



**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**E^3 TE VERİLEN BİR EĞRİ BOYUNCA SABİT ORTALAMA EĞRİLİKLİ
YÜZEY AİLESİ**

Yüksek Lisans Tezi

Hüsnü COŞANOĞLU

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

SAMSUN
2021

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**



**E^3 TE VERİLEN BİR EĞRİ BOYUNCA SABİT ORTALAMA EĞRİLİKLİ
YÜZEY AİLESİ**

Yüksek Lisans Tezi

Hüsnü COŞANOĞLU

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

SAMSUN
2021

ÖZET

E^3 TE VERİLEN BİR EĞRİ BOYUNCA SABİT ORTALAMA EĞRİLİKLİ YÜZEY AİLESİ

Hüsnü COŞANOĞLU

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans, Ocak/2021

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Bu tez çalışmasında, 3 boyutlu Öklid uzayında verilen herhangi bir eğriden geçen ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit olan yüzeyler için yeterli şartların elde edilmesi amaçlanmaktadır. Verilen eğrinin regüler olduğu ve her noktasındaki ivme vektörünün sıfırdan farklı olduğu kabul edilmiştir. Verilen eğrinin Frenet çatısında yer alan teğet vektör alanı, asli normal vektör alanı ve binormal vektör alanı ile sapma fonksiyonları adı verilen C^1 sınıfından, iki değişkenli, reel değerli fonksiyonlar yardımıyla bu eğriden geçen yüzeyler parametrik olarak ifade edilmiştir. Eğrinin yüzeyler üzerinde parametre eğrisi olduğu kabul edilerek bu yüzeylerin, verilen eğri boyunca ortalama eğriliği; eğrinin eğriliği, burulması, sapma fonksiyonları ve bunların kısmi türevleri cinsinden hesaplanmıştır. Verilen eğri boyunca ortalama eğriliğin sabit olması için yeterli şartlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçları destekleyecek bazı örnekler verilmiştir.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm tezin amacına ve daha önce yapılan çalışmalara ayrılmıştır.

İkinci bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayı ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, E^3 Öklid uzayında herhangi bir eğriden geçen ve bu eğriyi hem parametre eğrisi hem de geodezik kabul eden yüzeyler bulmak için şartlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölüm, tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde E^3 Öklid uzayında alınan herhangi bir eğri boyunca ortalama eğriliği sabit olan yüzeyler bulmak için şartlar elde edilmiş ve örnekler verilmiştir.

Beşinci ve son bölümde ise çalışmada elde edilen sonuçlar tartışılarak yapılabilecek çalışmalar üzerinde durulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Yüzey ailesi, sabit ortalama eğrilik, 3-boyutlu Öklid uzayı, Salkowski eğrisi, anti-Salkowski eğrisi, helis eğrileri

ABSTRACT

SURFACE PENCIL WITH CONSTANT MEAN CURVATURE ALONG A GIVEN CURVE IN E^3

Hüsnü COŞANOĞLU

Ondokuz Mayıs University

Institute of Graduate Studies

Department of Mathematics

Master, January/2021

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ergin BAYRAM

In this thesis, the sufficient conditions are obtained to find surfaces that pass through any given curve in 3-dimensional Euclidean space and whose mean curvature is constant along this curve. The given curve is assumed to be regular with nonvanishing acceleration. For this purpose, firstly, surfaces passing through the given curve are expressed parametrically with the help of the tangent vector field, the principal normal vector field and the binormal vector field of the Frenet frame of the given curve, and the so called marching scale functions which are real valued C^1 functions of two variables. The mean curvature of these surfaces along the given curve was calculated in terms of curvature and torsion of the given curve and, marching scale functions and their partial derivatives. Sufficient conditions are obtained to keep the mean curvature constant along the given curve. Some examples are given.

This study consists of five chapters. In the first chapter, the purpose of the thesis and the previous studies are explained. In the second part, basic definitions and theorems related to 3-dimensional Euclidean space are given.

In the third chapter, conditions are obtained for finding surfaces passing through a given curve in Euclidean space and accepting this curve both as a parameter curve and a geodesic.

The fourth part constitutes the original part of the thesis. In this section, conditions are obtained to find surfaces whose mean curvature is constant along a given curve in Euclidean space.

In the last chapter, the results obtained in the study are discussed and the future studies are argued.

Keywords: surface family, constant mean curvature, 3-dimensional Euclidean space, Salkowski curve, anti-Salkowski curve, helix curves

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Öncelikle bugünlere gelmemde maddi ve manevi her türlü desteği üzerimden hiç eksik etmeyen annem ve babama, sevgili kardeşime, bu çalışmaya başladığım ilk günden beri beni hep motive eden ve desteğini bir an olsun esirgemeyen sevgili nişanlıma, bilimsel anlamda kendileri ile tartışma fırsatı bulduğum Matematik Bölümü öğretim elemanlarına ve lisansüstü hayatım boyunca engin bilgi birikimi ve tecrübelerini paylaşan, zaman gözetmeksizin yardımını hiç esirgemeyen saygı değer hocam Dr. Öğr. Üyesi Ergin Bayram’a en derin saygı ve şükranlarımı sunarım.

Hüsnü COŞANOĞLU

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı.....	1
1.2. Literatür Özeti.....	1
2. GENEL BİLGİLER	2
2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar	2
3. MATERYAL YÖNTEM.....	11
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	16
4.1. E^3 te Verilen Bir Eğri Boyunca Sabit Ortalama Eğrilikli Yüzey Ailesi	16
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	25
KAYNAKLAR	26
ÖZGEÇMİŞ	27

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. $r(s)$ eğrisi ve bu eğriden geçen $P(s, t)$ yüzey ailesi.....	11
Şekil 4.1. $r(s)$ helis eğrisi ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit $P_1(s, t)$ yüzeyi.....	20
Şekil 4.2. $r(s)$ Salkowski eğrisi ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit $P_2(s, t)$ yüzeyi.....	22
Şekil 4.3. $r(s)$ anti-Salkowski eğrisi ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit $P_3(s, t)$ yüzeyi.....	23
Şekil 4.4. $r(s)$ anti-Salkowski eğrisi ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit $P_4(s, t)$ yüzeyi.....	24



1. GİRİŞ

1.1. Tezin Amacı

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, 3-boyutlu Öklid uzayında alınan herhangi bir eğriden geçen ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit olan yüzeyler elde etmek için yeterli şartların bulunması amaçlanmaktadır.

Bu amaç doğrultusunda, ilk olarak, 3-boyutlu Öklid uzayında herhangi bir eğriden geçen yüzey denklemi ele alınacak ve eğri boyunca ortalama eğriliğin sabit olması için sapma fonksiyonlarının sağlanması gereken şartlar elde edilecektir.

1.2. Literatür Özeti

Eğriler ve yüzeyler diferansiyel geometride uzun yıllardır çalışılan konulardır. Birçok bilim adamı eğriler üzerine çalışmalar yapmıştır. Salkowski (1909) yaptığı çalışmada eğriliği sabit olan ve burulması sabit olmayan eğri ailelerini tanımlamıştır. Bu tür eğriler literatürde Salkowski eğrileri olarak bilinmektedir.

