



T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü



TEKİL VE YÜKSEK SALINIMLI PROBLEM UYGULAMALARININ HESAPLANMASI İÇİN SAYISAL ALGORİTMALAR

Doktora Tezi

Idrissa KAYIJUKA

Matematik Anabilim Dalı

Bornova-İzmir
2021

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

TEKİL VE YÜKSEK SALINIMLI PROBLEM
UYGULAMALARININ HESAPLANMASI İÇİN
SAYISAL ALGORİTMALAR

IDRISSA KAYIJUKA

Danışman : Prof. Dr. F. Serap TOPAL
II. Danışman : Doç. Dr. Ali KONURALP

Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Doktora Programı

Bornova-İzmir
2021

**EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ ETİK KURALLARA
UYGUNLUK BEYANI**

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum "**Tekil ve yüksek salınımlı problem uygulamalarının hesaplanması için sayısal algoritmalar**" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

09.08.2021

Idrissa KAYIJUKA

ÖZET**TEKİL VE YÜKSEK SALINIMLI PROBLEM UYGULAMALARININ
HESAPLANMASI İÇİN SAYISAL ALGORİTMALAR**

KAYIJUKA, Idrissa

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışman: Prof. Dr. F. Serap TOPAL, II. Danışman: Doç. Dr. Ali KONURALP

Ağustos 2021, 121 sayfa

Hızlı salınımlı integraller, kuantum kimyası, elektrodinamik, görüntü analizi ve bilgisayarlı tomografiden akışkanlar mekaniğine kadar birçok disiplinde önemli bir zorluk olarak kabul edilir. Bu integraller, integrantında eşzamanlı olarak frekans yüksek olduğunda ve integrasyon aralığının uç noktasında tekillikler içerdiğinde hesaplamak için daha fazla zorluk çıkarmaktadır. Bu tezde, yüksek salınımlı çekirdekli tekil integral denklemlerin verimli bir şekilde hesaplanması için dikkat çekici özellikleri ile algoritmalar geliştiriyoruz öyle ki bu algoritmalar yüksek frekansta bile yüksek doğruluğa sahip olmaktadır.

Burada, integrallerin ortogonal polinomlar ve/veya terim terim özel fonksiyon serileri ile kesildiği Clenshaw-Curtis algoritmaları incelenmiştir. Daha sonra farklı tekillik çeşidine sahip integraller rekürans bağlantıları ile kompleks düzlem tabanlı yöntem kullanılarak hesaplanır. Bu rekürans bağlantılarının kararlılığı ve kuadratür kurallarının hata analizi verilir. Ayrıca, sunulan algoritmaların etkinliğini göstermek için sayısal örnekler de verilmiştir.

Bu tez aynı zamanda logaritmik, Cauchy-logaritmik ve Hipersingüler-logaritmik tip tekilliklere sahip integrallerin hesaplanması için çizgi integrallerinin toplamına dayanan bir yöntem sunar. Orijinal integrali pozitif yarı sonsuz bir aralıkta çizgi integrallerinin toplamına dönüştürdükten sonra, Gauss-bağlantılı kuadratür kuralları oluşturulur. Burada temel matematiksel araç moment bilgilerinin kullanılmasıdır. Gautschi logaritmik ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal polinomu sağlayan üç-terimli rekürans bağlantılarının katsayılarını üretmek için algoritmalar incelenmiştir. Ayrıca, teorik analizimizi doğrulamak için sayısal örneklerin sonuçları verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Yüksek salınımlı integraller, Clenshaw-Curtis yöntemleri, En dik iniş yöntemi, Cebirsel ve logaritmik tekillikler, Sonlu-kısım integralleri.

ABSTRACT**NUMERICAL ALGORITHMS FOR THE COMPUTATION OF SINGULAR AND
HIGHLY OSCILLATORY PROBLEMS WITH APPLICATIONS**

KAYIJUKA, Idrissa

Ph.D. in Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. F. Serap TOPAL, 2nd Sup.: Assoc. Prof. Dr. Ali KONURALP

August 2021, 121 pages

Integrals with rapid oscillation are considered a significant challenge in many disciplines, ranging from quantum chemistry, electrodynamics, image analysis, and computerized tomography to fluid mechanics. These integrals exhibit more difficulties to compute when concurrently in the integrand, the frequency becomes high and contains singularities at the endpoint of the integration interval. In this thesis, we develop algorithms for efficient computation of singular integral equations with highly oscillatory kernels that share astonishing characteristics; that is, the larger the frequency, the higher the accuracy.

Herein, Clenshaw-Curtis algorithms are studied in which integrands are truncated by orthogonal polynomials and/or special function series term by term. Then their singularity types are computed using either recurrence relations or the complex-based method. Stability of those recurrences relations and error analysis of the rules are obtained. Besides, numerical examples are given to show the effectiveness of the presented algorithms.

This thesis also presents a method based on the sum of line integrals for the first computation of logarithmic, Cauchy-logarithmic, and Hypersingular-logarithmic type singularities. After transforming the original integral into a sum of line integrals over a positive semi-infinite interval, Gauss-related quadrature rules are constructed. The vehicle utilized is the moment's information. Algorithms to produce the three-term recurrence relation coefficients that satisfy orthogonal polynomial with respect to Gautschi logarithmic weight function are investigated. Moreover, the results of numerical experiments are given to substantiate our theoretical analysis.

Keywords: Highly oscillatory integrals, Clenshaw-Curtis methods, Steepest descent method, Algebraic and logarithm singularities, Finite-part integrals.

ÖNSÖZ

Bu tezde ele alınan salınımlı integrallerin türü, birçok fiziksel ve mühendislik problemlerinde kapsamlı bir şekilde bulunabilir. Burada önerilen algoritmalar, tekil ve yüksek salınımlı integrallerin verimli bir şekilde ele alınması için odak çözümlerden biri olarak kabul edilebilir. Gelecekteki çalışmamız, Clenshaw-Curtis algoritmalarının logaritmik-Cauchy, Hipersingular integrallere genişletilmesini ve Radon dönüşümü ve Helmholtz denklemleri gibi pratik teoride ortaya çıkan somut sayısal örneklerin test edilmesini içerecektir.

Bu zorlu dört yıl boyunca yapmış olduğum doktora çalışmalarımda bana doğrudan veya dolaylı olarak destek olan aileme, danışman hocalarıma, arkadaşlarıma ve matematik bölümü üyelerime teşekkür ederim.

Idrissa Kayijuka

Tarih: 09/08/2021

İZMİR

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
ÖNSÖZ	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	xi
TABLolar LİSTESİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xvi
1 GİRİŞ	1
1.1 Cebirsel Tekil İntegraller için Clenshaw-Curtis algoritmaları Hakkında Literatür Bilgisi	4
1.2 Cauchy ve Jacobi tip tekil integraller için Clenshaw-Curtis Algoritmaları hakkında Literatür Bilgisi	6
1.3 Logaritmik ve Cauchy-logaritmik tipli tekil integraller	9
1.4 Cebirsel ve logaritmik Hipertekil tip tekil integraller	12
1.5 Kompleks integrasyon temelli metotlar	14
1.5.1 En dik iniş yöntemiyle sonlu Fourier dönüşümlerinin Hesaplanması	15
1.5.2 Dik iniş yöntemi ile sonsuz Fourier dönüşümlerinin Hesaplanması	27
2 TEKİL VE YÜKSEK SALINIMLI FOURİER DÖNÜŞÜM İNTEGRALLERİ İÇİN CLENSHAW-CURTIS ALGORİTMALARI	30
2.1 Modifiye Clenshaw-Curtis Yaklaşımı 1 kullanılarak Fourier Dönüşümü	33
2.1.1 (2.1.8) Rekürans bağıntısının kararlılığı	36
2.1.2 $G_n[\mu]$ 'ın Hesabı için Algoritma 1	38
2.1.3 Yaklaşım 1 için Mathematica program kodları	39
2.2 Clenshaw-Curtis Yaklaşımı 2 kullanarak Fourier Dönüşümü	41
2.2.1 (2.2.3) Rekürans bağıntısının kararlılığı	42
2.2.2 $G_k[\mu]$ 'ın Hesabı için Algoritma 2	44
2.3 Hata Analizi	44
2.4 Sayısal Örnekler	49
3 CAUCHY VE JACOBI TİPİNDE TEKİLLİK ÇEKİRDEĞİNE SAHİP SALINIMLI İNTEGRALLER İÇİN VERİMLİ BİR ALGORİTMA	54

3.1	Metodun sayısal formülasyonu.....	54
3.2	(3.1.7) Modifiye momentlerin etkili hesaplanması.....	57
3.2.1	Gauss-Laguere kuralı ile (3.2.1) deki integral parçalarının hesabı.....	60
3.2.2	Algoritma: (3.1)'in hesabı	62
3.3	Sayısal Örnekler	62
4	LOGARİTMİK VE CAUCHY-LOGARİTMİK TİPLİ TEKİL VE YÜKSEK SALINIMLI İNTEGRALLER İÇİN HIZLI GAUSS-BAĞLANTILI KUADRATÜR	67
4.1	En dik iniş yöntemi ile (4.1) ve (4.2)'nin hesaplanması	68
4.1.1	(4.1) Logaritmik yüksek salınlı integralin hesaplanması	69
4.1.2	(4.2) Logaritmik-Cauchy integralinin hesaplanması	72
4.2	Gauss tipli kuadratr kuralı ile (4.1.1) ve (4.1.2.1)'in hesaplaması	75
4.3	Sayısal Örnekler	82
5	YÜKSEK SALINIMA SAHİP ÇEKİRDEKLİ CEBİRSEL VE LOGARİTMİK HİPERSİNGÜLER TİP TEKİL İNTEGRALLERİN ÇÖZÜMÜNE HIZLI BİR YAKLAŞIM.....	88
5.1	(5.1) integralinin hesaplanması için bir yöntem	89
5.2	Gauss kuadratr kuralı ile (5.1.2)'nin hesaplanması	93
5.2.1	Algoritma 1: Sıradan momentleri kullanarak $\{\alpha_i^{LG}, \beta_i^{LG}\}_{i=0}^{n-1}$ katsayılarının hesaplanması.....	97
5.2.2	Algoritma 2: Modifiye momentler kullanarak $\{\alpha_i^{LG}, \beta_i^{LG}\}_{i=0}^{n-1}$ katsayılarının hesaplanması.....	100
5.3	Sayısal Örnekler	102
6	SONUÇ	107
	KAYNAKLAR DİZİNİ	109
	TEŞEKKÜR	119
	ÖZGEÇMİŞ.....	120

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1: $[1,5]$ aralığında $f(x, \omega) = J_4(80x)$ fonksiyonu (solda) ve $[-1,1]$ aralığındaki $f(x, \omega) = (1+x)^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{\frac{1}{5}}x^2 e^{1000ix}$ fonksiyonu (sağda).	3
Şekil 1.5.1: (1.5.1.1) integrali için integrasyon bölgesi (sol) ve (1.5.1.2) deki integral için integrasyon yolu (sağ).	17
Şekil 1.5.2: c tipli (1.5.1.2) deki integrand için integrasyon bölgesi.	17
Şekil 1.5.3: C_L integrasyon çevresi.	28
Şekil 2.1: $\alpha = -1/2$, $\beta = 11/12$, $f(x) = xe^x$ ve $\mu = 0, 10, \dots, 10^5$ için Algoritma 1 için yakınsaklık oranları.	47
Şekil 2.2: $\alpha = 0.99$, $\beta = -1/3$, $\mu = 1, 10, \dots, 5000$ ve $f(x) = \frac{[100(x - \frac{11}{8})]^{-1/2}}{(x^2 + 1000)}$ için Algoritma 1 ve Algoritma 2 için yakınsaklık oranları.	48
Şekil 2.3: $N = 14, 16, 20$, $\alpha = -0.4$, $\beta = -0.5$, $\mu = 1, 10, \dots, 10^6$ ve $f(x) = \cos x$ için Algoritma 1'in yakınsaklık oranları.	48
Şekil 3.1: (3.1.7) integrali için integrasyon yolları.	58
Şekil 4.1: (4.1) integrali için integrasyon yolu.	69
Şekil 4.2: (4.2) integrali için integrasyon yolu.	73
Şekil 4.3: $\int_{-1}^1 \frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{3}} x - \frac{1}{2} ^{-\frac{1}{3}} \ln(x+1) \ln(1-x) e^{ikx}}{1 + e^{-(x+7/2)}} dx$ integralinin yakınsama oranı.	82
Şekil 4.4: $\int_0^1 \frac{x^{-0.19}(1-x)^{-0.81} \ln x \ln(1-x) e^{ikx}}{(1+x^2)(x-0.5)} dx$ Cauchy integralinin yakınsama oranı.	82
Şekil 5.1. (5.1) Hipersingüler integrali için integrasyon yolu.	90
Şekil 5.2: $\alpha = -1/4$, $\beta = -1/5$, $\mu = 0$, $k = 2$ ve $f(x) = \sin x$ ile (5.1) hipersingüler integrali için yakınsama oranı.	101

Şekil 5.3: $\omega = 10^3$ sabit değeri için $\int_{-1}^1 \frac{(x+1)^{-0.25} (1-x)^{0.5} \ln(1+x) \ln(1-x) e^{i\omega x} e^x}{x-0.1} dx$,

integralinin N 'e bağlı hataları. 102



TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 1.5.1: $r = 2$ için e^{-x^r} karşılık gelen $\{a_i, b_i\}_{i=0}^9$ katsayıları	20
Tablo 1.5.2: $k = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere $\int_0^{10} \frac{\cos(x)}{1+x^2} e^{i\mu x^k} dx$ integrali için mutlak hatalar.	21
Tablo 1.5.3: $\int_{-1}^1 (x+1)^{-1/3} (1-x)^{-1/6} \cos(x) e^{i\mu x} dx$ integrali için mutlak hata ve hesaplama zamanı.....	24
Tablo 1.5.4: $\alpha = -\frac{1}{3}, \beta = -\frac{1}{6}, \lambda = \frac{1}{2}$ için $\int_{-1}^1 (1+x)^\alpha x-\frac{1}{2} ^\beta (1-x)^\lambda \log \frac{x^2+4}{x^2+1} e^{i\mu x} dx$ integralinin hataları ve hesaplama süreleri	27
Tablo 1.5.5: $\int_1^\infty \frac{x e^{-x}}{1+x^4} H_4^{(1)}(\mu x) dx$ integrali için mutlak hatalar ve hesaplama süreleri	29
Tablo 2.1: $N = 14$ için Algoritma 1 kullanılarak, büyük μ değerleri için mutlak hatalar ve hesaplama zamanları.	50
Tablo 2.2: En dik iniş metodu ile Örnek 2.4.1 deki integral için mutlak hatalar ve çalışma süreleri.	50
Tablo 2.3: Algoritma 1 kullanılarak μ 'nün farklı değerleri için mutlak hataları ve çalışma zamanları.	51
Tablo 2.4: μ 'nün küçük değerleri için her iki algoritmanın mutlak hataları ve hesaplama zamanları.	52
Tablo 2.5: Her iki algoritma kullanılarak Örnek 2.4.4 için Mutlak hatalar.	53
Tablo 2.6: Algoritma 1 kullanılarak farklı N ve μ değerleri için $G[\mu] = \int_1^{-1} e^{i\mu x} (x+1)^{-0.4} (1-x)^{-0.5} \cos x dx$ integralinin mutlak hataları.	53
Tablo 3.1: Çeşitli N ve ω değerleri ile (3.3.1) integrali için bağıl hatalar.....	63
Tablo 3.2: (3.3.2) integralinin çeşitli N ve ω değerleri ile $\mu = 0.32$ değeri için elde edilen hata miktarları.....	64
Tablo 3.3: (3.3.3) integralinin $N = 22$ ile yaklaşımı için hata değerleri ve saniye cinsinden CPU zamanı	64

Tablo 3.4: (3.3.4) integralinin $N = 38$ ile yaklaşımı için hata değerleri ve saniye cinsinden CPU zamanı	64
Tablo 3.5: (3.3.5) integralinin $N = 38$, $\omega = 10^3$ sabit değerleri ile çeşitli α, β, μ değerleri için bağıl hataları	65
Tablo 3.6: Sabit N ve çeşitli ω değerleri için (3.3.6) integral değerinin iki farklı katsayı formülü kullanılmasıyla elde edilen bağıl hatalar.	66
Tablo 4.1: Genelleştirilmiş Gauss-Laguerre ve Logaritmik Gauss-Laguerre ağırlık fonksiyonları.	77
Tablo 4.2: $\alpha = -1/3$ için $\{\alpha_j^L, \beta_j^L\}_{j=0}^{19}$ 'a karşılık gelen $t^\alpha (t-1-\ln t)e^{-t}$, katsayıları.....	79
Tablo 4.3: $\alpha = -1/3$ için $t^\alpha (t-1-\ln t)e^{-t}$ 'ye karşılık gelen $\{t_j^{(\alpha,L)}, \omega_j^{(\alpha,L)}\}_{j=1}^5$ düğümleri ve ağırlıkları.	81
Tablo 4.4: $n = 6$ ile (4.3.1) integrali için mutlak hatalar ve saniye cinsinden işlem süresi. ...	83
Tablo 4.5: $n = 7$ için (4.3.2) integrali için hatalar ve saniye cinsinden hesaplama süresi	84
Tablo 4.6: $n = 4$ ile (4.3.3) integrali için mutlak hatalar ve saniye cinsinden işlem süresi	85
Tablo 4.7: $n = 5$ ile (4.3.4) integrali için mutlak hatalar ve saniye cinsinden işlem süresi	85
Tablo 4.8: Sabit $n = 3$ değeri ile (4.3.5) integrali için hatalar ve saniye cinsinden hesaplama süresi.	86
Tablo 4.9: Sabit $n = 4$ değeri ile (4.3.6) integrali için hatalar ve saniye cinsinden hesaplama süresi	87
Tablo 4.10: Farklı n ve k değerleri ile (4.3.7) integrali için elde edilen mutlak hatalar	87
Tablo 5.1: $\alpha = -1/4$, için $w^{(\alpha, LG)}(y) = y^\alpha e^{-y} (y-1-\ln y)$, ağırlık fonksiyonuna karşılık gelen $\{\alpha_i^{LG}, \beta_i^{LG}\}_{i=0}^{19}$ katsayılarının (5.2.1) de verilen algoritma ile bulunması (CPU zamanı 0.046 saniye, prec=75).....	98
Tablo 5.2: $n = 4$ 'te (5.3.1) integrali için mutlak hataları ve saniye cinsinden hesaplama süresi	102
Tablo 5.3: Sabit ω değeri ile (5.3.2) hipersingüler integrali için yaklaşım değerleri.	103
Tablo 5.4: $n = 5$ 'te (5.3.3) integrali için saniye cinsinden mutlak hataları ve hesaplama süresi	104

Tablo 5.5: Sabit ω ile (5.3.4) integrali için mutlak hataları ve saniye cinsinden hesaplama süresi	104
Tablo 5.6: Sabit ω ile (5.3.5) hipersingüler integralinin mutlak hataları ve hesaplama süresi	105
Tablo 5.7: Sabit ω ve $\mu = 0.5$. ile (5.3.5) hipersingüler integralinin yaklaşım değerleri ...	106
Tablo 5.8: $n=4$ sabit değeri ve farklı ω değerleri ile (5.3.6) 'nın mutlak hataları ve hesaplama süresi	106



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$T_n(x)$	Birinci tür Chebyshev polinomları
$U_n(x)$	İkinci tür Chebyshev polinomları
$L_2[a, b]$	Kare integrallenebilir küme
$P_n^{(\alpha, \beta)}$	Jacobi polinomları
$\Gamma(n)$	Gama fonksiyonu
$B(a, b)$	Beta fonksiyonu
$H_v^{(n)}(z)$	1. ve 2. Tür Hankel fonksiyonu
$J_v(z)$	Birinci tür v. mertebeden Bessel fonksiyonu
$Y_v(z)$	İkinci tür v. mertebeden Bessel fonksiyonu
$Si(y)$	Sinüs integrali
$Ci(y)$	Kosinüs integrali
γ	Euler sabiti
$\psi(z)$	Digama fonksiyonu
$L_n(x)$	Laguerre polinomları
$\hat{L}_n(y)$	Modifiye Laguerre polinomları
$(\lambda)_n$	Pochhammer sembolü
${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x)$	Hipergeometrik fonksiyonu
$M_n(\alpha, \beta, \mu)$	Modifiye moment
J_n	Jacobi Matrisi
Δ_n	Hankel determinanı
$R_n(f)$	Hata terimi veya Kalan
CPV	Cauchy Esas Değeri

MCCM	Modifiye Clenshaw-Curtis Metodu
HFP	Hadamard Sonlu Kısmı
CPU	Hesaplama süresi
DCT	Ayrık Kosinüs Dönüşümü
FFT	Hızlı Fourier Dönüşümü
CC	Clenshaw-Curtis
Prec	Hassasiyet



1 GİRİŞ

Yüksek salınlı integraller, son zamanlarda birçok araştırma makalesi ve kitabında tartışılan gündemdeki konular arasında yer almaktadır. Bu tür integraller, uygulamalı matematik, mühendislik ve diğer hesaplama bilimlerinin birçok alanında hayati bir rol oynamaktadır. Yüksek salınlı integrallere yaklaşmak için kullanılan Gauss integrasyon kurallarına dayanan iyi bilinen geleneksel yaklaşımların verimliliklerinin çok iyi olmadığı bilinmektedir. Bu integraller, sadece frekans yükseldiğinde değil, aynı zamanda integrasyon aralığının uç noktalarında farklı tipte tekilliklere sahip olduklarında da büyük bir zorluk çıkarmaktadırlar. Yüksek salınlı fonksiyonlar şu anda yirminci yüzyılın birkaç modern teknolojisinde kullanılmaktadır. Örneğin bu integraller, eğimli bir kumsaldaki su dalgalarının incelenmesi ve Fourier Bessel fonksiyonu ile kuantum mekaniğindeki spin analizi gibi Tutarlı Optik Görüntüleme üzerine yapılan son araştırmalarda kullanılmaktadır (Ehrenmark, 1987; Phong & Stein, 1983; Samson & Evans, 1998). Ayrıca, tıp bilimlerinde Bilgisayarlı Tomografi (CT), Pozitron Emisyon Tomografisi (PET) ve Tek Foton Emisyonlu Bilgisayarlı Tomografi (SPECT) teknolojilerinde kritik bir rol oynayan ve çok sık kullanılan Radon dönüşümünde de bu integrallerin çok önemli bir yere sahip olduğunu ifade etmek gerekir. Bir nesnenin saçılma verilerinden enine kesit taramalarına kadar bir görüntünün oluşturulması için tekil salınlı integraller kullanılmaktadır (Domínguez, Graham ve Smyshlyaev, 2007). Geniş bir uygulama alanına sahip olması dolayısıyla, bu tür integralleri hesaplamak için güçlü algoritmaları oluşturmak önemlidir. Bu tezde, logaritmik ve cebirsel tekil yüksek salınlı integrallerin verimli hesaplanması için algoritmalar kapsamlı bir şekilde incelenmiştir.

Bu tez çalışmanın da bazı bölümler, yüksek salınlı çekirdeklere sahip sonlu tekil integral denklemlerin sayısal hesaplanmasına ayrılmıştır. Tekil integral denklemler şu anda aerodinamik, optik, akışkanlar mekaniği, plastisite, elastikiyet, viskoelastisite, termoelastoplastisite ve kırılma mekaniği gibi uygulamalı matematik ve mühendislik mekaniğinin birçok alanında kullanılmaktadır. Bu tür integral denklemler klasik olarak mevcut olmasa da, katı ve akışkanlar mekaniğinin önemli problemlerinin çözümü için en son yüksek teknolojiyi oluştururlar. Bununla birlikte, bu tür integrallerin sonlu integraller olarak yorumlanması koşuluyla, böylesi integral denklemler çözülebilmektedir.

Genel olarak, yüksek salınlı çekirdeğe sahip tekil integral denklemler

$$I_a^b(f, \omega) = \int_a^b H(x) f(x) K(x; \omega) dx \quad (1.1)$$

formuna sahiptirler. Burada f verilen fonksiyon, H tekil çarpan ve/veya integrasyon aralığında veya civarında tekilliğe sahip bir fonksiyon, $K(., \omega)$ salınım parametrelili çekirdek ve (a, b) sonlu veya sonsuz olarak alınabilecek integrasyon aralığıdır.

v. mertebeden birinci ve ikinci tür Hankel fonksiyonları $H_v^{(n)}(z)$,

$$H_v^{(1)}(x) = J_v(x) + iY_v(x) \text{ ve } H_v^{(2)}(x) = J_v(x) - iY_v(x)$$

olmak üzere tipik olarak $H(x)$ çarpanları ve $K(x; \omega)$ çekirdeklerinin bazı örnekleri aşağıdaki gibidir:

a. Cebirsel tekillikler

$$H(x) = |x - \mu|^\alpha, \quad \alpha > -1, a < \mu < b,$$

$$H(x) = (x - a)^\alpha (b - x)^\beta, \quad \alpha > -1, \beta > -1,$$

$$H(x) = (x - a)^\alpha |x - c|^\lambda (b - x)^\beta, \quad \alpha > -1, \beta > -1, \lambda > -1, a < c < b$$

b. Logaritmik tekillik: $H(x) = \log|x - \mu|, a \leq \mu \leq b$

c. Cauchy tipi tekillik: $H(x) = 1/(x - \mu), a < \mu < b$

d. Hipertekil tip tekillik: $H(x) = 1/(x - \mu)^k, a < \mu < b, k > 1$

e. $K(x; \omega) = e^{i\omega x}$ tipindeki salınım çekirdeği, örneğin Fourier integrali:

$$I_0^\infty(f, \omega) = \int_0^\infty x^\alpha f(x) e^{i\omega x} dx, (\alpha > -1)$$

f. $K(x; \omega) = H_v^{(n)}(\omega x)$ tipindeki salınım çekirdeği, örneğin Hankel dönüşümü (Wong, 1982):

$$H_n(\omega) = \int_0^\infty x^\alpha f(x) H_v^{(n)}(\omega x) dx, \quad \alpha \pm v > -1, (n = 1, 2).$$

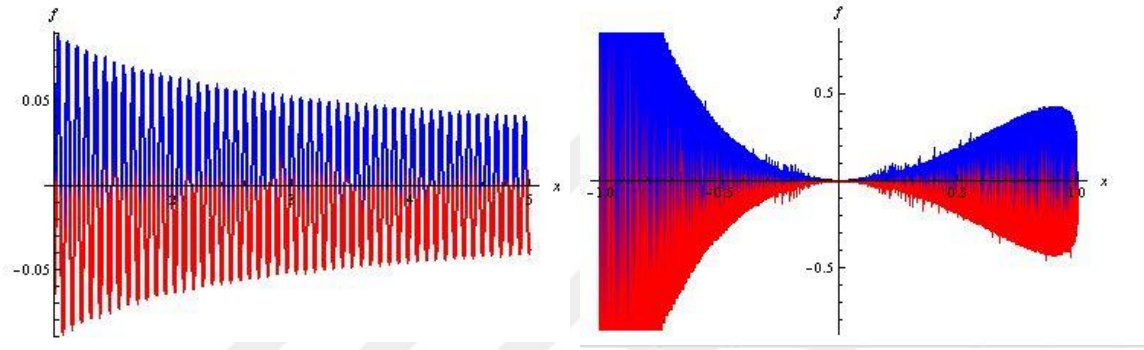
Yukarıdaki denklemlerde $J_v(z)$ ve $Y_v(z)$ fonksiyonları v. mertebeden birinci ve ikinci çeşit Bessel fonksiyonları olup, sırasıyla

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(s+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}, J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x), Y_{-m}(x) = (-1)^m Y_m(x)$$

olarak tanımlanmıştır (Milton Abramowitz & Stegun, 1965). Üstelik $J_\nu(x)$ genellikle Bessel diferansiyel denklemi olarak bilinen

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

diferansiyel denklemini sağlar.



Şekil 1.1: $[1, 5]$ aralığında $f(x, \omega) = J_4(80x)$ fonksiyonu (solda) ve $[-1, 1]$ aralığındaki $f(x, \omega) = (1+x)^{-\frac{1}{4}} (1-x)^{\frac{1}{5}} x^2 e^{1000ix}$ fonksiyonu (sağda).

Verilen f fonksiyonu yeterince düzgün olduğunda

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^n \omega_k f(x_k) \quad (1.2)$$

formundaki herhangi bir kuadratür formülünün amacı, $n \rightarrow \infty$ iken

$$E_{n,k}(f) = Q(f) - Q_n(f)$$

hızla azalan bir fonksiyon olmak üzere

$$Q(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

belirli integrale yaklaşımdır.

Bir kuadratür formülü türetilirken, standart bir tasarım üzerinde çalışılmalıdır, yani f integrantının belirli bir sınıfına uygulandığında formülün tamlığı önemlidir. (1.2) kuadratür

formülünde, x_k 'lar ayırık düğüm noktaları iken, ω_k sayıları kuadratürün ağırlıklarıdır. Bu çalışma da, yüksek salınlı çekirdeklere sahip tekil integral denklemleri verimli bir şekilde hesaplamak için Clenshaw-Curtis algoritmalarına dayalı yöntemlere ve kompleks-integrasyon tabanlı yöntemlere odaklanılmıştır. Sonraki beş alt bölümde, literatür hakkında kısa bir bilgi verildikten sonra bu tezde kullanılan şemalarla ilgili pratik örnekler vereceğiz.

1.1 Cebirsel Tekil İntegraller için Clenshaw-Curtis algoritmaları Hakkında

Literatür Bilgisi

Sayısal integrasyonda, $i^2 = -1$, H tekil çarpanların veya tekil cebirsel çarpanların çarpımı, $\mu \gg 1$ salınım parametresi ve f salınlı ve, tekil olmayan düzgün bir fonksiyon olmak üzere

$$G[\mu] = \int_a^b e^{ix\mu} H(x) f(x) dx \quad (1.1.1)$$

biçimindeki Fourier tipli integralin hesaplanması ile karşılaşırız. (Matematikte bir fonksiyonun düzgün olmasının daha hızlı bir yakınsama için önemli olduğu çok iyi bilinmektedir). (Matematikte, bir fonksiyon ne kadar düzgün olursa, yaklaşımının o kadar hızlı olduğu iyi bilinir.) şimdiye kadar yapılan çalışmalar da integralin bu tipi kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Çok sayıda araştırmacı, yukarıdaki integral formundaki denklemin verimli bir şekilde hesaplanması için farklı yöntemler içeren önemli makaleler yayınlamıştır. Bilgisayar bilimi, mühendislik, astronomi, bilgisayarlı tomografi, görüntü işleme, elektromanyetik, sismoloji, kuantum kimyası ve çeşitli fiziksel problemler gibi birçok alanda yüksek salınlı integrallerin belirgin bir şekilde ortaya çıktığını belirtmekte fayda vardır (P Agarwal, Jain, Agarwal, & Nagpal, 2014; Praveen Agarwal, Dragomir, Jleli, & Samet, 2018; Arfken & Weber, 2005; Brunner, 2007; Hamed & Cummins, 1991; Lu, 2005; Micheal Ruzhansky, Yeol Je Cho, & Praveen Agarwal, 2017; Morales-delgado, Gómez-aguilar, Saad, Altaf Khan, & Praveen Agarwal, 2019; P. Agarwal, D. Baleanu, Y. Chen, S. Momani, & Machado, 2020; Rekhviashvili, Pskhu, Agarwal, & Jain, 2019; Sun & Zamani, 1990). Genel olarak, tekil ve yüksek salınlı integrallerin integralleri $F(x)e^{i\mu g(x)}$ formundadır. Burada dalga sayısı parametresi μ veya salınım frekansı kesinlikle büyüktür, $F(x)$ ve $g(x)$ sırasıyla genlik ve faz fonksiyonlarıdır. Üstelik, $F(x)$ genlik fonksiyonu zayıf tekillikleri içerebilmektedir. İntegral (1.1.1), çekirdek fonksiyonlarının sadece salınlı değil, aynı zamanda farklı tekillik

türlerini de içermesi nedeniyle büyük zorluklara içermektedir. Sonuç olarak, (1.1.1) integrali basit, karışık ve durağan tekillik türlerini içerir ve α ve β değerlerine bağlıdır.

Tekillik ve salınım parametrelerinin aşırı davranışlarıyla başa çıkmak için birçok stratejinin geliştirildiği yüksek salınımlı integraller alanında Filon yöntemi (Filon, 1930), Filon-Clenshaw-Curtis yöntemi (Domínguez, 2014; Majidian, 2017), asimptotik metotlar (S. Olver, 2007), ve bunun gibi birçok yöntem önem kazanmıştır. Bununla birlikte, bahsedilen tüm yöntemler, salınım parametresi yüksek düzeyde salınımlı hale geldiğinde zarar görür. Ayrıca, klasik Gauss kuadratür kurallarının, fonksiyon değerlendirme sayısı ile karşılaştırıldığında ve daha fazla sayıda frekans göz önüne alındığında, yüksek salınımlı integrallere yaklaşımda başarısız olduğu ve ekonomik olmadığı gösterilmiştir. Genelleştirilmiş kuadratür kuralları dahil olmak üzere çeşitli yöntemler yalnızca $x \in [a, b] \setminus \{0\}$ olduğunda kullanılabilir.

Matris ağırlıkları bulma yaklaşımı kullanılarak hesaplanan Gauss Jacobi tipi tekillikler kuralı (Kayijuka, Ndabakuranye, & Hasçelik, 2018), düşük ve orta frekans değerleri dikkate alındığında cebirsel salınımlı (1.1.1) integrallerine uygulandığında daha iyi bir yaklaşım verecektir.

(1.1.1) integrali $g(x) \equiv f(x)e^{ix\mu}$ olmak üzere

$$\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta g(x) dx$$

şeklinde basitleştirilsin. Ancak, frekans değeri aşırı derecede arttığında kural zarar görür. Bu, değerlendirilen fonksiyonların sayısının da arttığı anlamına gelir, bu da algoritmanın yavaş hesaplanmasına yol açar.

Ayrıca, böyle bir problemle başa çıkmak için, ondalık basamak sayısı olarak (bilgisayar bilimlerinde kesinlik veya doğruluk olarak bilinir) “Machine Precision” kullanılır. Aynı zamanda Jacobi kuralı olarak bilinen Mehle kuadratür formülü $O(n^2)$ mertebesinde bir asimptotik hata tahminine sahiptir ve kural $2n-1$ dereceli polinomlara kadar olan polinomlar için tamdır. Bunun yanında $\alpha = \beta = \mu = 0$ alınırsa, Clenshaw-Curtis kuralı ile Gauss kuralı tamamen aynı olduğu görülür (Trefethen, 2008).

Değiştirilmiş Clenshaw-Curtis yöntemleri, bu tezin ikinci bölümündeki ana ilgi alanlarımızdan biridir. Clenshaw-Curtis (CC) kuadratürü, periyodik olmayan bir fonksiyonu periyodik bir fonksiyona dönüştürme fikrinden gelir. Yöntem, integrandın Chebyshev serisi ile terim terim kesildiği ve katsayısının yamuk kuralı ile yaklaşımının yapıldığı sürekli bir fonksiyonun

Chebyshev genişlemeleri kullanılarak oluşturulur. Periyodik fonksiyonlar için, yamuk kuralı çok hızlı yakınsarken, periyodik olmayan fonksiyonlar için nispeten yavaş bir şekilde yakınsama gerçekleşir (Clenshaw & Curtis, 1960). Cooley ve Tukey (Cooley & Tukey, 2006) Chebyshev katsayısını hesaplamak için sadece $O(n \log n)$ işlemin gerekli olduğunu göstermiştir. Clenshaw-Curtis yaklaşımına dayanan iki algoritmanın sunulması ve karşılaştırılması ikinci bölümün ilgi alanıdır. Bu iki Clenshaw-Curtis algoritması hakkında daha fazla bilgi bu tezin ikinci bölümünde detaylandırılmıştır.

1.2 Cauchy ve Jacobi tip tekil integraller için Clenshaw-Curtis Algoritmaları hakkında Literatür Bilgisi

Birçok fen ve mühendislik alanında, özellikle fiziksel problemlerdeki çeşitli integral denklemlerde,

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega t} f(t)}{t - \mu} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t - \mu| \geq \varepsilon} \frac{e^{i\omega t} f(t)}{t - \mu}, \quad -1 < \mu < 1$$

formunda salınımlı bir çekirdeğe sahip Cauchy Esas Değeri (CPV) ile karşılaşırız. Açıkça yukarıdaki integral

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega t} f(t)}{t - \mu} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{\mu - \varepsilon} \frac{e^{i\omega t} f(t)}{t - \mu} dt + \int_{\mu + \varepsilon}^1 \frac{e^{i\omega t} f(t)}{t - \mu} dt \right), \quad |\mu| < 1$$

şeklinde hesaplanabilmektedir. Literatürdeki pekçok çalışma has olmayan integralin genişlemesini göz önüne almaktadır (Whittaker & Watson, 1950). Yukarıdaki CPV integrali, verimli hesaplanması için muazzam algoritmalar sunan birkaç araştırmacı tarafından hesaplanmıştır. Literatür geniş ve tamamen tatmin edicidir. Bunlardan bazılarını aşağıda verebiliriz. Okecha (Okecha, 1987), makalesinde verilen f fonksiyonuna yaklaşım için Lagrange interpolasyon polinomlarını ve Legendre polinomlarının köklerini kullanmaktadır. Xiang and Wang (Wang & Xiang, 2009) N sayıda Clenshaw-Curtis $t_j = \left\{ \cos(\pi j / N - 1) \right\}_{j=0}^{N-1}$ noktalarını dikkate alarak birinci çeşit Chebyshev polinomu cinsinden $N - 1$ dereceden bir interpolasyon polinomu ile verilen f fonksiyonuna yaklaştılar. Burada izlenen yöntem şöyledir:

f fonksiyonuna $F_{N-1}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j T_j(t)$ kestirilmiş polinomu ile yaklaşım yaptılar ve daha

sonra

$$I(f, \mu) = \int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega t} F_{N-1}(t)}{t - \mu} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega t} (F_{N-1}(t) - F_{N-1}(\mu))}{t - \mu} dt + F_{N-1}(\mu) \int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega t}}{t - \mu} dt$$

kuadratür formülünü verdiler. $U_j(t)$ ikinci çeşit j . Chebychev polinomu ve

$M_j = \int_{-1}^1 e^{i\omega t} U_j(t) dt$ olmak üzere, yukarıdaki formülün sağ tarafındaki ilk integral

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega t} (F_{N-1}(t) - F_{N-1}(\mu))}{t - \mu} dt = 2 \sum_{s=0}^{N-2} T_s(t) \sum_{j=0}^{N-s-2} a_{j+s+1} M_j$$

şeklinde ele alınabilir. $k_1 = \omega - \mu\omega$ ve $k_2 = \mu\omega - \omega$ seçilmesiyle, sağ taraftaki ikinci integral direk olarak

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega t}}{t - \mu} dt = e^{i\omega t} \left\{ [Ci(k_1) - Ci(|k_2|)] + i[Si(k_1) + Si(|k_2|)] \right\}$$

olarak hesaplanabilir. γ Euler sabiti olmak üzere, yukarıdaki eşitlikteki $Si(t)$ ve $Ci(t)$

$$Ci(y) = \int_0^y \frac{\cos(t) - 1}{t} dt + \ln y + \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)! 2k} + \ln y + \gamma,$$

$$Si(y) = \int_0^y \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}$$

şeklinde alınan sinüs ve kosinüs integralleridir (M. Abramowitz & Stegun, 1964).

CPV integrallerini verimli bir şekilde değerlendirmek için üç-terimli yineleme bağıntısına dayalı bir yöntem de önerilmiştir (Wang, Zhang, & Huybrechs, 2013). Daha sonraları f , $[-1,1]$ aralığını barındıran kompleks düzlemde yeterince büyük bir bölgede analitik olarak kabul edilmek üzere, CPV integrallerinin etkin bir yaklaşımı (Wang & Xiang, 2010)'da verilmiştir. Diğer bir alternatif yaklaşım, salınımlı CPV integralini

$$I(f, \mu) = \int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega t} f(t)}{t - \mu} dt = \int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega t} (f(t) - f(\mu))}{t - \mu} dt + f(\mu) \int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega t}}{t - \mu} dt$$

şeklinde iki integrale ayırmaktır. Yukarıdaki durumda sağ taraftaki ikinci integralin hesaplanmasında, Filon-Clenshaw-Curtis metotları (Chen, 2012) uygulanmıştır ve bu yaklaşım hakkında daha fazla bilgi için (Domínguez, 2014; Domínguez, Graham, & Smyshlyayev, 2011; Robert Piessens & Branders, 1992) makaleleri tavsiye edilebilir.

Üçüncü bölümde, $|\omega|$, 1'den kesinlikle daha büyük, $\alpha, \beta \in (-\infty, 1)$, $\nu \in \mathbb{N}$ ve $f \in [-1, 1]$ aralığı üzerinde yeterince düzgün bir fonksiyon olmak üzere

$$I_{-1}^1(f; \mu) = \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{(1+t)^\alpha (1-t)^\beta (t-\mu)^\nu} e^{i\omega t} dt, |\mu| < 1, i^2 = -1 \quad (1.2.1)$$

formunda Fourier tipli integralin hesap adımları ile ilgileneceğiz. $\nu=0$ için, (1.2.1) integrali pekçok araştırmacı tarafından kapsamlı bir şekilde incelenmiştir (Örneğin (Chen, 2014; Kang & Shao, 2014; Kang, Xiang, & He, 2013; Kayijuka et al., 2018)). $\nu=1$ ve $\alpha = \beta = 0$ için, bu integraller Cauchy Esas Değeri (PVC) integralleri haline gelmektedir ve çeşitli metotlar bu integrali verimli hesaplamak üzere geliştirilmiştir (Capobianco & Criscuolo, 2003), (Wang & Xiang, 2009). Üstelik frekans $\omega=0$ olduğunda ve $f(t)$ 'nin Hilbert dönüşümünün varlığı için yeterli şart olan kapalı $[-1, 1]$ aralığında Lipschitz ve Hölder şartlarını sağlaması durumunda, aynı CPV Hilbert dönüşümü olarak bilinmektedir.

