



**T.C.  
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**DOKTORA TEZİ**

**GENEL RÖLATİVİTE TEORİSİNE KARANLIK MADDE VE  
KARANLIK ENERJİYE ALTERNATİF OLACAK ŞEKİLDE  
KIZILÖTESİ DÜZELTMELER**

**Diyadin CAN**

**Fizik Anabilim Dalı**

**Matematiksel Fizik Programı**

**DANIŞMAN**

**Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ**

**II. DANIŞMAN**

**Prof. Dr. Jorge Louis Cervantes COTA**

**Ekim, 2021**

**İSTANBUL**

Bu çalışma, 12.10.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı, Matematiksel Fizik Programında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

### Tez Jürisi

Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ (Danışman)  
İstanbul Üniversitesi  
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Arzu ÇİLLİ  
Yıldız Teknik Üniversitesi  
Fen-Edebiyat Fakültesi

Doç. Dr. Göksel DAYLAN ESMER  
İstanbul Üniversitesi  
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Değer SOFUOĞLU  
İstanbul Üniversite  
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Sezgin AYGÜN  
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi  
Fen-Edebiyat Fakültesi



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi’nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

## ÖNSÖZ

Tez çalışmamın başlangıcında danışmanlığımı yürüten Prof. Dr. Şehsuvar Zebitay ile, O'nun emekliliğinden sonra danışmanlığımı üstlenen Prof. Dr. Haşim Mutuş'a, her türlü destek ve teşviklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım. Ardından tezi tamamlama aşamasında danışmanlığımı üstlenen Doç. Dr. Ertan Güdekli'ye teşekkür ederim.

Uzun ve yoğun çalışmaların ardından nihayet tamamlanan bu doktora tez için kendisi ile çalışmaya başladığım Prof. Dr. Louis Cervantes Cota'ya, Matematiksel Fizik Anabilim Dalı öğretim üyelerinden Doç. Dr. Göksel Daylan Esmer'e, ve çalışmalarımıza değerli katkılarda bulunan Dr. Öğr. Üyesi Değer Sofuoğlu'na teşekkürlerimi sunarım.

Ekim 2021

Diyadin CAN

# İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ .....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ŞEKİL LİSTESİ .....	vii
TABLO LİSTESİ.....	xiii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ .....	xiv
ÖZET .....	xvii
SUMMARY .....	xix
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. GENEL KISIMLAR</b> .....	<b>7</b>
2.1. EINSTEIN ALAN DENKLEMLERİ .....	7
2.2. RÖLATİVİST KOZMOLOJİ .....	9
2.2.1. FLRW Evren Modelleri.....	9
2.2.2. Kozmolojik Evrim .....	11
2.3. KOZMİK İVMELENME.....	13
2.3.1. Karanlık Enerji .....	14
2.3.2. GRT'ye Alternatif Değişikliğe Uğratılmış Gravite Teorileri.....	16
<b>3. MALZEME VE YÖNTEM</b> .....	<b>19</b>
3.1. 4-BOYUTLU UZAY-ZAMAN GEOMETRİSİNİN TEMEL TANSÖRLERİ.....	19
3.2. 1+3 KOVARYANT AYRIŞIM YÖNTEMİ .....	23
3.2.1. Akışkanın Kinematik Büyüklükleri.....	25
3.2.2. Akışkanın Dinamik Büyüklükleri.....	26
3.2.3. Kovaryant Evrim ve Bağ Denklemleri .....	27
3.3. TETRAD FORMALİZMİ.....	28
3.3.1. Ortonormal Tetrad Çatısı.....	32
3.3.2. RW-Metriği ve Geometrik Büyüklükler .....	34
3.4. ENERJİ KOŞULLARI.....	37
<b>4. BULGULAR</b> .....	<b>40</b>
4.1. $F(R,G,T)$ -GRAVİTE'NİN ALAN DENKLEMLERİ.....	40
4.2. EFEKTİF AKIŞKAN YAKLAŞIMI .....	41

4.3. RW MODELİNDE $F(R,G,T)$ –GRAVİTE’NİN ALAN DENKLEMLERİNİN HESABI .....	45
4.4. ENERJİ-MOMENTUM TANSÖRLERİNİN SÜREKLİLİK DENKLEMLERİ ..	48
4.4.1. ( $L_m = p^m$ , I. YORUM) .....	49
4.4.2. ( $L_m = -\mu^m$ , I. YORUM).....	53
4.5. ( $L_m = p^m$ , I. VE II. YORUM) İÇİN STANDART MADDENİN SÜREKLİLİK DENKLEMİNİN İNTEGRASYONU .....	53
4.5.1 Lineer Barotropik Hal Denklemi Varsayımı: .....	53
4.5.2. $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{T}$ Türevlerinin Genel İfadeleri: .....	54
4.5.3. Standart Maddenin Korunduğu Durum: .....	56
4.5.4. Sıradan Maddenin Korunmadığı Durum: .....	59
4.6. ( $L_m = -\mu^m$ , I. VE II. YORUM) İÇİN STANDART MADDENİN SÜREKLİLİK DENKLEMİNİN İNTEGRASYONU: .....	61
4.7 KARANLIK ENERJİ HAL PARAMETRESİ.....	64
4.8. BOYUTSUZLAŞTIRMA .....	66
4.8.1. Kozmolojik Değişkenler:.....	66
4.8.2. ( $L_m=p^m$ , I. YORUM).....	69
4.8.3. ( $L_m=p^m$ , II. YORUM).....	74
4.8.4 ( $L_m = -\mu^m$ , I. ve II. YORUM) .....	75
4.9. KOZMOLOJİK GÜVENİLİRLİLİK.....	77
4.10. MODELLER .....	81
4.10.1. $f(R)$ – Modelleri: .....	81
4.10.2. $f(R, G)$ – Modelleri: .....	120
4.10.3. $f(R, T)$ – Modelleri:.....	137
<b>5. TARTIŞMA VE SONUÇ .....</b>	<b>170</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>178</b>
<b>EKLER .....</b>	<b>188</b>
EK A. $f(R, G, T)$ GRAVİTE’NİN ALAN DENKLEMLERİNİN METRİĞE GÖRE VARYASYONLA ÇIKARTILIŞI.....	188
EK B. BAZI SABİTLER VE BOYUTLARI.....	196
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>197</b>

## ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

**Şekil 4.1:**  $L_m = p^m$ , *I.* ve *II. YORUM* için, sıradan maddenin korunduğu durumda; (a):  $\gamma - w$  değişimi ve (b):  $w - \gamma$  değişimi. (a) da  $(w, \gamma) = (-1/3, 0)$  ve  $(1/3, 3/4)$  koordinatlı noktalar ve (b) de  $(\gamma, w) = (0, -1/3)$  ve  $(3/4, 1/3)$  koordinatlı noktalar, dışarılanmış oldukları belirtilmek üzere, boş yuvarlakçıklarla gösterilmiştir.  $-1/3 < w < 1/3$  (ya da  $0 < \gamma < 3/4$ ) için  $T < 0$ ;  $w = 1/3$  (ya da  $\gamma = 3/4$ ) için  $T = 0$  ve  $1/3 < w \leq +1$  (ya da  $3/4 < \gamma \leq +1$  için)  $T > 0$  dir.....58

**Şekil 4.2:**  $F(r) = r - 2r^\alpha$  (sol panel) ve  $F(r) = r + K_1 r^{0.5}$  (sağ panel) modelleri için,  $F_r$  ile  $F_{rr}$  nin, sırasıyla,  $\alpha$  ya ve  $K_1$  e göre değişimleri.  $F_r > 0$  ve  $F_{rr} > 0$  eşitsizliklerini aynı anda sağlayan  $\alpha$  ya da  $K_1$  değerleri, tanım ve değer kümeleri daraltılmış olmasına rağmen, skala nedeniyle net olarak okunamamaktadır; nümerik analiz ile bunları:  $F(r) = r - 2r^\alpha$  için  $0 < \alpha < 0.802$  ve  $F(r) = r + K_1 r^{0.5}$  için  $-6.591 < K_1 < 0$  olarak bulmaktayız.....84

**Şekil 4.3:**  $F(r) = r - 2r^\alpha$  modelinde NEC, WEC, SEC, DEC' in  $\alpha$  ya göre değişimleri. Sol panel *I. YORUM*; sağ panel ise *II. YORUM* içindir.....85

**Şekil 4.4:**  $F(r) = r + K_1 r^{0.5}$  modelinde NEC, WEC, SEC, DEC'in  $K_1$  e göre değişimleri. Sol panel *I. YORUM*; sağ panel ise *II. YORUM* içindir.....85

**Şekil 4.5:**  $w_{KE}$  nin *I. YORUM* (sol panel) ve *II. YORUM* (sağ panel) çerçevesinde  $\alpha$  ya göre değişimi. Taralı band  $-1.2 \leq w_{KE} \leq -0.8$  aralığını;  $w_{KE} = -1$  olan yatay noktalı çizgi ise süper-ivmelenmenin üst sınırını göstermektedir.....86

**Şekil 4.6:**  $K_1 - \alpha$  düzleminin:  $F_{r,0} > 0$  (sol panel);  $F_{rr,0} > 0$  (orta panel) ve  $(F_{r,0} > 0$  ve  $F_{rr,0} > 0)$  (sağ panel) koşullarıyla kısıtlandırılması (sağ paneldeki bölge diğer panellerdeki bölgelerin kesişimidir)..87

**Şekil 4.7:**  $(NEC \geq 0$  ve  $WEC \geq 0$  ve  $SEC < 0$  ve  $DEC \geq 0)$  koşulunu sağlayan bölgeler. Sol panel *I. YORUM*; sağ panel ise *II. YORUM* içindir.....87

**Şekil 4.8:**  $(F_{r,0} > 0$  ve  $F_{rr,0} > 0)$  ile  $(NEC \geq 0$  ve  $WEC \geq 0$  ve  $SEC < 0$  ve  $DEC \geq 0)$  koşullarınının birlikte ( $\equiv$  *1.koşul takımı*) sağlandığı bölgeler (koyu kırmızı ile gösterilmiştir). Bunlar, Şekil 4.6 daki mavi bölge ile Şekil 4.7 deki kırmızı bölgelerin kesişimidir. Sol panel *I. YORUM*; sağ panel ise *II. YORUM* içindir.....87

**Şekil 4.9:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  tipindeki modellerin,  $(w, \Omega_{k,0}) = (0, 0)$  durumu için *I.* ve *II. YORUM* altında, *1.* ve *2. koşul takımları* ile süper-ivmeye ilişkin analiz sonuçları. Sol ve sağ paneller, sırasıyla, *I. YORUM* ve *II. YORUM* için olup, üst panellerde, *1. koşul takımı*'nı sağlayan ("kırmızı+siyah"); orta panellerde de *2. koşul takımı*'nı sağlayan ("pembe+gri")  $(K_1, \alpha)$  ikilileri gösterilmektedir. Her bir *koşul takımı* için

süper-ivmeli ( $w_{KE} < -1$ ) modeller, sırasıyla, siyah ve gri renk ile belirtilmiştir. Alt panellerde ise, üst ve orta panellerin üstüste bindirilmiş gösterimi yer almaktadır ve bu durum için, metinde belirtildiği gibi, pembe ve gri bölgeler ile aynı zamanda üst panellerdeki kırmızı ve siyah bölgeler kastedilmektedir.....90

**Şekil 4.10:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  tipindeki modellerde, özel  $(w, \Omega_{k,0})$  parametre değerlerine göre *I. YORUM* altında, *1. ve 2. koşul takımları*'nın sağlanması. Renkli bölgelerin anlamı, Şekil 4.9 da kullanıldığı gibidir.....93

**Şekil 4.11:** Şekil 4.10 un *II. YORUM* için benzeri.....94

**Şekil 4.12:** Önce:  $\Omega_{k,0} = 0, w = \text{serbest}$  ve sonra da:  $w = 0, \Omega_{k,0} = \text{serbest}$  alındığı ve de  $K_1$  kuplaj sabitinin peşinen  $K_1 = -1$  olarak seçilmiş olduğu  $F(r) = r - r^\alpha$  modelinde, *I. YORUM* (sol panel) ile *II. YORUM*'a (sağ panel) göre, *1. ve 2. koşul takım*'larını sağlayan modellerin  $w - \alpha$  düzleminde (üst paneller) ve  $\Omega_{k,0} - \alpha$  düzleminde (alt paneller) gösterimleri. Renklerin anlamı metinde anlatıldığı gibidir.....97

**Şekil 4.13:** Hem kuplaj sabiti  $K_1$  in ve hem de üs parametresi  $\alpha$  nın peşinen seçilmiş olduğu  $F(r) = r - r^{0.2}$  (üst panel) ve  $F(r) = r - 0.5r^{0.2}$  (alt panel) gibi iki özel  $F(r)$  modelinde, *I. YORUM* (sol panel) ile *II. YORUM*'a (sağ panel) göre, *1. ve 2. koşul takım*'larına uyan modellerin  $w - \Omega_{k,0}$  düzleminde gösterimleri. Renklerin anlamı metinde anlatıldığı gibidir.....99

**Şekil 4.14:**  $(w, \Omega_{k,0}) = (0,0)$  için  $F(r) = K_1 r^\alpha$  tipindeki modellerin Şekil 4.9 dakine benzer analizi. Sol ve sağ paneller, sırasıyla, *I. ve II. YORUM* içindir (tarama için  $\Delta K_1 = 0.02$  ve  $\Delta \alpha = 0.01$  alınmıştır).....102

**Şekil 4.15:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  modelinde *1. koşul takımı*'na göre,  $\alpha = \text{tamsayı}$  ( $-5 \leq \alpha \leq 7$ ) doğruları için,  $0.0001 \leq K_1 \leq 0.1, \Delta K_1 = 0.001$  taraması.....102

**Şekil 4.16:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  modelinde *I. ve II. YORUM*'lar altında *1. ve 2. koşul takım*'larına göre,  $\alpha = \text{tamsayı}$  doğruları için  $0.0001 \leq K_1 \leq 0.1, \Delta K_1 = 0.001$  taraması.....104

**Şekil 4.17:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha + K_2 r^\beta$  modelinde seçilmiş bazı  $(K_1, K_2)$  ikilileri için her iki *YORUM* altında *1. ve 2. koşul takımlarının* sağlanma durumlarının  $\alpha - \beta$  düzleminde gösterimi. Renklerin anlamı, metinde daha önce açıklandığı gibidir. Özellikle *II. YORUM*'da görülen noktalı ve aralıklı görünüm,  $\Delta \alpha$  aralığı daha da dar alınarak bertaraf edilebilirse de, söz konusu görünümün yeteri kadar fikir vermesinden dolayı, buna gerek görmüyoruz.....105

**Şekil 4.18:**  $F(r) = K_1 r^\alpha + K_2 r^\beta$  için Şekil 4.17'nin benzeri.....107

**Şekil 4.19.a:**  $F(r) = r + K_1 e^{\alpha r}$  için birinci ve ikinci türev koşullarını sağlayan  $(K_1, \alpha)$  ikilileri.....108

**Şekil 4.19.b:**  $F(r) = r + K_1 e^{\alpha r}$  için *I. ve II. YORUM* için enerji koşullarını sağlayan  $(K_1, \alpha)$  ikilileri..108



<b>Şekil 4.19.c:</b> $F(r) = r + K_1 e^{\alpha r}$ için <i>I.</i> ve <i>II. YORUM</i> için türev ve enerji koşullarını sağlayan $(K_1, \alpha)$ ikilileri.....	109
<b>Şekil 4.20.a:</b> $F(r) = K_1 e^{\alpha r}$ için birinci ve ikinci türev koşullarını sağlayan $(K_1, \alpha)$ ikilileri.....	109
<b>Şekil 4.20.b:</b> $F(r) = K_1 e^{\alpha r}$ için <i>I.</i> ve <i>II. YORUM</i> için enerji koşullarını sağlayan $(K_1, \alpha)$ ikilileri..	110
<b>Şekil 4.20.c:</b> $F(r) = K_1 e^{\alpha r}$ için <i>I.</i> ve <i>II. YORUM</i> için türev ve enerji koşullarını sağlayan $(K_1, \alpha)$ ikilileri.....	110
<b>Şekil 4.21:</b> $F(r) = K_1 e^{\alpha r}$ modelini, <i>1. koşul takımı</i> 'na göre (sol panel) ve <i>2. koşul takımı</i> 'na göre (orta panel) güvenilir kılan $(K_1, \alpha)$ ikilileri. Sağ panel her ikisinin birlikte gösterimidir.....	111
<b>Şekil 4.22:</b> $F(r) = r - 2(1 + K_1 e^{\alpha r})$ modelini, <i>1. ve 2. koşul takım</i> 'larına göre (sırasıyla, sol ve orta paneller) güvenilir kılan $(K_1, \alpha)$ ikilileri. Sağ paneller ise, her ikisinin birlikte gösterimidir.....	112
<b>Şekil 4.23:</b> $F(r) = r + K_1 r^\alpha \ln r$ için <i>I. YORUM</i> (üst paneller) ve <i>II. YORUM</i> (alt paneller) altında <i>1. ve 2. koşul takımları</i> 'na göre (sırasıyla sol ve ortadaki paneller) sınanma sonuçları. En sağdaki paneller ilk ikisinin üstüste bindirilmesi suretiyle elde edilmiştir.....	112
<b>Şekil 4.24:</b> $F(r) = r + K_1 r (\ln r)^\alpha$ modelinin kozmolojik güvenilirliği. Üst paneller <i>I. YORUM</i> ; alt paneller <i>II. YORUM</i> içindir. Sol ve orta paneller, sırasıyla, <i>1. ve 2. koşul takımı</i> içindir. Sağ paneller ise, bunların üstüste bindirilmesini göstermektedir.....	113
<b>Şekil 4.25:</b> $F(r) = r + K_1 r^\alpha e^{\beta/r}$ tipi modellere örnekleme olarak seçilen $K_1 \in \{\pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1\}$ değerleri için, <i>YORUM</i> 'lara göre <i>1. ve 2. koşul takım</i> 'larının $\alpha - \beta$ düzleminde gösterimleri.....	115
<b>Şekil 4.26:</b> $F(r) = r + K_1 r^\alpha e^{\beta r}$ tipi modellere örnekleme olarak seçilen $K_1 \in \{\pm 2, \pm 1, \pm 0.1\}$ değerleri için, <i>YORUM</i> 'lara göre <i>1. ve 2. koşul takım</i> 'larının $\alpha - \beta$ düzleminde gösterimleri.....	116
<b>Şekil 4.27:</b> $F(r) = K_1 r^\alpha e^{\beta r}$ tipi modellere örnekleme olarak seçilen $K_1 \in \{\pm 2, \pm 1, \pm 0.1\}$ değerleri için, <i>YORUM</i> 'lara göre <i>1. ve 2. koşul takım</i> 'larının $\alpha - \beta$ düzleminde gösterimleri.....	117
<b>Şekil 4.28:</b> $F(r) = r + K_1 r^\alpha \ln^\beta r$ tipi modellere örnekleme olarak seçilen $K_1 \in \{\pm 2, \pm 1, \pm 0.1\}$ değerleri için, <i>YORUM</i> 'lara göre <i>1. ve 2. koşul takım</i> 'larının $\alpha - \beta$ düzleminde gösterimleri.....	118
<b>Şekil 4.29:</b> $F(r) = r + \frac{K_1 r^\alpha}{1 + K_2 \ln^\beta r}$ tipi modellere örnekleme olarak seçilen $(K_1, K_2) \in \{(\pm 2, \pm 2), (\pm 2, \pm 1), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm 2)\}$ değerleri için, <i>YORUM</i> 'lara göre <i>1. ve 2. koşul takım</i> 'larının $\alpha - \beta$ düzleminde gösterimleri.....	120
<b>Şekil 4.30:</b> $F(r, g) = r + K_2 g^\beta$ modeli için $K_2 - \beta$ düzleminde <i>1. ve 2. koşul takımları</i> (sırasıyla sol ve orta paneller). Sağ panelde ise, bunların birlikte gösterimi yer almaktadır.....	122

**Şekil 4.31:**  $F(r, g) = r + K_2 \ln^\beta g$  modeli için  $K_2 - \beta$  düzleminde 1. ve 2. koşul takımları (sırasıyla sol ve orta paneller). Sağ panelde ise, bunların birlikte gösterimi yer almaktadır.....122

**Şekil 4.32:**  $F(r, g) = r + K_2 e^{\beta/g}$  modeli için  $K_2 - \beta$  düzleminde 1. ve 2. koşul takımları (sırasıyla sol ve orta paneller). Sağ panelde ise, bunların birlikte gösterimi yer almaktadır.....123

**Şekil 4.33:**  $F(r, g) = r + K_1 g^\alpha + K_2 g \ln g$  modeli için bazı  $K_1$  değerleri için 1. ve 2. koşul takımlarının  $\alpha - K_2$  düzleminde birlikte gösterimi.....124

**Şekil 4.34:**  $F(r, g) = r + K_1 g^\alpha (1 + K_2 g^\beta)$  modeli için muhtelif  $(K_1, K_2)$  ikilileri için 1. ve 2. koşul takım'larını sağlayan  $(\alpha, \beta)$  değerleri.....126

**Şekil 4.35:**  $F(r, g) = r + \frac{K_1 g^\alpha + K_2}{g^\alpha + \beta}$ ,  $F(r, g) = r + \frac{K_1 g^\alpha + \beta}{g^\alpha + K_3}$  ve  $F(r, g) = r + \frac{\beta g^\alpha + K_2}{K_3 g^\alpha + 1}$  yazılımları için peşinen seçilmiş bazı  $(K_i, K_j)$  ikililerine göre enerji koşullarının sağlanma durumlarının  $\alpha - \beta$  düzleminde gösterimi. .... 133

**Şekil 4.36:**  $F(r, g) = r + K_2 r^\alpha g^\beta$  modeli için bazı  $K_1$  değerleri için 1. ve 2. koşul takımlarının  $\alpha - \beta$  düzleminde birlikte gösterimi.....134

**Şekil 4.37:**  $F(r, g) = K_2 r^\alpha g^\beta$  modeli için bazı  $K_1$  değerleri için 1. ve 2. koşul takımlarının  $\alpha - \beta$  düzleminde birlikte gösterimi.....134

**Şekil 4.38:**  $F(r, g) = r + K_1 r^\alpha + K_2 g^\beta$  modelinde bazı özel  $(K_1, K_2)$  ikilileri için, 1. ve 2. koşul takımları'nı sağlayan  $(\alpha, \beta)$  ikilileri. Sol bloktaki iki panelden ilki I. YORUM ve ikincisi de II. YORUM içindir; aynı durum sağ blok için de geçerlidir.....137

**Şekil 4.39:** (4.161) deki fonksiyon için: (a) da  $\gamma$  ya göre, (b) de ise  $w$  ya göre  $K_3$  ün tüm yasak değerleri. Kırmızı eğri (4.164); mavi eğri ise (4.165) kullanılarak çizilmiştir. (b) de, A ve B noktalarının koordinatları, sırasıyla,  $(-1/3, 1.86)$  ve  $(1, -3)$  dür. Boş yuvarlakçıklar ise fonksiyonun tanımlanmadığı  $\gamma$  ve  $w$  değerlerini göstermektedir.  $w = -1/3$  için  $\Psi(t) = K_3 \ln(-t)$  ve  $K_3 \neq 1.86$ ;  $w = 1$  için  $\Psi(t) = K_3 t$  ve  $K_3 \neq -3$  olduğunu vurgulayalım.....140

**Şekil 4.40:**  $F(r, t) = r + K_3 \ln(-t)$  modeli için, standart maddenin korunduğu  $w = -1/3$  durumunda enerji koşulları.....141

**Şekil 4.41:**  $F(r, t) = r + K_3 (-t)^\gamma$  için NEC, WEC, SEC ve DEC'in seçilmiş bazı özel  $K_3$  değerleri için  $\gamma$  ya göre değişimleri. Sağ alt-panelde ise  $K_3$  e bağlı olmaksızın  $w_{KE,0}$  nin değişimi yer almaktadır. Görüleceği üzere  $0 < \gamma < 3/4$  aralığı için daima  $w_{KE,0} > -1$  dir, yani, süper ivme bulunmamaktadır.....143

**Şekil 4.42:** 1. koşul takımı (pembe görünen bölge+sırf kırmızı bölge) ile 2. koşul takımı'nı sağlayan (pembe görünen bölge)  $(K_3, \gamma)$  ikilileri.  $(-10 \leq K_3 < 0) \times (0 < \gamma < 0.56)$  bölgesinde 2. koşul takımı'nı sağlayan model sayısının 1. koşul takımı'ninkine oranı:  $1233/2444 = \%50.5$  dir.....143

**Şekil 4.43:**  $F(r,t) = r + K_3 t^\gamma$  için NEC, WEC, SEC ve DEC' in seçilmiş bazı özel  $K_3$  değerleri için  $\gamma$  ya göre değişimleri.  $-10 \leq K_3 \leq +10$  ve  $3/4 < \gamma \leq 1$  aralıklarına ait hiçbir  $(\gamma, K_3)$  ikilisi için *1. koşul takımının* sağlanması gerçekleşmemektedir.....144

**Şekil 4.44:**  $F(r,t) = r - 10|t|^\gamma$  için NEC, WEC, SEC ve DEC in için  $\gamma$  ya göre (sol panel) ve  $w$  ya göre (sağ panel) değişimleri.....145

**Şekil 4.45:**  $F(r,t) = r - 10|t|^\gamma$  için *1. koşul takımı* (pembe görünen bölge+sırf kırmızı bölge) ile *2. Koşul takımı* 'nı sağlayan (pembe görünen bölge)  $(K_3, w)$  ikilileri.....145

**Şekil 4.46:**  $L_m = p^m$  için *I. ve II. YORUM*'a göre sıradan maddenin korunmadığı durumda  $F(r,t) = \Phi(r) + \Psi(t)$ ,  $\Psi(t) = K_3 |t|$  için  $w - K_3$  düzlemi. Modeli geçerli kılan  $(w, K_3)$  değer çiftleri koyulaştırılmış bölge ile gösterilmektedir. Noktalı ve kesikli çizgiler  $6 + K_3(3 - w) \neq 0$  ve  $\frac{-6(3 + K_3)(1 + w)}{6 + K_3(3 - w)} < 0$  uyarınca yasak  $(w, K_3)$  değerlerini belirtmektedir.....147

**Şekil 4.47:**  $K_3$  ve  $\gamma$  parametreleri peşinen seçilmiş  $F(r,t) = r + K_3 |t|^\gamma$  modelleri için NEC, WEC, SEC ve DEC'in  $w$  ya göre değişimleri. Düşey çizgi,  $t$  (ya da  $T$ ) nin tanımlanmadığı  $w = 1/3$  değerine karşılık düşmektedir. Buna göre:  $w < 1/3$  için  $t < 0$ ;  $w > 1/3$  için ise  $t > 0$  dır.....149

**Şekil 4.48:** Standart maddenin korunmadığı durum için  $F(r,t) = r + K_3 |t|^\gamma$  tip modellerde, seçilmiş bazı özel  $\gamma$  değerleri için *1. ve 2. koşul takımları*'nı sağlayan  $(w, K_3)$  ikilileri. Kozmolojik güvenilirlik için  $K_3 < 0$  olmasının gerektiği görülmektedir.....151

**Şekil 4.49:**  $F(r,t) = r + K_3 t$  modeli için, standart maddenin korunduğu  $w = -1/3$  durumunda enerji koşulları.....155

**Şekil 4.50:**  $F(r,t) = r + K_3 (-t)^\gamma$  modeli için, standart maddenin korunduğu  $w = -1/3$  durumunda enerji koşulları. Bu model için de sonuçlar,  $\Omega_{k,0}$  ve *YORUM*'lardan bağımsızdır.....156

**Şekil 4.51:**  $L_m = -\mu^m$  için *I. ve II. YORUM*'a göre sıradan maddenin korunmadığı durumda  $F(r,t) = \Phi(r) + \Psi(t)$ ,  $\Psi(t) = K_3 |t|$  için  $K_3 - w$  düzlemi. Modeli geçerli kılan  $w - K_3$  değer çiftleri koyulaştırılmış bölge ile gösterilmektedir. Noktalı ve kesikli çizgiler  $6 + (1 - 3w)K_3 \neq 0$  ve  $\frac{-6(1 + w)(3 + K_3)}{6 + (1 - 3w)K_3} < 0$  uyarınca yasak  $(w, K_3)$  değerlerini belirtmektedir.....157

**Şekil 4.52.a:**  $F(r,t) = r + \frac{K_1 t^\gamma + K_2}{K_3 t^\gamma + K_4}$  tip modelde, standart maddenin korunmadığı durumda  $L_m = p^m$

ve de  $L_m = -\mu^m$  için,  $K_2, K_3, K_4$  ve  $\gamma$  parametrelerinin muhtelif seçimleri altında,  $K_1$  in  $w$  ya göre değişimi cinsinden enerji koşullarının sağlanma durumları.....159

**Şekil 4.52.b:**  $F(r,t) = r + \frac{K_1 t^\gamma + K_2}{K_3 t^\gamma + K_4}$  tip modelde, standart maddenin korunmadığı durumda  $L_m = p^m$

ve de  $L_m = -\mu^m$  için,  $K_1, K_2, K_3$  ve  $K_4$  parametrelerinin muhtelif seçimleri altında,  $\gamma$  nın  $w$  ya göre değişimi cinsinden enerji koşullarının sağlanma durumları.....160

**Şekil 4.53:**  $F(r,t) = r + K_1 |K_2 + K_3 \ln|t||^\gamma$  tip modelde, standart maddenin korunmadığı durumda  $L_m = p^m$  ve de  $L_m = -\mu^m$  için  $K_1, K_2$  ve  $K_3$  parametrelerinin muhtelif seçimlerine göre,  $\gamma$  nın  $w$  ya göre değişimi cinsinden enerji koşullarının, gösterimleri. Arkafondaki mavimsi bölgeler, Lagrange'yen seçimlerinin herbiri için  $\tau^* / \tau < 0$  koşulunun sağlandığı bölgeleri göstermektedir.....163

**Şekil 4.54:**  $F(r,t) = K_1 e^{(r/K_1 + K_2 t)}$  tip modelde, standart maddenin korunmadığı durumda  $L_m = p^m$  ve de  $L_m = -\mu^m$  için,  $K_1$  parametresinin muhtelif seçimlerine göre enerji koşullarının *I. ve II. YORUM*'lar altında sağlanıp sağlanmamasının,  $K_2$  nin  $w$  cinsinden değişimi aracılığıyla gösterimleri.....166

**Şekil 4.55:**  $F(r,t) = r + K_1 r^\alpha |t|^\gamma$  tipi modelde, standart maddenin korunmadığı durumda,  $L_m = p^m$  (iki panelden oluşmuş sol blok) ve de  $L_m = -\mu^m$  (iki panelden oluşmuş sağ blok) için  $K_1$  ve  $\alpha$  parametrelerinin muhtelif seçimlerine göre, enerji koşullarının (*I. ve 2. koşul takım*'larının) *I. YORUM* ve *II. YORUM* altında (her blok da, sırasıyla, sol ve sağ paneller) sağlanma durumlarının,  $\gamma$  nın  $w$  cinsinden değişimi aracılığıyla gösterimleri.....168

## TABLO LİSTESİ

### Sayfa No

- Tablo 4.1:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  tipindeki modellerin,  $(w, \Omega_{k,0}) = (0, 0)$  durumu için *I.* ve *II. YORUM* altında: *1. koşul takımı* ile *2. koşul takımı*'ni ayrı ayrı sağlayan  $\alpha$  parametresinin değer aralıkları. Tabloya her bir durum için süper-ivmenin olduğu  $\alpha$  değer aralıkları da eklenmiştir. Tablo,  $-10 \leq K_1 \leq -1$  ve  $1 \leq K_1 \leq 10$  aralıklarında  $\Delta K_1 = 1$ ;  $-1 \leq K_1 \leq 1$  aralığında ise duyarlılığın artırılmasıyla  $\Delta K_1 = 0.2$  alınarak elde edilmiştir.....91
- Tablo 4.2:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  tipi modellerde özel  $(w, \Omega_{k,0})$  parametre değerlerine göre *I.* ve *II. YORUM* altında, *1.* ve de *2. koşul takımlarına* göre model sayıları ile bunlardaki süper-ivmeli olanların yüzdeleri.....94
- Tablo 4.3:** Şekil 4.25 deki modellerin kozmolojik güvenilirliklerinin sağlandığı  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin alt ve üst sınırları.....115
- Tablo 4.4:** Şekil 4.26 daki modellerin kozmolojik güvenilirliklerinin sağlandığı  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin alt ve üst sınırları.....116

## SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

### Simgeler

### Açıklama

$g_{ab}, g_{ij}$	: Uzay-zamanın metriği
$ds^2$	: Metrik ya da uzay-zaman aralığı
$-g$	: Metriğin determinantı
$h_{ab}$	: Dik izdüşürme tansörü
$U_{ab}$	: Paralel izdüşürme tansörü
$\eta_{ab}$	: Lorentzsel uzay-zaman metriği
$\delta^a_b$	: Kronecker deltası
$R_{ab}, R_{ij}$	: Ricci tansörü
$R$	: Ricci skaler eğriliği
$G$	: Gauss-Bonnet terimi
$G_{ab}, G_{ij}$	: Einstein tansörü
$\Lambda$	: Kozmolojik sabit
$T_{ab}, T_{ij}$	: Enerji-momentum tansörü
$T$	: Enerji-momentum tansörünün izi
$\kappa^2$	: Einstein kuplaj sabiti
$c$	: Işık hızı
$R_{abcd}, R_{ijkl}$	: Riemann eğrilik tansörü
$u^a, u^i$	: 4-lü hız vektörü
$\mu$	: Madde-enerji yoğunluğu
$p$	: Eşyönlü basınç
$q_a$	: Isı akısı (enerji akısı)
$\pi_{ab}$	: Eşyönsüz basınç tansörü
$\dot{u}_a$	: 4-lü ivme
$\theta_{ab}$	: Genişleme tansörü
$\theta$	: Genişleme skaleri
$\sigma_{ab}$	: Makaslama tansörü
$\sigma$	: Makaslama skaleri
$\omega_{ab}$	: Girdap (dönme) tansörü
$\omega_a$	: Girdap (dönme) vektörü
$\omega$	: Dönme skaleri
$\eta^{abc}$	: 3-uzay efektif hacim elemanı (3-uzay Levi-Civita sembolü)
$\Gamma^a_{bc}, \Gamma^i_{jk}$	: Ricci dönme katsayıları (veya Christoffel sembolleri)
$\nabla_a$	: Kovaryant türev operatörü

$\square \equiv \nabla^a \nabla_a$	: d'Alembert operatörü
$\delta$	: Varyasyon operatörü
$D_a \equiv h_a^b \nabla_b$	: İzdüşürülmüş 3-boyutlu kovaryant türev operatörü
$e_a \equiv \hat{\partial}_a$	: Tetrad taban vektörü veya tetrad türev operatörü
$e^a$	: Düal tetrad taban 1-formu
$S_{EH}$	: Einstein-Hilbert aksiyonu
$S_m$	: Madde-enerji aksiyonu
$L_m$	: Lagrange madde yoğunluğu
$\gamma^c_{ab}$	: Komütasyon fonksiyonları
$G_N$	: Newton gravitasyon sâbiti
$H$	: Hubble parametresi
$H_0$	: Hubble sabiti
$q$	: Yavaşlama parametresi
$j$	: "Jerk" parametresi
$s$	: "Snap" parametresi
$q_0, j_0, s_0$	: Yukarıdaki parametrelerin bugünkü değerleri
$w$	: Standart maddenin hal parametresi
$w_{KE}$	: Karanlık enerji hal parametresi
$\mu^m, p^m, T_{ab}^m, \dots$	: Standart maddeye ilişkin büyüklükler
$\Omega_m$	: Boyutsuz standart madde yoğunluğu parametresi
$\Omega_p$	: Standart maddeye bağlanan boyutsuz basınç parametresi
$\Omega_k$	: Boyutsuz eğrilik parametresi
$\Omega_{m,0}, \Omega_{p,0}, \Omega_{k,0}$	: Yukarıdaki boyutsuz parametrelerin bugünkü değerleri
$R_0, R_1, R_2$	: Sırasıyla, $R, \dot{R}, \ddot{R}$ ya bağlanan boyutsuz büyüklükler
$G_0, G_1, G_2$	: Sırasıyla, $G, \dot{G}, \ddot{G}$ ya bağlanan boyutsuz büyüklükler
$T_0, T_1, T_2$	: Sırasıyla, $T, \dot{T}, \ddot{T}$ ya bağlanan boyutsuz büyüklükler
$\Gamma$	: G ye bağlanan boyutsuz büyüklük
$\tau$	: T ye bağlanan boyutsuz büyüklük
$\Gamma^*, \Gamma^{**}$	: $\dot{G}, \ddot{G}$ ya bağlanan boyutsuz büyüklükler
$\tau^*, \tau^{**}$	: $\dot{T}, \ddot{T}$ ye bağlanan boyutsuz büyüklükler
$r, g, t$	: Boyutsuzlaştırılmış $R, G, T$ değişkenleri
$M, L, T$	: Kütle, Uzunluk, Zaman boyutları

**Kısaltmalar****Açıklama**

<b>KM</b>	: Karanlık Madde
<b>KE</b>	: Karanlık Enerji
<b>EAD</b>	: Einstein alan denklemleri
<b>EH</b>	: Einstein-Hilbert
<b>GRT</b>	: Genel Rölativite Teorisi
<b>RW</b>	: Robertson-Walker
<b>FLRW</b>	: Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
<b><math>\Lambda</math>CDM</b>	: $\Lambda$ Soğuk Karanlık Madde ( $\Lambda$ Cold Dark Matter)
<b>NEC</b>	: Sıfır Enerji Koşulu (Null Energy Condition)
<b>WEC</b>	: Zayıf Enerji Koşulu (Weak Energy Condition)
<b>SEC</b>	: Güçlü Enerji Koşulu (Strong Energy Condition)
<b>DEC</b>	: Baskın Enerji Koşulu (Dominant Energy Condition)
<b>ef.</b>	: Efektif
<b>t.ef</b>	: Toplam efektif
<b>m.ef</b>	: Madde efektif



## ÖZET

### DOKTORA TEZİ

#### GENEL RÖLATİVİTE TEORİSİNE KARANLIK MADDE VE KARANLIK ENERJİYE ALTERNATİF OLACAK ŞEKİLDE KIZILÖTESİ DÜZELTMELER

Diyadin CAN

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Haşim MUTUŞ

II. Danışman : Prof. Dr. Jorge Louis Cervantes COTA

Bu Tez’de;  $R$ ,  $G$ , ve  $T$ , sırasıyla, Ricci skaler eğriliği, Gauss-Bonnet invariantı ve standart maddenin enerji momentum tansörünün izi olmak üzere,  $f(R,G,T)$ -gravite denilen değişikliğe uğratılmış bir gravite teorisi göz önüne alıyoruz. Aksiyonda  $R$  ye göre lineer olan Einstein-Hilbert geometrik Lagrange’eni yerine genel bir  $f(R,G,T)$  fonksiyonu yerleştirmek suretiyle elde edilen bu teori, evrenin gözlenen ivmeli genişlemesini kozmolojik sabit olmaksızın ve de karanlık enerji olarak anılan aşırı negatif basınçlı bir bilinmeyen madde türünün varlığını varsaymaksızın açıklamak amacıyla, Einstein’ın Genel Rölativite Teorisine alternatif olarak literatürde teklif edilmiş  $f(R)$ ,  $f(R,G)$  ve  $f(R,T)$ -gravite gibi değiştirilmiş teorilerin birleştirilmesini oluşturmaktadır. Bir, iki ya da üç argümanlı epey sayıda  $f(R,G,T)$  modelinin kozmolojik geçerliliklerini  $f$  nin  $R$  ye göre birinci ve ikinci türevlerinin pozitif olma zorululuğunun da eklenmiş olduğu enerji koşulları bakımından inceliyoruz. Ayrıca, efektif karanlık enerji hal denklemi parametresinin güncel gözlenmiş sınır-değerler aralığını ve süper ivmelenmenin varlığını da göz önünde bulunduruyoruz. İvmeli bir evren modeli elde edilmesi

amacıyla; sıfır, zayıf ve baskın enerji koşulları sağlanırken güçlü enerji koşulunun ihlâl edilmesi gerektiği olgusundan hareket etmekteyiz. Formalizmi, eşhareketli bir ortonormal tetrad çatısında, lineer barotropik hâl denkleminin uyan bir mükemmel akışkanla dolu genel Robertson-Walker evrenleri (açık, düz veya kapalı) çerçevesinde sunmaktayız. Dolayısıyla, uzaysal eğrilik indeksi ile hâl parametresinin etkileri de göz önüne alınmaktadır. Her ne kadar çalışmamız literatürde daha önce yapılmış olanlarla bir takım kısmî benzerlikler arz ediyorsa da onlardan, pek çok bakımlardan ayrılmaktadır. İlk;  $f(R,G,T)$ -gravitenin alan denklemlerinin efektif Einstein alan denklemleri şeklinde yorumlanması için birbirine matematiksel eşdeğer iki yol bulunduğundan, efektif enerji-momentum tansörü için iki tür tanımlamanın var olduğu ortaya çıkmakta ve bu da enerji koşulları formalizmine giren toplam efektif enerji yoğunluğu ve efektif basınç için farklı ifadelerle yol açmaktadır. Dolayısıyla kozmolojik geçerlilik her biri için incelemekteyiz. İkinci olarak,  $f(R,T)$  ve  $f(R,G,T)$  modellerinde, yani,  $T$  argümanının yer aldığı durumlarda madde Lagrange'yen yoğunluğu için iki mümkün seçim göz önüne alınmakta ve her biri için standart maddenin süreklilik denklemi tesis edilip ayrıntılı olarak tartışılmaktadır. Bu da, elde edilen çözümlerin,  $f$ -modellerinin formlarına olduğu kadar parametreleri üzerine de ek kısıtlamalar getirmektedir. Üçüncü olarak; incelemelerimizle ilgili tüm denklemlerin boyutsuz şekilde ifade edildikleri bir formalizm geliştirmekteyiz. Gerçekten de; madde yoğunluğu, basınç, uzaysal eğrilik indeksi, yavaşlama, jerk ve snap parametreleri gibi kullanılagelen boyutsuz kozmolojik parametrelerden maada,  $f$ -gravite modellerinin çeşitli fonksiyonel formları için olduğu kadar parametre uzayının ve kuplaj sabitlerinin sınırları için de sayısal simülasyonları sistematik bir şekilde ele almayı kolay kılmak üzere  $R$ ,  $G$ ,  $T$  ve  $f$  fonksiyonu için uygun boyutsuz parametreler ithal etmekteyiz. Buradan, enerji koşullarını değerlendirmek üzere kullanılan kozmolojik parametrelerin kestirilmiş güncel değerler kümesinde Hubble sabitinin değerinin bilinmesinin gerekli olmadığı sonucu ortaya çıkmaktadır. Bu; Hubble sabiti değerinin, modellerin geçerlilik testleri üzerinde değil, fakat kuplaj sabitlerinin belirlenmesinde etkisi olduğu anlamına gelmektedir.