Eğri ve yüzeyler birçok endüstriyel uygulamada kullanılmaktadır. Bu nedenle yüzey oluşturma problemleri, özel olarak, verilen bir eğriden geçen ve bu eğriyi özel eğri kabul eden yüzey bulma problemleri birçok bilim insanının ilgisini çekmektedir. Wang vd (2004) bu tür problemi ilk olarak 2004 yılında ortaya atarak verilen bir eğriden geçen ve bu eğriyi ortak geodezik kabul eden yüzeyleri elde etmiştir. Kasap vd (2008) ise Wang vd (2004) tarafından kullanılan sapma fonksiyonlarını genelleştirerek daha genel bir ortak geodezikli yüzey ailesi elde etmiştir. Monterde (2009) yılında yaptığı çalışmada burulması sabit olan ve eğriliği sabit olmayan eğrileri tanımlamıştır. Literatürde bu eğriler Anti-Salkowski eğrileri olarak bilinmektedir.

Li vd (2011) ise ortak eğrilik çizgili yüzey ailesi için yeterli şartları sunmuştur. Ortak asimptotik eğrili yüzey ailesi Bayram vd (2012) tarafından tanımlanmıştır. Ergün vd (2014) ise Li vd (2011) tarafından yapılan çalışmayı 3 boyutlu Minkowski uzayına taşımıştır. Bu çalışmada ise yukarıdaki makaleler ışığında 3 boyutlu Öklid uzayında alınan herhangi bir eğriden geçen ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit olan yüzeyler bulmak için yeterli şartlar elde edildi.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. E^3 te tanımlı, reel değerli bir f fonksiyonunun her mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli ise bu fonksiyona *diferansiyellenebilirdir* veya C^∞ sınıfındandır denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.2. E^3 te bir v_p *tanjant vektörü*, biri p başlangıç noktası ve diğeri de v vektör kısmı olmak üzere iki noktadan oluşur (O'Neill, 1966). $p \in E^3$ olmak üzere başlangıç noktası p olan E^3 teki tüm tanjant vektörlerin kümesine E^3 ün p noktasındaki tanjant uzayı denir ve $T_p(E^3)$ ile gösterilir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.3. E^3 ün her p noktasına bir $V(p) = v_p$ tanjant vektörü karşılık getiren V fonksiyonuna *vektör alanı* denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.4. U_1, U_2 ve U_3 , E^3 üzerinde

$$U_1(p) = (1, 0, 0)_p,$$

$$U_2(p) = (0, 1, 0)_p,$$

$$U_3(p) = (0, 0, 1)_p$$

şeklinde tanımlanan vektör alanları olsun. $\{U_1, U_2, U_3\}$ vektör alanları kümesine E^3 ün *doğal çatı alanı* denir (O'Neill, 1966).

Teorem 2.1.5. V , E^3 üzerinde tanımlı bir vektör alanı ve v_1, v_2, v_3 de E^3 üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$V = v_1 U_1 + v_2 U_2 + v_3 U_3$$

şeklinde tek türlü yazılabilir (O'Neill, 1966).

v_1, v_2, v_3 fonksiyonlarına V vektör alanının *Öklid koordinat fonksiyonları* denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.6. f , E^3 te reel değerli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\overline{v_p} \in T_p(E^3)$ olmak üzere

$$v_p[f] = \frac{d}{dt}(f(p+tv)) \Big|_{t=0}$$

değerine f fonksiyonunun $\overrightarrow{v_p}$ *tanjant vektörü yönündeki türevi* denir (O'Neill, 1966).

Teorem 2.1.7. $v_p = (v_1, v_2, v_3)_p \in T_p(E^3)$ olmak üzere

$$v_p[f] = \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

dir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.8. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $r: I \rightarrow E^3$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna E^3 uzayında bir *eğri* denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.9. E^3 uzayında $r: I \rightarrow E^3$, $r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$ eğrisi verilsin. $\forall t \in I$ için $r(t) \in E^3$ noktasındaki

$$r'(t) = (r'_1(t), r'_2(t), r'_3(t))_{r(t)}$$

tanjant vektörüne r eğrisinin t noktasındaki *hız vektörü* denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.10. $I, J \subset \mathbb{R}$ birer açık aralık, $r: I \rightarrow E^3$ bir eğri, $h: J \rightarrow I$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\beta = r \circ h: J \rightarrow E^3$ bileşke fonksiyonu E^3 te bir eğridir ve bu eğriye, r eğrisinin parametresinin h yardımıyla değiştirilmesiyle elde edilen eğri denir. h fonksiyonuna ise r eğrisinin bir *parametre değişimi* denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.11. $r: I \rightarrow E^3$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için $\|r'\| = 1$ ise r eğrisine *birim hızlı* eğri, $\forall t \in I$ için $\|r'\| \neq 0$ ise r eğrisine *regüler eğri* denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.12. $r: I \rightarrow E^3$ bir eğri olsun. $a \in I$ sabit bir nokta olmak üzere

$$s(t) = \int_a^t \|r'(u)\| du$$

ile tanımlı $s: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna *yay uzunluğu fonksiyonu* denir (O'Neill, 1966).

$$s(b) = \int_a^b \|r'(u)\| du$$

sayısına da r eğrisinin $t=a$ dan $t=b$ ye olan yay uzunluğu adı verilir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.13. $r:I \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $T=r'$ ifadesine r eğrisinin birim *teğet vektör alanı*, $\forall s \in I$ için $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ ifadesine r eğrisinin *eğrilik fonksiyonu*, $\kappa \neq 0$ olmak üzere $N=T'/\kappa$ ifadesine r eğrisinin *asli normal vektör alanı*, $B=T \times N$ ifadesine r eğrisinin *binormal vektör alanı* ve $\{T, N, B\}$ sistemine ise *Frenet çatısı* denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.14. $r:I \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $B' = -\tau N$ ifadesi ile verilen $\tau(s)$, $\forall s \in I$, fonksiyonuna r eğrisinin *burulma fonksiyonu* denir (O'Neill, 1966).

Teorem 2.1.15. $r:I \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri olsun. r eğrisinin eğriligi $\kappa > 0$ ve burulması τ olmak üzere

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

dir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.16. κ , τ , T , N , B ifadelerine eğrinin *Frenet elemanları* denir (O'Neill, 1966).

Teorem 2.1.17. $r:I \rightarrow E^3$ regüler bir eğri olsun. Bu durumda

$$T = \frac{r'}{\|r'\|}, N = B \times T, B = \frac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|}, \kappa = \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^3}, \tau = \frac{\langle r' \times r'', r''' \rangle}{\|r' \times r''\|^2}$$

dir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.18. W , E^3 uzayında bir vektör alanı ve $v_p \in T_p(E^3)$ olsun.

$$\nabla_v W = W(p + tv)'(0) \in T_p(E^3)$$

tanjant vektörüne W vektör alanının p noktasında v vektörü yönündeki *kovaryant türevi* denir (O'Neill, 1966).

Teorem 2.1.19. $W = \sum_{i=1}^3 w_i U_i$, E^3 uzayında bir vektör alanı ve $v_p \in T_p(E^3)$ olsun.

