g(x)$  dir.

**Teorem 5 (ZZ –Dönüşümü için Konvolüsyon Teoremi):**

$f$  ve  $g$  iki fonksiyon olsun. ZZ –Dönüşümünün konvolüsyonu

$$Z(f * g) = \frac{u}{s} Z(f) \cdot Z(g)$$

dir.

**İspat:**

$$\begin{aligned} Z(f)Z(g) &= \frac{s}{u} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{s}{u}\tau} d\tau \cdot \frac{s}{u} \int_0^\infty g(\vartheta) e^{-\frac{s}{u}\vartheta} d\vartheta \\ Z(f)Z(g) &= \frac{s^2}{u^2} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{s}{u}\tau} d\tau \cdot \int_0^\infty g(\vartheta) e^{-\frac{s}{u}\vartheta} d\vartheta \end{aligned} \quad (36)$$

$t = \vartheta + \tau$  ve  $\vartheta = t - \tau$  yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} Z(g) &= \int_\tau^\infty g(t - \tau) e^{-\frac{s}{u}(t-\tau)} dt \\ &= \int_\tau^\infty g(t - \tau) e^{-\frac{s}{u}t} e^{\frac{s}{u}\tau} dt \\ &= e^{\frac{s}{u}\tau} \int_\tau^\infty g(t - \tau) e^{-\frac{s}{u}t} dt \end{aligned}$$

böylece

$$\begin{aligned} (36) &= \frac{s^2}{u^2} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{s}{u}\tau} d\tau \cdot e^{\frac{s}{u}\tau} \int_\tau^\infty e^{-\frac{s}{u}t} g(t - \tau) dt d\tau \\ &= \frac{s^2}{u^2} \int_0^\infty f(\tau) \int_\tau^\infty e^{-\frac{s}{u}t} g(t - \tau) dt d\tau \\ &= \frac{s^2}{u^2} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{u}t} \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau dt \\ &= \frac{s^2}{u^2} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{u}t} \cdot (f * g)(t) dt \\ &= \frac{s}{u} Z(f * g) \end{aligned}$$

olur.

## ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde dört tane birinci tür lineer Volterra integral denklemi alınıp  $ZZ$  –Dönüşümü ile çözüldü.

### Test Problemi 1

$x = \int_0^x u(t)dt$  birinci tür lineer Volterra integral denklemini  $ZZ$  –Dönüşümü uygulayarak çözelim.

#### Çözüm:

$x = \int_0^x u(t)dt$  denkleminin her iki tarafına  $ZZ$  –Dönüşümü uygulanırsa

$$Z(x) = Z\left(\int_0^x u(t)dt\right)$$

$ZZ$  –Dönüşümünün Konvolüsyon teoreminden

$$Z(x) = \frac{u}{s} Z(1) Z(u(x))$$

$$\frac{u}{s} = \frac{u}{s} \cdot 1 \cdot Z(u(x))$$

$$Z(u(x)) = 1$$

elde edilir.

Bu eşitliğin her iki tarafının ters  $ZZ$  –Dönüşümü alınır

$$Z^{-1}\left(Z(u(x))\right) = Z^{-1}(1)$$

$$u(x) = 1$$

olur.

### Test Problemi 2

$x^2 = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)u(t)dt$  birinci tür lineer Volterra integral denklemini  $ZZ$  –Dönüşümü uygulayarak çözelim.

#### Çözüm:

$x^2 = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)u(t)dt$  denkleminin her iki tarafına  $ZZ$  –Dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{Z}(x^2) = \mathcal{Z}\left(\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)u(t)dt\right)$$

$\mathcal{Z}\mathcal{Z}$  –Dönüşümünün Konvolüsyon teoreminden

$$2\frac{u^2}{s^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{s} \mathcal{Z}(x) \mathcal{Z}(u(x))$$

$$2\frac{u^2}{s^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{s} \cdot \frac{u}{s} \mathcal{Z}(u(x))$$

$$\mathcal{Z}(u(x)) = 4$$

elde edilir .

Bu eşitliğin her iki tarafının ters  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$  –Dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{Z}^{-1}\left(\mathcal{Z}(u(x))\right) = \mathcal{Z}^{-1}(4)$$

$$u(x) = 4$$

olur.

### Test Problemi 3

$$x(t) = t^2 + \int_0^t x(u) \sin(t-u) du \quad \text{birinci tür lineer Volterra integral denklemini}$$

$\mathcal{Z}\mathcal{Z}$  –Dönüşümü uygulayarak çözelim.