Ekim 2021, .197. sayfa.

**Anahtar kelimeler:** Genel Rölativite Teorisi, Rölativist Kozmoloji, Karanlık Enerji, Karanlık Madde, Değiştirilmiş Gravite Teorileri, Enerji Koşulları

## SUMMARY

### Ph.D. THESIS

#### INFRARED CORRECTIONS TO GENERAL RELATIVITY AS AN ALTERNATIVE TO DARK MATTER AND DARK ENERGY

Diyadin CAN

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Department of Physics

Supervisor : Prof. Dr. Haşim MUTUŞ

Co-Supervisor : Prof. Dr. Jorge Louis Cervantes COTA

In this Thesis, we consider a modified theory of gravity, dubbed  $f(R,G,T)$ -gravity, where  $R$ ,  $G$  and  $T$  are, the Ricci scalar curvature, Gauss-Bonnet invariant and trace of the energy-momentum tensor of the ordinary matter, respectively. This theory which is obtained by replacing a general function  $f(R,G,T)$  in the action for the Einstein-Hilbert geometrical Lagrangian linear in  $R$ , constitutes a unification of  $f(R)$ ,  $f(R,G)$  and  $f(R,T)$ -gravity, proposed in the literature as alternatives to Einstein's theory of general relativity in order to explain the observed current accelerated expansion of the universe without a cosmological constant nor assuming the existence of an unknown form of matter possessing a large negative pressure, dubbed dark energy. We study the cosmological viability of a number of  $f(R,G,T)$  models with one, two or three arguments, from the point of view of the energy conditions supplemented by the imposition of the positiveness of the first and second derivatives of the function  $f$  with respect to  $R$ . In addition, we also take into account the actual observed bounds of the effective

dark energy equation of state parameter, and the existence of the super-acceleration. In order to obtain an accelerated universe model we have started off by the fact that the strong energy condition should be violated while the others, the null, weak and dominant energy conditions are satisfied. We present the formalism within a comoving orthonormal tetrad frame in the framework of general Robertson-Walker universes (open, flat or closed) filled with perfect fluid obeying a linear barotropic equation of state. Then, effects of the spatial curvature index and the state parameter are taken into account, as well. Although our work exhibits some partial similarities with some of the already done in the literature, it differs from them by several aspects. Firstly; since one may have two mathematically equivalent ways to interpret the field equations of  $f(R,G,T)$ -gravity as effective Einstein field equations, it appears that there exist two kinds of definition for the effective energy-momentum tensors which in turn lead to different expressions for the total effective energy density and effective pressure entering in the formalism of energy conditions. Consequently the cosmological viability is studied for each of them. Secondly; in cases of  $f(R,T)$  and  $f(R,G,T)$  models, i.e., where the argument  $T$  is present, the two possible choices for the matter Lagrangian density is taken into account and for each of them the continuity equation for the ordinary matter is derived and discussed in detail. It turns out that the obtained solutions impose additional constraints on the functional forms as well as on the parameters of the  $f$ -models. Thirdly; we develop a formalism in which all relevant equations are expressed in dimensionless forms. In fact, apart from the usual dimensionless cosmological parameters such as matter density, pressure, spatial curvature index, deceleration, jerk and snap parameters we introduce for  $R$ ,  $G$ ,  $T$  and the function  $f$ , suitable dimensionless parameters, rendering easy to undertake numerical simulations in a systematic way for various functional forms of  $f$ -gravity models as well as for the bounds of the parameter space and coupling constants. It results that, in the set of the current estimated values of cosmological parameters used to evaluate the energy conditions, one does not need to know the value of the Hubble constant. This means that the value of the Hubble constant has no effect on the viability tests of the models, while it has for the determination of the coupling constants.

September 2021, .197. pages.

**Keywords:** General Theory of Relativity, Relativistic Cosmology, Dark Energy, Dark Matter, Modified Gravity Theories, Energy Conditions

## 1. GİRİŞ

Karanlık Madde ve Karanlık Enerji olarak adlandırılan iki mesele günümüz Kozmolojisinin en ilgi çeken uğraşlarının başında gelmektedir. Karanlık Madde (KM) terimi ile, galaksi gözlemsel verilerini Newtonsal gravitasyonun ve dolayısıyla da Newtonsal yaklaşıklıkta Einstein'ın gravitasyon teorisinin öngörülerıyla uyuşturmak amacıyla, varolması gerektiği düşünülen, ama, şimdiye kadar ne gözlenebilmiş ne de doğası belirlenebilmiş varsayımsal bir madde kastedilmektedir. Karanlık Enerji (KE) ise, evrenin ileri evresindeki, yani, yaklaşık 13.6 milyar yıl yaşındaki evrenin yaklaşık son 4 milyar yılından bu yana hızlanan (ivmelenen) genişleme sürecini açıklamak üzere standart (normal, sıradan, bilinegelen) madde-enerji içeriğine ek olarak varolması gerektiği düşünülen kütle-enerji miktarı, ya da buna bir alternatif olarak, sözkonusu süreci açıklayabilecek herhangi bir mekanizma anlaşılmaktadır. Kütle-enerji içeriği bakımından evrenin güncel durumunu nicel olarak ifade etmek gerekirse, gözlemler, evrenin kütle-enerji içeriğinin yaklaşık: %5 inin baryonik madde, %27 sinin Karanlık Madde ve %68 inin de Karanlık Enerjiden oluşması gerektiğine hükmettirmektedirler. Bu söylenenleri aşağıda biraz daha ayrıntılı ele alalım.

Newtonsal gravitasyona göre, bir galakside spiral bir disk üzerinde dönen maddenin hızı galaksinin merkezine olan  $r$  uzaklığı cinsinden çizildiğinde (ki bunlara dönme eğrileri denir) hız, önce  $r$  ile lineer olarak orantılı ve galaksi dışında da  $1/r$  nin karekökü uyarınca azalmalıdır. Oysa gözlemler bunun böyle olmadığını; hızın lineer artıştan sonra azalmak yerine yaklaşık olarak sâbit kaldığını göstermektedir (dönme eğrilerinin düzleşmesi). Bu durum, sözkonusu düzleşmeyi açıklamak için galaksi civarında dağılmış, ancak, görülmeyen bir maddenin varolması gerektiğini varsaymaya sevk etmektedir. Karanlık Madde olarak adlandırılan bu maddeye aday olarak, baryonik ya da baryonik olmayan, sıcak ya da soğuk madde, meteoritler, Macho'lar, nötrinolar vb... pek çok madde türleri varsayma girişimlerinde bulunulmuşsa da, bu varsayımları doğrulayacak gravitasyonel olmayan bir kanıt henüz elde edilememiştir. Dahası, hızlandırıcı ve reaktör deneyleri bu Karanlık Maddeye dayalı senaryoları hiçbir şekilde desteklememektedir. Galaksilerarası ortamda Karanlık Maddenin varlığına destek veren diğer bir gözlemsel verinin de, gravitasyonel etkinin yol açmış olduğu galaksi mercekleşmesi olduğunu kaydedelim.

Karanlık Enerji meselesine ise, yüksek kızılakaymalı Tip-Ia süpernovalara ilişkin 1998’de elde edilen gözlem sonuçları yol açmıştır. Bu gözlemler, evrenimizin oluşum ve evrimi konusunda güvenilir bir model olarak addedilen Standart Model ile, yani, evrenimizin, başlangıcındaki Büyük Patlama’nın hemen sonrasında ( $10^{-35}$  saniye sonra) bir enflasyon (anormal genişleme) evresi geçirdiğini ve daha sonra da günümüzde de süregelen bir yavaşlayan genişleme evresinde bulunduğunu ileri süren senaryo ile ters düşecek şekilde, evrenimizin günümüzde ivmeli bir genişleme evresinde bulunduğu dair ilk kanıtları sunmuşlardır. Günümüze değin farklı gözlem grupları tarafından da gittikçe daha duyarlı bir biçimde gerçekleştirilen benzer gözlemsel veriler durumun böyle olduğunu kuşkuya yer bırakmayacak şekilde ortaya koymuşlardır. Bu kozmik ivmelenmeye, doğrudan kanıt veren Tip-Ia süpernova gözlemleri dışında: 1) kozmik mikrodalga arka fon eşyönsüzlükleri, 2) evrenin geniş ölçek yapısı, 3) baryon akustik osilasyonları, 4) zayıf gravitasyonel mercekleme gibi emareler de dolaylı olarak destek vermektedir.

Evrenin ileri-evre ivmelenmesinin gözlemsel keşfi günümüzde de devam eden ilgi çekici açıklamaların ileri sürülmesine yol açmıştır. Einstein’ın 4-boyutlu Genel Rölâtivite Teorisi (GRT) çerçevesinde kalınıldığı takdirde, temel olarak, Karanlık Enerji denilen esrarengiz madde-enerji bileşeninin çok güçlü bir negatif basınç meydana getirdiği ve bunun da bir anti-gravite (karşıt-kütleçekim) yaratarak genişlemeye yol açacağına inanılmaktadır. Bu bakımdan, ilk akla gelen açıklama, efektif olarak negatif bir basınca karşı düşen  $\Lambda$  kozmolojik sâbit teriminin varlığına dayandırılmıştır. Madde-enerji içeriği olarak diğer alternatifleri ise standart madde türlerinin dışında yer alan: skaler alanlar (quintessence), takyon alanı, hayalet yoğunlaşması, quinton, Chaplygin gaz gibi “ekzotik” olarak nitelendirilebilecek muhtelif madde türleri oluşturmaktadır. Ne var ki, gerek Güneş sistemimiz testleriyle, gerekse de, evrenin evrimi konusunda akla yatkınlığı geniş kabul görmüş Standart Model’in birtakım senaryolarıyla uygunluk konusunda bu açıklamalar beraberlerinde pek çok sorunu da barındırmaktadırlar.

Gerek KM ve gerekse de KE meselesini açıklamak üzere Einstein’ın Alan Denklemleri’nin (EAD) sağ tarafındaki madde-enerji içeriği hakkında muhtelif varsayımlar yapmak yerine, bir alternatif olarak, EAD’nin sol tarafındaki geometrik kısmı değiştirmek suretiyle Einstein’ın gravitasyon teorisini değişikliğe uğratmak düşünülmüştür. Bu değişiklikler genel olarak “GRT’ye düzeltmeler” olarak adlandırılırlar. Bunlar dönemselsel bakımdan erken evre ve ileri

evre dönem düzeltmeler olmak üzere iki sınıfta telakki edilirler: elektromagnetik spektrumla benzerlikten hareketle, yüksek enerji yoğunluklu erken dönem evre için “morötesi (ultraviyole) düzeltmeler” ve düşük enerji yoğunluklu ileri evre için de “kızılötesi (infrared) düzeltmeler” olarak adlandırılırlar. GRTyi bu tür değişikliklere uğratma yaklaşımının pratik hareket noktasını Lagrange’yen formülasyona başvurmak oluşturmaktadır. Çok iyi bilindiği üzere EAD,  $R_{ab}$  Ricci eğrilik tansörünün  $R = g^{ab}R_{ab}$  büzülmesiyle tanımlı  $R$  Ricci skaler eğriliğine göre lineer olan Einstein-Hilbert (EH) aksiyonundan, metriğe göre varyasyonla elde edilebilmektedir. Aksiyondaki  $R$  nin, mesela,  $R$  nin keyfi bir  $f(R)$  fonksiyonuyla değiştirilmesi sonucunda Genel Rölâtivite Teorisi’ne alternatif olabilecek yeni bir gravitasyon teorisine varmak mümkündür. Bu şekilde elde edilen teoriye  $f(R)$ –gravite denilmektedir. Keza, keyfi  $f$  fonksiyonunun argümanlarını yalnızca  $R$  Ricci eğrilik skaleri değil, fakat,  $R_{ab}$  Ricci eğrilik tansörü,  $R_{abcd}$  Riemann eğrilik tansörü,  $C_{abcd}$  Weyl tansörü gibi tansörlerin muhtelif kombinasyonlarından hareketle oluşturulabilecek eğrilik invariantları almakla da yeni gravitasyon teorileri elde etmek mümkündür. Bunlara örnek olarak,  $G = R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}$  ile tanımlı  $G$  Gauss-Bonnet invariantı ve  $T$  de  $T_{ab}$  madde-enerji-momentum tansörünün  $T = g^{ab}T_{ab}$  ile tanımlı izi olmak üzere, literatürde yoğun olarak ele alınagelen:  $f(G)$ –gravite,  $f(R,G)$ –gravite,  $f(R,T)$ –gravite,  $f(G,T)$ –gravite gibi teoriler gösterilebilir. GRT’ye alternatif olarak bu suretle oluşturulmuş gravitasyon teorilerine genel olarak “değiştirilmiş” ya da “değişikliğe uğratılmış” gravitasyon teorileri denilmektedir. EAD’nin ikinci mertebeden türevli diferansiyel denklemler olmalarına karşın, bu değişikliğe uğratılmış teoriler genel olarak dördüncü mertebeden türevli alan denklemlerine yol açmaktadır. Serbestlik derecesinin daha yüksek olması bu tür teorileri matematiksel olarak işlemeyi GRT’ye göre daha girift kılmaktaysa da, KE, KM ve de diğer kozmolojik meselelerin ele alınmasında çok daha zengin olanaklar sunabilmektedirler. Aslında, bu tür eğrilik invariantlarıyla GRT’yi dört ya da daha yüksek boyutlarda değiştirme girişimleri KE meselesinden çok daha önceleri ortaya çıkmıştır. Nitekim, bir yandan kuvvetli gravitasyon alanları söz konusu olduğunda klasik GRT’nin yetersizlikleri, diğer yandan da gravitasyonu kuvantalaştırma çabaları, bu tür invariantların ithal edilmesi zorunluluğunu doğurmuştur. Bu yaklaşımın, KM ve özellikle de KE meselesinin anlaşılmasında 1998’den bu yana artan bir ilgiyle kullanılıyor olmasının başlıca gerekçesini, güncel kozmolojik ivmeli genişlemeyi açıklamak üzere varolması düşünülen aşırı negatif basınçlı madde akışkanının şimdiye dek

bilinegelen hiçbir madde türüne karşılık gelmemesi ve de hiçbir şekilde gözlemsel olarak ortaya konulamamış olması oluşturmaktadır. Ancak, her ne kadar “ $f - gravite$ ” teorileri kozmolojik ivmelenmeyi KE varsayımına başvurmaksızın açıklama yolunda bir alternatif olarak düşünülecekler de  $f$  fonksiyonu üzerindeki sayısız seçim serbestliği bunların teorik ya da gözlemsel bakımdan nasıl kısıtlanabilecekleri sorununu ortaya çıkarmaktadır. Bir başka deyişle, seçilen  $f$  fonksiyonlarının kozmolojik güvenilirliğini (geçerliliğini) sınamak için hangi ölçütlere başvurmak gerekmektedir? Bu doğrultuda, gözlemsel kapsamda: önce erken-evre enflasyon, ardından yavaşlama ve sonrasında da geç-evre enflasyon sürecini üretme, Güneş sistemi testleriyle uygunluk, Galaksimiz ve galaksilerarası verileriyle tutarlılık vb.. ölçütlerin yanında, teorik kapsamda da:  $f$  fonksiyonunun kendisinin ve de argümanlarına göre türevlerinin sürekli olması, kararlılık ölçütü olarak  $R$  ye göre birinci ve ikinci türevinin pozitif olması, vb... birtakım ölçütler ileri sürülmüştür. Öte yandan, yakın zamanlarda, GRT’de kullanılagelen: Zayıf Enerji Koşulu, Sıfır Enerji Koşulu, Güçlü Enerji Koşulu ve Baskın Enerji Koşulu olarak bilinen koşullar da yukarıda sözü edilen gravite teorilerine genişletilerek kullanılmaya başlanmıştır.

Bu Tez’de; hem  $R$ , hem  $G$  ve hem de  $T$  yi argüman olarak kabul eden bir  $f(R, G, T)$  fonksiyonu ile oluşturulan ve  $f(R)$ ,  $f(R, G)$ ,  $f(R, T)$ ,... gibi alt-sınıfları da kapsayan yeterince genel bir değiştirilmiş  $f(R, G, T)$ -gravite teorisi göz önüne alıp,  $f$  için seçilecek muhtelif fonksiyonel formların kozmolojik güvenilirliklerini, uzayca homojen ve eşyönlü bir evren modelini tasvir eden Robertson-Walker metriği çerçevesinde, kozmolojik parametrelerin güncel değerleri ışığında yukarıda sözü edilen Enerji Koşulları ile kararlılık ölçütlerine göre, parametre uzayının simülasyonları yoluyla sistematik olarak inceleyip tartışmayı amaçlıyoruz. Çalışmamızda, tasarımsal karanlık enerji akışkanına bağlanabilecek hal parametresinin güncel gözlemlerle kısıtlandırılmış değer aralığının da güvenilirliğe etkisi göz önüne alınacak ve ayrıca, süper-ivmelenmenin varlığı da inceleme konusu olacaktır. Nispeten daha kapsamlı bir teoriyle işgörüyor olmanın yanısıra, bu çerçevede geliştireceğimiz formalizmin birincil özgünlüğünü, literatürdeki çalışmalarda sistematik olarak ele alınmamış olan boyutsuzlaştırılmış değişkenlerin kullanımı oluşturacaktır. Bu, model parametreleri üzerinden simülasyonlara berraklık ve bütünlük kazandıracaktır. Bir diğer özgünlük olarak, efektif enerji-momentum tansörü tanımlamadaki iki türlü keyfiyetin de etkisi incelemelerimize dahil



edilecektir. Keza,  $T$  argümanlı  $f - \text{gravite}$  söz konusu olduğunda Lagrange madde yoğunluğu için literatürde yalnızca  $L_m = p$  alınması durumuna alternatif olarak diğer mümkün seçim olan  $L_m = -\mu$  durumu da göz önüne alınacak ve bu mümkün iki farklı seçimin etkilerinin tartışılması da çalışmamızda yer bulacaktır. Bu iki durum için de standart maddenin süreklilik denklemleri ayrıntılarıyla tesis edilip çözümleri sunulacaktır. Öte yandan, ele alınacak  $f - \text{gravite}$  teorilerinin hepsinde olmasa da bazılarında, yalnızca düz uzay ( $k = 0$ ) değil, fakat, uzayca eğrilik indeksinin  $k = +1$  (kapalı uzay) ve  $k = -1$  (açık uzay) olması ve ayrıca da lineer barotropik hâl denklemi parametresi  $w$  da göz önüne alınarak kozmolojik güvenilirlik ölçütleri bunlara göre de tartışılacaktır. Tez'imizde ele alınacak  $f(R, G, T)$  modellerinin kozmolojik geçerliliklerini, enerji koşulları dışında kalan mesela, Güneş sistemi testleriyle uygunluk gibi diğer ölçütlere göre de incelemek yer darlığından dolayı mümkün görünmemektedir. Bu bakımdan, spesifik bir  $f(R, G, T)$  modelini etraflıca ele almak yerine;  $f$  nin  $R$ ,  $G$  ve  $T$  argümanlarından biri veya ikisi veyahut da her üçüne bağlılıkları için toplamsal veya çarpımsal fonksiyonlar şeklinde kuvvet kanunu, üstel, logaritmik gibi nispeten genel sayılabilecek formlar seçip ve ayrıca da literatürde muhtelif amaçlarla teklif edilmiş bazı özel  $f - \text{gravite}$  modelleri de göz önüne alıp, kozmolojik geçerliliği, yukarıda sözü edilen ölçütler ışığında üs, katsayı, hal parametresi gibi muhtelif parametre değerleri üzerinden simülasyonlar yaparak ve sonuçları da iki ya da üç boyutta eğrisel veya bölgesel gösterimlerle ya da tablolar aracılığıyla araştırmayı tercih ediyoruz.

Çalışma planımız şöyle olacaktır: 2. Bölüm'de Einstein Alan Denklemlerini ve bunlara dayalı Rölativist Kozmolojiyi tanıttıktan sonra gözlenen kozmik ivmelenmenin söz konusu çerçevede nasıl açıklanabileceğine değiniyor ve bu bağlamda GRT'ye alternatif değişikliğe uğratılmış gravite teorilerin kısa bir tarihçesini sunuyoruz. 3. Bölüm'de, hesapların anlaşılmasını kolaylaştırmak üzere notasyon, yazılış ve kabulleri ve de temel geometrik bağıntıları belirtiyor; 1+3 kovaryant ayrışım yöntemi ile tetrad formalizmi ve de Enerji Koşullarının kökeni hakkında kısa bir bilgilendirme sunuyoruz. Bulgular bölümünde, Ek.A'da ayrıntısıyla tesis ettiğimiz,  $f(R, G, T)$ -gravite'nin alan denklemlerine iki türlü efektif akışkan yaklaşımı uygulayıp efektif dinamik büyüklüklerin genel ifadelerini hesaplıyor ve sıradan maddenin süreklilik ("korunum") denklemini de iki türlü Lagrange yoğunluğu için tesis edip integrasyonunu etraflıca tartışıyoruz. Bu bölümde Robertson-Walker modeli çerçevesinde  $f(R, G, T)$ -gravite için alan

denklemlerinin, efektif dinamik büyüklüklerin ve de muhtelif geometrik büyüklüklerin hesabı verilmekte ve bunların boyutsuz kozmolojik parametreler cinsinden ifadelerinin tesisi ele alınmaktadır. Ek.B'den de yararlanılan bu boyutsuzlaştırma işleminin ardından muhtelif  $f(R,G,T)$  modellerinin güvenilirliklerini yukarıda sözü edilen ölçütler ışığında, sayısal hesapla ve de grafiksel gösterimler aracılığıyla test etmekteyiz. Tartışma ve Sonuç bölümünde ise yapılanların değerlendirmesini ve tartışmasını sunuyoruz.



## 2. GENEL KISIMLAR

### 2.1. EINSTEIN ALAN DENKLEMLERİ

Einstein'in 1916'da sunmuş olduğu Genel Rölativite Teorisi'nin (GRT) alan denklemleri,  $i, j, k, \dots = 0, 1, 2, 3$  koordinatsal taban (tansör) indisleri olmak üzere

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij} = \kappa^2 T_{ij} \quad (2.1)$$

dir. Burada,  $R_{ij}$ , 4-boyutlu uzay-zaman geometrisinin eğriliğini tasvir eden  $R^m{}_{in j}$  Riemann eğrilik tansöründen hareketle  $R_{ij} = R^m{}_{im j}$  ( $R_{ij} = R_{ji}$ ) büzülmesiyle oluşturulmuş Ricci eğrilik tansörü;  $R$  ise bundan hareketle  $R = g^{ij} R_{ij} = R^i{}_i$  ile tanımlı Ricci eğrilik skaleridir.  $\Lambda$ , Kozmolojik Sabit ( $\Lambda > 0$ ,  $\Lambda < 0$  veya  $\Lambda = 0$ ) ve  $T_{ij}$  de ( $T_{ij} = T_{ji}$ ) madde-enerji-momentum tansörüdür.  $\kappa^2$  ise Einstein Kuplaj Sabiti olup, Newton Gravitasyon Sabiti  $G_N$  ve ışık hızı  $c$  cinsinden ifadesi  $\kappa^2 = 8\pi G_N / c^4$  tür. Einstein Alan Denklemleri'nde (kısaca EAD yazılacaktır),  $g_{ij}$  metrik tansör gravitasyon alanı olarak yorumlanır ve (2.1) denklemi, verilmiş bir  $T_{ij}$  yerel madde-enerji kaynağı için,  $g_{ij}$  lere göre çözülmesi gereken en fazla ikinci mertebeden kısmi türevli 10 bağımsız denklemden oluşan bir diferansiyel denklem sistemini tasvir eder. (2.1) denklemi, eşdeğer biçimde,

$$G_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -\Lambda g_{ij} + \kappa^2 T_{ij} \quad (2.2.a)$$

veya

$$R_{ij} = \Lambda g_{ij} + \kappa^2 \left( T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right), \quad T \equiv \dot{z}(T_{ij}) = g^{ij} T_{ij} = T^i{}_i \quad (2.2.b)$$

olarak da yazılabilir. EAD'nin (2.2.a) şekli,  $-\Lambda g_{ij}$  terimine bir madde-enerji kaynağı gözüyle bakılabileceğini telkin etmektedir. Bu, boşluğun ( $T_{ij} = 0$ ) enerjisi olarak yorumlanır.  $G_{ij}$  ye Einstein tansörü denir ve tanımından anlaşılacağı üzere simetrik bir tansördür ( $G_{ij} = G_{ji}$ ). Eğer,

iki kere büzülmüş İkinci Bianchi özdeşliğinden yazılabilecek  $\nabla_j R^{ij} \equiv \frac{1}{2} \nabla^i R$  bağıntısı (bkz. (3.11.b) ve  $\nabla_k g_{ij} \equiv 0$  olduğunu ifade eden Ricci Teoremi göz önünde bulundurulursa (2.2.a) dan

$$\nabla_j G^{ij} \equiv 0 \Rightarrow \nabla_j T^{ij} = 0 \quad (2.3)$$

elde edilir.  $T^{ab}$  nin diverjansının sıfır olduğunu söyleyen bu sonuç madde-enerji-momentum korunumu olarak ifade olunur. EAD'yi,

$$S_{EH} = \frac{1}{2k^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_m \quad (2.4)$$

olmak üzere bir  $S$  aksiyonundan hareketle metriğe göre varyasyon alarak elde etmek mümkündür. İntegrantı  $R$  ye göre lineer olan (2.4) e Einstein-Hilbert (EH) aksiyonu ( $\Lambda$  -lı) denir. Burada:  $-g$ , imzası +2 olan metriğin determinantını;  $d^4x \sqrt{-g}$  ise 4-boyutlu hacim elemanını göstermektedir.  $S_m$  ise, madde-enerjiyi tasvir eden  $L_m$  Lagrange yoğunluğundan hareketle

$$S_m = \int_V d^4x \sqrt{-g} L_m \quad (2.5)$$

olarak tanımlanmış madde-enerji aksiyonudur.  $L_m$  verildiğinde  $T_{ij}$  enerji-momentum tansörü

$$T_{ij} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{ij}} \quad (2.6)$$

ifadesiyle bulunur. Tez'imizin temelini,  $R$  ye göre lineer olan (2.4) deki EH aksiyonun keyfi bir  $f(R, G, T)$  fonksiyonuyla

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} f(R, G, T) + S_m \quad (2.7)$$

biçiminde değişikliğe uğratılması suretiyle elde edilen  $f(R, G, T)$  -gravite teorisi oluşturacaktır.

Burada:

$$R : \text{Ricci eğrilik skaleri} \quad : R = g^{ij} R_{ij} \quad (2.8.a)$$

$$G : \text{Gauss-Bonnet invariantı} \quad : G = R^2 - 4R_{ij}R^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl} \quad (2.8.b)$$

$$T : \text{Enerji-momentum tansörünün izi} \quad : T = g^{ij} T_{ij} \quad (2.8.c)$$

olup  $f(R, G, T)$  de bu argümanların keyfi bir fonksiyonudur.

## 2.2. RÖLATİVİST KOZMOLOJİ

### 2.2.1. FLRW Evren Modelleri

Evrenin madde-enerji içeriğinin bir mükemmel akışkan olarak tasviri varsayımı altında, bir  $u$  4-lü hız vektörü ile hareket eden bir gözlemciye göre bu akışkana, ifadesi

$$T_{ij} = (\mu + p)u_i u_j + p g_{ij} \quad , \quad (u_i u^i = -1) \quad (2.9)$$

ile gösterilen bir enerji-momentum tansörü bağlanabilir. Burada  $\mu$  ve  $p$  dinamik büyüklükleri  $u$  ya göre ölçülmüş olup sırasıyla: madde-enerji yoğunluğu ( $\mu$  enerji yoğunluğu,  $\rho$  madde yoğunluğuna  $\mu = \rho c^2$  bağıntısıyla bağlıdır) ve eşyönlü basınç olarak adlandırılırlar. Akışkanın fizikselliğini bu büyüklükler arasındaki hal denklemi denilen birtakım bağıntılar sağlar; buna göre,  $p$  ile  $\mu$  arasında  $p = p(\mu)$  şeklinde bir bağıntı olduğunda buna “barotropik hal denklemi” denir. Özel olarak,

$$p = w\mu \quad (w = \text{sabit} \quad \text{ve} \quad -1 \leq w \leq +1) \quad (2.10)$$

ise buna “lineer barotropik hal denklemi” adı verilir ve  $w$  hâl parametresinin bazı özel değerlerine göre de akışkanın cinsinin nitelendirilmesi şöyle olur:

$$w = -1 \quad \Rightarrow \quad p = -\mu \quad : \text{bu durum efektif bir kozmolojik sabite denktir.}$$

$$w = -1/3 \quad \Rightarrow \quad p = -\mu/3 \quad : \text{kozmetik sicim}$$

$$-1 < w < 0 \quad \Rightarrow \quad p < 0 \quad : \text{negatif basınçlı akışkan}$$

$w=0$	$\Rightarrow p=0$	: basınçsız akışkan (toz bulutu)
$w=1/3$	$\Rightarrow p=\mu/3$	: radyasyon (ışınım, rölativist gaz)
$0 < w < 1$	$\Rightarrow p > 0$	: pozitif basınçlı akışkan
$w=1$	$\Rightarrow p=\mu$	: katı akışkan

Evrenin geometrisi ise evrenin büyük ölçekte homojen ve uzayca eşyönlü olduğu varsayımı altında,  $t$  ile kozmik zaman gösterilmek üzere yerel bir  $(t, r, \theta, \phi)$  koordinat sisteminde

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) [dr^2 + f_k^2(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (2.11)$$

metriği ile temsil edilir. Buna Robertson-Walker (RW) metriği denir. Burada, ölçek çarpanı denilen  $a(t)$  3-boyutlu uzaysal hiperyüzeylerin kozmolojik evrimini tasvir eden bir fonksiyondur. Uzaysal eğrilik indeksi denilen  $k$  ise 3-boyutlu uzayın topolojisini tasvir eden bir parametre olup  $k = \pm 1, 0$  değerlerini alır.  $k$  ya göre  $f_k(r)$  fonksiyonu da şöyle tanımlanır:

$$f_k(r) = \begin{cases} \sin r & k = +1 \quad \text{için (kapalı veya eliptik evren)} \\ r & k = 0 \quad \text{için (düz veya Öklitsel evren)} \\ \sinh r & k = -1 \quad \text{için (açık veya hiperbolik evren)} \end{cases} \quad (2.12)$$

Evrenin madde-enerji içeriğinin bir mükemmel akışkan olarak tasvir edilebilmesi varsayımı altında Einstein Alan Denklemleri bir eşhareketli ortonormal tetrad çatısında (bkz. §(3.3.2)) hesaplandığında  $a(t)$  ölçek çarpanı için ikinci mertebeden adi türevli şu iki bağımsız diferansiyel denklemi verir (nokta ile  $t$  kozmik zamanına göre türev gösterilmektedir):

$$(00\text{-bileşen}): \quad \frac{3}{c^2} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} \right) = \kappa^2 \mu \quad (2.13)$$

$$(11\text{-bileşen}): \quad \frac{1}{c^2} \left( -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{kc^2}{a^2} + \Lambda c^2 \right) = \kappa^2 p \quad (2.14)$$

Bunlara Friedmann Denklemleri denir. Ayrıca, (2.13) ün zamana göre türevinde (2.13) ile (2.14) ün bir kombinasyonu kullanılırsa

$$\dot{\mu} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\mu + p) = 0 \quad (2.15)$$

elde edilir ki bu, maddenin korunduğu anlamına gelir. Bu denkleme (2.3) deki  $\nabla^j T_{ij} = 0$  korunum denkleminde de varılabilir.

Rölativist kozmolojinin, yani, GRT'ye dayalı kozmolojinin yukarıdaki denklemleri  $a(t)$  ölçek çarpanının en fazla ikinci mertebeden zamansal türevini içermekte olup  $a(t)$ ,  $\mu(t)$  ve  $p(t)$  olmak üzere 3 bilinmeyen fonksiyon barındırmaktadır ( $k$  ve  $\Lambda$  birer parametredirler). Her ne kadar yukarıda 3 denklem varsa da bunlardan ancak herhangi ikisi bağımsızdır. Dolayısıyla sistemi kapamak için bir üçüncü denkleme gereksinim vardır ki bu da  $p$  ile  $\mu$  arasında matematiksel bir ilişkinin verilmesiyle giderilir. Buna da, yukarıda bahsedildiği üzere hâl denklemleri denilmektedir.

Evrenin büyük ölçekte homojen ve uzayca eşyönlü olduğu varsayımına dayalı bu denklemlerden türeyen kozmolojik modeller genel olarak FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) modelleri olarak anılırlar. Bunlar, gözlemsel verilerin incelenmesi ve yorumlanmasında en çok rağbet edilen teorik çerçeve olmayı sürdürmektedirler.

### 2.2.2. Kozmolojik Evrim

Şimdi, (2.13) denklemini

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{1}{3}\kappa^2 c^2 \mu - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.16)$$

şeklinde ifade edelim. (2.13)+3×(2.14) kombinasyonu da

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}\kappa^2 c^2 (\mu + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.17)$$

olur. Bu son denkleme özel olarak Raychaudhuri denklemi adı verilir. Evrenin evrimini görmek için önce  $\Lambda = 0$  durumunu göz önüne alalım. Bu taktirde (2.16) ve (2.17) denklemleri

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{1}{3}\kappa^2 c^2 \mu - \frac{kc^2}{a^2} \quad (2.18)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}\kappa^2 c^2 (\mu + 3p) \quad (2.19)$$

denklemlerine indirgenir. (2.18) denklemi,  $\dot{a}$  içerdiğinden genişlemenin (ya da büzülmenin) hızı hakkında; (2.19) ise  $\ddot{a}$  dan dolayı, ivmesi hakkında bilgi verir. Büyük Patlama senaryosuna göre evren bir başlangıç hızıyla genişlemeye başlamıştır. Evrenin bundan sonraki evrimi ise, k-terimine bağlı olarak şöyle olur:

Eğer  $k=0$  ise, evren uzayca düz demektir ve (2.18) denklemi, evrenin, içinde madde bulunduğu sürece, yani, madde ( $\mu = \rho c^2$ ) sıfırlanana kadar genişlemesine devam edeceğini söyler. Dolayısıyla uzayca düz olan evren sonsuzda durana kadar genişleyecektir. Eğer  $k=+1$  ise, genişleme, maddenin katkısıyla k-terim tarafından dengelendiği sonlu bir madde yoğunluğunda durabilir. Dolayısıyla sonlu bir zamanda genişleme duracak ve ardından da çökme başlayacaktır. Eğer  $k=-1$  ise, (2.18) denkleminde kolayca görüleceği üzere madde tamamen kalmamış olsa bile k-terimi genişlemeyi sürdürecektir şekilde devreye girerek genişlemenin durmasını engelleyecek ve böylece de evren sonsuza dek genişleyecektir.

Şimdi, genişlemenin ivmesi hakkında bilgi veren (2.19) denklemini ele alalım. Dikkat edileceği üzere bu denklemde k parametresi yer almamaktadır. Başka bir deyişle ivme, uzaysal eğriliğin özelliklerine bağlı olmamaktadır. (2.19) denkleminde eksi işareti, eğer  $\mu + 3p > 0$  varsayılırsa, ivmenin daima negatif olduğunu söylemektedir. GRT çerçevesinde yalnızca kütle değil, fakat enerji boyutundaki basıncın da kütleyle eşdeğerliliği göz önünde bulundurulduğunda, buradan, genişlemenin gravitasyon tarafından yavaşlatılacağı sonucuna varılır. Buna karşın, (2.16) denkleminde  $\Lambda \neq 0$  alındığında, pozitif bir  $\Lambda$  teriminin, önündeki artı işaretinden dolayı kütleçekime karşı koyan bir itme (anti-gravite) gibi davranacağı ve bu durumun da genişlemenin ivmeli olmasını yolaçacağı kolayca görülür.

Yukarıdaki sonuçlar  $\rho = \mu / c^2$  madde yoğunluğunun ve de  $\mu + 3p$  şeklindeki kombinasyonun pozitif olduğu varsayımına dayanmaktadır. Standart madde (toz, radyasyon vb...) için  $\rho$  ve  $p$  nin pozitif alınması, fiziksel addedilebilir sayılması bakımından beklenen bir durumdur. Bu tür



beklentilerin ışığında, maddeyi tasvir eden  $T_{ij}$  yi fiziksel addetmek için bileşenleri ya da bunların bir takım kombinasyonları üzerine, sağlanması gereken bir takım kısıtlamaların ileri sürülmesi gerektiği düşünülmüştür. Bunlara Enerji Koşulları [1, 2, 3, 4, 5] denilmekte olup §(3.5) ve §(3.6) Alt-Bölüm'lerinde ayrıntılıları ele alınacaktır. Şimdilik, GRT çerçevesinde bir mükemmel akışkan için  $\mu = \rho c^2$  ve  $p$  cinsinden bunların, şunlar olduklarını söyleyelim:

- NEC (Null Energy Condition - Sıfır Enerji Koşulu) :  $\mu + p \geq 0$  (2.20.a)

- WEC (Weak Energy Condition - Zayıf Enerji Koşulu) :  $\mu \geq 0, \mu + p \geq 0$  (2.20.b)

- SEC (Strong Energy Condition- Güçlü Enerji Koşulu) :  $\mu + p \geq 0, \mu + 3p \geq 0$  (2.20.c)

- DEC (Dominant Energy Condition - Baskın Enerji Koşulu) :  $\mu \geq 0, \mu \geq |p|$  (2.20.d)

O halde, GRT'de; eğer Büyük Patlama senaryosu, yani, evrenin genişlediği kabul edilir ve  $\Lambda = 0$  varsayımın yanısıra madde-enerji içeriği de SEC'i sağlayacak şekilde standart madde olarak alınırsa, genişleme, yavaşlayan genişleme olma özelliği gösterir ve dolayısıyla da gravitasyon daima çekici olma mahiyetini korur. Alan denklemleri çözülmeyen varılan bu sonuç hakkında acaba gözlemler ne söylemektedir?

### 2.3. KOZMİK İVMELENME

Evrenin genişleme (ya da büzülme) hızının ölçüsü Hubble parametresi denilen ve

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (2.21)$$

olarak tanımlanan  $zaman^{-1}$  boyutunda bir büyüklük ile ifade edilir. Buna göre  $H(t) > 0$  genişlemeye,  $H(t) < 0$  ise büzülmeye karşılık düşer. Keza ivmelenmenin ölçüsü için de yavaşlama parametresi denilen ve

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)} \equiv -\frac{1}{H^2(t)} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \quad (2.22)$$

biçiminde tanımlanan boyutsuz bir büyüklük kullanılır.  $q(t) > 0$  değeri yavaşlamayı,  $q(t) < 0$  değeri ise hızlanmayı (ivmelenmeyi) belirtir. Bunların şimdiki  $t_0$  kozmik zamandaki değerleri

$H_o \equiv H(t_o)$  ve  $q_o \equiv q(t_o)$  ile gösterilir ve  $H_o$  a özel olarak Hubble sabiti adı verilir. Her ikisini de; gözlemsel verilere dayalı parlaklık uzaklığının ya da görünen kadirlerin  $z$  kızılakayması cinsinden resmedildiği Hubble diyagramları aracılığıyla elde etmek mümkün olduğundan, bunlara gözlenebilir kozmolojik büyüklükler denir. 90'lı yılların sonlarına kadar muhtelif gözlem verileri yavaşlama parametresi için  $q_o > 0$  değerlerini vermişlerdir. Dolayısıyla, o tarihlere kadar evrenin evrimi hakkındaki yaygın kanı, Büyük Patlama ve hemen ardından ( $10^{-35}$  saniye sonra) gelen enflasyon evresinden sonra evrenin bir yavaşlama evresine girmiş olduğu ve bunun da günümüzde hâlâ devam etmekte olduğu yolunda idi. Ancak, yüksek kızılakaymalı Tip-Ia supernovalara ilişkin 1998'de elde edilen gözlem sonuçları  $q_o < 0$  vererek, evrenimizin günümüzde ivmeli (hızlanan) bir genişleme (yavaşlayan genişleme değil!) sürecinde olduğuna hükmettirecek ilk kanıtı oluşturmuşlardır [6, 7, 8]. O tarihten bu yana farklı gözlem grupları tarafından gittikçe artan duyarlılıkta gerçekleştirilen benzer gözlemler bu hükmün doğru olduğunu kuşkuya yer bırakmayacak şekilde ortaya koymuşlardır [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. Ayrıca, bu süpernova gözlemleri dışında: Kozmik Mikrodalga Arkafon Eşyönsüzlükleri [21, 22, 23], Geniş ölçek yapıları [24, 25, 26, 27], Baryon akustik osilasyonları (dalgalanmaları) [28], Zayıf galaksi mercekleme [29], vb... pek çok farklı gözlem sonuçları da bu ivmeli genişlemeye dolaylı da olsa destek vermektedirler.

### 2.3.1. Karanlık Enerji

İvmeli (hızlanan) genişleme  $\ddot{a}(t) > 0$ , ya da yavaşlama parametresi diliyle  $q < 0$  olması demektir. Oysa, (2.19) denklemine göre  $\mu > 0$  ve  $p > 0$  olduğu sürece  $\ddot{a} > 0$  olması mümkün değildir. Bunun mümkün olabilmesi için

$$\mu + 3p < 0 \quad \Rightarrow \quad p < -\frac{1}{3}\mu \quad (2.23)$$

olması gerekmektedir. Ya da,  $p = w\mu$  lineer barotropik hâl denklemi kabul edildiğinde,

$$\mu(1 + 3w) < 0 \quad \Rightarrow \quad w < -\frac{1}{3} \quad (2.24)$$

koşulu sağlanmalıdır.  $\mu$  enerji yoğunluğunun negatif olamayacağı kabul edilirse (2.23) ün sağlanması için mükemmel akışkanın basıncının negatif olması gerekmektedir. (2.23) bağıntısı SEC'in ihlal edilmesi gerektiği sonucuna götürmektedir. (2.24) bağıntısı ise,  $w < -1/3$  olması nedeniyle, bu negatif basıncın çok büyük olması gerektiğini söylemektedir. Bilinmeyen baryonik maddenin hiçbir çeşidinin (2.23) ya da (2.24) ü sağlayabilecek olduğunu düşünmek mümkün görünmemektedir. Literatürde, bu aşırı negatif basınçlı sıradışı madde, ekzotik madde ya da Karanlık Enerji olarak nitelendirilmiştir. Eğer bu karanlık enerji, hal parametresi  $w_{KE}$  ile gösterilmek üzere ( $w_{KE}$  genel olarak zamana bağlı) hal denklemi  $p_{KE} = w_{KE}\mu_{KE}$  olan bir efektif mükemmel akışkan ile modellendirilirse, bu takdirde gözlemler,  $w_{KE}$  nin günümüz değerinin, [30] da verildiği gibi  $w_{KE} = -1.15^{+0.14}_{-0.18}$ , (yani,  $-1.45 \leq w_{KE} \leq -0.74$ ) ya da [31, 32] de verildiği gibi  $w_{KE} \approx -1 \pm 0.2$  olduğuna işaret etmektedir.  $w_{KE} = -1$  değeri, aşağıda belirtileceği gibi, bir efektif kozmolojik sabite eşdeğer olmakta;  $w_{KE} < -1$  durumu ise bir süper-ivmelenmeye karşılık gelmektedir (ayrıntılı bilgi §(4.8) de sunulacaktır). Tüm bu gözlemsel sonuçlar evrenin kütle-enerji içeriğinin yaklaşık: %5 inin baryonik madde, %27 sinin Karanlık Madde ve %68 inin de Karanlık Enerjiden oluşması gerektiğini söylemektedirler .