Bu durumda

$$\nabla_v W = \sum_{i=1}^3 v[w_i]U_i(p)$$

dir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.20.

$$\begin{aligned} F: E^n &\rightarrow E^m \\ p &\rightarrow F(f_1(p), f_2(p), \dots, f_m(p)) \end{aligned}$$

fonksiyonunun $f_i: E^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, 2, \dots, m$, koordinat fonksiyonları diferansiyellenebilir ise F fonksiyonuna *dönüşüm* denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.21. $F: E^n \rightarrow E^m$ bir dönüşüm olsun.

$$\begin{aligned} F_*: T_p(E^n) &\rightarrow T_{F(p)}(E^m) \\ v &\rightarrow F_*(v) = \left(\frac{d}{dt} F(p + tv) \right)_{t=0} \end{aligned}$$

fonksiyonuna F dönüşümünün *türev dönüşümü* ve bu dönüşüme standart bazlara göre p noktasında karşılık gelen matrise F dönüşümünün *Jacobiyen matrisi* denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.22. $F: E^n \rightarrow E^m$ bir dönüşüm olmak üzere $\forall p \in E^n$ için F_{*p} türev dönüşümü birebir ise F dönüşümüne *regüler dönüşüm* denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.23. $D \subset E^2$ açık bir küme, $x: D \rightarrow E^3$ bir dönüşüm olsun. Eğer x dönüşümü birebir ve regüler ise bu dönüşüme *koordinat sanal yaması* denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.24. $x: D \rightarrow E^3$ bir koordinat sanal yaması olsun. $x: D \rightarrow x(D)$ dönüşümü birebir ve örten olduğundan x^{-1} vardır. $x^{-1}: x(D) \rightarrow D$ fonksiyonu sürekli ise x dönüşümüne *has sanal yama* denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.25. $M \subset E^3$ ve $p \in M$ olsun. p noktasına uzaklığı bir $\varepsilon > 0$ sayısından küçük olan $x \in M$ noktalarının kümesine, p noktasının M alt kümesindeki ε *komşuluğu* denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.26. $M \subset E^3$ olmak üzere $\forall p \in M$ noktası için görüntüsü p noktasının M kümesindeki bir komşuluğunu kapsayacak şekilde M kümesinde bir x has sanal yaması bulunabiliyorsa M kümesine E^3 te *yüzey* denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.27. $x : D \rightarrow E^3$ has sanal yaması için $M = x(D)$ bir yüzeydir. Bu yüzeye *basit yüzey* denir (O'Neill, 1966).

Teorem 2.1.28.

$$\begin{aligned} g : E^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\rightarrow g(x, y, z) \end{aligned}$$

diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $M = \{(x, y, z) \in E^3 : g(x, y, z) = c\}$ alt kümesinin bir yüzey olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall p \in M$ için $\nabla g(p) \neq 0$ olmasıdır (O'Neill, 1966). Burada ∇g , g fonksiyonunun diferansiyelidir.

Tanım 2.1.29.

$$\begin{aligned} x : D &\rightarrow E^3 \\ (u, v) &\rightarrow x(u, v) \end{aligned}$$

bir koordinat sanal yaması olsun. $\forall (u_0, v_0) \in D$ için $u \rightarrow x(u, v_0)$ eğrisine x eğrisinin $v = v_0$, *u-parametre eğrisi*, $v \rightarrow x(u_0, v)$ eğrisine ise x eğrisinin $u = u_0$, *v-parametre eğrisi* denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.30. $x : D \rightarrow E^3$ bir koordinat sanal yaması ve $(u_0, v_0) \in D$ olsun.

- 1) $v = v_0$, *u-parametre eğrisinin* u_0 noktasındaki hız vektörü $x_u(u_0, v_0)$ ile gösterilir,
- 2) $u = u_0$, *v-parametre eğrisinin* v_0 noktasındaki hız vektörü $x_v(u_0, v_0)$ ile gösterilir,
- 3) $x_u(u_0, v_0)$ ve $x_v(u_0, v_0)$ hız vektörlerine *x sanal yamasının* (u_0, v_0) *daki kısmi hızları* denir (O'Neill, 1966).

Burada u ve v alt indisleri kısmi türevleri göstermektedir. Dolayısıyla x_u ve x_v ; $\forall (u_0, v_0) \in D$ noktasını $x(u_0, v_0) \in E^3$ noktasındaki bir tanjant vektör ile eşleyen D

üzerinde tanımlı fonksiyonlardır. Eğer koordinat sanal yaması Öklid koordinat fonksiyonları ile

$$x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

şeklinde verilmişse, kısmi hız fonksiyonları;

$$x_u = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right)_{x(u, v)}$$

$$x_v = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \right)_{x(u, v)}$$

dir.

Tanım 2.1.31. $M \subset E^3$ bir yüzey olsun. $x(D)$ görüntüsü M yüzeyi üzerinde bulunan bir $x: D \rightarrow E^3$ regüler dönüşümüne M yüzeyi üzerindeki $x(D)$ bölgesinin bir parametrizasyonu (parametrik gösterimi) denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.32. $M \subset E^3$ bir yüzey, $x: D \rightarrow M$ bir koordinat sanal yaması ve $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $f(x)$ koordinat gösterimleri diferansiyellenebilir ise f fonksiyonu diferansiyellenebilirdir denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.33. $M \subset E^3$ bir yüzey ve $I \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık olsun.

$$r: I \rightarrow M$$

$$t \rightarrow r(t)$$

şeklinde verilen diferansiyellenebilir fonksiyona M yüzeyi üzerinde bir eğri denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.34. $M \subset E^3$ bir yüzey ve $p \in M$ bir nokta olsun. Eğer E^3 te bir $\vec{v}_p$ tanjant vektörü p noktasından geçen ve M yüzeyi üzerinde bulunan bir eğrinin p noktasındaki hız vektörü ise $\vec{v}_p$ tanjant vektörüne M yüzeyinin bir teğet vektörü denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.35. M yüzeyinin bir p noktasından geçen tüm teğet vektörlerinin kümesine M yüzeyinin p noktasındaki teğet düzlemi denir ve $T_p(M)$ ile gösterilir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.36. $M \subset E^3$ bir yüzey olsun. M nin her p noktasına E^3 ün bir $Z(p) = \vec{z}_p$ tanjant vektörünü karşılık getiren Z fonksiyonuna M yüzeyi üzerinde bir vektör alanı denir (O'Neill, 1966). M üzerindeki teğet vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.37. $M \subset E^3$ bir yüzey ve Z ise bu yüzey üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer bir $p \in M$ noktasında $Z(p) = \vec{z}_p$ tanjant vektörü $T_p(M)$ teğet düzlemine dikse yani $\vec{z}_p \perp T_p(M)$, M yüzeyinin p noktasındaki tüm teğet vektörlerine dikse $\vec{z}_p$ tanjant vektörüne M yüzeyinin p noktasındaki normal vektörü veya normali denir. Eğer $\forall p \in M$ için $Z(p) = \vec{z}_p$ M ye dik ise Z vektör alanına yüzeyin normal vektör alanı denir (O'Neill, 1966).

$M \subset E^3$ bir yüzey ve $x : D \rightarrow M$ bir koordinat sanal yaması olsun. x_u ve x_v kısmi hızları lineer bağımsız olup $\forall p \in M$ noktasında $T_p(M)$ nin bazı olduğundan $x_u \times x_v$ vektörel çarpımı, M yüzeyi üzerinde bir normal vektör alanıdır.