Bu tez çalışmasında, $\alpha, \beta \neq 0$ ve $\nu=1$ olan durumları göz önüne alacağız. $\nu=0$ olması durumunda, düşük frekans değerleri incelendiğinde Gauss Jacobi metodu (Kytke & Schäferkotter, 2004, p. 113) (1.2.1) integralini ele almak için çok etkili olacaktır. Bununla birlikte frekans büyüdüğünde, yöntem çeşitli zorluklara sahip olabilmektedir ve hesaplama adımlarında daha fazla fonksiyon değeri bulunması gerekebilmektedir ki bu hesaplama için harcanan zamanı arttırmaktadır. Bunun için sebep sadece integralin yüksek salınımlı olması değil, aynı zamanda integrasyon aralığının uç noktalarında tekilliklerin mevcut olmasındandır. Böyle bir durumdaki asimptotik davranış, kısmi integrasyonun art arda uygulanması ile 1955 yılında A. Erdelyi (Erdelyi, 1955) tarafından çalışılmış olup, eğer $f(t)$, $|t| \leq 1$ için N defa sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\beta \in [0, +\infty)$, $\alpha \in (-\infty, 1)$ ise, bu durum da

$$C_N(\omega) = \sum_{s=1}^N \frac{\Gamma(s+\alpha-1)}{\Gamma(s)} \sqrt{e^{\pi(s+\alpha-2)}} \omega^{-s-\alpha} e^{-i\omega} \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} \left[(1-t)^\beta f(t) \right]_{t=-1},$$

$$D_N(\omega) = \sum_{s=1}^N \frac{\Gamma(s+\beta-1)}{\Gamma(s)} \sqrt{e^{\pi(s+\beta-2)}} \omega^{-s-\beta} e^{i\omega} \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} \left[(1+t)^\alpha f(t) \right]_{t=1}$$

olmak üzere, $\omega \rightarrow \infty$ iken

$$\int_{-1}^1 \frac{f(t) e^{i\omega t}}{(1+t)^\alpha (1-t)^\beta} dt = D_N(\omega) - C_N(\omega) + O(\omega^{-N-1})$$

elde edilir.

Bu tür salınımlı integraller uygulamalı matematik, bilgisayarlı tomografi, görüntü işleme, astronomi, elektromanyetik, sismoloji ve kuantum kimyasında hayati bir rol oynar (daha fazlası için bkz., (Arfken & Weber, 2005; Brunner, 2007, 2010; Hamed & Cummins, 1991; Lu, 2005; Sun & Zamani, 1990) ve buradaki referanslar). Salınımlı integrallerin verimli bir şekilde değerlendirilmesi için olağanüstü yöntemler içeren mükemmel makaleler vardır. En eski sayısal yöntem Filon tarafından formüle edilmiştir (Filon, 1930). Filon, Simpson kuralının salınımlı eşdeğerini üretmek için ikinci dereceden bir $f(t)$ polinomu ile başarılı bir yaklaşım elde etti. Ayrıca, Filon-Clenshaw-Curtis metodu (Domínguez, 2014) ve Asimptotik yöntemler (S. Olver, 2007) bazı zayıf tekil salınımlı integrallerin hesaplanmasında uygulanan diğer sayısal stratejiler olarak verilebilir. Bununla birlikte, tüm bu yöntemler, frekans çok büyük olduğunda bazı eksiklikler sergilemektedir.

(1.2.1)'de $\omega \geq 1$, $\nu = 1$ olması durumunda, integral daha fazla zorluk çıkarmakta ve sadece integralin yüksek derecede salınımlı hale gelmesinden değil, aynı zamanda $t = \mu$ 'de sınırsız hale gelmesi nedeniyle klasik Gauss kuralları doğrudan uygulanamaz. Bu tezdeki temel katkımız, nispeten düşük, orta ve çok yüksek frekans değeri için verimli bir yöntem sunmuş olmamızdır. Bu yaklaşım, tek bir verimli yöntem üretmek için Clenshaw-Curtis yöntemini ve En Dik İniş yöntemini birleştirir. İlk olarak, verilen fonksiyon Chebyshev serisi ile kestirilir, daha sonra değiştirilmiş momentler sayısal en dik iniş yöntemi ile verimli bir şekilde hesaplanır. Salınım fonksiyonlarına sahip Cauchy Esas Değeri integrallerini ele almak için önerilen yöntem ve seçilmiş sayısal örnekler 3. Bölümde verilmiştir.

1.3 Logaritmik ve Cauchy-logaritmik tipli tekil integraller

Logaritmik tekil integraller, dalga saçılımı, kırınım problemleri, aero ve hidroakustik problemler, elastisite teorisi vs. problemlerinde çeşitli uygulamalara sahiptir (Moss &

Christensen, 1980; Rvachev, 1956; Symm & Jaswon, 1977). BEM olarak kısaltılmış Sonlu Eleman Yöntemleri tekil sınır-değer integral denklemlerini içeren kısmi diferansiyel denklemleri ele almak için kullanılan metotlardan bazılarıdır. Bununla birlikte, integral tekil çarpanlara ve çok büyük bir salınım frekansına sahip eşzamanlı integrandlar içerdiğinde, geleneksel sayısal yöntemler bu tür integraller için sayısal doğruluk sağlayamaz. Sonuç olarak, üç tür tekillik ortaya çıkar: (i) Zayıf tekillik (ii) Güçlü tekillik ve (iii) Hiper tekillik.

Bu tezde, logaritmik ve Cauchy-logaritmik tekilliklere sahip

$$Q[f] := \int_{a_1}^{b_1} (x-a_1)^\alpha (b_1-x)^\beta |x-c_1|^\gamma \ln(x-a_1) \ln(b_1-x) f(x) e^{ikx} dx, \quad (1.3.1)$$

ve

$$Q'[f] := \int_{a_1}^{b_1} \frac{(x-a_1)^\alpha (b_1-x)^\beta \ln(x-a_1) \ln(b_1-x) f(x) e^{ikx}}{(x-\rho)} dx \quad (1.3.2)$$

formundaki iki yüksek salınımlı iki integralin verimli hesaplanmasına odaklanacağız. Burada $f(x)$, $[a_1, b_1]$ aralığını içeren uygun bir kompleks bölgede holomorfik fonksiyondur. Ayrıca $\alpha, \beta, \gamma \in (-1, \infty)$, $-\infty < a_1 < c_1 < b_1 < \infty$, $|k| \gg 1$, $i^2 = -1$ ve $a_1 < \rho < b_1$ dir. Literatür taraması yapıldığında

- $\int_{a_1}^{b_1} (x-a_1)^\alpha (b_1-x)^\beta \ln(x-a_1) f(x) e^{ikx} dx,$
- $\int_{a_1}^{b_1} (x-a_1)^\alpha (b_1-x)^\beta \ln(b_1-x) f(x) e^{ikx} dx,$
- $\int_{a_1}^{b_1} (x-a_1)^\alpha (b_1-x)^\beta \ln(x-a_1) \ln(b_1-x) f(x) e^{ikx} dx,$

olacak şekilde logaritmik salınımlı integrallerin çeşitli tiplerinin daha önce kapsamlı bir şekilde incelendiği görülmüştür (Kang ve arkadaşları, 2013) ve (Robert Piessens & Branders, 1992). Burada yazarlar, verilen düzgün fonksiyona yaklaşmak için kesilmiş Chebyshev açılımını uygulamışlar, ardından modifiye momentlerin homojen olmayan tekrarlar bağlantılarını kullanarak tekil kısmı hesaplamışlardır. Ancak, k frekansı ve yineleme bağlantılarının kararlılığı üzerindeki hata analizi nedeniyle çok büyük bir frekans değeri uygulandığında, yaklaşımları çok fazla hesaplama süresi ve işlev değerlendirmesi gerektirmiştir. Örnek bölümünde, yukarıda bahsedilen integral türlerinin verimli hesaplanması için önerilen yöntemin doğruluğunu göstereceğiz.

Tipik olarak, yüksek düzeyde salınımlı integraller, basitçe salınım frekansı veya dalga sayısı olarak bilinen k 'nın kesinlikle büyük olduğu, $H(x)$ ve $g(x)$ 'in sırasıyla genlik ve faz fonksiyonları olduğu $H(x)e^{ikg(x)}$ formuna sahiptir. Ayrıca, $H(x)$ zayıf ve güçlü tekillik türleri içerebilirken, $g(x)$ belirli bir mertebeden durağan noktalara sahiptir. Genel olarak, yüksek salınımlı integrallerin değerlendirilmesi, özellikle logaritmik türler olmak üzere zorlu bir görev olarak kabul edilir. Matematiğin çeşitli dallarında, uygulamalı hesaplama bilimlerinde ve elektromanyetik saçılma, görüntü işleme, kuantum mekaniği, astronomi, sismoloji gibi diğer uygulamalı bilimler ve mühendislikteki geniş uygulama alanları nedeniyle; salınımlı integralleri çözmek için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Cebirsel tekil integrallerin en iyi yaklaşımını elde etmeye çok vurgu yapılmıştır. Örneğin, $\int_{a_1}^{b_1} f(x)e^{i\omega x} dx$ ve $\int_{a_1}^{b_1} (x-a_1)^\alpha (b_1-x)^\beta f(x)e^{i\omega x} dx$ integral tipleri birçok araştırmanın ilgi odağı olmuştur ((Bakhvalov & Vasil'eva, 1968; Huybrechs & Vandewalle, 2006; Kang & Shao, 2014; Kayijuka et al., 2018; I. G. G. A. T. K. V. Domínguez, 2013), (Asheim & Huybrechs, 2013; Domínguez, 2014; Iserles & Nørsett, 2005, 2006), (1.3.2) tipindeki integraller sadece salınımlı değil, aynı zamanda zayıf ve güçlü (Cauchy tipi) tekillikleri de içerdiğinden ciddi eksiklikler sergiler. Bu integraller aynı zamanda Cauchy tipi integraller olarak da bilinir ve son zamanlarda hesaplama camiasında büyük ilgi görmeye başlamıştır. Genel olarak, $-\infty \leq a_1 < b_1 \leq \infty$ ve $a_1 < \rho < b_1$ olmak üzere $\int_{a_1}^{b_1} f(x)/(x-\rho) dx$ tipindeki Cauchy esas değer integrali Hilbert dönüşümü olarak kabul edilmektedir. Hilbert integral dönüşümünün var olması için yeterli koşul, $f(x)$ 'in Lipschitz ve Hölder koşullarını sağlaması gerektiğidir. İntegral (1.3.2), farklı Cauchy salınımlı integrallerinin bir genellemesini verir ve özel halde aşağıdaki şu iki integrali göz önüne alabiliriz:

$$\begin{aligned} &\triangleright \int_{a_1}^{b_1} \frac{f(x)e^{ikx}}{x-\rho} dx, \\ &\triangleright \int_{a_1}^{b_1} \frac{(x-a_1)^\alpha (b_1-x)^\beta \ln(x-a_1) f(x)e^{ikx}}{x-\rho} dx. \end{aligned}$$

Yukarıda belirtilen tipten integraller ortaya çıktığında, integrallerin $x=\rho$ 'de sınırsız hale gelmesi nedeniyle klasik Gauss kuralları doğrudan uygulanamaz. Yüksek dereceli sayısal

doğrulukla hesaplanmaları için özel araçların içerisinde olduğu hesaplama adımları gereklidir. Burada bu yüzden makul bir çözüm olarak, hızlı ve doğru bir sayısal yöntem öneriyoruz.

Burada integrandlar, integrasyon aralığını içeren uygun geniş bir bölgede analitik olarak kabul edilir. Daha sonra (1.3.1) ve (1.3.2) integrallerini $[0, \infty)$ yarı sonsuz aralıklı birkaç çizgi integralinin toplamına dönüştürmek için Cauchy integral yaklaşımını kullanırız. Ardından Gauss tipi bir kuadratur kuralı oluştururuz. Bu kuralı oluştururken, Gautchi-Logaritmik ağırlık fonksiyonu olarak bilinen özel bir ağırlık fonksiyonu kullanırız (Gautschi, 2010). Bununla birlikte, ilgili kuadratur kuralını oluşturmak için kullanılan düğümlerin ve ağırlıkların verimli hesaplanması için moment tabanlı metot olarak değiştirilmiş Chebyshev algoritmasını ve Jacobi matrisini kullanıyoruz.

Cauchy integral teoremi yaklaşımını kullanarak, (1.3.1) ve (1.3.2) integrallerini hesaplamak, bir Gauss tipi kuadratur kuralının inşası ve teorik analizimizi destekleyen seçilmiş sayısal örneklerin tümü bu tezin 3. Bölümünde verilmektedir.

1.4 Cebirsel ve logaritmik Hipertekil tip tekil integraller

Önceki yıllarda, $[-1, 1]$ aralığı üzerinde, f 'sürekli bir fonksiyonu ile verilen

$$I_v(f; \mu) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{(x - \mu)^{v+1}} dx, \quad -1 < \mu < 1, v \in \mathbb{N}_0$$

formundaki integral, uygulamalı mekanik alanında, iki ve üç boyutlu sınır değer problemlerini sınır integral denklemleri olarak formüle etmek için kullanılmıştır. Açıkça, $-1 < \mu < 1$ aralığında integrandta görülen tekillik sebebiyle bu tip bir integral has olmayan integral olarak mevcut değildir.

Tipik olarak, $x = \mu$ 'da bir kutbun varlığından dolayı Cauchy Esas Değerini (CPV) veya Hipertekil integrali sıradan has olmayan integral olarak değerlendirmek biraz zordur. Çekirdek fonksiyonunun tekillik mertebesi, integralin boyutundan daha büyükse, bu taktirde integralin kendisine hipertekil integral denir. Bununla birlikte, karışık sınır değer problemlerini formüle etmek için hipertekil integrallerin fizikte ve uygulamalı mekanikte kullanılabilmeleri hayati bir rol oynar. Bunların yanı sıra, elektrodinamik, aerodinamik, akustik ve benzeri alanlarda sonlu integrallerinin çeşitli uygulamalarını bulabiliriz; bu uygulamalar hakkında daha fazla bilgi için (Ashley, H. and Landahl, 1985; Bostro, 2003; Ladopoulos, 2000; Nik Long & Eshkuvatov, 2009; Robertson, 1967) çalışmalarına bakılabilir.

Bu tezdeki temel amacımız, $\alpha, \beta > -1$, $s \in \{0,1\}$, $|\omega| \gg 1$, $a < \mu < b$, $-\infty < a < b < \infty$ için ve $f, [a, b]$ aralığını içeren uygun geniş bir bölgede x 'in bir analitik fonksiyonu olmak üzere

$$I^{[s]}[f; \mu] = \int_a^b \frac{(x-a)^\alpha (b-x)^\beta [\ln(x-a) \ln(b-x)]^s f(x) e^{i\omega x}}{(x-\mu)^\nu} dx, \quad (\nu \in N), \quad (1.4.1)$$

formundaki hipertekil integralinin hesaplama verimliliği üzerine olacaktır.

Basitleştirmek için, $\omega^{(\alpha, \beta, s)}(x) = (x-a)^\alpha (b-x)^\beta [\ln(x-a) \ln(b-x)]^s$ fonksiyonu, $[a, b]$ üzerinde ağırlık fonksiyonu olmak üzere, yukarıdaki integral

$$I^{[s]}[f; \mu] = \int_a^b \frac{\omega^{(\alpha, \beta, s)}(x) f(x) e^{i\omega x}}{(x-\mu)^\nu} dx, \quad (1.4.2)$$

formunda yazılabilir. Yukarıdaki integrali analiz ederken, aşağıdaki durumlarla karşılaşmaktayız:

- $s = \{0,1\}$ ve $\nu = 0$ olduğunda, integral cebirsel ($s = 0$) veya logaritmik ($s = 1$) tekil yüksek salınımlı integral haline gelir,
- $\nu = 1$ olduğunda, integral yüksek salınımlı çekirdekli Cauchy Esas Değeri (CPV) haline gelir,
- $\nu = 2$ olduğunda, integral yüksek salınımlı çekirdekli Hadamard Sonlu Kısmı anlamındaki integral olarak anlaşılmaktadır,
- $\nu \gg 2$ olduğunda integral hipertekil, yüksek salınımlı integral olarak göz önüne alınır.

Birkaç değişkenin türevi için Cauchy Hiperbolik problemini hesaplama girişiminde, Hadamard (J. Hadamard, 1932; J.Hadamard, 1932), hipertekil integrallerde sonlu-parça kavramını tanıttı. Sonuç olarak, o zamandan beri, özellikle $\omega^{(\alpha, \beta, s)} = 1$ ve $\omega = 0$ olması durumlarında, örneğin Gauss bağlantılı kuadratur tiplerinde hipertekil integraller için en hızlı algoritmayı elde etmek için çok sayıda yaklaşım elde edilmiştir (Criscuolo, 1997; Diethelm, 1999; Hasegawa & Torii, 1991; Li & Li, 2013; Monegato, 1994), (Golberg, 1987). Cauchy esas değer integralinin (Criscuolo, 1997) k . mertebeden türevi cinsinden (1.4.1) basitçe

$$I^{[s]}[f; \mu] = \frac{1}{(\nu-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\mu^{k-1}} \int_a^b \frac{\omega^{(\alpha, \beta, s)}(x) f(x) e^{i\omega x}}{x-\mu} dx. \quad (1.4.3)$$

olarak yeniden yazılabilir. Yukarıdaki eşitliğin integral kısmında, $\omega^{(\alpha,\beta,s)}(x)=1$ ve frekans $\omega=0$ olduğunda, integrasyon kısmı Hilbert dönüşümü halini alır ve Hilbert'in varlık dönüşümü için yeterli koşul, $f(x)$ 'in kapalı bir $[a,b]$ aralığında Lipschitz ve Hölder koşulunu sağlamasıdır. Üstelik $\int_{-1}^1 f(x)/(x-\mu)dx$ Cauchy esas değeri integrali geniş bir şekilde çalışılmıştır. Robert Piessens ve arkadaşları (R. Piessens, de Doncker-Kapenga, Überhuber, & Kahaner, 1983), Clenshaw Curtis yaklaşımını kullanarak μ 'nün tek bir değeri için otomatik bir hesaplama vermiştir, Hasenagawa ve arkadaşı (Hasegawa & Torii, 1991), $[-1,1]$ aralığı üzerinde Cauchy integraline yaklaşmak için Clenshaw Curtis metodunun (Clenshaw & Curtis, 1960) bir genişletmesini sağlamıştır. Son yıllarda, pekçok bilim insanı hipertekil integral denklemlerin sayısal hesabı için çok sayıda sayısal yöntemi ve uygulaması üzerinde çalışmışlardır (daha fazla ayrıntı için (Elliott, 1982; Feng, Li, Gao, Qian, & Yang, 2019; Hsiao, Kopp, & Wendland, 1980; Kang & Shao, 2014; Muskhelishvili, 1972; Venturino, 1986; Zastrow, 1985) referanslarına ve bunların referanslarına bakınız). Bu tür integraller geniş bir uygulama yelpazesi içerdiğinden, bu tür integrallerin sayısal hesaplanması için hızlı ve doğru bir algoritma sağlamak büyük ilgi görmektedir.

Buradaki birincil amacımızın, yüksek salınımlı çekirdeğe sahip cebirsel ve logaritmik hipersingular tip integrallerin verimli hesaplanması için hızlı bir algoritma sağlamak olduğunu belirtmek önemlidir. f 'nin $[a,b]$ aralığını içeren uygun bir geniş kapalı bölgede holomorfik bir fonksiyon olduğu varsayımına dayanarak, orijinal integral pozitif yarı sonsuz bir aralıkta birkaç çizgi integraline dönüştürülür. Daha sonra, bu çizgi integralleri Gauss bağlantılı kuadratur kuralının oluşturulması kullanılarak hesaplanır. Ayrıca, pozitif yarı-sonsuz aralık üzerinde Gautschi logaritmik ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir polinomu sağlayan üç terimli yineleme bağıntısının yineleme katsayılarını üreten algoritmalar, moment bilgisi yaklaşımı kullanılarak karşılaştırılmıştır.

Bölüm 4'te, önerilen yöntemi kullanarak (1.4.1) integralini hesaplanacağız. Gauss bağlantılı kuadratur kuralının inşasını verecek ve önerilen algoritmalarımızın verimliliğini kanıtlamak için sayısal örnekler sunacağız.

1.5 Kompleks integrasyon temelli metotlar

Bu tezde bazı bölümler, karmaşık integrasyon yöntemleri olarak adlandırılan yöntemleri kullanarak yüksek salınımlı çekirdeklere sahip tekil integral denklemlerin hesaplanmasına

odaklanmaktadır. Bu yöntemler, uç nokta tekillikleri olan integrallerin sonlu Fourier dönüşümlerinin değerlendirilmesinde kullanılabilir. Salınım integrallerini verimli bir şekilde hesaplamak için geliştirilmiş muazzam yöntemler arasında en dik iniş yöntemi (Asheim & Huybrechs, 2010) adı verilen yöntem vardır. Buradaki ana fikir, bir salınım fonksiyonunun orijinal integralini, $(0, +\infty)$ üzerinde üssel olarak azalan ağırlık fonksiyonuna göre salınımlı olmayan ve hızla azalan integrallerin toplamına dönüştürmektir. Daha sonra, bunların her biri, Gauss-Laguerre ile veya pozitif k değerli Freud ağırlık fonksiyonu e^{-x^k} 'ye göre bir Gauss kuralının inşası ile veya çift üstel yöntem ile verimli bir şekilde tahmin edilebilir (Mori & Sugihara, 2001; Takahasi & Mori, 1974). Tekniğin yüksek asimptotik düzene sahip olduğu iyi bilinmesine rağmen, bu teknik integrasyon aralığını barındıran uygun şekilde seçilmiş büyük bir karmaşık bölgede verilen fonksiyonun analitikliğini gerektirir. Örneğin, $[-1, 1]$ aralığı üzerinde $\int_{-1}^1 f(x) \text{Exp}(i\omega g(x)) dx$ genel Fourier dönüşümünü göz önüne alalım. Cauchy Goursat integral teoremine dayanarak, integralin değerini değiştirmeden, sadece f ve g 'nin holomorfik fonksiyonlar olması durumunda, integrasyon yolu karmaşık düzlemde düzenlenebilir (Peter Henrici, 1974). En dik iniş yöntemi, genel Fourier integralini salınımlı olmayan ve üstel olarak azalan hale getiren g 'nin sabit bir reel kısma ve giderek artan bir sanal kısma sahip olduğu, en dik iniş yolunu takip etmemiz koşuluyla elde edilir.

Teorem 1.5.1. Bir fonksiyon basit kapalı bir konturun içinde ve üzerinde tüm noktalarda analitik ise,

$$\oint_C f(z) dz = 0,$$

elde edilir.

Bu teorem Cauchy-Goursat teoremi olarak bilinir (Brown & Churchill, 2009, p. 152) ve bu tezde elde edilen yeni sonuçları belirtmek ve kanıtlamak için kullanılmıştır. Kompleks tabanlı yöntemlerin Fourier integrallerine uygulanması için bazı örnekler ve bunların hata analizi sonraki alt bölümlerde tartışılacaktır.

1.5.1 En dik iniş yöntemiyle sonlu Fourier dönüşümlerinin Hesaplanması

Bu alt bölümde, seçilmiş sonlu Fourier integrallerini değerlendirmek için daha önce bahsedilen yöntemi uyguluyoruz; sonsuz Fourier integralleri de bir sonraki alt bölümde incelenecektir.

$$I_c^d[G] := \int_c^d G(x) e^{i\mu(x-c)^k} dx, \quad k=1,2,3,\dots \quad -\infty < c < d < \infty \quad (1.5.1.1)$$

ve

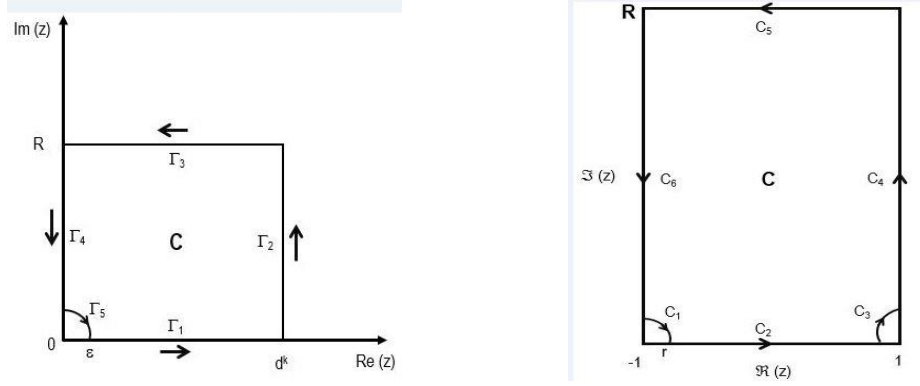
$$I_{-1}^1[f] := \int_{-1}^1 f(x) H_l(x) e^{i\mu x} dx, \quad \mu \gg 1, \quad l=1,2,3 \quad (1.5.1.2)$$

formunda tekil ve yüksek salınımlı Fourier integrallerinin hızlı hesaplanması için çizgi integrallerinin toplamına dayanan bir tekniği tartışacağız. Burada G ve f fonksiyonları salınımlı olmayan, yeterince düzgün fonksiyonlardır. $i = \sqrt{-1}$ ve $\alpha, \beta, \lambda > -1$ olmak üzere, H_l tekil çarpanların çarpımı olup,

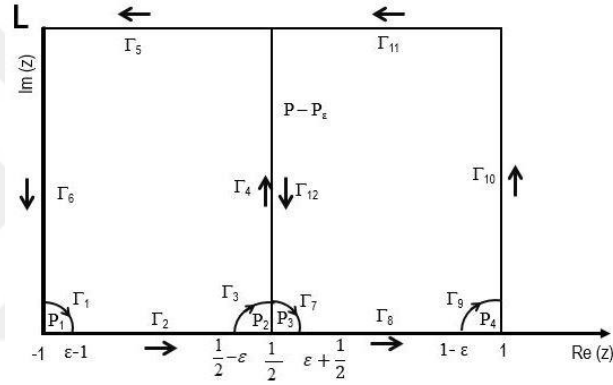
$$\begin{aligned} a) H_1^{(\alpha, \beta)}(x) &= 1, \\ b) H_2^{(\alpha, \beta)}(x) &= (1+x)^\alpha (1-x)^\beta, \quad -1 < \alpha, \beta < 1, \\ c) H_3^{(\alpha, \beta)}(x) &= (1+x)^\alpha \left|x - \frac{1}{2}\right|^\beta (1-x)^\lambda \end{aligned}$$

biçimlerinden birine sahiptir. Eğer f ve G analitik iseler, yukarıdaki integrallerin $[0, +\infty)$ aralığı üzerindeki integrallerin bir toplamına dönüştürülebilmesi mümkündür ki bu da hata tahmini $O(1)$ olan Genelleştirilmiş Gauss-Laguerre integral kuralı kullanılarak değerlendirilecektir. Üstelik, n noktalı Gauss-Laguerre integral kuralı kullanılarak, $I_{-1}^1[f]$ 'e başarılı bir yaklaşım elde etmek için sadece $3n$ integrandın hesaplamasına ihtiyaç duyulacaktır. Tüm süreç, sayısal en dik iniş yöntemi olarak iyi bilinen yöntemi kullanarak tamamlanır. (1.5.1.1) integralinin hesaplanması iki şekilde gerçekleştirilebilir: (1.5.1.1) integrali G 'nin analitikliğini dikkate alarak integrali içeren kompleks bir bölgede hesaplandıktan sonra, $I_0^\infty[G]^L$ Gauss-Laguerre kuadratür kuralı ile etkili bir şekilde hesaplan integral ve $I_0^\infty[G]^k$, pozitif k değerli e^{-x^k} Freud ağırlık fonksiyonlarına bağlı Gauss kuralı oluşturarak hesaplanan integral olmak üzere, (1.5.1.1) integrali $I_c^d[G] = I_0^\infty[G]^L + I_0^\infty[G]^k$ şeklinde iki integralin toplamına ayrıştırılacaktır. Yöntem, bir ortogonal polinomu sağlayan homojen olmayan üç terimli tekraralama bağıntısının a_k ve b_k değerlerini belirlemeyi gerektirir. Bu katsayılar Chebyshev algoritması kullanılarak elde edilebilir (Gautschi, 2004). Ayrıca, oluşturulan Gauss kuralı, a_k ve b_k katsayılarının değerleri kullanılarak oluşturulan Jacobi matrisinden elde edilen düğümleri

ve ağırlıkları gerektirir. $I_0^\infty[G]^L$ ve $I_0^\infty[G]^k$ integrallerinin toplamı (1.5.1.1) integraline ihtiyaç duyulan yaklaşımı verir.



Şekil 1.5.1: (1.5.1.1) integrali için integrasyon bölgesi (sol) ve (1.5.1.2) deki integral için integrasyon yolu (sağ).



Şekil 1.5.2: c tipli (1.5.1.2) deki integrand için integrasyon bölgesi.

1.5.1.1 Fourier tipinde (1.5.1.1) integralinin Hesabı

Bu kısım da

$$I_c^d[G] := \int_c^d G(x) e^{i\mu(x-c)^k} dx, \quad k=1,2,3,\dots \quad -\infty < c < d < \infty.$$

formundaki (1.5.1.1) integralini hesaplama problemi ile ilgileneceğiz. Burada, c 'nin sıfır olduğunu kabul ederek ve $x^k = t$ olmak üzere değişken dönüşümünü kullanarak ve genelliği kaybetmeden, integrali

$$I_c^d[G] = \frac{1}{k} \int_0^{d^k} G(\sqrt[k]{t}) \sqrt[k]{t^{1-k}} e^{i\mu t} dt \quad (1.5.1.1.1)$$

formun da yazabiliriz. (1.5.1.1.1)'in hesaplanması aşağıdaki teoremdedir.

Teorem 1.5.2. Kompleks düzlemde $C = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re}(z) \leq d^k, \text{Im}(z) \geq 0\}$ bölgesinde G bir holomorfik fonksiyon olsun. Bu taktirde (1.5.1.1.1) integrali

$$I_c^d[G] = \left(-\frac{i}{k\mu}\right) e^{i\mu d^k} \int_0^\infty G\left(\sqrt[k]{\frac{\mu d^k + ip}{\mu}}\right) \sqrt[k]{\frac{\mu d^k + ip}{\mu}}^{1-k} e^{-p} dp \\ + \left(\frac{i}{\mu}\right)^{\frac{1}{k}} \int_0^\infty G\left(\sqrt[k]{\frac{i}{\mu}} t^k\right) e^{-t^k} dt. \quad (1.5.1.1.2)$$

formundaki integrale dönüştürülebilir.

İspat: Yukarıdaki teoremin ispatı (Kayijuka, Alfaqeih, & Öziş, 2021) makalesinde bulunabilir. Şimdiye kadar, (1.5.1.1) integralinin iki farklı integralin toplamı olarak $I_c^d[G] = I_0^\infty[G]^L + I_0^\infty[G]^k$ şeklinde de alınmasıyla değerlendirilebileceğini gözlemledik, burada birinci kısım Genelleştirilmiş Gauss-Laguerre ile ve ikinci kısım da Freud tipli ağırlık fonksiyonuna bağlı Gauss kuralının inşası ile hesaplanabilir.

Sonsuz $[0, \infty)$ aralığı üzerinde bu kuralın $\omega(x) = e^{-x}$ ağırlık fonksiyonu ile enterplasyonu, aşağıdaki formülle yazılan Gauss tipli kuralı verir:

$$\int_0^\infty \omega(x) b(x) dx = \sum_{s=1}^n \omega_s b(x_s) + R_n(b).$$

Burada $R_n(b)$ hata veya kalan, x_s 'ler $L_n(x)$ Laguerre polinomlarının sıfırları veya düğümleri (Krylov, 2006), ve ω_s 'ler kuadratür kuralının ağırlıklarıdır. Eğer $b \in P_{2n-1}$ ise, $R_n(b) = 0$ olduğu hatırlanmalıdır. Gauss-Laguerre kuralı $2n-1$ dereceli polinomlar için uygundur.

n -noktalı x_s düğümlü ve ω_s ağırlıklı Gauss-Laguerre formülü ile $I_0^\infty[G]^L$ integraline yakınsayan aşağıdaki formül elde edilir:

$$I_0^\infty[G]^L = \left(-\frac{i}{\mu k}\right) e^{i\mu d^k} \sum_{s=1}^n \omega_s G\left(\sqrt[k]{\frac{\mu d^k + ix_s}{\mu}}\right) \left(\frac{\mu d^k + ix_s}{\mu}\right)^{\frac{1-k}{k}}. \quad (1.5.1.1.3)$$

Burada ω_s ağırlıkları

$$\omega_s = \frac{x_s}{(n+1)^2 [L_{n+1}(x_s)]^2}. \quad (1.5.1.1.4)$$

ile bulunur. Kuralın tahmini hatası (M. Abramowitz & Stegun, 1964)

$$E_n(G) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} G^{(2n)}(\xi), \quad 0 < \xi < \infty.$$

ile verilir. Herhangi bir n -noktalı kuadratur kuralının tahmini hatasının, kuadratur noktalarının sayısına ve integranda bağlı olduğuna dikkat edilmelidir.

$I_0^{\infty}[G]^k$ 'nin hesaplaması Freud tipli ağırlık fonksiyonuna bağlı olan Gauss inşasına ihtiyaç duyar.

$p(x)$ is çift, reel, negatif olmayan ve sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, Freud ağırlığının

$$W(x) = e^{-p(x)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

formuna sahip olduğu bilinir. Bazı bilinen özel durumlar $k=1, 2, \dots$ için $p(x) = x^{2k}$ olma durumudur. Buradaki kilit nokta, momentler cinsinden determinant formda ifade edilebilen ilgili rekürsion katsayıları ile bir ortogonal polinom formüle etmektir. Bununla birlikte, klasik Chebyshev algoritması, determinantları atlayarak doğrudan momentlerden rekürsion katsayılarını elde etmek için de benimsenmiştir.

μ_i moment olsun ve

$$\mu_i = \int_c^d W(x) x^i dx, \quad i=1, 2, \dots \quad \mu_0 > 0$$

ile tanımlansın. Ortogonal monik polinom $\Pi_i(\cdot) = \Pi_i(\cdot, W(x))$, $i=0, 1, \dots$ için $\{a_i, b_i\}_{i=0}^{n-1}$ katsayıları, son satırının ve ikinci son sütununun kaldırılması ile oluşturulan $\Delta_0=1$ ile n . mertebeden Δ_n Hankel determinantını ve $\Delta'_0=0$ ve $\Delta'_1=\mu_1$ ile $n+1$. mertebeden Δ'_{n+1} Hankel determinantını kullanarak (Gautschi, 2004) çıkarılabilir.

Chebyshev algoritması (Gautschi, 2004) ekonomik olduğu ve daha az işlem gerektirdiği için momentleri hesaplamak için kullanılabilir. Ancak, algoritma yeterli derecede kararlı değildir. Bu nedenle Chebyshev algoritmasındaki momentler ya sembolik olarak ya da çok yüksek hassasiyetle hesaplanmalıdır. Gama fonksiyonu sayesinde (Milton Abramowitz & Stegun, 1965), Freud tipi ağırlık fonksiyonlarının momentleri, Gama fonksiyonu cinsinden basitçe

$$\mu_i = \int_0^{\infty} x^i e^{-x^r} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{r}\right)}{r}, \quad i=0, 1, \dots \text{ and } r=1, 2, \dots$$

şekilinde elde edilebilir.

Tablo 1.5.1: $r = 2$ için e^{-x^r} karşılık gelen $\{a_i, b_i\}_{i=0}^9$ katsayıları

a_i	b_i
0.56418958354775628694807945156077	0.88622692545275801364908374167057
0.98842539284680028548706335878879	0.18169011381620932846223247325497
1.2859676193639399602827887260072	0.34132512895943919856417178056476
1.5247208440801153035130022763796	0.50496215298800163193575115541755
1.7301922743094392567715613980002	0.67026419463961908567850839109470
1.9134998431431025707186744531146	0.83617049928031101554882352780077
2.0806203364008332248176222241316	1.0023478510110108422245382000471
2.2352283805046391496583172950811	1.1686711647442727438147851444475
2.3797824435046374209405350458580	1.3350829222423353579798779421644
2.5160256434438664097634179698490	1.5015525993447618438952914329038

Şimdiye kadar kalan sorun, Gauss kuralını hesaplamak için elde edilen katsayıları kullanmaktır; katsayılar zaten bilindiği için basittir. Buradaki fikir, elde edilen katsayıları kullanarak J_n Jacobi matrisi (Gautschi, 1994) olarak bilinen simetrik bir üçlü köşegenli matris oluşturarak matris yaklaşımını kullanmaktır. Düğümlemler J_n 'in özdeğerleri ve ağırlıklar da J_n 'in özdeğerlerine karşılık gelen öz vektörlerdir. Özdeğer problemini çözmek, hem normalleştirilmiş özvektörün yapısından hem de J_n 'den faydalanmayı gerektirir. Tüm hesaplama $O(n^2)$ işlemde yapılabilmektedir. Normalleştirilmiş özvektörün yalnızca ilk bileşeninin belirlenmesi gerektiğini hatırlayalım. Ağırlıklar

$$\omega_k = \mu_0 * (v_{k,1})^2, \quad k = 1, \dots, n,$$

formülü ile verilir.

Yukarıdaki formülde, $v_{k,1}$ özdeğerler ile ilişkili normalleştirilmiş özvektördür.

Cauchy çizgi integrali yaklaşımının yaklaşım hatası $2n$ 'e eşit mertebeden bir hataya sahiptir ve bu da n kuadratur noktalarının sayısı olmak üzere $\mu \rightarrow \infty$ iken $O(\mu^{-2n-1})$ olması anlamına

gelir. Bununla birlikte bu makalede k pozitif olmak üzere $P(x) = (x-c)^k$ için, yaklaşımın hatası asimptotik olarak $O\left(\mu^{-\frac{2(n+1)}{k}}\right)$ mertebesinde dir.

Tablo 1.5.2: $k = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere $\int_0^{10} \frac{\cos(x)}{1+x^2} e^{i\mu x^k} dx$ integrali için mutlak hatalar.

$\mu \setminus k$	1	2	3	4
100	2.7×10^{-18}	2.9×10^{-13}	2.1×10^{-11}	2.2×10^{-10}
1000	2.0×10^{-29}	7.6×10^{-19}	3.8×10^{-15}	2.5×10^{-13}
5000	0.1×10^{-31}	1.1×10^{-22}	1.2×10^{-17}	3.9×10^{-15}
9000	0.1×10^{-31}	4.3×10^{-24}	1.4×10^{-18}	8.5×10^{-16}
10000	0.1×10^{-31}	2.4×10^{-24}	9.8×10^{-19}	6.4×10^{-16}

1.5.1.2 (1.5.1.2) Fourier tipindeki integralin Hesabı

Durum 1: $I_{-1}^1[f] := \int_{-1}^1 f(x) H_1(x) e^{i\mu x} dx$, $\mu \gg 1$ formundaki Fourier integrali

$$I_{-1}^1[f] := \int_{-1}^1 f(x) e^{i\mu x} dx$$

formundaki Fourier integralinin hesabı aşağıdaki teorem ile özetlenebilir:

Teorem 1.5.3 (Kayijuka et al., 2021). $z \rightarrow f(z)$ fonksiyonu kompleks bir $C = \{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \Re(z) \leq 1, \Im(z) \geq 0\}$ bölgesinde tanımlı ve analitik olsun; bu taktirde

$$\begin{aligned} I_{-1}^1[f] &= \int_{-1}^1 f(x) e^{i\mu x} dx \\ &= (i\mu^{-1}) \left[e^{-i\mu} \int_0^\infty f\left(\frac{-\mu+iy}{\mu}\right) e^{-y} dy - e^{i\mu} \int_0^\infty f\left(\frac{\mu+iy}{\mu}\right) e^{-y} dy \right]. \end{aligned} \quad (1.5.1.2.1)$$

integraline yakınsayan n -noktalı y_k düğümlerine ve w_k ağırlıklarına sahip Gauss-Laguerre formülü,

$$Q_{H_1(n,k)}[f] = \left(\frac{i}{\mu}\right) \left[e^{-i\mu} \sum_{k=1}^n w_k f\left(\frac{-\mu+iy_k}{\mu}\right) - e^{i\mu} \sum_{k=1}^n w_k f\left(\frac{\mu+iy_k}{\mu}\right) \right] \quad (1.5.1.2.2)$$

ile verilir. Burada w_k ağırlıkları (1.5.1.1.4)'te belirtildiği gibi elde edilmiştir.

Teorem 1.5.4 (Fang, 2016). f 'in bir holomorfik fonksiyon olduğu ve Teorem 1.5.3'ün bütün şartlarını sağladığı farz edilsin. Bu taktirde, $I_{-1}^1[f] = \int_{-1}^1 f(x) e^{i\mu x} dx$ integraline yaklaşımın hata tahmini

$$\begin{aligned} E_{k,1}[f] &= \left| I_{-1}^1[f] - Q_{H_1(n,k)}[f] \right| \\ &= O(\mu^{-2k-1}), \mu \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

ile verilir.

Durum 2: $I_{-1}^1[f] := \int_{-1}^1 f(x) H_2(x) e^{i\mu x} dx$, $\mu \gg 1$ formundaki Fourier integrali

$$I_{-1}^1[f] := \int_{-1}^1 (1+x)^\alpha (1-x)^\beta f(x) e^{i\mu x} dx,$$

formundaki Fourier tipli integralin hesabı, aşağıdaki teoremden elde edilir.