GRT çerçevesinde kalındığında, Karanlık Enerji diye nitelendirilen bu mahiyeti esrarengiz kaynağa en basit aday olarak  $\Lambda$  kozmolojik sabitinin varlığı ileri sürülmüştür [33, 34]. Nitekim, boşluğun enerjisi olarak yorumlanan  $\Lambda$  kozmolojik sabiti efektif olarak  $w = -1$ , yani,  $p_\Lambda = -\mu_\Lambda$  hal denklemli bir mükemmel akışkan bileşenine denktir. Pozitif bir  $\Lambda$  kozmolojik sabitinin (2.16) ve (2.17) denklemlerinde, gravitenin ters yönünde, yani, bir anti-gravite gibi davrandığı yukarıda söylenmişti.  $\Lambda$ CDM ( $\Lambda$  Cold Dark Matter –  $\Lambda$  Soğuk Karanlık Madde Modeli) veya “Konkordans Modeli” denilen bu açıklama başlıca gözlem sonuçlarını çok iyi üretmesine karşın, Parçacık Fiziği açısından henüz anlaşılammış kavramsal bir tutarsızlık taşımaktadır; o da,  $\Lambda$  ile ilişkilendirilen KE enerji yoğunluğunun günümüz gözlenen değerinin boşluğun kuvantumsal enerji ölçeğindeki (doğal Planck ölçeği) yaklaşık 121 mertebe küçük oluşudur ve dolayısıyla da son derece yüksek seviyede ince ayar gerektirmektedir. Bu, “Kozmolojik Sâbit Problemi” olarak anılmaktadır (genel bilgi için bkz. [30, 33, 34]). Öte yandan, ivmeli genişlemeyi  $\Lambda$  ile açıklama bir de şöyle bir problemi ortaya çıkarmaktadır; eğer “SEC” in ihlali tamamen  $\Lambda$  tarafından ileri geliyorsa,  $\Lambda$  ya bağlanan enerji yoğunluğu, evrende geri kalan içeriğin enerji yoğunluğu ile aynı büyüklük mertebesinde olmalıdır ve

nitekim de yukarıda verilen gözlemsel içerik için merteye  $O(1)$  dir, yani, ne muazzam büyük, ne de sıfırdır!). Bu, evrenin evriminin özel bir zamanında olduğumuz, yani, madde-egemen evreden  $\Lambda$  - egemen evreye şimdiki zamanda geçmekte ya da çok yakın zamanlarda geçmiş olduğumuz anlamını taşımaktadır. Buradan şu soru ortaya çıkmaktadır: Evrenin uzun evriminin sürecinde ivmeli genişleme neden “şimdi” gerçekleşmektedir? Buna da “rastlantı (coincidence) problemi” denilmektedir.

KE'nin  $\Lambda$  ile açıklanması girişiminin, taşıdığı sorunlar nedeniyle tatminkar görülmemesi üzerine, EAD'nin sağ yanındaki madde-enerji kısmına, ya da başka bir deyişle, EH-aksiyonundaki  $L_m$  Lagrange madde enerji yoğunluğuna muhtelif özellikli skaler alanlar [30] ya da Chaplygin gaz [35] gibi ekzotik (bilinmeyen dışında) madde bileşenleri ithal etmek suretiyle KE'ye uygun düşebilecek kozmolojik senaryolar üretme yoluna gidilmişse de bu yaklaşım: Güneş sistemimiz gözlemleriyle tutarlılık, mertebesiz uygunluk, hayalet alan (negatif kinetik enerjili skaler alan) vb... pek çok problemi de beraberinde ortaya çıkarmıştır. Bu tür girişimlere yöneltilebilecek temel eleştiri, söz konusu adayların henüz gözlemsel bir karşılıklarının bulunmadığı noktasındadır. Aynı eleştiri KM yi açıklamak üzere teklif edilen onlarca aday için de geçerlidir. Sonuç olarak; KE ve KM'ye kaynaklık eden madde-enerji bileşeninin ne olduğu meselesi hâlâ muammasını koruyadurmaktadır.

### 2.3.2. GRT'ye Alternatif Değişikliğe Uğratılmış Gravite Teorileri

Karanlık Enerji kavramını işin içine karıştırmaksızın hızlanan genişlemeyi açıklamak üzere EAD'nin sağ tarafındaki madde-enerji seçimi hakkında amaca uygun (ad hoc), fakat henüz hiçbir şekilde gözlemsel karşılığı olmayan varsayımlar yapmak yerine, sol taraftaki eğrilik kısmında değişikliğe gitmek ve GRT'ye alternatif teori/teoriler üretme yoluna başvurulmuştur (genel bilgi için bkz. [36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51]). Yukarıda değinildiği gibi EAD, integrantı  $R$  Ricci Eğrilik skalerine göre lineer olan EH-aksiyonundan metriğe göre bir varyasyonla elde edilebilmektedir. Ve bu da (2.2.a) daki gibi sol tarafta en fazla ikinci mertebeden türevli  $G_{ij}$  Einstein tansörünü ortaya çıkarmaktadır. Eğer aksiyonun integrantında  $R$  değil de  $R$  nin keyfi bir  $f(R)$  fonksiyonu alınırsa [52, 53] bu taktirde yeni alan denklemleri,  $R$  indisi ile  $R$  ye göre türev gösterilmek üzere,

$$f_R(R)R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}f(R) - \nabla_i \nabla_j f_R(R) + g_{ij} \square f_R(R) = \kappa^2 T_{ij}$$

olmaktadır (bkz. A.42) ve bunlar da soldaki son iki teriminden dolayı genel olarak 4-üncü mertebeden türevli denklemlerdir. Eğer integrant hem  $R$  ve hem de  $G$  Gauss-Bonnet eğrilik invariantının  $f(R,G)$  şeklinde keyfi bir fonksiyonu olarak alınırsa [54, 55, 56], bu taktirde (A.43) deki alan denklemlerine varılmaktadır. Öte yandan, integrantın,  $T = \dot{I}z T_{ij}$  olmak üzere,  $f(R,T)$  alınması [57, 58] ise, (A.44) de gösterilen alan denklemlerini vermektedir. Benzer şekilde, integrantta muhtelif eğrilik invariantlarını argüman kabul eden fonksiyonlar olarak dört ya da daha yüksek boyutlarda pek çeşitli gravitasyon teorileri inşa edilebilir. Böyle elde edilen teorilere genel olarak değiştirilmiş ya da değişikliğe uğratılmış gravite teorileri denir. Bizim bu Tez’de sunacağımız 4-boyutlu  $f(R,G,T)$  -gravite teorisi;  $f(R)$ ,  $f(R,G)$ ,  $f(R,T)$  gravite teorilerini de bir alt-sınıf olarak kapsayacak nisbeten genel bir teori olacaktır (bkz: A.41). Aslında, Lagrange’yen yaklaşıma dayalı bu tür teorilerin ortaya çıkışı KE meselesinin ortaya çıkmasından çok daha öncelere uzanır. EH-aksiyonuna yüksek mertebeden eğrilik invariantları ithal etme girişiminde ilk bulunanlar 1919’da Weyl [59] ve 1923’de Eddington [60] olmuştur. Ancak, bu girişimler gözlemsel bir olayın açıklanmasına yönelik olarak değil de, yalnızca bir teorik tamamlayıcılık amacıyla yapılmıştır. Aksiyonu karmaşıklaştırarak sonuçta 4-üncü mertebeden türevli karmaşık denklemler elde etmek için görünürde bir gerekçe olmaması bir yandan, öte yandan da böyle yüksek mertebeden türevli hiçbir fizik teorisinin biliniyor olmaması söz konusu çalışmaları ilgi çekici kılmamıştır. Buna karşılık, 1960’lardan itibaren, gravitasyonu kuantum teorisiyle bağdaştırma girişimleri, gravitasyon aksiyonunu karmaşıklaştırmanın bir değer taşıyabileceğine dair birtakım emareler ortaya çıkarmıştır. GRT’nin orijinal şekliyle rönormalize edilemeyeceği ve dolayısıyla da uygun bir biçimde kuantize edilemeyeceğine tam kanaat getirilmişken, 1960’ların başlarındaki çalışmalar kuantum gravite girişimlerine yeni bir canlandırma getirmiştir. Bu çalışmalarda, tek-döngü rönormalizasyonu için dörtten büyük boyutlarda EH-aksiyonunun yüksek mertebeden eğrilik terimleriyle tamamlanması gerektiği gösterilmiştir. GRT’ye yüksek enerji düzeltilmesi (ya da mor-ötesi düzeltme) olarak ortaya çıkan bu tür  $f(R,G,\square R,\square R^{-1},R_{ij}R^{ij},R_{ijkl}R^{ijkl},\dots)$  teoriler önceleri, özellikle, evrenin erken evresine etkilerin araştırılması bakımından kullanılmışlardır. Ancak, daha sonra 1970’de Buchdall [52], GRT’nin yüksek eğrilikte yetersiz kaldığı gerekçesine oturtulan bu yüksek mertebeden invariantlar kullanma yaklaşımını, dört boyutta

$f(R)$ –*gravite* olarak, ilk defa, Rölativist Kozmoloji (Standart GRT’ye dayalı) alanında ele almıştır. 1980’de ise Strarobinsky ilk  $f(R)$  enflasyon modelini teklif etmiştir [61]. Evrenin ivmeli genişlemesinin keşfi ise, KE olarak nitelendirilen varsayımsal madde-enerji kullanımlarına bir alternatif olarak, bu tür yaklaşımlara, fakat bu sefer kızılötesi değişiklikler olmak üzere, olağanüstü bir rağbet kazandırmıştır. Değişikliğe uğratılmış söz konusu bu teoriler; Güneş sistemi testleriyle uygunluk [62, 63, 64, 65, 66], kozmolojik evrim, yani; önce erken-evre enflasyon, ardından yavaşlama ve sonrasında da geç-evre enflasyon sürecini üretme [67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77]. pertürbasyon [78, 79, 80, 81, 82], tekilikler [83, 84, 85, 86], kararlılık [87, 88, 89, 90, 91, 92], kozmolojik dinamik [93, 94, 95, 96, 97, 98], kozmolojik kısıtlamalar [99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107], enerji koşulları [108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118] ve daha pekçok muhtelif konularda [119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131] yoğun bir araştırma alanı olmayı sürdürmektedirler.

### 3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu bölümde, Tez’de kullanılacak notasyon, yazılış, gösterim ve kabuller belirtildikten sonra hesaplamalara dayanak olmak üzere 4-boyutlu uzay-zaman geometrisine ilişkin kavram, tanım ve bağıntılar tanıtılacak ve metrik yaklaşım, 1+3 Kovaryant Ayrışım yöntemi ile tetrad formalizminin temelleri kısaca açıklanacaktır. Bu konulardaki bilgilerin pek çoğu Genel Rölativite ve Kozmoloji alanındaki standart kitaplarda yer almakla birlikte biz bunları burada amacımıza uygun olarak büyük ölçüde [132, 133, 134, 135, 136] no’lu kaynaklardan yararlanarak derledik.

#### 3.1. 4-BOYUTLU UZAY-ZAMAN GEOMETRİSİNİN TEMEL TANSÖRLERİ

Tez’in tamamında Einstein toplama kuralı kullanılacaktır; buna göre, bir tekterimlide tekrarlanan indisler olduğunda, o indisler üzerinden toplam yapılacağı anlaşılacaktır. İndis kabulü ise şöyle olacaktır: Latin alfabesinin ikinci yarısındaki harfler 2. Bölüm’de kullandığımız gibi  $i, j, k, \dots = 0, 1, 2, 3$  olmak üzere tansör indislerini gösterecektir; §(3.2) de ise genel koordinat ya da tetrad indisleri için Latin ve Grek alfabelerinin ilk yarısındaki harfler, yani  $a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3$  ve  $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3$  kullanılmaya başlanacaktır. Öte yandan, indisleri çevreleyen yuvarlak parantezlerle simetrizasyon, köşeli parantezler ile antisimetrizasyon ve açılı parantezler ile de uzaysal izdüşürülmüş tansörün izsiz simetrik kısmı gösterilecektir.

Şimdi, 4-boyutlu bir  $V_4$  metrik uzay-zaman manifoldunda  $x^0 = ct$  ile zaman koordinatı ve  $x^1, x^2, x^3$  ile de uzay koordinatları gösterilmek üzere bir  $\{x^i\}$  yerel koordinat sistemi göz önüne alınsın. Bu  $\{x^i\}$  koordinat sisteminde iki tür taban seçmek mümkündür. İlki, koordinat eğrilerine teğet vektörler olan  $\partial_i (\equiv \partial / \partial x^i)$  lerden oluşmuş  $\{\partial_i\}$  kümesi; diğeri de koordinat yüzeylerine dik olan ve  $dx^i(\partial_j) = \delta^i_j$  düalite bağıntısıyla tanımlanmış  $\{dx^i\}$  kümesidir ( $dx^i, x^i = \text{sâbit}$  yüzeylerinin gradyenti olarak düşünülebilir).  $\{\partial_i\}$  ye koordinatsal teğet vektör tabanı;  $\{dx^i\}$  ye de koordinatsal diferansiyel 1–form tabanı denir. Bu  $\{\partial_i, dx^i\}$  koordinatsal tabanda bir  $X$  vektörünün gösterimi tabanların lineer kombinasyonu olarak  $X = X^i \partial_i = X_i dx^i$

şeklinde olur.  $X^i$  lere kontravaryant,  $X_i$  lere de kovaryant bileşenler denir. Daha yüksek mertebeden tansörlerin bileşenleri de benzer şekilde tanımlanabilir.  $V_4$  uzay-zamanında sonsuz yakını iki nokta (olay) arasındaki “uzaklık”

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (ds^2 < 0) \quad (3.1)$$

ifadesiyle verilir. Buna, uzay-zaman aralığı ya da metrik denir. (3.1) ifadesi verildiğinde, boy, türev, eğrilik, gibi tüm geometrik büyüklükler tanımlanabildiği için (3.1) e aynı zamanda “Birinci Temel Form” da denir. Burada, metrik katsayıları ya da kısaca metrik denilen  $g_{ij}$  ler, genel olarak, koordinatların fonksiyonudurlar. İkinci mertebeden kovaryant, simetrik ( $g_{ij} = g_{ji}$ ) bir tansör olan  $g_{ij}$  nin tersi  $g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$  bağıntısıyla tanımlanır.  $g_{ij}$ ,  $g^{ij}$  ve  $g^i_j = \delta^i_j$  gösterimleri, tansörlerin kovaryant ve kontravaryant gösterimlerinde birbirleri arasındaki geçişi sağlarlar.

Bir  $\phi$  skaler fonksiyonun  $\partial_i \phi (\equiv \partial \phi / \partial x^i)$  kısmi türevlerinin bir tansör olmasına karşın bir vektör ya da genel olarak bir tansörün kısmî türevleri için böyle bir özellik yoktur. Bu durum, paralel ötelemede teğet taban vektörlerinin değişimi de göz önüne alınarak düzeltilir. Buna göre, teğet taban vektörlerinin birbirleri doğrultusundaki türevleri  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k$  bağıntısıyla tanımlanır. Lineer kombinasyon “katsayıları” durumundaki  $\Gamma^k_{ij}$  büyüklüklerine genel olarak Bağlantı Katsayıları denir. Bunlar, koordinatsal tabanda Christoffel Sembolleri; genel bir tabanda ise Ricci Dönme Katsayıları adını alır. Söz konusu büyüklükler aracılığıyla tansör özelliği gösterecek bir türev oluşturulabilir; buna kovaryant türev denir. Bu, Tez’imizde  $\nabla_i \equiv \nabla_{\partial_i}$  yazılışı ile gösterilecektir. Aşağıda çeşitli tip tansörler için bu türev örneklendirilmektedir.

$$\begin{aligned} \nabla_i \phi &= \partial_i \phi \\ \nabla_i X^j &= \partial_i X^j + \Gamma^j_{ik} X^k \\ \nabla_i X_j &= \partial_i X_j - \Gamma^k_{ij} X_k \\ \nabla_i X^{kl\dots}_{j\dots} &= \partial_i X^{kl\dots}_{j\dots} + \Gamma^k_{im} X^{ml\dots}_{j\dots} + \Gamma^l_{im} X^{km\dots}_{j\dots} + \dots - \Gamma^m_{ij} X^{kl\dots}_{m\dots} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Özel olarak,  $\nabla_k g_{ij} = 0$  dır. Buna Ricci Teoremi denir.  $V_4$  uzay-zamanının burulması,  $\phi$  keyfî bir skaler fonksiyon olmak üzere



$$\nabla_i \nabla_j \phi - \nabla_j \nabla_i \phi = -\Gamma^k_{ij} \nabla_k \phi \quad (3.3)$$

bağıntısıyla tanımlanır. Eğer,  $\Gamma^k_{ij}$  Burulma tansörü sıfır alınırsa ( $\Gamma^k_{ij} = 0$ ) uzay-zamana burulmasız denir ve Tez'imizde yalnızca bu tip uzay-zaman göz önüne alınacaktır. Bu takdirde

$$\nabla_i \nabla_j \phi = \nabla_j \nabla_i \phi \quad (3.4)$$

ve dolayısıyla da  $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$  (alt iki indise göre simetrik) olur.  $\Gamma^k_{ij}$  büyüklükleri, metrik tansörden hareketle, burulmasız bir  $V_4$  uzayı için,

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \quad (3.5)$$

ifadesi ile hesaplanır. 4-boyutlu  $V_4$  geometrisinin düz (Öklitsel) geometriden sapmasının ölçüsünü Riemann eğrilik tansörü denilen ve

$$R^i_{jkl} = \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{jk} + \Gamma^m_{jl} \Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk} \Gamma^i_{ml} \quad (3.6)$$

biçiminde tanımlanan 4-üncü mertebeden bir tansör verir. Buna göre,  $R^i_{jkl} \neq 0$  olduğunda  $V_4$  ün Riemannsal ya da eğrisel olduğu söylenir. Riemann eğrilik tansörü, matematiksel olarak, burulmasız bir uzay için,  $X$  keyfi bir vektör olmak üzere, kovaryant türevlerinin değiş-tokuşluktan (komütatiflikten) sapması sonucunda ortaya çıkar, yani,

$$\nabla_i \nabla_j X_k - \nabla_j \nabla_i X_k = R_{ijkl} X^l \quad (3.7)$$

dir. (3.6) da gösterilen tansör bunun 1 kere kontravaryant, 3 kere kovaryant olan  $R^i_{jkl} = g^{im} R_{mjkl}$  biçimindeki gösterimidir. (3.7) nin bir 2-tansöre genelleştirilmesi ise

$$2\nabla_{[i} \nabla_{j]} X_{kl} = R^m_{kji} X_{ml} + R^m_{lji} X_{km} \quad (3.8)$$

dir. Riemann tansörü

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij} \quad (3.9.a)$$

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0 \quad (3.9.b)$$

cebirsel özdeşliklerini ve de

$$\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} = 0 \quad (3.9.c)$$

diferansiyel özdeşliğini sağlar. (3.7) ve (3.8) bağıntılarına Ricci özdeşlikleri, (3.9.b) ve (3.9.c)'ye de, sırasıyla, I. ve II. Bianchi özdeşlikleri denir. (3.9.a ve b) deki simetri özelliklerinden ötürü, Riemann tansörünün toplamda 256 olan bileşeninden yalnızca 20'si bağımsızdır. Riemann tansörünün, Ricci eğrilik tansörü  $R_{ij}$  ile Ricci eğrilik skaleri  $R$  olmak üzere sıfırdan farklı yalnızca 2 tane izi vardır. Bunlar:

$$R_{ij} \equiv g^m_k R^k_{imj} = R^m_{imj} \quad \text{ve} \quad R \equiv g^{ij} R_{ij} = R^i_i \quad (3.10)$$

büzülmeleriyle tanımlanır. Ricci eğrilik tansörünün  $R_{ij} = R_{ji}$  simetrisinden dolayı, yalnızca 10 bağımsız bileşeni vardır. Yeri gelmişken, Riemann ve Ricci tansörleri ile kovaryant türev tanımı için yazılış kabullerimize dikkati çekmek yerinde olacaktır. (3.6) bağıntısında eşitliğin sağındaki ilk terimdeki türev Riemann tansörünün sondan ikinci alt-indisine göredir. Ricci tansörü ise (3.10) daki gibi tanımlanmıştır, yani, büzme sondan ikinci alt-indise göre yapılmıştır. (3.2) deki kovaryant türev tanımlarında  $\Gamma$  ların alt-indislerinden ilki, türev indisi olarak alınmıştır. Tez'de muhtelif hesaplamalar için birtakım bağıntı ve özdeşliklere gereksinim duyulacaktır. (3.9.c) ile gösterilen II. Bianchi özdeşliğinden hareketle çeşitli büzmelerle:

$$\nabla^i R_{ijkl} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk} \quad (3.11.a)$$

$$\nabla^i R_{ij} = \frac{1}{2} \nabla_j R \quad (3.11.b)$$

bağıntıları kolayca tesis edilebilir. Bunlara sırasıyla, bir kere ve iki kere büzülmüş Bianchi özdeşlikleri denir. Ayrıca (3.8) in de kullanımıyla

$$\nabla_i \nabla_j R^{piqj} = \square R^{pq} - \frac{1}{2} \nabla^p \nabla^q R - R^{pm} R^q_m + R^{pmqn} R_{mn} \quad (3.11.c)$$

$$\nabla_m \nabla_n R^{mn} = \frac{1}{2} \square R \quad (3.11.d)$$

$$\nabla_m \nabla_{(i} R_{j)}^m = \frac{1}{2} \nabla_{(i} \nabla_{j)} R + R_i^m R_{jm} - R_{imjn} R^{mn} \quad (3.11.e)$$

özdeşlikleri de kolayca elde edilebilir. Burada,  $\square$  sembolü  $\square \equiv \nabla^i \nabla_i$  biçiminde tanımlanmış d'Alembert operatörüdür. Öte yandan  $\phi$  bir skaler fonksiyon olmak üzere

$$(\square \nabla_i - \nabla_j \square) \phi = R_{ij} \nabla^j \phi \quad (3.11.f)$$

$$R^{ipmn} \nabla_m \nabla_n \nabla_p \phi = -\frac{1}{2} R^{ipmn} R^q{}_{pmn} \nabla_q \phi \quad (3.11.g)$$

özdeşliklerini de kaydedelim.

Tez'imizde, Enerji Koşullarında kullanılmak üzere efektif akışkan yaklaşımı altında efektif madde-enerji yoğunluğu, efektif basınç gibi dinamik büyüklüklerinin tesis edilmesi ve bunların RW metriği çerçevesinde bir ortonormal tetrad çatısında hesaplanması ele alınacaktır. Bu amaca yönelik olarak aşağıda Alan Denklemlerinin 1+3 Ayrışımı ile tetrad formalizmi yöntemlerini kısaca tanıtıyoruz (geniş bilgi için bkz. [133-136]). Bu alt-bölümden itibaren, literatürdeki genel kullanım ile da uygunluk sağlamak üzere, notasyon değişikliğine gideceğiz. Buna göre, koordinatsal bileşen kastedilmedikçe  $\{i, j, k, \dots = 0, 1, 2, 3\}$  yerine, genel koordinatlarda bileşen anlamında,  $\{a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3\}$  ve  $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3\}$  indislerini kullanacağız. Bunlar aynı zamanda tetrad taban vektör ve 1-formlarının da ismi olacaktır. Ayrıca, yeri geldiğinde değişikliği bildirmek üzere, şimdilik ışık hızı  $c \equiv 1$  ve  $\kappa^2 = 8\pi G_N = 1$  alınacaktır; dolayısıyla  $x^0 = ct = t$  olarak anlaşılacaktır.

### 3.2. 1+3 KOVARYANT AYRIŞIM YÖNTEMİ

Evreni dolduran maddesel içerik, akışkan gibi sürekli bir ortam olarak düşünüldüğünde, parçacıklarına, bir  $u$  4-lü hız vektörünün teğet olduğu evrim çizgileri denilen eğriler yakıştırmak mümkündür. 4-boyutlu geometrinin bu eğriler ailesi (kongruansı) ile doldurulmuş olduğunu tasarlamaya uzay-zamanın ipliklenmesi adı verilir. Böyle bir tasavvur geometriye yeni bir yapı kazandırır. Zaman cinsinden

$$u_a u^a = -1 \quad (3.12)$$

uyarınca normlanmış sözkonusu ayrıcalıklı 4-lü hız vektörü  $u$  nun varlığının varsayımı

$$U_{ab} = -u_a u_b \quad \text{ve} \quad h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \quad (3.13)$$

gibi iki tansör tanımlanabilmesine olanak sağlar. Bunlar, tanımlarından dolayı,

$$\begin{aligned} U_{ab} &= U_{ba}, & U_{ab} u^b &= 0, & U^c{}_a U_{cb} &= U_{ab}, & U^a{}_a &= 1 \\ h_{ab} &= h_{ba}, & h_{ab} u^b &= 0, & h^c{}_a h_{cb} &= h_{ab}, & h^a{}_a &= 3 \end{aligned} \quad (3.14)$$

özelliklerine sahiptirler. Bunlardan  $h_{ab}$  ye “dik izdüşüm tansörü” denir ve bu, tüm tansörleri 4-lü hız vektörü ile hareket eden gözlemcinin anlık durgunluk sistemine dik olarak izdüşürür.  $U_{ab}$  ise  $u$  ya paralel düşürme işlevini yerine getirir. Buna göre, mesela, bir vektörün (1-tansör) ve 2-tansörün muhtelif izdüşüm açılımları

$$X_a = U^b{}_a X_b + h^b{}_a X_b \quad (3.15.a)$$

$$X_{ab} = -U^c{}_a U^d{}_b X_{cd} + U^c{}_a X_{cb} + U^c{}_b X_{ac} + h^c{}_a h^d{}_b X_{cd} \quad (3.15.b)$$

biçimlerinde olur. Sözkonusu formalizmde iki türlü türev tanımı bulunmaktadır. Bunlardan birincisi  $u$  doğrultusundaki kovaryant türevidir ki buna “nokta türevi” ya da zamansal türev denir. Diğeri ise tamamen dik izdüşürülmüş türevidir ki, buna da uzaysal türev denir ve  $D_a$  ile gösterilir. Bu türevlerin tanımları ve gösterimleri: bir  $\phi$  skaleri, bir  $X_a$  vektörü ve bir 2-tansör  $X^b{}_a$  için aşağıda örneklendirilmektedir.

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= u^c \nabla_c \phi & ; & & D_e \phi &= h^c{}_e \nabla_c \phi \\ \dot{X}_a &= u^c \nabla_c X_a & ; & & D_e X_a &= h^c{}_e h^d{}_a \nabla_c X_d \\ \dot{X}^b{}_a &= u^c \nabla_c X^b{}_a & ; & & D_e X^b{}_a &= h^c{}_e h^d{}_a h^b{}_f \nabla_c X^f{}_d \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.2.1. Akışkanın Kinematik Büyüklükleri

Şimdi, ayrıcalıklı  $u$  4-lü hız vektörünün  $\nabla_a u_b$  kovaryant türevini hesaplayalım. Bu, ikinci mertebeden bir tansör olduğundan, (3.15.b) uygulanarak ve (3.12-14) özellikleri kullanılarak

$$\nabla_a u_b = -u_a u^c \nabla_c u_b + h^c_a h^d_b \nabla_c u_d \quad (3.17)$$

bulunur. Eğer,

$$\begin{aligned} \dot{u}_b &= u^c \nabla_c u_b & \Rightarrow & \quad u_a \dot{u}^a = 0 \\ \theta_{ab} &= D_{(a} u_{b)} & \Rightarrow & \quad \theta \equiv \dot{z} D_{(a} u_{b)} = \theta^a_a \\ \sigma_{ab} &= D_{\langle a} u_{b \rangle} \equiv \theta_{ab} - \frac{1}{3} \theta h_{ab} & & \quad (3.18) \\ \omega_{ab} &= D_{[a} u_{b]}, \quad \omega^a = \frac{1}{2} \eta^{abcd} u_d \omega_{bc} = \frac{1}{2} \eta^{abc} \omega_{bc} \Leftrightarrow \omega_{ab} = \eta_{abc} \omega^c \end{aligned}$$

tanımları yapılırsa (3.17) ifadesi

$$\begin{aligned} \nabla_a u_b &= -u_a \dot{u}_b + D_a u_b \\ &= -u_a \dot{u}_b + \theta_{ab} + \omega_{ab} \\ &= -u_a \dot{u}_b + \sigma_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab} + \eta_{abc} \omega^c \end{aligned} \quad (3.19)$$

olur. Burada;  $\dot{u}_a$ : akışkanın 4-lü ivme vektörü,  $\theta_{ab}$ : hacimce genişleme tansörü ( $\theta_{ab} = \theta_{ba}$ ),  $\theta$ : hacimce genişleme skaleri,  $\sigma_{ab}$ : makaslama tansörü ( $\sigma_{ab} = \sigma_{ba}$  ve  $\dot{z} \sigma_{ab} = 0$ ),  $\omega_{ab}$ : dönme (girdap) tansörü ( $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$  ve  $\dot{z} \omega_{ab} = \omega^a_a = 0$ ),  $\omega_a$ : dönme vektörü ( $\omega^a = \frac{1}{2} \eta^{abcd} u_d \omega_{bc}$ ) büyüklüklerine akışkanın kinematik büyüklükleri denir. Bunlar tamamen uzaysal büyüklüklerdir, yani,  $\theta_{ab} u^a = 0$ ,  $\omega_{ab} u^a = 0$ ,  $\sigma_{ab} u^a = 0$ ,  $\omega_a u^a = 0$ ,  $\dot{u}_a u^a = 0$  özelliklerini taşır. Yukarıdaki ifadelerde  $\mu^{abcd}$  büyüklüğü, 4-boyutlu hacim elemanı olup tüm indislerine göre antisimetrik bir tansördür;  $\eta^{abc} = \eta^{abcd} u_d$  ise bunun  $u$  ya dik izdüşürülmüşüdür. Yukarıdaki tansör ve vektörlere ek olarak

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ab} \sigma^{ab} \geq 0 \quad , \quad \omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{ab} \omega^{ab} = \omega_a \omega^a \geq 0 \quad (3.20)$$

bağıntılarıyla, sırasıyla, makaslama skaleri ve dönme skaleri denilen iki yardımcı skaler büyüklük de tanımlanır.

### 3.2.2. Akışkanın Dinamik Büyüklükleri

Bir  $u$  4-lü hız vektörü ile hareket eden bir gözlemciye göre akışkanın madde-enerji içeriğine, ifadesi

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} + q_a u_b + q_b u_a + \pi_{ab} \quad (3.21)$$

ile gösterilen bir enerji-momentum tansörü bağlanabilir. Burada  $\mu, p, q_a$  ve  $\pi_{ab}$  büyüklükleri  $u$  ya göre ölçülmüş olup,

$$\begin{aligned} \mu &= u^a u^b T_{ab} \\ p &= \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab} \\ q_a &= -h^b_a u^c T_{bc} \\ \pi_{ab} &= h^c_{(a} h^d_{b)} T_{cd} - \frac{1}{3} h_{ab} h^{cd} T_{cd} \end{aligned} \quad (3.22)$$

biçiminde tanımlanmıştır ve sırasıyla: madde-enerji yoğunluğu, eşyönlü basınç, ısı akısı ve eşyönsüz basınç tansörü olarak adlandırılırlar. Bunlar:  $q_a u^a = 0$  (uzaysal);  $\pi_{ab} u^a = 0$ ,  $\pi_{ab} = \pi_{(ab)}$ ,  $\pi^a_a = 0$  (uzaysal, simetrik ve izsiz) özelliklerine sahiptirler. Akışkanın fizikselliğini bu büyüklükler arasındaki hal denklemi denilen birtakım bağıntılar sağlar. Buna göre eğer  $q_a = 0 = \pi_{ab}$  ise, yani,

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} \quad (3.23)$$

ise buna mükemmel akışkan adı verilir;  $p$  ile  $\mu$  arasında  $p = p(\mu)$  şeklinde bir bağıntı olduğunda buna barotropik hal denklemi; ve özel olarak da,  $p = w\mu$  ( $w = \text{sâbit}$ ,  $-1 \leq w \leq +1$ ) ise buna lineer barotropik hal denklemi adı verildiğini ve ayrıca da  $w$  parametresinin değerlerine göre akışkanın cinsinin nitelendirildiğini 2. Bölüm'de söylemiştik.

### 3.2.3. Kovaryant Evrim ve Bağ Denklemleri

1+3 kovaryant ayrışım yönteminin amacı, Ricci ve Bianchi özdeşliklerinden hareketle (3.13) deki izdüşüm tansörleri aracılığıyla akışkanın kinematik ve dinamik büyüklüklerinin sağladığı denklemleri tesis etmektir. Hesaplamalarda ortaya çıkan  $\nabla_a u_b$  kovaryant türevleri yerine her defasında (3.19) ile verilen ifadesi yerleştirilir. Öte yandan,  $R_{ab}$  Ricci tansörü için de, bunun  $T_{ab}$  enerji-momentum tansörü cinsinden cebirsel olarak ifade edilmesine olanak sağlayan (2.2.b) deki EAD kullanılır. Sonuçta kinematik ve dinamik değişkenler için evrim ve bağ denklemleri olarak adlandırılan iki takım denklem sistemi elde edilir. Bunlardan evrim denklemleri, değişkenlerin  $u^a \nabla_a$  zamansal türevlerini –ki bunlar “nokta” sembolüyle gösterilir– içerirler; bağ denklemlerinde ise yalnızca  $D_a$  uzaysal türevleri bulunur. Aşağıda, bunlardan sadece ilerde kullanacaklarımızı yazıyoruz.

(3.7) deki Ricci Özdeşliği  $u$  vektör alanı için yazılırsa

$$\nabla_a \nabla_b u_c - \nabla_b \nabla_a u_c = R_{abcd} u^d \quad (3.24)$$

olur. Bu,  $U_e^a = -u_e u^a$  izdüşürme operatörüyle çarpıldığında

$$\nabla_a \dot{u}_c - (\nabla_b u_c)(\nabla_a u^b) - \nabla_b (\nabla_a u_c) u^b = R_{abcd} u^d u^b \quad (3.25)$$

verir. Bu da  $h_e^a h_f^b$  ile çarpılır ve (3.19) bağıntısı da kullanılırsa, indislerin yeniden adlandırılması sonucunda

$$D_a \dot{u}_b - (D_d u_b)(D_a u^d) + \dot{u}_a \dot{u}_b - h_a^c h_b^d (D_c u_d) = h_a^c h_b^d R_{cdef} u^e u^f \quad (3.26)$$

elde edilir. Bunun izi ise,  $R_{ab} u^a u^b = -\frac{1}{2}(\mu + 3p)$  olmak üzere  $\theta$  nin evrimini verir:

$$\dot{\theta} = \dot{u}_a \dot{u}^a + D_a \dot{u}^a - \frac{1}{3} \theta^2 - 2\sigma^2 + 3\omega^2 - R_{ab} u^a u^b \quad (3.27)$$

Bu, gravitasyonel çekimin temel denklemi olup Raychaudhuri denklemi olarak bilinir. 1+3 ayrışım tekniğinin, (2.3) e uygulanması

$$\dot{\mu} + \theta(\mu + p) + D_a q^a + 2\dot{u}_a q^a + \sigma_{ab} \pi^{ab} = 0 \quad (3.28)$$

$$\dot{q}_a + \frac{4}{3}\theta q_a + \sigma_a^b q_b + \omega_a^b q_b + D_a p + D_b \pi_a^b + (\mu + p)\dot{u}_a - \dot{u}_b \pi_a^b = 0 \quad (3.29)$$

korunum denklemlerine yol açar. Bu noktada şunu belirtmek gerekir: (3.21) ile verilen  $T_{ab}$  enerji-momentum tansörü, standart bir madde bileşenini ya da bunların toplamını temsil edebileceği gibi, herhangi bir efektif bir enerji-momentum tansörü de olabilir Bu bakımdan, yukarıdaki denklemlerde yer alan  $\mu$ ,  $p$ ,  $q_a$  ve  $\pi_{ab}$  dinamik değişkenlerini yalnızca standart maddeninkilerle değil, fakat ait olabilecekleri diğer tip enerji-momentum tansörleriyle de ilişkilendirmek gerekmektedir. Bunun örneklerini Bulgular Bölüm'ünde göreceğiz. Şimdilik, mükemmel akışkan ( $q_a = 0 = \pi_{ab}$ ) hâli için yukarıdaki denklemlerin

$$\dot{\mu} + \theta(\mu + p) = 0 \quad (3.30)$$

$$D_a p + (\mu + p)\dot{u}_a = 0 \quad (3.31)$$

şekline indirgeneceklerini kaydedelim.

### 3.3. TETRAD FORMALİZMİ

$\{\partial_i, dx^i\}$  koordinatsal tabandan hareketle

$$e_a = e_a^i \partial_i, \quad \det(e_a^i) \neq 0 \quad (3.32)$$

$$e^a = e_i^a dx^i \quad (3.33)$$

biçiminde lineer kombinasyonlar almak suretiyle yeni bir  $\{e_a, e^a\}$  tabanı tanımlanabilir. Dört bağımsız vektörden oluşan  $\{e_a\}$  ya tetrad tabanı denir.  $e_a^i$  ler ise bu vektörlerin  $\{\partial_i\}$



tabanındaki bileşenleridir ve genel olarak zaman ve uzay koordinatlarının fonksiyonudurlar.  $e^a$  lar ise  $e_a$  tetrad vektörlerinin

$$e^a(e_b) = \delta^a_b \quad (3.34)$$

düalite bağıntısıyla tanımlanmış düal 1-formları olup  $\{dx^i\}$  tabanında  $e_i^a$  bileşenlerine sahiptirler.  $\{e^a\}$  ya da tetrad 1-form tabanı denir. (3.32) - (3.34) bağıntıları kullanılarak  $e_a^i$  ve  $e_i^a$  bileşenlerinin birbirlerinin ters matrisi oldukları, yani,

$$e_a^i e_j^a = \delta^i_j \quad \text{ve} \quad e_a^i e_i^b = \delta^b_a \quad (3.35)$$

bağıntılarına uydukları kolayca gösterilebilir. Şimdi, tetrad bileşenleri ile tansörel bileşenler arasındaki geçişe değinelim.  $\{\partial_i, dx^i\}$  ve  $\{e_a, e^a\}$  tabanlarında mesela bir vektör  $X = X^i \partial_i = X_i dx^i = X^a e_a = X_a e^a$  olarak yazılacaktır. Burada  $X^i$  ile  $X_i$  ye vektörün koordinatsal ya da tansör bileşenleri;  $X^a$  ile  $X_a$  ya da tetrad bileşenleri denir. Bu bileşenler arasındaki geçişlerin

$$X^i = e_a^i X^a \quad \Leftrightarrow \quad X^a = e_i^a X^i \quad (3.36.a)$$

$$X^i_j = e_a^i e_b^j X^a_b \quad \Leftrightarrow \quad X^a_b = e_i^a e_b^j X^i_j \quad (3.36.b)$$

biçiminde olacağı kolaylıkla görülebilir. Özel olarak,  $g_{ij}$  metrik tansörü için koordinatsal ve tetrad bileşenler arasındaki geçiş

$$g_{ij} = e_i^a e_j^b g_{ab} \quad \Leftrightarrow \quad g_{ab} = e_a^i e_b^j g_{ij} \quad (3.37)$$

biçiminde olur.  $\{e_a, e^a\}$  tetrad tabanında uzay-zaman aralığı ise

$$ds^2 = g^{ab} e_a e_b = g_{ab} e^a e^b \quad (3.38)$$

biçiminde ifade edilir. Koordinatsal tabanda tansör bileşenlerin indis indirme-kaldırma işlemi  $g_{ij}, g^i_j, g^{ij}$  ler ile yapılırken, tetrad bileşenler için bu rolü  $g_{ab}, g^a_b, g^{ab}$  ler oynar.  $\{\partial_i, dx^i\}$  koordinatsal tabanında  $\partial_i$  lerin komütatörünün  $[\partial_i, \partial_j] = 0$  olmasına karşın,  $\{e_a, e^a\}$  tabanında

$$[e_a, e_b] = \gamma^c_{ab} e_c \quad (3.39)$$

dır. Burada,  $\gamma^c_{ab}$  lere komütasyon fonksiyonları denir ve genel olarak uzay ve zaman koordinatlarının fonksiyonudurlar. Tanımdan, bunların

$$\gamma^c_{ab} = -\gamma^c_{ba} \quad (\text{alt iki indise göre antisimetrik}) \quad (3.40.a)$$

$$e_{[a} \gamma^f_{bc]} + \gamma^d_{[ab} \gamma^f_{c]d} = 0 \quad (\text{Jacobi özdeşliği}) \quad (3.40.b)$$

bağıntılarına uydukları gösterilebilir. Şimdi, tetrad formalizminde kovaryant türev kavramına değinelim.

$$\nabla_{e_a} e_b (\equiv \nabla_a e_b) = \Gamma^c_{ab} e_c \quad (3.41)$$

ile  $e_b$  taban vektörünün  $e_a$  doğrultusundaki kovaryant türevi gösterilmek üzere skaler, vektör ve tansörlerin kovaryant türevlerinin tetrad formalizmindeki karşılığı (3.2) deki tansörel kovaryant türeve benzer şekilde

$$\begin{aligned} \nabla_a \phi &= e_a \phi \\ \nabla_a X_b &= e_a X_b - \Gamma^c_{ab} X_c \\ \nabla_a X^c_b &= e_a X^c_b + \Gamma^c_{ad} X^d_b - \Gamma^d_{ab} X^c_d \end{aligned} \quad (3.42)$$

biçiminde olur. Burada  $\Gamma$  lara artık Ricci dönme katsayıları denir. Şimdi, burulma tansörünün ve Riemann tansörünün sırasıyla

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (3.43)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (3.44)$$

biçimindeki tanımları göz önüne alınsın. (3.43) de  $X \equiv e_a$ ,  $Y \equiv e_b$  ve (3.44) de de  $X \equiv e_c$ ,  $Y \equiv e_d$ ,  $Z \equiv e_b$  alınır ve (3.39, 41 ve 42) bağıntılarıyla birlikte

$$T(e_a, e_b) \equiv T^c_{ab} e_c \quad (3.45)$$

$$R(e_c, e_d) e_b \equiv R^a_{bcd} e_a \quad (3.46)$$

tanım kabulleri kullanılırsa sonuçta

$$T^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba} - \gamma^c_{ab} \quad (3.47)$$

$$R^a_{bcd} = e_c \Gamma^a_{bd} - e_d \Gamma^a_{cb} + \Gamma^f_{db} \Gamma^a_{cf} - \Gamma^f_{cb} \Gamma^a_{df} - \gamma^f_{cd} \Gamma^a_{fb} \quad (3.48)$$

ifadeleri bulunur. (3.47) de burulma sıfır olduğunda

$$\Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba} = \gamma^c_{ab} \quad (3.49)$$

olduğu görülmektedir. Bu, koordinatsal tabanda  $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$  olmasına karşılık, tetrad tabanında uzay-zaman burulmasız ( $T^c_{ab} \equiv 0$ ) olsa bile  $\Gamma^c_{ab} \neq \Gamma^c_{ba}$  olduğunu söylemektedir.