Tanım 2.1.38. $m \in \mathbb{R} - \left\{0, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ olmak üzere

$$r_m(s) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(-\frac{1-n}{4(1+2n)} \sin((1+2n)s) - \frac{1+n}{4(1-2n)} \sin((1-2n)s) - \frac{1}{2} \sin s, \right. \\ \left. \frac{1-n}{4(1+2n)} \cos((1+2n)s) + \frac{1+n}{4(1-2n)} \cos((1-2n)s) - \frac{1}{2} \cos s, \frac{1}{4m} \cos(2ns) \right)$$

şeklinde tanımlanan eğriye *Salkowski eğrisi* denir. Burada $n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ dir (Salkowski, 1909).

Tanım 2.1.39. $r(s)$ Salkowski Eğrisi için $\|r'_m(s)\| = \frac{\cos(ns)}{\sqrt{1+m^2}}$ dir. Dolayısıyla eğri

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında regülerdir ve $\kappa(s) = 1$ ve $\tau(s) = \tan(ns)$ dir. Frenet elemanları ise

$$T(s) = -\left(\cos(s)\cos(ns) + n\sin(s)\sin(ns), \cos(ns)\sin s - n\cos(s)\sin(ns), \frac{n}{m}\sin(ns)\right)$$

$$N(s) = n\left(\frac{\sin(s)}{m}, \frac{\cos(s)}{m}, -1\right)$$

$$B(s) = \left(n\sin(s)\cos(ns) - \cos(s)\sin(ns), -n\cos(s)\cos(ns) - \sin(s)\sin(ns), \frac{n}{m}\cos(ns)\right)$$

şeklindedir (Salkowski, 1909).

Teorem 2.1.40. $\alpha(s)$ birim hızlı, eğriliği sıfırdan farklı bir eğri olmak üzere

$$r(s) = \int_{s_0}^s B^\alpha(u) du \text{ olsun. } \alpha(s) \text{ ve } r(s) \text{ nin Frenet elemanları, sırasıyla}$$

$$\{T^\alpha, N^\alpha, B^\alpha, \kappa^\alpha, \tau^\alpha\} \text{ ve } \{T^r, N^r, B^r, \kappa^r, \tau^r\} \text{ olmak üzere}$$

$$T^r = B^\alpha, N^r = -N^\alpha, B^r = T^\alpha, \kappa^r = \tau^\alpha, \tau^r = \kappa^\alpha \text{ dır (Nurkan vd, 2019).}$$

Eğrilik negatif olmayacağı için burada $\kappa^r = |\tau^\alpha|$ olmalıdır.

Tanım 2.1.41. $\alpha(s)$ birim hızlı, $\tau^\alpha = 1$ olan, eğriliği sıfırdan farklı bir eğri ve

$$r(s) = \int_{s_0}^s B^\alpha(u) du \text{ olsun.}$$

$$\alpha(s) = \left(\frac{n}{2(4n^2 - 1)m} (n(1 - 4n^2 + 3\cos(2ns))\cos s + (2n^2 + 1)\sin s \sin(2ns)), \right.$$

$$\frac{n}{2(4n^2 - 1)m} (n(1 - 4n^2 + 3\cos(2ns))\sin s - (2n^2 + 1)\cos s \sin(2ns)),$$

$$\left. \frac{n^2 - 1}{4n} (2ns + \sin(2ns)) \right),$$

$n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ ise $\kappa^r = 1$ olup $r(s)$ Salkowski eğrisi, $\alpha(s)$ eğrisi de *Anti-Salkowski eğrisidir* (Monterde, 2009).

Tanım 2.1.42. $M \subset E^3$ bir yüzey ve U ise M nin birim normal vektör alanı olsun.

$\forall v_p \in T_p(M)$ için $S(v_p) = -D_v U$ şeklinde tanımlanan fonksiyona M nin şekil operatörü denir (Abbena vd, 1998).

Tanım 2.1.43. M yüzeyinin bir v_p birim tanjant vektörü yönündeki normal eğriliği

$k(v_p) = \langle S(v_p), v_p \rangle$ ile tanımlanır (Abbena vd, 1998).

Tanım 2.1.44. M yüzeyinin p noktasındaki normal eğriliklerinin maksimum ve minimum değerlerine M nin p noktasındaki asli eğrilikleri denir ve k_1, k_2 ile gösterilir (Abbena vd, 1998).

Tanım 2.1.45. $M \subset E^3$ yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow H(p) = \frac{1}{2} \text{iz} S(p)$$

ile tanımlanır (Abbena vd, 1998).

Teorem 2.1.46. $M \subset E^3$ yüzeyinin ortalama eğriliği $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$

dir (Abbena vd, 1998).

Teorem 2.1.47. $P \subset E^3$ bir yüzey olsun. $P(s, t)$ yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H(s, t) = \left(\frac{\det(P_{ss}, P_s, P_t) \|P_t\|^2 - 2 \det(P_{st}, P_s, P_t) \langle P_s, P_t \rangle + \det(P_{tt}, P_s, P_t) \|P_s\|^2}{2 \left(\|P_s\|^2 \|P_t\|^2 - \langle P_s, P_t \rangle^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) (s, t)$$

dir (Abbena vd, 1998).

$L_1 \leq s \leq L_2$, olacak şekilde $\exists t_0 \in [T_1, T_2]$ bulunmasıdır.

$r(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde geodezik eğri olması için gerekli ve yeterli koşul $P(s, t)$ yüzeyinin normali ile $r(s)$ eğrisinin asli normalinin paralel olmasıdır.

$$P_s(s, t) = (1 + u_s - \kappa(s)v(s, t))T(s) + (\kappa(s)u(s, t) + v_s - \tau(s)w(s, t))N(s) \\ + (\tau(s)v(s, t) + w_s)B(s)$$

ve

$$P_t = u_t T(s) + v_t N(s) + w_t B(s)$$

olmak üzere $P = P(s, t)$ yüzeyinin normal vektör alanı

$$\hat{n}(s, t) = P_s \times P_t$$

dir.

Türev formülleri göz önüne alınırsa yüzeyin normal vektör alanı

$$\phi_1(s, t) = (v_s(s, t) + \kappa(s)u(s, t) - \tau(s)w(s, t))w_t(s, t) \\ - (\tau(s)v(s, t) + w_s(s, t))v_t(s, t), \\ \phi_2(s, t) = (\tau(s)v(s, t) + w_s(s, t))u_t(s, t) \\ - (1 + u_s(s, t) - \kappa(s)v(s, t))w_t(s, t), \\ \phi_3(s, t) = (1 + u_s(s, t) - \kappa(s)v(s, t))v_t(s, t) \\ - (v_s(s, t) + \kappa(s)u(s, t) - \tau(s)w(s, t))u_t(s, t)$$

olmak üzere

$$\hat{n}(s, t) = \phi_1(s, t)T(s) + \phi_2(s, t)N(s) + \phi_3(s, t)B(s)$$

olarak elde edilir. Böylece $t = t_0$ için $u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = 0$, $L_1 \leq s \leq L_2$

olduğundan

$$\phi_1(s, t_0) = (v_s w_t - w_s v_t)(s, t_0), \\ \phi_2(s, t_0) = -(1 - u_s)w_t + w_s u_t(s, t_0), \\ \phi_3(s, t_0) = ((1 + u_s)v_t - v_s u_t)(s, t_0),$$

olmak üzere

$$\hat{n}(s, t_0) = \phi_1(s, t_0)T(s) + \phi_2(s, t_0)N(s) + \phi_3(s, t_0)B(s)$$

olur.