Teorem 1.5.5 (Kayijuka et al., 2021). r pozitif ve yeterince küçük bir sayı olmak üzere $C - C_r$ kompleks bölgesinde $f(z)$ 'in bir holomorfik fonksiyon olduğu farz edilsin. Eğer $\Im(z) \rightarrow \infty$ iken $f(z)$ üstel mertebeden ise, bu taktirde

$$\oint_{\bigcup_{j=1}^6 C_j} H_2^{(\alpha,\beta)}(z) f(z) e^{i\mu z} dz = 0, \quad (1.5.1.2.3)$$

ve

$$\begin{aligned} I_{-1}^1[f] &= i^{\alpha+1} \mu^{(-\alpha-1)} e^{-i\mu} \int_0^\infty \left(\frac{2\mu-iy}{\mu} \right)^\beta y^\alpha f\left(\frac{-\mu+iy}{\mu} \right) e^{-y} dy \\ &\quad + (-i)^{\beta+1} \mu^{(-\beta-1)} e^{i\mu} \int_0^\infty \left(\frac{2\mu+iy}{\mu} \right)^\alpha y^\beta f\left(\frac{\mu+iy}{\mu} \right) e^{-y} dy. \end{aligned} \quad (1.5.1.2.4)$$

(1.5.1.2.4) integrali, sadece $O(1)$ işlem ile hesaplanmış Genelleştirilmiş Gauss-Laguerre kuadratür kuralına atıfta bulunur. $y_k^{(\alpha)}$ ve $y_k^{(\beta)}$ sırasıyla Genelleştirilmiş Gauss-Laguerre kuralının düğümleri ve $w_k^{(\alpha)}$ ve $w_k^{(\beta)}$ de sırasıyla $y^\alpha e^{-y}$ ve $y^\beta e^{-y}$ ağırlık fonksiyonları cinsinden belirlenen bu düğümlere karşılık gelen ağırlıklar olsun. Bu taktirde, (1.5.1.2.4) integraline n -noktalı yaklaşım formülü

$$Q_{H_2(n,k)}[f] = \left(\frac{\mu}{i}\right)^{(-\alpha-1)} e^{-i\mu} \sum_{k=1}^n w_k^{(\alpha)} \left(\frac{2\mu - iy_k^{(\alpha)}}{\mu}\right) f\left(\frac{-\mu + iy_k^{(\alpha)}}{\mu}\right) \\ + (-i)^{(\beta+1)} \mu^{(-\beta-1)} e^{i\mu} \sum_{k=1}^n w_k^{(\beta)} \left(\frac{2\mu + iy_k^{(\beta)}}{\mu}\right) f\left(\frac{\mu + iy_k^{(\beta)}}{\mu}\right) \quad (1.5.1.2.5)$$

ile verilir.

Algoritma 1. $\int_{-1}^1 f(x) H_2(x) e^{i\mu x} dx$ integralinin hesabı

Girdi: μ ; hanesayısı; k ; α ; β ; $f(t)$;

Çıktı:

- 1: While $|hata| > 10^{(-Precision)} * k < 100$;
- 2: $y_k^{(\alpha)}$ ve $y_k^{(\beta)}$ düğümlerini hesapla;
- 3: α için $w_k^{(\alpha)}$ ağırlıklarını hesapla;
- 4: β için $w_k^{(\beta)}$ ağırlıklarını hesapla ;
- 5: $k = 1, \dots, n$ için (1.5.1.2.5)'deki gibi $Q_{H_2(n,k)}[f]$ 'e yaklaşım yap;
- 6: **Return** $k = 1, \dots, n$ için k ve $Q_{H_2(n,k)}[f]$ değerlerini yazdır;

Yukarıdaki algoritma Mathematica programında $\mu = 100$; $digits = 32$; $\alpha = -1/3$; $\beta = -1/6$ ve $f(t) = t * e^t$ girdileri ile çalıştırıldığında, sadece 0.031250 saniyede 3.98×10^{-22} mutlak hata değerini üretmektedir. Burada hatanın, tam ve yaklaşık sonuçların arasındaki farkın mutlak değeri olduğunu hatırlatalım.

Teorem 1.5.6 (Fang, 2016) f bir holomorfik fonksiyon olsun ve yukarıda bahsedilen Teorem 1.5.5'in şartlarını sağlasın. Bu taktirde (1.5.1.2.5) kuralının asimptotik hata tahmini

$$E_{k,2}[f] = \left| I_{-1}^1[f] - Q_{H_2(n,k)}[f] \right| \leq O\left(\mu^{-(2k+1) - \min\{\alpha, \beta\}}\right), \quad \mu \rightarrow \infty$$

ile verilir.

Kesin olarak açıktır ki, frekans ne kadar artarsa, ihtiyaç duyulan fonksiyon hesabı sayısı o kadar az olur.

Tablo 1.5.3: $\int_{-1}^1 (x+1)^{-1/3} (1-x)^{-1/6} \cos(x) e^{i\mu x} dx$ integrali için mutlak hata ve hesaplama zamanı

μ	Mutlak Hata	Çalışma Zamanı(Saniye)
10	7.19×10^{-15}	0.312
100	4.13×10^{-23}	0.015
1000	2.94×10^{-28}	0.031
10000	1.32×10^{-29}	0.012
100000	2.76×10^{-32}	0.015

Durum 3: $I_{-1}^1[f] := \int_{-1}^1 f(x) H_3(x) e^{i\mu x} dx$, $\mu \gg 1$ formundaki Fourier integrali

Burada,

$$I_{-1}^1[f] := \int_{-1}^1 (1+x)^\alpha \left|x - \frac{1}{2}\right|^\beta (1-x)^\lambda f(x) e^{i\mu x} dx.$$

formunda Fourier tipli integralin hesaplanmasını göz önüne alıyoruz. Yukarıdaki integral, $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ için $H_3(x) f(x) e^{i\mu x}$ ve $x \in [-1, \frac{1}{2}]$ için $H_3(x) f(x) e^{i\mu x}$ olacak şekilde iki integrale parçalanabilir. Bunların hesaplanması, iki integralin karmaşık bir düzlemde ayrı ayrı hesaplanması ile gerçekleştirilir (bkz. Şekil 1.5.2). Şimdi tüm sorunu derinlemesine çözmemize yardımcı olacak bir teorem sunalım.

Teorem 1.5.7 (Kayijuka et al., 2021). $P = \{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \Re(z) \leq 1, 0 \leq \Im(z) \leq L\}$; kompleks bölgesinde f analitik reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $I_{-1}^1[f]$ integrali,

$$I_{-1}^1[f] = I_{-1}(\alpha, \beta, \lambda, \mu) + I_1(\alpha, \beta, \lambda, \mu), \quad (1.5.1.2.6)$$

toplamına dönüşür. Burada

$$\begin{aligned} I_{-1}(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = & (-i)^{\beta+1} e^{\frac{i\mu}{2}} \mu^{(-\beta-1)} \int_0^\infty y^\beta \left(\frac{3\mu+2iy}{2\mu}\right)^\alpha \left(\frac{\mu-2iy}{2\mu}\right)^\lambda f\left(\frac{\mu-2iy}{2\mu}\right) e^{-y} dy \\ & + i^{\alpha+1} e^{-\mu i} \mu^{(-\alpha-1)} \int_0^\infty y^\alpha \left(\frac{3\mu-2iy}{2\mu}\right)^\beta \left(\frac{2\mu-iy}{\mu}\right)^\lambda f\left(\frac{-\mu+iy}{\mu}\right) e^{-y} dy, \end{aligned} \quad (1.5.1.2.7)$$

ve

$$I_1(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = (-i)^{\lambda+1} e^{i\mu} \mu^{(-\lambda-1)} \int_0^\infty y^\lambda \left(\frac{2\mu+iy}{\mu} \right)^\alpha \left(\frac{\mu+2iy}{2\mu} \right)^\beta f\left(\frac{\mu+iy}{\mu}\right) e^{-y} dy \\ + i^{\beta+1} e^{\frac{i\mu}{2}} \mu^{(-\beta-1)} \int_0^\infty y^\beta \left(\frac{3\mu+2iy}{2\mu} \right)^\alpha \left(\frac{\mu-2iy}{2\mu} \right)^\lambda f\left(\frac{\mu+2iy}{2\mu}\right) e^{-y} dy \quad (1.5.1.2.8)$$

şeklindedir.

Genelleştirilmiş Gauss-Laguerre kuralı (Gautschi, 2004), (1.5.1.2.6) integralini içeren (1.5.1.2.7) ve (1.5.1.2.8) çizgi integrallerinin verimli bir şekilde hesaplanması için kullanılmıştır. Burada $y_k^{(\alpha)}$, $y_k^{(\beta)}$ ve $y_k^{(\lambda)}$ olmak üzere Genelleştirilmiş Gauss-Laguerre kuralının üç tip düğümü tanımlanır ve $w_k^{(\alpha)}$, $w_k^{(\beta)}$ ve $w_k^{(\lambda)}$ de sırasıyla $y^\alpha e^{-y}$, $y^\beta e^{-y}$ ve $y^\lambda e^{-y}$ ağırlık fonksiyonları cinsinden belirlenen bu düğümlere karşılık gelen ağırlıklardır. (1.5.1.2.7) ve (1.5.1.2.8) integrallerinin yaklaşımı

$$Q_{H_3(n,k)}[f] = Q_{-1(n,k)}[f] + Q_{1(n,k)}[f] \quad (1.5.1.2.9)$$

olup, burada

$$Q_{-1(n,k)}[f] = \frac{(-i)^{\beta+1} e^{i\mu/2}}{\mu^{\beta+1}} \sum_{k=1}^n w_k^{(\beta)} \left(\frac{3\mu+2iy_k^{(\beta)}}{2\mu} \right)^\alpha \left(\frac{\mu-2iy_k^{(\beta)}}{2\mu} \right)^\lambda f\left(\frac{\mu+2iy_k^{(\beta)}}{2\mu}\right) \\ + \left(\frac{i}{\mu} \right)^{\alpha+1} e^{-i\mu} \sum_{k=1}^n w_k^{(\alpha)} \left(\frac{3\mu-2iy_k^{(\alpha)}}{2\mu} \right)^\beta \left(\frac{2\mu-iy_k^{(\alpha)}}{\mu} \right)^\lambda f\left(\frac{-\mu+iy_k^{(\alpha)}}{\mu}\right), \quad (1.5.1.2.10)$$

ve

$$Q_{1(n,k)}[f] = \frac{(-i)^{\lambda+1} e^{i\mu}}{\mu^{\lambda+1}} \sum_{k=1}^n w_k^{(\lambda)} \left(\frac{2\mu+iy_k^{(\lambda)}}{\mu} \right)^\alpha \left(\frac{\mu+2iy_k^{(\lambda)}}{2\mu} \right)^\beta f\left(\frac{\mu+iy_k^{(\lambda)}}{\mu}\right) + \\ \left(\frac{i}{\mu} \right)^{\beta+1} e^{i\mu/2} \sum_{k=1}^n w_k^{(\beta)} \left(\frac{3\mu+2iy_k^{(\beta)}}{2\mu} \right)^\alpha \left(\frac{\mu-2iy_k^{(\beta)}}{2\mu} \right)^\lambda f\left(\frac{\mu+2iy_k^{(\beta)}}{2\mu}\right) \quad (1.5.1.2.11)$$

dir.

Burada girdi değerlerini

mu=9000; (*frekans*)

pr=16;(*doğruluk*)

digits=32;(*basamak sayısı*)

f[t_]:=t*Exp[t]; (*verilen fonksiyon*)

alf=-1/3;bet=-1/6;lambd=1/2;(*alfa, beta ve lambda'nın değerleri*)

Algoritma 2. $\int_{-1}^1 f(x) H_3(x) e^{i\mu x} dx$ integralinin hesabı

Girdi: $\mu; digits; \alpha; \lambda; \beta; f(t);$

Çıktı:

- 1: $|hata| > 10^{(-Precision)*k} < 100$ olduğu sürece;
- 2: $y_k^{(\alpha)}, y_k^{(\lambda)}$ ve $y_k^{(\beta)}$ düğümlerini hesapla;
- 3: α için $w_k^{(\alpha)}$ ağırlıklarını hesapla;
- 4: β için $w_k^{(\beta)}$ ağırlıklarını hesapla;
- 5: λ için $w_k^{(\lambda)}$ ağırlıklarını hesapla;
- 6: (1.5.1.2.9)'deki gibi $Q_{H_3(n,k)}[f]$ 'e yaklaşım yap;
- 7: **Return** $k=1, \dots, n$ için k ve $Q_{H_3(n,k)}[f]$ değerlerini yazdır;

olarak alıp, yukarıdaki algoritma dikkate alınarak Mathematica'da yazılan program çalıştırıldığında, mutlak hata 0.015625 saniyede 1.7×10^{-32} olarak hesaplanmaktadır.

Teorem 1.5.8. f bir holomorfik fonksiyon olsun ve yukarıda bahsedilen Teorem 1.5.7'in şartları sağlasın. Bu taktirde $I_{-1}^1[f] = \int_{-1}^1 H_3(x) f(x) e^{i\mu x} dx$ integralinin sayısal kuadratür kuralı için hata yaklaşımı

$$E_{k,3}[f] = \left| I_{-1}^1[f] - Q_{H_3(n,k)}[f] \right|$$

$$= O\left(\frac{k!}{(2k)!} \min \left\{ \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\mu^{2k+\alpha+1}}, \frac{2\Gamma(k+\beta+1)}{\mu^{2k+\beta+1}}, \frac{\Gamma(k+\lambda+1)}{\mu^{2k+\lambda+1}} \right\} \right), \mu > 0$$

ile verilir.

İspat: (Hildebrand, 1974, p. 395) çalışması uyarınca, $\tau > -1$ olmak üzere $\int_{-1}^1 x^\tau e^{-x} f(x) dx$, integralinin k -noktalı Gauss-Laguerre kuadratür kuralının hatası

$$\frac{k!}{(2k)!} \Gamma(k+\tau+1) f^{(2k)}(\xi), 0 < \xi < \infty$$

formülü ile verilir.

Yukarıdaki formül uygulandığında,

$$\begin{aligned}
E_{k,3}[f] &\leq \frac{k!\Gamma(k+\beta+1)}{(2k)!\mu^{\beta+1}} \left| \left[2 \left(\frac{3\mu+2iy_k^{(\beta)}}{2\mu} \right)^\alpha \left(\frac{\mu-2iy_k^{(\beta)}}{2\mu} \right)^\lambda f \left(\frac{\mu+2iy_k^{(\beta)}}{2\mu} \right) \right]_{y_k^{(\beta)}=\xi_1}^{(2k)} \right| \\
&+ \frac{k!\Gamma(k+\alpha+1)}{(2k)!\mu^{\alpha+1}} \left| \left[\left(\frac{2\mu-2iy_k^{(\alpha)}}{2\mu} \right)^\beta \left(\frac{2\mu-iy_k^{(\alpha)}}{\mu} \right)^\lambda f \left(\frac{-\mu+iy_k^{(\alpha)}}{\mu} \right) \right]_{y_k^{(\alpha)}=\xi_2}^{(2k)} \right| \\
&+ \frac{k!\Gamma(k+\lambda+1)}{(2k)!\mu^{\lambda+1}} \left| \left[\left(\frac{2\mu+iy_k^{(\lambda)}}{\mu} \right)^\alpha \left(\frac{\mu+2iy_k^{(\lambda)}}{2\mu} \right)^\beta f \left(\frac{\mu+iy_k^{(\lambda)}}{\mu} \right) \right]_{y_k^{(\lambda)}=\xi_3}^{(2k)} \right| \\
E_{k,3}[f] &\leq \frac{k!}{(2k)!} \left\{ \frac{2\Gamma(k+\beta+1)}{\mu^{2k+\beta+1}} \left| \left[\left(\frac{3+2i\zeta_1}{2} \right)^\alpha \left(\frac{1-2i\zeta_1}{2} \right)^\lambda f \left(\frac{1+2i\zeta_1}{2} \right) \right]_{\zeta_1=\frac{\xi_1}{\mu}}^{(2k)} \right| + \right. \\
&\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\mu^{2k+\alpha+1}} \left| \left[\left(\frac{2-2i\zeta_2}{2} \right)^\beta (2-i\zeta_2)^\lambda f(-1+i\zeta_2) \right]_{\zeta_2=\frac{\xi_2}{\mu}}^{(2k)} \right| + \\
&\left. \frac{\Gamma(k+\lambda+1)}{\mu^{2k+\lambda+1}} \left| \left[(2+i\zeta_3)^\alpha \left(\frac{1+2i\zeta_3}{2} \right)^\beta f(1+i\zeta_3) \right]_{\zeta_3=\frac{\xi_3}{\mu}}^{(2k)} \right| \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu durumda, $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in (0, \infty)$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0, \infty)$ olmak üzere, hata

$O\left(\frac{k!}{(2k)!} \min\left\{\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\mu^{2k+\alpha+1}}, \frac{2\Gamma(k+\beta+1)}{\mu^{2k+\beta+1}}, \frac{\Gamma(k+\lambda+1)}{\mu^{2k+\lambda+1}}\right\}\right)$ olarak azalır ve bu ispatı tamamlar.

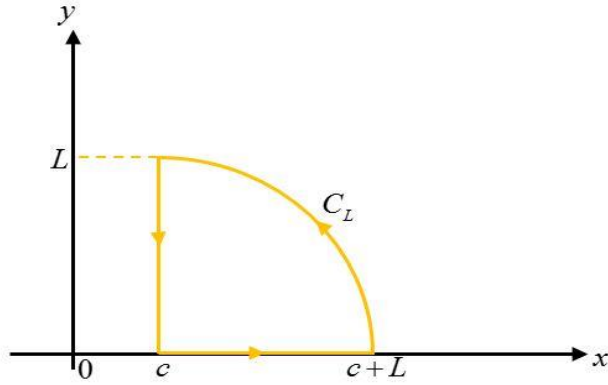
Tablo 1.5.4: $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{1}{6}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ için $\int_{-1}^1 (1+x)^\alpha |x-\frac{1}{2}|^\beta (1-x)^\lambda \log \frac{x^2+4}{x^2+1} e^{i\mu x} dx$ integralinin hataları ve hesaplama süreleri

μ	Mutlak Hata	Hesaplama Süresi(Saniye)
100	1.068×10^{-17}	0.031
1000	1.134×10^{-24}	0.030
10000	2.762×10^{-27}	0.015
100000	3.000×10^{-34}	0.015

1.5.2 Dik iniş yöntemi ile sonsuz Fourier dönüşümlerinin Hesaplanması

Bu alt bölümde, en dik iniş yaklaşımını kullanarak sonsuz Fourier dönüşümlerinin hesaplanmasını ele alıyoruz. Devamında, aşağıdaki V mertebeli birinci çeşit salınımlı Hankel fonksiyonunu ele alıyoruz:

$$I_H[f] = \int_c^\infty f(x) H_v^{(1)}(\mu x) dx. \quad (1.5.2.1)$$



Şekil 1.5.3: C_L integrasyon çevresi.

Yukarıdaki integrali hesaplamak için $(0, c), (0, c+L), (c, iL)$ köşe değerlerine sahip bir yol ile kompleks düzlemde (bkz. Şekil. 1.5.3) uygun bir çeyrek daire seçip, $L \rightarrow \infty$ kabulü yapılmalıdır. Hankel fonksiyonlarının integral formunu kullanarak (Gradshteyn & Ryzhik, 2007),

$$y(x) = \int_0^\infty \left(1 + \frac{it}{2\mu x}\right)^{v-\frac{1}{2}} t^{v-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \text{ and } B_v = \left(\frac{2}{\pi\mu}\right) e^{-i\pi(1+2v)/4} \left[\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)\right]^{-1}.$$

olmak üzere, integrali

$$I_H[f] = B_v \int_c^\infty f(x) x^{-\frac{1}{2}} y(x) e^{i\mu x} dx$$

olarak yazılabilir. Cauchy integral teoremi kullanılarak, integral daha sonra (Milovanović, 2017)

$$I_H[f] = \frac{i}{\mu} B_v \int_0^\infty \int_0^\infty f\left(c + \frac{i}{\mu} t\right) \left(c + \frac{i}{\mu} t\right)^{-v} \left(c + \frac{i}{\mu} t + \frac{i}{2\mu} s\right)^{v-\frac{1}{2}} s^{v-\frac{1}{2}} e^{-t} e^{-s} dt ds$$

olarak da çıkarılabilir.

$$F(x, y; b) = e^{i\mu b} f\left(b + \frac{i}{\mu} x\right) \left(b + \frac{i}{\mu} x\right)^{-v} \left(b + \frac{i}{\mu} x + \frac{i}{2\mu} y\right)^{v-\frac{1}{2}}$$

olmak üzere, bu integral için Gauss kuralı

$$Q_{k_1, k_2}[f] = \frac{i}{\mu} B_v \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m \omega_{n, k_1} \omega_{m, k_2} F(t_{n, k_1}, s_{m, k_2}; c)$$

formunda yazılabilir.

Burada sırasıyla ω_{m,k_2} ve s_{m,k_2} , $\omega_v(s) = s^{v-1/2}e^{-s}$ ağırlık fonksiyonuna göre genelleştirilmiş Laguerre kuadratur kuralı için ağırlık ve düğümler iken, ω_{n,k_1} ve t_{n,k_1} klasik Laguerre kuralı için ağırlıklar ve düğümlerdir.

Tablo 1.5.5: $\int_1^\infty \frac{xe^{-x}}{1+x^4} H_4^{(1)}(\mu x) dx$ integrali için mutlak hatalar ve hesaplama süreleri

μ	Mutlak Hata	Hesaplama Süresi(Saniye)
10	2.06×10^{-16}	0.234
50	2.01×10^{-16}	0.262
100	0.01×10^{-15}	0.234
1000	7.02×10^{-21}	0.281
10000	4.57×10^{-22}	0.250

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Girişin yanı sıra, Bölüm 2, tekil ve yüksek salınımlı Fourier integralleri için Clenshaw-Curtis algoritmalarını sunar. Bölüm 3'te, aynı algoritmalar Cauchy ve Jacobi tipi tekil integralleri hesaplamak için genişletilmiştir. Logaritmik ve Cauchy logaritmik tipi tekilliklere sahip yüksek salınımlı hesaplama için Gauss bağlantılı kuadratur kuralı Bölüm 4'te sunulmuştur. Bölüm 5'te, cebirsel ve logaritmik hipertekil integralleri verimli bir şekilde hesaplıyoruz. Son olarak, Bölüm 6'da yapılan bu tez çalışmasından elde edilen kısa bir sonuç verilmiştir.

2 TEKİL VE YÜKSEK SALINIMLI FOURIER DÖNÜŞÜM İNTEGRALLERİ

İÇİN CLENSHAW-CURTIS ALGORİTMALARI

Bu bölümde, uç nokta tekilliklerine sahip sonlu Fourier-tipi dönüşümlerin verimli bir şekilde hesaplanması için, Clenshaw-Curtis algoritmalarının tekil ve yüksek salınımlı integraller üzerindeki uygulanması araştırılmaktadır. Bu algoritmalarındaki yöntemlerde integrandlar, terim terim ortogonal polinomlar ve özel fonksiyon serileri ile kestirilir. Daha sonra üçüncü ve dördüncü mertebeden homojen tekraralama bağıntıları kullanılarak tekillik türleri hesaplanır. İlk yaklaşım düşük, orta ve çok yüksek frekanslar için etkinliğini ortaya koyarken, ikincisi küçük frekans değerleri için daha verimlidir. Ayrıca, bu metotların uygulanması ile elde edilen tüm sonuçlar oldukça tatmin edici bulunmuştur. Otomatik hesaplama için yazdığımız algoritmalarla göre program kodu MATHEMATICA 9.0'da çalışacak şekilde oluşturulmuştur. Son olarak, teorik analizimizi desteklemek için açıklayıcı sayısal örnekler ve önerilen Clenshaw-Curtis algoritmalarının en dik iniş yöntemiyle karşılaştırılması örnekler bölümünde belirtilmiştir.

Burada,

$$G[\mu] := \int_a^b e^{i\mu x} H(x) f(x) dx, \quad (2.1)$$

formunda Fourier tipindeki integralin hesaplanması ile ilgileniyoruz. Daha özel olarak integral

$$G[\mu] = \int_a^b e^{i\mu x} (x-a)^\alpha (b-x)^\beta f(x) dx,$$

formuna sahip olup, genelliği bozmaksızın yukarıdaki integral

$$G[\mu] = \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1+x)^\alpha (1-x)^\beta f(x) dx, \quad \alpha > -1 < \beta, \quad \mu \gg 1. \quad (2.2)$$

olarak yazılabilir. Bu bölümde, (2.2) denklemi için Clenshaw-Curtis yaklaşımına dayalı iki algoritmayı önerecek daha sonra da bunları karşılaştıracacağız. İki yaklaşım da, tekil olmayan ve salınımlı olmayan düzgün $f(x)$ fonksiyonun

$$f(x) \cong \sum_{n=0}^N b_n T_n(x) \quad (2.3)$$

şeklinde Chebyshev serisi ile ifade edilmesine bağlıdır. Burada çift kesme işaretli toplam sembolü, toplamdaki ilk terimin ve son terimin ikiye bölünmesi veya yarı ağırlığa sahip olması gerektiği anlamına gelir.

Chebyshev polinomlarının diğer kullanışlı özellikleri şöyle sıralanabilir:

1. $(1-x^2)T'_k(x) = \frac{k}{2}(T_{k-1}(x) - T_{k+1}(x))$
2. $2xT_k(x) = T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x)$
3. $\int T_k(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{T_{k+1}(x)}{k+1} - \frac{T_{k-1}(x)}{k-1} \right), & k \neq 1 \\ \frac{1}{2} T_2(x), & k=1 \end{cases}$
4. $2x^2T_k(x) = x(T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x))$
5. $\int U_n(x) dx = \frac{1}{n+1} T_{n+1}(x) + c$
6. $T'_{n+1}(x) = (n+1)U_n(x)$
7. $(1-x^2)T_n(x) = -\frac{1}{4}T_{n+2}(x) + \frac{1}{4}T_n(x) - \frac{1}{4}T_{|n-2|}(x)$
8. $\frac{d^2}{dx^2} T_n(x) = \frac{n(n-1)T_{n-2}(x) - 2nT_n(x) + (n-1)T_{n+2}(x)}{(1-x^2)^2}$
9. $T_{n+1}(x) - T_{n-1}(x) = \begin{cases} 2(x-\tau) \sum_{k=0}^N U_{k-n}(x) T_n(\tau) \\ 2(x-\tau) \sum_{k=0}^N U_{k-n}(x) T_n(x) \end{cases}.$

(2.3) denklemindeki $T_n(x)$ n . dereceden Chebyshev polinomudur ve ayrık ortogonalite formülleri (Mason & Venturino, 1997) kullanılarak

$$l_{nn} = \begin{cases} N, & n = \{0, N\}, \\ \frac{N}{2}, & 0 < n < N, \end{cases}$$

olmak üzere

$$l_{nk} = \sum_{j=0}^N T_n(x_j) T_k(x_j) = 0, \quad n \neq k$$

tanımlanabilir. Böylece b_n katsayıları

$$b_n = \frac{1}{l_{nn}} \sum_{j=0}^N f(x_j) T_n(x_j). \quad (2.4)$$

formülü kullanılarak hesaplanabilir. (2.4) formülündeki $0 \leq j \leq N$ için $x_j = \cos \pi j / N$ değerleri, $(N+1)$ -Clenshaw-Curtis noktalarıdır veya daha farklı bir deyişle birinci çeşit Ayrık Kosinüs Dönüşüm (DCT) olarak bilinen ve algoritmasının Hızlı Fourier Dönüşümleri (FFT) ile sadece

$O(N \log N)$ işlemin hesaplanmasını gerektiren Chebyshev noktalarıdır. (2.3) serisi (2.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$G_n[\mu] = \sum_{n=0}^N b_n M_n(\alpha, \beta, \mu), \quad (2.5)$$

elde edilir. Burada

$$M_n(\alpha, \beta, \mu) = \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1+x)^\alpha (1-x)^\beta T_n(x) dx \quad (2.6)$$

göz önüne alınacak ilk yaklaşımdaki modifiye momentler olarak bilinmektedir. Üstelik Bessel fonksiyonu (M. Abramowitz & Stegun, 1964) kullanılarak, $J_j(\mu)$, j . mertebeden Bessel fonksiyonu olmak üzere, $e^{i\mu x}$ yaklaşımını

$$e^{i\mu x} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} i^j J_j(\mu) T_j(x) \quad (2.7)$$

olarak yazabiliriz. (2.7) ile verilen $e^{i\mu x}$ yaklaşımını (2.5) denkleminde yerine yazarsak

$$G_{n,j}[\mu] = 2 \sum_{j=0}^{\infty} i^j J_j(\mu) \sum_{n=0}^N b_n \int_{-1}^1 (1+x)^\alpha (1-x)^\beta T_n(x) T_j(x) dx,$$

elde edilir ve bu formüldeki integral kısmı

$$v_{n,j} = \int_{-1}^1 (1+x)^\alpha (1-x)^\beta T_n(x) T_j(x) dx. \quad (2.8)$$

olarak ifade edilebilir. Chebyshev eşitliği $T_n(x) T_j(x) = \frac{1}{2} (T_{n+j}(x) + T_{|n-j|}(x))$ (Mason & Handscomb, 2003) ile birlikte (2.8) integrali

$$v_{n,j} = \frac{M_{n+j} + M_{|n-j|}}{2} \quad (2.9)$$

olarak yazılabilecek ve M_k momentleri

$$M_k(\alpha, \beta) = \int_{-1}^1 (1+x)^\alpha (1-x)^\beta T_k(x) dx \quad (2.10)$$

formülü ile belirlenebilecektir. (2.10)'daki momentler, bu bölümde göz önüne alınacak ikinci yaklaşımdaki modifiye momentlerdir. Bu da bizi

$$G_k[\mu] = 2 \sum_{n=0}^N b_n \sum_{j=0}^{\infty} i^j J_j(\mu) M_k(\alpha, \beta) \quad (2.11)$$

şeklinde ifade edilebilecek yeni $G[\mu]$ formuna götürebilir. Modifiye Clenshaw-Curtis yöntemlerinin doğruluğunun, örneğin $M_n(\alpha, \beta, \mu)$ ve $M_k(\alpha, \beta)$ gibi modifiye momentleri hesaplamak için verimli bir algoritmanın bulunmasına bağlı olduğunu hatırlatmak gerekir. Bu yüzden, bu bölümün temel amacı, modifiye momentlerin iki farklı türünü kullanarak (2.1) integralini verimli bir şekilde hesaplamaktır. Ayrıca, önerilen algoritmaya göre Mathematica programında yazılan kodlar ile yapılan otomatik hesaplama ve hata analizi de bu bölümde sunulmaktadır.

Bu bölüm şöyle düzenlenmiştir. Kısım 2.1’de, Algoritma 1 için ilk yaklaşım kullanılarak (2.5) denkleminin etkin hesaplanması, kararlılığı ve Yaklaşım 1 için önerilen Mathematica programı sunulmaktadır. Kısım 2.2’de, Algoritma 2 için ikinci yaklaşım kullanılarak (2.11) denklemi hesaplanmış ve metodun sayısal kararlılığı gösterilmiştir. Kısım 2.3, hata analizini içermekte olup somut sayısal örnekler Kısım 2.4’te verilmiştir.

2.1 Modifiye Clenshaw-Curtis Yaklaşımı 1 kullanılarak Fourier Dönüşümü

Bu kısımda, (2.5) denkleminin

$$G_n[\mu] = \sum_{n=0}^N b_n \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1+x)^\alpha (1-x)^\beta T_n(x) dx$$

biçimindeki halini verimli bir şekilde hesaplanmasını göstererek devam edeceğiz. Yukarıdaki denklemin integral kısmı pek çok yazar tarafından modifiye moment (Gautschi, 1970) olarak bilinir ve kararlı bir homojen dördüncü mertebeden rekürans bağıntısı ile hesaplanır. Bu yüzden bu rekürans bağıntısının detaylı bir şekilde nasıl türetileceğini vereceğiz.

$$M_n = \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1+x)^\alpha (1-x)^\beta T_n(x) dx$$

modifiye momentlerinden başlayacağız. Önce

$$K = \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1+x)^{\alpha+1} (1-x)^{\beta+1} T_n'(x) dx. \quad (2.1.1)$$

değerini kabul edelim. Chebyshev polinomlarının

$$(1-x^2)T_n'(x) = \frac{n(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x))}{2} \quad (2.1.2)$$

olarak bilinen özelliği sayesinde, (2.1.1) integralini

$$K = \frac{n}{2}(M_{n-1} - M_{n+1}) \quad (2.1.3)$$

olarak yazabiliriz. Bu taktirde (2.1.1) integraline kısmi integrasyon uygulanarak devam edilirse,

$$\begin{aligned} K_1 &= -(\alpha+1) \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1+x)^\alpha (1-x)^{\beta+1} T_n(x) dx, \\ K_2 &= (\beta+1) \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1+x)^{\alpha+1} (1-x)^\beta T_n(x) dx, \\ K_3 &= -i\mu \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1+x)^\alpha (1-x)^{\beta+1} (1-x^2) T_n(x) dx, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

olmak üzere

$$K = K_1 + K_2 + K_3$$

elde edilir. Chebyshev özellikleri olan (Mason & Handscomb, 2003)

$$\begin{aligned} xT_n(x) &= \frac{1}{2}(T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)), \\ (1-x^2)T_n(x) &= -\frac{1}{4}T_{n+2}(x) + \frac{1}{2}T_n(x) - \frac{1}{4}T_{|n-2|}(x) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

eşitliklerini kullanarak, (2.1.5) eşitlikleri (2.1.4)'de yerine yazılırsa K_1, K_2 ve K_3 değerleri

$$\begin{aligned} K_1 &= -(\alpha+1)M_n + \frac{(\alpha+1)}{2}M_{n+1} + \frac{(\alpha+1)}{2}M_{n-1}, \\ K_2 &= (\beta+1)M_n + \frac{(\beta+1)}{2}M_{n+1} + \frac{(\beta+1)}{2}M_{n-1}, \\ K_3 &= \frac{i\mu}{4}M_{n+2} - \frac{i\mu}{2}M_n + \frac{i\mu}{4}M_{n-2} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

olur. Bu üç K_1, K_2 ve K_3 değeri toplandığında,

$$K = \frac{i\mu}{4}M_{n+2} + \left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}\right)M_{n+1} + \left(\frac{2\beta-2\alpha-i\mu}{2}\right)M_n + \left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}\right)M_{n-1} + \frac{i\mu}{4}M_{n-2} \quad (2.1.7)$$

değeri bulunur. (2.1.3) ile (2.1.7) eşitlenerek, gerekli olan homojen dördüncü mertebeden rekürans bağıntısı

$$i\mu M_{n+2} + 2(\alpha+\beta+n+2)M_{n+1} + 2(2\beta-2\alpha-i\mu)M_n + 2(\alpha+\beta+2-n)M_{n-1} + i\mu M_{n-2} = 0 \quad (2.1.8)$$

olarak elde edilir. M_n formülünde $x=2t-1$ değişken değiştirmesi yapılmasının yanında, Kummer'in Hipergeometrik fonksiyonun integral gösteriminin genel tanımı olan

$${}_1F_1(\alpha; \beta; x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-\alpha-1} e^{xt} dt$$

fonksiyonunu kullanmak yararlı olacaktır. Böylece, başlangıç değeri olan M_0 modifiye momenti

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1+x)^\alpha (1-x)^\beta dx \\ &= 2^{\alpha+\beta+1} e^{-i\mu} \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta e^{2i\mu t} dt \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} e^{-i\mu} {}_1F_1(\alpha+1; \beta+\alpha+2; 2i\mu). \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

şeklinde hesaplanır. M_n modifiye momentinde $T_1(x)$ 'in yerine yazılması ile, ikinci başlangıç değeri M_1

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1+x)^\alpha (1-x)^\beta x dx \\ &= 2^{\alpha+\beta+2} e^{-i\mu} \int_0^1 t^{\alpha+1} (1-t)^\beta e^{2i\mu t} dt - M_0 \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+2} \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+3)} e^{-i\mu} {}_1F_1(\alpha+2; \beta+\alpha+3; 2i\mu). \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

bulunur. Aynı prosedür izlenerek, bu sefer $T_2(x)$ Chebyshev polinomu alınmasıyla üçüncü başlangıç şartı

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1+x)^\alpha (1-x)^\beta (2x^2-1) dx \\ &= 2^{\alpha+\beta+1} e^{-i\mu} \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta (8t^2-8t+1) e^{2i\mu t} dt \\ &= M_0 - 2^{\alpha+\beta+4} \frac{(\alpha+1)(\beta+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+4)} {}_1F_1(\alpha+2, \alpha+\beta+4, 2i\mu) \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

elde edilir. Son olarak, dördüncü başlangıç şartı M_3

$$\begin{aligned} M_3 &= \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1+x)^\alpha (1-x)^\beta (4x^3-3x) dx \\ &= 2^{\alpha+\beta+1} e^{-i\mu} \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta (32t^3-48t^2+18t-1) e^{2i\mu t} dt \\ &= 2 \frac{i}{\mu} (\alpha+\beta+3) M_2 - \frac{i}{\mu} (4\alpha-4\beta+i\mu) M_1 + 2 \frac{i}{\mu} (\alpha+\beta+1) M_0 \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

şeklinde hesaplanır. Bu değerlerde kullanılan ${}_1F_1(a; b; x)$, Kummer birleşik Hipergeometrik fonksiyonu (M. Abramowitz & Stegun, 1964; Srivastava, Agarwal, & Jain, 2014) olup, $(\lambda)_n$ Pochhammer sembolü

$$(\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1) = \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)}$$

ve $\Gamma(\lambda)$ Euler Gama fonksiyonu

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx, \quad \Re(\lambda) > 0 \text{ için}$$

olarak tanımlanmak üzere

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n x^n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b)x^n}{\Gamma(a)\Gamma(b+n)n!},$$

şeklinde seri açılımına sahiptir.

2.1.1 (2.1.8) Rekürans bağıntısının kararlılığı

Sunulan rekürans bağıntısı dördüncü mertebededir. Matematiksel olarak bu dördüncü mertebeden bir lineer fark denklemi olup, M_n 'nin en yüksek ve en düşük indisleri arasındaki farkın dörde eşit olduğu anlamına gelir. Bu bağıntıda $n+2$ en yüksek ve $n-2$ en düşük indistir. Son M_n değerini bulmak için, Lighthill metodu olarak bilinen ve (Lighthill, 1959) de verilen yaklaşımı kullanacağız ve Fourier dönüşümlerinin asimptotik yaklaşımını belirlemek için $n \rightarrow \infty$ iken

$$M_n \sim (-1)^{n+1} 2^{\beta-\alpha} e^{-i\mu} \sum_{p=0}^{\infty} A_p(\alpha, \beta, \mu) S(\alpha+p) n^{-2(\alpha+p+1)} \\ - 2^{\alpha-\beta} e^{i\mu} \sum_{p=0}^{\infty} A_p(\beta, \alpha, -\mu) S(\beta+p) n^{-2(\alpha+p+1)}$$

olup, burada katsayılar

$$S(y) = \cos(\pi y) \Gamma(2y+2),$$

$$A_0(\alpha, \beta, \mu) = 1, A_1(\alpha, \beta, \mu) = \frac{1}{4} \left(2i\mu - \beta - \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{3} \right),$$

$$A_2(\alpha, \beta, \mu) = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{15} + \frac{19}{90}\alpha + \frac{1}{18}\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\beta^2 - 2i\mu - 2\mu^2 + \frac{1}{3}\alpha\beta - \frac{2}{3}i\mu\alpha - 2i\mu\beta \right)$$

olarak bulunur.

Yukarıdaki denklemlere dayanarak, M_n 'nin dört bağımsız çözümün hepsinin lineer kombinasyonlarını oluşturduğunu gözlemleyebiliriz. Sunulan dördüncü dereceden rekürans ilişkisinin ileri özyenilemesi yalnızca $n \leq \mu$ olduğunda asimptotik olarak kararlıdır. $n = \lceil \mu \rceil, \lceil \mu \rceil + 1, \dots, N$ olmak üzere diğer kalan M_n değerleri için, özyinelemenin üç başlangıç değeri ile bir son nokta değeri şartlarına sahip bir sınır değer problemi olarak çözülebileceği Oliver algoritması (Oliver, 1968) veya rekürans bağıntısının bir lineer denklem sistemi tarafından dönüştürüldüğü Lozier algoritması (Daniel, 1980) kullanılabilir. $v_0 = \lceil \mu \rceil$ ve $V = 2N$ tam sayılar olmak üzere alınarak başlanırsa, katsayıları $a = i\mu$, $b_n = 2(\alpha + \beta + n + 2)$, $c = 2(2\beta - 2\alpha - i\mu)$, ve $d_n = 2(\alpha + \beta - n + 2)$ olmak üzere üç köşeli denklem sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} aM_{v_0+1} + b_{v_0-1}M_{v_0} = -cM_{v_0-1} - d_{v_0-1}M_{v_0-2} - aM_{v_0-3} \\ aM_{v_0+2} + b_{v_0}M_{v_0+1} + cM_{v_0} = -d_{v_0}M_{v_0-1} - aM_{v_0-1} \\ aM_{v_0+3} + b_{v_0+1}M_{v_0+2} + cM_{v_0+1} + d_{v_0+1}M_{v_0} = -aM_{v_0-1} \\ aM_{v_0+4} + b_{v_0+2}M_{v_0+3} + cM_{v_0+2} + d_{v_0+2}M_{v_0+1} + aM_{v_0} = 0 \\ aM_{v_0+5} + b_{v_0+3}M_{v_0+4} + cM_{v_0+3} + d_{v_0+3}M_{v_0+2} + aM_{v_0+1} = 0 \\ \vdots \\ aM_{V+1} + b_{V-1}M_V + cM_{V-1} + d_{V-1}M_{V-2} + aM_{V-3} = 0 \\ b_VM_{V+1} + cM_V + d_VM_{V-1} + aM_{V-2} = -aM_{V+2}. \end{array} \right. \quad (2.1.1.1)$$

ile verilir. (2.1.1.1) denklem sistemi,

$$A_v x = y_v,$$

olmak üzere matris formunda

$$\begin{pmatrix}
b_{v_0-1} & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
c & b_{v_0} & a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
d_{v_0+1} & c & b_{v_0+1} & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a & d_{v_0+2} & c & b_{v_0+2} & a & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a & d_{v_0+3} & c & b_{v_0+3} & a & \cdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a & d_{v_0-1} & c & b_{v_0-1} & a \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a & d_V & c & b_V
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
M_{v_0} \\
M_{v_0+1} \\
M_{v_0+2} \\
M_{v_0+3} \\
M_{v_0+4} \\
M_{v_0+5} \\
\vdots \\
M_{V+1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-cM_{v_0-1} - dM_{v_0-2} - aM_{v_0-3} \\
-d_{v_0}M_{v_0-1} - aM_{v_0-2} \\
-aM_{v_0-1} \\
0 \\
0 \\
\vdots \\
0 \\
-aM_{V+2}
\end{pmatrix}.$$

olarak yeniden yazılabilir. Yukarıdaki lineer sistem, sadece $O(N)$ işleme gereksinim duyan iteratif tekniklerle çalışılarak çözülebilir.