Ricci tansörünün tetrad bileşenlerini bulmak için (3.48) de  $a = c$  büzülmesi yapılır ve  $\gamma$  yerine de (3.49) kullanılıp  $\Gamma^c_{ab}$  ler cinsinden ifadesi yazılırsa, gerekli kısaltma sonucunda, indislerin yeniden adlandırılmış şekliyle

$$R_{ab} = e_c \Gamma^c_{ab} - e_b \Gamma^c_{ca} + \Gamma^d_{ba} \Gamma^c_{cd} - \Gamma^d_{cb} \Gamma^c_{da} \quad (3.50)$$

bulunur. Ricci skaleri ise, (3.10.b) deki tansörel benzeri gibi

$$R = g^{ab} R_{ab} \quad (3.51)$$

olarak tanımlanır. Ricci skaleri bir eğrilik invariantıdır.  $R_{ab} R^{ab}$  şeklinde tanımlanan skaler de

bir eğrilik invaryantıdır.  $R, R_{ab}, R_{abcd}, \dots$  gibi tansörlerden hareketle birbirlerine indirgenemeyen bağımsız 13 adet eğrilik invaryantı bulunmaktadır. Bunlar arasından yalnızca

$$G = R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd} \quad (3.52)$$

biçiminde bir kombinasyon olarak tanımlanan ve Gauss-Bonnet terimi olarak adlandırılan eğrilik invaryantı Tez'imizde konu olacaktır. Burada

$$R^{ab} = g^{ae}g^{bf}R_{ef} \quad \text{ve} \quad R^{abcd} = g^{ae}g^{bf}g^{cg}g^{dh}R_{efgh} \quad (3.53)$$

dir. Bu alt-bölümü kapatmadan önce, kullanacağımız şu iki önemli bağıntıyı da verelim; (3.39) da (3.32-35) bağıntıları kullanılırsa komütasyon fonksiyonlarının tabanların koordinat bileşenleri cinsinden ifadesi için

$$\gamma^c_{ab} = -(e_a^i e_b^j - e_b^i e_a^j) \partial_i e_j^c \quad (3.54)$$

bulunur. Öte yandan, Ricci Teoremiyle birlikte (3.49) bağıntısı kullanılırsa  $\Gamma^c_{ab}$  Ricci Dönme Katsayılarının  $\gamma$  komütasyon fonksiyonları cinsinden ifadesi için

$$\Gamma_{abc} = g_{ad}\Gamma^d_{bc} \Leftrightarrow \Gamma^c_{ab} = g^{cd}\Gamma_{dab} \quad \text{ve} \quad \gamma_{abc} = g_{ad}\gamma^d_{bc} \Leftrightarrow \gamma^c_{ab} = g^{cd}\gamma_{dab} \quad (3.55)$$

tanımları altında

$$\Gamma^c_{abc} = \frac{1}{2}(e_b g_{ca} + e_c g_{ab} - e_a g_{bc}) + \frac{1}{2}(\gamma_{abc} + \gamma_{cab} - \gamma_{bca}) \quad (3.56)$$

elde edilir.

### 3.3.1. Ortonormal Tetrad Çatısı

Eğer  $\{e_a\}$  taban vektörleri,  $g_{ab} = \eta_{ab} = k\delta(-1, +1, +1, +1)$  olmak üzere

$$e_a \cdot e_b = \eta_{ab} \rightarrow e_0 \cdot e_0 = -1, \quad e_0 \cdot e_\beta = 0, \quad e_\alpha \cdot e_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.57)$$

biçiminde seçilirse,  $\{e_a, e^a\}$  ya dik (ortonormal) tetrad çatısı denir. Başka bir deyişle, dik tetrad çatısı, metriğin

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{ab} e^a e^b \\ &= -(e^0)^2 + (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 \end{aligned} \quad (3.58)$$

biçiminde Minkowskisel (Lorentzsel) formu aldığı bir çatıdır. Böyle bir seçime ek olarak, eğer bu çatının  $e_0$  taban vektörü  $e_0 \equiv \partial_t = u$ , yani,  $e_0 / u$  alınırsa bu taktirde çatı eşhareketli olur.

Bunun sonucunda 4-lü hız vektörü  $u$  nun tetrad bileşenleri

$$u^a = \delta^a_0 = (1, 0, 0, 0), \quad u_a = -\delta_a^0 = (-1, 0, 0, 0) \quad (3.59)$$

olur. Öte yandan, (3.13) ile tanımlanan  $h_{ab} = \eta_{ab} + u_a u_b$  dik izdüşüm tansörünün tetrad bileşenlerinin de

$$h_{00} = 0 = h^{00}, \quad h_{11} = h_{22} = h_{33} = 1 = h^{11} = h^{22} = h^{33}, \quad diğ. = 0 \quad (3.60)$$

olacağı hemen görülür. Bunun sonucunda, eşhareketli ortonormal çatıda akışkanın kinematik ve dinamik büyüklükleri arasında sıfır indisli bileşenler özdeş olarak sıfır olur ve geriye yalnızca  $\dot{u}_\alpha$ ,  $\omega_{\alpha\beta}$ ,  $\omega_\alpha$ ,  $\Omega_\alpha$ ,  $n_{\alpha\beta}$ ,  $a_\alpha$ ,  $q_\alpha$ ,  $\pi_{\alpha\beta}$  olmak üzere uzaysal bileşenleri kalır. Bunların, komütasyon fonksiyonları cinsinden ifadeleri şöyle olur [134]:

$$\dot{u}_\beta = \gamma^0_{0\beta} \quad (3.61.a)$$

$$\theta_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\gamma^\gamma_{0\alpha} + \gamma^\gamma_{0\beta})\theta = -\gamma^\gamma_{0\gamma} \quad (3.61.b)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\gamma^\gamma_{0\alpha} + \gamma^\gamma_{0\beta}) + \frac{1}{3}\gamma^\lambda_{0\lambda}\delta_{\alpha\beta} \quad (3.61.c)$$

$$\omega^\lambda = \frac{1}{4}\varepsilon^{\lambda\alpha\beta}\gamma^0_{\alpha\beta} \quad (3.61.d)$$

$$\Omega^\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon_\gamma^{\beta\lambda}\gamma^\gamma_{0\beta} - \omega^\lambda \quad (3.61.e)$$

$$a_\alpha = \frac{1}{2} \gamma^\gamma_{\alpha\gamma} \quad (3.61.f)$$

$$n^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\varepsilon^{\alpha\varepsilon\lambda} \gamma^\beta_{\varepsilon\lambda} + \varepsilon^{\alpha\beta\varepsilon} \gamma^\lambda_{\varepsilon\lambda}) \quad (3.61.g)$$

Yukarıda;  $\Omega_\alpha$ , ortonormal tetrad çatısının Fermi ötelenmesinde bir eylemsizlik sistemine göre dönmüşlüğü'nün ölçüsünü tasvir eden bir vektördür.  $a_\alpha$  vektörü ile  $n_{\alpha\beta}$  ( $n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha}$ ) matrisi ise, komütasyon değişkenleri denilen ve tamamen uzay indisli  $\gamma^\gamma_{\alpha\beta}$  komütasyon fonksiyonlarının

$$\gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\lambda} n^{\lambda\gamma} + a_\alpha \delta^\gamma_\beta - a_\beta \delta^\gamma_\alpha \quad (3.62)$$

biçiminde parametrizasyonunda yer alan değişkenlerdir.

Ortonormal eşhareketli tetrad çatısında, metriğin tetrad bileşenlerinin sabitler olmasından ötürü pek çok geometrik büyüklüğün ve dolayısıyla da alan denklemlerinin hesabı nisbeten kolay olmaktadır. Somut bir örnek vermek için (3.56) da  $g_{ab} = \eta_{ab}$  alındığında ilk terimin sıfırlanacağı, (3.55) tanımları da kullanıldığında  $\Gamma^c_{ab}$  bağlantı katsayılarının ifadesinin  $\gamma^c_{ab}$  lere doğrudan doğruya

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} (\gamma^c_{ab} + \eta^{ce} \eta_{bf} \gamma^f_{ea} - \eta^{ce} \eta_{af} \gamma^f_{be}) \quad (3.63)$$

ifadesiyle bağlı olacağı kolaylıkla görülür. Tez boyunca daima eşhareketli ortonormal çatılarla çalışacağız.  $e_0 \equiv \partial_t = u$  seçildiğinden  $e_0$  vektörüne göre türevler (çatı türevi) kozmik zamana göre türev anlamına gelecek ve bu da 'nokta' sembolüyle gösterilecektir.

### 3.3.2. RW-Metriği ve Geometrik Büyüklükler

Şimdi, Bulgular Bölümü'ndeki hesaplamalara temel olmak üzere yerel bir  $(t, r, \theta, \phi)$  koordinat sisteminde homojen ve uzayca eşyönlü bir evreni tasvir eden (2.11) de bahsedilen

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) [dr^2 + f_k^2(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (3.64)$$

Robertson-Walker (RW) metriği için eşhareketli bir tetrad çatısında muhtelif geometrik büyüklükler ile akışkanın kinematik büyüklüklerinin tetrad bileşenlerinin hesabını verelim. Bir  $\{e_a, e^a\}$  orthonormal tetrad çatısı oluşturmak için  $e_a$  tetrad taban vektörleri ve bunların (3.34 ve

35) düalite bağıntısı uyarınca,  $e^a$  düal tetrad taban 1-formları

$$\begin{aligned}
e_0 &= \frac{1}{c} \partial_t & \Leftrightarrow & e^0 = c dt \\
e_1 &= \frac{1}{a(t)} \partial_r & \Leftrightarrow & e^1 = a(t) dr \\
e_2 &= \frac{1}{a(t) f_k(r)} \partial_\theta & \Leftrightarrow & e^2 = a(t) f_k(r) d\theta \\
e_3 &= \frac{1}{a(t) f_k(r) \sin \theta} \partial_\phi & \Leftrightarrow & e^3 = a(t) f_k(r) \sin \theta d\phi
\end{aligned} \tag{3.65}$$

olarak seçildiğinde bu  $\{e_a, e^a\}$  orthonormal tetrad tabanında (3.64) metriği

$$ds^2 = -(e^0)^2 + (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 \tag{3.66}$$

Lorentzsel biçimde yazılmış olur. (3.48), (3.50), (3.51), (3.52), (3.54), (3.61) ve (3.63) bağıntıları kullanılarak tetrad bileşenler için;

- Komütasyon fonksiyonları:

$$\begin{aligned}
\gamma^1_{01} = -\gamma^1_{10} = -\frac{\dot{a}}{a}, & \quad \gamma^2_{02} = -\gamma^2_{20} = -\frac{\dot{a}}{a}, & \quad \gamma^2_{12} = -\gamma^2_{21} = -\frac{1}{a} \frac{f'_k(r)}{f_k(r)} \\
\gamma^3_{03} = -\gamma^3_{30} = -\frac{\dot{a}}{a}, & \quad \gamma^3_{13} = -\gamma^3_{31} = -\frac{1}{a} \frac{f'_k(r)}{f_k(r)}, & \quad \gamma^3_{23} = -\gamma^3_{32} = -\frac{1}{a} \frac{\cot \theta}{f_k(r)}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

- Komütasyon değişkenleri:

$$a_\alpha = \left( -\frac{1}{a} \frac{f'_k(r)}{f_k(r)}, -\frac{1}{2a} \frac{\cot \theta}{f_k(r)}, 0 \right), \quad n_{13} = n_{31} = -\frac{1}{2a} \frac{\cot \theta}{f_k(r)} \tag{3.68}$$

- Kinematik değişkenler:

$$\theta_{11} = \theta_{22} = \theta_{33} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \theta = 3 \frac{\dot{a}}{a} = 3H, \quad \dot{u}_\alpha = \omega_\alpha = \Omega_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.69}$$

- Ricci dönme katsayıları:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{11} &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^0_{22} &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^0_{33} &= \frac{\dot{a}}{a} \\
\Gamma^1_{10} &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^1_{22} &= -\frac{1}{a} \frac{f'_k(r)}{f_k(r)}, & \Gamma^1_{33} &= -\frac{1}{a} \frac{f'_k(r)}{f_k(r)} \\
\Gamma^2_{20} &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^2_{21} &= \frac{1}{a} \frac{f'_k(r)}{f_k(r)}, & \Gamma^2_{33} &= -\frac{1}{a} \frac{\cot \theta}{f_k(r)} \\
\Gamma^3_{30} &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^3_{31} &= \frac{1}{a} \frac{f'_k(r)}{f_k(r)}, & \Gamma^3_{32} &= \frac{1}{a} \frac{\cot \theta}{f_k(r)}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

- Riemann eğrilik tansörü (sıfırdan farklı olan diğer bileşenler aşağıdakilerden hareketle (3.9) ile verilen simetri özellikleri kullanılarak kolayca bulunabilir):

$$\begin{aligned}
R_{0101} &= -\frac{\ddot{a}}{a}, & R_{0202} &= -\frac{\ddot{a}}{a}, & R_{0303} &= -\frac{\ddot{a}}{a}, \\
R_{1212} &= \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}, & R_{1313} &= \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}, & R_{2323} &= \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2},
\end{aligned} \tag{3.71}$$

- Ricci eğrilik tansörü:  $R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{11} = R_{22} = R_{33} = \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}$  (3.72)

- Ricci eğrilik skaleri:  $R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)$  (3.73)

- Gauss-Bonnet terimi:  $G = 24\frac{\ddot{a}}{a}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)$  (3.74)

- Einstein tansörü:  $G_{00} = 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right), \quad G_{11} = G_{22} = G_{33} = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2}$  (3.75)

bulunur (sıfır olan bileşenler yazılmamıştır). Bunlara ek olarak, şimdiden, Bulgular Bölümü'nde alan denklemlerinin hesabında yararlanılacak bazı ifadeleri de aşağıda vermekteyiz ( $f_r(t)$  ve  $f_G(t)$  fonksiyonları yerine ortak bir  $\varphi(t)$  skaler fonksiyonu kullanılmıştır):

$$\nabla_a(\nabla_b\varphi) = e_a(e_b\varphi) - \Gamma^c_{ab}e_c\varphi \Rightarrow \begin{cases} \nabla_0\nabla_0\varphi = \ddot{\varphi} \\ \nabla_1\nabla_1\varphi = \nabla_2\nabla_2\varphi = \nabla_3\nabla_3\varphi = -\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} \end{cases} \tag{3.76}$$

$$\Box\varphi \equiv \nabla^a\nabla_a\varphi = \eta^{ab}\nabla_a\nabla_b\varphi = -\ddot{\varphi} - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} \tag{3.77}$$



$$R^{ab} = \eta^{am} \eta^{bn} R_{mn}, \quad R_a^b = \eta^{bm} R_{am} \Rightarrow \begin{cases} R^{00} = -R_0^0 = R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \\ R^{11} = R_1^1 = R_{11} = \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{k}{a^2} \\ R^{22} = R_2^2 = R_{22} = \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{k}{a^2} \\ R^{33} = R_3^3 = R_{33} = \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{k}{a^2} \end{cases} \quad (3.78)$$

$$R_a^{cd} = \eta^{cm} \eta^{dn} R_{amnb} \Rightarrow \begin{cases} R_0^{11} = R_{0110} = -R_{0101} = \frac{\ddot{a}}{a}, & R_1^{22} = R_{1221} = -R_{1212} = -\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \\ R_0^{22} = R_{0220} = -R_{0202} = \frac{\ddot{a}}{a}, & R_1^{33} = R_{1331} = -R_{1313} = -\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \\ R_0^{33} = R_{0330} = -R_{0303} = \frac{\ddot{a}}{a}, & R_2^{33} = R_{2332} = -R_{2332} = -\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \end{cases} \quad (3.79)$$

### 3.4. ENERJİ KOŞULLARI

Bir gravitasyon teorisi olarak GRT'nin güçlü olduğu kadar zayıf yanını da oluşturan bir özelliği, bir uzay-zaman modelinde  $T_{ab}$  enerji-momentum tansörü için gravitasyonel ya da gravitasyonel olmayan hangi tür bir madde-enerjinin kabul edilebilirliği hakkında herhangi bir seçicilik dayatmamasıdır. Her ne kadar salt bir gravitasyon teorisinin gravitasyonel olmayan fiziğe ilişkin varsayımlardan olabildiğince bağımsız olması istenen bir durum ise de,  $T_{ab}$  üzerinde hiçbir ölçüt olmadan varılan çözümlerin bazılarının fiziksel addedilemeyecek türden olması, GRT'nin bu eksikliğini Enerji Koşulları denilen ve  $T_{ab}$  üzerine getirilen bir takım ölçütlerle gidermek gerekliliğini ortaya çıkarmıştır [1, 2, 3, 4, 5]. Sıradan maddenin enerji-momentum tansörünün fizikselliği temelinde bileşenlerine getirilen bu kısıtlamaların kaynağında gravitasyonun çekici olması vasfını yansıtanın yanısıra enerji yoğunluğunun negatif olamayacağı ve de ışıktan daha hızlı yayılamayacağı düşüncesi yatmaktadır. Gravitasyonun çekici vasfını ifade etmenin hareket noktasını zamansal, ışıksal veya uzaysal eğriler ailesinin (kongrüansının) evrimini tasvir eden Raychaudhuri denklemi oluşturmaktadır. Zamansal kongrüans için (3.27) de yazılan Raychaudhuri denklemi,  $\dot{u}_a \sim 0$  ve  $\omega^2 \sim 0$  için

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 - 2\sigma^2 - R_{ab}u^a u^b \quad (3.80)$$

olur. Bunun ışksal benzeri ise  $\theta^2$  nin önündeki çarpan değişikliğiyle

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{2}\theta^2 - 2\sigma^2 - R_{ab}k^ak^b \quad (3.81)$$

dir. Burada  $u^a$  ve  $k^a$ , sırasıyla, eğriler kongrüansına teğet zamansal ( $u_a u^a = -1$ ) ve ışksal ( $k_a k^a = 0$ ) vektörlerdir. Bu her iki denklem de, tamamen geometrik kökenli olup hiçbir gravitasyon teorisine bağlı değildir. Enerji–momentum tansörünün işin içine girmesi ise  $R_{ab}$  yi  $T_{ab}$  ye bağlayan bir gravitasyon teorisi verildiğinde mümkün olur. Gravitasyonun çekici olması  $d\theta < 0$  ve dolayısıyla da  $\frac{d\theta}{dt} \equiv \dot{\theta} < 0$  demek olduğundan yukarıdaki denklemlerden

$$R_{ab}u^au^b \geq 0 \quad (3.82)$$

$$R_{ab}k^ak^b \geq 0 \quad (3.83)$$

koşullarının sağlanması gerektiği bulunur. (3.82) ye Kuvvetli Enerji Koşulu (SEC), (3.83) e ise Sıfır Enerji Koşulu (NEC) denir. Bu koşullar,  $R_{ab}$  yi  $T_{ab}$  ye bağlamak üzere GRT'nin (2.2.b) deki EAD'ne ( $\Lambda$ -sız) uygulanırsa koordinatlardan bağımsız şekilde  $T_{ab}$  yi kısıtlayan şu bağıntılara yol açar:

$$\text{SEC : } (T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T)u^au^b \geq 0 \quad (3.84)$$

$$\text{NEC : } T_{ab}k^ak^b \geq 0 \quad (3.85)$$

Öte yandan,  $u^a$  zamansal hızlı bir gözlemci tarafından ölçülen enerji yoğunluğunun negatif olamayacağı Zayıf Enerji Koşulu (WEC) olarak adlandırılır ve

$$\text{WEC : } T_{ab}u^au^b \geq 0 \quad (3.86)$$

bağıntısıyla ifade edilir. Baskın Enerji Koşulu (DEC) ise WEC sağlanmış olmak kaydıyla kütle–enerjinin ışıktan daha hızlı hareketinin gözlenemezliğini söyler. Bu, enerji–momentum tansörü diliyle,  $T_{ab}u^b$  nin uzaysal-olmayan bir vektör olması anlamına gelen

$$DEC: \quad |T_{ab}u^b| \leq 0 \quad (3.87)$$

ile ifade olunur. Enerji-momentum tansörü (3.23) ile verilen bir mükemmel akışkan için ise bu bağıntılar akışkanın dinamik değişkenleri üzerinde (2.20) de gösterilen kısıtlamalarına yol açar.

Enerji Koşulları GRT de muhtelif kapsamlarda kullanılmakta olup bir takım genel sonuçların çıkarılmasına dayanak oluşturmaktadırlar. Mesela, Hawking-Penrose Tekillik Teoremi, WEC ve SEC'e dayandırılmıştır. Keza, karacisim termodinamiğinin ikinci kanununun ispatı ise NEC'i gerektirmektedir [1, 2, 3, 4, 5].

GRT ye alternatif değişikliğe uğratılmış teorilerde Enerji Koşulları efektif enerji-momentum tansörü ve buna bağlı olarak efektif dinamik büyüklükler kavramı yardımıyla triviyal olmayacak şekilde, (2.20) nin benzerleri olarak [108, 111, 113, 114, 118]

$$NEC \Leftrightarrow \mu^{t.ef} + p^{t.ef} \geq 0 \quad (3.88.a)$$

$$WEC \Leftrightarrow \mu^{t.ef} \geq 0 \quad ve \quad \mu^{t.ef} + p^{t.ef} \geq 0 \quad (3.88.b)$$

$$SEC \Leftrightarrow \mu^{t.ef} + p^{t.ef} \geq 0 \quad ve \quad \mu^{t.ef} + 3p^{t.ef} \geq 0 \quad (3.88.c)$$

$$DEC \Leftrightarrow \mu^{t.ef} \geq |p^{t.ef}| \quad (3.88.d)$$

biçiminde genelleştirilmişlerdir ("t.ef" ile §(4.2) de tanımlanan toplam efektif büyüklükler kast edilmektedir). (3.88) bağıntıları herhangi bir kozmik zamanla ilgilidir. Ancak, gerek enflasyon evresinde, gerekse de günümüzde süregelen gözlenen ivmeli genişlemeyi elde edebilmek için, §(2.3.1) de söylenildiği gibi, SEC'in ihlal edilmesi gerekmektedir; dolayısıyla SEC, yakın geçmişteki bir kozmik zamandan şimdiye de kapsayan bir zaman dilimi için

$$SEC \Leftrightarrow \mu^{t.ef} + p^{t.ef} \geq 0 \quad ve \quad \mu^{t.ef} + 3p^{t.ef} < 0 \quad (3.89)$$

şeklinde değiştirilmiş olmalıdır. Bu koşullar, literatürde muhtelif "*f - gravite*" modellerinin güvenilirliğini ve model parametrelerinin uygunluk aralıklarını test etmek üzere kullanılmaktadır [108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118] ve biz de bu Tez'de aynı amacı gütmekteyiz.

## 4. BULGULAR

### 4.1. $f(R,G,T)$ -GRAVİTE'NİN ALAN DENKLEMLERİ

Bu Tez'de göz önüne alacağımız ve  $f(R,G,T)$ -gravite olarak anacağımız değişikliğe uğratılmış gravitasyon teorisi §(2.1) de değinildiği üzere

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_m \quad (4.1)$$

Einstein-Hilbert  $(\Lambda - l)$  aksiyonunda, integranttaki lineer terim  $R$ 'nin  $f(R,G,T)$  gibi keyfi bir fonksiyonla değiştirilmesi suretiyle oluşturulmuş

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} f(R,G,T) + S_m \quad (4.2)$$

biçimindeki aksiyona dayanan bir teoridir ( $\Lambda$  terimi  $f(R,G,T)$  fonksiyonunun içine atılmıştır). Burada;  $R$ : Ricci eğrilik skaleri,  $G = R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}$ : Gauss-Bonnet terimi ve  $T$  de standart maddenin  $T_{ab}$  enerji-momentum tansörünün izidir.  $f(R,G,T)$  fonksiyonunun üzerinde, kendisinin yanısıra, argümanlarına göre türevlerinin de sürekli olmaları dışında peşinen herhangi bir kısıtlama bulunmamaktadır. Literatürde çeşitli kapsamlarda ele alınmış  $f(R)$ ,  $f(R,G)$ ,  $f(R,T)$  gibi gravite teorilerinin genellemelerini oluşturan  $f(R,G,T)$ -gravitenin alan denklemleri, metriğe göre varyasyon olarak  $\delta S = 0$  varyasyon ilkesinden hareketle elde edilebilir. Ana hatlarını *EK-A* da gösterdiğimiz varyasyon hesabının sonucunda  $f(R,G,T)$ -gravitenin alan denklemlerini, evrenin bilinen madde-enerji içeriğinin  $T_{ab}^m = \mu^m u_a u_b + p^m h_{ab}$  enerji-momentum tansörü ile temsil edilen bir mükemmel akışkanla tasvir edildiği varsayımı altında Lagrange madde yoğunluğunun  $L_m = p^m$  veya  $L_m = -\mu^m$  seçimlerine göre (A.41.a) veya (A.41.b) ile, yani, sırasıyla,

$$\begin{aligned} & f_R R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} f + \frac{1}{2} g_{ab} G f_G - \nabla_a \nabla_b f_R + g_{ab} \square f_R - 4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G - 4G_{ab} \square f_G \\ & - 2R \nabla_a \nabla_b f_G + 4R_a^c \nabla_c \nabla_b f_G + 4R_b^c \nabla_c \nabla_a f_G - 4R_a^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G \\ & = \kappa^2 T_{ab}^m + f_T (T_{ab}^m - p^m g_{ab}) \end{aligned} \quad (4.3.a)$$

ve

$$\begin{aligned}
& f_R R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} f - \nabla_a \nabla_b f_R + g_{ab} \square f_R + \frac{1}{2} g_{ab} G f_G - 4 g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G - 4 G_{ab} \square f_G \\
& - 2 R \nabla_a \nabla_b f_G + 4 R_a^c \nabla_c \nabla_b f_G + 4 R_b^c \nabla_c \nabla_a f_G - 4 R_a^{cd} \nabla_b \nabla_c f_G \\
& = \kappa^2 T_{ab}^m + f_T (T_{ab}^m + \mu^m g_{ab})
\end{aligned} \tag{4.3.b}$$

biçiminde bulmaktayız (burada  $f$  ve  $f_X$  ( $X \equiv R, G, T$ ) kısaltmaları, sırasıyla,  $f(R, G, T)$  fonksiyonu ve  $f_X \equiv \frac{\partial f(R, G, T)}{\partial X}$  kısmi türevleri için kullanılmıştır). Hemen görüleceği üzere,  $f(R, G, T)$  için, özel olarak  $f(R, G, T) \equiv R$  alınırsa (4.3) denklemleri Standart Einstein Denklemlerine indirgenmektedirler.  $f(R, G, T)$  için diğer özel seçimler ise yukarıda bahsedilen  $f$  – gravite teorilerini verir (bkz. EK-A).

Karışıklığa yol açmamak ve anlaşılmayı kolaylaştırmak için, standart maddeye bağlanan  $\mu, p, T_{ab}, \dots$  büyüklüklerini vurgulamak üzere, bundan böyle, yukarıda da kullanıldığı gibi, " $m$ " harfini bazen üst ve bazen de alt indis olarak  $\mu^m, p^m, T_{ab}^m, \mu_m, p_m, \dots$  şeklinde kullanacağız. Benzer şekilde efektif madde anlamında " $m.ef$ ", toplam efektif anlamında " $t.ef$ " niteleme kısaltmaları kullanılacak ve diğerleri de yeri geldikçe açıklanacaktır.

## 4.2. EFEKTİF AKIŞKAN YAKLAŞIMI

$f(R, G, T)$  –gravitenin (4.3) ile verilen alan denklemleri,  $G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$  Einstein tansörünü ortaya çıkartacak ve birbirlerine matematiksel olarak eşdeğer şekilde iki türlü işlenebilir. Bunları: "*I. YORUM*" ve "*II. YORUM*" olarak anacağız. Buna göre, kısaltma amaçlı

$$\begin{aligned}
\Xi_{ab} \equiv & \frac{1}{2} g_{ab} (f - R f_R - G f_G) + \nabla_a \nabla_b f_R - g_{ab} \square f_R + 4 g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d f_G + 4 G_{ab} \square f_G \\
& + 2 R \nabla_a \nabla_b f_G - 4 R_a^c \nabla_c \nabla_b f_G - 4 R_b^c \nabla_c \nabla_a f_G + 4 R_a^{cd} \nabla_b \nabla_c f_G
\end{aligned} \tag{4.4}$$

ifadesini tanımlar ve  $L_m = p^m$  ve  $L_m = -\mu^m$  seçimlerini de göz önünde bulundurursak, gerekli düzenlemeler sonrasında denklemler:

$$(L_m = p^m, I.YORUM): \quad G_{ab} = \kappa^2 \left\{ \frac{T_{ab}^m}{f_R} + \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left[ f_T(T_{ab}^m - p^m g_{ab}) + \Xi_{ab} \right] \right\} \quad (4.5.\alpha)$$

$$(L_m = p^m, II.YORUM): \quad G_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^m + f_T(T_{ab}^m - p^m g_{ab}) + (1 - f_R)G_{ab} + \Xi_{ab} \quad (4.5.\beta)$$

$$(L_m = -\mu^m, I.YORUM): \quad G_{ab} = \kappa^2 \left\{ \frac{T_{ab}^m}{f_R} + \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left[ f_T(T_{ab}^m + \mu^m g_{ab}) + \Xi_{ab} \right] \right\} \quad (4.6.\alpha)$$

$$(L_m = -\mu^m, II.YORUM): \quad G_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^m + f_T(T_{ab}^m + \mu^m g_{ab}) + (1 - f_R)G_{ab} + \Xi_{ab} \quad (4.6.\beta)$$

şekillerini alırlar. Literatürde, *I.YORUM* 'a sıklıkla rastlanılmakla birlikte *II.YORUM* da kullanılmıyor değildir [79, 97, 98, 115, 137].  $f(R, G, T) = R + f_1(G, T)$  durumu için her iki yorumun da birbirine denk olduğunu kaydedelim. Şimdi, bunların herbiri için aşağıdaki şu “efektif” büyüklükleri tanımlayalım:

( $L_m = p^m, I.YORUM$ ):

$$T_{ab}^{m.ef} \equiv \frac{T_{ab}^m}{f_R}, \quad T_{ab}^{RGT} \equiv \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left[ f_T(T_{ab}^m - p^m g_{ab}) + \Xi_{ab} \right] \quad (4.7.\alpha)$$

( $L_m = p^m, II.YORUM$ ):

$$T_{ab}^{m.ef} \equiv T_{ab}^m, \quad T_{ab}^{RGT} \equiv \frac{1}{\kappa^2} \left[ f_T(T_{ab}^m - p^m g_{ab}) + (1 - f_R)G_{ab} + \Xi_{ab} \right] \quad (4.7.\beta)$$

( $L_m = -\mu^m, I.YORUM$ ):

$$T_{ab}^{m.ef} \equiv \frac{T_{ab}^m}{f_R}, \quad T_{ab}^{RGT} \equiv \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left[ f_T(T_{ab}^m + \mu^m g_{ab}) + \Xi_{ab} \right] \quad (4.8.\alpha)$$

( $L_m = -\mu^m, II.YORUM$ ):

$$T_{ab}^{m.ef} \equiv T_{ab}^m, \quad T_{ab}^{RGT} \equiv \frac{1}{\kappa^2} \left[ f_T(T_{ab}^m + \mu^m g_{ab}) + (1 - f_R)G_{ab} + \Xi_{ab} \right] \quad (4.8.\beta)$$

ve bunlara ek olarak da

$$T_{ab}^{t.ef} \equiv T_{ab}^{m.ef} + T_{ab}^{RGT} \quad (4.9)$$

tanımı yapılırsa (4.5) ve (4.6) denklemleri, Standart Einstein Alan Denklemlerine, yani,

$$G_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^{t.ef} \quad (4.10)$$

formuna indirgenmiş olur. Standart maddenin  $T_{ab}^m$  madde-enerji tansörüne bağlanan  $T_{ab}^{m.ef}$  ye “efektif madde enerji tansörü” denir.  $T_{ab}^{RGT}$  ise, eğrilik terimleri içermesi nedeniyle, bir “eğrilik akışkanı” denilebilecek tasarımsal bir madde-enerji dağılımına bağlanan efektif bir enerji-momentum tansörüdür. Bu ikisinin toplamı olan  $T_{ab}^{t.ef}$  ye “toplam efektif enerji-momentum tansörü” denir. Bir gravitasyon teorisinin alan denklemlerinin (4.10) biçimindeki yorumuna efektif akışkan yaklaşımı (ya da yorumu) adı verilir ve bu, matematiksel olarak, standart Rölativist Kozmoloji’deki tekniklerin, bazı durumlarda doğrudan doğruya, değiştirilmiş gravite teorilerine uyarlanmasına olanak sağlar. Bunun için yapılacak iş, GRT’nin alan denklemlerinde, bilinen maddenin  $\mu^m, p^m, q_a^m, \pi_{ab}^m$  dinamik büyüklükleri yerine  $\mu^m, p^m, q_a^m, \pi_{ab}^m \rightarrow \mu^{t.ef}, p^{t.ef}, q_a^{t.ef}, \pi_{ab}^{t.ef}$  uyarlamalarını yapmak yeterlidir. Buna göre, (2.13) ve (2.14) de verilen FLRW denklemlerinin herhangi bir gravitasyon teorisinin efektif yorumunda benzerleri ( $\Lambda = 0$  durumu için)

$$G_{00} = \kappa^2 \mu^{t.ef} \quad (4.11.a)$$

$$G_{11} = \kappa^2 p^{t.ef} \quad (4.11.b)$$

olur. Yukarıda tanımlanan efektif enerji-momentum tansörleri formel olarak

$$T_{ab}^{m.ef} = \mu^{m.ef} u_a u_b + p^{m.ef} h_{ab} + 2q_{(a}^{m.ef} u_{b)} + \pi_{ab}^{m.ef} \quad (4.12.a)$$

$$T_{ab}^{RGT} = \mu^{RGT} u_a u_b + p^{RGT} h_{ab} + 2q_{(a}^{RGT} u_{b)} + \pi_{ab}^{RGT} \quad (4.12.b)$$

$$T_{ab}^{t.ef} = \mu^{t.ef} u_a u_b + p^{t.ef} h_{ab} + 2q_{(a}^{t.ef} u_{b)} + \pi_{ab}^{t.ef} \quad (4.12.c)$$

yazılabileceğinden (4.7)–(4.9) bağıntılarıyla tanımlanan efektif enerji–momentum tansörlerinden hareketle bunların temsil ettiği efektif akışkanlara (3.22) bağıntıları aracılığıyla bağlanan efektif dinamik büyüklükler:

$$\mu^{RGT} = u^a u^b T_{ab}^{RGT} \quad , \quad \mu^{t.ef} = u^a u^b T_{ab}^{t.ef} \quad (4.13.a)$$

$$p^{RGT} = \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab}^{RGT} \quad , \quad p^{t.ef} = \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab}^{t.ef} \quad (4.13.b)$$

$$q_a^{RGT} = -h_a^b u^c T_{bc}^{RGT} \quad , \quad q_a^{t.ef} = -h_a^b u^c T_{bc}^{t.ef} \quad (4.13.c)$$

$$\pi_{ab}^{RGT} = [h_{(a}^c h_{b)}^d - \frac{1}{3} h_{ab} h^{cd}] T_{cd}^{RGT} \quad , \quad \pi_{ab}^{t.ef} = [h_{(a}^c h_{b)}^d - \frac{1}{3} h_{ab} h^{cd}] T_{cd}^{t.ef} \quad (4.13.d)$$

ile hesaplanır. Bu takdirde,  $f(R,G,T)$ –gravitenin alan denklemlerine eşdeğer (4.9) bağıntısı bu büyüklükler cinsinden yazılan

$$\mu^{t.ef} = \mu^{m.ef} + \mu^{RGT} \quad (4.14.a)$$

$$p^{t.ef} = p^{m.ef} + p^{RGT} \quad (4.14.b)$$

$$q_a^{t.ef} = q_a^{m.ef} + q_a^{RGT} \quad (4.14.c)$$

$$\pi_{ab}^{t.ef} = \pi_{ab}^{m.ef} + \pi_{ab}^{RGT} \quad (4.14.d)$$

denklem sistemiyle eşdeğer biçimde ifade edilmiş olur.

Şimdi, efektif dinamik değişkenlerin hesabını ele alalım. Bu iş için yapılması gereken, ilke olarak, (4.7)–(4.9) denklemlerine, (4.13) ü kullanarak §(3.2) de açıklanan 1+3 kovaryant ayrışım tekniğini uygulamak ve sonra da elde edilen ifadeleri seçilmiş bir koordinat sisteminde yazmaktır. Bunu örneklemek için, meselâ, nisbeten basit olan  $f(R,G,T) \equiv f(R)$  özel durumunu göz önüne alalım. Bu takdirde *I.YORUM* yaklaşımı altında “eğrilik akışkanı”na bağlanan efektif dinamik büyüklüklerin, 1+3 kovaryant ayrışım tekniği sonucunda

$$\mu^R = \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left[ -\frac{1}{2} (f - Rf_R) + f_{RR} (-\theta \dot{R} + D^b D_b R) + f_{RRR} D^b R D_b R \right]$$

$$p^R = \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left[ \frac{1}{2} (f - Rf_R) + f_{RR} \left( \frac{2}{3} \theta \dot{R} - \dot{u}_b D^b R + \ddot{R} - \frac{2}{3} D^b D_b R \right) + f_{RRR} \left( \dot{R}^2 - \frac{2}{3} D^b R D_b R \right) \right]$$



$$q_a^R = \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left[ f_{RR} (-D_a \dot{R}) + f_{RRR} (-\dot{R} D_a R) \right]$$

$$\pi_{ab}^R = \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left[ f_{RR} (-\sigma_{ab} \dot{R} + D_{<a} D_{>b} R) + f_{RRR} (D_{<a} R D_{>b} R) \right]$$

biçiminde olacağını göstermek mümkündür [136]. Bir ortonormal tetrad çatısı seçildiğinde ise, bunların tetrad formları

$$a, b, c, \dots \rightarrow \alpha, \beta, \gamma, \dots \quad , \quad \dot{R} \rightarrow e_0 R, \quad \ddot{R} \rightarrow e_0 e_0 R, \quad D_a \dot{R} \rightarrow e_a e_0 R$$

$$D_\alpha D_\beta R \rightarrow e_\alpha e_\beta R - (a^\lambda \delta_{\alpha\beta} - a_\beta \delta_\alpha^\lambda + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n^{\lambda\gamma} + \varepsilon^{\lambda\gamma}{}_{(\alpha} n_{\beta)\gamma}) e_\lambda R$$

dönüşümleri [136, 138] aracılığıyla yapılabilir. Bu şekilde, hiçbir kozmolojik modele bağlı kalmaksızın, efektif dinamik değişkenlerin genel ifadeleri,  $R, G, \dots$  nin çatı türevleri ve de kongrüansın  $\theta, \sigma_{ab}, \dots$  kinematik değişkenleri cinsinden elde edilmiş olur. Ancak, biz bu yolu takip etmeyeceğiz; zira, gerek  $f(R, G)$  [136] ve gerekse de genel durum olan  $f(R, G, T)$  için elde edilebilecek ifadeler oldukça uzun ve karmaşık çıkmaktadır. Onun yerine, biz, önce özel bir kozmolojik model (RW modeli) seçeceğiz ve sonra da  $f(R, G, T)$  gravite teorilerinin alan denklemlerini bu model için eşareketli bir ortonormal bir tetrad çatısı çerçevesinde hesaplayacağız.