Eğrinin yüzey üzerinde geodezik olması için gerek yeter koşulun $\hat{n}(s, t) \parallel N(s)$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{cases} \phi_2(s, t_0) \neq 0 \\ \phi_1(s, t_0) = \phi_3(s, t_0) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

elde edilir. Ayrıca (3.2) den

$$u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = 0, L_1 \leq s \leq L_2$$

Olup türev tanımından

$$\begin{aligned} u_s(s, t_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(s+h, t_0) - u(s, t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0 \\ v_s(s, t_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(s+h, t_0) - v(s, t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0 \\ w_s(s, t_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(s+h, t_0) - w(s, t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

dır. (3.4) den elde edilenler (3.3) te yerine yazılırsa eğrinin yüzey üzerinde geodezik olması için yeterli şart

$$\begin{cases} w_t(s, t_0) \neq 0 \\ v_t(s, t_0) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

olmasıdır.

Teorem 3.1. Eğriliği sıfırdan farklı, birim hızlı $r(s)$ eğrisinin (3.1) yüzey ailesi üzerinde hem parametre eğrisi hem de geodezik olması için yeterli koşul

$$u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = v_t(s, t_0) = 0 \neq w_t(s, t_0),$$

$L_1 \leq s \leq L_2, t_0 \in [T_1, T_2], (t_0 = \text{sabit})$ olmasıdır.

Daha iyi bir analiz için $u(s, t), v(s, t)$ ve $w(s, t)$ sapma fonksiyonlarını tek değişkenli iki fonksiyonun çarpımı olarak

$$\begin{cases} u(s, t) = l(s)U(t), \\ v(s, t) = m(s)V(t), \\ w(s, t) = n(s)W(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

$L_1 \leq s \leq L_2, T_1 \leq t \leq T_2$, şeklinde ele alalım. Burada $l(s), m(s), n(s), U(t), V(t)$ ve $W(t)$ fonksiyonları C^1 sınıfından fonksiyonlardır.

Teorem 3.2. Sapma fonksiyonları (3.6) daki gibi seçilirse eğriliği sıfırdan farklı, birim hızlı $r(s)$ eğrisinin (3.1) yüzey ailesi üzerinde hem parametre eğrisi hem de geodezik olması için yeterli koşul

$$\begin{cases} U(t_0) = V(t_0) = W(t_0) = 0 \\ W_t(t_0) \neq 0 \neq n(s) \\ V_t(t_0) = 0 \vee m(s) = 0 \end{cases}$$

olmasıdır.

İspat: Eğriliği sıfırdan farklı, birim hızlı $r(s)$ eğrisi verilsin ve sapma fonksiyonları (3.6) daki gibi seçilsin. (3.2) denkleminde $r(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde parametre eğrisi olması için yeterli koşul

$$U(t_0) = V(t_0) = W(t_0) = 0$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} \phi_1(s, t_0) &= (v_s w_t - v_t w_s)(s, t_0), \\ \phi_2(s, t_0) &= -(1 - u_s) w_t + u_t w_s(s, t_0), \\ \phi_3(s, t_0) &= ((1 + u_s) v_t - v_s u_t)(s, t_0), \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\hat{n}(s, t_0) = \phi_1(s, t_0)T(s) + \phi_2(s, t_0)N(s) + \phi_3(s, t_0)B(s)$$

olduğundan geodeziklik koşulu

$$\begin{cases} \phi_2(s, t_0) \neq 0 \\ \phi_1(s, t_0) = \phi_3(s, t_0) = 0 \end{cases}$$

dır. Seçilen sapma fonksiyonları için

$$\begin{aligned} \phi_1(s, t_0) &= 0, \\ \phi_2(s, t_0) &= -n(s)W_t(t_0) \\ \phi_3(s, t_0) &= m(s)V_t(t_0) \end{aligned}$$

dır.

O halde $r(s)$ eğrisinin geodezik olması için yeterli koşul

$$m(s)V_t(t_0) = 0 \text{ ve } -n(s)W_t(t_0) \neq 0$$

olmasıdır.

Buradan

$$\begin{cases} m(s) = 0 & \text{veya} & V_t(t_0) = 0 \\ n(s) \neq 0 & \text{ve} & W_t(t_0) \neq 0 \end{cases}$$

olur ve ispat tamamlanır.



4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. E^3 te Verilen Bir Eğri Boyunca Sabit Ortalama Eğrilikli Yüzey Ailesi

Wang vd (2004) tarafından yapılan çalışma göz önüne alınarak, Li vd (2011) ortak eğrilik çizgili yüzey ailesini tanımlayarak verilen bir eğriden geçen ve bu eğriyi ortak eğrilik çizgisi kabul eden yüzeyler için yeterli koşulları elde etmiştir. Bayram vd (2012) verilen bir eğriyi ortak asimptotik eğri kabul eden yüzeyler için şartları vermiştir.

Tezin orijinal kısmı olan bu bölümde ise E^3 Öklid uzayında verilen bir eğriden geçen ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit olan yüzeyler için yeterli şartlar elde edilecektir. $r(s)$, E^3 Öklid uzayında $\kappa(s)$ eğrilikli, $\tau(s)$ burulmalı, regüler bir eğri olsun. Ayrıca, her s için $r''(s) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $\{T(s), N(s), B(s)\}$, $r(s)$ eğrisinin Frenet çatısı olmak üzere bu eğriden geçen yüzeyler parametrik olarak

$$P(s, t) = r(s) + u(s, t)T(s) + v(s, t)N(s) + w(s, t)B(s), \quad (4.1)$$

$L_1 \leq s \leq L_2$, $T_1 \leq t \leq T_2$, şeklinde ifade edilir.

$r(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde parametre eğrisi olması için yeterli koşul

$$u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = 0, \quad L_1 \leq s \leq L_2 \quad (4.2)$$

olacak şekilde $\exists t_0 \in [T_1, T_2]$ bulunmasıdır.

$P(s, t)$ yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H(s, t) = \left(\frac{\det(P_{ss}, P_s, P_t) \|P_t\|^2 - 2 \det(P_{st}, P_s, P_t) \langle P_s, P_t \rangle + \det(P_{tt}, P_s, P_t) \|P_s\|^2}{2 \left(\|P_s\|^2 \|P_t\|^2 - \langle P_s, P_t \rangle^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) (s, t) \quad (4.3)$$

dir (Abbena vd, 1998).

$r(s)$ eğrisinden geçen $P(s, t)$ yüzeyinin bu eğri boyunca ortalama eğriliğini bulmak için gerekli olan aşağıdaki hesaplamaları yapalım.