2.1.2 $G_n[\mu]$ 'ın Hesabı için Algoritma 1

Girdi Değerleri: $\alpha; \beta; \mu; N;$

Çıktı:

- 1: (2.1.9)-(2.1.12) formüllerini kullanarak $M_0; M_1; M_2;$ ve M_3 başlangıç momentlerini hesapla
- 2: Eğer $j = 0 \vee j = N$ ise, $1/N$ 'i değil ise $2/N$ 'i hesapla;
- 3: (2.4) kullanarak $n = 0, \dots, N$ için b_n hesapla;
- 4: (2.1.8) rekürans bağıntısını kullanarak $n = 0, \dots, N$ için M_n hesapla
- 5: (2.5) kullanarak $n = 0, \dots, N$ için $G_n[\mu]$ yaklaşımını hesapla
- 6: $G_n[\mu]$ 'i yaz.

2.1.3 Yaklaşım 1 için Mathematica program kodları

Bu kısımda, Algoritma 1'deki hesaplamalar için Mathematica kodunu veriyoruz. Ayrıca, Algoritma 1'i hesaplarken, frekansı arttırmanın yanı sıra 32 ondalık basamağa kadar hassasiyeti de arttırıyoruz. Program kodunda ayrıca hesaplama süresini saniye cinsinden görüntüleyebilmekteyiz.

Sayısal Modifiye Clenshaw-Curtis Yaklaşım 1'in Fourier Dönüşümü Alt Programı

```
NumCCM:=Module[{ },RecurrenceTable[
{m[n+2]==
(-2*(n+alfa+betta+2)*m[n+1]+2(2alfa-2betta+I*w)*m[n]+
2(n-alfa-betta-2)*m[n-1]-(I*w)*m[n-2])/(I*w),
m[0]==N[2^(alfa+betta+1)*Exp[-
I*w]*(Gamma[alfa+1]Gamma[betta+1]/Gamma[alfa+betta+2])*Hyper
geometric1F1[alfa+1,betta+alfa+2,2*I*w],dig],
m[1]==N[(2^((alfa+1)+betta+1)*Exp[-
I*w]*(Gamma[(alfa+1)+1]Gamma[betta+1]/Gamma[(alfa+1)+betta+2
])*Hypergeometric1F1[(alfa+1)+1,betta+(alfa+1)+2,2*I*w))-
(2^(alfa+betta+1)*Exp[-
I*w]*(Gamma[alfa+1]Gamma[betta+1]/Gamma[alfa+betta+2])*Hyper
geometric1F1[alfa+1,betta+alfa+2,2*I*w]),dig],
m[2]==N[(I/w)*(2(alfa+betta+2)*
(N[(2^((alfa+1)+betta+1)*Exp[-
I*w]*(Gamma[(alfa+1)+1]Gamma[betta+1]/Gamma[(alfa+1)+betta+2
])*Hypergeometric1F1[(alfa+1)+1,betta+(alfa+1)+2,2*I*w))-
(2^(alfa+betta+1)*Exp[-
I*w]*(Gamma[alfa+1]Gamma[betta+1]/Gamma[alfa+betta+2])*Hyper
geometric1F1[alfa+1,betta+alfa+2,2*I*w]),dig))-(2alfa-
2betta+(I*w))*(N[2^(alfa+betta+1)*Exp[-
I*w]*(Gamma[alfa+1]Gamma[betta+1]/Gamma[alfa+betta+2])*Hyper
geometric1F1[alfa+1,betta+alfa+2,2*I*w],dig))],dig],
m[3]==N[(I/w)*(2(alfa+betta+3)*
(N[(I/w)*(2(alfa+betta+2)*
(N[(2^((alfa+1)+betta+1)*Exp[-
I*w]*(Gamma[(alfa+1)+1]Gamma[betta+1]/Gamma[(alfa+1)+betta+2
```

```

]) *Hypergeometric1F1[(alfa+1)+1,betta+(alfa+1)+2,2*I*w)] -
(2^(alfa+betta+1)*Exp[-
I*w]*(Gamma[alfa+1]Gamma[betta+1]/Gamma[alfa+betta+2])*Hyper
geometric1F1[alfa+1,betta+alfa+2,2*I*w],dig)] - (2alfa-
2betta+(I*w))*(N[2^(alfa+betta+1)*Exp[-
I*w]*(Gamma[alfa+1]Gamma[betta+1]/Gamma[alfa+betta+2])*Hyper
geometric1F1[alfa+1,betta+alfa+2,2*I*w],dig)]),dig)] -
(4alfa-4betta+(I*w))*
(N[(2^((alfa+1)+betta+1)*Exp[-
I*w]*(Gamma[(alfa+1)+1]Gamma[betta+1]/Gamma[(alfa+1)+betta+2
])*Hypergeometric1F1[(alfa+1)+1,betta+(alfa+1)+2,2*I*w)] -
(2^(alfa+betta+1)*Exp[-
I*w]*(Gamma[alfa+1]Gamma[betta+1]/Gamma[alfa+betta+2])*Hyper
geometric1F1[alfa+1,betta+alfa+2,2*I*w],dig)]+2(alfa+betta
+1)*
(N[2^(alfa+betta+1)*Exp[-
I*w]*(Gamma[alfa+1]Gamma[betta+1]/Gamma[alfa+betta+2])*Hyper
geometric1F1[alfa+1,betta+alfa+2,2*I*w],dig)]),dig]],m,{n,i}
]];
R[k_]:=NumCCM[[k+1]];
K[j_,i_]:=If[Or[j==0,j==i],1/i,2/i];
CK[k_,i_]:=N[Sum[K[j,i]*f[Cos[Pi*j/i]]*Cos[k*Pi*j/i],{j,0,i}],
dig];
Gnap[i_,w_]:=N[CK[0,i]*R[0]/2+CK[i,i]*R[i]/2+Sum[CK[k,i]*R[k],
{k,1,(i-1)}],dig];
Block[{$MaxExtraPrecision=0},Print[N[Gnap[i,w],dig]];
P=Gnap[i,w];//Timing
(*****
(***) INPUT VALUES (***)
alfa=-1/2;betta=-1/3;
dig=32; (* Working Precision for internal Computation *)
w=10000000; (* Frequency *)
i=14; (* Quadrature points *)

```

```
f[x_] := x*Exp[x]; (*Given Function*)
(** OUTPUT is displayed by Gnap or P **)
```

Yukarıdaki programı verilen giriş değerleriyle çalıştırırsak, program aşağıdaki çıktı değerlerini gösterecektir:

```
0.0000513105130822091730737195+0.0002095102831877199070197753i
{0.640625, Null}
```

Parantez içindeki değerler saniye cinsinden hesaplama süresidir ve yukarıdaki örnek için 0.640625 saniyedir. Kesin çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki farkın büyüklüğünü alırsak, mutlak hatayı 7.785×10^{-25} olarak buluruz. Bu, bu bölümde sunulan algoritmanın, yüksek salınımlı integraller için 16-basamaklı doğru bir yaklaşım elde etmek için yeterince verimli olduğunu göstermektedir.

2.2 Clenshaw-Curtis Yaklaşımı 2 kullanarak Fourier Dönüşümü

Bu kısımda

$$G_k[\mu] = 2 \sum_{n=0}^N b_n \sum_{j=0}^{\infty} i^j J_j(\mu) M_k(\alpha, \beta)$$

ile verilen (2.11) denkleminin hesabını göz önüne alacağız ancak bu defa modifiye momentler olarak bilinen

$$M_k(\alpha, \beta) = \int_{-1}^1 (1+x)^\alpha (1-x)^\beta T_k(x) dx$$

integrallerini kullanacağız. Bir önceki kısımda kullanılan prosedüre benzer bir prosedürü kararlı bir üçüncü mertebeden rekürans bağıntısını elde etmek için kullanabiliriz. Buna göre

$$w(\alpha, \beta) = (1+x)^\alpha (1-x)^\beta$$

olmak üzere, daha basit bir şekilde integral

$$y = \int_{-1}^1 w(\alpha+1, \beta+1) T_k'(x)$$

yazılabilir. (2.1.2) Chebyshev özelliğini uygulayarak,

$$y = \frac{k}{2} (M_{k-1} - M_{k+1}) \quad (2.2.1)$$

eşitliğini kolayca elde ederiz. Aynı şekilde y 'nin kısmi integrasyonunu alarak devam edip,

$$x T_k(x) = \frac{1}{2} (T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x))$$

Chebyshev özelliğini kullanarak

$$y = \frac{\alpha + \beta + 2}{2} M_{k+1} + (\beta - \alpha) M_k + \frac{\beta + \alpha + 2}{2} M_{k-1} \quad (2.2.2)$$

eşitliğine ulaşırız. Şimdi (2.2.1) ve (2.2.2) denklemlerini eşitlersek, bu taktirde başlangıç şartları

$$M_0 = 2^{\beta+\alpha+1} B(\alpha+1, \beta+1),$$

$$M_1 = \frac{\alpha - \beta}{\beta + \alpha + 2} M_0$$

olmak üzere kararlı üçüncü mertebeden homojen rekürans bağıntısı

$$(\alpha + \beta + k + 2) M_{k+1} + 2(\beta - \alpha) M_k + (\beta + \alpha + 2 - k) M_{k-1} = 0 \quad (2.2.3)$$

elde edilir. Şartlardaki $B(a, b)$ fonksiyonu

$$B(a, b) = \int_0^1 (1-z)^{b-1} z^{a-1} dz$$

eşitliği ile verilen Beta fonksiyonudur (F. W. J. Olver, Lozier, Boisvert, & Clark, 2010).

2.2.1 (2.2.3) Rekürans bağıntısının kararlılığı

İkinci yaklaşımda sunulan rekürans bağıntısı üçüncü derecedendir. (Robert Piessens & Branders, 1973)'deki yazarlar,

$$\diamond \beta > \alpha \text{ ve } \alpha = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$$

$$\diamond \beta < \alpha \text{ ve } \alpha = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$$

durumları dışında (2.2.2) rekürans bağıntısının ileri yönde verimli bir şekilde kararlı olduğunu belirtmişlerdir. M_k için ileri özyenileme, ancak eğer rekürans bağıntısının baskın bir çözümü ise etkin bir şekilde değerlendirilebilir (Gautschi, 1967). Bir başlangıç değeri ve bir bitiş değeri ile sınır değer problemini uygulayarak $M_k^{(N)}, k=1, \dots, N-1$, özyinelemeyi verimli bir şekilde çözebiliriz. Yeterince büyük N değerleri için bu,

$$\begin{pmatrix} b & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & b & a_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_3 & b & a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & b & a_4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_5 & b & a_5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{N-2} & b & a_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{N-1} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1^{(N)} \\ M_2^{(N)} \\ M_3^{(N)} \\ M_4^{(N)} \\ M_5^{(N)} \\ \vdots \\ M_{N-2}^{(N)} \\ M_{N-1}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 M_0^{(N)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_{N-1} M_N^{(N)} \end{pmatrix},$$

lineer sistemini çözmek anlamına gelir. Bu denklem sistemi,

$$a_k = (\alpha + \beta + 2 + k),$$

$$b = 2(\beta - \alpha),$$

ve

$$c_k = (\beta + \alpha + 2 - k), \quad k = 1, \dots, N-1 \text{ için}$$

olmak üzere

$$A_N x = b_N,$$

halinde matris denklemi olarak yazılır. İteratif metotlar kullanıldığında, bu sistemin çözümü sadece $O(N)$ işleme gereksinim duyar.

Lighthill metodunu (Lighthill, 1959) kullanarak, $S(\alpha)$, $S(\beta)$ katsayıları

$$S(y) = \cos(\pi y) \Gamma(2y + 2)$$

formülü ile tanımlanmak üzere M_k 'nin asimptotik yaklaşımını

$$M_k \sim 2^{\beta-\alpha} S(\alpha) \left[k^{-2(\alpha+1)} + O(k^{-2\alpha-4}) \right] + (-1)^{k+1} 2^{\alpha-\beta} S(\beta) \left[k^{-2(\beta+1)} + O(k^{-2\beta-4}) \right]$$

olarak belirleriz. Şu halde $G_k[\mu]$ 'nin yeni yaklaşımı

$$G_k[\mu] = 2 \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^r i^j J_j(\mu) b_n v_{n,j}. \quad (2.2.1.1)$$

olarak yazılacaktır.

Her zaman r değerinin μ 'dan çok daha büyük olmasına izin vermek çok önemlidir ve Bessel fonksiyonunun yalnızca bir kez hesaplanabilmesi için r değerinin her zaman arttırılması önerilir. r için test edilmiş herhangi bir doğrusal yaklaşımın kullanılması önerilir, örneğin

$$r(\mu) = \lfloor 1.47\mu + 18.6 \rfloor$$

alınabilir. Bu, $J_r(\mu) \leq 10^{-16}$ için daha iyi bir yaklaşımı garanti eder.

2.2.2 $G_k[\mu]$ 'ın Hesabı için Algoritma 2

Girdi Değerleri: $\alpha; \beta; \mu; r; k; N;$

Çıktı:

- 1: $M_0 = a, M_1 = b$ başlangıç değerlerini hesapla;
 - 2: $k = 1$ al, $k < N$ iken;
 - 3: (2.2.3) rekürans bağıntısı kullanılarak bir sonraki C değerini hesapla;
 - 4: $d = b, b = c, a = d, i = i + 1$ al, döngüyü sonlandır;
 - 5: (2.9) bağıntısını kullanarak $v_{n,j}$ hesapla;
 - 6: Eğer $j = 0 \vee j = r$ ise, $1/r$ 'i değil ise $2/r$ 'yi hesapla;
 - 7: (2.4) kullanarak $n = 0, \dots, N$ için b_n 'leri hesapla;
 - 8: (2.2.1.1) kullanarak $k = 0, \dots, N$ için $G_k[\mu]$ 'nin yaklaşımını hesapla;
 - 9: $G_k[\mu]$ 'i yazdır.
-

Uyarı 2.2.2.1. $\alpha = \beta = \pm \frac{1}{2}$ dikkate alındığında, Algoritma 2'nin, büyük frekans değerleri için daha hızlı ve verimli olacak Chebyshev kuadratür kuralı olarak kabul edilmesi gerektiğini belirtmekte fayda vardır.

2.3 Hata Analizi

Burada, önceki kısımlarda sunulan kuadratür kuralı için yaklaşımın yakınsaklığını ispatlayacağız. İspatlara geçmeden önce, verilen teoremleri ispatlamada faydalı olacak bazı lemmalar vermek istiyoruz.

Lemma 2.3.1 (Trefethen, 2019). f fonksiyonu $[-1, 1]$ üzerinde sürekli bir Lipschitz fonksiyonu olsun, yani $\forall x, t \in [-1, 1]$ için $|f(x) - f(t)| \leq D|x - t|$ olacak şekilde bir D sabiti mevcuttur. Aynı zamanda $\{f_j\}_{j=0}^N$ 'in, $x_{N+1} = \{\cos \pi j / N\}_{j=0}^N$ üzerinde olan veya olmayan bir sayı kümesi olduğunu ve $P_N[f]$ 'in her bir j değeri için $P(x_j) = f_j$ olacak şekilde bu

noktaları interpolate ettiği bir polinom yaklaşımı olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir:

- a) Eğer f ve $m_0 \geq 0$ tam sayı değerleri için $f^{(m_0-1)}$ türevleri de $[-1,1]$ üzerinde bir mutlak sürekli fonksiyon ise ve (m_0) . türevlerin sınırlı V_{m_0} varyasyona sahip olduğunu farz edilsin. Bu taktirde, $N \geq m_0 + 1$ için

$$|b_N| \leq \frac{2V_{m_0} N^{-1}}{\pi(N-1) \cdots (N-m_0)} \leq \frac{2V_{m_0}}{(N-m_0)^{m_0+1}}.$$

- b) V_{m_0} için, bazı $m_0 \geq 1$ için $f^{(m_0)}$ türevlerinin toplam varyasyonu belirlenir. Bu taktirde, bazı $N \geq m_0$ için

$$\|f - P_N[f]\|_{\infty} \leq \frac{4V_{m_0}}{m_0 \pi (N-m_0)^{m_0}}.$$

- c) Eğer f açık bir E_{ρ} Bernstein elipsinde bazı M değerleri için $|f(x)| \leq M$ eşitsizliğini sağlayan $[-1,1]$ 'deki holomorfik bir fonksiyon ise, bu taktirde her bir $N \geq 0$ için

$$\|f - P_N[f]\|_{\infty} \leq \frac{4M}{\rho^{N+1} - \rho^N}.$$

- d) Eğer f açık bir E_{ρ} Bernstein elipsinde bazı M değerleri için $|f(x)| \leq M$ eşitsizliğini sağlayan $[-1,1]$ 'deki holomorfik bir fonksiyon ise, bu taktirde $N \geq 2$ için $(n+1)$ -Clenshaw-Curtis kuralı

$$\|f - P_N[f]\|_{\infty} \leq \frac{64M}{15\rho^{N-1}(\rho^2 - 1)}$$

eşitsizliğini sağlar.

Teorem 2.3.2. $\alpha, \beta > -1$ olsun, bu taktirde $G_N[\mu]$ Clenshaw-Curtis kuralı

$$|G[\mu] - G_N[\mu]| = O(1), \quad \mu \rightarrow \infty$$

ile verilir.

İspat. P_N , Clenshaw-Curtis noktaları üzerinde N dereceden bir polinom olmak üzere $e = f - P_N$ olduğu ve kolaylık olması için $\omega(x) = (1+x)^\alpha (1-x)^\beta$ olduğu kabul edilsin. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
|G[\mu] - G_N[\mu]| &= \left| \int_{-1}^1 \omega(x) e^{i\mu x} (f(x) - P_N(x)) dx \right| \\
&= \left| (e(x) - e(\xi)) \int_{-1}^1 \omega(x) e^{i\mu x} dx + e(\xi) \int_{-1}^1 (\omega(x) - \omega(\xi)) e^{i\mu x} dx \right|, \quad -1 < \xi < 1 \\
&= \left| (e(x) - e(\xi)) \int_{-1}^1 \omega(x) e^{i\mu x} dx + e(\xi) \int_{-1}^1 (\omega(x) - \omega(\xi)) e^{i\mu x} dx \right. \\
&\quad \left. + e(\xi) \omega(\xi) \int_{-1}^1 e^{i\mu x} dx \right| \\
&\leq \sup_{x \in [-1,1]} |e(x) - e(\xi)| \int_{-1}^1 |\omega(x)| dx + |e(\xi)| \sup_{x \in [-1,1]} |\omega(x) - \omega(\xi)| + |e(\xi)| |\omega(\xi)| \\
&= O(1), \quad \mu \rightarrow \infty. \quad \square
\end{aligned}$$

Teorem 2.3.3. $G_N[\mu]$ Clenshaw-Curtis kuadratrür kuralının hata sınırı aşağıdakileri sağlar:

i. Eğer f $[-1,1]$ üzerinde holomorfik bir fonksiyon ise, bu taktirde

$$E_N := 2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1) \frac{64M}{15\rho^{N-1}(\rho^2-1)}.$$

ii. Eğer f $[-1,1]$ üzerinde mutlak sürekli türevlere sahip ve $f^{(m_0)}$, V_{m_0} sınırlı varyasyonu ise, bu taktirde

$$E_N := 2^{\alpha+\beta+3} B(\alpha+1, \beta+1) \frac{V_{m_0}}{m_0 \pi (N - m_0)^{m_0}}.$$

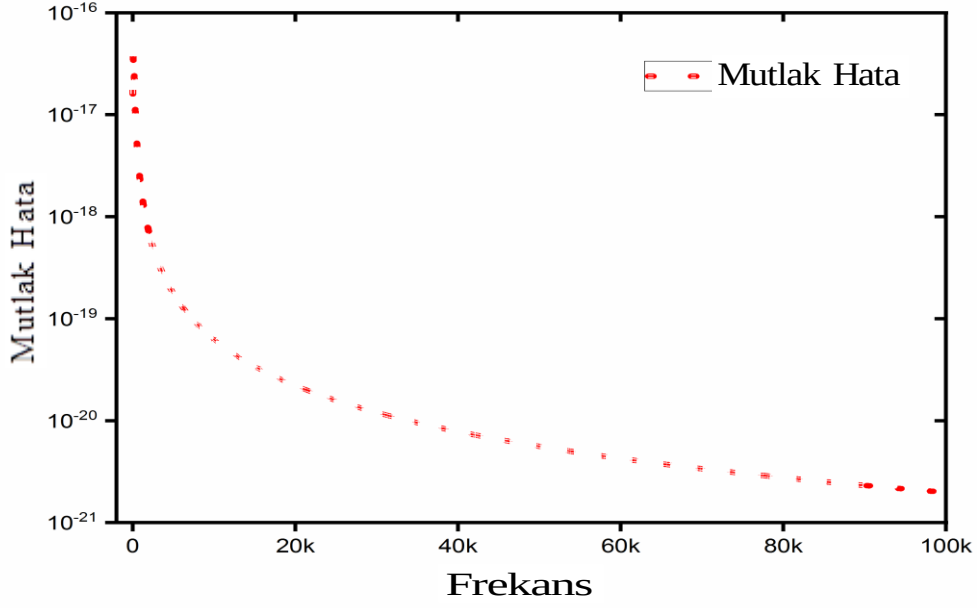
İspat. $P_N[f]$ Clenshaw-Curtis noktasında $f(x)$ 'i interpolate eden polinom yaklaşımı olsun, bu taktirde,

$$\begin{aligned}
|G[\mu] - G_N[\mu]| &= \left| \int_{-1}^1 (1+x)^\alpha (1-x)^\beta e^{i\mu x} (f(x) - P_N(x)) dx \right| \\
&\leq \|f(x) - P_N(f)\|_\infty \int_{-1}^1 (1+x)^\alpha (1-x)^\beta dx
\end{aligned}$$

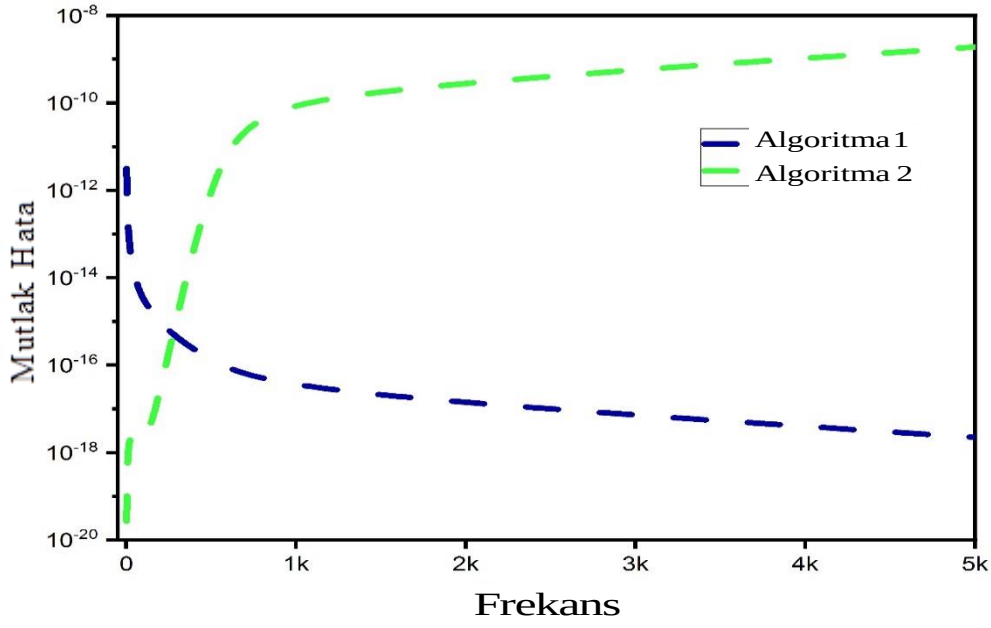
eşitliği sağlanır. $x = 2t - 1$ ise,

$$\begin{aligned}
|G[\mu] - G_N[\mu]| &\leq \|f - P_N\|_\infty \int_{-1}^1 (1+x)^\alpha (1-x)^\beta dx, \\
&= \|f - P_N\|_\infty 2^{\alpha+\beta+1} \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta dt \\
&= 2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1) \|f - P_N\|_\infty.
\end{aligned}$$

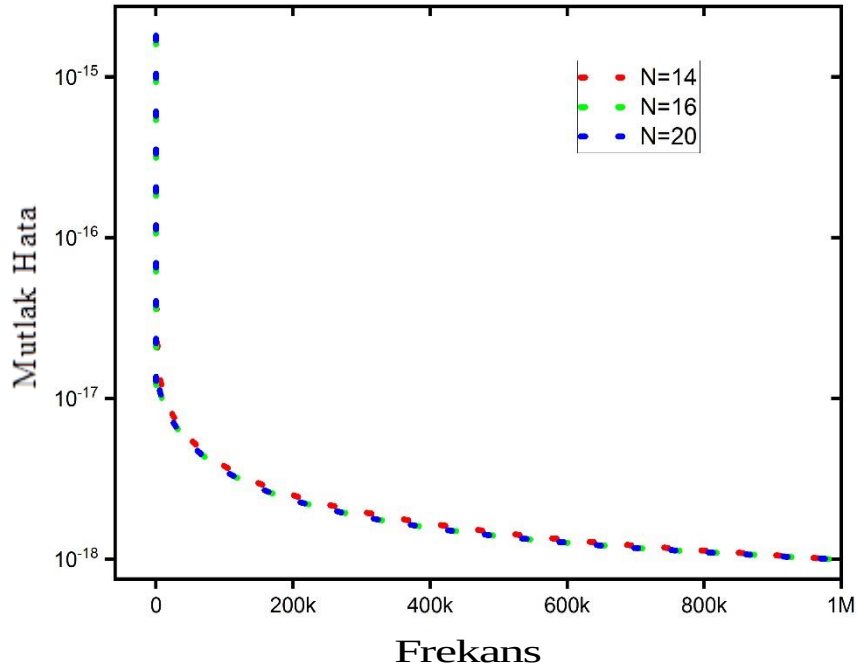
elde edilir. Lemma 2.3.1 ile birlikte, ispat tamamlanır (bkz Şekil 2.1).



Şekil 2.1: $\alpha = -1/2$, $\beta = 11/12$, $f(x) = xe^x$ ve $\mu = 0, 10, \dots, 10^5$ için Algoritma 1 için yakınsaklık oranları.



Şekil 2.2: $\alpha = 0.99, \beta = -1/3, \mu = 1, 10, \dots, 5000$ ve $f(x) = \frac{|100(x - 1/8)|^{-1/2}}{(x^2 + 1000)}$ için Algoritma 1 ve Algoritma 2 için yakınsaklık oranları.



Şekil 2.3: $N = 14, 16, 20, \alpha = -0.4, \beta = -0.5, \mu = 1, 10, \dots, 10^6$ ve $f(x) = \cos x$ için Algoritma 1'in yakınsaklık oranları.

2.4 Sayısal Örnekler

Bu kısımda, bu bölümde önerilen algoritmaların doğruluğunu göstermek için bazı sayısal örnekler sunulmaktadır. Bu bölümde gerçekleştirilen tüm hesaplamaların Windows 8 işletim sistemi, 4 GB RAM ve 2,4 GHz CPU saat hızına sahip bir kişisel bilgisayarda MATHEMATICA sürüm 9.0 kullanılarak gerçekleştirildiğini ifade etmek gerekir. Otomatik hesaplamalarımızın performansını değerlendirmek ve analizimizi desteklemek için CPU çalışma süresi da birçok örnekte sunulmaktadır.

Örnek 2.4.1. $f(x) = xe^x$ olmak üzere

$$G[\mu] = \int_{-1}^1 (1+x)^{-1/2} (1-x)^{11/12} e^{i\mu x} f(x) dx$$

integralini hesaplayacağız.

Tablo 2.1, bu bölümde sunulan Clenshaw-Curtis tabanlı Algoritma 1'in otomatik hesaplaması ve sayısal en dik iniş yöntemi ile Örnek 2.4.1'deki integralin sonuçlarını (Mutlak hatalar ve CPU çalışma süresi) göstermektedir. Tam değer Mathematica'nın **NIntegrate** komutu ile **WorkingPrecision->dig, MaxRecursion->32** seçenekleriyle elde edildi. Algoritmamız, sıfır saniye içinde doğru sonuçlar verebildiğini ve en az 16-basamaklı doğru bir yaklaşıma ulaşılabildiğini göstermektedir (bkz. Şekil 2.3).

Ayrıca, aynı integrali Tablo 2.2'de sayısal en dik iniş yöntemini kullanarak hesapladık. En dik iniş yöntemini uygulayarak, örneğin: Tablo 2.1'den en yüksek frekans $\mu = 10^{10}$ değerini alarak, en dik iniş yönteminin 3.136×10^{-26} değerinde bir mutlak hata ürettiğini bulduk. Algoritmamız beklediği gibi 0.687 saniyede 6.2×10^{-29} mutlak hataya ulaştı. Bu, çok yüksek frekanslar uygulandığında Clenshaw-Curtis Algoritması 1'in sağlamlığını kanıtlar. Sayısal en dik iniş yöntemi yalnızca orta ve yüksek frekans için güvenilir olabilir. Ancak yöntem, Tablo 2.2'de gösterildiği gibi, örneğin $\mu = 10$ gibi küçük frekans değerleri için düşük performans sergilemektedir.

Tablo 2.1: $N=14$ için Algoritma 1 kullanılarak, büyük μ değerleri için mutlak hatalar ve hesaplama zamanları.

μ	Mutlak Hatalar	Hesaplama Süreleri
10	1.6×10^{-18}	0.718
100	6.2×10^{-17}	0.671
1000	1.9×10^{-18}	0.703
10000	6.2×10^{-20}	0.687
100000	1.9×10^{-21}	0.703
1000000	6.2×10^{-23}	0.687
10000000	1.9×10^{-24}	0.718
100000000	6.2×10^{-26}	0.703
1000000000	6.2×10^{-26}	0.703
10000000000	6.2×10^{-29}	0.687

Tablo 2.2: En dik iniş metodu ile Örnek 2.4.1 deki integral için mutlak hatalar ve çalışma süreleri.

μ	Mutlak Hatalar	Hesaplama Süreleri
10	1.1×10^{-12}	0.062
100	1.4×10^{-22}	0.015
1000	3.7×10^{-27}	0.015
10000	1.4×10^{-27}	0.015
100000	1.4×10^{-29}	0.015
1000000	6.0×10^{-29}	0.015
10000000	1.1×10^{-30}	0.015
100000000	3.7×10^{-30}	0.001
1000000000	2.1×10^{-32}	0.001
10000000000	3.1×10^{-26}	0.001

Örnek 2.4.2. $f_1(x) = xe^{-x^2}$, $f_2(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}$ olmak üzere

$$G_j[\mu] = \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1+x)^{-1/4} (1-x)^{-1/3} f_j(x) dx, j=1,2$$

integralini göz önüne alalım.

Tablo 2.3, önerilen Algoritma 1'in verimliliğini göstermektedir; burada integral, bu bölümde sunulan Mathematica program kodları kullanılarak 32-basamaklı hassasiyetle hesaplanmıştır. Ayrıca, Tablo 2.3, $\mu = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ ile birlikte f_1 ve f_2 fonksiyonlarının iki farklı türü için mutlak hataları ve saniye cinsinden kodların çalışma sürelerini göstermektedir. Algoritma 1'in kullanılmasıyla hesaplanan f_1 fonksiyonu için en az $|\text{hata}| \leq 10^{-25}$ ve f_2 fonksiyonu için $|\text{hata}| \leq 10^{-16}$ 'nın garanti edebileceğini gözlemledik. Algoritma, düşük frekans değerleri için oldukça doğru, ancak büyük rekans değerleri için daha verimli olduğunu gösterir. $\mu = 100$ frekansı için örneğin N değerinin 50'ye çıkarılmasına karar verilirse, program 10^{-20} mutlak hata değerlerine 2.75 saniyede ulaşabilir.

Tablo 2.3: Algoritma 1 kullanılarak μ 'nün farklı değerleri için mutlak hataları ve çalışma zamanları.

μ	$f_1(x) = xe^{-x^2}$		$f_2(x) = e^{-x^2} (1+x^2)^{-1}$	
	Mutlak Hata	CPU	Mutlak Hata	CPU
10^2	4.6×10^{-27}	1.56	3.6×10^{-16}	2.00
10^3	0.1×10^{-29}	1.57	6.5×10^{-19}	2.37
10^4	0.1×10^{-29}	1.59	1.2×10^{-20}	2.25
10^5	0.1×10^{-29}	1.59	3.3×10^{-22}	2.22
10^6	0.2×10^{-29}	1.56	7.4×10^{-24}	2.23

Örnek 2.4.3. $f(x) = e^x$ olmak üzere

$$G[\mu] = \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1+x)^{-1/2} (1-x)^{-1/6} f(x) dx,$$

salınımlı integral denklemini göz önüne alalım.

Tablo 2.4, Örnek 2.4.3'te 1'den 100'e kadar küçük değerlerin dikkate alındığı düşük frekans değerleri için sunulan Algoritma 1 ve Algoritma 2'nin etkinliğini göstermektedir. Ayrıca, Tablo 2.4'te, Algoritma 2 kullanılırken frekans arttıkça, doğru sonuçları elde etmek için daha fazla hesaplama süresi gerektiği açıktır. Aynı tablo, diğer yandan, tüm algoritmaların hesaplama süresinde farklılık gösterdiği görülebilse de Algoritma 1'in doğruluğunu göstermektedir.

Örnek 2.4.4. $f(x) = \frac{|100(x - \frac{15}{8})|^{-\frac{1}{2}}}{(x^2 + 1000)}$ için $G[\mu] = \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1+x)^{0.99} (1-x)^{-1/3} f(x) dx$

integralini göz önüne alalım.

Tablo 2.4: μ 'nün küçük değerleri için her iki algoritmanın mutlak hataları ve hesaplama zamanları.

μ	Algoritma 2		Algoritma 1	
	Mutlak Hata	CPU	Mutlak Hata	CPU
1	2.9×10^{-28}	0.12	7.4×10^{-20}	0.67
10	6.9×10^{-24}	0.43	5.4×10^{-20}	0.73
20	1.5×10^{-22}	0.82	1.9×10^{-19}	0.76
30	7.4×10^{-20}	1.28	4.4×10^{-20}	0.84
40	4.3×10^{-18}	1.64	1.6×10^{-21}	0.81
50	7.2×10^{-17}	2.23	7.4×10^{-21}	0.81
60	5.7×10^{-16}	2.93	4.4×10^{-21}	0.81
70	2.8×10^{-15}	3.25	1.8×10^{-24}	0.90
80	8.2×10^{-17}	4.68	1.9×10^{-24}	0.95
90	3.0×10^{-16}	5.28	7.0×10^{-24}	1.18
100	9.3×10^{-16}	6.35	1.4×10^{-27}	1.01

Tablo 2.5: Her iki algoritma kullanılarak Örnek 2.4.4 için Mutlak hatalar.

μ	Mutlak Hatalar	
	Algoritma 1	Algoritma 2
1	3.14×10^{-12}	2.7×10^{-20}
10	3.19×10^{-14}	1.2×10^{-17}
100	1.53×10^{-15}	1.0×10^{-19}
500	1.03×10^{-16}	2.5×10^{-11}
1000	2.24×10^{-17}	1.8×10^{-10}
5000	2.22×10^{-18}	1.9×10^{-9}

Tablo 2.6: Algoritma 1 kullanılarak farklı N ve μ değerleri için

$G[\mu] = \int_1^{-1} e^{i\mu x} (x+1)^{-0.4} (1-x)^{-0.5} \cos x dx$ integralinin mutlak hataları.

μ	N				
	10	12	14	16	20
1	8.1×10^{-15}	1.6×10^{-15}	1.7×10^{-15}	1.2×10^{-15}	1.8×10^{-15}
10	8.8×10^{-13}	8.3×10^{-16}	5.5×10^{-17}	4.3×10^{-18}	4.3×10^{-18}
10^2	6.6×10^{-14}	7.1×10^{-17}	3.1×10^{-17}	3.2×10^{-17}	3.2×10^{-17}
10^4	5.3×10^{-17}	6.9×10^{-18}	1.9×10^{-18}	1.7×10^{-18}	1.7×10^{-18}
10^6	1.0×10^{-18}	1.0×10^{-18}	9.9×10^{-19}	9.9×10^{-19}	9.9×10^{-19}

3 CAUCHY VE JACOBI TİPİNDE TEKİLLİK ÇEKİRDEĞİNE SAHİP SALINIMLI İNTEGRALLER İÇİN VERİMLİ BİR ALGORİTMA

Bu bölümde, Jacobi-Cauchy tipi tekilliklere sahip, yüksek salınlı Fourier tipi integrallerin daha verimli hesaplanabilmesi için yeni bir yöntem sunacağız. Önerilen bu yeni yöntemin, oldukça düşük, orta ve çok büyük frekans değerleri için daha etkili olduğu ispatlanmıştır. Bu yöntem, sayısal en dik iniş yöntemi ile sıradan Clenshaw-Curtis yöntemlerinin birleşimi olarak kabul edilebilir. Bu yöntemler, analitik ve düzgün çekirdek fonksiyonlarına sahip salınlı integrallerin hesaplanmasında yaygın olarak uygulanır. Yöntemimizde, ilk olarak, verilen fonksiyon, kestirilmiş Chebyshev serisi tarafından terim terim yaklaşık olarak tahmin edilir, ardından tekillik türlerini içeren modifiye momentler, sayısal en dik iniş yöntemi ile veya özel fonksiyonlar kullanılarak verimli bir şekilde hesaplanır. Son olarak, hata analizi yapıp, teorik analizimizi desteklemek için seçilen sayısal örnekler verilmiştir.

Bu bölümde sunulan yöntemin kapsamı,

$$I_{-1}^1(f; \mu) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{(1+x)^\alpha (1-x)^\beta (x-\mu)^\nu} e^{i\omega x} dx, |\mu| < 1, i^2 = -1 \quad (3.1)$$

formundaki integraller ile sınırlıdır. Burada $|\omega|$ kesin 1'den büyük, $\alpha, \beta \in (-\infty, 1), \nu \in \mathbb{N}$ olup, f fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığı üzerinde yeterince düzgün bir fonksiyondur.

Bu bölüm şu şekilde düzenlenmiştir: Bir sonraki kısımda, önerilen yöntemin sayısal formülasyonu verilecektir. Kısım 3.2'de, modifiye momentlerin etkin bir şekilde nasıl hesaplanacağını ifade edilecek ve Kısım 3.3'te, teorik analizimizi doğrulamak için seçilmiş sayısal örnekler gösterilecektir.

3.1 Metodun sayısal formülasyonu

Bu kısımda, (3.1) integralinden, özel halde $\nu = 1$ için ele alarak, elde edilen

$$I_{-1}^1(f; \mu) = \int_{-1}^1 \frac{f(x) e^{i\omega x}}{(1+x)^\alpha (1-x)^\beta (x-\mu)} dx, -1 < \mu < 1, \quad (3.1.1)$$

integralinin hesaplanması ile ilgileneceğiz. Kestirilmiş Chebyshev serisi

$$f(x) = \sum_{l=0}^N a_{l,j} T_l(x) \quad (3.1.2)$$

ile düzgün $f(x)$ fonksiyonunun yaklaşımını yazarak başlayacağız. Bu toplamdaki çift kesme işareti ilk ve son terimlerin yarım ağırlığa sahip olduğunu belirtirken, $T_l(x)$ ler de birinci çeşit l . Chebyshev polinomlarıdır. Eğer $f(x)$ N 'in küçük değerleri için bile $[-1,1]$ aralığı üzerinde düzgün bir fonksiyon ise, (3.1.2) formülünün daima en iyi yaklaşımı vereceğini belirtmekte fayda vardır. $a_{l,j}$ katsayılarını hesaplamak için önce $x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), 0 \leq j \leq N$, olduğunu kabul ederiz, daha sonra ortogonalite şartlarından (Mason & Venturino, 1997), çift toplamın

$$\sum_{j=0}^N T_l(x_j) T_k(x_j) = \begin{cases} 0, & l \neq k \text{ ise,} \\ N, & l = k = 0 \text{ veya } N \text{ ise,} \\ \frac{N}{2}, & l = k \neq 0 \text{ veya } N \text{ ise} \end{cases}$$

değerlerine sahip olduğunu görürüz. (3.1.2)'nin her iki tarafını da $T_l(x_j)$ ile çarpmak

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N f(x_j) T_l(x_j) &= \sum_{j=0}^N \sum_{l=0}^N a_{l,j} T_l(x_j) T_l(x_j) \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{l=0}^N a_{l,j} \cos\left(\frac{l\pi j}{N}\right) \cos\left(\frac{l\pi j}{N}\right) \\ &= \frac{N}{2} a_{l,j} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu nedenle, $a_{l,j}$ katsayılarını

$$a_{l,j} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N f\left(\cos\frac{\pi j}{N}\right) \cos\left(\frac{l\pi j}{N}\right) \quad (3.1.3)$$

formülünden veya basitçe

$$a_{l,j} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N f(x_j) T_l(x_j) \quad (3.1.4)$$

eşitliğinden hesaplanır. $a_{l,j}'$ dışında bu tezde $(N+1)$ -Clenshaw-Curtis noktası

$x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), 0 \leq j \leq N$ olarak alınır. Gerektiğinde

$$a_{l,j}' = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^N f\left(\cos\frac{\pi(2j+1)}{2(N+1)}\right) \cos\left(\frac{\pi l(2j+1)}{2(N+1)}\right) \quad (3.1.5)$$

formülü de kullanılabilir.

Table 3.6'da, sabit N değeri ile ω frekansının çeşitli değerleri için her iki (3.1.4) ve (3.1.5) formülleri ile verilen her iki katsayı da kullanılarak hesaplamalı farkları gösterilmektedir.