### 4.3. RW MODELİNDE $f(R, G, T)$ -GRAVİTE'NİN ALAN DENKLEMLERİNİN HESABI

RW metriğinin eşareketli ortonormal bir tetrad çatısında ele alınması §(3.4.2) de incelenmiş idi. Çatının ortonormal, yani, metriğin  $g_{ab} = \eta_{ab} = k\ddot{\sigma}(-1, +1, +1, +1)$  şeklinde Lorentzsel alınması bir yandan, diğer yandan da eşareketli, yani,  $u^0 = -u_0 = 1$ ,  $u^1 = u^2 = u^3 = 0 = u_1 = u_2 = u_3$  seçimi, hesaplamaları büyük ölçüde kolaylaştırmaktadır. Nitekim, bu iki özellik ışığında (3.60) da belirtildiği gibi dik izdüşüm tansörünün tetrad bileşenleri  $h_{00} = 0 = h^{00}$ ,  $h_{11} = h_{22} = h_{33} = 1 = h^{11} = h^{22} = h^{33}$ ,  $diğ. = 0$  dan ibaret olmaktadır. Bu özellikleri kullanarak (4.13) den kolaylıkla

$$\mu^{RGT} = T_{00}^{RGT} \quad (4.15.a)$$

$$p^{RGT} = \frac{1}{3}(T_{11}^{RGT} + T_{22}^{RGT} + T_{33}^{RGT}) \quad (4.15.b)$$

$$q_1^{RGT} = -T_{10}^{RGT}, \quad q_2^{RGT} = -T_{20}^{RGT}, \quad q_3^{RGT} = -T_{30}^{RGT} \quad (4.15.c)$$

$$\pi_{11}^{RGT} = \frac{1}{3}(2T_{11}^{RGT} - T_{22}^{RGT} - T_{33}^{RGT}) \quad (4.15.d)$$

$$\pi_{22}^{RGT} = \frac{1}{3}(-T_{11}^{RGT} + 2T_{22}^{RGT} - T_{33}^{RGT}) \quad (4.15.e)$$

$$\pi_{33}^{RGT} = \frac{1}{3}(-T_{11}^{RGT} - T_{22}^{RGT} + 2T_{33}^{RGT}) \quad (4.15.f)$$

$$\pi_{12}^{RGT} = \pi_{21}^{RGT} = T_{12}^{RGT}, \quad \pi_{23}^{RGT} = \pi_{32}^{RGT} = T_{23}^{RGT}, \quad \pi_{31}^{RGT} = \pi_{13}^{RGT} = T_{31}^{RGT} \quad (4.15.g)$$

bağıntıları tespit edilebilir.  $T_{ab}^{m.ef}$  nin dinamik büyüklükleri için de  $RGT \rightarrow m.ef$  ikamesiyle benzer bağıntılar olacağından yazmaya gerek duymuyoruz. Şimdi; §(3.4.2) de RW modeli için dökümlenen ilgili geometrik büyüklükler, (4.4) ve (4.7)–(4.8) denklemlerinde kullanılıp da  $T_{ab}^{m.ef}$  ile  $T_{ab}^{RGT}$  nin bileşenleri hesaplanır ve bunlardan hareketle de (4.15) den bulunacak efektif dinamik büyüklükler (4.14) e yerleştirilip düzenlenirse sonuçta, (4.5) ve (4.6) daki her bir durum için aşağıda dökümlenen denklemlere varılır (diğer toplam efektif dinamik değişkenler mükemmel akışkan hali için özdeş olarak sıfırdır, yani,  $q_\alpha^{t.ef} = 0$ ,  $\pi_{\alpha\beta}^{t.ef} = 0$  dir). Aşağıdaki ifadeler  $c \neq 1$  durumuna düzeltilmiştir; dolayısıyla nokta ile gösterilen türevler artık  $ct$  ye göre değil fakat  $t$  kozmolojik zamanına göredir. Bütünlük amacıyla, (3.73) ve (3.74) deki Ricci skaleri ve Gauss-Bonnet terimini tekrar, fakat  $c \neq 1$  için yazıyoruz.

- $(L_m = p^m, I.YORUM)$  için:

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{3}{c^2} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) = \kappa^2 \mu^{t,ef} \\
&= \frac{\kappa^2}{f_R} \left\{ \mu^m + \frac{1}{\kappa^2} [(\mu^m + p^m) f_T - \frac{1}{2} (f - Rf_R - Gf_G) - \frac{3}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{f}_R - \frac{12}{c^4} \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) \dot{f}_G] \right\}
\end{aligned} \tag{4.16.\alpha}$$

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{1}{c^2} \left( -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{kc^2}{a^2} \right) = \kappa^2 p^{t,ef} \\
&= \frac{\kappa^2}{f_R} \left\{ p^m + \frac{1}{\kappa^2} \left[ \frac{1}{2} (f - Rf_R - Gf_G) + \frac{2}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{f}_R + \frac{1}{c^2} \ddot{f}_R + \frac{8}{c^4} \frac{\dot{a}}{a} \ddot{f}_G + \frac{4}{c^4} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) \ddot{f}_G \right] \right\}
\end{aligned}$$

- $(L_m = p^m, II.YORUM)$  için:

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{3}{c^2} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) = \kappa^2 \mu^{t,ef} \\
&= \frac{\kappa^2}{f_R} \left\{ \mu^m + \frac{1}{\kappa^2} [(\mu^m + p^m) f_T + \frac{3}{c^2} (1 - f_R) \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) - \frac{1}{2} (f - Rf_R - Gf_G) - \frac{3}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{f}_R \right. \\
&\quad \left. - \frac{12}{c^4} \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) \dot{f}_G] \right\}
\end{aligned} \tag{4.16.\beta}$$

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{1}{c^2} \left( -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{kc^2}{a^2} \right) = \kappa^2 p^{t,ef} \\
&= \frac{\kappa^2}{f_R} \left\{ p^m + \frac{1}{\kappa^2} \left[ \frac{1}{c^2} (1 - f_R) \left( -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{kc^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2} (f - Rf_R - Gf_G) + \frac{2}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{f}_R + \frac{1}{c^2} \ddot{f}_R \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{8}{c^4} \frac{\dot{a}}{a} \ddot{f}_G + \frac{4}{c^4} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) \ddot{f}_G \right] \right\}
\end{aligned}$$

- $(L_m = -\mu^m, I.YORUM)$  için:

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{3}{c^2} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) = \kappa^2 \mu^{t.ef} \\
&= \frac{\kappa^2}{f_R} \left\{ \mu^m + \frac{1}{\kappa^2} \left[ -\frac{1}{2} (f - Rf_R - Gf_G) - \frac{3}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{f}_R - \frac{12}{c^4} \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) \dot{f}_G \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.17.\alpha}$$

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{1}{c^2} \left( -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{kc^2}{a^2} \right) = \kappa^2 p^{t.ef} \\
&= \frac{\kappa^2}{f_R} \left\{ p^m + \frac{1}{\kappa^2} [(\mu^m + p^m) f_T + \frac{1}{2} (f - Rf_R - Gf_G) + \frac{2}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{f}_R + \frac{1}{c^2} \ddot{f}_R + \frac{8}{c^4} \frac{\dot{a}}{a} \frac{\ddot{a}}{a} \dot{f}_G \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{c^4} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) \ddot{f}_G \right\}
\end{aligned}$$

•  $(L_m = -\mu^m, II.YORUM)$  için:

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{3}{c^2} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) = \kappa^2 \mu^{t.ef} \\
&= \frac{\kappa^2}{f_R} \left\{ \mu^m + \frac{1}{\kappa^2} \left[ \frac{3}{c^2} (1 - f_R) \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) - \frac{1}{2} (f - Rf_R - Gf_G) - \frac{3}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{f}_R \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{12}{c^4} \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) \dot{f}_G \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.17.\beta}$$

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{1}{c^2} \left( -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{kc^2}{a^2} \right) = \kappa^2 p^{t.ef} \\
&= \frac{\kappa^2}{f_R} \left\{ p^m + \frac{1}{\kappa^2} [(\mu^m + p^m) f_T + \frac{1}{c^2} (1 - f_R) \left( -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{kc^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2} (f - Rf_R - Gf_G) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{f}_R + \frac{1}{c^2} \ddot{f}_R + \frac{8}{c^4} \frac{\dot{a}}{a} \frac{\ddot{a}}{a} \dot{f}_G + \frac{4}{c^4} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) \ddot{f}_G \right\}
\end{aligned}$$

$$R = \frac{6}{c^2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) \quad \text{ve} \quad G = \frac{24}{c^4} \frac{\ddot{a}}{a} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) \tag{4.18}$$

#### 4.4. ENERJİ-MOMENTUM TANSÖRLERİNİN SÜREKLİLİK DENKLEMLERİ

Bu alt-bölümde amacımız, (4.7)–(4.9) ile tanımlanan  $T_{ab}^m$ ,  $T_{ab}^{m.ef}$ ,  $T_{ab}^{t.ef}$  enerji-momentum tansörlerinin korunum özelliklerini belirlemek olacaktır. Bunun için önce, aşağıdaki hesaplarda

ihtiyaç duyulacak olan §(3.1) deki bağıntılardan gerekli gördüklerimizi kullanagelmekte olduğumuz indis notasyonu ile yeniden yazalım:

$$\nabla_a \nabla_b \phi = \nabla_b \nabla_a \phi \quad (\text{keyfi bir } \phi \text{ skaler fonksiyon için}) \quad (4.19.a)$$

$$\nabla_a \nabla_b X_c - \nabla_b \nabla_a X_c = R_{abcd} X^d \quad (\text{keyfi bir } X \text{ vektörü için}) \quad (4.19.b)$$

$$\nabla^a R_{abcd} = \nabla_c R_{bd} - \nabla_d R_{bc} \quad (4.19.c)$$

$$\nabla^a R_{ab} = \frac{1}{2} \nabla_b R \quad (4.19.d)$$

$$(\square \nabla_b - \nabla_b \square) \phi = R_{ab} \nabla^a \phi \quad (\text{keyfi bir } \phi \text{ skaler fonksiyon için}) \quad (4.19.e)$$

ve bunlara ek olarak da

$$R^{fabc} \nabla_a \nabla_b \nabla_c \phi = -\frac{1}{2} R^{fabc} R^e{}_{cab} \nabla_e \phi \quad (4.19.f)$$

özdeşliği ile,  $G = R^2 - 4R_{ab} R^{ab} + R_{abcd} R^{abcd}$  Gauss-Bonnet terimi olmak üzere

$$-\frac{1}{2} g_{ab} G = -2RR_{ab} + 4R_{ac} R^c{}_b - 2R_a{}^{cde} R_{bcde} - 4R_{acdb} R^{cd} \quad (4.19.g)$$

özdeşliğini verelim. Şimdi, (4.7) ve (4.8) deki dört durum için enerji–momentum tansörlerinin korunum meselesini ele alalım.

#### 4.4.1. ( $L_m = p^m$ , I. YORUM)

II. Bianchi özdeşliklerinin sonucu olarak bulunan (4.19.d) özdeşliğinden dolayı  $G_{ab}$  Einstein tansörünün diverjansının sıfır olacağı kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla (4.10) dan

$$\nabla^a G_{ab} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^a T_{ab}{}^{t,ef} \equiv 0 \quad (4.20)$$

ölür. Bu, toplam efektif enerji–momentum tansörünün daima korunduğu anlamına gelir. Dolayısıyla (4.9) dan ve sonrasında da (4.7.α) dan

$$\begin{aligned}
\nabla^a T_{ab}^{RGT} &= -\nabla^a T_{ab}^{m.ef} \\
&= -\nabla^a \left( \frac{T_{ab}^m}{f_R} \right) = \frac{\nabla^a f_R}{f_R^2} T_{ab}^m - \frac{1}{f_R} \nabla^a T_{ab}^m
\end{aligned} \tag{4.21}$$

olur. Öte yandan, (4.7.α) bağıntısında  $T_{ab}^{RGT}$  nin diverjansı alınırsa,  $\Delta_{ab}$  yi  $T_{ab}^{RGT} \equiv \frac{1}{\kappa^2 f_R} \Delta_{ab}$

şeklinde tanımlayarak

$$\begin{aligned}
\nabla^a T_{ab}^{RGT} &= -\frac{1}{\kappa^2} \frac{\nabla^a f_R}{f_R^2} \Delta_{ab} + \frac{1}{\kappa^2 f_R} \nabla^a \Delta_{ab} \\
&= \frac{1}{\kappa^2} \frac{-\nabla^a f_R}{f_R^2} \left[ \kappa^2 f_R T_{ab}^{RGT} \right] + \frac{1}{\kappa^2 f_R} \nabla^a \Delta_{ab} \\
&= -\frac{1}{\kappa^2} \frac{\nabla^a f_R}{f_R} \left[ G_{ab} - \kappa^2 T_{ab}^{m.ef} \right] + \frac{1}{\kappa^2 f_R} \nabla^a \Delta_{ab} \\
&= -\frac{\nabla^a f_R}{f_R} \left[ \frac{1}{\kappa^2} G_{ab} - \frac{T_{ab}^m}{f_R} \right] + \frac{1}{\kappa^2 f_R} \nabla^a \Delta_{ab}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

bulunur. Bunu (4.21) e eşitleyip sadeleştirirsek

$$-\kappa^2 \nabla^a T_{ab}^m = -G_{ab} \nabla^a f_R + \nabla^a \Delta_{ab} \tag{4.23}$$

elde edilir. Sağ taraf açıkça yazılırsa

$$\begin{aligned}
-\kappa^2 \nabla^a T_{ab}^m &= \\
&= -(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R) \nabla^a f_R + \frac{1}{2} \nabla_b f - \frac{1}{2} (\nabla_b R) f_R - \frac{1}{2} g_{ab} R \nabla^a f_R - \frac{1}{2} (\nabla_b G) f_G \\
&= -\frac{1}{2} g_{ab} G \nabla^a f_G + \square \nabla_b f_R - \nabla_b \square f_R + 4(\nabla^a R_{ab}) \square f_G + 4R_{ab} \nabla^a \square f_G - 2(\nabla_b R) \square f_G \\
&= -2R \nabla_b \square f_G + 2(\nabla^a R) \nabla_a \nabla_b f_G + 2R \square \nabla_b f_G + 4(\nabla_b R^{cd}) \nabla_c \nabla_d f_G + 4R^{cd} \nabla_b \nabla_c \nabla_d f_G \\
&= -4(\nabla^a R_a^c) \nabla_c \nabla_b f_G - 4R_a^c \nabla^a \nabla_c \nabla_b f_G - 4(\nabla^a R_b^c) \nabla_c \nabla_a f_G - 4R_b^c \nabla^a \nabla_c \nabla_a f_G \\
&+ 4(\nabla^a R_a^{cd}) \nabla_c \nabla_d f_G + 4R_a^{cd} \nabla^a \nabla_c \nabla_d f_G + \nabla^a \left[ f_T (T_{ab}^m - P^m g_{ab}) \right]
\end{aligned} \tag{4.24}$$

bulunur. Aşağıdaki:

$$\square \nabla_b f_R - \nabla_b \square f_R = R_{ab} \nabla^a f_R \quad (4.19.e \text{ kullanıldı})$$

$$4(\nabla^a R_{ab}) \square f_G - 2(\nabla_b R) \square f_G = 4\left(\frac{1}{2} \nabla^a R_{ab}\right) \square f_G - 2(\nabla_b R) \square f_G \equiv 0 \quad (4.19.d \text{ kullanıldı})$$

$$\begin{aligned} 4R_{ab} \nabla^a \square f_G - 4R_b^c \nabla^a \nabla_c \nabla_a f_G &= 4R_{ab} \nabla^a \square f_G - 4R_b^c \nabla^a \nabla_a \nabla_c f_G \\ &= 4R_b^a (-R_{ac} \nabla^c f_G) \\ &= -4R_b^a R_{ac} \nabla^c f_G \end{aligned} \quad (4.19.a \text{ ve } e \text{ kullanıldı})$$

$$\begin{aligned} -2R \nabla_b \square f_G + 2R \square \nabla_b f_G &= 2R(-\nabla_b \square f_G + \square \nabla_b f_G) \\ &= 2R R_{ab} \nabla^a f_G \end{aligned} \quad (4.19.e \text{ kullanıldı})$$

$$2(\nabla^a R) \nabla_a \nabla_b f_G - 4(\nabla^a R_a^c) \nabla_c \nabla_b f_G = 2(\nabla^a R) \nabla_a \nabla_b f_G - 4\left(\frac{1}{2} \nabla^c R\right) \nabla_c \nabla_b f_G \equiv 0 \quad (4.19.d \text{ kullanıldı})$$

$$\begin{aligned} 4(\nabla_b R^{cd}) \nabla_c \nabla_d f_G - 4(\nabla^a R_b^c) \nabla_c \nabla_a f_G + 4(\nabla^a R_a^{cd}) \nabla_c \nabla_d f_G \\ = 4(\nabla_b R^{cd}) \nabla_c \nabla_d f_G - 4(\nabla^a R_b^c) \nabla_c \nabla_a f_G + 4(\nabla^d R_b^c - \nabla_b R^{cd}) \nabla_c \nabla_d f_G \equiv 0 \end{aligned} \quad (4.19.c \text{ kullanıldı})$$

$$\begin{aligned} 4R^{cd} \nabla_b \nabla_c \nabla_d f_G - 4R_a^c \nabla^a \nabla_c \nabla_b f_G &= 4R^{cd} \nabla_b \nabla_d \nabla_c f_G - 4R^{dc} \nabla_d \nabla_b \nabla_c f_G \\ &= 4R^{cd} (\nabla_b \nabla_d - \nabla_d \nabla_b) \nabla_c f_G \\ &= 4R^{cd} R_{bdca} \nabla^a f_G \end{aligned} \quad (4.19.a \text{ ve } b \text{ kullanıldı})$$

$$\begin{aligned} 4R_a^{cd} \nabla^a \nabla_c \nabla_d f_G &= 4R_{acdb} \nabla^a \nabla^c \nabla^d f_G \\ &= -4R_{bdac} \nabla^a \nabla^c \nabla^d f_G \\ &= -4\left(-\frac{1}{2} R_{bdac} R_e^{dac} \nabla^e f_G\right) = 2R_{bdac} R_e^{dac} \nabla^e f_G \end{aligned} \quad (4.19.f \text{ kullanıldı})$$

sadeleştirmeleriyle birlikte  $-\frac{1}{2} g_{ab} G$  için de (4.19.g) özdeşliği kullanılırsa, (4.24) denklemi

$$-\kappa^2 \nabla^a T_{ab}^m = \frac{1}{2} \nabla_b f - \frac{1}{2} (\nabla_b R) f_R - \frac{1}{2} (\nabla_b G) f_G + \nabla^a [f_T (T_{ab}^m - p^m g_{ab})] \quad (4.25)$$

ifadesine indirgenir. Bu ifadeye sağ tarafta, birinci terim için

$$\nabla_b f = f_R \nabla_b R + f_G \nabla_b G + f_T \nabla_b T \quad (4.26)$$

yazılır ve son terim için de kovaryant türevi alınıp düzenlenirse, sonuçta

$$(\kappa^2 + f_T) \nabla^a T_{ab}^m = -\frac{1}{2} f_T \nabla_b T + f_T \nabla_b p^m - (\nabla^a f_T) (T_{ab}^m - p^m g_{ab}) \quad (4.27)$$

elde edilir. Bu ifade, ilk tesbit olarak, sıradan maddenin  $T_{ab}^m$  enerji–momentum tansörünün,  $f(R,G,T)$  fonksiyonunun  $T$  ye bağlı olmaması durumunda korunacağını söylemektedir. Başka bir deyişle

$$\nabla^a T_{ab}^m = \begin{cases} = 0 & f(R), f(G) \text{ veya } f(R,G) \text{ için} \\ \neq 0 & \text{genel bir } f(R,G,T) \text{ için} \end{cases} \quad (4.28)$$

dir. Mükemmel akışkan için, yani,

$$T_{ab}^m = \mu^m u_a u_b + p^m (g_{ab} + u_a u_b) \quad \rightarrow \quad \dot{I}z T_{ab}^m \equiv T = -\mu^m + 3p^m \quad (4.29)$$

olmak üzere, (4.27) denkleminin,  $u_a \nabla^a \dot{f}_T = \dot{f}_T$  olduğuna da dikkat ederek

$$(\kappa^2 + f_T) \nabla^a T_{ab}^m = \frac{1}{2} f_T \nabla_b (\mu^m - p^m) - (\mu^m + p^m) \dot{f}_T u_b \quad (4.30)$$

biçimini alabileceğini görmek kolaydır. Şimdi, (4.30) un  $u$  ya paralel ve dik izdüşümlerini oluşturalım. Bunun için,  $U^b_c = -u^b u_c$  ve  $h^b_c = \delta^b_c + u^b u_c$  ile çarpıp ve 1+3 kovaryant ayrışım yönteminin özelliklerini kullanırsak, sonuçta, sırasıyla,

$$(\kappa^2 + f_T) [\dot{\mu}^m + 3H(\mu^m + p^m)] = -\frac{1}{2} f_T (\dot{\mu}^m - \dot{p}^m) - \dot{f}_T (\mu^m + p^m) \quad (4.31)$$

ve

$$(\kappa^2 + f_T) [D_c p^m + (\mu^m + p^m) \dot{u}_c] = \frac{1}{2} f_T D_c (\mu^m - p^m) \quad (4.32)$$

denklemlerini elde ederiz. Bunlardan ilki standart madde “korunumu”, ikincisi ise, açıkça anlaşılmasa da, momentum “korunumu” denklemdir ( $\dot{q}_a$  terimi, mükemmel akışkan varsayımı nedeniyle denkleminde yer bulmamıştır). Bu son denklemin, homojen ( $D_c p^m \equiv 0$ ) ve ivmesiz ( $\dot{u}_c \equiv 0$ ) akışkan için özdeş olarak sağlandığı görülmektedir. Aynı korunum



denklemlerine benzer yol izlenerek ( $L_m = p^m$ , *II.YORUM*) için de varılabileceğini kaydedelim.

#### 4.4.2. ( $L_m = -\mu^m$ , *I.YORUM*)

Bu durum için, yukarıdaki gibi genel ispat izlemek yerine doğrudan doğruya, özel seçilmiş RW modeline özgü (4.17.α) denklemlerinden yola çıkalım ve ayrıntılara girmeden hesabın yalnızca anahatlarını vermekle yetinelim.  $\mu^{t.ef}$  ifadesinin türevi ile  $\mu^{t.ef} + p^{t.ef}$  toplamı oluşturulup bunlar, (4.20) dolayısıyla toplam efektif madde yoğunluğu için daima geçerli olan

$$\dot{\mu}^{t.ef} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\mu^{t.ef} + p^{t.ef}) = 0 \quad (4.33)$$

denklemine yerleştirilir ve ortaya çıkacak  $\dot{f}$  türevi için de,  $\dot{f} = f_R\dot{R} + f_G\dot{G} + f_T\dot{T}$  açılımıyla birlikte (4.18) deki  $R$  ile  $G$  ve de bunların türevleri kullanılırsa ve ayrıca da (3.75) ile (4.11) denklemleri göz önünde bulundurulursa, sonuçta, sıradan madde yoğunluğu için

$$\kappa^2 \dot{\mu}^m + 3H(\kappa^2 + f_T)(\mu^m + p^m) = \frac{1}{2} f_T (-\dot{\mu}^m + 3\dot{p}^m) \quad (4.34)$$

elde edilir. Bu denklem, ( $L_m = p^m$ , *I.YORUM*) durumu için (4.31) de yazılı denklemin ( $L_m = -\mu^m$ , *I.YORUM*) durumundaki karşılığını oluşturmaktadır ve ondan farklıdır. Öte yandan, ( $L_m = -\mu^m$ , *II.YORUM*) durumunun da (4.34) ün aynısını verdiğini kaydedelim.

## 4.5. ( $L_m = p^m$ , *I. ve II.YORUM*) İÇİN STANDART MADDENİN SÜREKLİLİK DENKLEMİNİN İNTEGRASYONU

### 4.5.1 Lineer Barotropik Hal Denklemi Varsayımı:

Gerek (4.31) ve gerekse de (4.34) denklemini, öncelikle, ilerideki hesaplarımızda gerekecek  $\dot{T}$  ve  $\ddot{T}$  türev ifadelerini tesis etmek için kullanacağız. Bunun için, önce, §(2.2.1) de bahsedildiği

gibi, standart madde için kozmolojide pek sıklıkla kullanıldığı üzere, (4.29) daki  $T_{ab}^m = \mu^m u_a u_b + p^m h_{ab}$  enerji–momentum tansörüyle temsil edilen mükemmel akışkanın,

$$p^m = w\mu^m, w = \text{sabit} \quad (4.35)$$

biçiminde lineer barotropik bir hâl denkleminde uyduğu varsayılacaktır. Ancak, hâl parametresinin değer aralığını (2.10) da  $-1 \leq w \leq +1$  olarak belirtilen aralık olarak değil de, FLRW kozmolojisinde ivmeli bir genişlemeye karşılık düşmeyen  $-1/3 \leq w \leq 1$  aralığı olarak alacağız. Başka bir deyişle, ivmeli genişleme için gereken  $w < -1/3$  koşulu (bkz. 2.24),  $f(R, G, T)$ –gravite teorisi ithaliyle doldurulmuş olacaktır. Yukarıda, hal parametresinin  $w = -1/3$  değeri, SEC’i sağlayan madde alanlarının sınır değerini oluşturduğundan dışarılanmamıştır.

#### 4.5.2. $\dot{T}$ ve $\ddot{T}$ Türevlerinin Genel İfadeleri:

(4.35) varsayımı altında (4.31) denklemi,  $\theta$  yerine de  $\theta = 3\frac{\dot{a}}{a} = 3H$  yazılarak

$$(\kappa^2 + f_T) \left[ \dot{\mu}^m + 3H(1+w)\mu^m \right] = -\frac{1}{2}(1-w)\dot{\mu}^m f_T - (1+w)\mu^m \dot{f}_T \quad (4.36)$$

biçiminde ifade olunur. (4.35) varsayımı sayesinde (4.29) daki  $T$  iziyle bunun  $\dot{T}$  türevini,  $T$  nin bir değişken olmasını sağlayan

$$w \neq 1/3, \quad \mu^m \neq 0 \quad \text{ve} \quad \dot{\mu}^m \neq \text{sabit} \quad (4.37)$$

koşulları altında

$$\left. \begin{array}{l} T = (-1+3w)\mu^m \\ \dot{T} = (-1+3w)\dot{\mu}^m \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\dot{\mu}^m}{\mu^m} = \frac{\dot{T}}{T} \quad (4.38)$$

bağıntıları aracılığıyla  $\mu^m$  ve  $\dot{\mu}^m$  ye bağlamak olanağı doğar. Bu taktirde, (4.36) nın çözümlerini bilmeksizin de  $\dot{T}$  ve  $\ddot{T}$  ifadelerini tesis etmek mümkün olur. Gerçekten de  $f \equiv f(R, G, T) \Rightarrow f_T \equiv f_T(R, G, T)$  için

$$\dot{f}_T = f_{TR}\dot{R} + f_{TG}\dot{G} + f_{TT}\dot{T} \quad (4.39)$$

yazılabileceğini göz önünde bulundurarak, bu ve (4.38), (4.36) ya yerleştirilip de  $\dot{T}$  çekilirse

$$2\kappa^2 + (3-w)f_T + 2(1+w)Tf_{TT} \neq 0 \quad (4.40)$$

olmak kaydıyla

$$\dot{T} = \frac{-2(1+w)[3H(\kappa^2 + f_T) + f_{TR}\dot{R} + f_{TG}\dot{G}]}{2\kappa^2 + (3-w)f_T + 2(1+w)Tf_{TT}} \quad (4.41)$$

elde edilir. Bunun da türevinden, gerekli düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned} \ddot{T} = & \frac{-2(1+w)}{[2\kappa^2 + (3-w)f_T + 2(1+w)Tf_{TT}]^2} \\ & \times \left\{ \left[ (3H(\kappa^2 + f_T) + 3H\dot{f}_T + \dot{f}_{TR}\dot{R} + \dot{f}_{TR}\ddot{R} + \dot{f}_{TG}\dot{G} + \dot{f}_{TG}\ddot{G})T \right. \right. \\ & \left. \left. + (3H(\kappa^2 + f_T) + f_{TR}\dot{R} + f_{TG}\dot{G})\dot{T} \right] [2\kappa^2 + (3-w)f_T + 2(1+w)Tf_{TT}] \right. \\ & \left. - [(3-w)\dot{f}_T + 2(1+w)(f_{TT}\dot{T} + \dot{f}_{TT}T)] [3H(\kappa^2 + f_T) + f_{TR}\dot{R} + f_{TG}\dot{G}]T \right\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

elde edilir. Bu ifâdede  $\dot{f}_{TR}$ ,  $\dot{f}_{TG}$  ve  $\dot{f}_{TT}$  türevlerinin açık ifâdeleri, (4.39) dan hareketle

$$\dot{f}_{TR} = f_{TRR}\dot{R} + f_{TRG}\dot{G} + f_{TRT}\dot{T} \quad (4.43.a)$$

$$\dot{f}_{TG} = f_{TGR}\dot{R} + f_{TGG}\dot{G} + f_{TGT}\dot{T} \quad (4.43.b)$$

$$\dot{f}_{TT} = f_{TTR}\dot{R} + f_{TTG}\dot{G} + f_{TTT}\dot{T} \quad (4.43.c)$$

dir. Bu arada, ileride gerekecek diğer zamansal türev ifâdelerini de şimdiden bunlara eklemek iyi olacaktır:

$$\dot{f}_R = f_{RR}\dot{R} + f_{RG}\dot{G} + f_{RT}\dot{T} \quad (4.43.d)$$

$$\dot{f}_G = f_{GR}\dot{R} + f_{GG}\dot{G} + f_{GT}\dot{T} \quad (4.43.e)$$

$$\begin{aligned} \ddot{f}_R = & f_{RR}\ddot{R} + f_{RG}\ddot{G} + f_{RT}\ddot{T} + 2f_{RRG}\dot{R}\dot{G} + 2f_{RRT}\dot{R}\dot{T} + 2f_{RGT}\dot{G}\dot{T} \\ & + f_{RRR}\dot{R}^2 + f_{RGG}\dot{G}^2 + f_{RTT}\dot{T}^2 \end{aligned} \quad (4.43.f)$$

$$\begin{aligned} \ddot{f}_G = & f_{GR}\ddot{R} + f_{GG}\ddot{G} + f_{GT}\ddot{T} + 2f_{GRG}\dot{R}\dot{G} + 2f_{GRT}\dot{R}\dot{T} + 2f_{GGT}\dot{G}\dot{T} \\ & + f_{GRR}\dot{R}^2 + f_{GGG}\dot{G}^2 + f_{GTT}\dot{T}^2 \end{aligned} \quad (4.43.g)$$

Yukarıda  $\dot{T}$  ve  $\ddot{T}$  türev ifâdeleri (4.36) dan hareketle, fakat bu denklemin çözümleri bilinmeksizin tesis edilmişlerdi. Şimdi, bu denklemin integrasyonunu ele alalım. İrdelememizi biri korunum olması, diğeri de olmaması olmak üzere iki durum için ele alıyoruz.

#### 4.5.3. Standart Maddenin Korunduğu Durum:

Eğer (4.36) denkleminde, sıradan maddenin korunduğu varsayılırsa, yâni, sol tarafta

$$\dot{\mu}^m + 3H(1+w)\mu^m = 0 \quad (4.44)$$

alınırsa, bu takdirde (4.36) nın sağ yanı

$$-\frac{1}{2}(1-w)\dot{\mu}^m f_T - (1+w)\mu^m \dot{f}_T = 0 \quad (4.45)$$

olmak zorundadır. (4.44) ün integrasyonundan,  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  olduğuna dikkat ederek

$$\mu^m(t) = \mu_0^m (a/a_0)^{-3(1+w)} \propto a^{-3(1+w)} \quad (4.46)$$

çözümü elde edilir (“0” indisi, ilgili büyüklüklerin bir  $t = t_0$  zamanındaki değerlerini göstermektedir). (4.45) denklemini ise, (4.38) yardımıyla

$$\frac{1}{2}(1-w)\frac{\dot{T}}{T} + (1+w)\frac{\dot{f}_T}{f_T} = 0 \quad (4.47)$$

biçiminde yazılır da integre edilirse

$$|T|^{\frac{1}{2}(1-w)} |f_T|^{1+w} = \text{sâbit} \quad \Leftrightarrow \quad f_T = \text{sâbit} \times |T|^{-\frac{1-w}{2(1+w)}} \quad (4.48)$$

verir. Bunun bir kere daha integrasyonundan,

$$w = -1/3 \quad \text{için :} \quad f(R, G, T) = C \ln|T| + \phi(R, G) \quad (4.49.a)$$

$$w \neq \pm 1/3 \quad \text{için :} \quad f(R, G, T) = C|T|^\gamma + \phi(R, G) \quad (4.49.b)$$

çözümü elde edilir. Burada,

$$\gamma \equiv \frac{1+3w}{2(1+w)} \quad (4.50)$$

ve  $C$  de, pozitif ya da negatif olabilen bir integrasyon sâbitidir.  $\phi$  ise  $R$  ve  $G$  nin keyfî bir fonksiyonunu göstermekte olup  $T$  ye göre integrasyonda bir toplamsal integral sabiti rolünü oynamaktadır. Yukarıdaki sonuçların ışığında şu saptamaları sıralamaktayız:

1. Standart maddenin korunduğu varsayımı altında,  $f(R, G, T)$  için mümkün yegâne fonksiyonel formlar  $w$  hâl parametresinin  $w = -1/3$  için (4.49.a) daki logaritmik fonksiyon ve  $(-1/3 < w < 1/3) \cup (1/3 < w \leq 1)$  değer aralıkları için (4.49.b) deki kuvvet kanunu ifadesidir. Başka bir deyişle,  $f(R, G, T)$  nin  $T$  ye bağlılığı, yalnız ve yalnız,  $\psi(T)$ , (4.49.a ve b) deki fonksiyonlar olmak üzere  $f(R, G, T) = \psi(T) + \phi(R, G)$  gibi toplamsal bir katkı biçiminde ortaya çıkmaktadır. Bu bağlamda literatürdeki bazı yayınlarda yapılmış olduğu üzere  $f(R, T)$  ya da  $f(G, T)$  gravite teorilerinde maddenin korunumunu varsayıp da  $\phi(R)\psi(T)$  ya da  $\phi(G)\psi(T)$  şeklinde fonksiyonel formlar almanın temelsiz olduğunu söylemek gerekmektedir.
2. (4.49) daki  $\gamma$  üssü keyfî olmayıp (4.50) uyarınca  $w$  değerlerine bağlıdır. Buna göre,  $(-1/3 < w < 1/3) \cup (1/3 < w \leq 1)$  için  $\gamma$  nin tanım aralığı  $(0 < \gamma < 3/4) \cup (3/4 < \gamma \leq 1)$  dir; dolayısıyla,  $\gamma$  daima pozitifdir. Tersine, söz konusu aralıkta peşinen verilmiş bir  $\gamma$  parametresi

$$w = -\frac{2\gamma - 1}{2\gamma - 3} \quad (4.51)$$

bağıntısı uyarınca  $w$  parametresini, ya da başka bir deyişle,  $p^m = w\mu^m$  hal denklemini uyarınca, sıradan maddenin tabiatını (fiziğini) belirlemektedir. Şekil 4.1 (a) ve (b) de, sırasıyla, (4.50) ve (4.51) fonksiyonları gösterilmektedir.

3. (4.49.b) deki çözüm için (4.40) koşulunun, (4.50) nin de kullanımıyla,  $\kappa^2 + C\gamma|T|^{\gamma-1} \neq 0$  koşuluna indirgeneceği kolaylıkla bulunabilir. Eğer özel olarak  $\gamma = 1$  alınırsa (ki bu durumda (4.51),  $w = 1$  değerini verir), söz konusu koşul  $C \neq -\kappa^2$  sonucuna yol açar. Buradan,  $w = 1$  değeri için  $f(R, G, T) = -\kappa^2|T| + \phi(R, G)$  şeklinde bir fonksiyonel formun mümkün olamayacağı sonucu çıkar. Aynı sonuç (4.49.a) çözümü için de geçerlidir. Bununla beraber,  $C = \lambda\kappa^2$  ile tanımlı yeni bir  $\lambda$  ( $\lambda > 0$  veya  $\lambda < 0$ ) sabiti için, söz konusu koşul altında  $\lambda \neq -1$  olmak kaydıyla,  $f(R, G, T) = \lambda\kappa^2|T| + \phi(R, G)$  gibi bir fonksiyonel formun kabul edilebilir; ancak bunun, yalnız ve yalnız  $w = 1$  için mümkün olabileceğini belirtelim.
4. (4.44) varsayıldığında, (4.38) den dolayı

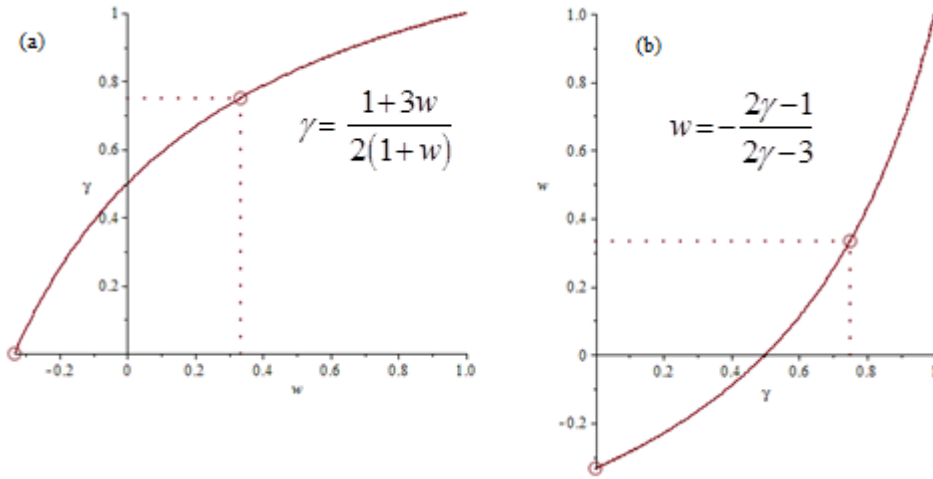
$$\dot{T} = -3H(1+w)T \quad (4.52)$$

ve bunun da türevinden

$$\ddot{T} = 3H^2(1+w)[1+q+3(1+w)]T \quad (4.53)$$

bulunur.

Sıradan maddenin korunduğu özel durumda geçerli olan bu ifadelerin (4.49.a ve b) çözümü kullanılarak, (4.41) ve (4.42) deki genel ifadelerden de elde edilebilecekleri kolaylıkla görülebilir.



**Şekil 4.1:**  $L_m = p^m$ , I. ve II. YORUM için, sıradan maddenin korunduğu durumda; (a):  $\gamma - w$  değişimi ve (b):  $w - \gamma$  değişimi. (a) da  $(w, \gamma) = (-1/3, 0)$  ve  $(1/3, 3/4)$  koordinatlı noktalar ve (b) de de  $(\gamma, w) = (0, -1/3)$  ve  $(3/4, 1/3)$  koordinatlı noktalar, dışarılanmış oldukları belirtilmek üzere, boş yuvarlakçıklarla gösterilmiştir.  $-1/3 < w < 1/3$  (ya da  $0 < \gamma < 3/4$ ) için  $T < 0$ ;  $w = 1/3$  (ya da  $\gamma = 3/4$ ) için  $T = 0$  ve  $1/3 < w \leq +1$  (ya da  $3/4 < \gamma \leq +1$ ) için  $T > 0$  dir.

#### 4.5.4. Sıradan Maddenin Korunmadığı Durum:

Şimdi, (4.36) denkleminde geri dönelim ve şimdilik  $w \neq 1$  varsayalım. Bu taktirde, denklemin sağ yanı,  $f_T \neq 0$  ve (4.37) den ötürü sıfır olamaz. Sol yanında ise, artık (4.44) korunum denkleminin geçerli olması istenmediğinden,  $\kappa^2 + f_T \neq 0$  olmak zorundadır. Dolayısıyla, eşitliğin her iki tarafı  $\kappa^2 + f_T \neq 0$  ifadesine bölünüp de  $w \neq 1/3$  için geçerli olan (4.38) kullanılırsa

$$\frac{\dot{T}}{T} + 3H(1+w) = -\frac{1}{2}(1-w)\frac{\dot{T}}{T}\frac{f_T}{\kappa^2 + f_T} - (1+w)\frac{\dot{f}_T}{\kappa^2 + f_T} \quad (4.54)$$

elde edilir. Şimdi

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\dot{T}}{T}\frac{f_T}{\kappa^2 + f_T} \quad (4.55)$$

aracılığıyla bir  $\xi$  fonksiyonu tanımlanır, (4.54) denklemi kolaylıkla integre-edilebilir olarak

$$\frac{\dot{T}}{T} + 3H(1+w) = -\frac{1}{2}(1-w)\frac{d\xi}{dt} - (1+w)\frac{\dot{f}_T}{\kappa^2 + f_T} \quad (4.56)$$

biçimini kazanır. Düzenlenmiş şekliyle bunun genel çözümü

$$|T| |\kappa^2 + f_T|^{1+w} e^{\frac{1}{2}(1-w)\xi} = Sâbit \times a^{-3(1+w)} \quad (4.57)$$

dir.  $\xi$  fonksiyonu ise (4.55) de  $\dot{T} = dT/dt$  tanımını kullanıldığında

$$d\xi = \frac{f_T dT}{T(\kappa^2 + f_T)} \Rightarrow \xi = \int \frac{f_T dT}{T(\kappa^2 + f_T)} + Sâbit \quad (4.58)$$

olarak hesaplanabilir. (4.58) ile birlikte (4.57), (4.36) denkleminin en genel çözümünü oluşturmaktadır.  $f_T$  nin  $T$  cinsinden açık şekli bilindiğinde bu denklemin sol tarafı, (4.38) den dolayı, yalnızca  $\mu^m$  nin fonksiyonu olur ve buradan da, kapalı fonksiyon şeklinde de olsa  $\psi(\mu^m, a) = 0$  çözümü elde edilir. Bu alt paragrafi kapamadan önce, (4.58) deki integrasyonu da örneklendirecek şekilde, şuna da işaret edelim. Yukarıda kabul edilemez olduğu belirtilen  $f_T = -\kappa^2$  çözümüne alternatif olarak, (4.36) denkleminin  $w \neq 1$  ve  $f_T = \lambda \kappa^2$  ( $\lambda \neq -1$  ve  $0$ ) şeklinde bir çözümü haiz olup olmadığına bakalım. Bu durum için (4.36) denkleminin,

$$2 + \lambda(3-w) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \neq \frac{-2}{3-w} \quad \text{veya} \quad w \neq \frac{2+3\lambda}{\lambda} \quad (4.59)$$

olmak kaydıyla

$$\frac{\dot{\mu}^m}{\mu^m} = \frac{\dot{T}}{T} = \frac{-6H(1+\lambda)(1+w)}{2 + \lambda(3-w)} \quad (4.60)$$

şeklinde yazılabileceği ve bunun da çözümünün

$$\mu^m \propto a^{\frac{-6(1+\lambda)(1+w)}{2+\lambda(3-w)}} \quad (4.61)$$



olacağı kolaylıkla görülebilir. Evren genişlediğinde ( $a(t)$  arttığında) sıradan madde yoğunluğunun azalması gerektiğinden üs konumundaki ifade

$$\frac{-6(1+\lambda)(1+w)}{2+\lambda(3-w)} < 0 \quad (4.62)$$

koşulunu taşımalıdır. Söz konusu  $f_T = \lambda\kappa^2$  ( $\lambda \neq -1$  ve  $0$ )  $\Rightarrow f(R, G, T) = \lambda\kappa^2 T + \phi(R, G)$  modeli için şunu da söyleyelim: (4.61) çözümüne, (4.57) ve (4.58) den, doğrudan integrasyon ile de varmak mümkündür. Ayrıca, (4.60) daki  $\dot{T}$  ile bunun  $\ddot{T}$  türev ifadelerinin, (4.41) ve (4.42) nin bu çözüm için verdikleriyle aynı oldukları da kolaylıkla doğrulanabilir.