**Çözüm:**

$x(t) = t^2 + \int_0^t x(u) \sin(t-u) du$  denkleminin her iki tarafına  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$  –Dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{Z}(x(t)) = \mathcal{Z}\left(t^2 + \int_0^t x(u) \sin(t-u) du\right)$$

$\mathcal{Z}\mathcal{Z}$  –Dönüşümünün lineerliğinden

$$\mathcal{Z}(x(t)) = \mathcal{Z}(t^2) + \mathcal{Z}\left(\int_0^t x(u) \sin(t-u) du\right)$$

$\mathcal{Z}\mathcal{Z}$  –Dönüşümünün Konvolüsyon teoreminden

$$\mathcal{Z}(x(t)) = \mathcal{Z}(t^2) + \frac{u}{s} \mathcal{Z}(x(t)) \mathcal{Z}(\sin t)$$

$$\mathcal{Z}(x(t)) = 2\frac{u^2}{s^2} + \frac{u}{s} \mathcal{Z}(x(t)) \cdot \frac{us}{s^2 + u^2}$$

$$\mathcal{Z}(x(t)) - \mathcal{Z}(x(t)) \left( \frac{su^2}{s^3 + su^2} \right) = 2 \frac{u^2}{s^2}$$

$$\mathcal{Z}(x(t)) \left( 1 - \frac{su^2}{s^3 + su^2} \right) = 2 \frac{u^2}{s^2}$$

$$\mathcal{Z}(x(t)) \left( \frac{s^3}{s^3 + su^2} \right) = 2 \frac{u^2}{s^2}$$

$$\mathcal{Z}(x(t)) \left( \frac{s^2}{s^2 + u^2} \right) = 2 \frac{u^2}{s^2}$$

$$\mathcal{Z}(x(t)) = 2 \frac{u^2}{s^2} \cdot \frac{s^2 + u^2}{s^2}$$

$$\mathcal{Z}(x(t)) = 2 \frac{u^2}{s^2} + 2 \frac{u^4}{s^4}$$

elde edilir.

Bu eşitliğin her iki tarafının ters  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$  –Dönüşümü alınırsa,

$$\mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{Z}(x(t))) = \mathcal{Z}^{-1} \left( 2 \frac{u^2}{s^2} + 2 \frac{u^4}{s^4} \right)$$

$$x(t) = \mathcal{Z}^{-1} \left( 2 \frac{u^2}{s^2} + 2 \frac{u^4}{s^4} \right)$$

Ters  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$  –Dönüşümünün lineerliğinden

$$x(t) = \mathcal{Z}^{-1} \left( 2 \frac{u^2}{s^2} \right) + \mathcal{Z}^{-1} \left( 2 \frac{u^4}{s^4} \right)$$

$$x(t) = t^2 + \frac{t^4}{12}$$

olur.

#### Test Problemi 4

$\int_0^t \cos(t-s) x(s) ds = tsint$  birinci tür lineer Volterra integral denklemini  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$  –Dönüşümü uygulayarak çözelim.

**Çözüm:**

$\int_0^t \cos(t-s) x(s) ds = tsint$  denkleminin her iki tarafına  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$  –Dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{Z} \left( \int_0^t \cos(t-s) x(s) ds \right) = \mathcal{Z}(t \sin t)$$

$\mathcal{Z}\mathcal{Z}$  –Dönüşümünün Konvolüsyon teoreminden

$$\frac{u}{s} \mathcal{Z}(\cos t) \mathcal{Z}(x(t)) = \frac{2 \frac{s^2}{u^2}}{\left( \frac{s^2}{u^2} + 1 \right)}$$

$$\frac{u}{s} \cdot \frac{s^2}{s^2 + u^2} \cdot \mathcal{Z}(x(t)) = 2 \frac{s^2}{u^2} \cdot \frac{u^4}{(s^2 + u^2)^2}$$

$$\mathcal{Z}(x(t)) = 2 \frac{us}{s^2 + u^2}$$

elde edilir.

Bu eşitliğin her iki tarafının ters  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$  –Dönüşümü alınırsa,

$$\mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{Z}(x(t))) = \mathcal{Z}^{-1} \left( 2 \frac{us}{s^2 + u^2} \right)$$

$$x(t) = 2 \sin t$$

olur.

## SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tezde, birinci tür lineer Volterra integral denklemleri ele alındı. Sonra bu denklemler  $ZZ$  –Dönüşümü yardımıyla çözüldü. Önce  $ZZ$  –Dönüşümü detaylı bir şekilde tanıtıldı.  $ZZ$  –Dönüşümü için Konvolüsyon teoremi ispatlandı. Daha sonra dört tane test problemi ele alındı. Metod bu problemlere uygulandı. İstenilen sonuçlar elde edildi.

Burada  $ZZ$  –Dönüşümünün, birinci tür lineer Volterra integral denklemlerinin çözüm sürecini kolaylaştırdığını ve bu tür denklemlerin çözümleri için etkili bir metot olduğu görüldü.



## KAYNAKLAR

- Aboodh, KS., Farah, RA., Almardy, IA., et al. Solving delay differential equations by Aboodh transformation method. *International Journal of Applied Mathematics & Statistical Sciences* 2018; 7(2): 55-64.
- Aggarwal, S., Chauhan, R., and Sharma, N., A new application of Kamal transform for solving linear Volterra integral equations. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science* 2018; 7(4): 138-140.
- Aggarwal, S., Gupta, AR, Singh, DP., et al. Application of Laplace transform for solving population growth and decay problems. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science* 2018; 7(9): 141-145.
- Aggarwal, S., Singh, A., Kumar, A., et al. Application of Laplace transform for solving improper integrals whose integrand consisting error function. *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics and Statistics* 2019; 4(2): 1-7.
- Aggarwal, S., and Sharma, N., Laplace Transform for the Solution of First Kind Linear Volterra Integral Equation, *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics and Statistics* Volume 4, Issue 3&4, Pg. No. 16-23, 2019.
- Aksoy, Y., 1998, *İntegral Denklemler*, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Yayını, İstanbul.
- Çağlıyan, M., Çelik, N., Doğan, S., 2016, *Adi Diferansiyel Denklemler*, Dora Yayınları.
- Eltayeb, H., and Kilicman, A., A Note on the Sumudu Transforms and differential Equations, *Applied Mathematical Sciences*, Vol, 4, no.22, 1089-1098, 2010.
- Elzaki, T.M., and Elzaki, S.M., On the Elzaki Transform and Ordinary Differential Equation With Variable Coefficients, *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*. ISSN 0973-4554 Volume 6, Number 1, pp. 13-18, 2011.
- Elzaki, T.M., The New Integral Transform “Elzaki Transform” *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, ISSN 0973-1768, Number 1, pp. 57-64, 2011.
- Kadioğlu, E., 2005. *Genel Matematik*, Erzurum.
- Mohand, M., Mahgob, A., and Elzaki, T.M., Elzaki Transform And Power Series Expansion On A Bulge Heaviside Step Function, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. ISSN 0973-1768 Volume 11, Number 3, pp. 1179-1184, 2015.
- Najafi, R., Küçük, G.D., and Çelik, E., Modified iteration method for solving fractional gas dynamics equation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 40 (4), 939-946, 2017.
- Podlubny, I., 1999, *Fractional differential equations*, Academic Pres, New York.
- Zafar, Z. UI A., ZZ Transform Method, *International Journal of Advanced Engineering and Global Technology*, 4(1), 1605-1611, 2016.

## ÖZGEÇMİŞ

| Kişisel Bilgiler     |                                                        |
|----------------------|--------------------------------------------------------|
| <b>Adı Soyadı:</b>   | Erhan ÖZDEMİR                                          |
| <b>Doğum tarihi:</b> |                                                        |
| <b>Doğum Yeri:</b>   |                                                        |
| <b>Uyruğu:</b>       |                                                        |
| <b>Adres:</b>        |                                                        |
| <b>Tel:</b>          |                                                        |
| <b>E-mail:</b>       |                                                        |
| Eğitim               |                                                        |
| <b>Lise:</b>         | Yıldızkent İ.M.K.B. Lisesi                             |
| <b>Lisans:</b>       | Atatürk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü. |
| <b>Yüksek</b>        | Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enst., Uygulamalı  |
| <b>Lisans:</b>       | Matematik Anabilim Dalı                                |
| <b>Doktora:</b>      | -                                                      |
| Yabancı Dil Bilgisi  |                                                        |
| İngilizce:           | Orta                                                   |
|                      |                                                        |