Cooley ve Tukey (Cooley & Tukey, 1965) tarafından ortaya atılan metot, (3.1.3) katsayılarını hesaplamak için kullanılabilir ve bu metodun algoritması FFT(Hızlı Fourier Dönüşümü) ile sadece $O(N \log N)$ işlemin yapılmasını sağlar. Bazı makalelerde araştırılan Clenshaw-Curtis kuadratur yöntemlerinin (Clenshaw & Curtis, 1960; Trefethen, 2008) $f(x)$ fonksiyonunu Clenshaw-Curtis noktalarında interpolate ettiğini belirtmek gerekir. Bu nedenle, (3.1.2)'yi (3.1.1)'de yerine yazarsak,

$$I_{N,l}(f; \mu) = \begin{cases} \sum_{l=0}^N a_{l,j} M_{N,j}(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) \\ \sum_{l=0}^N a'_{l,j} M_{N,j}(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) \end{cases} \quad (3.1.6)$$

toplamlarını elde ederiz. Bu son ifadedeki $M_{N,j}(\alpha, \beta, l, \mu, \omega)$ tekillilik türlerini içeren modifiye moment olup,

$$M_{N,j}(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) = \int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega x} T_l(x)}{(1+x)^\alpha (1-x)^\beta (x-\mu)} dx, \quad -1 < \mu < 1 \quad (3.1.7)$$

şeklinde ifade edilebilir. Salınım çarpanı $e^{i\omega x}$, j . mertebeden Bessel fonksiyonu ve Chebyshev polinomu cinsinden yaklaşımı yapılarak seri formunda

$$e^{i\omega x} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} i^j J_j(\omega) T_j(x) \quad (3.1.8)$$

yazılarak ilerlenebilir. Bu taktirde

$$T_l(x) T_j(x) = \frac{1}{2} (T_{l+j}(x) + T_{|l-j|}(x)) \quad (3.1.9)$$

Chebyshev eşitliği ve

$$d_{l,j} = \frac{M_{l+j} + M_{|l-j|}}{2} \quad (3.1.10)$$

moment eşitliği kullanılabilir. Yukarıdaki (3.1.8), (3.1.9) ve (3.1.10) denklemlerini (3.1.6)'da yerlerine yazarsak,

$$I_k(f, \mu) = 2 \sum_{l=0}^N \sum_{j=0}^{\infty} i^j J_j(\omega) a_{l,j} M_k(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) \quad (3.1.11)$$

olarak yazılabilecek yeni bir yaklaşımı elde ederiz ki burada

$$M_k(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) = \int_{-1}^1 \frac{T_k(x)}{(1+x)^\alpha (1-x)^\beta (x-\mu)} dx \quad (3.1.12)$$

olarak alınır. $\alpha = \beta = 1/2$ için, direk olarak Tricomi'nin çalışması olan (RICOMI, 1951)'den (3.1.12) ifadesi

$$\int_{-1}^1 \frac{T_k(x) dx}{(1+x)^\alpha (1-x)^\beta (x-\mu)} = \left(\frac{4^k \Gamma(1+k)^2}{\Gamma(1+2k)} \right) \frac{\pi \cot(-\pi\beta) P_k^{(-\beta, -\alpha)}(\mu)}{(1+\mu)^{-\alpha} (1-\mu)^{-\beta}} - \frac{2^{-\alpha-\beta} \Gamma(-\beta) \Gamma(-\alpha+k+1) {}_2F_1(1+k, \alpha+\beta-k, \beta+1, \frac{1-\mu}{2})}{\Gamma(-\alpha-\beta+1+k)}$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu son integral değerinde $\Gamma(z) = \int_0^\infty y^{z-1} e^{-y} dy$ Gama fonksiyonu, $P_k^{(a,b)}(z)$ Jacobi polinomları ve ${}_2F_1(a, b, c; x)$ de hipergeometrik fonksiyondur (M. Abramowitz & Stegun, 1964) ve $(.)_k$ Pochhammer sembolü olmak üzere

$${}_2F_1(a, b, c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} x^k$$

seri açılımına sahiptir. (3.1.7) modifiye momentlerin hesabı bir sonraki kısımda tartışılacaktır.

3.2 (3.1.7) Modifiye momentlerin etkili hesaplanması

Burada, (3.1.7) modifiye momentlerin verimli bir şekilde hesaplanmasını amaçlıyoruz ve bu hesap aşağıdaki teoremden verilmektedir.

Teorem 3.2.1. $M_{N,j}(\alpha, \beta, l, \mu, \omega)$, $-1 < \mu < 1$ ile verilen (3.1.7) modifiye momentleri

$$M_{N,j}(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) = G_1(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) + G_2(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) + \frac{i\pi T_l(\mu) e^{i\omega\mu}}{(1+\mu)^\alpha (1-\mu)^\beta} \quad (3.2.1)$$

olarak dönüştürülebilir. Burada

$$G_1(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) = \omega^{(\alpha-1)} i^{(1-\alpha)} e^{-i\omega} \int_0^\infty \frac{T_l(-1+i\frac{t}{\omega}) e^{-t}}{t^\alpha (2-i\frac{t}{\omega})^\beta (-1-\mu+i\frac{t}{\omega})} dt \quad (3.2.2)$$

ve

$$G_2(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) = \omega^{(\beta-1)} i^{(1-\beta)} e^{i\omega} \int_0^\infty \frac{T_l(1+i\frac{t}{\omega}) e^{-t}}{t^\beta (2+i\frac{t}{\omega})^\alpha (1-\mu+i\frac{t}{\omega})} dt \quad (3.2.3)$$

olarak alınmaktadır.

İspat: R yeterince büyük bir sayı ve r yeterince küçük bir sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} P_1 : y_1(x) &= -1 + re^{ix}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, & P_5 : y_5(x) &= 1 + re^{ix}, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \\ P_2 : y_2(x) &= x, \quad -1+r \leq x \leq \mu-r, & P_6 : y_6(x) &= 1 + ix, \quad r \leq x \leq R, \\ P_3 : y_3(x) &= \mu + re^{ix}, \quad 0 \leq x \leq \pi, & P_7 : y_7(x) &= x + iR, \quad -1 \leq x \leq 1, \\ P_4 : y_4(x) &= x, \quad \mu+r \leq x \leq 1-r, & P_8 : y_8(x) &= -1 + ix, \quad r \leq x \leq R, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

olacak şekilde $P = \bigcup_{k=1}^8 P_k$ ile sınırlı, kompleks düzlemde kapalı bir Γ bölgesini göz önüne

alalım. Kompleks düzlemde $-1 \leq \Re(z) \leq 1, \Im(z) \geq 0$ olarak alınan yarı şerit içerisindeki bütün noktalarda analitik olan

$$\phi(z) = \frac{T_l(z) e^{i\omega z}}{(1+z)^\alpha (1-z)^\beta (z-\mu)}$$

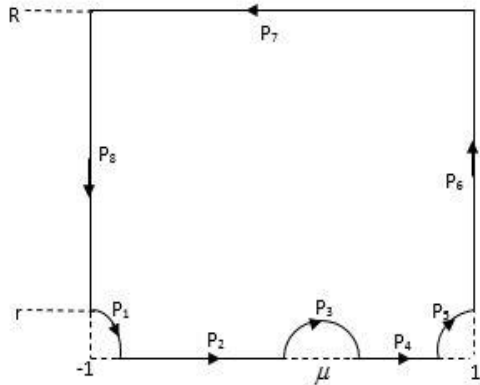
Fonksiyonu alınsın. Bu taktirde Cauchy-Goursat teoreminden

$$\oint_P \frac{T_l(z) e^{i\omega z}}{(1+z)^\alpha (1-z)^\beta (z-\mu)} dz = \sum_{k=1}^8 \int_{P_k} \frac{T_l(x) e^{i\omega x}}{(1+x)^\alpha (1-x)^\beta (x-\mu)} dx = 0$$

elde edilir ve Şekil 3.1'den kolaylıkla

$$\int_{-1+r}^{\mu-r} \phi(x) dx + \int_{\mu+r}^{1-r} \phi(x) dx = - \left(\oint_{P_1} + \oint_{P_3} + \oint_{P_5} + \sum_{m=6}^8 \oint_{P_m} \right) \phi(z) dz \quad (3.2.5)$$

yazılabilir.



Şekil 3.1: (3.1.7) integrali için integrasyon yolları

Bütün çevrenin yönü, saat yönünün tersi olarak Şekil 3.1'de görülmektedir. $r \rightarrow 0$ iken P_1 ve P_5 çeyrek çember yaylarının üzerinden integrallerin sıfır olduğunu göstermek basittir. Örneğin, $P_1 : z = -1 + re^{ix}, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ olarak alınırsa, P_1 üzerinden alınan integralin maksimum değeri

$$\begin{aligned} \left| \oint_{P_1} \frac{T_l(z) e^{i\omega z}}{(1+z)^\alpha (1-z)^\beta (z-\mu)} dz \right| &= \left| - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_l(-1+re^{ix}) e^{i\omega(-1+re^{ix})} i re^{ix}}{(re^{ix})^\alpha (2-re^{ix})^\beta (-1+re^{ix}-\mu)} dx \right| \\ &\leq r^{1-\alpha} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_l(-1+re^{ix}) e^{-i\omega} e^{i\omega re^{ix}} e^{ix-i\alpha}}{(2-re^{ix})^\beta (-1+re^{ix}-\mu)} dx \right| \\ &\leq r^{1-\alpha} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(r, x) dx \right| \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikteki son satırın sağ tarafındaki ifadede yer alan $F(t, \theta)$ fonksiyonu, $t \leq r$ ve $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tanım aralıkları üzerinde sürekli olduğu için, $r \rightarrow 0$ için limit alındığında bu maksimum değerın direk olarak sıfır olacağı anlaşılmaktadır. Benzer bir sonuç P_5 çeyrek çember yayı üzerinden alınmış integral için de kullanılabilir ki böylece $r \rightarrow 0$ iken $\oint_{P_5} \frac{T_l(z) e^{i\omega z}}{(1+z)^\alpha (1-z)^\beta (z-\mu)} dz \rightarrow 0$ olduğu görülür. P_7 doğrusu üzerinde, $z = x + iR$ değişken dönüşümü ile, P_7 integralin maksimum değeri

$$\begin{aligned} \left| \oint_{P_7} \phi(z) dz \right| &= \left| - \int_{-1}^1 \frac{T_l(x+iR) e^{i\omega(x+iR)}}{(1+x+iR)^\alpha (1-x+iR)^\beta (x+iR-\mu)} dx \right| \\ &\leq e^{-\omega R} \int_{-1}^1 \frac{|T_l(x+iR)| |e^{i\omega x}|}{|1+x+iR|^\alpha |1-x+iR|^\beta |x+iR-\mu|} dx \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

ile verilir. Şu halde $R \rightarrow \infty$ için bu son ifade yine sıfır limit değerine ulaşır.

$P_6 : z = 1 + ix, r \leq x \leq R$ üzerinden alınan integral

$$- \oint_{P_6} \phi(z) dz = e^{i\omega} (-i)^{1-\beta} \int_r^R \frac{T_l(1+ix) e^{-\omega x}}{(2+ix)^\alpha x^\beta (1+ix-\mu)} dx \quad (3.2.8)$$

haline gelir. $P_8 : z = -1 + ix, x \in [r, R]$ çevresi boyunca integral de

$$- \oint_{P_8} \phi(z) dz = e^{-i\omega} i^{1-\alpha} \int_r^R \frac{T_l(-1+ix) e^{-\omega x}}{x^\alpha (2-ix)^\beta (-1+ix-\mu)} dx \quad (3.2.9)$$

olarak bulunur. Ek olarak, $P_3 : z = \mu + re^{ix}, 0 \leq x \leq \pi$ parametrik denklemine sahip yarı çember üzerinden integral

$$\begin{aligned} -\oint_{P_3} \phi(z) dz &= \int_0^\pi \frac{T_l(\mu + re^{ix}) e^{i\omega(\mu + re^{ix})} i r e^{ix}}{(1 + \mu + re^{ix})^\alpha (1 - \mu - re^{ix})^\beta (re^{ix})} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{T_l(\mu + re^{ix}) i e^{i\omega r e^{ix}} e^{i\omega \mu}}{(1 + \mu + re^{ix})^\alpha (1 - \mu - re^{ix})^\beta} dx \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

olup, $r \rightarrow 0$ için

$$-\oint_{P_3} \phi(z) dz = i e^{i\omega \mu} \frac{T_l(\mu)}{(1 + \mu)^\alpha (1 - \mu)^\beta}$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki ayrı ayrı yollar üzerinden elde edilmiş integrallerde, $r \rightarrow 0$ ve $R \rightarrow \infty$ iken limitler alınır ve $x = \frac{t}{\omega}$ değişken dönüşümü uygulanırsa, bulunan bu değerlerin (3.2.5) eşitliğinde yerleştirilmesi bize Teorem 3.2.1'in sonucunu verir.

3.2.1 Gauss-Laguerre kuralı ile (3.2.1) deki integral parçalarının hesabı

(3.2.1) denklemindeki G_1 ve G_2 yarı sonsuz integralleri genelleştirilmiş Gauss-Laguerre kuralı (Hildebrand, 1974) ile doğru bir şekilde hesaplanabilmektedir. Üstelik

$$H(t) = \omega^{(\alpha-1)} i^{(1-\alpha)} e^{-i\omega} \frac{T_l(-1 + i \frac{t}{\omega})}{(2 - i \frac{t}{\omega})^\beta (-1 - \mu + i \frac{t}{\omega})}$$

ve

$$Y(t) = \omega^{(\beta-1)} i^{(1-\beta)} e^{i\omega} \frac{T_l(1 + i \frac{t}{\omega})}{(2 + i \frac{t}{\omega})^\alpha (1 - \mu + i \frac{t}{\omega})}$$

olmak üzere bu integraller daha basit bir biçimde

$$\begin{aligned} G_1(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) &= \int_0^\infty H(t) t^{-\alpha} e^{-t} dt, \\ G_2(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) &= \int_0^\infty Y(t) t^{-\beta} e^{-t} dt, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

olarak yazılabilir. (3.2.11) integralleri $\int_0^\infty f(x) x^r e^{-x} dx, r > -1$ formunda olduklarından, G_1 ve

G_2 integrallerinin her ikisini de doğru bir şekilde hesaplamak için genelleştirilmiş Gauss-Laguerre kuralı uygulanabilir. Bunun için, $-\alpha > -1$ ve $-\beta > -1$ olmak üzere $s \in \{-\alpha, -\beta\}$

için $w_s = t^s e^{-t}$ ağırlık fonksiyonuna göre, N -noktalı genelleştirilmiş Gauss-Laguerre kuadratur kuralının düğüm noktalarının ve ağırlıklarının $\{t_j^s, w_j^s\}_{j=1}^N$ olduğunu kabul edelim.

Böylece, G_1 ve G_2 integrallerine sırasıyla

$$G_{1,N}(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) = \sum_{j=1}^N w_{N,j}^{(-\alpha)} H(t_{N,j}^{-\alpha}) + E_1 \quad (3.2.12)$$

ve

$$G_{2,N}(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) = \sum_{j=1}^N w_{N,j}^{(-\beta)} Y(t_{N,j}^{-\beta}) + E_2 \quad (3.2.13)$$

toplamları ile yaklaşılabilir. Burada $s \in \{-\alpha, -\beta\}$ için $C = n! \Gamma(N + s + 1)$ olmak üzere $\forall \xi, \varsigma \in \mathbb{C}$ için $E_1 = \frac{C}{(2N)!} H^{(2N)}(\xi)$ ve $E_2 = \frac{C}{(2N)!} Y^{(2N)}(\varsigma)$ olarak alınmıştır. Bu durumda, (3.2.1) ile verilen modifiye momentler için yaklaşım formülü

$$M_{N,j}(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) = \sum_{j=1}^N w_{N,j}^{(-\alpha)} H(t_{N,j}^{-\alpha}) + \sum_{j=1}^N w_{N,j}^{(-\beta)} Y(t_{N,j}^{-\beta}) + \frac{i\pi T_l(\mu) e^{i\omega\tau}}{(1+\mu)^\alpha (1-\mu)^\beta} \quad (3.2.14)$$

ile verilir.

Teorem 3.2.2 (Huybrechs & Vandewalle, 2006) (3.2.14) kuralının hata yaklaşımları

$$E_N[H; Y] = M_j(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) - M_{N,j}(\alpha, \beta, l, \mu, \omega) = O\left(\omega^{-2N-1+\max\{\alpha, \beta\}}\right), \omega \rightarrow \infty \quad (3.2.15)$$

ile tahmin edilebilir.

Teorem 3.2.3 $\alpha, \beta < 1$ ve $(N+1)$ -Clenshaw-Curtis noktalarında bir polinom yaklaşımı

$F_N[f]$ olsun. Bu taktirde $I_N[f; \mu]$ için hata yaklaşımı

$$|I_{-1}^1[f; \mu] - I_{N,l}[f; \mu]| = O(1), \omega \rightarrow 0 \text{ iken} \quad (3.2.16)$$

ile tahmin edilir.

İspat: f fonksiyonuna, Clenshaw-Curtis noktalarında, yaklaşan N . dereceden bir enterpolasyon polinomu $F_N[f]$ olsun. $p(x) = f(x) - F_N(x)$ ve $m(x) = (1+x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|I_{-1}^1[f; \mu] - I_{N,l}[f; \mu]| &= \left| \int_{-1}^1 \frac{(f(x) - F_N(x))m(x)e^{i\omega x}}{(x-\mu)} dx \right| \\
&= \left| \left(p(x) - p(\mu) \right) \int_{-1}^1 \frac{m(x)e^{i\omega x}}{(x-\mu)} dx + p(\mu) \int_{-1}^1 \frac{m(x)e^{i\omega x}}{(x-\mu)} dx \right| \\
&= \left| \left(p(x) - p(\mu) \right) \int_{-1}^1 \frac{m(x)e^{i\omega x}}{(x-\mu)} dx + p(\mu) \int_{-1}^1 \frac{(m(x) - m(\mu))e^{i\omega x}}{(x-\mu)} dx + m(\mu) p(\mu) \int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega x}}{(x-\mu)} dx \right| \\
&\leq \sup_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{p(x) - p(\mu)}{(x-\mu)} \right| \int_{-1}^1 |m(x)| dx + p(\mu) \sup_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{m(x) - m(\mu)}{(x-\mu)} \right| + |m(\mu)| |p(\mu)| \left| \int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega x}}{(x-\mu)} dx \right| \\
&= O(1), \quad \omega \rightarrow \infty \text{ iken}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.2 Algoritma: (3.1)'in hesabı

Girdi Değerleri: $\alpha, \beta, \omega, N, l, \mu;$

Çıktı:

1. $s \in \{-\alpha, -\beta\}$ için $L_N^s(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomlarının $x_{N,j}^s$ köklerini hesapla;
2. α için $\omega_{N,j}^{(-\alpha)} = \frac{\Gamma(N+1-\alpha)x_{N,j}^{-\alpha}}{\Gamma(N+1)[(N+1)L_{N+1}^{-\alpha}(x_{N,j}^{-\alpha})]^2}$, $j=1, \dots, N$ ağırlıklarını hesapla;
3. β için $\omega_{N,j}^{(-\beta)} = \frac{\Gamma(N+1-\beta)x_{N,j}^{-\beta}}{\Gamma(N+1)[(N+1)L_{N+1}^{-\beta}(x_{N,j}^{-\beta})]^2}$, $j=1, \dots, N$ ağırlıklarını hesapla;
4. $N=l$ olarak al ve (3.2.14)'de gösterilen $j=1, \dots, N$ için $M_{N,j}(\alpha, \beta, l, \mu, \omega)$ değerlerini hesapla;
5. Eğer $j=0$ ve $j=N$ ise, $1/N$ değerini hesapla, değil ise $2/N$ değerini hesapla;
6. $j=0, \dots, N$; için $a_{l,j}$ değerlerini hesapla, eğer isteniyorsa 5. adıma geç ve (3.2.5)'de gösterilen $j=0, \dots, N$ için $a'_{l,j}$ değerlerini hesapla;
7. (3.1.6) yı kullanarak $l=0, \dots, N$ için $I_{N,l}$ yaklaşımlarını hesapla;
8. $I_{N,l}(f, \mu)$ 'ı yazdır ;

3.3 Sayısal Örnekler

Burada, Jacobi-Cauchy tipi tekilliklere sahip salınımlı integrallerin verimli hesaplanması için önerilen algoritmanın performansını test etmek için seçilen sayısal örnekler verilmiştir.

Tüm hesaplamalar Mathematica 9.0 kullanılarak yapılmıştır. Bazı örneklerde saniye cinsinden hesaplama süresi verilmiştir. Elde edilen yaklaşımlar, CPU zamanı ve bağıl hatalar $\alpha, \beta, \omega, \mu$ ve N değerlerine bağlı olarak verilecektir.

Örnek 3.3.1. Tekillığe sahip salınımlı

$$I_{-1}^1(f; \tau) = \int_{-1}^1 \frac{x e^{x^2} e^{i\omega x}}{(1+x)^{1/10} (1-x)^{1/2} (x-\frac{1}{2})} dx \quad (3.3.1)$$

integralini hesaplayacağız. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.3.1’de özetlenmiştir.

Tablo 3.1: Çeşitli N ve ω değerleri ile (3.3.1) integrali için bağıl hatalar.

ω / N	<i>Bağıl Hatalar</i>				
	15	22	26	30	32
5	2.6×10^{-8}	1.7×10^{-10}	1.0×10^{-10}	1.9×10^{-11}	8.6×10^{-12}
10	4.0×10^{-9}	3.6×10^{-13}	5.2×10^{-14}	4.7×10^{-15}	1.5×10^{-15}
50	2.2×10^{-10}	1.6×10^{-14}	1.2×10^{-17}	6.5×10^{-22}	7.2×10^{-23}
10^2	6.5×10^{-11}	1.4×10^{-14}	1.3×10^{-17}	1.3×10^{-22}	6.0×10^{-23}
10^4	5.1×10^{-14}	1.1×10^{-14}	9.7×10^{-18}	9.3×10^{-26}	4.5×10^{-23}

Örnek 3.3.2. Tekil salınımlı

$$I_{-1}^1(f; \tau) = \int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega x} \sin x}{(1+x)^{1/2} (1-x)^{1/4} (x-0.32)} dx. \quad (3.3.2)$$

integralini göz önüne alalım. Tablo 3.2, bu integral için çeşitli N ve ω değerleri ile $\mu = 0.32$ değeri için elde edilen hata miktarlarını göstermektedir.

Örnek 3.3.3. Tekil salınımlı

$$I_{-1}^1(f; \tau) = \int_{-1}^1 \frac{(3x^3 - 2x + 5) e^{i\omega x}}{(1+x)^{1/100} (1-x)^{1/300} (x-3)(x-0.4)} dx. \quad (3.3.3)$$

integralini hesaplayalım. Hatalar ve saniye cinsinden CPU zamanı Tablo 3.3’te verilmiştir.

Örnek 3.3.4. Cauchy Esas değeri olan

$$I_{-1}^1(f; \tau) = \int_{-1}^1 \frac{(x+1) \ln(x+5) e^{i\omega x}}{(1+x)^{99/100} (1-x)^{1/6} (x^2+1)(x-0.79)} dx. \quad (3.3.4)$$

integralini göz önüne alalım. Elde edilen doğruluk değerleri Tablo 3.4’de gösterilmiştir.

Tablo 3.2: (3.3.2) integralinin çeşitli N ve ω değerleri ile $\mu=0.32$ değeri için elde edilen hata miktarları.

$\omega \backslash N$	Bağıl Hata			
	15	20	30	40
5	2.0×10^{-9}	9.1×10^{-11}	4.8×10^{-13}	5.9×10^{-15}
10	8.9×10^{-13}	1.1×10^{-14}	6.2×10^{-15}	1.1×10^{-20}
50	3.5×10^{-20}	7.5×10^{-21}	7.5×10^{-21}	7.1×10^{-21}
10^2	2.5×10^{-20}	2.8×10^{-24}	2.8×10^{-24}	2.8×10^{-24}

Tablo 3.3: (3.3.3) integralinin $N = 22$ ile yaklaşımı için hata değerleri ve saniye cinsinden CPU zamanı

ω	Bağıl Hata	CPU Zamanı
10	1.680×10^{-14}	0.984
10^2	6.076×10^{-17}	0.968
10^3	6.157×10^{-17}	1.062
10^4	3.162×10^{-17}	1.034
10^5	6.165×10^{-17}	1.032
10^6	6.162×10^{-17}	1.015

Tablo 3.4: (3.3.4) integralinin $N = 38$ ile yaklaşımı için hata değerleri ve saniye cinsinden CPU zamanı

ω	Bağıl Hata	CPU Zamanı
10	1.827×10^{-11}	2.718
10^2	2.138×10^{-16}	2.593
10^3	2.351×10^{-17}	1.765
10^4	2.562×10^{-17}	2.390
10^5	2.911×10^{-17}	2.750
10^6	2.908×10^{-17}	4.406

Örnek 3.3.5. Tekil ve salınımlı

$$I_{-1}^1(f; \tau) = \int_{-1}^1 \frac{f_j(x) e^{i\omega x}}{(1+x)^\alpha (1-x)^\beta (x-\mu)} dx, \quad j=1,2,3, \quad (3.3.5)$$

Cauchy integralini farklı α, β, μ değerleri için göz önüne alalım. N, ω değerleri sabit olmak üzere farklı alınan $f_j(x)$ fonksiyonları için elde edilen sonuçlar Tablo 3.5'te gösterilmektedir.

Tablo 3.5: (3.3.5) integralinin $N = 38, \omega = 10^3$ sabit değerleri ile çeşitli α, β, μ değerleri için bağlı hataları

$f_j(x)$	α	β	μ	Bağıl Hatalar
$\frac{xe^x}{1+x^2}$	1/4	1/3	0.5	3.49×10^{-15}
	1/100	1/100	0.5	3.51×10^{-15}
	1/10	1/2	0.5	2.03×10^{-15}
$\frac{\cos x}{10+x^2}$	1/4	1/3	0.90	3.43×10^{-20}
	1/100	1/100	0.90	3.28×10^{-20}
	1/10	1/2	0.90	4.43×10^{-20}
$\frac{\tan x}{75+x^2}$	1/4	1/3	0.45	4.71×10^{-17}
	1/100	1/100	0.45	2.77×10^{-17}
	1/10	1/2	0.45	4.58×10^{-17}

Örnek 3.3.6.

$$I_{-1}^1(f; \tau) = \int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega x}}{(x^2+10)(1+x)^{1/5}(1-x)^{2/3}(x-0.26)} dx. \quad (3.3.6)$$

integralini göz önüne alalım. İntegrali hesaplamanın yanı sıra, aynı zamanda sabit N ve çeşitli ω değerleri için (3.1.4) ve (3.1.5) formülleriyle alınan katsayılarla göre hesaplanan (3.3.6) integral değerlerinin hatalarını karşılaştıracacağız. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.6'da verilmiştir.

Tablo 3.6: Sabit N ve çeşitli ω değerleri için (3.3.6) integral değerinin iki farklı katsayı formülü kullanılmasıyla elde edilen bağıl hatalar.

ω	Bağıl Hatalar	
	$a_{l,j}$	$a'_{l,j}$
10	2.77×10^{-15}	2.73×10^{-15}
100	2.57×10^{-18}	3.39×10^{-17}
1000	2.59×10^{-18}	2.89×10^{-17}
10000	2.48×10^{-18}	3.03×10^{-17}
100000	2.37×10^{-18}	3.14×10^{-17}
1000000	2.41×10^{-18}	3.10×10^{-17}

4 LOGARİTMİK VE CAUCHY-LOGARİTMİK TİPLİ TEKİL VE YÜKSEK SALINIMLI İNTEGRALLER İÇİN HIZLI GAUSS-BAĞLANTILI KUADRATÜR

Bu bölüm, logaritmik ve Cauchy-logaritmik tekilliklere sahip iki yüksek salınımlı integralin verimli hesaplanması için bir yöntem sunmaktadır. Bu yaklaşım ilk önce orijinal salınımlı integrallerin yarı sonsuz aralıklı çizgi integrallerinin toplamına dönüştürülmesini gerektirir. Daha sonra Gautschi logaritmik ve klasik Laguerre ağırlık fonksiyonlarının kullanıldığı momentlere dayalı yöntem kullanılarak ortogonal polinomu sağlayan üç terimli yineleme bağıntısının katsayıları elde edilmiştir. Algoritma, yöntemin beklendiği gibi kısa sürede sabit n değeri ile önemli rakamlara ulaşabileceğini ortaya koymaktadır. Ayrıca, frekans arttıkça yaklaşım daha yüksek doğruluk sağlamaktadır. Teorik analizimizi doğrulamak için sayısal örneklerin sonuçları verilmiştir. Bu bölümde kullanılacak temel araçlar yüksek salınımlı integraller, modifiye Chebyshev algoritması, Cauchy-Goursat integral teoremi, Cauchy tekilliği, Gauss-Laguerre kuadratr kuralı ve Logaritma tekil integraller olarak verilmektedir.

Bu bölümdeki temel ilgimiz, $\alpha, \beta, \gamma \in (-1, \infty)$, $-\infty < a_1 < c_1 < b_1 < +\infty$, $|k| > 1$, $i^2 = -1$, $a_1 < \rho < b_1$ ve $[a_1, b_1]$ aralığından ibaret olan uygun bir karmaşık geniş bir bölgede holomorfik bir fonksiyon $f(x)$ olmak üzere,

$$Q[f] := \int_{a_1}^{b_1} (x-a_1)^\alpha (b_1-x)^\beta |x-c_1|^\gamma \ln(x-a_1) \ln(b_1-x) f(x) e^{ikx} dx, \quad (4.1)$$

ve

$$Q'[f] := \int_{a_1}^{b_1} \frac{(x-a_1)^\alpha (b_1-x)^\beta \ln(x-a_1) \ln(b_1-x) f(x) e^{ikx}}{(x-\rho)} dx, \quad (4.2)$$

formunda iki logaritmik yüksek salınımlı integralinin hesaplanmasıdır. Bölümün geri kalanı aşağıdaki gibi yapılandırılmıştır: Bir sonraki bölümde, Cauchy integral teoremi yaklaşımını kullanarak (4.1) ve (4.2) integrallerini hesaplıyor olacağız. Bölüm (4.2) 'de Gauss-tipi kuadratr kuralını oluşturuyoruz. Bölüm (4.3) teorik analizimizi desteklemek için sayısal örneklere ayrılmıştır. Son olarak, Bölüm (4.4) 'de elde edilen sonuçları veriyor olacağız.

4.1 En dik iniş yöntemi ile (4.1) ve (4.2)'nin hesaplanması

Buradaki odak noktası kompleks düzlemdeki en dik iniş yolu olacak şekilde uygun bir kontur seçmektir. Böylece bir salınımlı çekirdek fonksiyonuna sahip orijinal integraller, $[0, +\infty)$ aralığı üzerinde üstel olarak azalan bir ağırlık fonksiyonu ile salınımlı olmayan integrallerin toplamına dönüştürülebilir. Daha sonra, bu integrallerin her biri uygun bir Gauss integrasyon kuralı ile etkili bir şekilde hesaplanır. Cauchy teoremine (Brown & Churchill, 2003) dayanarak, sabit bir Z_1 noktasından başka bir Z_2 sabit noktasına holomorfik bir $f(z)$ fonksiyonun kontur integralinin değeri her zaman alınan yola bağlı değildir. Örneğin; f ve h sırasıyla salınım yapmayan, tekil olmayan düzgün fonksiyonlar ve $|k| \gg 1$ ise salınımlı bir parametre olmak üzere

$\int_{-1}^1 f(x) e^{ikh(x)} dx$ biçiminde Fourier salınımlı integrali göz önüne alınsın. En dik iniş yöntemini elde etmek için, Fourier integralini salınımsız ve üstel olarak azalan hale getiren h 'ın sabit bir reel kısım ile artan sanal kısma sahip olduğu yolu izliyoruz. Bu yöntemin en yüksek asimptotik mertebeye sahip olduğu iyi bilinmektedir. Bununla birlikte, kullanılmadan önce integrasyon aralığını barındıran kompleks düzlemin yeterince geniş bölgesinde f fonksiyonu yeteri decerede holomorfik olmalıdır ki böylece Cauchy teoremini uygulayabiliriz. En dik iniş yöntemi hakkında daha fazla bilgi için (Huybrechs & Olver, 2012; Huybrechs & Vandewalle, 2006; Wong, 2001) referanslarına bakılabilir.

Teorem 4.1 (Murray R., Seymour, John J., & Dennis, 2009, p. 115). $f(z)$ 'in kapalı bir $\mathcal{R}$ bölgesinde ve bu bölgenin sınırı olan C üzerinde yeterince analitik olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Bu teorem, Cauchy-Goursat teoremi olarak bilinir ve Teorem 4.1.1 ve 4.1.2'yi kanıtlamak için kullanılacaktır.

Burada, $z = |z| e^{i(\theta+2k\pi)}$ olmak üzere $y = \ln z$ olduğunu kabul ediyoruz ve bu fonksiyon kompleks düzlemde $y = \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \dots$ olarak tanımlanabilir. $\ln(z)$ çok değerli bir fonksiyon olduğu için, burada esas dalımızı $\ln|z| + i\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olarak tanımlayarak, tek değerli bir fonksiyon elde ediyoruz.

$$Q[f] = \int_{a_1}^{c_1} \varphi_1[f] dx + \int_{a_1}^{c_1} \varphi_2[f] dx, \quad (4.1.4)$$

biçiminde iki integralin toplamı şeklinde yazılabilir ki burada

$$\varphi_1[f] = (x - a_1)^\alpha (b_1 - x)^\beta (c_1 - x)^\gamma \ln(x - a_1) \ln(b_1 - x) f(x) e^{ikx} dx, \quad (4.1.5)$$

ve

$$\varphi_2[f] = (x - a_1)^\alpha (b_1 - x)^\beta (x - c_1)^\gamma \ln(x - a_1) \ln(b_1 - x) f(x) e^{ikx} dx \quad (4.1.6)$$

olarak alınmaktadır.

P 'nin P_1, P_2, P_3 ve P_4 çeyrek çembersel yollarını içermesini sağlayacak şekilde r küçük bir pozitif sayı olmak üzere sırasıyla $P_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_1| \leq r, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, $P_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c_1| \leq r, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\}$, $P_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c_1| \leq r, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ ve $P_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - b_1| \leq r, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\}$ olarak $P = \{z \in \mathbb{C} \mid a_1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq b_1, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq R\}$ bölgesini tanımlıyoruz. P_1, P_2, P_3 ve P_4 yollarını içeren uygun geniş bir bölgede integrandlar analitik olduğundan, Cauchy-Goursat teoremini uygulayarak

$$\int_{a_1+r}^{c_1-r} \varphi_1(x) dx + \int_{c_1+r}^{b_1-r} \varphi_2(x) dx = - \left(\oint_{\Gamma_1} \varphi_1(z) dz + \sum_{i=3}^6 \oint_{\Gamma_i} \varphi_1(z) dz + \oint_{\Gamma_7} \varphi_2(z) dz + \sum_{j=9}^{12} \oint_{\Gamma_j} \varphi_2(z) dz \right) \quad (4.1.7)$$

integraline sahibiz. (4.1.7) integralindeki yön, Şekil 4.1'de gösterildiği gibi saat yönünün tersidir. $\Gamma_1, \Gamma_5, \Gamma_7$ ve Γ_9 çeyrek çembersel yolları üzerinden alınan integrallerin, her iki $\varphi_1(z)$ ve $\varphi_2(z)$ integrandlarına göre $r \rightarrow 0$ için sıfır olduğunu göstermek oldukça kolaydır. Örneğin, $\Gamma_1 : z = a_1 + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için Γ_1 çeyrek çemberin üzerinden integrali göz önüne alırsak,

$$|F(r, \theta)| = (b_1 - a_1 - re^{i\theta})^\beta (a_1 - c_1 + re^{i\theta})^\gamma \ln(b_1 - a_1 - re^{i\theta}) f(a_1 + re^{i\theta}) e^{ik(a_1 + re^{i\theta})}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\Gamma_1} \varphi_1(z) dz \right| &= \left| - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_1(a_1 + re^{i\theta}) d\theta \right| \\ &\leq r^{1+\alpha} \left(\left| \ln r \right| \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F(r, \theta)| d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\theta| |F(r, \theta)| d\theta \right) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $F(r, \theta)$ fonksiyonunun tüm $t \in [0, r]$ ve $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için sürekli olduğunu görmek kolaydır. Her iki tarafta da $r \rightarrow 0$ için limit alınırsa, $\oint_{\Gamma_1} \varphi_1(z) dz \rightarrow 0$ sonucuna

varılır. Benzer bir teknik uygulanarak $\oint_{\Gamma_3} \varphi_1(z) dz \rightarrow 0$, $\oint_{\Gamma_7} \varphi_2(z) dz \rightarrow 0$ ve $\oint_{\Gamma_9} \varphi_2(z) dz \rightarrow 0$

elde edilebilir. Şimdi de $\Gamma_5 : z = x + iR$, $x \in [a_1, c_1]$ yolunu göz önünde bulundurularak devam edersek, $\phi(x + iR)$ fonksiyonu

$$\phi(x + iR) = (x - a_1 + iR)^\alpha (b_1 - x - iR)^\beta (c_1 - x - iR)^\gamma \ln(x - a_1 + iR) \ln(b_1 - x - iR)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\Gamma_5} \varphi_1(z) dz \right| &= \left| - \int_{a_1}^{c_1} \varphi_1(x + iR) dx \right| \\ &\leq e^{-kR} \int_{a_1}^{c_1} |f(x + iR)| |\phi(x + iR)| dx \\ &\leq MM_1 e^{R(k_0 + k_1 - k)} (c_1 - a_1), \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Yeterince büyük R değerleri için $|\phi(x + iR)| \leq M_1 e^{k_1 R}$ olduğundan, yukarıdaki eşitsizlikte $M_1, k_1 > 0$ 'dır. Bu taktirde $R \rightarrow \infty$ için limit alındığında $k > k_1 + k_0$ olup

$\oint_{\Gamma_5} \varphi_1(z) dz \rightarrow 0$ olduğu sonucuna varılmaktadır. Aynı prosedürü $x \in [c_1, b_1]$ için $\Gamma_{11} : z = x + iR$

yolu üzerinden alınan integral için de uygulayabiliriz ve $R \rightarrow \infty$ iken $\oint_{\Gamma_{11}} \varphi_1(z) dz \rightarrow 0$

sonucuna varılır. Ayrıca, $\Gamma_4 : z = c_1 + ix$, $x \in [r, R]$ üzerinden integral

$$-\oint_{\Gamma_4} \varphi_1(z) dz = \int_r^R (c_1 - a_1 + ix)^\alpha (b_1 - c_1 - ix)^\beta (-ix)^\gamma \ln(c_1 - a_1 + ix) \ln(b_1 - c_1 - ix) f(c_1 + ix) e^{ikc_1 - kx} i dx,$$

(4.1.8)

olarak yazılır. $r \rightarrow 0$ ve $R \rightarrow \infty$ için limit alınır ve $x = t/k$ dönüşümü uygulanırsa, (4.1.8) integrali

$$\oint_{\Gamma_4} \varphi_1(z) dz = \frac{(-i)^{1+\gamma}}{k^{1+\gamma}} e^{ikc_1} \int_0^\infty \left(c_1 - a_1 + \frac{i}{k}t\right)^\alpha \left(b_1 - c_1 - \frac{i}{k}t\right)^\beta t^\gamma \ln\left(c_1 - a_1 + \frac{i}{k}t\right) \ln\left(b_1 - c_1 - \frac{i}{k}t\right) f\left(c_1 + \frac{i}{k}t\right) e^{-t} dt, \quad (4.1.9)$$

haline gelir. Benzer şekilde aynı prosedür uygulandığında Γ_6 üzerinden integral de

$$\oint_{\Gamma_6} \varphi_1(z) dz = \left(\frac{i}{k}\right)^{1+\alpha} e^{ika_1} \int_0^\infty t^\alpha \left(b_1 - a_1 - \frac{i}{k}t\right)^\beta \left(c_1 - a_1 - \frac{i}{k}t\right)^\gamma \ln\left(\frac{i}{k}t\right) \ln\left(b_1 - a_1 - \frac{i}{k}t\right) f\left(a_1 + \frac{i}{k}t\right) e^{-t} dt. \quad (4.1.10)$$

halini alır. Diğer taraftan $\varphi_2(z)$ integrandı için, yukarıda bahsedilen prosedür tekrarlandığında Γ_{12} ve Γ_{10} üzerinden integraller benzer şekilde

$$\oint_{\Gamma_{12}} \varphi_2(z) dz = \left(\frac{i}{k}\right)^{1+\gamma} e^{ikc_1} \int_0^\infty \left(c_1 - a_1 + \frac{i}{k}t\right)^\alpha \left(b_1 - c_1 - \frac{i}{k}t\right)^\beta t^\gamma \ln\left(c_1 - a_1 + \frac{i}{k}t\right) \ln\left(b_1 - c_1 - \frac{i}{k}t\right) f\left(c_1 + \frac{i}{k}t\right) e^{-t} dt \quad (4.1.11)$$

ve

$$\oint_{\Gamma_{10}} \varphi_2(z) dz = \frac{(-i)^{1+\beta}}{k^{1+\beta}} e^{ikb_1} \int_0^\infty t^\beta \left(b_1 - a_1 + \frac{i}{k}t\right)^\alpha \left(b_1 - c_1 + \frac{i}{k}t\right)^\gamma \ln\left(-\frac{i}{k}t\right) \ln\left(b_1 - a_1 + \frac{i}{k}t\right) f\left(b_1 + \frac{i}{k}t\right) e^{-t} dt, \quad (4.1.12)$$

olmaktadır. Yukarıda hesaplanan integrallerin toplamını alıp, bunları (4.1.7)'ye yerleştirirsek ispat tamamlanmış olacaktır.