#### 4.6. ( $L_m = -\mu^m$ , I. VE II. YORUM) İÇİN STANDART MADDENİN SÜREKLİLİK DENKLEMİNİN İNTEGRASYONU:

Şimdi,  $w=1$  değerini de dışarılamadan, (4.34) denkleminin incelenmesini ele alalım. (4.35) varsayımı altında bu,

$$[\kappa^2 + \frac{1}{2}(1-3w)f_T]\dot{\mu}^m + 3H(1+w)(\kappa^2 + f_T)\mu^m = 0 \quad (4.63)$$

şeklinde yazılabilir. Bunun, sıradan maddenin korunumunu ifade eden (4.44) deki denkleme indirgenebilmesi için,  $f_T \neq 0$  varsayımından ötürü ortak bir çarpan rolünü oynayacak keyfi bir  $\zeta(T) \neq 0$  fonksiyonu göz önüne alınarak yazılabilecek

$$\begin{cases} \kappa^2 + \frac{1}{2}(1-3w)f_T = \zeta(T) \\ \kappa^2 + f_T = \zeta(T) \end{cases} \quad (4.64)$$

denklemlerinin birlikte sağlanması gerekliliği kolayca görülür. Bu sistemin sağlanabilmesi, ancak ve ancak,  $w = -1/3$  değeri için olur. Bu taktirde, (4.64) denklemi,  $f$  fonksiyonel formu ile ve  $f_T$  türevini,  $Y(T) \equiv \zeta(T) - \kappa^2 \neq -\kappa^2$  ve  $\psi(T) \equiv \int Y(T)dT \neq -\kappa^2 T$  olarak tanımlı keyfi fonksiyonlar cinsinden:  $f_T = Y(T) \neq -\kappa^2 \Leftrightarrow f(R, G, T) = \psi(T) + \phi(R, G) \neq -\kappa^2 T + \phi(R, G)$

şeklinde belirler. ( $L_m = -\mu^m$ , *I.YORUM*) ve aynı zamanda ( $L_m = -\mu^m$ , *II.YORUM*) durumu için de, sıradan maddenin korunumunun olduğu yegâne durum,  $w = -1/3$  değeriyle birlikte söz konusu fonksiyonel formlardır. Denklem (4.63) den, sıradan madde-enerji yoğunluğunun  $a(t)$  ölçek çarpanı ile  $\mu^m \propto a^{-2}$  uyarınca değiştiği ve  $T$  nin türevlerinin de,  $\dot{T} = -2HT$  ve  $\ddot{T} = 2H^2(3+q)T$  oldukları kolayca bulunabilir.

Şimdi, korunumun bulunmadığı, yani,  $w \neq -1/3$  durumunu ele alalım.  $\mu^m \neq \text{sabit}$  kabulünden dolayı  $f_T \neq -\kappa^2$  olacağından (4.63) denkleminin her iki tarafı,  $\kappa^2 + f_T \neq 0$  ifadesine bölünürse

$$\frac{\kappa^2 + \frac{1}{2}(1-3w)f_T}{\kappa^2 + f_T} \frac{\dot{\mu}^m}{\mu^m} + 3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (4.65)$$

olur. Bu ise, integrasyonu kolaylaştırmak üzere

$$\left[ 1 - \frac{1}{2}(1+3w)\frac{f_T}{\kappa^2 + f_T} \right] \frac{\dot{T}}{T} + 3(1+3w)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (4.66)$$

şeklinde de yazılabilir. Bunu integre etmek için yine (4.55) deki gibi yardımcı bir  $\xi$  fonksiyonu tanımlanır ve gerekli işlemler yapılırsa sonuçta, ( $L_m = -\mu^m$ , *I.YORUM*) durumunda, ( $L_m = p^m$ , *I.YORUM*) durumuna ilişkin (4.57) çözümünün karşılığı olan

$$|T| e^{-\frac{1}{2}(1+3w)\xi} = \text{Sabit} \times a^{-3(1+w)} \quad (4.67)$$

çözümü elde edilir. Bu da,  $f_T$  nin  $T$  cinsinden açık şekli bilindiğinde, (4.38) ve (4.58) in kullanımıyla, kapalı fonksiyon şeklinde de olsa  $\psi(\mu^m, a) = 0$  çözümünü verir.

Şimdi, özel olarak, ( $L_m = p^m$ , *I.YORUM*) durumuyla paralellik sağlamak amacıyla (4.63) denkleminin  $f_T = \lambda\kappa^2$  ( $\lambda \neq -1$  ve  $0$ )  $\Rightarrow f(R, G, T) = \lambda\kappa^2 T + \phi(R, G)$  şeklinde bir çözümünün olup olmadığına bakalım. Bunu, (4.63) denkleminde hareketle doğrudan doğruya yapabileceğimiz gibi, (4.67) den hareketle de yapabiliriz. Eğer bu sonucusu seçilirse, (4.58)

den bulunabilecek  $\xi = \ln|T|^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$  ifadesi (4.67) ye yerleştirilip düzenlenirse ve de (4.34) ün düzenlenmiş şekli (4.38) denklemi dikkate alınırsa, sonuçta,

$$2 + \lambda(1 - 3w) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \neq \frac{-2}{1 - 3w} \quad \text{veya} \quad w \neq \frac{2 + \lambda}{\lambda} \quad (4.68)$$

olmak kaydıyla

$$\mu^m \propto a^{\frac{-6(\lambda+1)(1+w)}{2+\lambda(1-3w)}} \quad (4.69)$$

bulunur. Evren genişlediğinde ( $a(t)$  arttığında) sıradan madde yoğunluğunun azalması gerektiğinden üs konumundaki ifade

$$\frac{-6(1+\lambda)(1+w)}{2+\lambda(1-3w)} < 0 \quad (4.70)$$

koşuluna uymalıdır. §(4.5.2) de ( $L_m = p^m$ , *I.YORUM*) durumu için yapılanlar ile paralellik sağlamak üzere, ( $L_m = -\mu^m$ , *I.YORUM*) durumu için de, (4.34) denkleminin çözümü açıkça bilinmeksizin de tesis edilebilecek  $\dot{T}$  ve  $\ddot{T}$  türev ifadelerini, ayrıntılarını göstermeden aşağıda verelim. (4.63) den hareketle bunlar:

$$\kappa^2 + \frac{1}{2}(1-3w)f_T \neq 0 \quad (4.71)$$

olmak kaydıyla

$$\dot{T} = \frac{-3H(\kappa^2 + f_T)(1+w)}{\kappa^2 + \frac{1}{2}(1-3w)f_T} T \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} \ddot{T} = & \frac{-3H(\kappa^2 + f_T)(1+w)}{[\kappa^2 + \frac{1}{2}(1-3w)f_T]^2} \{-H(1+q)[\kappa^2 + \frac{1}{2}(1-3w)f_T] - 3H(\kappa^2 + f_T)(1+w)\} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + f_T} (1+3w)\dot{f}_T T \end{aligned} \quad (4.73)$$

olarak bulunurlar. Bu alt-paragrafı kapamadan önce şuna dikkati çekmek yerinde olacaktır. (4.68) koşulu,  $w=1$  için  $\lambda \neq 1$  sonucunu vermektedir. Bu ise,  $(L_m = -\mu^m, I.YORUM)$  durumu için  $f_T = \kappa^2 \Rightarrow f(R, G, T) = \kappa^2 T + \phi(R, G)$  fonksiyonel formunun dışarılanmış olduğu anlamını taşımaktadır.

#### 4.7 KARANLIK ENERJİ HAL PARAMETRESİ

Standart maddenin basınç ve madde-enerji yoğunluklarından hareketle (4.35) ile tanımlanan  $w_m \equiv w = p_m / \mu_m$  hal parametresi dışında iki hal parametresinden daha söz etmek mümkündür. Birincisi, (4.11 - 4.14) denklemlerinde tanımlanan toplam efektif akışkanın  $p^{t.ef}$  ve  $\mu^{t.ef}$  efektif büyüklüklerinden hareketle

$$w_{t.ef} \equiv w_{ef} = \frac{p^{t.ef}}{\mu^{t.ef}} \quad (4.74)$$

şeklinde oluşturulan efektif hal parametresidir. Bunun, ivmeli genişleme için  $w_{ef} < -1/3$  olmasının istenmesi ise  $SEC < 0$  olması ile eşdeğerdir. İkincisi ise, “karanlık enerji akışkanı” denilebilecek varsayımsal bir akışkana

$$\begin{aligned} \mu^{t.ef} &= \mu^m + \mu^{KE} & \Leftrightarrow & \mu^{KE} = \mu^{t.ef} - \mu^m \\ p^{t.ef} &= p^m + p^{KE} & \Leftrightarrow & p^{KE} = p^{t.ef} - p^m \end{aligned} \quad (4.75)$$

bağıntıları aracılığıyla bağlanabilecek efektif bir madde ve basınç yoğunluğundan hareketle

$$w_{KE} = \frac{p^{KE}}{\mu^{KE}} = \frac{p^{t.ef} - p^m}{\mu^{t.ef} - \mu^m} \quad (4.76)$$

şeklinde tanımlanabilecek hal parametresidir. Buna Karanlık Enerji hal parametresi denir. (4.16) ve (4.17) denklemlerinden anlaşılacağı üzere,  $\mu^{t.ef}$  ve  $p^{t.ef}$  ifadeleri, efektif akışkan yorumlarına bağlı olarak farklı olmalarına karşın (4.75) ile tanımlanan  $\mu^{KE}$  ve  $p^{KE}$  büyüklükleri her iki yorum için de

$$\dot{\mu}^{KE} + 3H(\mu^{KE} + p^{KE}) = 0 \quad (4.77)$$

tek bir korunum denkleminde uyarlar. Bunu,  $f(R, G, T) \equiv f(R)$  ve  $k=0$  özel hali için, ve de  $c \equiv 1$  olarak kısaca gösterelim. Bu takdirde *I.YORUM* 'a dayalı (4.16) denklemleri

$$3H^2 = \kappa^2 \mu^{t.ef} = \frac{\kappa^2}{f_R} \left\{ \mu^m + \frac{1}{\kappa^2} \left[ -\frac{1}{2}(f - Rf_R) - 3H\dot{f}_R \right] \right\} \quad (4.78)$$

$$-2\dot{H} - 3H^2 = \kappa^2 p^{t.ef} = \frac{\kappa^2}{f_R} \left\{ p^m + \frac{1}{\kappa^2} \left[ \frac{1}{2}(f - Rf_R) + 2H\dot{f}_R + \ddot{f}_R \right] \right\} \quad (4.79)$$

şeklinde sadeleşir ve (4.75) tanımlarından da

$$\mu^{KE} = \frac{1}{f_R} \left\{ \mu^m + \frac{1}{\kappa^2} \left[ -\frac{1}{2}(f - Rf_R) - 3H\dot{f}_R \right] \right\} - \mu^m \quad (4.80)$$

$$p^{KE} = \frac{1}{f_R} \left\{ p^m + \frac{1}{\kappa^2} \left[ \frac{1}{2}(f - Rf_R) + 2H\dot{f}_R + \ddot{f}_R \right] \right\} - p^m \quad (4.81)$$

elde edilir. Bunlardan hareketle,  $\dot{\mu}^{KE}$  türevi ile  $3H(\mu^{KE} + p^{KE})$  ifadesi için, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \dot{\mu}^{KE} &= -\frac{\dot{f}_R}{f_R} \frac{3H^2}{\kappa^2} + \frac{1}{f_R} \left\{ \dot{\mu}^m + \frac{1}{\kappa^2} \left[ -\frac{1}{2}(\dot{f} - \dot{R}f_R - R\dot{f}_R) - 3H\dot{f}_R - 3H\ddot{f}_R \right] \right\} - \dot{\mu}^m \\ &= \frac{1}{f_R} \left\{ \dot{\mu}^m + \frac{1}{\kappa^2} \left[ -3H^2 \dot{f}_R - \frac{1}{2}(\dot{f} - \dot{R}f_R - R\dot{f}_R) - 3H\dot{f}_R - 3H\ddot{f}_R \right] \right\} - \dot{\mu}^m \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$3H(\mu^{KE} + p^{KE}) = \frac{1}{f_R} \left\{ 3H(\mu^m + p^m) + \frac{1}{\kappa^2} \left[ -3H\ddot{f}_R - 3H^2 \dot{f}_R \right] \right\} - 3H(\mu^m + p^m) \quad (4.83)$$

bulunur. Bunlar taraf tarafa toplanır ve  $\dot{f}_R = f_{RR} \dot{R}$  ile (4.18) den yazılacak  $R = 6(\dot{H} + 2H^2)$  ifadeleri kullanılırsa ve ayrıca da standart maddenin  $\dot{\mu}^m + 3H(\mu^m + p^m) = 0$  korunum kanunu

göz önüne alınırsa (4.77) deki korunum kanununa varılır. Benzer hesaplar *II. YORUM* 'a dayalı (4.16) denklemlerinden hareketle, bu sefer  $\mu^{KE}$  ve  $p^{KE}$  nin tanımları için

$$\mu^{KE} = \frac{1}{\kappa^2} \left[ 3(1-f_R)H^2 - \frac{1}{2}(f-Rf_R) - 3H\dot{f}_R \right] \quad (4.84)$$

$$p^{KE} = \frac{1}{\kappa^2} \left[ (1-f_R)(-2\dot{H} - 3H^2) + \frac{1}{2}(f-Rf_R) + 2H\dot{f}_R + \ddot{f}_R \right] \quad (4.85)$$

alınarak yapılırsa yine aynı korunum denklemin elde edileceği kolaylıkla görülür. İncelemelerimizde, §(2.3.1) de sözü edilen  $w_{KE}$  nin de güncel değeri hesaplanacak ve [31, 32] numaralı referanslarda verilen  $w_{KE,0} \approx -1 \pm 0.2$ , yani  $-1.2 \leq w_{KE,0} \leq -0.8$  gözlemsel değer aralığı da dikkate alınacaktır.

## 4.8. BOYUTSUZLAŞTIRMA

### 4.8.1. Kozmolojik Değişkenler:

Şimdi amacımız, yukarıdaki ifadeleri bir yandan gözlenebilir (ölçülebilir) kozmik parametreler cinsinden yazmak ve diğer yandan da, sayısal hesap yapabilmek için  $R, G, f(R, G, T), f_R$ , vb.. boyutlu büyüklükleri, boyutsuz değişkenler tanımlamak suretiyle boyutsuzlaştırmak olacaktır. Kozmoloji'de,  $a(t)$  ölçek çarpanının türevlerinden hareketle

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad q(t) = -\frac{1}{H^2(t)} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \quad j(t) = \frac{1}{H^3(t)} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \quad s(t) = \frac{1}{H^4(t)} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \quad (4.86)$$

şeklinde birtakım kozmolojik parametreler tanımlanmıştır.  $H(t)$  ye Hubble parametresi denilmekte olup bu, evrenin genişlemesinin (ya da büzülmesinin) hızını verir. Buna göre,  $H(t) > 0$  ise evren genişliyor,  $H(t) < 0$  ise evren büzülüyor demektir.  $q(t)$  ye yavaşlama parametresi denir.  $q(t) > 0$  hali yavaşlayan bir genişlemeye;  $q(t) < 0$  hali ise hızlanan bir genişlemeye işaret eder.  $j(t)$  ve  $s(t)$  parametrelerine de sırasıyla jerk ve snap parametreleri adı verilir. Öte yandan bilinen (sıradan) maddenin enerji yoğunluğu ile basıncına bağlanan

$$\Omega_m(t) = \frac{\kappa^2 c^2}{3H^2(t)} \mu^m(t), \quad \Omega_p(t) = \frac{\kappa^2 c^2}{3H^2(t)} p^m(t) \quad (4.87)$$

şeklinde, sırasıyla, madde yoğunluk parametresi ve basınç parametresi denilen boyutsuz iki parametre daha tanımlanır ( $\mu^m$  maddenin enerji yoğunluğu olup maddenin  $\rho^m$  madde yoğunluğuna  $\mu^m = \rho^m c^2$  bağıntısıyla bağlıdır). Toplam efektif yoğunluklar olan  $\mu^{t.ef}(t)$  ile  $p^{t.ef}(t)$  ye karşılık düşen boyutsuz  $\Omega_m^{t.ef}(t)$  ve  $\Omega_p^{t.ef}(t)$  gibi parametreler de (4.75) dekilere benzer tarzda tanımlanabilir. Bu kinematik ve dinamik kozmolojik parametrelere ek olarak bir de 3-boyutlu hiperyüzeylerin eğrilik indeksine bağlanan

$$\Omega_k(t) = -\frac{kc^2}{H^2(t)a^2(t)} \quad (4.88)$$

biçiminde boyutsuz bir parametre daha tanımlamak mümkündür. Buna eğrilik indeksi parametresi denir ve aşıkarak  $k = -1, 0, +1$  için, sırasıyla,  $\Omega_k(t) > 0$ ,  $\Omega_k(t) = 0$ ,  $\Omega_k(t) < 0$  dır. Yukarıda tanımlanan tüm kozmolojik parametreler, *zaman*<sup>-1</sup> boyutunda olan  $H(t)$  dışında, boyutsuzdurlar. Bunların günümüzdeki ( $t = t_0$  için) değerleri  $H_0, q_0, j_0, s_0, \Omega_{m,0}, \Omega_{p,0}, \Omega_{k,0}, \dots$  ile gösterilecektir.  $H_0$  büyüklüğü Hubble parametresinin günümüzdeki değeri olup Hubble sabiti olarak anılır. Notasyonu ağırlaştırmamak için bu kozmolojik parametrelerin  $t$  ye bağlılıkları bundan böyle artık gösterilmeyecektir. Tanımlarından hareketle yukarıdaki kinematik parametrelerin zamana göre türevlerinin:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= -H^2(q+1) \\ \ddot{H} &= H^3(j+3q+2) \\ \dddot{H} &= H^4(-3q^2-12q-6-4j+s) \\ \dot{q} &= H(2q^2+q-j) \\ \dot{j} &= H(3qj+2j+s) \\ \dot{\Omega}_k &= 2Hq\Omega_k \end{aligned} \quad (4.89)$$

ile verildiği kolayca bulunabilir. Öte yandan,  $R$  ve  $G$  nin gerek kendilerinin, gerekse de zamana göre türevlerinin, söz konusu kozmolojik parametreler cinsinden

$$\begin{aligned}
R &= 6 \frac{H^2}{c^2} (-q + 1 - \Omega_k) \\
\dot{R} &= 6 \frac{H^3}{c^2} (-q + j - 2 + 2\Omega_k) \\
\ddot{R} &= 6 \frac{H^4}{c^2} [q^2 + 8q + 6 + s - 2\Omega_k(q + 3)]
\end{aligned} \tag{4.90}$$

$$\begin{aligned}
G &= -24 \frac{H^4}{c^4} q(1 - \Omega_k) \\
\dot{G} &= 24 \frac{H^5}{c^4} [2q^2 + 3q + j - (j + 3q)\Omega_k] \\
\ddot{G} &= 24 \frac{H^6}{c^4} [-2q^3 - 15q^2 - 12q - 6qj - 6j + s + (3q^2 + 12q + 6j - s)\Omega_k]
\end{aligned} \tag{4.91}$$

biçiminde olduğu hesaplanabilir. Şimdi, bunları:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R} &= 6(-q + 1 - \Omega_k) \\
\mathfrak{R}^* &= 6(-q + j - 2 + 2\Omega_k) \\
\mathfrak{R}^{**} &= 6[q^2 + 8q + 6 + s - 2\Omega_k(q + 3)]
\end{aligned} \tag{4.92}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma &= -24q(1 - \Omega_k) \\
\Gamma^* &= 24[2q^2 + 3q + j - (j + 3q)\Omega_k] \\
\Gamma^{**} &= 24[-2q^3 - 15q^2 - 12q - 6qj - 6j + s + (3q^2 + 12q + 6j - s)\Omega_k]
\end{aligned} \tag{4.93}$$

olarak tanımlayacağımız boyutsuz fonksiyonlar aracılığıyla

$$\begin{aligned}
R &= \frac{H^2}{c^2} \mathfrak{R} \quad , \quad \dot{R} = \frac{H^3}{c^2} \mathfrak{R}^* \quad , \quad \ddot{R} = \frac{H^4}{c^2} \mathfrak{R}^{**} \\
G &= \frac{H^4}{c^4} \Gamma \quad , \quad \dot{G} = \frac{H^5}{c^4} \Gamma^* \quad , \quad \ddot{G} = \frac{H^6}{c^4} \Gamma^{**}
\end{aligned} \tag{4.94}$$

biçiminde ifade edelim. Benzer yaklaşımı,  $T_{ab}^m$  nin izi olan  $T = -\mu^m + 3p^m$  ye de uygulayalım.

(4.35) deki lineer barotropik hal denkleminin

$$\Omega_p = w\Omega_m \tag{4.95}$$



biçiminde yazılabilecek ifadesi aracılığıyla,  $T$  yi

$$T = \frac{3H^2}{\kappa^2 c^2} (-1 + 3w) \Omega_m \quad (4.96)$$

olarak yazalım. Hem bu bağıntıyı ve hem de  $\dot{T}$  ile  $\ddot{T}$  türevlerini,

$$\tau \equiv (-1 + 3w) \Omega_m \quad (4.97)$$

şeklinde tanımlanan boyutsuz  $\tau$ ,  $\tau^*$  ve  $\tau^{**}$  gibi iki boyutsuz fonksiyon cinsinden

$$T = \frac{3H^2}{\kappa^2 c^2} \tau, \quad \dot{T} = \frac{3H^3}{\kappa^2 c^2} \tau^*, \quad \ddot{T} = \frac{3H^4}{\kappa^2 c^2} \tau^{**} \quad (4.98)$$

biçiminde yazalım. Şimdi amacımız (4.41) ve (4.42) den hareketle  $\tau^*$  ve  $\tau^{**}$  nin ifadelerini bulmak olacaktır.

#### 4.8.2. ( $L_m = p^m$ , I. YORUM)

Söz konusu denklemlerden hareketle, amaca uygun olarak da düzenlendiğinde, ilk aşamada

$$\tau^* = \frac{-2(1+w) \left[ 3 \left( 1 + \frac{f_T}{\kappa^2} \right) + \frac{f_{TR} \dot{R}}{\kappa^2 H} + \frac{f_{TG} \dot{G}}{\kappa^2 H} \right]}{2 + \frac{(3-w)f_T}{\kappa^2} + \frac{6(1+w)H^2 f_{TT} \tau}{\kappa^4 c^2}} \tau \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \tau^{**} = & \frac{-2(1+w)}{\left[ 2 + \frac{(3-w)f_T}{\kappa^2} + \frac{6(1+w)H^2 f_{TT} \tau}{\kappa^4 c^2} \right]^2} \left\{ \left( -3(1+q) \left( 1 + \frac{f_T}{\kappa^2} \right) + \frac{3\dot{f}_T}{\kappa^2 H} + \frac{\dot{f}_{TR} \dot{R}}{\kappa^2 H^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\dot{f}_{TG} \dot{G}}{\kappa^2 H^2} + \frac{f_{TR} \ddot{R}}{\kappa^2 H^2} + \frac{f_{TG} \ddot{G}}{\kappa^2 H^2} \right) \tau + \left( 3 \left( 1 + \frac{f_T}{\kappa^2} \right) + \frac{f_{TR} \dot{R}}{\kappa^2 H} + \frac{f_{TG} \dot{G}}{\kappa^2 H} \right) \tau^* \right\} \\ & \times \left\{ 2 + \frac{(3-w)f_T}{\kappa^2} + \frac{2(1+w)f_{TT} \tau}{\kappa^2} \right\} \\ & - \left[ \frac{(3-w)\dot{f}_T}{\kappa^2 H} + \frac{6(1+w)H\dot{f}_{TT} \tau}{\kappa^4 c^2} + \frac{6(1+w)H^2 f_{TT} \tau^*}{\kappa^4 c^2} \right] \left[ 3 \left( 1 + \frac{f_T}{\kappa^2} \right) + \frac{f_{TR} \dot{R}}{\kappa^2 H} + \frac{f_{TG} \dot{G}}{\kappa^2 H} \right] \tau \end{aligned} \quad (4.100)$$

bulmaktayız. Buraya kadarki boyutsuzlaştırma işlemleri, (4.16) daki denklemlere de uygulanırsa bunların, yine ilk adımda,

$$\Omega_m^{t.ef} = \frac{1}{f_R} \left[ \Omega_m + \frac{f_T}{\kappa^2} (1+w) \Omega_m - \frac{c^2}{6H^2} (f - Rf_R - Gf_G) - \frac{1}{H} \dot{f}_R - \frac{4H}{c^2} (1-\Omega_k) \dot{f}_G \right] \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} \Omega_P^{t.ef} = \frac{1}{f_R} \left[ w\Omega_m + \frac{c^2}{6H^2} (f - Rf_R - Gf_G) + \frac{2}{3H} \dot{f}_R + \frac{1}{3H^2} \ddot{f}_R - \frac{8qH}{3c^2} \dot{f}_G \right. \\ \left. + \frac{4}{3c^2} (1-\Omega_k) \ddot{f}_G \right] \end{aligned} \quad (4.102)$$

şeklinde yazılabileceklerini görmek kolaydır. Bunlara; standart maddeninkiyle birlikte efektif ve karanlık enerji hal parametrelerinin bu boyutsuz parametreler cinsinden ifadelerini de ekleyelim:

$$w_m \equiv w = \frac{\Omega_P}{\Omega_m}, \quad -\frac{1}{3} \leq w \leq 1 \quad (4.103.a)$$

$$w_{t.ef} \equiv w_{ef} = \frac{\Omega_P^{t.ef}}{\Omega_m^{t.ef}} < -\frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad SEC < 0 \quad (4.103.b)$$

$$w_{KE} = \frac{\Omega_P^{KE}}{\Omega_m^{KE}} = \frac{\Omega_P^{t.ef} - \Omega_P}{\Omega_m^{t.ef} - \Omega_m} = \frac{w_{ef} \Omega_m^{t.ef} - w \Omega_m}{\Omega_m^{t.ef} - \Omega_m} \quad (4.103.c)$$

Boyutsuzlaştırma işleminde şimdi son aşama, boyut taşıyan  $f(R, G, T)$  fonksiyonu ile bunun zamana ve argümanlarına göre türevlerini boyutsuz değişkenler cinsinden ifade etmek olacaktır. Yol gösterici olması bakımından, için için içine giren bazı büyüklüklerin boyut analizini *EK-B*'de veriyoruz. (4.2) deki  $S$  aksiyonunun enerji boyutunda olduğunu göz önüne alarak, buradan

$$[S] = LMT^{-2} \times [f] \quad \Rightarrow \quad [f] = L^{-2} \quad (4.104)$$

olması gerektiği sonucuna varılır (bunun böyle olduğu (4.101) deki üçüncü terimden de görülebilirdi). O halde

$$f(R, G, T) \equiv \frac{H_0^2}{c^2} F(r, g, t) \quad \Leftrightarrow \quad F(r, g, t) \equiv \frac{c^2}{H_0^2} f(R, G, T) \quad (4.105)$$

bağıntısıyla boyutsuz  $r$ ,  $g$  ve  $t$  değişkenlerinin fonksiyonu olan boyutsuz bir  $F(r, g, t)$  fonksiyonu tanımlayalım. Bu yeni değişkenler ile türevleri,  $R$ ,  $G$  ve  $T$  cinsinden (4.44) ifadeleri de göz önüne alınarak şöyle tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}
r &\equiv \frac{c^2}{H_0^2} R \equiv \frac{H^2}{H_0^2} \mathfrak{R} \quad , \quad \dot{r} \equiv \frac{c^2}{H_0^2} \dot{R} \equiv \frac{H^3}{H_0^2} \mathfrak{R}^* \quad , \quad \ddot{r} \equiv \frac{c^2}{H_0^2} \ddot{R} \equiv \frac{H^4}{H_0^2} \mathfrak{R}^{**} \\
g &\equiv \frac{c^4}{H_0^4} G \equiv \frac{H^4}{H_0^4} \Gamma \quad , \quad \dot{g} \equiv \frac{c^4}{H_0^4} \dot{G} \equiv \frac{H^5}{H_0^4} \Gamma^* \quad , \quad \ddot{g} \equiv \frac{c^4}{H_0^4} \ddot{G} \equiv \frac{H^6}{H_0^4} \Gamma^{**} \\
t &\equiv \frac{\kappa^2 c^2}{3H_0^2} T \equiv \frac{H^2}{H_0^2} \tau \quad , \quad \dot{t} \equiv \frac{\kappa^2 c^2}{3H_0^2} \dot{T} \equiv \frac{H^3}{H_0^2} \tau^* \quad , \quad \ddot{t} \equiv \frac{\kappa^2 c^2}{3H_0^2} \ddot{T} \equiv \frac{H^4}{H_0^2} \tau^{**}
\end{aligned} \tag{4.106}$$

$f(R, G, T)$  nin argümanlarına göre kısmi türevleri,  $F(r, g, t)$  nin argümanlarına göre türevleri cinsinden, zincir kuralı kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilirler:

$$\begin{aligned}
f_R &= F_r \quad , \quad f_G = \frac{c^2}{H_0^2} F_g \quad , \quad f_T = \frac{\kappa^2}{3} F_t \\
f_{RR} &= \frac{c^2}{H_0^2} F_{rr} \quad , \quad f_{GG} = \frac{c^6}{H_0^6} F_{gg} \quad , \quad f_{TT} = \frac{\kappa^4 c^2}{9H_0^2} F_{tt} \\
f_{RG} &= f_{GR} = \frac{c^4}{H_0^4} F_{rg} \quad , \quad f_{RT} = f_{TR} = \frac{\kappa^2 c^2}{3H_0^2} F_{rt} \quad , \quad f_{GT} = f_{TG} = \frac{\kappa^2 c^4}{3H_0^4} F_{gt} \\
f_{RRR} &= \frac{c^4}{H_0^4} F_{rrr} \quad , \quad f_{GGG} = \frac{c^{10}}{H_0^{10}} F_{ggg} \quad , \quad f_{TTT} = \frac{\kappa^6 c^4}{27H_0^4} F_{ttt} \\
f_{RRG} &= f_{RGR} = f_{GRR} = \frac{c^6}{H_0^6} F_{rrg} \quad , \quad f_{RRT} = f_{RTR} = f_{TRR} = \frac{\kappa^2 c^4}{3H_0^4} F_{rrt} \\
f_{RGG} &= f_{GRG} = f_{GGR} = \frac{c^8}{H_0^8} F_{rgg} \quad , \quad f_{GGT} = f_{GTG} = f_{TGG} = \frac{\kappa^2 c^8}{3H_0^8} F_{ggt} \\
f_{RGT} &= f_{RTG} = f_{GRT} = f_{GTR} = f_{TRG} = f_{TGR} = \frac{\kappa^2 c^6}{3H_0^6} F_{rgt}
\end{aligned} \tag{4.107}$$

Öte yandan,  $f_R$ ,  $f_G$  ve  $f_T$  nin zamana göre birinci ve ikinci türevleri için de:

$$\begin{aligned}
\dot{f}_R &= F_{rr} \dot{r} + F_{rg} \dot{g} + F_{rt} \dot{t} \\
\dot{f}_G &= \frac{c^2}{H_0^2} (F_{gr} \dot{r} + F_{gg} \dot{g} + F_{gt} \dot{t})
\end{aligned}$$

$$\dot{f}_T = \frac{\kappa^2}{3} (F_{tr} \dot{r} + F_{tg} \dot{g} + F_{tt} \dot{t}) \quad (4.108)$$

$$\ddot{f}_R = F_{rrr} \dot{r}^2 + F_{rsg} \dot{g}^2 + F_{rrt} \dot{t}^2 + 2(F_{rrg} \dot{r} \dot{g} + F_{rrt} \dot{r} \dot{t} + F_{rgt} \dot{g} \dot{t}) + F_{rr} \ddot{r} + F_{rg} \ddot{g} + F_{rt} \ddot{t}$$

$$\ddot{f}_G = \frac{c^2}{H_0^2} [F_{grr} \dot{r}^2 + F_{ggg} \dot{g}^2 + F_{ggt} \dot{t}^2 + 2(F_{grg} \dot{r} \dot{g} + F_{ggt} \dot{r} \dot{t} + F_{gtt} \dot{g} \dot{t}) + F_{gr} \ddot{r} + F_{gg} \ddot{g} + F_{gt} \ddot{t}]$$

$$\ddot{f}_T = \frac{\kappa^2}{3} [F_{trr} \dot{r}^2 + F_{tsg} \dot{g}^2 + F_{trt} \dot{t}^2 + 2(F_{trg} \dot{r} \dot{g} + F_{trt} \dot{r} \dot{t} + F_{tgt} \dot{g} \dot{t}) + F_{tr} \ddot{r} + F_{tg} \ddot{g} + F_{tt} \ddot{t}]$$

bulunur. Tüm bunlar (4.97) ve (4.99)-(4.102) denklemlerine yerleştirilirse, sonuçta

$$\tau = (-1 + 3w)\Omega_m \quad (4.109)$$

$$\tau^* = \frac{-2(1+w) \left[ 3 + F_t + \frac{1}{3} \frac{H^2}{H_0^2} F_{tr} \mathfrak{R}^* + \frac{1}{3} \frac{H^4}{H_0^4} F_{tg} \Gamma^* \right]}{2 + \frac{1}{3} (3-w) F_t + \frac{2}{3} \frac{H^2}{H_0^2} (1+w) F_{tt} \tau} \tau \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned} \tau^{**} = & \frac{-2(1+w)}{\left[ 2 + \frac{1}{3} (3-w) F_t + \frac{2}{3} \frac{H^2}{H_0^2} (1+w) F_{tt} \tau \right]^2} \left\{ \left[ -3(1+q) \left( 1 + \frac{1}{3} F_t \right) + \frac{H^2}{H_0^2} F_{tr} \mathfrak{R}^* \right. \right. \\ & + \frac{H^4}{H_0^4} F_{tg} \Gamma^* + \frac{H^2}{H_0^2} F_{tt} \tau^* + \frac{1}{3} \left( \frac{H^4}{H_0^4} F_{trr} \mathfrak{R}^{*2} + \frac{H^6}{H_0^6} F_{trg} \mathfrak{R}^* \Gamma^* + \frac{H^4}{H_0^4} F_{trt} \mathfrak{R}^* \tau^* \right) \\ & + \frac{1}{3} \left( \frac{H^6}{H_0^6} F_{tgr} \Gamma^* \mathfrak{R}^* + \frac{H^8}{H_0^8} F_{tgg} \Gamma^{*2} + \frac{H^6}{H_0^6} F_{tgt} \Gamma^* \tau^* + \frac{H^2}{H_0^2} F_{tr} \mathfrak{R}^{**} + \frac{H^4}{H_0^4} F_{tg} \Gamma^{**} \right) \left. \right] \tau \\ & + \left( 3 + F_t + \frac{1}{3} \frac{H^2}{H_0^2} F_{tr} \mathfrak{R}^* + \frac{1}{3} \frac{H^4}{H_0^4} F_{tg} \Gamma^* \right) \tau^* \left\{ 2 + \frac{1}{3} (3-w) F_t + \frac{2}{3} \frac{H^2}{H_0^2} (1+w) F_{tt} \tau \right\} \\ & - \left\{ \frac{1}{3} (3-w) \left( \frac{H^2}{H_0^2} F_{tr} \mathfrak{R}^* + \frac{H^4}{H_0^4} F_{tg} \Gamma^* + \frac{H^2}{H_0^2} F_{tt} \tau^* \right) \right. \\ & + \frac{2}{3} (1+w) \left( \frac{H^4}{H_0^4} F_{trr} \mathfrak{R}^* + \frac{H^6}{H_0^6} F_{trg} \Gamma^* + \frac{H^4}{H_0^4} F_{trt} \tau^* \right) \tau + \frac{2}{3} (1+w) \frac{H^2}{H_0^2} F_{tt} \tau^* \left. \right\} \\ & \times \left( 3 + F_t + \frac{1}{3} \frac{H^2}{H_0^2} F_{tr} \mathfrak{R}^* + \frac{1}{3} \frac{H^4}{H_0^4} F_{tg} \Gamma^* \right) \tau \left. \right\} \quad (4.111) \end{aligned}$$

$$\Omega_m^{t.ef} = \frac{1}{F_r} \left[ \Omega_m + \frac{1}{3}(1+w)\Omega_m F_t - \frac{1}{6} \left( \frac{H_0^2}{H^2} F - F_r \mathfrak{R} - \frac{H^2}{H_0^2} F_g \Gamma \right) - \left( \frac{H^2}{H_0^2} F_{rr} \mathfrak{R}^* + \frac{H^4}{H_0^4} F_{rg} \Gamma^* \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{H^2}{H_0^2} F_{rt} \tau^* \right) - 4(1-\Omega_k) \left( \frac{H^4}{H_0^4} F_{gr} \mathfrak{R}^* + \frac{H^6}{H_0^6} F_{gg} \Gamma^* + \frac{H^4}{H_0^4} F_{gt} \tau^* \right) \right] \quad (4.112)$$

$$\Omega_p^{t.ef} = \frac{1}{F_r} \left\{ w\Omega_m + \frac{1}{6} \left( \frac{H_0^2}{H^2} F - F_r \mathfrak{R} - \frac{H^2}{H_0^2} F_g \Gamma \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{H^2}{H_0^2} F_{rr} \mathfrak{R}^* + \frac{H^4}{H_0^4} F_{rg} \Gamma^* + \frac{H^2}{H_0^2} F_{rt} \tau^* \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left[ \frac{H^4}{H_0^4} F_{rrr} \mathfrak{R}^{*2} + \frac{H^8}{H_0^8} F_{rgg} \Gamma^{*2} + \frac{H^4}{H_0^4} F_{rtt} \tau^{*2} + 2 \left( \frac{H^6}{H_0^6} F_{rrg} \mathfrak{R}^* \Gamma^* + \frac{H^4}{H_0^4} F_{rrt} \mathfrak{R}^* \tau^* + \frac{H^6}{H_0^6} F_{rgt} \Gamma^* \tau^* \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{H^2}{H_0^2} F_{rr} \mathfrak{R}^{**} + \frac{H^4}{H_0^4} F_{rg} \Gamma^{**} + \frac{H^2}{H_0^2} F_{rt} \tau^{**} \right] - \frac{8}{3} q \left( \frac{H^4}{H_0^4} F_{gr} \mathfrak{R}^* + \frac{H^6}{H_0^6} F_{gg} \Gamma^* + \frac{H^4}{H_0^4} F_{gt} \tau^* \right) \right. \\ \left. + \frac{4}{3} (1-\Omega_k) \left[ \frac{H^6}{H_0^6} F_{grr} \mathfrak{R}^{*2} + \frac{H^{10}}{H_0^{10}} F_{ggg} \Gamma^{*2} + \frac{H^6}{H_0^6} F_{grt} \tau^{*2} + 2 \frac{H^8}{H_0^8} F_{grg} \mathfrak{R}^* \Gamma^* + 2 \frac{H^6}{H_0^6} F_{grt} \mathfrak{R}^* \tau^* \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{H^8}{H_0^8} F_{ggt} \Gamma^* \tau^* + \frac{H^4}{H_0^4} F_{gr} \mathfrak{R}^{**} + \frac{H^6}{H_0^6} F_{gg} \Gamma^{**} + \frac{H^4}{H_0^4} F_{gt} \tau^{**} \right] \right\} \quad (4.113)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadelerin hepsi herhangi bir  $t$  kozmolojik zamanını ilgilendirmektedir. Bunları evrenin şimdiki  $t = t_0$  zamanında değerlendirmek için, kozmolojik parametrelere güncel  $H_0, q_0, j_0, s_0, \Omega_{m,0}, \Omega_{p,0}, \Omega_{k,0}$  gözlem değerlerini (bkz. §(4.9)) vermek gerekmektedir. Bu taktirde  $H = H_0$  için yukarıdaki ifadeler biraz daha sadeleşerek şöyle değerlendirilirler:

$$\tau_0 = (-1 + 3w)\Omega_{m,0} \quad (4.114)$$

$$\tau_0^* = \frac{-2(1+w)[3(3 + F_{t,0}) + F_{tr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{tg,0} \Gamma_0^*]}{6 + (3-w)F_{t,0} + 2(1+w)F_{tr,0} \tau_0} \tau_0 \quad (4.115)$$

$$\tau_0^{**} = \frac{-2(1+w)}{[6 + (3-w)F_{t,0} + 2(1+w)F_{tr,0} \tau_0]^2} \{ \{ [-3(1+q_0)(3 + F_{t,0}) + 3(F_{tr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{tg,0} \Gamma_0^* + F_{tr,0} \tau_0^*) \\ + (F_{trr,0} \mathfrak{R}_0^{*2} + F_{trg,0} \mathfrak{R}_0^* \Gamma_0^* + F_{trt,0} \mathfrak{R}_0^* \tau_0^*) + (F_{tgr,0} \Gamma_0^* \mathfrak{R}_0^* + F_{tgg,0} \Gamma_0^{*2} + F_{tgt,0} \Gamma_0^* \tau_0^* + F_{tr,0} \mathfrak{R}_0^{**} \\ + F_{tg,0} \Gamma_0^{**})] \tau_0 + [3(3 + F_{t,0}) + F_{tr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{tg,0} \Gamma_0^*] \tau_0^* \} [6 + (3-w)F_{t,0} + 2(1+w)F_{tr,0} \tau_0] \\ - [(3-w)(F_{tr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{tg,0} \Gamma_0^* + F_{tr,0} \tau_0^*) + 2(1+w)(F_{trr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{trg,0} \Gamma_0^* + F_{trt,0} \tau_0^*) \tau_0 \\ + 2(1+w)F_{tr,0} \tau_0^*] [3(3 + F_{t,0}) + F_{tr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{tg,0} \Gamma_0^*] \tau_0 \} \quad (4.116)$$

$$\begin{aligned}\Omega_{m,0}^{t.ef} = & \frac{1}{F_{r,0}} [\Omega_{m,0} + \frac{1}{3}(1+w)\Omega_{m,0}F_{t,0} - \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0 - F_{g,0}\Gamma_0) - (F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{rg,0}\Gamma_0^* \\ & + F_{rt,0}\tau_0^*) - 4(1-\Omega_{k,0})(F_{gr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{gg,0}\Gamma_0^* + F_{gt,0}\tau_0^*)] \quad (4.117)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{P,0}^{t.ef} = & \frac{1}{F_{r,0}} \{w\Omega_{m,0} + \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0 - F_{g,0}\Gamma_0) + \frac{2}{3}(F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{rg,0}\Gamma_0^* + F_{rt,0}\tau_0^*) + \frac{1}{3}[F_{rrr,0}\mathfrak{R}_0^{*2} \\ & + F_{rgg,0}\Gamma_0^{*2} + F_{rtt,0}\tau_0^{*2} + 2(F_{rrg,0}\mathfrak{R}_0^*\Gamma_0^* + F_{rrt,0}\mathfrak{R}_0^*\tau_0^* + F_{rgt,0}\Gamma_0^*\tau_0^*) + F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^{**} + F_{rg,0}\Gamma_0^{**} + F_{rt,0}\tau_0^{**}] \\ & - \frac{8}{3}q_0(F_{gr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{gg,0}\Gamma_0^* + F_{gt,0}\tau_0^*) + \frac{4}{3}(1-\Omega_{k,0})[F_{grr,0}\mathfrak{R}_0^{*2} + F_{ggg,0}\Gamma_0^{*2} + F_{ggt,0}\tau_0^{*2} \\ & + 2F_{grg,0}\mathfrak{R}_0^*\Gamma_0^* + 2F_{grt,0}\mathfrak{R}_0^*\tau_0^* + 2F_{ggt,0}\Gamma_0^*\tau_0^* + F_{gr,0}\mathfrak{R}_0^{**} + F_{gg,0}\Gamma_0^{**} + F_{gt,0}\tau_0^{**}]\} \quad (4.118)\end{aligned}$$