$$P_s = r' + u_s T + u T' + v_s N + v N' + w_s B + w B'$$

$$P_s = (\lambda + u_s - \lambda v \kappa) T + (\lambda u \kappa + v_s - \lambda w \tau) N + (\lambda v \tau + w_s) B$$

$$P_t = u_t T + v_t N + w_t B$$

$$P_s(s, t_0) = \lambda T$$

$$P_{ss}(s, t_0) = \lambda' T + \lambda^2 \kappa N$$

$$P_t(s, t) = u_t T + v_t N + w_t B$$

$$P_{ts} = P_{st} = u_{ts} T + u_t T' + v_{ts} N + v_t N' + w_{ts} B + w_t B'$$

$$P_{ts} = P_{st} = (u_{ts} - \lambda \kappa v_t) T + (\lambda \kappa u_t + v_{ts} - \lambda \tau w_t) N + (\lambda \tau v_t + w_{ts}) B$$

$$P_{tt}(s, t) = u_{tt} T + v_{tt} N + w_{tt} B$$

$$\det(P_{ss}, P_s, P_t) = \begin{vmatrix} \lambda' & \lambda^2 \kappa & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ u_t & v_t & w_t \end{vmatrix} = -\lambda^3 \kappa w_t$$

$$\det(P_{st}, P_s, P_t) = \begin{vmatrix} u_{ts} - \lambda \kappa v_t & \lambda \kappa u_t + v_{ts} - \lambda \tau w_t & \lambda \tau v_t + w_{ts} \\ \lambda & 0 & 0 \\ u_t & v_t & w_t \end{vmatrix}$$

$$\det(P_{st}, P_s, P_t) = -\lambda \left[w_t (\lambda \kappa u_t + v_{ts} - \lambda \tau w_t) - v_t (\lambda \tau v_t + w_{ts}) \right]$$

$$\det(P_{tt}, P_s, P_t) = \begin{vmatrix} u_{tt} & v_{tt} & w_{tt} \\ \lambda & 0 & 0 \\ u_t & v_t & w_t \end{vmatrix} = -\lambda (v_{tt} w_t - v_t w_{tt})$$

$$\|P_t\|^2 = u_t^2 + v_t^2 + w_t^2, \quad \|P_s\|^2 = \lambda^2, \quad \langle P_s, P_t \rangle = \lambda u_t$$

Yukarıdaki hesaplamalar (4.3) denkleminde yerine yazılırsa $r(s)$ eğrisinden geçen

$P(s, t)$ yüzeyinin bu eğri boyunca ortalama eğriliği

$$H(s, t_0) = \left(-\lambda \kappa w_t (u_t^2 + v_t^2 + w_t^2) + 2u_t \left[w_t (\lambda \kappa u_t + v_{ts} - \lambda \tau w_t) - v_t (\lambda \tau v_t + w_{ts}) \right] - \lambda (v_{tt} w_t - v_t w_{tt}) \right) \frac{1}{2\lambda (v_t^2 + w_t^2)^{3/2}} (s, t_0) \quad (4.4)$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.1.1. (4.1) ile verilen $P(s, t)$ yüzeyinin $r(s)$ eğrisi boyunca ortalama eğriliğinin sabit olması için yeterli koşul $L_1 \leq s \leq L_2$, $T_1 \leq t \leq T_2$, $t_0 \in [T_1, T_2]$, olmak üzere aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır.

$$(i) \quad u_t(s, t_0) = v_t(s, t_0) \neq 0 \equiv u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = w_t(s, t_0) = w_{tt}(s, t_0), \quad \tau(s) = s b t,$$

- (ii) $u_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) \neq 0 \equiv u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = v_t(s, t_0) = v_{tt}(s, t_0), \tau(s) = sbt,$
 (iii) $u_t(s, t_0) = v_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) \neq 0 \equiv u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0), \kappa(s) + 4\tau(s) = sbt,$
 (iv) $v_t(s, t_0) \neq 0 \equiv u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = u_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) = w_{tt}(s, t_0),$
 (v) $v_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) \neq 0 \equiv u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = u_t(s, t_0), \kappa(s) = sbt.$

İspat:

(i) Bir $r(s)$ eğrisi verilsin. (4.2) denkleminde $r(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde parametre eğrisi olması için yeterli koşul

$$u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = 0$$

olmasıdır. Ayrıca $u_t(s, t_0) = v_t(s, t_0) \neq 0 \equiv w_t(s, t_0) = w_{tt}(s, t_0)$ olarak alınırsa (4.4) denklemi

$$H(s, t_0) = \frac{-2\lambda(s)\tau(s)u_t(s, t_0)v_t^2(s, t_0)}{2\lambda(s)v_t^3(s, t_0)} = -\tau(s)$$

denklemine dönüşür. O halde, eğri boyunca ortalama eğriliğin sabit olması için $\tau(s) = sbt$ olmalıdır. Anti-Salkowski eğrileri buna örnektir.

(ii) Bir $r(s)$ eğrisi verilsin. (4.2) denkleminde $r(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde parametre eğrisi olması için yeterli koşul

$$u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = 0$$

olmasıdır. Ayrıca $u_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) \neq 0 \equiv v_t(s, t_0) = v_{tt}(s, t_0)$ olarak alınırsa (4.4) denklemi

$$H(s, t_0) = \frac{-2\lambda(s)\kappa(s)w_t^3(s, t_0) + 2\lambda(s)w_t^3(s, t_0)(\kappa(s) - \tau(s))}{2\lambda(s)w_t^3(s, t_0)} = -\tau(s)$$

denklemine dönüşür. O halde, eğri boyunca ortalama eğriliğin sabit olması için $\tau(s) = sbt$ olmalıdır. Anti-Salkowski eğrileri buna örnektir.

(iii) Bir $r(s)$ eğrisi verilsin. (4.2) denkleminde $r(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde parametre eğrisi olması için yeterli koşul

$$u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = 0$$

olmasıdır. Ayrıca $u_t(s, t_0) = v_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) \neq 0$ olarak alınırsa (3.4) denklemi

$$H(s, t_0) = \frac{-3\lambda(s)\kappa(s)w_t^3(s, t_0) + 2\lambda(s)w_t^3(s, t_0)(\kappa(s) - \tau(s)) - 2\lambda(s)w_t^3(s, t_0)\tau(s)}{4\sqrt{2}\lambda(s)w_t^3(s, t_0)}$$

$$H(s, t_0) = \frac{-(\kappa(s) + 4\tau(s))}{4\sqrt{2}}$$

denklemine dönüşür. O halde, eğri boyunca ortalama eğriliğin sabit olması için $\kappa(s) + 4\tau(s) = \text{sbt}$ olmalıdır. Helis eğrileri buna örnektir.

$$(iv) \quad u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = u_t(s, t_0) = 0$$

alınırsa $P_s(s, t_0) \perp P_t(s, t_0)$ olur ve ortalama eğrilik fonksiyonu

$$H(s, t_0) = \left[\left(\kappa(s)w_t(v_t^2 + w_t^2) + (v_{tt}w_t - v_tw_{tt}) \right) \frac{-1}{2(v_t^2 + w_t^2)^{3/2}} \right] (s, t_0) \quad (4.5)$$

şekline dönüşür.

$v_t(s, t_0) \neq 0 = w_t(s, t_0) = w_{tt}(s, t_0)$ (4.5) te yerine yazılırsa $H(s, t_0) = 0 = \text{sbt}$ olur.

(v) $v_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) \neq 0$ (4.5) te yerine yazılırsa $H(s, t_0) = \frac{-\kappa(s)}{2\sqrt{2}}$ olur.

Ortalama eğriliğin sabit olması için $\kappa(s) = \text{sbt}$ olmalıdır. Salkowski eğrileri buna örnektir.

Örnek 4.1.2. $r(s) = \left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2}s \right)$, $-2 \leq s \leq 2$ helis eğrisi verilsin.

Bu

eğrinin Frenet çatısı

$$\begin{cases} T(s) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2}s \right), \\ N(s) = \left(-\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), -\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), 0 \right), \\ B(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2}s \right) \end{cases}$$

dır.