4.1.2 (4.2) Logaritmik-Cauchy integralinin hesaplanması

(4.2) integralini hesaplamak için kullanılacak teorem aşağıda verilmiştir:

Teorem 4.1.2. f fonksiyonu, z düzleminde $C = \{z \in \mathbb{C} : a_1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq b_1, \operatorname{Im} \in [0, \infty)\}$ özelliğine sahip basit kapalı bir yol üzerinde ve içinde analitik olsun. Eğer $|f(z)| \leq M e^{\lambda_0 |z|}$ olacak şekilde negatif olmayan M ve λ_0 iki sayısı mevcut ise,

$$Q'[f] = Q'_a[f] + Q'_b[f] + i\pi e^{ik\rho} G(\rho), \quad (4.1.2.1)$$

denklemine sahip oluruz. Burada sırasıyla sağ taraftaki integralleri gösterir ifadeler

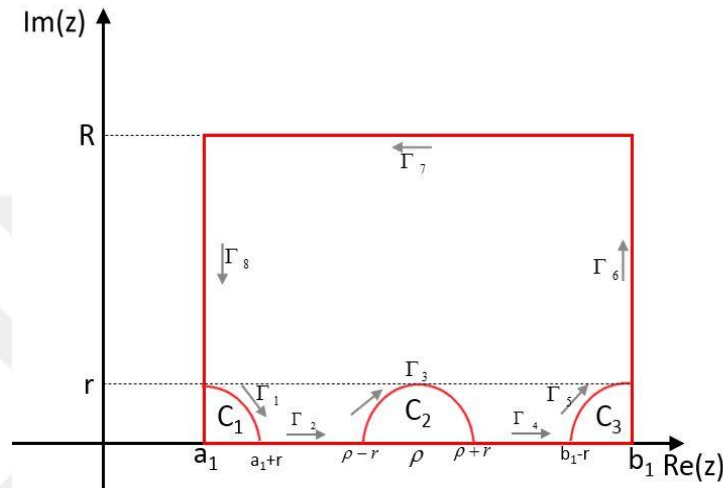
$$Q'_a[f] = \left(\frac{i}{k}\right)^{1+\alpha} e^{ika_1} \int_0^\infty \frac{\left(b_1 - a_1 - \frac{i}{k}t\right)^\beta \ln\left(\frac{i}{k}t\right) \ln\left(b_1 - a_1 - \frac{i}{k}t\right) f\left(a_1 + \frac{i}{k}t\right) t^\alpha e^{-t}}{\left(a_1 - \rho + \frac{i}{k}t\right)} dt, \quad (4.1.2.2)$$

$$Q'_b[f] = \frac{(-i)^{1+\beta}}{k^{1+\beta}} e^{ikb_1} \int_0^\infty \frac{(b_1 - a_1 + \frac{i}{k}t)^\alpha \ln(-\frac{i}{k}t) \ln(b_1 - a_1 + \frac{i}{k}t) f(b_1 + \frac{i}{k}t) t^\beta e^{-t}}{(b_1 - \rho + \frac{i}{k}t)} dt \quad (4.1.2.3)$$

ve

$$G(\rho) = (\rho - a_1)^\alpha (b_1 - \rho)^\beta \ln(\rho - a_1) \ln(b_1 - \rho) f(\rho), \quad (4.1.2.4)$$

olarak alınmıştır.



Şekil 4.2: (4.2) integrali için integrasyon yolu.

İspat: Sırasıyla $C = \{z \in \mathbb{C} \mid a_1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq b_1, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq R\}$, $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_1| \leq r, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$,
 $C_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \rho| \leq r, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, ve $C_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - b_1| \leq r, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\}$ bölgelerini tanımlayalım. C 'nin C_1, C_2 ve C_3 'ü içerecek şekilde R 'nin yeterince büyük olduğunu ve r 'nin de yeterince küçük bir pozitif değer olduğunu kabul edelim. C 'yi içeren uygun genişlikte bir bölgede integrand $\psi(x) = (x - a_1)^\alpha (b_1 - x)^\beta \ln(x - a_1) \ln(b_1 - x) f(x) e^{ikx} / (x - \rho)$ analitik olarak göz önüne alındığından, bu taktirde Cauchy-Goursat teoremi gereğince

$$\int_{a_1+r}^{\rho-r} \psi(x) dx + \int_{\rho+r}^{b_1-r} \psi(x) dx = - \left(\oint_{\Gamma_1} \psi(z) dz + \oint_{\Gamma_3} \psi(z) dz + \sum_{m=3}^8 \oint_{\Gamma_m} \psi(z) dz \right) \quad (4.1.2.5)$$

integraline sahip oluruz. Burada integralin hesaplanmasında dikkat edilecek yön, Şekil 4.2'de gösterildiği gibi saat yönünün tersine olan pozitif yöndür. Önceki alt bölümde uygulanan tekniklerin aynısını kullanarak $r \rightarrow 0$ iken limit alındığında Γ_1 ve Γ_3 çeyrek çembersel yolları

üzerinden integrallerin sıfır olduğunu kolayca gösterebiliriz. $\Gamma_1 : z = a_1 + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ çeyrek çembersel yolu üzerinde integral

$$|H(r, \theta)| = \frac{|b_1 - a_1 - re^{i\theta}|^\beta |\ln(b_1 - a_1 - re^{i\theta})| |f(a_1 + re^{i\theta})|}{|a_1 - \rho + re^{i\theta}|}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\Gamma_1} \psi(z) dz \right| &= \left| - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(a_1 + re^{i\theta}) i r e^{i\theta} d\theta \right|, \\ &\leq r^{1+\alpha} \left(|\ln r| \int_0^{\frac{\pi}{2}} |H(r, \theta)| d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\theta| |H(r, \theta)| d\theta \right), \end{aligned}$$

maksimum değere sahiptir. $H(r, \theta)$ fonksiyonunun $t \in [0, r]$ ve $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ üzerinde sürekli olduğu gösterilebilir. Bu nedenle her iki tarafta da $r \rightarrow 0$ iken limit alındığında $\oint_{\Gamma_1} \psi(z) dz \rightarrow 0$

olduğu görülür. Benzer şekilde $r \rightarrow 0$ iken $\oint_{\Gamma_5} \psi(z) dz \rightarrow 0$ olur. $\Gamma_7 : z = x + iR$, $x \in [a_1, b_1]$ için

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\Gamma_7} \psi(z) dz \right| &= \left| - \int_{a_1}^{b_1} \psi(x + iR) dx \right| \\ &\leq e^{-kR} \int_{a_1}^{b_1} |f(x + iR)| |\psi_1(x + iR)| dx, \\ &\leq MM_{11} e^{-R(k-\Lambda)} (b_1 - a_1), \quad \Lambda = (\lambda_0 - \lambda_1), \end{aligned}$$

elde ediyoruz. Burada integrand

$$\psi_1(x + iR) = \frac{(x - a_1 + iR)^\alpha (b_1 - x - iR)^\beta \ln(x + iR - a_1) \ln(b_1 - x - iR)}{(x - \rho + iR)}$$

olarak tanımlanabilir. Yeterince büyük R değerleri için $|\psi_1(x + iR)| \leq M_{11} e^{\lambda_1 R}$ olduğundan $M_{11}, \lambda_1 > 0$ 'tir. Bu nedenle $R \rightarrow \infty$ için limit alındığında $\oint_{\Gamma_7} \psi(z) dz \rightarrow 0$ olduğu sonucu çıkar.

$\Gamma_8 : z = a_1 + ix$, $x \in [r, R]$ üzerinden integral

$$-\oint_{\Gamma_8} \psi(z) dz = \int_r^R \frac{(b_1 - a_1 - ix)^\beta (ix)^\alpha \ln(ix) \ln(b_1 - a_1 - ix) f(a_1 + ix) e^{ika_1 - kx}}{(a_1 - \rho + ix)} i dx$$

olup $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$, iken limit alındığında ve $x = t/k$, değişken değiştirmesi uygulandığında yukarıdaki integral

$$\oint_{\Gamma_8} \psi(z) dz = \left(\frac{i}{k}\right)^{1+\alpha} e^{ika_1} \int_0^\infty \frac{(b_1 - a_1 - \frac{i}{k}t)^\beta t^\alpha \ln(\frac{i}{k}t) \ln(b_1 - a_1 - \frac{i}{k}t) f(a_1 + \frac{i}{k}t) e^{-t}}{(a_1 - \rho + \frac{i}{k}t)} dx \quad (4.1.2.6)$$

haline gelmektedir. Aynı şekilde Γ_6 üzerinden integral

$$\oint_{\Gamma_6} \psi(z) dz = \frac{(-i)^{1+\beta}}{k^{1+\beta}} e^{ikb_1} \int_0^\infty \frac{(b_1 - a_1 + \frac{i}{k}t)^\alpha t^\beta \ln(-\frac{i}{k}t) \ln(b_1 - a_1 + \frac{i}{k}t) f(b_1 + \frac{i}{k}t) e^{-t}}{(b_1 - \rho + \frac{i}{k}t)} dx. \quad (4.1.2.7)$$

ifadesine eşittir. Γ_3 üzerinden integral hesaplaması

$$\oint_{\Gamma_3} \psi(z) dz = \int_0^\pi \frac{(\rho - a_1 + re^{i\theta})^\alpha (b_1 - \rho - re^{i\theta})^\beta t^\alpha \ln(\rho - a_1 + re^{i\theta}) \ln(b_1 - \rho - re^{i\theta}) f(\rho + re^{i\theta}) e^{ik\rho} e^{ikre^{i\theta}}}{(re^{i\theta})} ire^{i\theta} d\theta,$$

olur ki bu son eşitlikte $r \rightarrow 0$ için limit alınır, integral

$$\oint_{\Gamma_3} \psi(z) dz = i\pi e^{ik\rho} (\rho - a_1)^\alpha (b_1 - \rho)^\beta \ln(\rho - a_1) \ln(b_1 - \rho) f(\rho). \quad (4.1.2.8)$$

eşitliğine indirgenir. Yukarıda hesaplanan integralleri (4.1.2.5)'e yerleştirirsek Teorem 4.1.2'nin ispatı tamamlanmış olur.

4.2 Gauss tipli kuadratr kuralı ile (4.1.1) ve (4.1.2.1)'in hesaplaması

Gauss ile ilgili kuadratr kuralın yapısına başlamadan önce $Q[f]$ için aşağıdaki gösterimleri tanımlayalım:

$$P_{a\gamma} = \frac{(-i)^{\gamma+1} e^{ikc_1}}{k^{\gamma+1}}, P_{a\alpha} = \left(\frac{i}{k}\right)^{\alpha+1} e^{ika_1},$$

$$P_{b\beta} = \frac{(-i)^{\beta+1} e^{ikb_1}}{k^{\beta+1}}, P_{b\gamma} = \left(\frac{i}{k}\right)^{\gamma+1} e^{ikc_1},$$

ve

$$\begin{aligned}
F_{a\gamma}(t) &= F_{b\gamma}(t) = \left(c_1 - a_1 + \frac{i}{k}t\right)^\alpha \left(b_1 - c_1 - \frac{i}{k}t\right)^\beta \ln\left(c_1 - a_1 + \frac{i}{k}t\right) \ln\left(b_1 - c_1 - \frac{i}{k}t\right) f\left(c_1 + \frac{i}{k}t\right), \\
F_{a\alpha}(t) &= \left(b_1 - a_1 - \frac{i}{k}t\right)^\beta \left(c_1 - a_1 - \frac{i}{k}t\right)^\gamma \ln\left(\frac{i}{k}t\right) \ln\left(b_1 - a_1 - \frac{i}{k}t\right) f\left(a_1 + \frac{i}{k}t\right), \\
F_{b\beta}(t) &= \left(b_1 - a_1 + \frac{i}{k}t\right)^\alpha \left(b_1 - c_1 + \frac{i}{k}t\right)^\gamma \ln\left(b_1 - a_1 + \frac{i}{k}t\right) \ln\left(-\frac{i}{k}t\right) f\left(b_1 + \frac{i}{k}t\right).
\end{aligned}$$

Ayrıca $Q'[f]$ için de aşağıdaki gibi gösterimleri tanımlayalım:

$$P'_{a\alpha} = \left(\frac{i}{k}\right)^{1+\alpha} e^{ika_1}, P'_{a\beta} = \frac{(-i)^{1+\beta}}{k^{1+\beta}} e^{ikb_1},$$

ve

$$\begin{aligned}
F'_{a\alpha}(t) &= \frac{\left(b_1 - a_1 - \frac{i}{k}t\right)^\beta \ln\left(\frac{i}{k}t\right) \ln\left(b_1 - a_1 - \frac{i}{k}t\right) f\left(a_1 + \frac{i}{k}t\right)}{\left(a_1 - \rho + \frac{i}{k}t\right)}, \\
F'_{b\beta}(t) &= \frac{\left(b_1 - a_1 + \frac{i}{k}t\right)^\alpha \ln\left(-\frac{i}{k}t\right) \ln\left(b_1 - a_1 + \frac{i}{k}t\right) f\left(b_1 + \frac{i}{k}t\right)}{\left(b_1 - \rho + \frac{i}{k}t\right)}.
\end{aligned}$$

Böylelikle $Q[f]$ ve $Q'[f]$ integralleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
Q[f] &= (P_{a\gamma} + P_{b\gamma}) \int_0^\infty F_{a\gamma}(t) t^\gamma e^{-t} dt \\
&\quad + P_{a\alpha} \int_0^\infty \ln\left(\frac{i}{k}t\right) F_{a\alpha}(t) t^\alpha e^{-t} dt + P_{b\beta} \int_0^\infty \ln\left(-\frac{i}{k}t\right) F_{b\beta}(t) t^\beta e^{-t} dt,
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

ve

$$Q'[f] = P'_{a\alpha} \int_0^\infty \ln\left(\frac{i}{k}t\right) F'_{a\alpha}(t) t^\alpha e^{-t} dt + P'_{b\beta} \int_0^\infty \ln\left(-\frac{i}{k}t\right) F'_{b\beta}(t) t^\beta e^{-t} dt. \tag{4.2.2}$$

olarak basit formda yazılabilir. (4.2.1) ve (4.2.2) denklemlerinde, doğrudan hesaplanamayan logaritmik $\ln\left(\frac{i}{k}t\right)$ ve $\ln\left(-\frac{i}{k}t\right)$ çarpanları ile karşılaşılır. Aslında burada hesabı kolaylaştırmak adına bazı değişiklikler yapmak faydalı olacaktır. Gautschi'nin makalesindeki (Gautschi, 2010) fikrin aynısı kullanılarak, bu çarpanları

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{i}{k}t\right) &= \left(\ln\left(\frac{i}{k}\right) - 1\right) + t - (t - 1 - \ln t), \\
\ln\left(-\frac{i}{k}t\right) &= \left(\ln\left(-\frac{i}{k}\right) - 1\right) + t - (t - 1 - \ln t).
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

biçiminde yazabiliriz. Burada logaritmik fonksiyonun esas dalı $\ln|z| + i\theta$, $\theta \in [-\pi, \pi]$ olarak tanımlandığından $\ln i = i\pi/2$ ve $\ln(-i) = -i\pi/2$ olarak alınır. Ayrıca, (4.2.3) ifadelerini (4.2.1) ve (4.2.2) 'ye yerleştirerek, Genelleştirilmiş Gauss-Laguerre ve Logaritmik Gautschi ağırlık fonksiyonlarının $[0, \infty)$ yarı sonsuz aralıkta ortaya çıktığını gözlemliyoruz. Bu ağırlık fonksiyonları aşağıdaki Tablo 4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1: Genelleştirilmiş Gauss-Laguerre ve Logaritmik Gauss-Laguerre ağırlık fonksiyonları.

$Q[f]$ için ağırlık fonksiyonları	$Q'[f]$ için ağırlık fonksiyonları
$\omega^{(\gamma)}(t) = t^\gamma e^{-t}$	$\omega'^{(\alpha)}(t) = t^\alpha e^{-t}, \omega'^{(\alpha+1)}(t) = t^{\alpha+1} e^{-t}$
$\omega^{(\alpha)}(t) = t^\alpha e^{-t}, \omega^{(\alpha+1)}(t) = t^{\alpha+1} e^{-t}$	$\omega'^{(\beta)}(t) = t^\beta e^{-t}, \omega'^{(\beta+1)}(t) = t^{\beta+1} e^{-t}$
$\omega^{(\alpha,L)}(t) = t^\alpha (t-1-\ln t) e^{-t}$	$\omega'^{(\alpha,L)}(t) = t^\alpha (t-1-\ln t) e^{-t}$
$\omega^{(\beta)}(t) = t^\beta e^{-t}, \omega^{(\beta+1)}(t) = t^{\beta+1} e^{-t}$	$\omega'^{(\beta,L)}(t) = t^\beta (t-1-\ln t) e^{-t}.$
$\omega^{(\beta,L)}(t) = t^\beta (t-1-\ln t) e^{-t},$	

Tablo 4.1'de, $\omega^{(y)}(t; y) = t^y e^{-t}$, $(y = \{\alpha, \beta, \lambda\} > -1)$, $[0, \infty)$ üzerinden sıralı Gauss-Laguerre ağırlık fonksiyonlarını temsil ederken, $y = \{\alpha, \beta\} > -1$ için $\omega^{(y,L)}(t; y) = t^y e^{-t} (t-1-\ln t)$ $[0, \infty)$ üzerinden Logaritmik Gauss-Laguerre ağırlık fonksiyonlarını temsil eder. (4.2.1) ve (4.2.2) integralleri, yani $Q[f]$ ve $Q'[f]$ ile ilgilenmek için, n-noktalı Gauss-Laguerre ve Logaritmik Gauss-Gautschi-Laguerre kareleme kuralı için alınacak ve Tablo 4.1'de belirtilen ağırlık fonksiyonları ile ilişkili düğümler ile ağırlıklar

$$\begin{aligned}
& \left\{ t_j^{(\alpha)}, \omega_j^{(\alpha)} \right\}_{j=0}^n, \left\{ t_j^{(\alpha+1)}, \omega_j^{(\alpha+1)} \right\}_{j=0}^n, \left\{ t_j^{(\beta)}, \omega_j^{(\beta)} \right\}_{j=0}^n, \left\{ t_j^{(\beta+1)}, \omega_j^{(\beta+1)} \right\}_{j=0}^n, \left\{ t_j^{(\alpha,L)}, \omega_j^{(\alpha,L)} \right\}_{j=0}^n, \\
& \left\{ t_j^{(\beta,L)}, \omega_j^{(\beta,L)} \right\}_{j=0}^n, \left\{ t_j^{(\gamma)}, \omega_j^{(\gamma)} \right\}_{j=0}^n, \left\{ t_j^{(\alpha')}, \omega_j^{(\alpha')} \right\}_{j=0}^n, \left\{ t_j^{(\alpha'+1)}, \omega_j^{(\alpha'+1)} \right\}_{j=0}^n, \left\{ t_j^{(\beta')}, \omega_j^{(\beta')} \right\}_{j=0}^n, \\
& \left\{ t_j^{(\beta'+1)}, \omega_j^{(\beta'+1)} \right\}_{j=0}^n, \left\{ t_j^{(\alpha',L)}, \omega_j^{(\alpha',L)} \right\}_{j=0}^n, \left\{ t_j^{(\beta',L)}, \omega_j^{(\beta',L)} \right\}_{j=0}^n
\end{aligned}$$

olarak alınsın. Bu taktirde ilgili kuadratür kuralı şu şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned}
Q_n(f) = & (P_{a\gamma} + P_{b\gamma}) \sum_{j=1}^n \omega_j^{(\gamma)} F_{a\gamma}(t_j^{(\gamma)}) + P_{a\alpha} \left(\ln\left(\frac{i}{k}\right) - 1 \right) \sum_{j=1}^n \omega_j^{(\alpha)} F_{a\alpha}(t_j^{(\alpha)}) \\
& + P_{a\alpha} \sum_{j=1}^n \omega_j^{(\alpha+1)} F_{a\gamma}(t_j^{(\alpha+1)}) - P_{a\alpha} \sum_{j=1}^n \omega_j^{(\alpha,L)} F_{a\alpha}(t_j^{(\alpha,L)}) \\
& + P_{b\beta} \left(\ln\left(-\frac{i}{k}\right) - 1 \right) \sum_{j=1}^n \omega_j^{(\beta)} F_{b\beta}(t_j^{(\beta)}) + P_{b\beta} \sum_{j=1}^n \omega_j^{(\beta+1)} F_{b\beta}(t_j^{(\beta+1)}) \\
& - P_{b\beta} \sum_{j=1}^n \omega_j^{(\beta,L)} F_{b\beta}(t_j^{(\beta,L)}) + R_n(f),
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

ve

$$\begin{aligned}
Q'_n(f) = & P'_{a\alpha} \left(\ln\left(\frac{i}{k}\right) - 1 \right) \sum_{j=1}^n \omega_j^{(\alpha')} F'_{a\alpha}(t_j^{(\alpha')}) + P'_{a\alpha} \sum_{j=1}^n \omega_j^{(\alpha'+1)} F'_{a\alpha}(t_j^{(\alpha'+1)}) \\
& - P'_{a\alpha} \sum_{j=1}^n \omega_j^{(\alpha',L)} F'_{a\alpha}(t_j^{(\alpha',L)}) + P'_{b\beta} \left(\ln\left(-\frac{i}{k}\right) - 1 \right) \sum_{j=1}^n \omega_j^{(\beta')} F'_{b\beta}(t_j^{(\beta')}) \\
& + P'_{b\beta} \sum_{j=1}^n \omega_j^{(\beta'+1)} F'_{b\beta}(t_j^{(\beta'+1)}) - P'_{b\beta} \sum_{j=1}^n \omega_j^{(\beta',L)} F'_{b\beta}(t_j^{(\beta',L)}) + R'_n(f).
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Burada $s \in \{\alpha, \alpha+1, (\alpha, L), \beta, \beta+1, (\beta, L)\}$ olmak üzere düğümler ve ağırlık katsayıları sırasıyla $t_j^{(s)}, t_j^{(s')}, \omega_j^{(s)}$ ve $\omega_j^{(s')}$ olup, $R_n(f)$ ve $R'_n(f)$ ise geri kalan terimlerdir. Düğümlerin ve ağırlıkların hesaplanması $O(n)$ işlem gerektirir. Ortogonal polinomu sağlayan üç terimli tekrarlama bağıntısının katsayılarını otomatik olarak sentezlemek için yinelemeli bir rutin gereklidir. Katsayılar bulunur bulunmaz Gauss ile ilgili kuadratür kuralını hesaplamak için gereken düğümlerin ve ağırlıkların oluşturulması basit bir konu haline gelir. Burada kullanılan yöntem moment bilgisine dayanmaktadır. α_j 's ve β_j 's Hankel determinantları cinsinden ifade edildiği zaman, $j = 0, 1, \dots, 2n-1$ için α_j ve β_j 'in ilk n yineleme katsayılarının ilk $2n$ $\mu_j = \int_{\mathbb{R}} x^j \omega(x) dx$, $j = 0, 1, \dots, 2n-1$ momentleri kullanarak hesaplanabileceği bilinmektedir.

Ancak sorun, n büyüdükçe formüllerin yeterince hassas bir aritmetik kullanmadığı sürece küçük hatalara karşı giderek daha duyarlı hale gelmeleridir. L_j 'nin uygun bir ortogonal polinom ve $\omega(x)$ 'in ilgili ağırlık fonksiyonu olduğu modifiye momentler $\mu'_j = \int_{\mathbb{R}} L_j(x) \omega(x) dx$ kullanabilir. Ayrıca, $\{L_j\}$ sisteminin $a_j \in \mathbb{R}, b_j \in [0, \infty)$ $L_{j+1}(x) = (x - a_j)L_j(x) - b_j L_{j-1}(x)$, $j = 0, 1, 2, \dots$ $L_{-1}(x) = 0$, ve $L_1(x) = 1$. için olan üç terimli yinelenme bağıntısını karşılayan monik polinomlar olduğu varsayılır. Modifiye Chebyshev algoritması sayesinde; $j = 0, \dots, n-1$ kuvvetle arzu ettiğimiz α_j ve β_j katsayılarını oluşturmak için $2n$ modifiye momentleri ve $2n-1$ katsayılarını $\{a_j, b_j\}_{j=0}^{2n-2}$ kullanırız. Bunlar hakkında daha fazla bilgi için (Gautschi, 1994, 2010; Kang & Shao, 2014), (Milovanović, 2016), (Gautschi, 2004), (Ball & Beebe, 2007), ve buna ilişkin referanslar). Örneğin, Mathematica'da yazılı kodumuzu kullanarak n 'ye göre katsayıları aşağıdaki Tablo 4.2'de oluşturabiliriz (bkz. Tablo 4.2).

Tablo 4.2: $\alpha = -1/3$ için $\{\alpha_j^L, \beta_j^L\}_{j=0}^{19}$ 'a karşılık gelen $t^\alpha (t-1-\ln t)e^{-t}$, katsayıları.

α_j^L	β_j^L
0.3282232033870394702397168779117	1.3336722243104331449652162860904
1 4.404386121558189960174431747687	0.8905661521095855005999888603733
6.3369409985709358561593418422596	4.1934809664409756299382143848246
7.9147000456646886807497104059692	10.728785900737118129223842271470
9.4815301637982340867612122961804	20.358548856965440521848239959106
11.419117236722946519453314050619	31.450306535473915443473277154105
13.662986947802840737258279074536	42.367689418790004694990345318018
15.920344447453057560025678655784	54.138048334635851292042553822809
18.065244502149855194084511099559	68.244116148560029233359355282652
20.097436273731068949544738368983	85.201374688617603342064794802549
22.040892884492520285615404742878	105.05147394300533229908865862817
23.919602376845412254634626095628	127.74364486363676883024370530040
25.765290019341897833392760928051	153.12784297632498369167493521658
27.622621136916356100542400185517	180.81549299738996266144787759538

29.537232557909390843745487375061	210.16256881805548455563740360704
31.532430310234819749288429900524	240.53345465456284249725120181158
33.597505940887025202082881432439	271.68177179003502731818170808334
35.699522968152798960459413913583	303.86979357171182018232678943145
37.804452446193068468068213169086	337.63639864971234188545541414845
39.889637660521501251770658437854	373.49268662572500341375380148701

$t_j, j=1, \dots, n$ düğümleri, köşegen elemanları sırasıyla $\{\alpha_j\}_{j=0}^{n-1}$ ve alt köşegen elemanları $\{\sqrt{\beta_j}\}_{j=1}^{n-1}$, olarak bilinen (Jacobi matrisi) simetrik tridiagonal matrisin (Stoer & Bulirsch, 2002)

J_n (derece $J_n = n$) özdeğerleridir. Francis (Francis, 1961, 1962) için QR yöntemi, bu tridiagonal sistemin özdeğerlerini hesaplamak için kullanılabilecek en iyi yöntemdir. Yöntem, simetrik matrisler için çok hızlı yakınsamaktadır. Ayrıca, özdeğerler istendiğinde QR yöntemi, yaygın olarak kullanılan Jacobi yöntemi kadar hızlı ve yalnızca özvektörler istendiğinde dört kat daha hızlıdır. Sonuç olarak, $\{\omega_j\}_{j=1}^n$ ağırlıkları belirlemek için t_j özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerin hesaplaması gerekmektedir. n . dereceden Jacobi matris J_n 'den özdeğerlerin ve özvektörlerin hesaplanması yalnızca $O(n^2)$ işlem gerektirir. Golub ve Welsch (Golub & Welsch, 1969) tarafından gösterildiği gibi, kuadratür kuralının ağırlıklarını elde etmek için ortonormal özvektörün yalnızca ilk bileşeninin hesaplanması gerekir. Bu nedenle, ağırlıklar $\omega_j = \beta_0 (v_{j,1})^2, j=1, \dots, n$ ile verilir, burada $v_{j,1}$, özdeğer t_j 'ye karşılık gelen normalleştirilmiş özvektördür. Tanım olarak, $\beta_0 = \mu_0 = \int_a^b \omega(x) dx$ alınarak β_0 hesaplanır. Örneğin; $\omega^{(\alpha,L)}(t) = t^\alpha e^{-t} (t-1-\ln t)$, ağırlık fonksiyonundan momentler aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

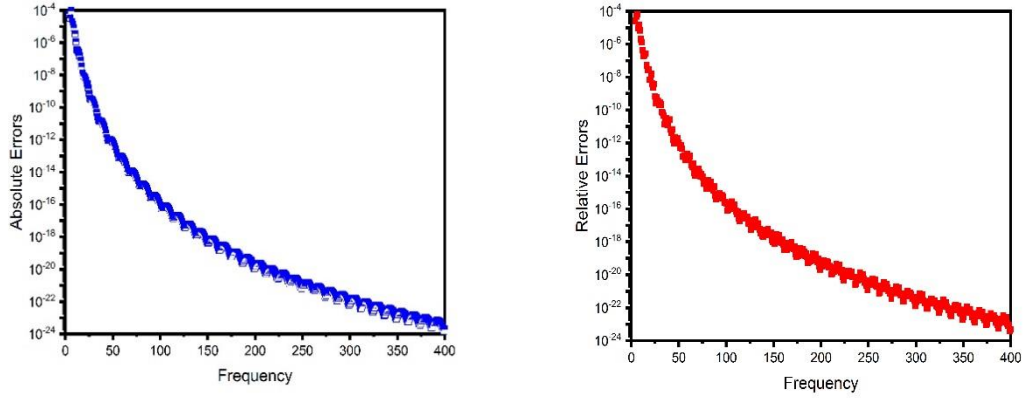
$$\mu_j' = \int_0^\infty \omega^{(\alpha,L)}(t) L_j^{(\alpha)}(t) dt = \begin{cases} \Gamma(\alpha+1) [\alpha - \psi(\alpha+1)], & \text{if } j=0 \\ \alpha \Gamma(\alpha+1), & \text{if } j=1 \\ (-1)^j (j-1)! \Gamma(\alpha+1), & \text{if } j \geq 2, \end{cases}$$

Burada $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, Gama fonksiyonu ve $\psi(z)$ Gama fonksiyonunun logaritmik türevidir ve Digama fonksiyonu olarak ifade edilir (M. Abramowitz & Stegun, 1964). Bu nedenle β_0 katsayısı $\beta_0 = \alpha \Gamma(\alpha+1) - \Gamma(\alpha+1) \psi(\alpha+1)$ formülünden elde edilebilir. Aşağıda

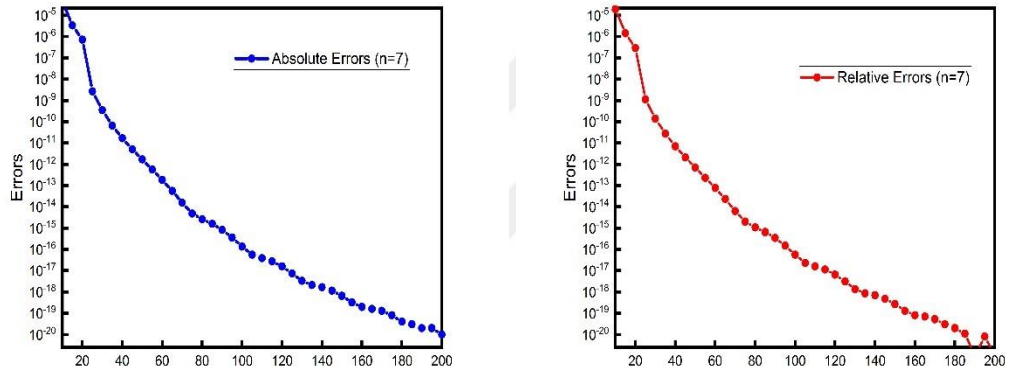
Tablo 4.3'de, modifiye moment hesaplaması kullanılarak hesaplanan ağırlıklar ve düğümler vardır.

Tablo 4.3: $\alpha = -1/3$ için $t^\alpha (t-1-\ln t)e^{-t}$ 'ye karşılık gelen $\{t_j^{(\alpha,L)}, \omega_j^{(\alpha,L)}\}_{j=1}^5$ düğümleri ve ağırlıkları.

$t_j^{(\alpha,L)}$	$\omega_j^{(\alpha,L)}$
67.93963594267935766997961030	6.224360928186609205601519377086(-28)
57.15094440780755560592992731	1.886280604566439583756355678723(-23)
48.89460968483635256156220150	5.223097658581187685116601164566(-20)
42.04630261826085223164992324	3.718675209356950849847019230129(-17)
36.16740245588001570407922164	1.026760221335300592327828885700(-14)
31.02823419005839297214481496	1.365299326666403237328741951965(-12)
26.48937408189283896547839196	9.970439195588979051179587855841(-11)
22.45821190397329131361386966	4.360037193146528262466657369685(-9)
18.86940576289382140591135459	1.2120260102192305666515467768698(-7)
15.67483776034688719517106791	2.2341153709841590083848779671681(-6)
12.83794326714411773662712471	0.000028122992240249695010227975072
10.33027164292312767066339559	0.000246395270523458132348939943717
8.129269483295962949028963352	0.0015158471736645016018392518191716
6.216751536587737928880513751	0.006524426571070577040419849213185
4.577698877616484858599511850	0.019182005612911568710608557810549
3.198873408057748057634649918	0.03596046928646156494125650923242
2.064748930856801378861844523	0.03455336791902275815458872830213
0.724808983788826627034127503	0.02857540554154565443186024115516
0.219377737500702461106059145	0.3090707891436608391940613700242
0.021395565932772670094637142	0.898013035020242777710857817



Şekil 4.3: $\int_{-1}^1 \frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{3}} \left|x - \frac{1}{2}\right|^{-\frac{1}{3}} \ln(x+1) \ln(1-x) e^{ikx}}{1 + e^{-(x+7/2)}} dx$ integralinin yakınsama oranı.



Şekil 4.4: $\int_0^1 \frac{x^{-0.19} (1-x)^{-0.81} \ln x \ln(1-x) e^{ikx}}{(1+x^2)(x-0.5)} dx$ Cauchy integralinin yakınsama oranı.

4.3 Sayısal Örnekler

Burada, önerilen algoritmanın etkinliğini göstermek amacıyla seçilmiş sayısal örnekler sergilenmektedir. Tam çözüm olarak kabul edilen değerler Mathematica 9.0 kullanılarak 30 basamaklı hassasiyetle elde edilir. Örnekler işletim sistemi Windows 8, 4GB RAM ve 2.4 GHz CPU saat hızına sahip kişisel bir bilgisayarda gerçekleştirildi. Bazı örneklerde, analizimizi desteklemek için saniye cinsinden hesaplama süresi de verilmiştir.

Örnek 4.1.

$$Q[f] = \int_{-1}^1 \frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{3}} \left|x - \frac{1}{2}\right|^{-\frac{1}{3}} \ln(x+1) \ln(1-x) e^{ikx}}{1 + e^{-(x+7/2)}} dx, \quad (4.3.1)$$

integralini, n sabit değeri için önerilen yöntem ile hesaplayalım.

Tablo 4.4, $k=10^l, l=2,3,...,6$ frekansı ile önerilen yöntem kullanılarak hesaplanan sonuçları (hatalar ve hesaplama süresi) göstermektedir. Elde edilen tam değer, bu integrallerin verimli bir şekilde hesaplanması için 30'a eşit çalışma hassasiyetine sahip Mathematica'nın "NIntegrate" komutu kullanılarak hesaplanmıştır. Aynı zamanda tam değer ile yaklaşık değer arasındaki farkın büyüklüğünü mutlak hata olarak hesap eden ve kullanan algoritmamız, kişisel bilgisayarımızda $|hata| \leq 10^{-16}$ elde etmeyi başardı. Ayrıca Tablo 4.4. ve Şekil 4.3'de, n sabit kalırken frekans arttıkça (4.1) tipinden integralde uygulanan önerilen algoritmanın sıfır saniye içinde önemli ondalık basamakları elde edebildiği görülmektedir.

Tablo 4.4: $n = 6$ ile (4.3.1) integrali için mutlak hatalar ve saniye cinsinden işlem süresi.

k	$E_n(Q)$	CPU
10^2	2.88×10^{-16}	0.125
10^3	0.11×10^{-28}	0.093
10^4	0.01×10^{-28}	0.093
10^5	0.01×10^{-29}	0.093
10^6	0.03×10^{-29}	0.093

Örnek 4.2.

$$Q[f] = \int_{-1}^1 \frac{(x+1)^{-1/2} (1-x)^{-1/3} \ln(x+1) \ln(1-x) e^{ikx}}{(1+e^{-(x+7/2)})(x-0.68)} dx, \quad (4.3.2)$$

integralini inceleyeceğiz. Farklı k değerlere sahip önerilen algoritma ile Tablo 4.5, sırasıyla $n=7, \rho=0.68$ sabit ve $k=10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ ile yukarıdaki Cauchy Esas Değer integrali (CPV) için elde edilen mutlak hataları ve saniye cinsinden hesaplama süresini göstermektedir. Yaklaşık değer, Mathematica'da 30 haneli hassasiyetle yazılmış bir program kullanılarak hesaplanmıştır. Ayrıca, önerilen algoritmanın, yüksek salınımlı çekirdeğe sahip CPV integrallerinin hesaplanması için orta ve çok yüksek frekans değerleri için daha doğru sonuçlar verdiği kolayca görülebilir.

Tablo 4.5: $n = 7$ için (4.3.2) integrali için hatalar ve saniye cinsinden hesaplama süresi

k	$E_n(Q')$	hesaplama süresi
10^2	1.54×10^{-15}	0.078
10^3	0.12×10^{-18}	0.078
10^4	0.01×10^{-19}	0.078
10^5	4.08×10^{-20}	0.078
10^6	5.58×10^{-18}	0.078

Örnek 4.3.

$$Q[f] = \int_1^{10} \frac{(x-1)^{-1/2} (10-x)^{-1/4} |x-5|^{-2/5} \ln(x-1) \ln(10-x) 100 \ln(x+1) e^{ikx}}{1+x} dx, \quad (4.3.3)$$

integralini önerilen yöntem ile hesaplayalım. Örnek 4.1, 4.3, 4.5 ve 4.6'da ele alınan (4.1) tipinden integralin hesaplanması, integralin mutlak değer içeren çekirdek fonksiyonunu içerdiğinden, öncelikle (4.1) integrallerinin iki farklı integralin toplamı şeklinde yazılması gerekmektedir. Daha sonra ilgili kuadratur kuralı (4.2.4) 'te verilmiştir. Kural (4.2.4) için düğümleri ve ağırlıkları başarılı bir şekilde hesapladıktan sonra, (4.1) tipi integralleri verimli bir biçimde hesaplamak yazılan orijinal algoritmalarla kolay olmaktadır. Mutlak hatalar ve elde edilen hesaplama süresi Tablo 4.6'da sergilenmektedir. Dahası, algoritmamızı WorkingPrecision-> 200, PrecisionGoal-> 100, MaxRecursion-> 100 ile kullanarak ve örneğin, $k=10^4$ gibi bir frekansla ve $n=20$ olarak düğümleri alarak Örnek 4.3'deki integrali Mathematica sürüm 9.0 programı ile hesapladığımızda, "Timing" komutu, algoritmamızın 1.98475 saniyede 121 tam ondalık basamağa ulaştığını göstermektedir. Buna karşılık, Mathematica 'nın NIntegrate komutunu kullanarak hesaplanan aynı integral aynı bilgisayarda kullanılan Mathematica Programında 470.695 saniyede sonuç vermektedir. Bu, logaritmik yüksek salınımlı Fourier tipi dahili hesaplamalar için sunulan algoritmanın doğruluğunu kanıtlar.

Tablo 4.6: $n = 4$ ile (4.3.3) integrali için mutlak hatalar ve saniye cinsinden işlem süresi

k	$E_n(Q)$	Hesaplama süresi
10^2	3.22×10^{-15}	0.046
10^3	1.52×10^{-23}	0.017
10^4	0.01×10^{-27}	0.283
10^5	0.01×10^{-27}	0.140
10^6	0.01×10^{-28}	0.156

Örnek 4.4.

$$Q'[f] = \int_{-1}^1 \frac{(x+1)^{-1/4} (1-x)^{-1/5} \ln(x+1) \ln(1-x) \tan x e^{ikx}}{x-0.8} dx, \quad (4.3.4)$$

integralinin hesaplanması sabit n değeri alınarak önerilen yöntem ile gerçekleştirilmektedir. Mutlak hatalar ve saniye cinsinden hesaplama süresi Tablo 4.7'de gösterilmiştir.

Tablo 4.7: $n = 5$ ile (4.3.4) integrali için mutlak hatalar ve saniye cinsinden işlem süresi

k	$E_n(Q')$	Hesaplama süresi
10^2	1.61×10^{-10}	0.062
10^3	5.02×10^{-17}	0.046
10^4	1.43×10^{-18}	0.213
10^5	1.46×10^{-19}	0.171
10^6	1.80×10^{-20}	0.203

Ayrıca, hataları hesaplarken, (4.2) tipinden integralin tam değerini Mathematica'daki NIntegrate komutunun Method->PrincipalValue opsiyonu ile birlikte kullanılması ile elde ettik, çünkü Örnek 4.2, 4.4 ve 4.7'de göz önüne alınan (4.2) tipinden integralin aralıktaki bir noktada sınırsız olmasından dolayı diğer yöntemler başarısız olabilir. Ayrıca burada, tüm tekilliklerin integrasyon aralık bölümlerinde belirtilmesi veya "Exclusions" seçeneğinin kullanılması gerektiğini hatırlatmakta fayda vardır.

Örnek 4.5. $\gamma = 0$ olduğu (4.1) integral tipinden

$$Q[f] = \int_{-1}^{1/2} (1+x)^{99/100} \left(\frac{1}{2}-x\right)^{1/300} \ln(1+x) \ln\left(\frac{1}{2}-x\right) \cos x e^{ikx} dx, \quad (4.3.5)$$

integralinin farklı k ve sabit n değerleri için önerilen algoritma ile hesaplamasını göz önüne alacağız.

Tablo 4.8: Sabit $n = 3$ değeri ile (4.3.5) integrali için hatalar ve saniye cinsinden hesaplama süresi.

k	$E_n(Q)$	Hesaplama süresi
10^2	4.01×10^{-15}	0.031
10^3	5.92×10^{-22}	0.109
10^4	9.65×10^{-29}	0.125
10^5	1.98×10^{-29}	0.109
10^6	2.92×10^{-30}	0.109

Tablo 4.8'deki sonuçlardan, bu tezde sunulan algoritmanın özellikle çok yüksek frekanslı değerler için verimli ve çok hızlı olduğu anlaşılmaktadır. Hesaplama süresi hatalarını önlemek için, her frekansı ClearSystemCache[] seçeneğini veya Quit Kernel ve ardından Local (Yerel) seçeneğini kullanarak bağımsız olarak hesapladık. Çünkü Mathematica programı ilk kez çalıştırıldığında çekirdekte bazı verileri tutmakta olduğundan ikinci bir hesaplamanın zamanını düşürebilmektedir. Hatalar ve hesaplama süresi Tablo 4.8'de gösterilmiştir.