Burada:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_0 &= 6(-q_0 + 1 - \Omega_{k,0}) \\ \mathfrak{R}_0^* &= 6(-q_0 + j_0 - 2 + 2\Omega_{k,0}) \\ \mathfrak{R}_0^{**} &= 6[q_0^2 + 8q_0 + 6 + s_0 - 2\Omega_{k,0}(q_0 + 3)] \\ \Gamma_0 &= -24q_0(1 - \Omega_{k,0}) \\ \Gamma_0^* &= 24[2q_0^2 + 3q_0 + j_0 - (j_0 + 3q_0)\Omega_{k,0}] \\ \Gamma_0^{**} &= 24[-2q_0^3 - 15q_0^2 - 12q_0 - 6q_0j_0 - 6j_0 + s_0 + (3q_0^2 + 12q_0 + 6j_0 - s_0)\Omega_{k,0}] \\ \tau_0 &= (-1 + 3w)\Omega_{m,0}\end{aligned} \quad (4.119)$$

dır. Öte yandan,  $F(r, g, t)$  boyutsuz fonksiyonu ile bunun, yine boyutsuz  $r, g$  ve  $t$  değişkenlerine göre kısmi türevlerinin şimdiki  $t = t_0$  zamanında değerlendirilmesi de (4.106) dan ötürü, aşağıda örneklendirildiği gibi,  $r = \mathfrak{R}_0, g = \Gamma_0, t = \tau_0$  değerleriyle olacaktır:

$$\begin{aligned}F_0 &\equiv F|_{t=t_0} \equiv F|_{r=\mathfrak{R}_0, g=\Gamma_0, t=\tau_0} \equiv F(\mathfrak{R}_0, \Gamma_0, \tau_0) \\ F_{r..,0} &\equiv F_{r..}|_{t=t_0} \equiv F_{r..}|_{r=\mathfrak{R}_0, g=\Gamma_0, t=\tau_0} \equiv F_{r..}(\mathfrak{R}_0, \Gamma_0, \tau_0)\end{aligned} \quad (4.120)$$

#### 4.8.3. ( $L_m = p^m$ , II. YORUM)

Bu durum için, ayrıntılarına girmeyeceğimiz yukarıdaki benzer hesaplar sonucunda,  $H = H_0$  alındığında, (4.115) ve (4.116) deki  $\tau^*$  ve  $\tau^{**}$  türevlerinde bir değişiklik olmazken, (4.117) ve (4.118) ifadeleri aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} \Omega_{m,0}^{t.ef} = & \Omega_{m,0} + \frac{1}{3}(1+w)\Omega_{m,0}F_{t,0} + (1-F_r)(1-\Omega_{k,0}) - \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0 - F_{g,0}\Gamma_0) \\ & - (F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{rg,0}\Gamma_0^* + F_{rt,0}\tau_0^*) - 4(1-\Omega_{k,0})(F_{gr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{gg,0}\Gamma_0^* + F_{gt,0}\tau_0^*) \end{aligned} \quad (4.121)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{p,0}^{t.ef} = & w\Omega_{m,0} + \frac{1}{3}(1-F_{r,0})(2q_0 - 1 + \Omega_{k,0}) + \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0 - F_{g,0}\Gamma_0) + \frac{2}{3}(F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* \\ & + F_{rg,0}\Gamma_0^* + F_{rt,0}\tau_0^*) + \frac{1}{3}[(F_{rrr,0}\mathfrak{R}_0^{*2} + F_{rgg,0}\Gamma_0^{*2} + F_{rtt,0}\tau_0^{*2}) + 2(F_{rrg,0}\mathfrak{R}_0^*\Gamma_0^* \\ & + F_{rrt,0}\mathfrak{R}_0^*\tau_0^* + F_{rgt,0}\Gamma_0^*\tau_0^*) + F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^{**} + F_{rg,0}\Gamma_0^{**} + F_{rt,0}\tau_0^{**}] - \frac{8}{3}q_0(F_{gr,0}\mathfrak{R}_0^* \\ & + F_{gg,0}\Gamma_0^* + F_{gt,0}\tau_0^*) + \frac{4}{3}(1-\Omega_{k,0})[F_{grr,0}\mathfrak{R}_0^{*2} + F_{ggg,0}\Gamma_0^{*2} + F_{ggt,0}\tau_0^{*2} \\ & + 2(F_{grg,0}\mathfrak{R}_0^*\Gamma_0^* + F_{grt,0}\mathfrak{R}_0^*\tau_0^* + F_{ggt,0}\Gamma_0^*\tau_0^*) + F_{gr,0}\mathfrak{R}_0^{**} + F_{gg,0}\Gamma_0^{**} + F_{gt,0}\tau_0^{**}] \end{aligned} \quad (4.122)$$

#### 4.8.4 ( $L_m = -\mu^m$ , I. ve II. YORUM)

Bu durumlar için yine ayrıntılara girmeyip yalnızca hesaplarımızda kullanılacak formülleri vermekle yetiniyoruz. Buna göre,  $H = H_0$  alındığında, her iki durum için de aynı olan (4.72) deki  $\tau^*$  ve (4.73) deki  $\tau^{**}$ , boyutsuz yazılışlarıyla aşağıdaki gibidir:

$$\tau^* = \frac{-3(1+w)(3+F_t)}{6+(1-3w)F_t} \tau \quad (4.123)$$

$$\begin{aligned} \tau^{**} = & \frac{-6(1+w)(3+F_t)}{[6+(1-3w)F_t]^2} \{-(1+q_0)[6+(1-3w)F_t] - 6(1+w)(3+F_t) \\ & + \frac{3(1+3w)(F_r\mathfrak{R}^* + F_{ig}\Gamma^* + F_{it}\tau^*)}{(3+F_t)}\} \tau \end{aligned} \quad (4.124)$$

Öte yandan, ( $L_m = -\mu^m$ , I. YORUM) için yazılı (4.17.α) denklemlerinin boyutsuz şekli:

$$\Omega_{m,0}^{t.ef} = \frac{1}{F_{r,0}} [\Omega_{m,0} - \frac{1}{6} (F_0 - F_{r,0} \mathfrak{R}_0 - F_{g,0} \Gamma_0) - (F_{rr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{rg,0} \Gamma_0^* + F_{rt,0} \tau_0^*) - 4(1 - \Omega_{k,0})(F_{gr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{gg,0} \Gamma_0^* + F_{gt,0} \tau_0^*)] \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{P,0}^{t.ef} = & \frac{1}{F_{r,0}} \{ w \Omega_{m,0} + \frac{1}{3} (1+w) \Omega_{m,0} F_{t,0} + \frac{1}{6} (F_0 - F_{r,0} \mathfrak{R}_0 - F_{g,0} \Gamma_0) + \frac{2}{3} (F_{rr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{rg,0} \Gamma_0^* \\ & + F_{rt,0} \tau_0^*) + \frac{1}{3} [F_{rrr,0} \mathfrak{R}_0^{*2} + F_{rgg,0} \Gamma_0^{*2} + F_{rtt,0} \tau_0^{*2} + 2(F_{rrg,0} \mathfrak{R}_0^* \Gamma_0^* + F_{rrt,0} \mathfrak{R}_0^* \tau_0^* + F_{rgt,0} \Gamma_0^* \tau_0^*) \\ & + F_{rr,0} \mathfrak{R}_0^{**} + F_{rg,0} \Gamma_0^{**} + F_{rt,0} \tau_0^{**}] - \frac{8}{3} q_0 (F_{gr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{gg,0} \Gamma_0^* + F_{gt,0} \tau_0^*) + \frac{4}{3} (1 - \Omega_{k,0}) [F_{grr,0} \mathfrak{R}_0^{*2} \\ & + F_{ggg,0} \Gamma_0^{*2} + F_{gtt,0} \tau_0^{*2} + 2(F_{grg,0} \mathfrak{R}_0^* \Gamma_0^* + F_{grt,0} \mathfrak{R}_0^* \tau_0^* + F_{ggt,0} \Gamma_0^* \tau_0^*) + F_{gr,0} \mathfrak{R}_0^{**} + F_{gg,0} \Gamma_0^{**} + F_{gt,0} \tau_0^{**}] \} \end{aligned} \quad (4.126)$$

ve ( $L_m = -\mu^m$ , II. YORUM) durumu için yazılı (4.17.β) denklemlerinin boyutsuz şekli de:

$$\Omega_{m,0}^{t.ef} = \Omega_{m,0} + (1 - F_{r,0})(1 - \Omega_{k,0}) - \frac{1}{6} (F_0 - F_{r,0} \mathfrak{R}_0 - F_{g,0} \Gamma_0) - (F_{rr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{rg,0} \Gamma_0^* + F_{rt,0} \tau_0^*) - 4(1 - \Omega_{k,0})(F_{gr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{gg,0} \Gamma_0^* + F_{gt,0} \tau_0^*) \quad (4.127)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{P,0}^{t.ef} = & w \Omega_{m,0} + \frac{1}{3} (1+w) \Omega_{m,0} F_{t,0} + \frac{1}{3} (1 - F_{r,0})(2q_0 - 1 + \Omega_{k,0}) + \frac{1}{6} (F_0 - F_{r,0} \mathfrak{R}_0 - F_{g,0} \Gamma_0) \\ & + \frac{2}{3} (F_{rr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{rg,0} \Gamma_0^* + F_{rt,0} \tau_0^*) + \frac{1}{3} [F_{rrr,0} \mathfrak{R}_0^{*2} + F_{rgg,0} \Gamma_0^{*2} + F_{rtt,0} \tau_0^{*2} + 2(F_{rrg,0} \mathfrak{R}_0^* \Gamma_0^* \\ & + F_{rrt,0} \mathfrak{R}_0^* \tau_0^* + F_{rgt,0} \Gamma_0^* \tau_0^*) + F_{rr,0} \mathfrak{R}_0^{**} + F_{rg,0} \Gamma_0^{**} + F_{rt,0} \tau_0^{**}] - \frac{8}{3} q_0 (F_{gr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{gg,0} \Gamma_0^* + F_{gt,0} \tau_0^*) \\ & + \frac{4}{3} (1 - \Omega_{k,0}) [F_{grr,0} \mathfrak{R}_0^{*2} + F_{ggg,0} \Gamma_0^{*2} + F_{gtt,0} \tau_0^{*2} + 2(F_{grg,0} \mathfrak{R}_0^* \Gamma_0^* + F_{grt,0} \mathfrak{R}_0^* \tau_0^* + F_{ggt,0} \Gamma_0^* \tau_0^*) \\ & + F_{gr,0} \mathfrak{R}_0^{**} + F_{gg,0} \Gamma_0^{**} + F_{gt,0} \tau_0^{**}] \} \end{aligned} \quad (4.128)$$

olur. (4.76) denklemleri ile tanımlı karanlık enerji hal parametresi  $w_{KE}$  nin ifadesi ise şu olur:

$$w_{KE} = \frac{\Omega_{P,0}^{t.ef} - \Omega_{P,0}}{\Omega_{m,0}^{t.ef} - \Omega_{m,0}} \quad (4.129)$$



#### 4.9. KOZMOLOJİK GÜVENİLİRLİLİK

Şimdi, (3.88) deki enerji koşullarını, (3.89) u da dikkate alarak, toplam efektif madde ve basınç yoğunluğu için tanımlanan boyutsuz kozmolojik  $\Omega_m^{t.ef}$ ,  $\Omega_P^{t.ef}$  değişkenleri diliyle,

- NEC:  $\Omega_m^{t.ef} + \Omega_P^{t.ef} \geq 0$
- WEC:  $\Omega_m^{t.ef} \geq 0$  (4.130)
- SEC:  $\Omega_m^{t.ef} + 3\Omega_P^{t.ef} < 0$
- DEC:  $\Omega_m^{t.ef} \geq |\Omega_P^{t.ef}|$

şeklinde ifade edelim. Bunları, kozmolojik  $H, q, j, s, \Omega_m, \Omega_P, \Omega_k$  parametrelerin günümüzde gözlenen değerlerini göz önüne alarak değerlendireceğiz. Bu taktirde, “0” indisi ile güncel değerler gösterilmek üzere bunları yeniden:

- NEC:  $\Omega_{m,0}^{t.ef} + \Omega_{P,0}^{t.ef} \geq 0$
- WEC:  $\Omega_{m,0}^{t.ef} \geq 0$  (4.131)
- SEC:  $\Omega_{m,0}^{t.ef} + 3\Omega_{P,0}^{t.ef} < 0$
- DEC:  $\Omega_{m,0}^{t.ef} \geq |\Omega_{P,0}^{t.ef}|$

şeklinde yazalım. Bu dört koşulu, kısaltma amaçlı, formel olarak

$$NEC \geq 0 \text{ ve } WEC \geq 0 \text{ ve } SEC < 0 \text{ ve } DEC \geq 0 \quad (4.132)$$

şeklinde ifade etmek iyi olacaktır. Enerji koşulları hesaplamalarında, kozmolojik parametrelerin güncel değerleriyle ilgili, [139], [140] ve [141] no’lu kaynaklarda verilen ve [108, 110, 112, 113, 115, 142, 143, 144] no’lu kaynaklarda da tamamı ya da kısmen kullanılan

$$H_0 = 73.8 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}, q_0 = -0.81_{-0.14}^{+0.14}, j_0 = 2.16_{-0.75}^{+0.81}, s_0 = -0.22_{-0.19}^{+0.21}, \Omega_{m,0} = 0.31 \quad (4.133)$$

gözlem değerlerini kabul edecek, fakat, bunların da ‘en iyi değerlerini’ kullanacağız. Yukarıdaki değerlere bir de [109] no’lu kaynakta kullanılan ve [145, 146] no’lu kaynaklardan

alıntılandığı ifade edilen eğrilik indeksi parametresinin  $\Omega_{k,0} = -0.014 \pm 0.017$  olarak verilen değerini de ekliyoruz. Dikkat edileceği üzere, bu parametrenin belirsizlik aralığı, evrenin uzaysal olarak açık ( $k = -1$ ), düz ( $k = 0$ ), ya da kapalı ( $k = +1$ ) olup olmadığı hakkında bir hükümde bulunmaya imkan tanımamaktadır. Bu bakımdan, yani, uzaysal eğriliğin etkisini de görmek için, simülasyonlarda temel olarak kullanacağımız  $\Omega_{k,0} = 0$  değerinin yanısıra,  $\Omega_{k,0} = -0.031$  ile  $\Omega_{k,0} = +0.003$  değerlerini de göz önüne alacağız.

Enerji-momentum tansörünün fizikseliği temeline dayandırılan yukarıdaki dört enerji koşulu dışında, literatürde: asimtotik davranış, güneş sistemi verileriyle tutarlılık, yüksek ya da düşük eğriliklerde davranış, tekilliklerin bertaraf edilmesi vb... konular etrafında  $f$  - gravite modellerini kısıtlayacak birtakım ölçütler de kullanılmaktadır (bkz. meselâ: [76]). Bunlardan biri,  $f$  - gravite teorilerinin ikinci mertebeden daha yüksek mertebeli olmalarından kaynaklanan kararsızlığın bertaraf edilmesine yönelik olarak,  $f$  fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerine getirilen

$$\text{a) } f_R > 0 \Leftrightarrow F_r > 0 \quad \text{ve} \quad \text{b) } f_{RR} > 0 \Leftrightarrow F_{rr} > 0 \quad (4.134)$$

kısıtlamalarıdır. Bunlardan ilki, anti-graviteyi önlemek için,  $G_{ef} \equiv G/f_R$  olarak tanımlanan efektif gravitasyon sabitinin pozitif olmasını sağlar. Kuantum teorisi diliyle bu, gravitonun hayalet (ghost) olmadığını ifade eder [76]. İkinci koşul ise kozmolojik pertürbasyonların kararlılığını sağlar [70, 87]. Bu da, kuantum teorisi diliyle, yeni bir skaler serbestlik derecesi rolünde olan  $f_R$  (skalaron) nin tasyon olmadığını ifade eder [76, 147].

Şimdi, kozmolojik güvenirliliklerini belirlemek üzere  $f$  -modellerinin simülasyonlarla sınanması hakkında toparlayıcı şu bilgilendirmelerde bulunmak iyi olacaktır:

- Sınama, (4.105) deki

$$f(R, G, T) \equiv \frac{H_0^2}{c^2} F(r, g, t) \quad (4.135)$$

tanım bağıntısı uyarınca boyutsuz  $r, g$  ve  $t$  argümanlarının fonksiyonu olan boyutsuz  $F(r, g, t)$  fonksiyonları ve kuplaj sabiti rolünü oynayan boyutsuz katsayılar ( $K_0, K_1, K_2, K_3, \dots$  kullanılacaktır) üzerinden gerçekleştirilecektir.  $f(R, G, T)$  fonksiyonuna,  $R, G$  ve  $T$  argümanlarına ve de boyutlu  $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots$  kuplaj sabitlerine geri dönüş ise (4.135) ve (4.94) deki

$$r \equiv \frac{c^2}{H_0^2} R \quad g \equiv \frac{c^4}{H_0^4} G \quad t \equiv \frac{\kappa^2 c^2}{3H_0^2} T \quad (4.136)$$

değişken dönüşümleri aracılığıyla olacaktır. Bu işlem örneklendirilirse:

$$F(r, g, t) = K_0 r + K_1 r^\alpha + K_2 g^\beta + K_3 t^\gamma \quad (4.137)$$

için:

$$\begin{aligned} f(R, G, T) &= \frac{H_0^2}{c^2} \left[ K_0 \left( \frac{c^2}{H_0^2} R \right) + K_1 \left( \frac{c^2}{H_0^2} R \right)^\alpha + K_2 \left( \frac{c^4}{H_0^4} G \right)^\beta + K_3 \left( \frac{\kappa^2 c^2}{3H_0^2} T \right)^\gamma \right] \\ &= K_0 R + K_1 \left( \frac{c^2}{H_0^2} \right)^{\alpha-1} R^\alpha + K_2 \left( \frac{c^2}{H_0^2} \right)^{2\beta-1} G^\beta + K_3 \left( \frac{\kappa^2}{3} \right)^\gamma \left( \frac{c^2}{H_0^2} \right)^{\gamma-1} T^\gamma \\ &= C_0 R + C_1 R^\alpha + C_2 G^\beta + C_3 T^\gamma \end{aligned} \quad (4.138)$$

ve buradan da boyutlu kuplaj sabitleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$C_0 = K_0, \quad C_1 = K_1 \left( \frac{c^2}{H_0^2} \right)^{\alpha-1}, \quad C_2 = \left( \frac{c^2}{H_0^2} \right)^{2\beta-1}, \quad C_3 = K_3 \left( \frac{\kappa^2}{3} \right)^\gamma \left( \frac{c^2}{H_0^2} \right)^{\gamma-1} \quad (4.139)$$

• Simülasyonlar:  $f(R)$  - gravite,  $f(R, G)$  - gravite,  $f(R, T)$  - gravite ve  $f(R, G, T)$  - gravite olmak üzere dört grup model için gerçekleştirilecektir. Öte yandan, genel bir  $f(R, G, T)$  fonksiyonel formu da bazı kereler iki sınıfta ele alınacaktır; buna göre, genel bir  $f(R, G, T) = f(R, G, T)$  olabileceği gibi,  $f(R, G, T) = R + Y(R, G, T)$  (argümanların üçünün de olması gerekmez) şeklinde de olacaktır. Bu son durumda  $Y(R, G, T)$  fonksiyonu EH-aksiyonunda bir düzeltme terimi konumunda olmaktadır.  $f(R, G, T) = R + Y(G, T)$  tipindeki modellere (4.134)

deki 2. koşul takımı'nın uygulanamayacağı aşıkardır. Bir başka çatalanma da,  $f$  fonksiyonel formlarının: üstel, logaritmik, kuvvet kanunu gibi tipleri bakımından gerçekleştirilecektir.

- Model parametreleri üzerinden yapılacak olan muhtelif simülasyonlar, alan denklemlerinin *I.YORUM* 'unun yanısıra *II.YORUM* 'unu da konu edinecektir.  $T$  argümanı içermeyen modeller,  $(L_m = p^m, I.YORUM)$  ve  $(L_m = p^m, II.YORUM)$  olmak üzere 2 yorum altında incelenirken,  $T$  argümanı içeren modeller için ise, bunların yanısıra,  $(L_m = -\mu^m, I.YORUM)$  ve  $(L_m = -\mu^m, II.YORUM)$  da kullanılacaktır. Simülasyonlar için bir de şuna dikkat çekmek iyi olacaktır;  $T$  argümanı içeren  $f$  -modellerinde, model tipi veya parametreleri veyahut da kuplaj sabitleri üzerine getirilmiş, süreklilik denklemlerinden kaynaklı bir takım kısıtlamalar bulunmaktaydı (bkz. §4.5). Bunlar da, (4.132) ile (4.134) koşullarına ek olarak simülasyonlarda göz önüne alınacaktır.

- Diğer bir bilgilendirme olarak da; bazı  $f$  -gravite modellerinin kozmolojik güvenilirliklerinin sınanması sürecinde sıradan maddenin  $w$  hal parametresi ile  $k$  (ya da boyutsuz şekliyle  $\Omega_{k,0}$ ) uzaysal eğrilik indeksinin muhtelif bazı seçilmiş değerleri de göz önünde bulundurulacak ve bunlara göre bir bağlılığın olup olmadığına bakılacaktır. Bu amaçla;  $-1/3 \leq w \leq 1$  aralığına ve gözlemsel  $\Omega_{k,0} = -0.014 \pm 0.017$  değerlerine uygun olarak seçilecek  $w \in \{-1/4, 0, +1/4\}$  ve  $\Omega_{k,0} \in \{-0.031, 0, +0.003\}$  kümelerin  $w \times \Omega_{k,0}$  kartezyen çarpımına ait bazı  $(w, \Omega_{k,0})$  ikilileri, örneklendirme için kullanılacaktır (mesela,  $(0, +0.003) \in w \times \Omega_{k,0}$  gibi).

Bu bilgilendirmeler ışığında, sonuç olarak;  $f$  -gravite modellerinin güvenilirliklerinin sınanması şu iki koşul altında ele alınacaktır:

1. koşul takımı: (4.131) ve (4.133) deki koşullarının birlikte ele alınması:

$$NEC \geq 0, WEC \geq 0, SEC < 0, DEC \geq 0 \text{ ve } F_{r,0} > 0, F_{rr,0} > 0 \quad (4.140.a)$$

2. koşul takımı: 1. koşul takımı'na  $-1.2 \leq w_{KE,0} \leq -0.8$  kısıtlanmasının eklenmesi:

$$NEC \geq 0, WEC \geq 0, SEC < 0, DEC \geq 0, F_{r,0} > 0, F_{rr,0} > 0 \text{ ve } -1.2 \leq w_{KE,0} \leq -0.8 \quad (4.140.b)$$

Ayrıca, her bir koşul takımını sağlayan model parametreleri arasında, hangilerinin süper-ivmelenmeye yol açtığı, yani, efektif karanlık enerji hal parametresi için  $w_{KE,0} < -1$  verdiği de belirtilecektir. Bu da, her bir koşul takımını için sırasıyla:

$$NEC \geq 0, WEC \geq 0, SEC < 0, DEC \geq 0, F_{r,0} > 0, F_{rr,0} > 0 \text{ ve } w_{KE,0} < -1 \quad (4.141.a)$$

$$NEC \geq 0, WEC \geq 0, SEC < 0, DEC \geq 0, F_{r,0} > 0, F_{rr,0} > 0, -1.2 \leq w_{KE,0} \leq -0.8 \\ \text{ve } w_{KE,0} < -1 \quad (4.141.b)$$

bağıntılarıyla araştırılacaktır.

#### 4.10. MODELLER

Şimdi, yukarıdaki tartışmalar ışığında  $f(R)$ ,  $f(R, G)$  ve  $f(R, T)$  sınıf modelleri, farklı formülasyonlar üreterek inceleyeceğiz.

##### 4.10.1. $f(R)$ – Modelleri:

Yalnızca  $R$  (ve dolayısıyla  $r$ ) argümanını içeren bu modeller için (4.117), (4.118) ile (4.121), (4.122) denklemleri ve de bunlara dayanan (4.131) deki NEC, WEC, SEC, DEC koşulları, *I.* ve *II. YORUM* için aşağıdaki şekilde sadeleşirler:

► *I. YORUM* için:

$$\Omega_{m,0}^{i.ef} = \frac{1}{F_{r,0}} \left[ \Omega_{m,0} - \frac{1}{6} (F_0 - F_{r,0} \mathfrak{R}_0) - F_{rr,0} \mathfrak{R}_0^* \right] \quad (4.142)$$

$$\Omega_{P,0}^{i.ef} = \frac{1}{F_{r,0}} \left[ w \Omega_{m,0} + \frac{1}{6} (F_0 - F_{r,0} \mathfrak{R}_0) + \frac{1}{3} F_{rr,0} (2\mathfrak{R}_0^* + \mathfrak{R}_0^{**}) + \frac{1}{3} F_{rrr,0} \mathfrak{R}_0^{*2} \right] \quad (4.143)$$

$$\begin{aligned}
NEC &: \frac{1}{F_{r,0}} [(1+w)\Omega_{m,0} - \frac{1}{3}F_{rr,0}(\mathfrak{R}_0^* - \mathfrak{R}_0^{**}) + \frac{1}{3}F_{rrr,0}\mathfrak{R}_0^{*2}] \geq 0 \\
WEC &: \frac{1}{F_{r,0}} [\Omega_{m,0} - \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) - F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^*] \geq 0 \\
SEC &: \frac{1}{F_{r,0}} [(1+3w)\Omega_{m,0} + \frac{1}{3}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) + F_{rr,0}(\mathfrak{R}_0^* + \mathfrak{R}_0^{**}) + F_{rrr,0}\mathfrak{R}_0^{*2}] < 0 \\
DEC &: \frac{1}{F_{r,0}} [(1-w)\Omega_{m,0} - \frac{1}{3}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) - \frac{1}{3}F_{rr,0}(5\mathfrak{R}_0^* + \mathfrak{R}_0^{**}) - \frac{1}{3}F_{rrr,0}\mathfrak{R}_0^{*2}] \geq 0
\end{aligned} \tag{4.144}$$

► II. YORUM için:

$$\Omega_{m,0}^{i.ef} = \Omega_{m,0} + (1 - F_{r,0})(1 - \Omega_{k,0}) - \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) - F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* \tag{4.145}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{p,0}^{i.ef} &= w\Omega_{m,0} + \frac{1}{3}(1 - F_{r,0})(2q_0 - 1 + \Omega_{k,0}) + \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) + \frac{1}{3}F_{rr,0}(2\mathfrak{R}_0^* + \mathfrak{R}_0^{**}) \\
&\quad + \frac{1}{3}F_{rrr,0}\mathfrak{R}_0^{*2}
\end{aligned} \tag{4.146}$$

$$NEC: (1+w)\Omega_{m,0} + \frac{2}{3}(1 - F_{r,0})(q_0 + 1 - \Omega_{k,0}) - \frac{1}{3}F_{rr,0}(\mathfrak{R}_0^* - \mathfrak{R}_0^{**}) + \frac{1}{3}F_{rrr,0}\mathfrak{R}_0^{*2} \geq 0$$

$$WEC: \Omega_{m,0} + (1 - F_{r,0})(1 - \Omega_{k,0}) - \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) - F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* \geq 0$$

$$SEC: (1+3w)\Omega_{m,0} + 2q_0(1 - F_{r,0}) + \frac{1}{3}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) + F_{rr,0}(\mathfrak{R}_0^* + \mathfrak{R}_0^{**}) + F_{rrr,0}\mathfrak{R}_0^{*2} < 0$$

$$\begin{aligned}
DEC: (1-w)\Omega_{m,0} + (1 - F_{r,0})[-2q_0 + \frac{4}{3}(1 - \Omega_{k,0})] - \frac{1}{3}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) - \frac{1}{3}F_{rr,0}(5\mathfrak{R}_0^* + \mathfrak{R}_0^{**}) \\
- \frac{1}{3}F_{rrr,0}\mathfrak{R}_0^{*2} \geq 0
\end{aligned} \tag{4.147}$$

Burada,  $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_0^*, \mathfrak{R}_0^{**}, F_0, F_{r,0}, F_{rr,0}, F_{rrr,0}$  büyüklüklerinin (4.119) ve (4.120) bağıntıları uyarınca değerlendirileceğini hatırlatalım. Şimdi; önce,  $R$  nin değişken olarak yer aldığı fonksiyonların toplamı olan, yani,  $f(R) = \phi_1(R) + \phi_2(R) \rightarrow F(r) = \Phi_1(r) + \Phi_2(r)$  tipten  $f(R)$  (ya da  $F(r)$ ) modellerini ele alalım. Eğer, özel olarak,  $\phi_1(R) \equiv C_0 R \rightarrow \Phi_1(r) \equiv K_0 r$  alınır ve ayrıca da  $C_0 \equiv 1, K_0 \equiv 1$  seçilirse, bu taktirde  $f(R) = R + \phi(R) \rightarrow F(r) = r + \Phi(r)$  gravite modeli, GRT'ye düzeltme terimli bir model olur. Aşağıda, düzeltme terimi bir kuvvet kanunu şeklinde

olacak önce  $f(R) = R + C_1 R^\alpha \rightarrow F(r) = r + K_1 r^\alpha$  fonksiyonel formunu göz önüne alıyoruz. Bu genel form,  $K_1$  ve  $\alpha$  parametrelerinin özel değerlerine göre literatürdeki:  $f(R) = R + aR^2$  [36],  $f(R) = R + aR^{-1}$  [61, 119] ve  $f(R) \propto R^2$  [88, 54] özel modellerini de içermektedir. Aşağıda, bu boyutsuz parametrelerinin alacağı özel değerlere göre belirlenen modellerin kozmolojik güvenilirliklerini, muhtelif  $w$  ve  $\Omega_{k,0}$  parametre değerleri çerçevesinde, enerji koşullarının sağlanma durumları bakımından iki tür *YORUM* altında ve iki *koşul takımı* için, süper-ivme varlığını da dikkate alarak inceleyeceğiz.

**Model 1:**  $f(R) = R + C_1 R^\alpha \rightarrow F(r) = r + K_1 r^\alpha$

Bu fonksiyonel form,  $\alpha$  ve  $K_1$  olmak üzere belirlenmesi gereken iki serbest parametre içermektedir ve bunlar hakkında da peşinen herhangi bir kısıtlayıcı veri bulunmamaktadır. Biz, bunların tanım kümelerini söz konusu model için, keyfi olarak  $\alpha \in [-5, 5]$  ve  $K_1 \neq 0$  olmak üzere  $K_1 \in [-10, 10]$  aralıkları olarak alacağız. Öte yandan, yukarıdaki denklemler, (4.133) ile verilen gözlemsel kozmolojik parametrelerin dışında, boyutsuz uzaysal eğrilik parametresi  $\Omega_{k,0}$  ile hal parametresi  $w$  yu da içermektedir.  $\Omega_{k,0}$  ın gözlemsel olarak  $[-0.031, 0.003]$  aralığında;  $w$  nun da ilkesel olarak  $[-1/3, 1]$  aralığında alınacağı ve sonuçlara bunların da etkilerinin araştırılacağına amaçlandığı yukarıda belirtilmişti. Bu noktada şuna dikkat çekmek iyi olacaktır;  $\Omega_{k,0}$  büyüklüğünün *I. YORUM*'a ait (4.142-144) bağıntılarında açık bir şekilde yer almadığına bakarak, her ne kadar bunların sanki  $\Omega_{k,0}$  dan bağımsızmışlar gibi yanlış bir sanı oluşabilirse de, bu büyüklüğün (4.119) bağıntılarında içerildiği gözden uzak tutulmamalıdır. O halde, sonuçta:  $\alpha, K_1, \Omega_{k,0}$  ve  $w$  olmak üzere dört değişken söz konusu olmaktadır. Bu dört değişkenin aralıklarının (tanım kümelerinin) kartezyen çarpımlarını göz önüne alarak, döngüler aracılığıyla bu değişkenlere göre değişimleri, ilkesel olarak, her zaman hesaplamak mümkün olmakla birlikte, sonuçların grafiksel gösterimi için böyle bir durum bulunmamaktadır. Bu durumda yapılabilecek yegane iş, bu dört değişkenden en az ikisini (ya da üçünü) peşinen seçmek ve geri kalan değişken(ler)e göre, iki boyutta bölge (ya da eğri) gösterimleri gerçekleştirmektir. Aşağıda bu tür gösterimlere sıklıkla baş vuracağız.

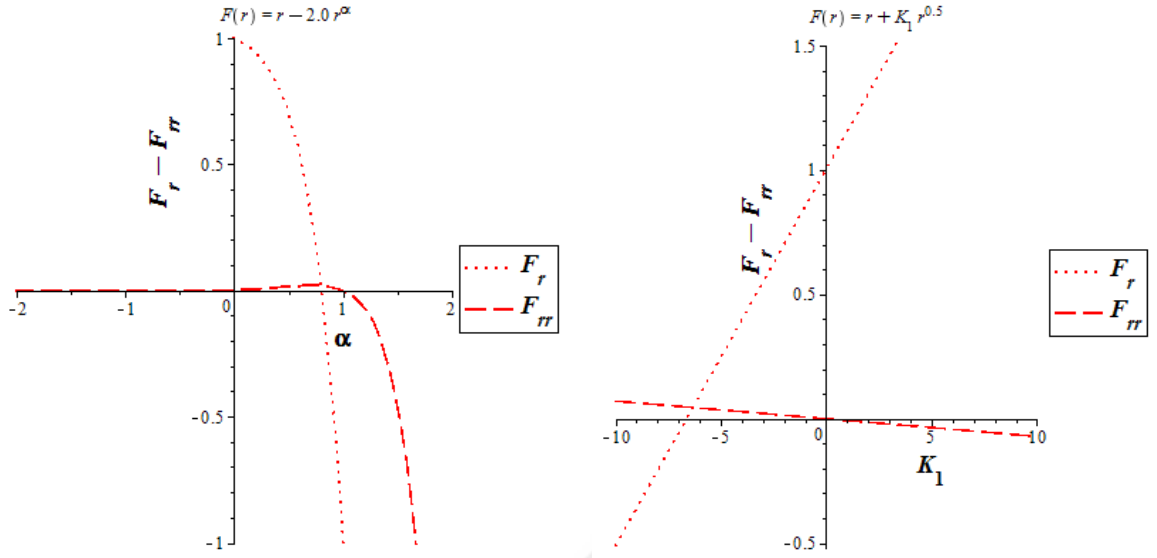
Şimdi, yukarıda söylenenler ışığında,  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  modelin kozmolojik güvenilirliğini, önce, peşinen seçilmiş  $(w, \Omega_{k,0}) = (0, 0)$  ikilisi için, yani, literatürde sıklıkla yapıldığı üzere, basınçsız toz bulutu ve de düz uzay durumu için ele alıyoruz. Parametrelere ilişkin taramalar  $K_1 \in [-10, 10]$  ve  $\alpha \in [-5, 5]$  aralıklarında,  $\Delta K_1 = 0.2$  ve  $\Delta \alpha = 0.01$  arttırmalarıyla gerçekleştirilecektir. Söz konusu  $K_1$  aralığında toplam 101 model ve  $\alpha$  aralığında da toplam 1001 model bulunmaktadır. Buna göre,  $[-10, 10] \times [-5, 5]$  Kartezyen çarpım kümesinde  $101 \times 1001$  sayıda sırasız  $(K_1, \alpha)$  ikilisi (model) bulunmaktadır. Bunlar arasından, sırf örnekleme amacıyla (rasgele): 1)  $K_1 = -2$ ,  $\alpha = \text{değişken}$  olmak üzere  $F(r) = r - 2r^\alpha$  modeli ile 2)  $\alpha = 0.5$ ,  $K_1 = \text{değişken}$  olmak üzere  $F(r) = r + K_1 r^{0.5}$  modelini seçiyoruz ve bunlar için  $F_{r,0}$  ile  $F_{rr,0}$  in, sırasıyla,  $\alpha$  ya ve  $K_1$  e göre değişimlerini Şekil 4.2 de gösteriyoruz. Bu gösterimlerin *YORUM*'lara bağlı olmadığına işaret edelim. Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 de ise, *NEC, WEC, SEC, DEC* 'in, sırasıyla:  $F(r) = r - 2r^\alpha$  modelinde  $\alpha$  ya göre;  $F(r) = r + K_1 r^{0.5}$  modelinde de  $K_1$  e göre değişimleri verilmiştir. Her iki *Şekil*'de: sol paneller *I. YORUM* için; sağ paneller ise *II. YORUM* içindir. Öte yandan, bir de, Şekil 4.5 de karanlık enerji hal parametresi  $w_{KE}$  nin  $\alpha$  ya göre değişimi gösterilmektedir. Bu büyüklüğün ifadesi (4.129) dan hareketle: *I. YORUM* çerçevesinde (4.142) ile (4.143) ve *II. YORUM* çerçevesinde de (4.145) ile (4.146) kullanılarak hesaplandığında:

$$I. \text{ YORUM için : } w_{KE} = -\frac{0.1786(\alpha - 3.6018)(\alpha - 1)(\alpha + 5.2493)}{(\alpha - 1.4193)(\alpha - 2.3797)}$$

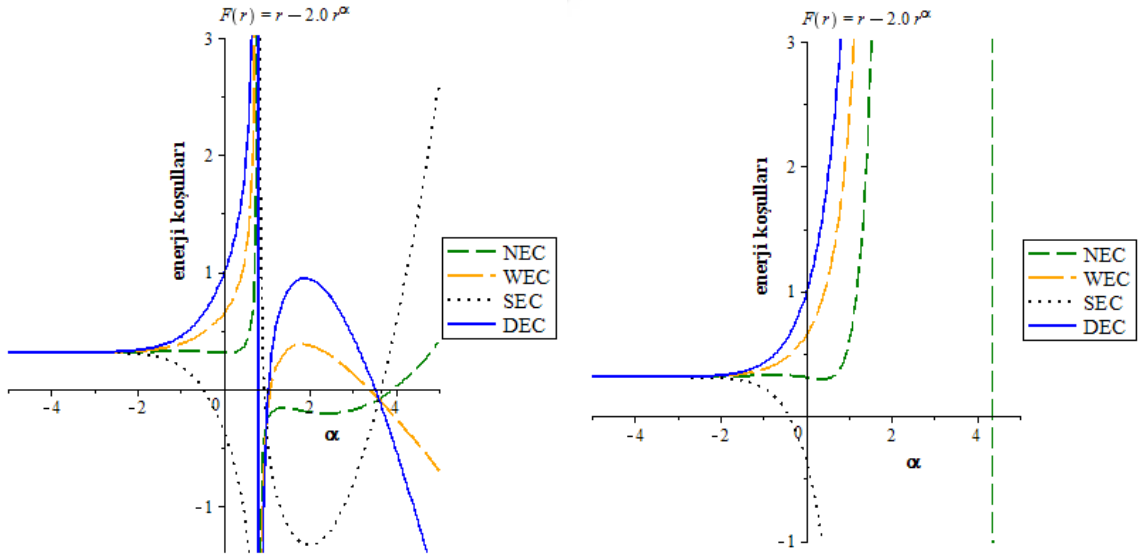
$$II. \text{ YORUM için : } w_{KE} = -\frac{0.0088(\alpha^2 - 3.6662\alpha + 4.3830)(\alpha + 4.3137)}{0.0493\alpha^2 - 0.1239\alpha + 0.1667}$$

bulunmaktadır. Buradan da,  $w_{KE}$  nin,  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  tip modelde  $K_1$  parametresine bağlı olmadığı anlaşılmaktadır.