Eğer sapma fonksiyonları $u(s, t) = t$, $v(s, t) = t$, $w(s, t) = t$, $s \in [-2, 2]$, $t \in [-2, 2]$ olarak seçilirse $r(s)$ eğrisinden geçen yüzeyin denklemi

$$P_1(s, t) = \left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right) - t \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right) - t \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2}s + \sqrt{2}t \right)$$

olur (Şekil 4.1).

$t_0 = 0$ için $u_t(s, t_0) = v_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) \neq 0 \equiv u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0)$ dır.

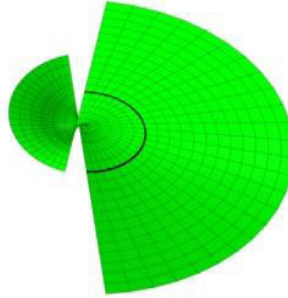
Yani (4.2) den $r(s)$ eğrisi $P_1(s, t)$ yüzeyinin bir parametre eğrisidir.

$u_t(s, t_0) = v_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) \neq 0 \equiv u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0)$ ifadeleri (4.4)

denkleminde yerine yazılırsa $P_1(s, t)$ yüzeyinin $r(s)$ eğrisi boyunca ortalama eğriliği

$$H(s, t_0) = \frac{-\kappa(s) - 4\tau(s)}{4\sqrt{2}} \text{ olarak elde edilir. } \kappa(s) = \tau(s) = \frac{1}{2} \text{ olduğundan } P_1(s, t)$$

yüzeyinin $r(s)$ eğrisi boyunca ortalama eğriliği sabittir.



Şekil 4.1: $r(s)$ helis eğrisi ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit $P_1(s, t)$ yüzeyi.

Örnek 4.1.3.

$$r(s) = \frac{3}{\sqrt{10}} \left(\frac{\sqrt{10}-10}{40+8\sqrt{10}} \sin\left(\frac{5+\sqrt{10}}{5}s\right) - \left(\frac{\sqrt{10}+10}{40-8\sqrt{10}}\right) \sin\left(\frac{5-\sqrt{10}}{5}s\right) - \frac{1}{2} \sin s, \right. \\ \left. \frac{\sqrt{10}-10}{40+8\sqrt{10}} \cos\left(\frac{5+\sqrt{10}}{5}s\right) + \left(\frac{\sqrt{10}+10}{40-8\sqrt{10}}\right) \cos\left(\frac{5-\sqrt{10}}{5}s\right) + \frac{1}{2} \cos s, \right. \\ \left. \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}s\right) \right),$$

$-2 \leq s \leq 2$, eğrisi verilsin. Bu eğrinin Frenet çatısı

$$\left\{ \begin{array}{l} T(s) = \left(-\cos s \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) - \frac{\sqrt{10}}{10} \sin s \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right), \right. \\ \quad \left. -\sin s \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) + \frac{\sqrt{10}}{10} \cos s \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right), \frac{3\sqrt{10}}{10} \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \right) \\ N(s) = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10} \sin(s), -\frac{3\sqrt{10}}{10} \cos(s), -\frac{\sqrt{10}}{10} \right), \\ B(s) = \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \sin(s) - \cos s \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right), \right. \\ \quad \left. -\frac{\sqrt{10}}{10} \cos s \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) - \sin s \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right), \frac{3\sqrt{10}}{10} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \right) \end{array} \right.$$

dır. Eğer sapma fonksiyonları

$u(s, t) = 0, v(s, t) = t, w(s, t) = t, s \in [-2, 2], t \in [-2, 2]$ olarak seçilirse $r(s)$ eğrisinden geçen yüzeyin denklemi

$$\begin{aligned} P_2(s, t) = & \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \left(\frac{\sqrt{10}-10}{40+8\sqrt{10}} \sin\left(\frac{5+\sqrt{10}}{5}s\right) - \left(\frac{\sqrt{10}+10}{40-8\sqrt{10}} \right) \sin\left(\frac{5-\sqrt{10}}{5}s\right) - \frac{1}{2} \sin s \right) \right. \\ & + t \left(\frac{3\sqrt{10}}{10} \sin(s) + \frac{\sqrt{10}}{10} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \sin(s) - \cos s \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \right), \\ & \frac{3}{\sqrt{10}} \left(\frac{\sqrt{10}-10}{40+8\sqrt{10}} \cos\left(\frac{5+\sqrt{10}}{5}s\right) + \left(\frac{\sqrt{10}+10}{40-8\sqrt{10}} \right) \cos\left(\frac{5-\sqrt{10}}{5}s\right) + \frac{1}{2} \cos s \right) \\ & + t \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10} \cos(s) - \frac{\sqrt{10}}{10} \cos s \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) - \sin s \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \right), \\ & \left. \frac{3}{\sqrt{10}} \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}s\right) + t \left(-\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \right) \right) \end{aligned}$$

olur (Şekil 4.2). $t_0 = 0$ için

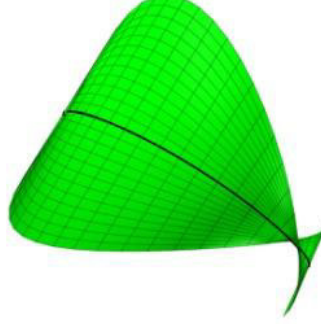
$v_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) = 1 \neq 0 \equiv u_t(s, t_0) = u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0)$ dır. Yani (4.2)

denkleminde $r(s)$ eğrisi $P_2(s, t)$ yüzeyinin bir parametre eğrisidir.

$v_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) = 1$ ifadeleri (4.5) denkleminde yerine yazılırsa $H(s, t_0) = \frac{-\kappa(s)}{2\sqrt{2}}$

olur.

$\kappa(s)=1$ olduğundan $r(s)$ eğrisi Salkowski eğrisi olup $P_2(s, t)$ yüzeyinin $r(s)$ eğrisi boyunca ortalama eğriliği sabittir.



Şekil 4.2: $r(s)$ Salkowski eğrisi ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit $P_2(s, t)$ yüzeyi.

Örnek 4.1.4.

$$r(s) = \left(\begin{aligned} & \frac{-\sqrt{10}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \left(\frac{3}{5} + 3 \cos \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s \right) \right) \cos s + \frac{6}{5} \sin s \sin \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s \right) \right), \\ & \frac{-\sqrt{10}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \left(\frac{3}{5} + 3 \cos \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s \right) \right) \sin s - \frac{6}{5} \cos s \sin \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s \right) \right), \\ & \frac{-9}{4\sqrt{10}} \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s + \sin \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s \right) \right) \end{aligned} \right),$$