Örnek 4.6. Bu örnekte

$$Q[f] = \int_0^1 \frac{x^{-0.8} (1-x)^{-0.4} \left|x - \frac{1}{3}\right|^{-0.6} \ln x \ln(1-x) e^{ikx}}{(5+100(x+1)^2)} dx, \quad (4.3.6)$$

integralinin farklı k ve sabit n değerleri için önerilen algoritma ile hesaplayacağız. Mutlak hatalar ve CPU zamanı Tablo 4.9'da gösterilmektedir. Tablo 4.9'daki sonuçlar ayrıca, beklendiği gibi küçük düğüm sayısı $n=4$ kabul edildiğinde bile önerilen algoritmanın yakınsamasının çok hızlı olduğunu göstermektedir. Bu örneğimizi precision=100, $n=12$ düğüm sayısı ve $k=1000$ frekans değeri ile hesapladık ve 47 basamak hassaslığa sahip bir yaklaşık değeri elde ettik.

Tablo 4.9: Sabit $n = 4$ değeri ile (4.3.6) integrali için hatalar ve saniye cinsinden hesaplama süresi

k	$E_n(Q)$	Hesaplama süresi
10^2	3.43×10^{-13}	0.078
10^3	3.38×10^{-21}	0.078
10^4	9.35×10^{-26}	0.062
10^5	7.18×10^{-26}	0.062
10^6	2.56×10^{-26}	0.125

Örnek 4.7.

$$Q'[f] = \int_0^1 \frac{x^{-0.19} (1-x)^{-0.81} \ln x \ln(1-x) e^{ikx}}{(1+x^2)(x-0.5)} dx, \quad (4.3.7)$$

integralini farklı k ve sabit n değerleri için önerilen algoritma ile hesapladık. Farklı n değerleri ve k değerleri için mutlak hatalar Tablo 4.10'de gösterilmiştir. Ayrıca Tablo 4.10'daki sonuçlar incelendiğinde, n arttıkça yakınsamanın da iyileştiğini görmek mümkündür. Aynı sonucu, düşük frekanslar için Şekil 4.4'ten de çıkarabiliriz.

Burada n düğüm noktası sayısı N değeri ile aynı anlama gelmektedir.

Tablo 4.10: Farklı n ve k değerleri ile (4.3.7) integrali için elde edilen mutlak hatalar

k	N		
	2	3	4
10^2	9.2×10^{-7}	2.5×10^{-9}	1.3×10^{-11}
10^3	8.0×10^{-11}	3.9×10^{-14}	4.0×10^{-14}
10^4	7.0×10^{-15}	2.0×10^{-21}	0.1×10^{-22}
10^5	5.6×10^{-19}	0.1×10^{-22}	0.2×10^{-22}

5 YÜKSEK SALINIMA SAHİP ÇEKİRDEKLİ CEBİRSEL VE LOGARİTMİK HİPERSİNGÜLER TİP TEKİL İNTEGRALLERİN ÇÖZÜMÜNE HIZLI BİR YAKLAŞIM

Hipersingüler integral denklemler; plastiklik, uçuş araçlarının aerodinamiği, esneklik ve bir uçağın arkasındaki girdap uyanmalarının modellenmesi gibi birçok mühendislik mekaniği probleminde ortaya çıkar. Bu bölümde, zayıf, güçlü ve hipersingüler tipte tekillikleri olan yüksek salınımlı integraller incelenmektedir. Burada kullanılan yöntem, integrandları uygun şekilde karmaşık bir geniş bölgede holomorfik kabul edilen Cauchy Goursat integral teoremine dayanmaktadır.

Özel olarak, hipersingüler tip tekilliğe sahip yüksek salınımlı integraller incelenmiştir. Asıl integrali pozitif yarı sonsuz bir aralıkta çizgi integrallerinin toplamına dönüştürdükten sonra, Gauss ile ilgili kuadratur kuralı oluşturulur. Kullanılan araç, anın bilgisidir. Gautschi logaritmik ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal polinomu karşılayan yineleme katsayılarını üretmek için iki algoritmanın (Chebyshev ve onun modifiye hali) karşılaştırılması incelenmiştir. Son olarak, önerilen yöntemin etkinliğini kanıtlamak için numerik örnekler verilmiştir.

f integrasyon aralığını içeren uygun şekilde geniş bir bölgede holomorfik bir fonksiyon ve $\alpha, \beta > -1$, $s \in \{0,1\}$, $|\omega| \gg 1$, $a < \mu < b$, $-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere,

$$I^{[s]}[f; \mu] = \int_a^b \frac{(x-a)^\alpha (b-x)^\beta [\ln(x-a)\ln(b-x)]^s f(x) e^{i\omega x}}{(x-\mu)^k} dx, \quad (5.1)$$

biçiminde hipersingüler integralini hesaplayacak verimli bir algoritma ortaya koymak bu bölümün temel amacı olacaktır. s değerine bağlı olarak $[a, b]$ aralığında, cebirsel-logaritmik ağırlık fonksiyonu $\omega^{(\alpha, \beta, s)}(x) = (x-a)^\alpha (b-x)^\beta [\ln(x-a)\ln(b-x)]^s$ olmak üzere, (5.1) denklemi

$$I^{[s]}[f; \mu] = \int_a^b \frac{\omega^{(\alpha, \beta, s)}(x) f(x) e^{i\omega x}}{(x-\mu)^k} dx, \quad (5.2)$$

olarak yazılabilir. Burada $\int_a^b \frac{\omega^{(\alpha,\beta,s)}(x)}{(x-\mu)} dx$ integrali yerine Erdogan ve arkadaşları (Erdogan, Gupta, & Cook, 1973) tarafından hesaplanan değer yazılırsa, bu integral

$$\int_a^b \frac{\omega^{(\alpha,\beta,s)}(x) f(x)}{(x-\mu)^k} dx = \int_a^b \omega^{(\alpha,\beta,s)}(x) \frac{f(x) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{f^{(m)}(\mu)(x-\mu)^m}{m!}}{(x-\mu)^k} dx \quad (5.3)$$

$$+ \sum_{m=0}^{k-1} \frac{f^{(m)}(\mu)}{m!} \int_a^b \frac{\omega^{(\alpha,\beta,s)}(x)}{(x-\mu)^{k-m}} dx,$$

toplama dönüşürülebilir. (5.1) integrali, Cauchy Esas Değeri (CPV)'nin k . türevi cinsinden basitçe yeniden yazılırsa,

$$I^{[s]}[f; \mu] = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\mu^{k-1}} \int_a^b \frac{\omega^{(\alpha,\beta,s)}(x) f(x) e^{i\omega x}}{x-\mu} dx \quad (5.4)$$

elde edilir.

Bir sonraki bölümde, önerilen yöntemi kullanarak (5.1) integrali hesaplanmıştır. Bölüm 5.2'de, Gauss bağlantılı kuadratür kuralının yapısı verilmiştir. Bölüm 5.3, önerilen algoritmaların verimliliğini doğrulamak için sayısal örnekler içermektedir. Son olarak Bölüm 5.4'te sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

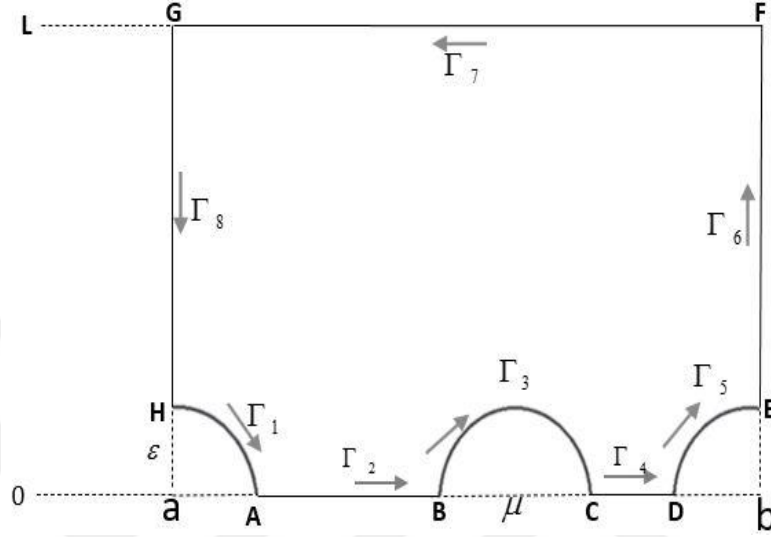
5.1 (5.1) integralinin hesaplanması için bir yöntem

Bu bölümde, (5.1) integrali için karmaşık düzlemde kontur integrasyonuna dayalı bir yöntem sunulmuştur. $k=0, s=0$ için, en dik noktaya yönlendirilmiş optimizasyon algoritmasının veya Clenshaw-Curtis yöntemlerinin uygulanması basittir (Kang & Shao, 2014; Kayijuka et al., 2018). Fakat $k \geq 0$ ve $s=1$ için bazı integrandlar, doğrudan hesaplanamayan çok değerli fonksiyonlar içereceği için bazı değişikliklere ihtiyaç duyulacaktır.

$n=0, \pm 1, \dots$ için, z 'yi $z = |z| e^{i(\theta+2n\pi)}$ olarak alalım. Tek değerli bir fonksiyon elde etmek için esas dal $\ln z + i\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olarak tanımlanmıştır. $\ln z$ 'nin asıl değerinin $n=0$ olduğunda elde edilen değer olduğunu hatırlayalım. Örneğin, $n=0$ için $\ln(\pm i) = \ln 1 + \left(2n \pm \frac{1}{2}\right)\pi i$ ifadesinin $\pm \frac{\pi}{2}i$ 'ye eşittir.

$\Gamma = \bigcup_{j=1}^8 \Gamma_j$ ile sınırlanan bölgeleri aşağıdaki gibi tek tek tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 : \varphi_1(x) &= a + \varepsilon e^{ix}, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, & \Gamma_2 : \varphi_2(x) &= x, a + \varepsilon \leq x \leq \mu - \varepsilon, \\
\Gamma_3 : \varphi_3(x) &= \mu + \varepsilon e^{ix}, 0 \leq x \leq \pi, & \Gamma_4 : \varphi_4(x) &= x, \mu + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon, \\
\Gamma_5 : \varphi_5(x) &= b + \varepsilon e^{ix}, \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, & \Gamma_6 : \varphi_6(x) &= b + ix, \varepsilon \leq x \leq L, \\
\Gamma_7 : \varphi_7(x) &= x + iL, a \leq x \leq b, & \Gamma_8 : \varphi_8(x) &= a + ix, \varepsilon \leq x \leq L.
\end{aligned} \tag{5.1.1}$$



Şekil 5.1. (5.1) Hipersingüler integrali için integrasyon yolu.

Teorem 5.1.1. $f(z)$, bir $\Re$ bölgesinde ve Γ sınırında analitik fonksiyon olsun, bu takdirde

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Bu bölümde yukarıda verilen Cauchy-Goursat teoremi aşağıdaki teoremi kanıtlamak için kullanılacaktır.

Teorem 5.1.2. f karmaşık bir düzlemde basit bağlantılı bir bölgenin içinde ve sınırında, kısaca şekil 5.1 de gösterilen $\Re$ bölgesinde, analitik olsun. Yeterince büyük L değerleri için,

$\omega_0 \in [0, \omega)$ olmak üzere, $\int_{\Delta} |f(x + iL)| dx \leq M e^{\omega_0 L}$ eşitsizliğini sağlayan M ve ω_0 gibi negatif

olmayan iki sabitin mevcut olduğunu farz edelim. Bu takdirde,

$$I_a[f; \mu] = \left(\frac{i}{\omega}\right)^{1+\alpha} e^{ika} \int_0^\infty \frac{(b - a - \frac{i}{\omega} y)^\beta \ln(\frac{i}{\omega} y) \ln(b - a - \frac{i}{\omega} y) f(a + \frac{i}{\omega} y) y^\alpha e^{-y}}{(a - \mu + \frac{i}{\mu} y)^k} dy,$$

ve

$$I_b[f] = \frac{(-i)^{1+\beta}}{\omega^{1+\beta}} e^{ikb} \int_0^\infty \frac{(b - a + \frac{i}{\omega} y)^\alpha \ln(-\frac{i}{\omega} y) \ln(b - a + \frac{i}{\omega} y) f(b + \frac{i}{\omega} y) y^\beta e^{-y}}{(b - \mu + \frac{i}{\omega} y)^k} dy.$$

olmak üzere, (5.1) hipersingüler salınımlı integrali

$$I^{[s]}[f; \mu] = I_a[f; \mu] + I_b[f; \mu] + \frac{i\pi}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\mu^{k-1}} \left(\omega^{(\alpha, \beta, s)}(\mu) e^{i\omega\mu} f(\mu) \right), \quad (5.1.2)$$

formunda yazılabilir.

İspat: $\phi(z)$ integrandını,

$$\phi(z) = \frac{\omega^{(\alpha, \beta, s)}(z) f(z) e^{i\omega z}}{(z - \mu)^k}, \quad k = 1, 2, \dots, \text{ ile gösterelim.}$$

$\Re$, (5.1.1)'de tanımlandığı gibi Γ ile sınırlı, $D = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq L\}$ tanım aralığında bir bölge olsun. $\phi(z)$ analitik olduğundan, Cauchy-Goursat integral teoremini kullanarak,

$$\int_{AB} \phi(x) dx + \int_{CD} \phi(x) dx = - \left(\int_{HA} + \int_{BC} + \int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FG} + \int_{GH} \right) \phi(z) dz, \quad (5.1.3)$$

elde edilir. Şekil 5.1'de gösterildiği gibi yön pozitif anlamda (saat yönünün tersi) alınmaktadır. Epsilon sıfıra giderken HA ve DE çeyrek çemberler üzerindeki integralin sıfıra yaklaştığı kolaylıkla gösterilebilir. Daha açık bir şekilde, $\Gamma_1 : z = a + \varepsilon e^{ix}, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ve

$$G(\varepsilon, x) = \frac{(b - a - \varepsilon e^{ix})^\beta \ln(b - a - \varepsilon e^{ix}) f(a + \varepsilon e^{ix}) e^{i\omega(a + \varepsilon e^{ix})}}{(a - \mu + \varepsilon e^{ix})^k}$$

iken, Γ_1 üzerinden integralin maksimum değeri

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_1} \phi(z) dz \right| &= \left| - \int_0^{\frac{\pi}{2}} i \varepsilon^{1+\alpha} \frac{e^{ix(1+\alpha)} (b - a - \varepsilon e^{ix})^\beta \ln(\varepsilon e^{ix}) \ln(b - a - \varepsilon e^{ix}) f(a + \varepsilon e^{ix}) e^{i\omega(a + \varepsilon e^{ix})}}{(a - \mu + \varepsilon e^{ix})^k} dx \right| \\ &\leq \varepsilon^{1+\alpha} |\ln \varepsilon| \int_0^{\frac{\pi}{2}} |G(\varepsilon, x)| dx + \varepsilon^{1+\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x| |G(\varepsilon, x)| dx, \end{aligned}$$

ile ifade edilebilir.

$G(t, \theta)$ fonksiyonunun $t \in [0, \varepsilon]$ ve $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ de sürekli olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Böylece, her iki taraftaki limiti değeri de $\varepsilon \rightarrow 0$ için $\left| \int_{\Gamma_1} \phi(z) dz \right| \rightarrow 0$ 'dır. Aynı teknik $\varepsilon \rightarrow 0$ için

$\left| \int_{\Gamma_5} \phi(z) dz \right| \rightarrow 0$ 'ı elde etmek için de uygulanabilir. Üstelik, $\Gamma_7 : z = iL + x, x \in [a, b]$ ve

$$\psi(x + iL) = \frac{(x - a + iL)^\alpha (b - x - iL)^\beta \ln(x - a + iL) \ln(b - x - iL)}{(x - \mu + iL)^k}$$

alındığında,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_7} \phi(z) dz \right| &= \left| -e^{-\omega L} \int_a^b \frac{(x-a+iL)^\alpha (b-x-iL)^\beta \ln(x-a+iL) \ln(b-x-iL) f(x+iL) e^{i\omega x}}{(x-\mu+iL)^k} dx \right| \\ &\leq e^{-\omega L} \int_a^b |\psi(x+iL)| |f(x+iL)| dx \\ &\leq MM_1 e^{-L(\omega-\omega_0-\omega_1)} (b-a) \end{aligned}$$

olup $L \rightarrow \infty$ için

$$\left| \int_{\Gamma_7} \phi(z) dz \right| \rightarrow 0$$

elde edilir.

$\omega > \omega_0 + \omega_1$ olacak şekilde herhangi negatif olmayan M_1, ω_1 sabitleri ve yeterince büyük L değeri için $|\psi(x+iL)| \leq M_1 e^{\omega_1 L}$ seçilebilir.

Ayrıca, $\Gamma_6 : z = b + ix$, $x \in [\varepsilon, L]$ için $\omega x = y$ değişken değişimi yapılırsa, Γ_6 üzerinden integral

$$\int_{\Gamma_6} \phi(z) dz = \frac{(-i)^{1+\beta}}{\omega^{1+\beta}} e^{i\omega b} \int_{\varepsilon}^L \frac{(b-a+\frac{i}{\omega}y)^\alpha \ln(-\frac{i}{\omega}y) \ln(b-a+\frac{i}{\omega}y) f(b+\frac{i}{\omega}y) y^\beta e^{-y}}{(b-\mu+\frac{i}{\omega}y)^k} dy,$$

benzer şekilde Γ_8 üzerinden integral

$$\int_{\Gamma_8} \phi(z) dz = \left(\frac{i}{k}\right)^{1+\alpha} e^{i\omega a} \int_{\varepsilon}^L \frac{(b-a-\frac{i}{\omega}y)^\beta \ln(\frac{i}{\omega}y) \ln(b-a-\frac{i}{\omega}y) f(a+\frac{i}{\omega}y) y^\alpha e^{-y}}{(a-\mu+\frac{i}{\omega}y)^k} dy$$

olarak bulunabilir.

$0 \leq x \leq \pi$ için $\Gamma_3 : z = \mu + \varepsilon e^{ix}$ üzerinden integral (5.4) denklemi uygulanarak,

$$\int_{\Gamma_3} \phi(z) dz = \frac{i\pi}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\mu^{k-1}} \int_{\Gamma_3} \frac{\omega^{(\alpha,\beta,s)}(z) e^{i\omega z} f(z)}{z-\mu} dz$$

şeklinde yazılır. $\varepsilon \rightarrow 0$ için sağ taraftaki integral kısmı

$$\int_0^\pi \frac{(\mu-a+\varepsilon e^{ix})^\alpha (b-\mu-\varepsilon e^{ix})^\beta \ln(\mu-a+\varepsilon e^{ix}) \ln(b-\mu-\varepsilon e^{ix}) f(\mu+\varepsilon e^{ix}) e^{i\omega\mu} e^{i\omega\varepsilon e^{ix}} i\varepsilon}{\varepsilon e^{ix}} e^{ix} dx$$

olur. Γ_3 üzerinden integral böylece

$$\int_{\Gamma_3} \phi(z) dz = \frac{i\pi}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\mu^{k-1}} \left(\omega^{(\alpha,\beta,s)}(\mu) e^{i\omega\mu} f(\mu) \right)$$

halini alır.

$\varepsilon \rightarrow 0$ ve $L \rightarrow \infty$ için, limiti yukarıdaki sonuçlara göre almak ve hepsini (5.1.3) 'te yerlerine yazmak ispatı tamamlar.

5.2 Gauss kuadratür kuralı ile (5.1.2)'nin hesaplanması

1814'te bulunan Gauss kuadratür, 19. yüzyılın kilometre taşı keşiflerinden birisiydi. Pozitif bir $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonu ile düzgün bir $f(x)$ fonksiyonuna sahip $\int_a^b f(x)\omega(x)dx$ integralinin, ortogonal polinomların uygunluğuna bağlı olmak koşuluyla, Gauss kuralı kullanılarak hesaplanabileceği bilinmektedir. Fourier salınım integralleri için, sayısal en dik iniş yönteminin, yüksek asimptotik mertebeli en iyi yaklaşımı elde etmek için daha iyi bir yaklaşım verebileceği başarılı bir şekilde kanıtlanmıştır. Örneğin yarı uzayda bir $\int_a^b f(x)e^{i\omega x}dx$ Fourier integrali, Gauss-Laguerre kuralı uygulanarak verimli bir şekilde hesaplanabilir ve kuralın asimptotik mertebesi $O(\omega^{-2N-1})$ 'dir (Huybrechs & Vandewalle, 2006). Bu bölümde, (5.1.2) integralin verimli bir şekilde hesaplanması için bir Gauss kuralı oluşturuyoruz. Bu bölümde uygulanan teknik, Ball J.S.'nin makalesine (Ball & Beebe, 2007) ardından Walter Gautschi (Gautschi, 2010)'nin makalesindeki son gelişmelere dayanmaktadır. Basitleştirmek için (5.1.2)'yi yeniden yazarsak

$$G_1 = \left(\frac{i}{\omega}\right)^{1+\alpha} e^{i\omega a}, \quad F_1(y) = \frac{(b-a-\frac{i}{\omega}y)^\beta \ln(b-a-\frac{i}{\omega}y) f(a+\frac{i}{\omega}y)}{(a-\mu+\frac{i}{\omega}y)^k}, \quad G_2 = \frac{(-i)^{1+\beta}}{\omega^{1+\beta}} e^{i\omega b},$$

$$F_2(y) = \frac{(b-a+\frac{i}{\omega}y)^\alpha \ln(b-a+\frac{i}{\omega}y) f(b+\frac{i}{\omega}y)}{(b-\mu+\frac{i}{\omega}y)^k},$$

ve

$$H(\mu) = \frac{i\pi}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\mu^{k-1}} \left(\omega^{(\alpha,\beta,s)}(\mu) e^{i\omega\mu} f(\mu) \right), \quad \text{for } k=1,2,\dots$$

olmak üzere,

$$I[f;\mu] = G_1 \int_0^\infty F_1(y) \ln\left(\frac{i}{\omega}y\right) y^\alpha e^{-y} dy + G_2 \int_0^\infty F_2(y) \ln\left(-\frac{i}{\omega}y\right) y^\beta e^{-y} dy + H(\mu) \quad (5.2.1)$$

ile ifade edilebilir. Gautschi analizinden yola çıkarak, (5.2.1)'de görülen çok değerli kompleks logaritmik fonksiyonu

$$\ln\left(\frac{i}{\omega}y\right) = \ln\left(\frac{i}{\omega}\right) + \ln(y) = \left(\frac{\pi}{2}i - \ln \omega - 1 + y\right) - (y - 1 - \ln y) \quad (5.2.2)$$

ve

$$\ln\left(-\frac{i}{\omega}y\right) = \ln\left(-\frac{i}{\omega}\right) + \ln y = \left(-\frac{\pi}{2}i - \ln \omega - 1 + y\right) - (y - 1 - \ln y) \quad (5.2.3)$$

olarak dönüştürebiliriz. Yukarıdaki denklemler (5.2.2) ve (5.2.3)'ün (5.2.1)'de yerine konmasıyla, (5.2.1) 'in yeni formu

$$F_{11}(y) = \left(\frac{\pi}{2}i - \ln \omega - 1 + y\right) F_2(y)$$

ve

$$F_{22}(y) = \left(-\frac{\pi}{2}i - \ln \omega - 1 + y\right) F_2(y)$$

olmak şartıyla,

$$\begin{aligned} I[f; \mu] = & G_1 \int_0^\infty F_{11}(y) y^\alpha e^{-y} dy - G_2 \int_0^\infty F_1(y) (y - 1 - \ln y) y^\alpha e^{-y} dy \\ & + G_2 \int_0^\infty F_{22}(y) y^\beta e^{-y} dy - G_2 \int_0^\infty F_2(y) (y - 1 - \ln y) y^\beta e^{-y} dy + H(\mu) \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

şeklinde elde edilebilir. Ayrıca, (5.2.4) analiz edildiğinde negatif olmayan ağırlık fonksiyonları

$$\begin{aligned} \omega^{(\alpha)}(y) &= y^\alpha e^{-y}, \quad \omega^{(\alpha, LG)}(y) = y^\alpha e^{-y} (y - 1 - \ln y), \\ \omega^{(\beta)}(y) &= y^\beta e^{-y}, \quad \omega^{(\beta, LG)}(y) = y^\beta e^{-y} (y - 1 - \ln y). \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

olarak bulunur. Buradaki $\omega^{(\alpha, LG)}$ ve $\omega^{(\beta, LG)}$ pozitif bir yarı sonsuz aralığında logaritmik Gautschi-Laguerre ağırlık fonksiyonları olarak alınır iken, $m = \alpha, \beta > -1$ için $y \rightarrow \omega(y; m) = y^m e^{-y}$ geleneksel Genelleştirilmiş Gauss-Laguerre ağırlık fonksiyonları olduğu bilinmektedir.

Logaritmik Gautschi-Laguerre ile geleneksel Genelleştirilmiş Gauss-Laguerre ağırlık fonksiyonları birleştirilerek, (5.2.4) integrali için Gauss bağlantılı kuadratur kuralı

$$\begin{aligned} I_n[f; \mu] = & G_1 \sum_{p=1}^n \omega_p^{(\alpha)} F_{11}\left(y_p^{(\alpha)}\right) - G_1 \sum_{p=1}^n \omega_p^{(\alpha, LG)} F_1\left(y_p^{(\alpha, LG)}\right) \\ & + G_2 \sum_{p=1}^n \omega_p^{(\beta)} F_{22}\left(y_p^{(\beta)}\right) - G_2 \sum_{p=1}^n \omega_n^{(\beta, LG)} F_2\left(y_p^{(\beta, LG)}\right) + H(\mu). \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

olarak formüle edilebilir. Yukarıdaki (5.2.6) toplamında, $m \in \{\alpha, \beta\}$ olmak üzere sırasıyla $y_p^{(m)}$, $y_p^{(m, LG)}$ düğümler ve $\omega_p^{(m)}, \omega_p^{(m, LG)}$ ağırlıklardır.

Hesaplama için geriye kalan, I_n yaklaşımının hesaplanmasıdır ($m \in \{\alpha, \beta\}$) için, $y_p^{(m)}, y_p^{(m, LG)}$ apsisler ve $\omega_p^{(m)}, \omega_p^{(m, LG)}$ ağırlıklardır). Ancak, bundan önce, öncelikle α_i, β_i rekürans katsayılarının bilgisine ihtiyaç olacaktır. Bunun için, derecesi en fazla n olan reel polinomlarının uzayı $\mathcal{P}$ olsun. $\omega(y) > 0$ olmak üzere negatif olmayan ağırlık fonksiyonunun $\omega: (a, b) \rightarrow [0, \infty)$ olduğunu ve $\mu_r = \int_a^b y^r \omega(y) dy$, $\mu_0 > 0$ haliyle tüm momentlerin var ve sonlu olduğunu varsayalım. İç çarpım

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u(y) v(y) \omega(y) dy \quad (5.2.7)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $(u, v) = 0$ ise, u ile v ortogonaldir. Eğer $u = v$ ise u 'nin normu

$$\|u\| = \left(\int_a^b u^2(y) \omega(y) dy \right)^{1/2} \quad (5.2.8)$$

olarak elde edilir.

(5.2.7) 'ye göre monik ortogonal polinomlar $\pi_i(\cdot) = \pi_i(\cdot, \omega(y))$, $n = 0, 1$ ile gösterilir ve

$$\alpha_i = \frac{(y\pi_i, \pi_i)}{(\pi_i, \pi_i)}, i = 0, 1, 2, \dots,$$

ve

$$\beta_i = \frac{(y\pi_i, \pi_i)}{(\pi_i, \pi_i)}, i = 1, 2, \dots$$

için üç terimli tekrarlama bağıntısı olan

$$\begin{aligned} \pi_{i+1}(y) &= (y - \alpha_i) \pi_i(y) - \beta_i \pi_{i-1}(y), i = 0, 1, \dots \\ \pi_0(y) &= 1, \pi_{-1}(y) = 0, \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

bağıntısını sağlar.

β_0 keyfi bir sabit olabilir fakat tanıma uygunluk açısından $\beta_0 = \mu_0 = \int_{\mathbb{R}} \omega(y) dy$ olarak tanımlanabilir. Yukarıdaki katsayıların otomatik olarak hesaplanması, (5.2.6) sayısal kuadratur

kuralının oluşturulmasında önemli bir rol oynar. Dahası, ortogonal polinomların köklerinin, J_n (Jacobi) matrisinin karakteristik değerleri (özdeğerleri) olarak hızlı bir şekilde hesaplanmasını kolaylaştıracaktır. Var olan çeşitli algoritmalar arasında Golub ve Welsch'inki (Golub & Welsch, 1969) en popüler olanıdır. Bu algoritma, köşegen elemanları $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n-1}$ ve alt köşegen elemanları $\{\sqrt{\beta_i}\}_{i=1}^{n-1}$ olan n . mertebeden J matrisinin özdeğerlerinin ve onlara karşılık gelen özvektörlerinin hesaplanmasına dayanır (Stoer & Bulirsch, 2002).

$$J = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ 0 & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ayrıca, Golub ve Welsch, bir kuadratur kuralının ağırlıklarının, normalleştirilmiş $v_{p,1}$ özvektörün yalnızca ilk bileşenini belirleyerek elde edildiğini ve algoritmanın yalnızca $O(n^2)$ işlemle çözülebileceğini göstermiştir. $p=1,2,...,n$ için y_p noktaları, J 'nin özdeğerleri ve $\beta_0 = \mu_0$ olmak üzere $p=1,2,...,n$ için $\omega_p = \lambda_{n,p} = \beta_0 v_{p,1}^2$ değerleri ağırlıklar olarak hesaplanır. Burada

$$J(\omega)v_p = y_p v_p, \quad v_p^T v_p = 1,$$

olup $v_{p,1}$, y_p özdeğeri ile ilişkili normalleştirilmiş $v_p = [v_{p,1}, v_{p,2}, \dots, v_{p,n}]^T$ özvektörünün ilk bileşenidir. Ayrıca J matrisinin özdeğerlerinin belirlenmesinde Francis (Francis, 1961) tarafından önerilen QR yöntemi, simetrik matrisler için çok hızlı yakınsadığı için mevcut en iyi yöntem olarak kabul edilir.

n tane yineleme katsayısını oluşturmak için birkaç yöntem vardır. Daha önce de belirtildiği gibi, moment değerlerinin temel alındığı yöntem kullanılacaktır.

$i=0,1,...,n-1$ için ilk $2n$ tane α_i ve β_i yineleme katsayılarının, $r=0,1,...,2n-1$ için ilk $2n$ tane $\mu_r = \int_a^b y^r \omega(y) dy$ momenti ile hesaplanabileceği bilinmektedir. Sonuç olarak, (5.2.5) 'teki ağırlık fonksiyonlarıyla ilişkili momentler, tam olarak verimli bir şekilde

$$\begin{aligned}\mu_r^{(\alpha)} &= \int_0^\infty y^{\alpha+r} e^{-y} dy = \Gamma(\alpha+r+1), \\ \mu_r^{(\alpha,L)} &= \int_0^\infty y^{\alpha+r} e^{-y} (y-1-\ln y) dy = \Gamma(\alpha+r+1) [\alpha+r-\psi(\alpha+r+1)],\end{aligned}\tag{5.2.10}$$

olarak hesaplanabilir. Burada Gama fonksiyonu $\Gamma(z) = \int_0^\infty y^{z-1} e^{-y} dy$ olmak üzere $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ Digama fonksiyonu (M. Abramowitz & Stegun, 1964), Gama fonksiyonunun logaritmik türevidir ve Mathematica programında PolyGamma[z] komutu ile çalıştırılır. Bu momentlerde Hankel determinantları cinsinden katsayıları ifade etmek gibi n tane yineleme katsayılarını elde etmek için çeşitli formüller vardır. Ancak, formülün küçük hatalara karşı duyarlılığı, genişletilmiş bir hassasiyet kullanılmadığında n 'nin artması ile artan koşul sayısı nedeniyle artar (Gautschi, 1994). Burada $m = \alpha, \beta > -1$, için verilen $\omega(y; m) = y^m e^{-y}$ ve $\omega(y; m) = (y-1-\ln y) y^m e^{-y}$ ağırlık fonksiyonlarına göre ortogonal polinomlara üç terimli rekürans bağıntısını sağlayan yinelemeli katsayılar oluşturmak için (5.2.10)'da elde edilen momentler yeterlidir.

5.2.1 Algoritma 1: Sıradan momentleri kullanarak $\{\alpha_i^{LG}, \beta_i^{LG}\}_{i=0}^{n-1}$ katsayılarının hesaplanması.

Giriş değerleri: $n; \alpha; \text{prec}$ (*hassasiyet*); dig (*çalışma hassasiyeti*);

Çıktılar:

- 1: $r = 0, 1, \dots$; için (5.2.10)' de verilen $\mu_r^{(\alpha,L)}$ değeri hesaplanır.
- 2: $\alpha_0 = \mu_1^{(\alpha,L)} / \mu_0^{(\alpha,L)}$ değeri hesapla.
- 3: $\beta_0 = \mu_0^{(\alpha,L)}$ değeri hesapla.
- 4: $d = 1, 2, \dots, 2n-2$ için $\lambda_{-1,d} = 0$; al.
- 5: $d = 0, 1, \dots, 2n-1$ için $\lambda_{0,d} = \mu_d^{(\alpha,L)}$; al.
- 6: $i = 1, 2, \dots, n$ için $\lambda_{i,d} = \lambda_{i-1,d+1} - \alpha_{i-1} \lambda_{i-1,d} - \beta_{i-1} \lambda_{i-2,d}$, $d = i, i+1, \dots, 2n-i-1$; al.
- 7: $\alpha_i = \lambda_{i,i+1} / \lambda_{i,i} - \lambda_{i-1,i} / \lambda_{i-1,i-1}$; değeri hesapla.
- 8: $\beta_i = \lambda_{i,i} / \lambda_{i-1,i-1}$; değeri hesapla.

9: $i = 0, 1, \dots, n-1$ için $\alpha_i; \beta_i$ yazdır.

Yukarıdaki algoritmayı kullanarak, n 'ye göre üç terimli yineleme ilişkisinin katsayıları kolayca oluşturulabilir. Dahası, yukarıdaki algoritma Mathematica'da uygulandı, ancak istenirse MATLAB, Maple veya diğer herhangi bir matematiksel yazılımda kolaylıkla uygulanabilir.

Tablo 5.1: $\alpha = -1/4$, için $w^{(\alpha, LG)}(y) = y^\alpha e^{-y} (y - 1 - \ln y)$, ağırlık fonksiyonuna karşılık gelen $\{\alpha_i^{LG}, \beta_i^{LG}\}_{i=0}^{19}$ katsayılarının (5.2.1) de verilen algoritma ile bulunması (CPU zamanı 0.046 saniye, prec=75).

α_i^{LG}	β_i^{LG}
0.450907165240387079622192374497081	0.0242778830275809860335715955718
4.4026356977629687472295132612258	1.2587291457146847219809737953640
6.4462609107426586575051423712921	4.3437841029461997884958893605676
8.0993469536298673147110463146371	10.727459601510999531760131065961
9.6565521442501219312044582407037	20.266321990048429475466086706460
11.487385620636749776309299477905	31.808060947238646026307463203268
13.660865631852677441998498517609	43.433947558394725076095085656902
15.923546713504372605163548843941	55.456655209891862267583643063180
18.103197479766207329491573123388	69.425911108055039576435436564038
20.172145438709609898281127079405	86.132945475939104712802024368667
22.148685896189116656533807126260	105.72362050316907059519290527165
24.054429060576049496535522934793	128.17144559395119262200846729860
25.914735451923003844755927791835	153.38231588056735603882297667714
27.766370023209773725154094863369	181.08839565056932241218160342789
29.653839520173234572797220416703	210.76020051420847765662219483336
31.611041488306141256678225392806	241.73544242002001940758278665338
33.643287136739521170488824944571	273.56324721288088412317365478475
35.727941644647078986185056326634	306.26613556716851068264135929582
37.831615791341943207951968682347	340.26728160198717393755379558027
39.926708408112839443343673423099	376.10353277096982518010586310321

Diğer bir alternatif ise, (3.11) 'teki y^r kuvvetli momentleri hesaplamak yerine, onu i . dereceden uygun bir ortogonal polinom ile değiştirdiğimiz modifiye momentleri kullanmaktır. $P_i = i$ dereceden $\{P_i(y)\}_{i=0}^{\infty}$ polinom dizini verildiğinde, ω ağırlık fonksiyonunun $\hat{\mu}_i$ modifiye momentleri

$$\hat{\mu}_i = \int_a^b P_i(y) \omega(y) dy, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ile tanımlanır. Bu durumda, $\hat{L}_i^m(y)$ monik genelleştirilmiş Laguerre polinomları olsun (Gatteschi, 1980) ve $\{\hat{L}_i^m\}$ 'nin (5.2.9) 'a benzer

$$\begin{aligned} \hat{L}_{i+1}^m(y) &= (y - a_i) \hat{L}_i^m(y) - b_i \hat{L}_{i-1}^m(y), \quad i = 0, 1, \dots \\ \hat{L}_0^m(y) &= 1, \hat{L}_{-1}^m(y) = 0. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

üç terimli rekürans bağıntısını sağlayan monik polinomlar olduğunu varsayalım. Yukarıdaki rekürans bağıntısında $a_i \in \mathbb{R}, b_i \geq 0$ katsayıları aşağıdaki şekilde belirlenebilir.

$$\begin{aligned} (i+1) L_{i+1}^m(y) &= (2i + m + 1 - y) L_i^m(y) - (i + m) L_{i-1}^m(y), \\ L_0^m(y) &= 1, L_1^m(y) = m + 1 - y. \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

(5.2.12) de verilen rekürans bağıntısında $L_i^m(y) = \frac{\hat{L}_i^m(y)}{(-1)^i i!}$ yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} \hat{L}_{i+1}^m(y) &= [y - (2i + m + 1)] \hat{L}_i^m(y) + i(i + m) \hat{L}_{i-1}^m(y), \\ \hat{L}_0^m(y) &= 1, \hat{L}_{-1}^m(y) = 0. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

elde edilir. Böylece (5.2.11) ve (5.2.13) denklemlerinden $a_i \in \mathbb{R}, b_i \geq 0$ katsayılarının

$$\begin{aligned} a_i &= 2i + m + 1 \quad \text{ve} \quad b_i = i(i + m), \\ b_0 &= \hat{\mu}_0 = \Gamma(m + 1). \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

olduğu sonucuna varılır. Sonuç olarak $m = \alpha, \beta > -1$ için $[0, \infty)$ üzerinde $w^{(m, LG)}(y) = y^m e^{-y} (y - 1 - \ln y)$ ağırlık fonksiyonu ile ilişkili modifiye momentler Gama ve logaritmik türev fonksiyonu cinsinden

$$\hat{\mu}_i = \int_0^\infty w^{(m, LG)}(y) \hat{L}_i^m(y) dy = \begin{cases} m\Gamma(m+1) - \Gamma(m+1)\psi(m+1), & \text{if } i=0 \\ m\Gamma(m+1), & \text{if } i=1 \\ (-1)^i (i-1)! \Gamma(m+1), & \text{if } i \geq 2. \end{cases} \quad (5.2.15)$$

olarak elde edilir. (5.2.10) daki $2n$ tane modifiye momenti ve $2n-1$ tane $\{a_i, b_i\}_{i=0}^{2n-2}$ katsayılarını doğrudan alan modifiye Chebyshev algoritması (Gautschi, 2004) sayesinde $\alpha_i(w), \beta_i(w)$, $i=0,1,\dots,n-1$ katsayıları üretilebilmektedir. Modifiye moment yaklaşımını kullanarak katsayılar oluşturmak için, herhangi bir matematiksel yazılımda uygulanabilecek bir algoritma vereceğiz. Burada hesaplamalar için gerekli kodlar Mathematica 9.0 kullanılarak yazılmış ve hesaplanmıştır.

5.2.2. Algoritma 2: Modifiye momentler kullanarak $\{\alpha_i^{LG}, \beta_i^{LG}\}_{i=0}^{n-1}$ katsayılarının hesaplanması.

Giriş değerleri: $n, \alpha = m$, prec (*hassasiyet*); dig (*çalışma hassasiyeti*);

Çıktılar:

- 1: $a_i = 2i + \alpha + 1; i=1,2,\dots,2n-1$; hesapla.
- 2: Eğer $i=0$ ise $b_i = \Gamma(\alpha+1)$ ve diğer durumlarda $b_i = i(i+\alpha)$ değeri hesapla.
- 3: $i=0$ ise $\hat{\mu}_i = \hat{\mu}_0$, diğer durumlarda $\hat{\mu}_i = (-1)^i (i-1)! \Gamma(\alpha+1)$ olarak hesapla.
- 4: $\alpha_0 = a_0 + \hat{\mu}_0 / \hat{\mu}_0$; yaklaşımı yap.
- 5: 2. adımda gösterildiği gibi $\beta_0 = \hat{\mu}_0$ yaklaşımı yap.
- 6: $d=1,2,\dots,2n-2$ için $\lambda_{-1,d} = 0$ al.
- 7: $d=0,1,\dots,2n-1$ için $\lambda_{0,d} = \hat{\mu}_d$ al.
- 8: $i=1,2,\dots,n-1$ için

$$\lambda_{i,d} = \lambda_{i-1,d+1} - (\alpha_{i-1} - a_d) \lambda_{i-1,d} - \beta_{i-1} \lambda_{i-2,d} + b_d \lambda_{i-1,d-1}, \quad d = i, i+1, \dots, 2n-i-1$$

döngüsü hesapla.