$-1 \leq s \leq 1$, eğrisi verilsin. Bu eğrinin Frenet çatısı

$$\left\{ \begin{aligned} T(s) &= \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \cos \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) \sin(s) - \cos s \sin \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right), \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sqrt{10}}{10} \cos s \cos \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) - \sin s \sin \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right), \frac{3\sqrt{10}}{10} \cos \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) \right) \\ N(s) &= \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10} \sin(s), \frac{3\sqrt{10}}{10} \cos(s), \frac{\sqrt{10}}{10} \right), \\ B(s) &= \left(-\cos s \cos \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) - \frac{\sqrt{10}}{10} \sin s \sin \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right), \right. \\ & \quad \left. -\sin s \cos \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) + \frac{\sqrt{10}}{10} \cos s \sin \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right), \frac{3\sqrt{10}}{10} \sin \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) \right) \end{aligned} \right.$$

dır. Eğer sapma fonksiyonları $u(s, t) = t$, $v(s, t) = t$, $w(s, t) = 0$, $s \in [-1, 1]$, $t \in [-1, 1]$ olarak seçilirse $r(s)$ eğrisinden geçen yüzeyin denklemi

$$\begin{aligned} P_3(s, t) = & \left(\frac{-\sqrt{10}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \left(\frac{3}{5} + 3 \cos \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s \right) \right) \cos s + \frac{6}{5} \sin s \sin \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s \right) \right) \right. \\ & + t \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \cos \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) \sin(s) - \cos s \sin \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) + \frac{3\sqrt{10}}{10} \sin(s) \right), \\ & \frac{-\sqrt{10}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \left(\frac{3}{5} + 3 \cos \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s \right) \right) \sin s - \frac{6}{5} \cos s \sin \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s \right) \right) \\ & + t \left(-\frac{\sqrt{10}}{10} \cos s \cos \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) - \sin s \sin \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) + \frac{3\sqrt{10}}{10} \cos(s) \right), \\ & \left. \frac{-9}{4\sqrt{10}} \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s + \sin \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s \right) \right) + t \left(\frac{3\sqrt{10}}{10} \cos \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) + \frac{\sqrt{10}}{10} \right) \right) \end{aligned}$$

Olur (Şekil 4.3). $t_0 = 0$ için

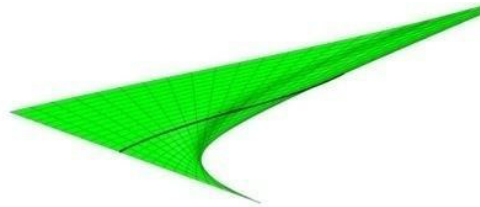
$$u_t(s, t_0) = v_t(s, t_0) \neq 0 \equiv w_t(s, t_0) = u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) \text{ dır.} \quad \text{Yani (4.2)}$$

denkleminde $r(s)$ eğrisi $P_3(s, t)$ yüzeyinin bir parametre eğrisidir.

$u_t(s, t_0) = v_t(s, t_0) = 1$ ifadeleri (4.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$H(s, t_0) = \frac{-2u_t v_t^2 \lambda \tau(s)}{2\lambda v_t^3} = -\tau(s) \text{ olur.}$$

$\tau(s) = 1$ olduğundan $r(s)$ eğrisi anti-Salkowski eğrisi olup $P_3(s, t)$ yüzeyinin $r(s)$ eğrisi boyunca ortalama eğriliği sabittir.



Şekil 4.3: $r(s)$ anti-Salkowski eğrisi ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit $P_3(s, t)$ yüzeyi.

Aynı eğri için sapma fonksiyonları $u(s, t) = t$, $v(s, t) = 0$, $w(s, t) = t$,

$s \in [-1, 1], t \in [-1, 1]$ olarak seçilirse $r(s)$ eğrisinden geçen yüzeyin denklemi

$$P_4(s, t) = \left(\frac{-\sqrt{10}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \left(\frac{3}{5} + 3 \cos \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s \right) \right) \cos s + \frac{6}{5} \sin s \sin \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s \right) \right) \right. \\ \left. + t \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \sin s \left(\cos \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) - \sin \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) \right) - \cos s \left(\sin \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) + \cos \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) \right) \right) \right), \\ \frac{-\sqrt{10}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \left(\frac{3}{5} + 3 \cos \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s \right) \right) \sin s - \frac{6}{5} \cos s \sin \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s \right) \right) \\ \left. + t \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \cos s \left(\sin \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) - \cos \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) \right) - \sin s \left(\sin \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) + \cos \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) \right) \right) \right), \\ \frac{-9}{4\sqrt{10}} \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s + \sin \left(\frac{2}{\sqrt{10}} s \right) \right) + t \left(\frac{3\sqrt{10}}{10} \cos \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) + \frac{3\sqrt{10}}{10} \sin \left(\frac{\sqrt{10}}{10} s \right) \right) \Bigg)$$

olur (Şekil 4.4). $t_0 = 0$ için

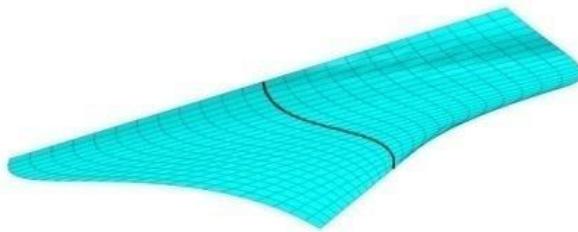
$u_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) \neq 0 \equiv v_t(s, t_0) = u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0)$ dır. Yani (4.2) den

$r(s)$ eğrisi $P_4(s, t)$ yüzeyinin bir parametre eğrisidir.

$u_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) = 1$ ifadeleri (4.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$H(s, t_0) = \frac{-2u_t w_t^2 \lambda \tau(s)}{2\lambda w_t^3} = -\tau(s) \text{ olur.}$$

$\tau(s) = 1$ olduğundan $P_4(s, t)$ yüzeyinin $r(s)$ eğrisi boyunca ortalama eğriliği sabittir.



Şekil 4.4: $r(s)$ anti-Salkowski eğrisi ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit $P_4(s, t)$ yüzeyi.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada 3 boyutlu Öklid uzayında alınan herhangi bir eğriden geçen ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit olan yüzeyler bulmak için yeterli şartlar elde edildi. Elde edilen bazı şartlar için verilen eğrinin helis, Salkowski veya anti-Salkowski eğrisi olması gerekmektedir. Bunu yanı sıra, verilen keyfi bir eğriden geçen ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit olan yüzeyler için de yeterli şartlar verilmiştir.

Bu çalışma ışığında, verilen herhangi bir eğriden geçen ve her noktasında sabit ortalama eğriliğe sahip yüzeyler bulma problemi ele alınabilir. Bu çalışmaya benzer şekilde, farklı uzaylarda yeterli şartlar araştırılabilir.



KAYNAKLAR

- Abbena, E., Salamon, S., Gray, A. (1998). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Third Edition.
- Bayram, E., Güler, F., Kasap, E. (2012). *Parametric representation of a surface pencil with a common asymptotic curve*. Comput. Aided Des., 44: 637-643.
- Ergün, E., Bayram, E., Kasap, E. (2014). *Surface pencil with a common line of curvature in Minkowski 3-space*. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 30 (12): 2103-2118.
- Kasap, E., Akyıldız, F.T., Orbay, K. (2008). *A generalization of surfaces family with common spatial geodesic*. Appl. Math. Comput., 201: 781-789.
- Li, C.Y., Wang, R.H., Zhu, C.G. (2011). *Parametric representation of a surface pencil with a common line of curvature*. Comput. Aided Des., 43 (9): 1110-1117.
- Monterde, J. (2009). *Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion*. Comput. Aided Geom. Des., 26: 271-278
- Nurkan, S.K., Güven, İ.A., Karacan, M.K. (2019). *Characterizations of adjoint curves in Euclidean 3-space*. Proc. Natl. Acad. Sci., India, Sect. A Phys. Sci., 89 (1): 155-161.
- O'Neill, B. (1966). *Elementary Differential Geometry*. Academic Press Inc., New York.
- Salkowski, E. (1909). *Zur Transformation von Raumkurven*. Mathematische Annalen 66 (4): 517-557.
- Wang, G.J., Tang, K., Tai, C.L. (2004). *Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic*. Comput. Aided Des., 36 (5): 447-59.