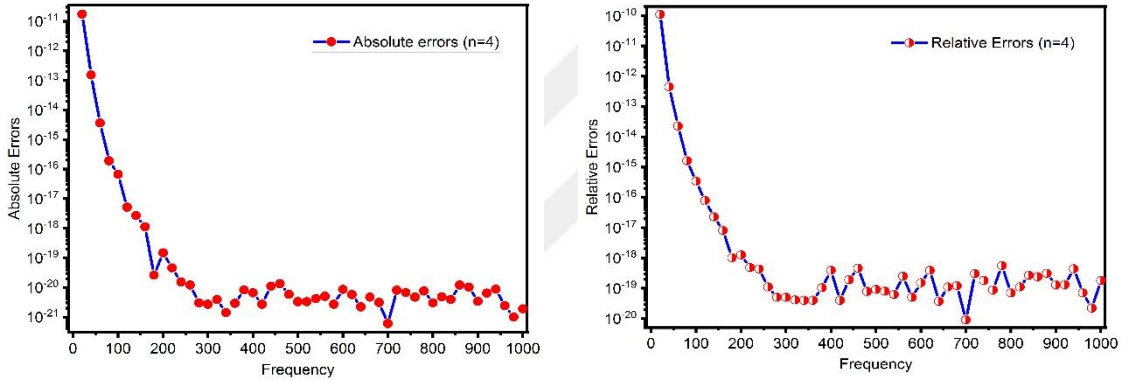
$$9: \alpha_i = a_i + \lambda_{i,i+1} / \lambda_{i,i} - \lambda_{i-1,i} / \lambda_{i-1,i-1} \text{ hesapla.}$$

$$10: \beta_i = \lambda_{i,i} / \lambda_{i-1,i-1} \text{ hesapla.}$$

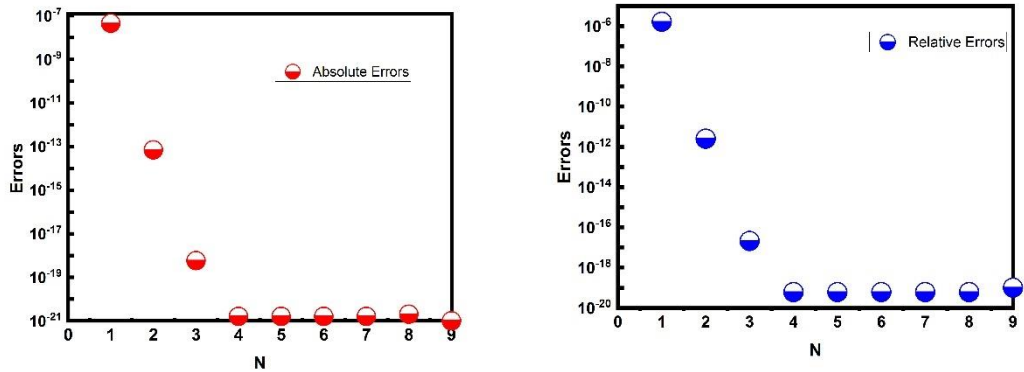
- 11: $i=0,1,\dots,n-1$; için $\alpha_i; \beta_i$ değerlerini yazdır.

2. Algoritma’da modifiye momentler kullanılarak elde edilen katsayılar, 1. Algoritma’da sıradan momentler kullanılarak elde edilenlerle tam uyum içindedir. Her iki algoritmada da aynı sonuçlar elde edilmiş olsa da, birinci algoritma, ikinci algoritmaya kıyasla genişletilmiş hassasiyetin kullanılmasını gerektirir. Sonuç olarak, iki algoritma arasında küçük bir hesaplama süresi farkı gözlemlenmiştir. Bu sorun, n ile üssel olarak artan kötü koşullandırmadan kaynaklanmaktadır.

Örneğin, Gautschi logaritmik ağırlık fonksiyonu dikkate alındığında, her $n < 15$ için 1. Algoritma, 0.015625 saniyede 60 hassasiyet seviyesi gerektirirken, 2. Algoritma 0.015625 saniyede 50 hassasiyet seviyesi gerektirir. $N < 20$ olmak üzere, rekürans katsayısını elde etmek için, 1. Algoritma 0,046 saniyede 75 hassasiyet seviyesi gerektirirken, 2. Algoritma 0.31250 saniyede 50 hassasiyet seviyesi gerektirir. Bir sonraki bölümde daha iyi açıklayıcı örnekler verilecektir.



Şekil 5.2: $\alpha = -1/4, \beta = -1/5, \mu = 0, k = 2$ ve $f(x) = \sin x$ ile (5.1) hipersingüler integrali için yakınsama oranı.



Şekil 5.3: $\omega = 10^3$ sabit değeri için $\int_{-1}^1 \frac{(x+1)^{-0.25} (1-x)^{0.5} \ln(1+x) \ln(1-x) e^{i\omega x} e^x}{x-0.1} dx$, integralinin N 'e bağlı hataları.

5.3 Sayısal Örnekler

Bu bölümde, önerilen yöntemin hipersingüler integrallere olan etkililiğini incelemek için seçilmiş sayısal örnekler gösterilmektedir. Yapılan tüm hesaplamalar Mathematica'da 32 basamaklı aritmetik hesaplama ile yazılmış programlar kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Yine de, hataları hesaplamak için kesin değerlere ihtiyaç olacaktır. Sözde kesin değerler Mathematica 9.0'da 4GB RAM'e sahip kişisel bir dizüstü bilgisayarda hesaplanmıştır. Saniye cinsinden hesaplama süresi bazı örneklerde verilmiştir.

Örnek 5.3.1. $\alpha = -1/4, \beta = -1/5, \mu = 0$ için

$$I^{[1]}[f; \mu] = \int_{-1}^1 \frac{\omega^{(\alpha, \beta, 1)}(x) e^{i\omega x} \sin x}{(x - \mu)^2} dx, \quad |\mu| < 1, \quad (5.3.1)$$

hipersingüler integrali hesaplayalım.

Tablo 5.2, $n = 4$ 'te (5.3.1) integrali için saniye cinsinden mutlak hataları ve hesaplama süresini göstermektedir. Ek olarak, Tablo 5.2, daha az kuadratur noktası dikkate alındığında bile önerilen yöntemin sağlamlığını göstermektedir. Ayrıca, Tablo 5.2'den, frekans arttıkça hesaplama doğruluğunun yanı sıra hesaplama süresinin de iyileştiği gözlemlenebilir.

Tablo 5.2: $n = 4$ 'te (5.3.1) integrali için mutlak hataları ve saniye cinsinden hesaplama süresi

ω	Absolute Errors	CPU
10	1.85×10^{-9}	0.031
10^2	6.74×10^{-18}	0.046
10^3	1.90×10^{-22}	0.031
10^4	7.40×10^{-23}	0.031
10^5	1.10×10^{-23}	0.140

Örnek 5.3.2. $\alpha = -0.3, \beta = 0.6, \mu = 0.5$ için,

$$I^{[1]}[f; \mu] = \int_{-1}^1 \frac{\omega^{(\alpha, \beta, 1)}(x) e^{i\omega x} \tan x}{(x - \mu)^3} dx, \quad |\mu| < 1, \quad (5.3.2)$$

hipersingüler integrali hesaplayalım.

Tablo 5.3, n 'in farklı değerleri ve sabit ω değeri ile önerilen yöntem kullanılarak elde edilen yaklaşım değerlerini göstermektedir. Ayrıca Tablo 5.3, n arttıkça hesaplama doğruluğunun da arttığını göstermektedir.

Tablo 5.3: Sabit ω değeri ile (5.3.2) hipersingüler integrali için yaklaşım değerleri.

$\omega = 1000$	
n	Yaklaşım değerleri
2	64532.688961214841 864763359257867 – 125250.85142713898 8397399906359252i
3	64532.6889612148412289 30837308266 – 125250.8514271389878210 12698178167i
4	64532.68896121484122895045 4220065 – 125250.85142713898782104955 4599396i
5	64532.688961214841228950452997 69 – 125250.85142713898782104955093 1783i
6	64532.68896121484122895045299781 – 125250.8514271389878210495509323 1i
7	64532.688961214841228950452998 – 125250.8514271389878210495509323i

Örnek 5.3.3. $\alpha = 1/100, \beta = -1/4, \mu = 0$ için,

$$I^{[1]}[f; \mu] = \int_{-1}^1 \frac{\omega^{(\alpha, \beta, 1)}(x) e^{i\omega x} (x \cos x + x^6 + 3x - 1)}{(x - \mu)^2 (1 + x^2)} dx, \quad |\mu| < 1, \quad (5.3.3)$$

Hadamard sonlu parçasını verimli bir şekilde hesaplayalım.

Tablo 5.4, farklı ω . değerleri için önerilen yöntem kullanılarak elde edilen mutlak hataları ve hesaplama süresini göstermektedir.

Örnek 5.3.4. $\alpha = -0.31, \beta = 0.69, \mu = 0$.

$$I^{[1]}[f; \mu] = \int_{-1/4}^1 \frac{1000\omega^{(\alpha, \beta, 1)}(x) e^{i\omega x} \ln(1+x)}{(x - \mu)^2 (1+x)} dx, \quad (5.3.4)$$

hipersingüler integrali hesaplayalım.

Tablo 5.5, sabit $\omega = 350$ (frekans) ile önerilen yöntem kullanarak hataları ve hesaplama süresini saniye cinsinden göstermektedir.

Tablo 5.4: $n = 5$. 'te (5.3.3) integrali için saniye cinsinden mutlak hataları ve hesaplama süresi

ω	Mutlak Hata	Hesaplama süresi
50	1.80×10^{-14}	0.046
10^2	1.00×10^{-17}	0.062
10^3	9.00×10^{-28}	0.218
10^4	1.30×10^{-28}	0.203
10^5	6.80×10^{-28}	0.187

Tablo 5.5: Sabit ω ile (5.3.4) integrali için mutlak hataları ve saniye cinsinden hesaplama süresi

n	Mutlak Hata		Hesaplama süresi	
	1. Algoritma	2. Algoritma	1. Algoritma	2. Algoritma
3	3.15×10^{-11}	1.41×10^{-9}	0.015	0.031
4	7.12×10^{-15}	3.32×10^{-13}	0.031	0.031
5	2.60×10^{-18}	1.21×10^{-16}	0.062	0.062
6	1.36×10^{-21}	6.32×10^{-20}	0.078	0.062
7	1.00×10^{-22}	4.47×10^{-23}	0.093	0.062

Exact $64.62366062387822499728716115895 + 260.37702535680375105841469872353i(3.70s)$

Tablo 5.5'te hassasiyet sabit ve her algoritma için 40'a eşittir. Tablo 5.5, iki algoritmanın doğruluğunun n ile arttığını sergilemiştir, ancak n arttıkça Algoritma 1'deki hesaplama süresinin orantılı olarak arttığı görülmektedir. Dahası, tüm sonuçlar tam çözüme oldukça yakındır.

Örnek 5.3.5. $\alpha = -1/4, \beta = -1/2, \mu = \{0, 0.5\}$. için,

$$I^{[0]}[f; \mu] = \int_{-1}^1 \frac{\omega^{(\alpha, \beta, 0)} x e^x e^{i\omega x}}{(x - \mu)^2} dx, \quad |\mu| < 1, \quad (5.3.5)$$

cebirsel tekil Hadamard sonlu kısmını ele alalım.

Tablo 5.6, sabit $\omega=100$ ve $\mu=0$ ile önerilen yöntemi kullanarak hataları ve hesaplama süresini saniye cinsinden göstermektedir. Ayrıca Tablo 5.7, önerilen yöntemi kullanarak $\mu=0.5$ için yaklaşım değerlerini göstermektedir. Tablo 5.6 ve 5.7'nin her ikisini de inceleyerek, cebirsel ve logaritmik tekil integraller için kullanılan hipersingüler integral için önerilen yöntemin uygulanmasının doğru ve ekonomik olduğu, ancak yüksek frekans değerleri dikkate alındığı sonucuna varmak kolaydır. $N=20$ 'yi referans alarak, N arttıkça hesaplama doğruluğunun da arttığı kolayca görülebilir.

Tablo 5.6: Sabit ω ile (5.3.5) hipersingüler integralinin mutlak hataları ve hesaplama süresi

n	$\omega=100$	
	Mutlak hata	Hesaplama süresi
1	1.32×10^{-5}	0.000
2	3.65×10^{-9}	0.000
3	2.77×10^{-12}	0.015
4	3.81×10^{-15}	0.015
5	8.00×10^{-18}	0.031
Tam $0.1032823315565069232725554772316 + 2.7394850984212037657826989262612i(2.93s)$		

Örnek 5.3.6. $f_1(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$, $f_2(x) = \frac{xe^x}{1+x^2}$, and $\mu=0$. için

$$I^{[1]}[f; \mu] = \int_{-1}^1 \frac{\omega^{(-1/4, 1/3, 1)}(x) e^{i\omega x} f_j(x)}{(x-\mu)^2} dx, \quad j=1, 2 \quad (5.3.6)$$

integralini hesaplayalım.

Tablo 5.8, $n=4$ sabit değeri için önerilen yöntemin doğruluğunu göstermektedir. Ayrıca, Tablo 5.8, $\omega=10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ ile f_1 ve f_2 fonksiyonlarının her ikisi için de mutlak hataları ve saniye cinsinden geçen zamanı gösterir. Önerilen yöntemin hem f_1 hem de f_2 fonksiyonları için en az $|errors| \leq 10^{-15}$ 'i garanti edebileceğini gözlemledik. Tablo 5.8'den, önerilen yöntemin büyük frekans değerleri için daha verimli olduğu da görülebilir.

Tablo 5.7: Sabit ω ve $\mu = 0.5$. ile (5.3.5) hipersingüler integralinin yaklaşım değerleri

$\omega = 100$	
n	Yaklaşım değerleri
2	$-223.68541472625086941647497358478 + 66.22139453813281267943681246412i$
4	$-223.68541471558410137770140552331 + 66.22139373617587608195331122318i$
6	$-223.68541471559458881378939193463 + 66.22139373615812273686197320247i$
8	$-223.68541471559459171525944292159 + 66.22139373615812216947300856366i$
10	$-223.68541471559459171603849043769 + 66.22139373615812217051001846092i$
12	$-223.68541471559459171603764119079 + 66.22139373615812217051097259341i$
14	$-223.68541471559459171603763949306 + 66.22139373615812217051097099077i$
16	$-223.685414715594591716037639498899 + 66.2213937361581221705109709866i$
18	$-223.6854147155945917160376394989 + 66.22139373615812217051097098699i$
20	$-223.6854147155945917160376394989 + 66.22139373615812217051097098699i$

Tablo 5.8: $n=4$ sabit değeri ve farklı ω değerleri ile (5.3.6) 'nın mutlak hataları ve hesaplama süresi

ω	$f_1(x) = e^x (1+x^2)^{-1}$		$f_2(x) = xe^x (1+x^2)^{-1}$	
	Mutlaka hata	hesaplama süresi	Mutlaka hata	Hesaplama süresi
10^2	4.8×10^{-15}	0.031	6.8×10^{-17}	0.156
10^3	9.0×10^{-23}	0.125	8.0×10^{-23}	0.140
10^4	1.9×10^{-23}	0.203	1.9×10^{-23}	0.140
10^5	6.1×10^{-24}	0.125	6.1×10^{-24}	0.140
10^6	1.4×10^{-25}	0.140	1.3×10^{-25}	0.109

6 SONUÇ

Tekil Tekil integral denklemlerin hızlı salınımlı integral ile hesaplanıp çözülmesi, uygulamalı bilimlerde ve mühendislikte önemli bir zorluk olmaya devam etmektedir. Önerilen yaklaşımlar, bu integralleri ele almak için odak çözümlerden biri olabilir. Bölüm 1, Clenshaw-Curtis algoritmalarının Fourier tipi integralleri ve tekil integral denklemleri ele almadaki önemini ve karmaşık tabanlı stratejilerini vurgular. Ayrıca, Bölüm 1, Kısım 5, sonlu ve sonsuz Fourier tipi integrallerin verimli bir şekilde değerlendirilmesi için karmaşık tabanlı yöntemlerin sağlamlığını göstermiştir.

Bölüm 2'de, tekil ve yüksek salınımlı Fourier tipi integrallerin çözümleri için iki değiştirilmiş Clenshaw-Curtis yaklaşımı önerildi. Dikkate alınan integraller, farklı türde değiştirilmiş momentlere dayalı iki farklı algoritma türü kullanılarak hesaplanmıştır. Sayısal örnekler, önerilen iki algoritmanın yakınsamasını kanıtlamaktadır. Bölüm 2.4'te gerçekleştirilen deneylere göre, 1. Algoritma'nın, küçük, orta veya çok yüksek frekans değerleri için daha iyi sonuç verdiği görüldü. Bununla birlikte, örneğin $\mu = 1$ gibi düşük değerlere gelince, algoritma 16 basamaklı doğru bir yaklaşım vermek için N 'de hafif bir artış gerektirir. Aynı algoritmanın, küçük ve çok yüksek frekans değerleri için en dik iniş algoritmasına kıyasla daha özgün olduğu bulunmuştur. Öte yandan, Algoritma 2'nin düşük frekans değerleri için daha verimli olduğu ve yüksek frekans değerlerini değerlendirmek için biraz daha fazla zaman gerektirdiği bulunmuştur. Bölüm 2.4'te verilen Tablolar, önerilen algoritmaların doğruluğunu kanıtlamaktadır.

Clenshaw-Curtis algoritmalarının uzantısı Bölüm 3'te ele alınmıştır. Kısaca, Bölüm 3'te, önerilen yöntemi kullanarak Jacobi-Cauchy tipi tekillikler çekirdeği ile salınımlı integralleri verimli bir şekilde hesapladık. Bu tür integraller birçok fiziksel ve mühendislik probleminde bulunabilir. Kullanılan teknik, geleneksel Clenshaw-Curtis algoritmalarının salınımlı Cauchy tipi tekil integrallere uygulanması olarak kabul edilebilir. Önerilen yöntem, nispeten küçük, orta ve büyük frekans değerleri için beklenen yüksek doğruluk ve verimliliği sergilemiştir.

Ayrıca önerilen yöntemin etkinliğinin ω ve $N = 4$ sıklığına bağlı olduğu gösterilebilir. Bölüm 3.3'te verilen Tablolar önerilen yöntemin geçerliliğini göstermektedir. Ek olarak, önerilen yöntemin hipersingüler integrallerin hesaplanmasında da uygulanabileceği tespit edilmiştir.

Bölüm 4'te, Bölüm 1 ve Alt Bölüm 5'te tartışılan karmaşık tabanlı yöntemler, logaritmik ve Cauchy-logaritmik tekilliklere sahip iki yüksek salınımlı integralin hesaplanmasında

kullanılmıştır. Sunulan yöntem, her iki integral için, frekans arttıkça sabit n için hızlı bir şekilde daha yüksek hassasiyet yaklaşımı elde edebilen mükemmel bir özellik sergilemiştir. Dahası, yaklaşım orta ve çok büyük frekanslar için doğru ve etkiliydi. Bölüm 4.3'te sunulan örnekler ve Tablolar, önerilen yöntemler için performansın kanıtını sağlar.

Son olarak, karmaşık temel yöntemi, 5. Bölümde oldukça salınımlı bir çekirdeğe sahip cebirsel ve logaritmik hipersingüler tipte tekil integrallerin hesaplama verimliliğinde de kullanılmıştır. Kullanılan yaklaşım, n arttıkça kolayca daha iyi yaklaşım doğruluğu sağlayabileceğini kanıtlamıştır. Ayrıca, kullanılan yöntem, n 'nin sabit olarak alınmasının, frekansı artırmanın, yaklaşım doğruluğunu artırdığını da göstermiştir. Gautschi logaritmik ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal polinomu karşılayan yineleme katsayılarını üretmek için iki algoritma verilerek ve karşılaştırılmıştır. Dahası, her iki algoritma da biri kullanmaya karar verdiğinde tatmin edici sonuçlar verebileceklerini göstermiştir. Yukarıda verilen Tablolar ve yakınsama oranı rakamları, analizi destekleyen kanıtlar vermiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abramowitz, M., & Stegun, I.** (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. Washington, D.C.: National Bureau of Standards.
- Abramowitz, Milton, & Stegun, I. A.** (1965). *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards (Tenth Prin). New York: Reprinted by Dover Publications. <https://doi.org/10.1115/1.3625776>
- Agarwal, P, Jain, S., Agarwal, S., & Nagpal, M.** (2014). On a new class of integrals involving Bessel functions of the first kind. *Communication in Num. Anal.*, 2014, 1–7. <https://doi.org/10.5899/2014/cna-00216>
- Agarwal, Praveen, Dragomir, S. S., Jleli, M., & Samet, B.** (2018). *Advances in Mathematical Inequalities and Applications*. Birkhäuser Basel.
- Arfken, G. B., & Weber, H. J.** (2005). *MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICISTS* (Sixth Edit). California: Elsevier Inc.
- Asheim, A., & Huybrechs, D.** (2010). Asymptotic Analysis of Numerical Steepest Descent with Path Approximations. *Foundations of Computational Mathematics*, 10(6), 647–671. <https://doi.org/10.1007/s10208-010-9068-y>
- Asheim, A., & Huybrechs, D.** (2013). Complex Gaussian quadrature for oscillatory integral transforms. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 33(4), 1322–1341. <https://doi.org/10.1093/imanum/drs060>
- Ashley, H. and Landahl, M.** (1985). *Aerodynamics of Wings and Bodies*. new york: Dover Publication, Inc. New York.
- Bakhvalov, N. S., & Vasil’eva, L. G.** (1968). Evaluation of the integrals of oscillating functions by interpolation at nodes of gaussian quadratures. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 8(1), 241–249. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(68\)90016-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(68)90016-5)
- Ball, J. S., & Beebe, N. H. F.** (2007). Efficient Gauss-related quadrature for two classes of logarithmic weight functions. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 33(3), 1–21. <https://doi.org/10.1145/1268769.1268773>
- Bostro, A.** (2003). Review of hypersingular integral equation method for crack scattering and

- application to modeling of ultrasonic nondestructive evaluation. *Applied Mechanics Reviews*, 56(4), 383–405. <https://doi.org/10.1115/1.1574522>
- Brown, J. W., & Churchill, R. V.** (2003). *Complex Variables and Applications* (Seventh Ed). McGraw-Hill Higher Education.
- Brown, J. W., & Churchill, R. V.** (2009). *Complex Variables and Applications* (Eighth Ed). New York: McGraw-Hill.
- Brunner, H.** (2007). Open problems in the computational solution of Volterra functional equations with highly oscillatory kernels. *Isaac Newton Institute, HOP 2007*, pp. 1–14.
- Brunner, H.** (2010). On the numerical solution of first-kind Volterra integral equations with highly oscillatory kernels. *HOP/Isaac Newton Institute*, pp. 1–19.
- Capobianco, M. R., & Criscuolo, G.** (2003). On quadrature for Cauchy principal value integrals of oscillatory functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 156, 471–486. [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(03\)00388-1](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(03)00388-1)
- Chen, R.** (2012). Numerical analysis for Cauchy principal value integrals of oscillatory kind. *International Journal of Computer Mathematics*, 89(5), 701–710. <https://doi.org/10.1080/00207160.2012.655688>
- Chen, R.** (2014). Fast computation of a class of highly oscillatory integrals. *Journal of Applied Mathematics and Computation*, 227(11071260), 494–501. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.11.068>
- Clenshaw, C. W., & Curtis, A. R.** (1960). A method for numerical integration on an automatic computer. *Numerische Mathematik*, 2, 197–205. <https://doi.org/10.1007/BF01386223>
- Cooley, J. W., & Tukey, J. W.** (1965). An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation*, 19, 297–301. <https://doi.org/10.2307/2003354>
- Cooley, J. W., & Tukey, J. W.** (2006). An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation*, 19(90), 297. <https://doi.org/10.2307/2003354>
- Criscuolo, G.** (1997). A new algorithm for Cauchy principal value and Hadamard finite-part integrals 1, 78, 255–275.

- Daniel, W. L.** (1980). *Numerical Solution of Linear Difference Equations*. Washington D.C.: National Bureau of Standards.
- Diethelm, K.** (1999). A method for the practical evaluation of the Hilbert transform on the real line, *112*, 45–53.
- Domínguez, V.** (2014). Filon-Clenshaw-Curtis rules for a class of highly-oscillatory integrals with logarithmic singularities. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *261*, 299–319. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.11.012>
- Domínguez, V., Graham, I. G., & Kim, T.** (2013). Filon-Clenshaw-Curtis rules for highly oscillatory integrals with algebraic singularities and stationary points. *SIAM J. Numer. Anal.*, *51*(3), 1542–1566.
- Domínguez, V., Graham, I. G., & Smyshlyaev, V. P.** (2011). Stability and error estimates for Filon-Clenshaw-Curtis rules for highly oscillatory integrals. *IMA Journal of Numerical Analysis*. <https://doi.org/10.1093/imanum/drq036>
- Ehrenmark, U. T.** (1987). Far Field Asymptotics of the Two-Dimensional Linearised Sloping Beach Problem. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, *47*(5), 965–981.
- Elliott, D.** (1982). Orthogonal polynomials associated with singular integral equations having a Cauchy kernel. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *13*, 1041–1052.
- Erdelyi, A.** (1955). Asymptotic representations of Fourier integrals and the method of stationary phase. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, *3*(1), 17–27. <https://doi.org/10.4153/cjm-1956-026-x>
- Erdogan, F., Gupta, G. D., & Cook, T. S.** (1973). Numerical solution of singular integral equations. In *Methods of analysis and solutions of crack problems*. Springer, The Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2260-5_7
- Fang, C.** (2016). Efficient methods for highly oscillatory integrals with weak and Cauchy singularities. *International Journal of Computer Mathematics*, *93*(9), 1597–1610. <https://doi.org/10.1080/00207160.2015.1067312>
- Feng, W., Li, H., Gao, L., Qian, W., & Yang, K.** (2019). Hypersingular flux interface integral equation for multi-medium heat transfer analysis. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *138*, 852–865.

- Filon, L. N. G.** (1930). On a Quadrature Formula for Trigonometric Integrals. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 49, 38–47. <https://doi.org/10.1017/S0370164600026262>
- Francis, J. G. F.** (1961). The QR transform. A unitary analogue to the LR transformation. *The Computer Journal*, 4(3), 265–271.
- Francis, J. G. F.** (1962). The QR transformation- Part 2. *The Computer Journal*, 4(4), 332–345.
- Gatteschi, L.** (1980). On Some Orthogonal Polynomial Integrals. *Mathematics of Computation*, 35(152), 1291–1298.
- Gautschi, W.** (1967). Computational Aspects of Three-Term Recurrence Relations. *SIAM Review*, 9(1), 24–82. <https://doi.org/10.1137/1009002>
- Gautschi, W.** (1970). On the Construction of Gaussian Quadrature Rules from Modified Moments. *Mathematics of Computation*, 24(110), 245. <https://doi.org/10.2307/2004475>
- Gautschi, W.** (1994). A Package of Routines for Generating Orthogonal Polynomials and Gauss-Type Quadrature Rules. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 20(1), 21–62. <https://doi.org/10.1145/174603.174605>
- Gautschi, W.** (2004). *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*. New York,: Oxford university Press.
- Gautschi, W.** (2010). Gauss quadrature routines for two classes of logarithmic weight functions, 265–277. <https://doi.org/10.1007/s11075-010-9366-0>
- Golberg, M. A.** (1987). The convergence of several algorithms for solving integral equations with finite part integrals. II. *Applied Mathematics and Computation*, 21(4), 283–293.
- Golub, G. H., & Welsch, J. H.** (1969). Calculation of Gauss Quadrature Rules. *Mathematics of Computation*. <https://doi.org/10.2307/2004418>
- Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M.** (2007). *Table of Integrals, Series, and Products. Fundamentals of University Mathematics* (7th editio). New York,: Academic Press,. <https://doi.org/10.1533/9780857092243.541>
- Hamed, M. A., & Cummins, B.** (1991). A Numerical Integration Formula for the Solution of the Singular Integral Equation for Classical Crack Problems in Plane and Antiplane Elasticity. *Journal of King Saud University Engineering Sciences*, 3(2), 217–231.

[https://doi.org/10.1016/S1018-3639\(18\)30547-6](https://doi.org/10.1016/S1018-3639(18)30547-6)

- Hasegawa, T., & Torii, T.** (1991). An Automatic Quadrature for Cauchy Principal Value Integrals. *American Mathematical Society*, 56(194), 741–754.
- Hildebrand, F. B.** (1974). *Introduction to Numerical Analysis* (Second Ed.). new york: Dover Publication, Inc. New York.
- Hsiao, G. C., Kopp, P., & Wendland, W. L.** (1980). A Galerkin collocation method for some integral equations of the first kind. *Computing*, 25, 83–130.
- Huybrechs, D., & Olver, S.** (2012). Superinterpolation in Highly Oscillatory Quadrature. *Foundations of Computational Mathematics*, 12(2), 203–228. <https://doi.org/10.1007/s10208-011-9102-8>
- Huybrechs, D., & Vandewalle, S.** (2006). On the Evaluation of Highly Oscillatory Integrals by Analytic Continuation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. <https://doi.org/10.1137/050636814>
- Iserles, A., & Nørsett, S. P.** (2005). Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. <https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1401>
- Iserles, A., & Nørsett, S. P.** (2006). Quadrature methods for multivariate highly oscillatory integrals using derivatives. *Mathematics of Computation*, 75(255), 1233–1259. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-06-01854-0>
- J. Hadamard.** (1932). *Le Probleme de Cauchy et les Equations aux Derivees Particelles Lineaires Hyperboliques*. Paris, France: Hermann.
- J.Hadamard.** (1932). *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press.
- Kang, H., & Shao, X.** (2014). Fast computation of singular oscillatory fourier transforms. *Abstract and Applied Analysis*, 2014(1). <https://doi.org/10.1155/2014/984834>
- Kang, H., Xiang, S., & He, G.** (2013). Computation of integrals with oscillatory and singular integrands using Chebyshev expansions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 242(1), 141–156. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2012.10.016>
- Kayijuka, I., Alfaqieh, S., & Öziş, T.** (2021). Application of the Cauchy integral approach to

- Singular and Highly Oscillatory Integrals. *International Journal of Computer Mathematics*, 1–20. <https://doi.org/10.1080/00207160.2021.1876228>
- Kayijuka, I., Ndabakuranye, J. P., & Hasçelik, A. I.** (2018). Computational efficiency of singular and oscillatory integrals with algebraic singularities. *Asian Journal of Mathematics and Computer Research*, 25(5), 285–302. Retrieved from <http://www.ikpress.org/index.php/AJOMCOR/article/view/4194>
- Krylov, V. I.** (2006). *Approximate Calculation of Integrals*. new york: Macmillan.
- Kythe, P. K., & Schäferkotter, M. R.** (2004). *Handbook of computational method for integration*. (Chapman and Hall/CRC, Ed.).
- Ladopoulos, E. G.** (2000). *Singular Integral Equations: Linear and Non-linear Theory and its Applications in Science and Engineering*. Berlin, New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000.
- Li, J., & Li, X.** (2013). The Modified Trapezoidal Rule for Computing Hypersingular Integral on Interval. *Journal of Applied Mathematics*, 2013, 9.
- Lighthill, M. J.** (1959). *Fourier analysis and Generalised function*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Lu, S.** (2005). A Class of Oscillatory Singular Integrals. *International Journal of Applied Mathematical Sciences*, 2(1), 47–64.
- Majidian, H.** (2017). Filon-Clenshaw–Curtis formulas for highly oscillatory integrals in the presence of stationary points. *Num. Math.*, 117, 87–102. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2017.02.003>
- Mason, J. C., & Handscomb, D. C.** (2003). *Chebyshev Polynomials*. New York: A CRC Press Company. <https://doi.org/10.1615/AtoZ.c.CHEPOL>
- Mason, J. C., & Venturino, E.** (1997). Integration Methods of Clenshaw-Curtis Type, Based on Four Kinds of Chebyshev Polynomials in: G. Nürnberger, J.W. Schmidt, G. Walz (Eds.), *Multivariate Approximation and Splines*. *Birkhäuser, Basel*, 125, 153–165.
- Micheal Ruzhansky, Yeol Je Cho, & Praveen Agarwal, I. A.** (2017). *Advances in Real and Complex Analysis with Applications*. Publisher Springer Singapore.
- Milovanović, G. V.** (2016). Generalized Gaussian quadratures for integrals with logarithmic

- singularity. *Filomat*, 30(4), 1111–1126.
- Milovanović, G. V.** (2017). Computing integrals of highly oscillatory special functions using complex integration methods and gaussian quadratures. *Dolomites Research Notes on Approximation*, 10(Special Issue), 79–96.
- Monegato, G.** (1994). Numerical evaluation of hypersingular integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 50, 9–31.
- Morales-delgado, V. F., Gómez-aguilar, J. F., Saad, K. M., Altaf Khan, M., & Praveen Agarwal.** (2019). Analytic solution for oxygen diffusion from capillary to tissues involving external force effects : A fractional calculus approach. *Physica A*, 523, 48–65. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.02.018>
- Mori, M., & Sugihara, M.** (2001). The double-exponential transformation in numerical analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 127(1–2), 287–296. [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(00\)00501-X](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00501-X)
- Moss, J. W., & Christensen, J. M.** (1980). Scattering and heat transfer by a strip. *J. Integral Equations*, 2(4), 299–317.
- Murray R., S., Seymour, L., John J., S., & Dennis, S.** (2009). *Schaum's outline: Complex Variables: with an introduction to Conformal Mapping and its applications* (Second Edi). New York: McGraw-Hill.
- Muskhelishvili, N. I.** (1972). *Singular Integral Equations: Boundary problems of functions theory and their applications to mathematical physics*. Groningen, The Netherlands: Noordhoff.
- Nik Long, N. M. A., & Eshkuvatov, Z. K.** (2009). Hypersingular integral equation for multiple curved cracks problem in plane elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 46(13), 2611–2617.
- Okecha, G. E.** (1987). Quadrature Formulae for Cauchy Principal Value Integrals of Oscillatory Kind. *Mathematics of Computation*, 49(179), 259. <https://doi.org/10.2307/2008263>
- Oliver, J.** (1968). The numerical solution of linear recurrence relations. *Numerische Mathematik*, 11, 349–360. <https://doi.org/10.1007/BF02166688>

- Olver, F. W. J., Lozier, D. W., Boisvert, R. F., & Clark, C. W.** (2010). *NIST Handbook of mathematical functions. Book* (Vol. 5). Retrieved from <http://dlmf.nist.gov/>
- Olver, S.** (2007). Moment-free numerical approximation of highly oscillatory integrals with stationary points. *European Journal of Applied Mathematics*, 18(4), 435–447. <https://doi.org/10.1017/S0956792507007012>
- P. Agarwal, D. Baleanu, Y. Chen, S. Momani, & Machado, J. A. T.** (2020). *Fractional Calculus: ICFDA 2018, Amman, Jordan, July 16-18*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics.
- Phong, D. H., & Stein, E. M.** (1983). Singular integrals related to the Radon transform and boundary value problems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 80(24), 7697–7701. <https://doi.org/10.1073/pnas.80.24.7697>
- Piessens, R., de Doncker-Kapenga, E., Überhuber, C. W., & Kahaner, D. K.** (1983). *A Subroutine Package for Automatic Integration*. Berlin: Springer-Verlag.
- Piessens, Robert, & Branders, M.** (1973). The evaluation and application of some modified moments. *Bit*, 13(4), 443–450. <https://doi.org/10.1007/BF01933408>
- Piessens, Robert, & Branders, M.** (1992). On the computation of Fourier transforms of singular functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 43(1992), 159–169. [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(92\)90264-X](https://doi.org/10.1016/0377-0427(92)90264-X)
- Rekhviashvili, S., Pskhu, A., Agarwal, P., & Jain, S.** (2019). Application of the fractional oscillator model to describe damped vibrations. *Turkish J. of Physics*, 43(June), 236–242. <https://doi.org/10.3906/fiz-1811-16>
- RICOMI, F. G.** (1951). ON THE FINITE HILBERT TRANSFORMATION. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 2(1), 199–211.
- Robertson, I. A.** (1967). Diffraction of a plane longitudinal wave by a penny-shaped crack. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 63(01), 229–238. <https://doi.org/10.1017/S0305004100041116>
- Rvachev, V. L.** (1956). The pressure on an elastic half space of a beam which has the form of a strip. *Prikl. Mat. Meck.*, 20, 248–256.
- Samson, J. H., & Evans, G. A.** (1998). Symmetry Reduction of Fourier Kernels. *Journal of*

Computational Physics, 142(1), 109–122.

- Srivastava, H. M., Agarwal, P., & Jain, S.** (2014). Generating functions for the generalized Gauss hypergeometric functions. *APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION*, 247, 348–352. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.08.105>
- Stoer, J., & Bulirsch, R.** (2002). *Introduction to Numerical Analysis* (3rd ed.). New York,: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21738-3>
- Sun, W., & Zamani, N. G.** (1990). Adaptive mesh redistribution for the boundary element in elastostatics. *Computers & Structures*, 36(6), 1081–1088. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0045-7949\(90\)90215-N](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0045-7949(90)90215-N)
- Symm, G. T., & Jaswon, M. A.** (1977). *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics* (2nd ed.). London: Accademic Press.
- Takahasi, H., & Mori, M.** (1974). Double exponential formulas for numerical integration. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 9(3), 721–741. <https://doi.org/10.2977/prims/1195192451>
- Trefethen, L. N.** (2008). Is Gauss quadrature better than Clenshaw–Curtis. *SIAM Review*, 50(1), 67–87. <https://doi.org/10.1137/060659831>
- Trefethen, L. N.** (2019). *Approximation Theory and Approximation Practice, Extended Edition*. Philadelphia: Sociaty for Industrial and Applied Mathematics.
- Venturino, E.** (1986). Recent developments in numerical solution of singular integral equations. *J. Math. Anal. Applic.*, 115, 239–277.
- Wang, H., & Xiang, S.** (2009). Uniform approximations to Cauchy principal value integrals of oscillatory functions. *Applied Mathematics and Computation*, 215(5), 1886–1894. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.07.041>
- Wang, H., & Xiang, S.** (2010). On the evaluation of Cauchy principal value integrals of oscillatory functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(1), 95–100. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.12.007>
- Wang, H., Zhang, L., & Huybrechs, D.** (2013). Asymptotic expansions and fast computation of oscillatory Hilbert transforms. *Numerische Mathematik*, 123(4), 709–743. <https://doi.org/10.1007/s00211-012-0501-9>

- Whittaker, E. T., & Watson, G. N.** (1950). *A Course of Modern Analysis* (4th ed.). London: Cambridge Univ. Press.
- Wong, R.** (1982). Quadrature formulas for oscillatory integral transforms. *Numerische Mathematik*, 39(3), 351–360. <https://doi.org/10.1007/BF01407868>
- Wong, R.** (2001). *Asymptotic approximations of integrals*. Philadelphia: SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Zastrow, U.** (1985). Numerical plane stress analysis by integral equations based on the singularity method. *Solid Mach. Arch.*, 10, 113–128.



TEŞEKKÜR

Bu vesileyle danışmanlarım Prof. Dr. Fatma Serap TOPAL ve Doç. Dr. Ali KONURALP'e “**Tekil ve yüksek salınlı problem uygulamalarının hesaplanması için sayısal algoritmalar**” başlıklı bu bilimsel araştırma çalışmasını gerçekleştirmede muazzam yardımları, harika fikirleri ve rehberlikleri için çok teşekkür ederim.

Dr. Şerife Müge Ege’ye de çok faydalı tartışmaları ve araştırmalarıma yardımları için en içten teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca çalışmalarımı teşvik eden, destekleyen ve takdir eden tüm aileme ve arkadaşlarıma şükranlarımı sunarım. Akademik araştırmama doğrudan ya da dolaylı katkı sağlayan tüm matematik bölümü üyelerine, çalışanlarına ve öğrencilerine bir kez daha şükranlarımı sunuyorum. Doktora çalışmalarım sırasında beni burslarıyla maddi olarak destekleyen Türk Devletine içtenlikle teşekkür ederim.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİ

Adı ve Soyadı: Idrissa KAYIJUKA

vatandaşlık: RUANDA

EĞİTİM BİLGİLERİ

Ege Üniversitesi (EÜ)

- Doktora, Uygulamalı Matematik, Sayısal ve hesaplama matematiği (GANO: 4.0/4.0) **Türkiye, 2017-Beklenen tarih (Austos 2021)**

Doktora Tezi “Tekil ve yüksek salınımlı problemlerin uygulamalarla hesaplanması için sayısal algoritmalar”

Gaziantep Üniversitesi (GAÜN)

- Yüksek Lisans, Uygulamalı Matematik, Sayısal ve hesaplama matematiği (GANO: 3.7/4.0) **Türkiye, 2015-2017**

Yüksek lisans Tezi “Clenshaw-Curtis Metodunun Tekil Salınımlı Integrallere Uygulanması”

Ruanda Üniversitesi

- Lisans, Uygulamalı Matematik İstatistik seçeneği (GANO: 3.84/5.0) **Kigali, 2010-2013**

SEÇİLMİŞ YAYINLANMIŞ MAKALELER

- Clenshaw–Curtis algorithms for an efficient numerical approximation of singular and highly oscillatory Fourier transform integrals, (285) March 2021, 113201. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113201>
Dergi: Journal of Computational and Applied Mathematics (SCI)
- Application of the Cauchy integral approach to Singular and Highly Oscillatory Integrals, Feb 2021. <https://doi.org/10.1080/00207160.2021.1876228>
Dergi: International Journal of Computer Mathematics (SCIE)
- Fast Gauss-related quadrature for highly oscillatory integrals with logarithm and Cauchy-logarithmic type singularities, Vol. 18 Issue 4, p442-457, 2021
Dergi: International Journal of Numerical Analysis & Modeling (IJNAM) (SCIE)
- Fast Approximation of Algebraic and Logarithmic Hypersingular Type Singular Integrals with Highly Oscillatory Kernel, 18(6)(2020), 965-980. <https://doi.org/10.28924/2291-8639>

Dergi: International Journal of Analysis and Applications (ESCI)

- Solving System of Conformable Fractional Differential Equations by Conformable Double Laplace Decomposition Method, 23(2020)2020, 275-290.

<https://doi.org/10.4208/jpde.v33.n3.7>

Dergi: Journal of Partial Differential Equations (JPDE).

- Computational efficiency of Singular and Oscillatory Integrals with algebraic singularities, 25(5)285-302, 2018.

<https://www.ikpress.org/index.php/AJOMCOR/article/view/4194>

Dergi: Asian Journal of Mathematics and Computer Research (EBSCOhost)

- Gauss related Quadrature rule for Highly Oscillatory Singular Integrals having Hypersingular type Singularity, 4th International Students Science Congress, 18-19 September, 2020, Izmir-Turkey,

https://sciencecon.org/wp-content/uploads/2020/10/4th_ISSC-Abstract-Book-22.10.2020.pdf.

BURSLAR

- | | |
|------------------------------------|------------------|
| • Türkiye Bursları (Doktora) | 2017-2021 |
| • Türkiye Bursları (Yüksek lisans) | 2014-2017 |
| • Ruanda Bursları (Lisans) | 2010-2013 |