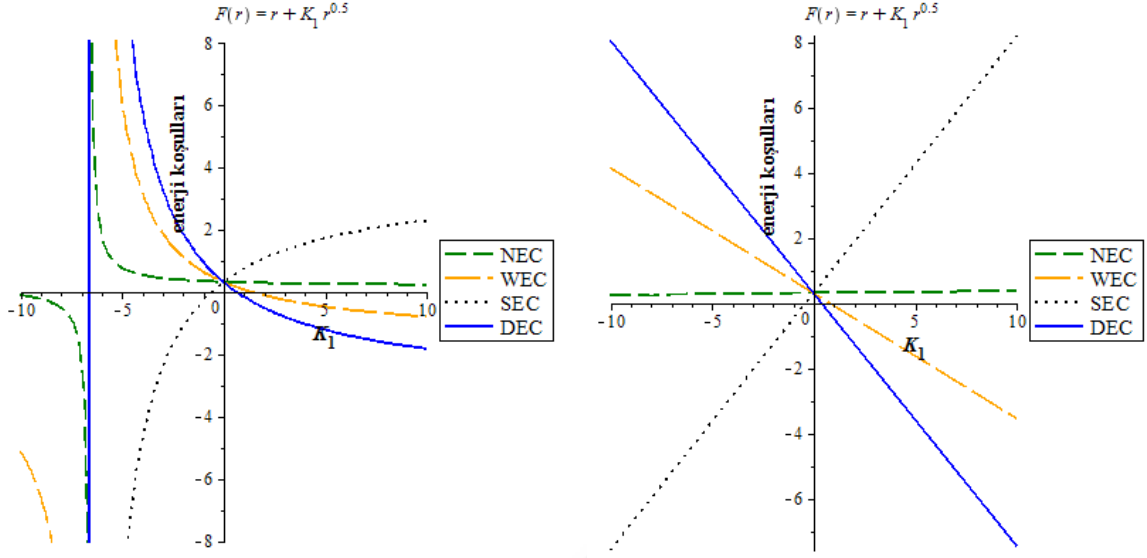




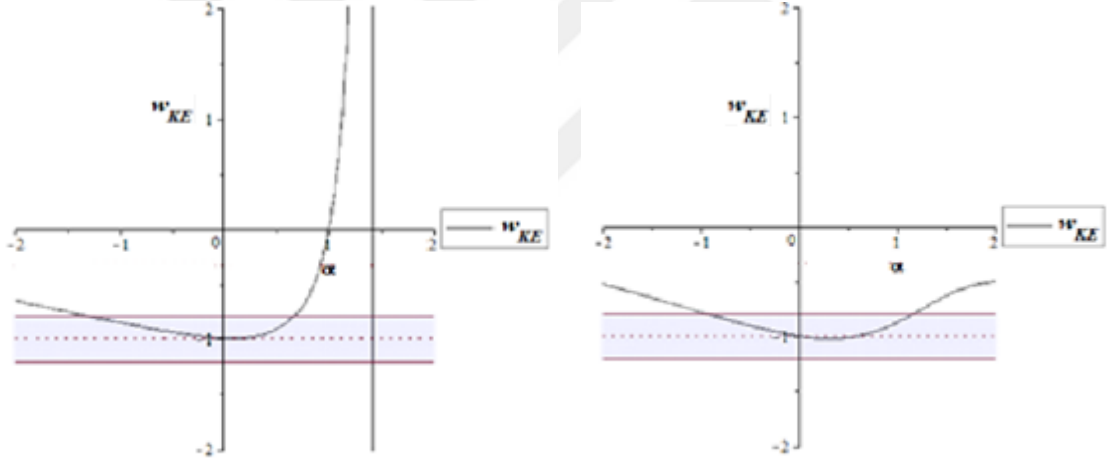
**Şekil 4.2:**  $F(r) = r - 2r^\alpha$  (sol panel) ve  $F(r) = r + K_1 r^{0.5}$  (sağ panel) modelleri için,  $F_r$  ile  $F_{rr}$  nin, sırasıyla,  $\alpha$  ya ve  $K_1$  e göre değişimleri.  $F_r > 0$  ve  $F_{rr} > 0$  eşitsizliklerini aynı anda sağlayan  $\alpha$  ya da  $K_1$  değerleri, tanım ve değer kümeleri daraltılmış olmasına rağmen, skala nedeniyle net olarak okunamamaktadır; nümerik analiz ile bunları:  $F(r) = r - 2r^\alpha$  için  $0 < \alpha < 0.802$  ve  $F(r) = r + K_1 r^{0.5}$  için de  $-6.591 < K_1 < 0$  olarak bulmaktayız.



**Şekil 4.3:**  $F(r) = r - 2r^\alpha$  modelinde NEC, WEC, SEC, DEC' in  $\alpha$  ya göre değişimleri. Sol panel *I. YORUM*; sağ panel ise *II. YORUM* içindir.



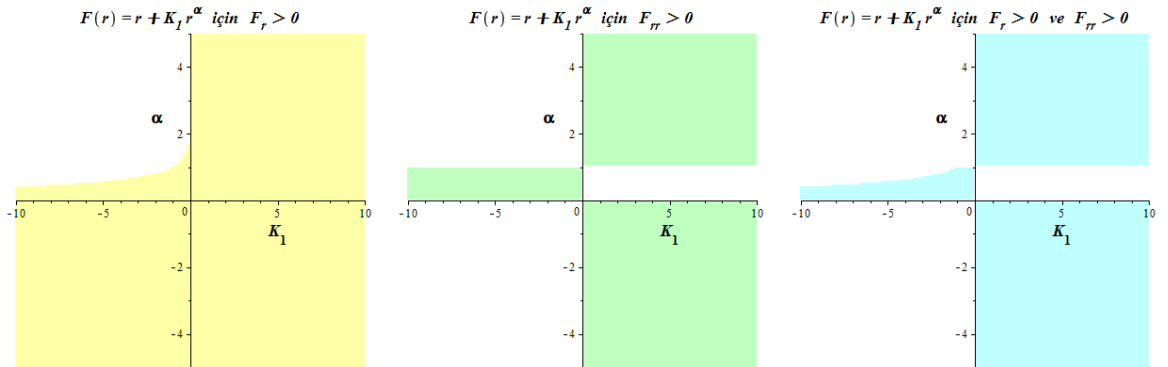
Şekil 4.4:  $F(r) = r + K_1 r^{0.5}$  modelinde NEC, WEC, SEC, DEC'in  $K_1$  e göre değişimleri. Sol panel *I. YORUM*; sağ panel ise *II. YORUM* içindir.



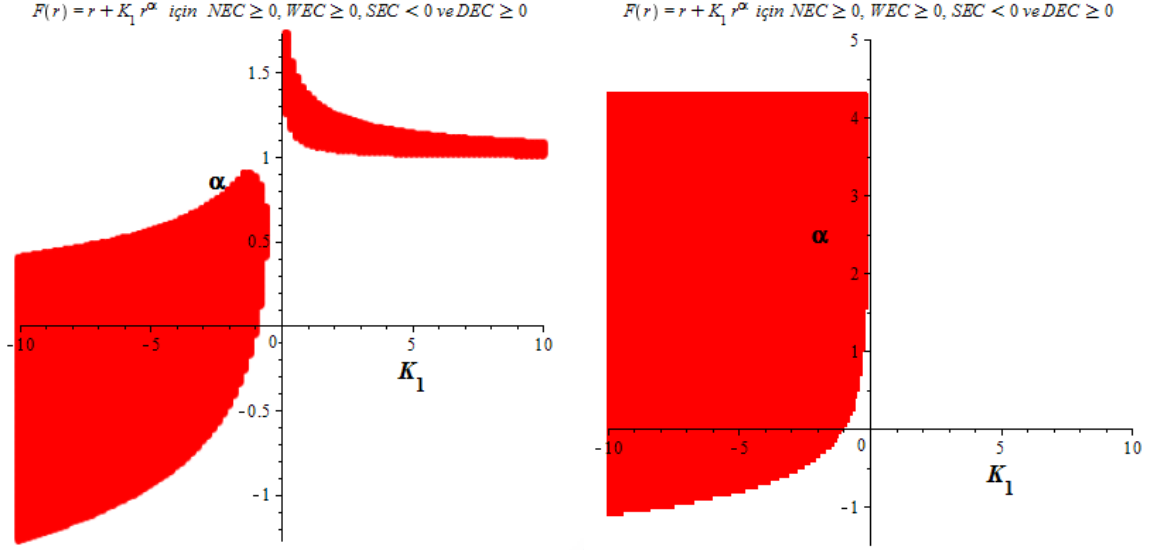
Şekil 4.5:  $w_{KE}$  nin *I. YORUM* (sol panel) ve *II. YORUM* (sağ panel) çerçevesinde  $\alpha$  ya göre değişimi. Taralı band  $-1.2 \leq w_{KE} \leq -0.8$  aralığını;  $w_{KE} = -1$  olan yatay noktali çizgi ise süper-ivmelenmenin üst sınırını göstermektedir.

Şimdi, yukarıdaki grafiklerin yorumlanmasını ele alalım. Şekil 4.2 nin sol panelindeki  $F(r) = r - 0.2r^\alpha$  modelinde, mesela  $\alpha = 0.5$  için  $F_{r,0}$  ve  $F_{rr,0} > 0$  olduğu görülmektedir.  $F(r) = r + K_1 r^{0.5}$  modelinin yer aldığı sağ panele bakıldığında ise,  $F_{r,0}$  ve  $F_{rr,0} > 0$  ın sağlandığı  $K_1$  değerleri arasında  $K_1 = -0.2$  değerinin de bulunduğu görülmektedir. Buradan,  $F(r) = r - 0.2r^{0.5}$  modeli için  $F_{r,0}$  ve  $F_{rr,0} > 0$  ın sağlandığı sonucunu çıkarmaktayız. Hem kuplaj sabiti ve hem de üs parametresi böylece belirlenmiş olan bu  $F(r)$  modeli için

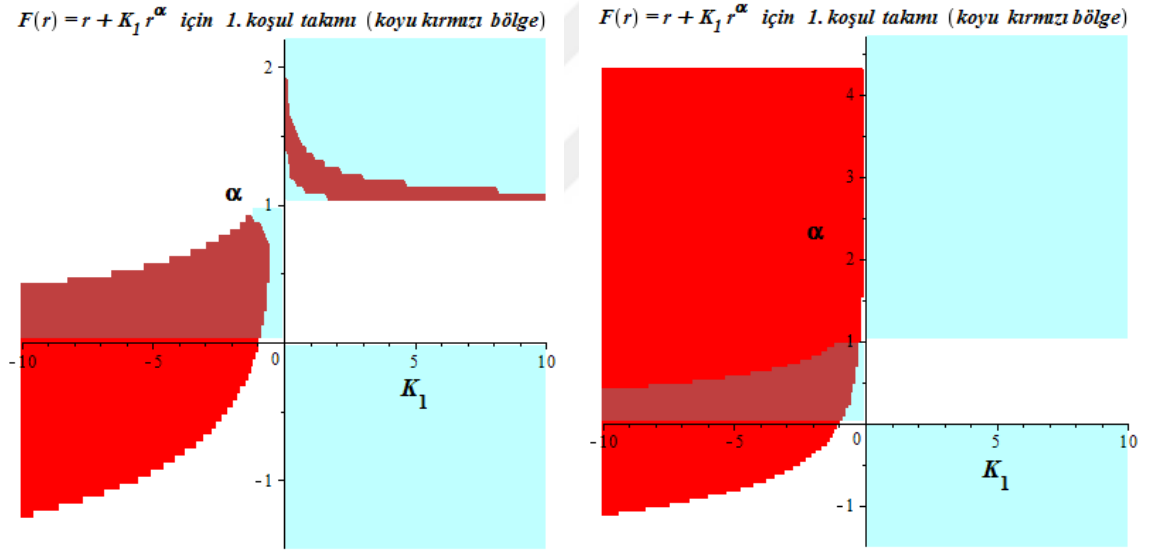
$NEC \geq 0, WEC \geq 0, SEC < 0, DEC \geq 0$  eşitsizliklerinin de sağlanıp sağlanmadıklarının sorgulanması için Şekil 4.3 veya Şekil 4.4 e bakmak yetecektir. *I. YORUM*'a ilişkin sol paneller ile *II. YORUM*'a ilişkin sağ panellerde bu eşitsizliklerin sağlandıkları kolayca görülmektedir. Bunun, yukarıdaki bir önceki sonuçla birleştirilmesinden şu sonuca varmaktayız:  $F(r) = r - 0.2r^{0.5}$  modeli için *1. koşul takımı*, hem *I.* ve hem de *II. YORUM* altında sağlanmaktadır; dolayısıyla söz konusu model *II. YORUM*'lara bağlı olmaksızın, *1. koşul takımı* ışığında kozmolojik olarak güvenilebilir. Şekil 4.5 e bakıldığında ise,  $\alpha = 0.5$  değerine karşılık gelen  $w_{KE}$  değerinin taralı band içine düştüğü ve *II. YORUM*'a ait sol panelde de  $w_{KE} < -1$  olduğu görülmektedir. O halde,  $F(r) = r - 0.2r^{0.5}$  için *2. koşul takımı* da hem *I.* ve hem de *II. YORUM* altında sağlanmaktadır ve söz konusu model, *I. YORUM*'a göre süper-ivmeli olmamasına karşın *II. YORUM*'a göre süper-ivmeli olmaktadır. Yukarıdaki yaklaşımın sonuç vermesinin nedeni,  $F(r)$  fonksiyonunun iki parametresinden birinin önceden seçilmiş olmasıydı. Muazzam sayıda  $(K_1, \alpha) \in [-10, +10] \times [-5, +5]$  model için bu yaklaşımın pratik bir değeri olmadığı aşikardır. Şimdi, buna alternatif olarak, söz konusu iki parametreyi ( $K_1$  ve  $\alpha$ ) serbest bırakıyor ve ilgili büyüklüklere ilişkin sonuçları  $K_1 - \alpha$  (ya da  $\alpha - K_1$ ) diyagramlarında renkli bölgeler ile gösteriyoruz. Önce, Şekil 4.6 da:  $F_{r,0} > 0$ ,  $F_{rr,0} > 0$  ve  $(F_{r,0} > 0$  ve  $F_{rr,0} > 0)$  koşullarının  $K_1 - \alpha$  düzlemini ne ölçüde kısıtladığını gösteriyoruz. Aynı şey ( $NEC \geq 0$  ve  $WEC \geq 0$  ve  $SEC < 0$  ve  $DEC \geq 0$ ) koşulu için Şekil 4.7 de gösterilmiştir. Şekil 4.8 de ise,  $(F_{r,0} > 0$  ve  $F_{rr,0} > 0)$  ile  $(NEC \geq 0$  ve  $WEC \geq 0$  ve  $SEC < 0$  ve  $DEC \geq 0)$  koşulunun birlikte ele alınması, yani, *1. koşul takımı*'nın sağlandığı bölgeler gösterilmiştir.



**Şekil 4.6:**  $K_1 - \alpha$  düzleminin:  $F_{r,0} > 0$  (sol panel);  $F_{rr,0} > 0$  (orta panel) ve  $(F_{r,0} > 0$  ve  $F_{rr,0} > 0)$  (sağ panel) koşullarıyla kısıtlandırılması (sağ paneldeki bölge diğer panellerdeki bölgelerin kesişimidir).



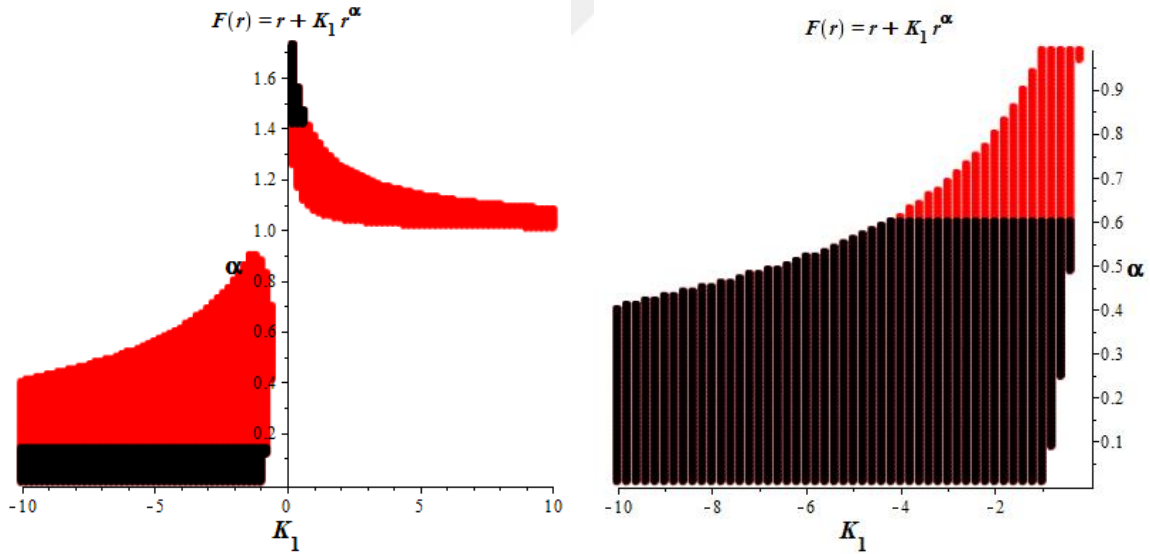
Şekil 4.7: ( $NEC \geq 0$  ve  $WEC \geq 0$  ve  $SEC < 0$  ve  $DEC \geq 0$ ) koşulunu sağlayan bölgeler. Sol panel *I. YORUM*; sağ panel ise *II. YORUM* içindir.

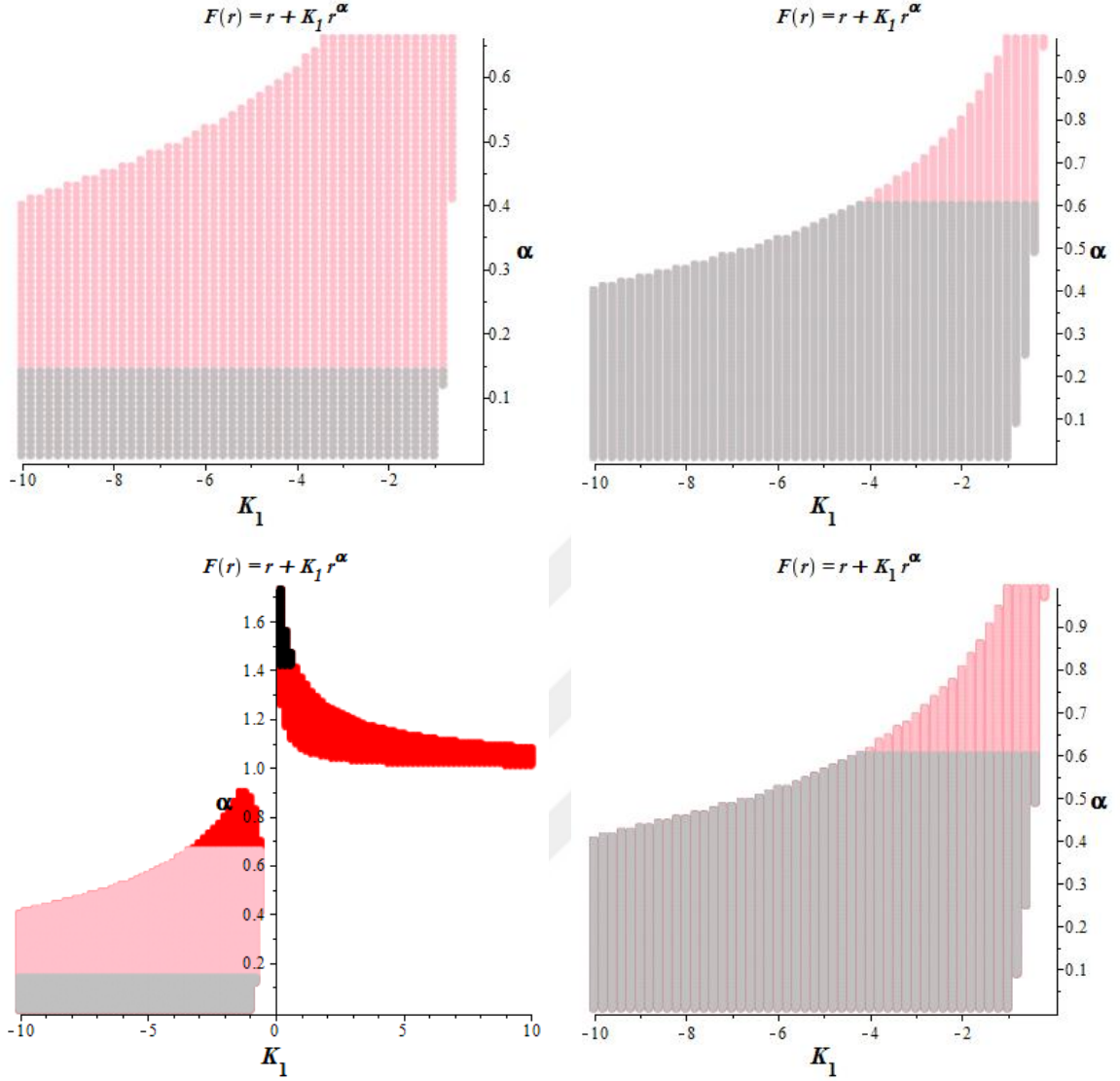


Şekil 4.8: ( $F_{r,0} > 0$  ve  $F_{rr,0} > 0$ ) ile ( $NEC \geq 0$  ve  $WEC \geq 0$  ve  $SEC < 0$  ve  $DEC \geq 0$ ) koşullarının birlikte ( $\equiv$  1. koşul takımı) sağlandığı bölgeler (koyu kırmızı ile gösterilmiştir). Bunlar, Şekil 4.6 daki mavi bölge ile Şekil 4.7 deki kırmızı bölgelerin kesişimidir. Sol panel *I. YORUM*; sağ panel ise *II. YORUM* içindir.

*I. koşul takımı* 'nı sağlayan  $(K_1, \alpha)$  ikililerinin oluşturduğu koyu kırmızı ile gösterilen bölgeyi, izole edilmiş olarak ve süper-ivmeli  $(K_1, \alpha)$  ikililerinin bölgesi de eklenerek Şekil 4.9 un üst panellerinde, yine sol paneller *I. YORUM* için ve sağ paneller de *II. YORUM* için olmak üzere, yeniden gösteriyoruz. Bu Şekil'in orta panellerinde, ayrıca, *2. koşul takımı* 'nı sağlayan  $(K_1, \alpha)$

ikililerinin bölgesiyle bunların süper-ivmeli olanlarınınki de göstermekteyiz. Son panellerde ise, 1. ve 2. koşul takım'larını birlikte sağlayan bölgelerin üstüste bindirilmiş gösterimleri yer almaktadır. Renkli bölgelerin anlamı, aksi söylenmedikçe bundan böyle, şöyle olacaktır: kırmızı ve pembe ile, sırasıyla, 1. ve 2. koşul takımını sağlayan; siyah ve gri ile de, yine sırasıyla, her bir koşul takımındaki süper-ivmeli modeller gösterilecektir. Üstüste bindirmelerde, Şekil'de olduğu gibi, pembe ve gri bölgeler aynı zamanda, sırasıyla, kırmızı ve siyah olarak da anlaşılacaktır; yani, pembe ve gri bölgeler altlarında, alt-katman şeklinde, kırmızı ve siyah bölgeleri de saklamaktadırlar. Gösterimler hakkında şunu da belirtmek iyi olacaktır; bazı durumlarda eksen skalası nedeniyle bölgeler çubuksu ya da noktamsı bir görünüm alabilmektedir. Bunu, mesela,  $\Delta K_1 = 0.01$  ve  $\Delta\alpha = 0.001$  gibi daha ince bir tarama ile görünüşte sürekli görümlü bir bölgeye dönüştürmek mümkünse de, bir yandan renklerin üstüste gelmesinde netlik sorunu ortaya çıktığından, diğer yandan da, bu tür çubuksu veya noktalı şekillerin, amacı yeterince yansıttığını düşündüğümüzden bu yolu tercih etmedik.





**Şekil 4.9:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  tipindeki modellerin,  $(w, \Omega_{k,0}) = (0,0)$  durumu için *I. ve II. YORUM* altında, *1. ve 2. koşul takımları* ile süper-ivmeye ilişkin analiz sonuçları. Sol ve sağ paneller, sırasıyla, *I. YORUM* ve *II. YORUM* için olup, üst panellerde, *1. koşul takımı*'ni sağlayan (“kırmızı+siyah”); orta panellerde de *2. koşul takımı*'ni sağlayan (“pembe+gri”)  $(K_1, \alpha)$  ikilileri gösterilmektedir. Her bir *koşul takımı* için süper-ivmeli ( $w_{KE} < -1$ ) modeller, sırasıyla, siyah ve gri renk ile belirtilmiştir. Alt panellerde ise, üst ve orta panellerin üstüste bindirilmiş gösterimi yer almaktadır ve bu durum için, metinde belirtildiği gibi, pembe ve gri bölgeler ile aynı zamanda üst panellerdeki kırmızı ve siyah bölgeler kastedilmektedir.

Yukarıda, gerek 4.140 daki koşul takımlarından doğrudan doğruya ve gerekse de bunların Şekil 4.9 daki gösterimlerinin karşılaştırılmasından kolayca anlaşılacağı üzere, 4.140.b koşul takımı, yani, 2. koşul takımı,  $F(r)$  model parametreleri üzerinde, beklentiye uygun olarak, her iki yorumda da daha kısıtlayıcı bir rol oynamaktadır. Eğer kozmolojik güvenilirlik için  $w_{KE}$  ye

ilişkin  $-1.2 \leq w_{KE} \leq -0.8$  gözlemsel verisi gerçekten de bir kısıtlama olarak kabul edilirse, bu takdirde 4.140.b koşul takımı ile belirlenen Şekil 4.9 daki pembe bölgeler göz önüne alınmalıdır. Yok eğer, bu veri bir kısıtlama olarak düşünülmezse, bu takdirde, söz konusu Şekil'deki "kırmızı+siyah" bölgeler kozmolojik geçerliliğe sahip modeller olarak kabul edilmelidir. (4.141) deki bağıntılar birer koşul takımı olmaktan ziyade sözü edilen 1. ve/veya 2. koşul takımları'nı sağlayan modeller arasında hangilerinin süper-ivmeli olduğunu belirten bir bilgilendirme mahiyeti taşımaktadır. Eğer süper-ivmeli modellerin dışarılanması istenirse bu takdirde kozmolojik güvenilirlik için, Şekil 4.9 daki yalnızca kırmızı ve pembe ile belirtilmiş bölgelerdeki modellerin kabul edilebilir olduğunu söylemek gerekecektir.

Şimdi, I. YORUM'u temel alarak Şekil 4.9 un sol panellerinin grafiksel okunmasından şu saptamalara değinelim: 1. koşul takımı'nı sağlayan  $\alpha$  değerler kümesinin  $\alpha \in ]0, 1[ \cup ]1, 1.73]$  olduğu ( $10^{-2}$  yaklaşıklığında) görülmektedir; başka bir deyişle 1. koşul takımı'nı sağlayan  $\alpha < 0$  değerleri bulunmamaktadır.  $K_1$  parametresini ise  $]-\infty, +\infty[$  aralığında yalnızca  $K_1 \neq 0$  değeri kısıtlamaktadır. 2. koşul takımı için ise,  $\alpha$  ve  $K_1$  değerler kümesi, sırasıyla,  $\alpha \in ]0, 0.66]$  dır ve  $K_1 \in ]-\infty, 0[$  dır. Yani, 2. koşul takımı'nı sağlayan  $K_1 \geq 0$  değerleri bulunmamaktadır. Böyle bir grafiksel okuma yukarıdaki gibi bir takım sonuçları kabaca vermekle birlikte, buradan, verilmiş bir  $K_1$  değeri için 1. ya da 2. koşul takımı'nı sağlayan ve ayrıca da süper-ivmeli olup olmadığı hakkında bilgi veren  $\alpha$  parametrelerinin değer aralıklarını okumak zor görünmektedir. Bu bakımdan, grafiklerin sayısal gösterimini Tablo 4.1 de vermekteyiz. Tabloda '% ' sembolü ile süper-ivmeli model sayılarının ait oldukları koşul takımındaki model sayılarına oranı da gösterilmektedir. Şekil 4.9 un sol panelleri dikkate alındığında, 1. koşul takımı'nı sağlayan toplam 3550 model arasında süper-ivmeli model sayısı 700 olup yüzdesi %19.7 dir. 2. koşul takımı için bu sayılar 2587, 647 ve %25.0 dır. Dolayısıyla, süper-ivmeli olsun olmasın 2. koşul takımı'nı sağlayan modellerin (2587 adet), 1. koşul takımı'nı sağlayanlara (3550 adet) oranı %72.9 dur. Dolayısıyla, 2. koşul takımı, model sayısında %27.1 oranında bir kısıtlamaya yol açmaktadır. Şimdi, bu sefer, II. YORUM'u temel alarak Şekil 4.9 un sağ panellerinin grafiksel okunmasından şu saptamalara değinelim: I. YORUM'dan farklı olarak, hem 1. ve hem de 2. koşul takımı aynı grafiksel gösterime sahip bulunmaktadır ve buradan  $\alpha$  değerler kümesinin  $\alpha \in ]0, 0.99]$  ve  $K_1$  in de daima  $K_1 < 0$  olduğu görülmektedir. Grafiklerin sayısal gösterimi Tablo 4.1 in son kısmında yer almaktadır. II. YORUM durumunda,

süper-ivmeli modellerin *I. YORUM*'a nispetle yüksek oranda oldukları hem grafiklerde ve hem de Tablo 4.1 de, açıkça görülmektedir. Nitekim, *I.* ve aynı zamanda *2. koşul takımı*'nı sağlayan toplam 2898 model arasında süper-ivmeli model sayısı 2520 olup, yüzdesi %87 dir.

**Tablo 4.1:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  tipindeki modellerin,  $(w, \Omega_{k,0}) = (0,0)$  durumu için *I.* ve *II. YORUM* altında: *I. koşul takımı* ile *2. koşul takımı*'nı ayrı ayrı sağlayan  $\alpha$  parametresinin değer aralıkları. Tabloya her bir durum için süper-ivmenin olduğu  $\alpha$  değer aralıkları da eklenmiştir. Tablo,  $-10 \leq K_1 \leq -1$  ve  $1 \leq K_1 \leq 10$  aralıklarında  $\Delta K_1 = 1$ ;  $-1 \leq K_1 \leq 1$  aralığında ise duyarlılığın artırılmasıyla  $\Delta K_1 = 0.2$  alınarak elde edilmiştir.

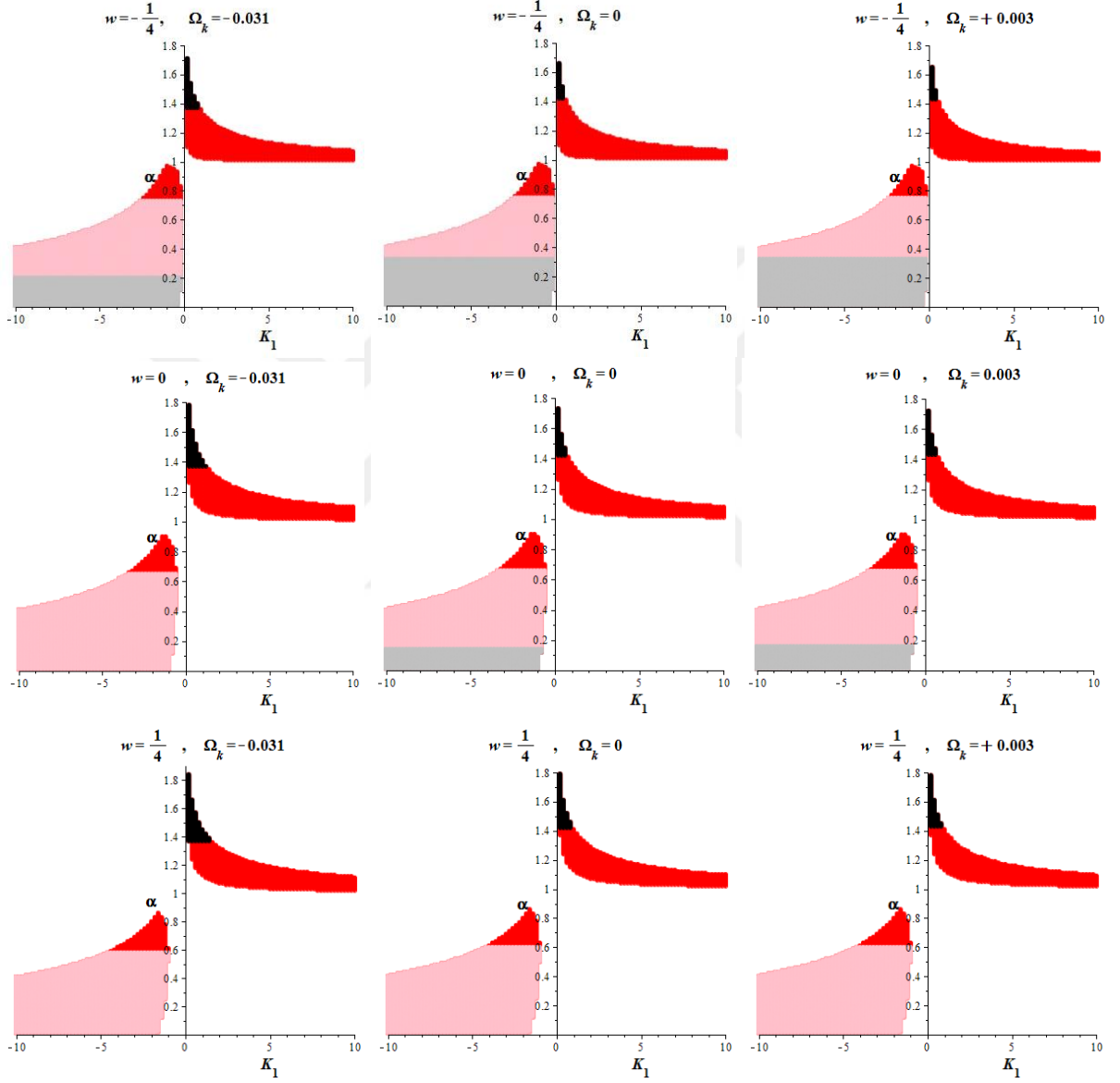
Model	<i>I. YORUM</i>			<i>II. YORUM</i>					
	<i>I. koşul takımı</i>	süper-ivme	%	<i>2. koşul takımı</i>	süper-ivme	%	<i>I. ve 2. koşul takımı</i>	süper-ivme	%
$F(r)=r-10r^\alpha$	[0.01, 0.40]	[0.01, 0.14]	35.0	[0.01, 0.40]	[0.01, 0.14]	35.0	[0.01, 0.40]	[0.01, 0.40]	100
$F(r)=r-9r^\alpha$	[0.01, 0.43]	[0.01, 0.14]	32.6	[0.01, 0.43]	[0.01, 0.14]	32.6	[0.01, 0.43]	[0.01, 0.43]	100
$F(r)=r-8r^\alpha$	[0.01, 0.45]	[0.01, 0.14]	31.1	[0.01, 0.45]	[0.01, 0.14]	31.1	[0.01, 0.45]	[0.01, 0.45]	100
$F(r)=r-7r^\alpha$	[0.01, 0.48]	[0.01, 0.14]	29.2	[0.01, 0.48]	[0.01, 0.14]	29.2	[0.01, 0.48]	[0.01, 0.48]	100
$F(r)=r-6r^\alpha$	[0.01, 0.52]	[0.01, 0.14]	26.9	[0.01, 0.52]	[0.01, 0.14]	26.9	[0.01, 0.52]	[0.01, 0.52]	100
$F(r)=r-5r^\alpha$	[0.01, 0.56]	[0.01, 0.14]	25.0	[0.01, 0.56]	[0.01, 0.14]	25.0	[0.01, 0.56]	[0.01, 0.56]	100
$F(r)=r-4r^\alpha$	[0.01, 0.61]	[0.01, 0.14]	23.0	[0.01, 0.61]	[0.01, 0.14]	23.0	[0.01, 0.61]	[0.01, 0.60]	98.4
$F(r)=r-3r^\alpha$	[0.01, 0.69]	[0.01, 0.14]	20.3	[0.01, 0.66]	[0.01, 0.14]	21.2	[0.01, 0.69]	[0.01, 0.60]	87.0
$F(r)=r-2r^\alpha$	[0.01, 0.80]	[0.01, 0.14]	17.5	[0.01, 0.66]	[0.01, 0.14]	21.2	[0.01, 0.80]	[0.01, 0.60]	75.0
$F(r)=r-r^\alpha$	[0.01, 0.88]	[0.01, 0.14]	15.9	[0.01, 0.66]	[0.01, 0.14]	21.2	[0.01, 0.99]	[0.01, 0.60]	60.6
$F(r)=r-0.8r^\alpha$	[0.12, 0.83]	[0.12, 0.14]	4.17	[0.12, 0.66]	[0.12, 0.14]	5.45	[0.09, 0.99]	[0.09, 0.60]	57.1
$F(r)=r-0.6r^\alpha$	[0.41, 0.70]	-	-	[0.41, 0.66]	-	-	[0.25, 0.99]	[0.25, 0.60]	48.0
$F(r)=r-0.4r^\alpha$	-	-	-	-	-	-	[0.49, 0.99]	[0.49, 0.60]	23.5
$F(r)=r-0.2r^\alpha$	-	-	-	-	-	-	[0.97, 0.99]	-	-
$F(r)=r$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$F(r)=r+0.2r^\alpha$	[1.26, 1.73]	[1.42, 1.73]	66.7	-	-	-	-	-	-
$F(r)=r+0.4r^\alpha$	[1.17, 1.56]	[1.42, 1.56]	37.5	-	-	-	-	-	-
$F(r)=r+0.6r^\alpha$	[1.12, 1.47]	[1.42, 1.47]	16.7	-	-	-	-	-	-
$F(r)=r+0.8r^\alpha$	[1.10, 1.41]	-	-	-	-	-	-	-	-
$F(r)=r+r^\alpha$	[1.08, 1.37]	-	-	-	-	-	-	-	-
$F(r)=r+2r^\alpha$	[1.05, 1.25]	-	-	-	-	-	-	-	-
$F(r)=r+3r^\alpha$	[1.03, 1.20]	-	-	-	-	-	-	-	-
$F(r)=r+4r^\alpha$	[1.03, 1.16]	-	-	-	-	-	-	-	-
$F(r)=r+5r^\alpha$	[1.02, 1.14]	-	-	-	-	-	-	-	-
$F(r)=r+6r^\alpha$	[1.02, 1.12]	-	-	-	-	-	-	-	-
$F(r)=r+7r^\alpha$	[1.02, 1.11]	-	-	-	-	-	-	-	-
$F(r)=r+8r^\alpha$	[1.02, 1.10]	-	-	-	-	-	-	-	-
$F(r)=r+9r^\alpha$	[1.01, 1.09]	-	-	-	-	-	-	-	-
$F(r)=r+10r^\alpha$	[1.01, 1.08]	-	-	-	-	-	-	-	-

### $\Omega_{k,0}$ ve $w$ parametrelerine bağlılık:

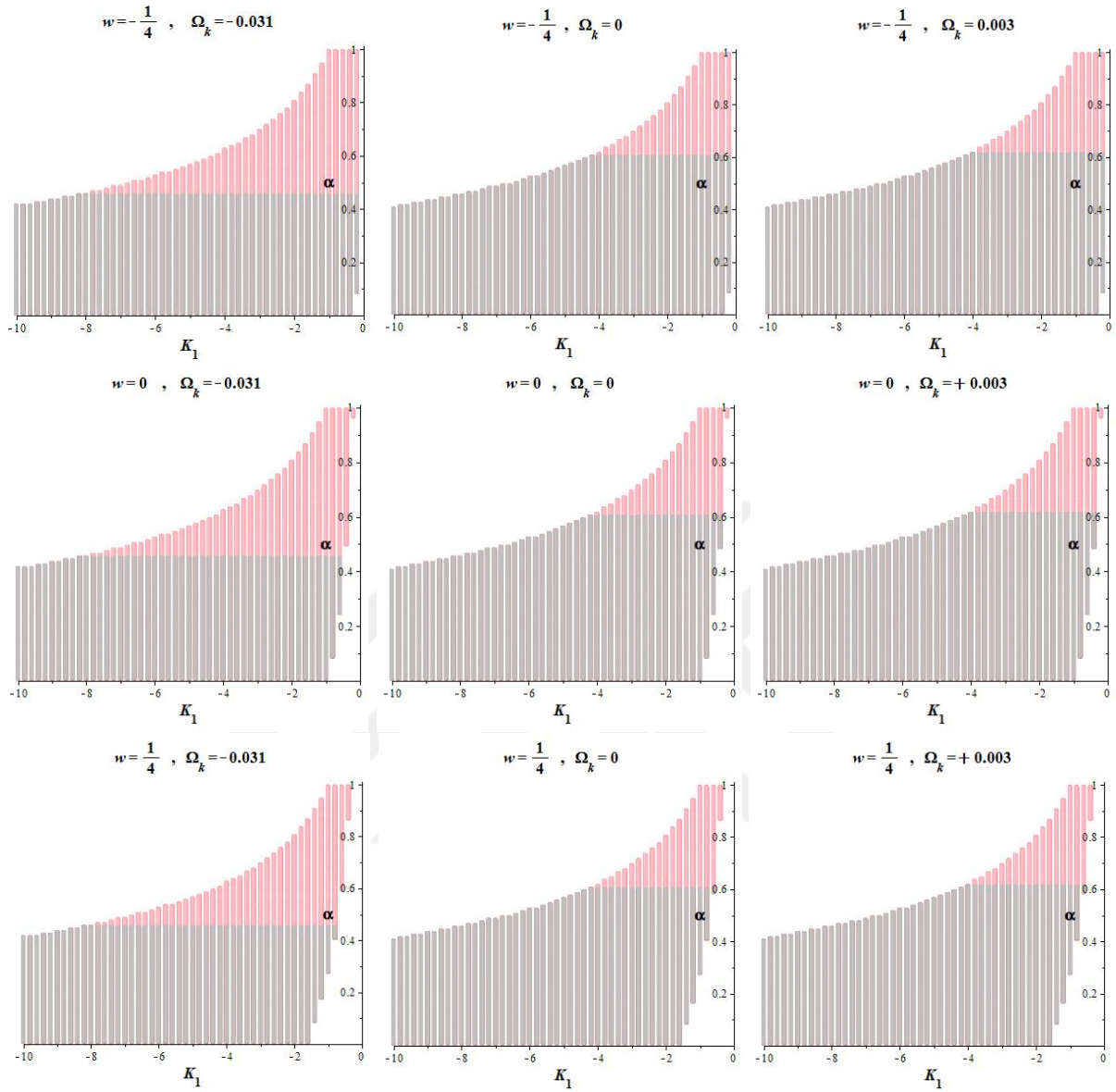
*I.* ve *2. koşul takımları*'nın sağlanmasının  $w$  ve  $\Omega_{k,0}$  parametrelerine bağlılığını görmek amacıyla, sonuçları toptan gösteren Şekil 4.9 un alt panellerindekilere benzer gösterimi, bazı seçilmiş  $(w, \Omega_{k,0})$  ikililerine göre: *I. YORUM* için Şekil 4.10 da; *II. YORUM* için de Şekil 4.11'de tekrarlıyoruz. Taramalar, öncekilerde olduğu gibi,  $(K_1, \alpha) \in [-10, +10] \times [-5, +5]$  ikilileri için  $\Delta K_1 = 0.2$  ve  $\Delta \alpha = 0.01$  tarama adımlarıyla olmak üzere, her bir  $(w, \Omega_{k,0})$  ikilisi



için toplamda  $101 \times 1001 = 101101$  sayıda  $(K_1, \alpha)$  model üzerinden yapılmıştır. Söz konusu şekillerdeki görsel karşılaştırmaya tamamlayıcılık amacıyla, 1. ve 2. koşul takımları'nı sağlayan modellerin ve de bunlardaki süper-ivmelilerin sayıları ile yüzdelerini Tablo 4.2 de gösteriyoruz.



**Şekil 4.10:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  tipindeki modellerde, özel  $(w, \Omega_{k,0})$  parametre değerlerine göre *I. YORUM* altında, 1. ve 2. koşul takımları'nın sağlanması. Renkli bölgelerin anlamı, Şekil 4.9 da kullanıldığı gibidir.



Şekil 4.11: Şekil 4.10 un *II. YORUM* için benzeri.

**Tablo 4.2:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  tipi modellerde özel  $(w, \Omega_{k,0})$  parametre değerlerine göre *I.* ve *II. YORUM* altında, *I.* ve de *2. koşul takımlarına* göre model sayıları ile bunlardaki süper-ivmeli olanların yüzdeleri.

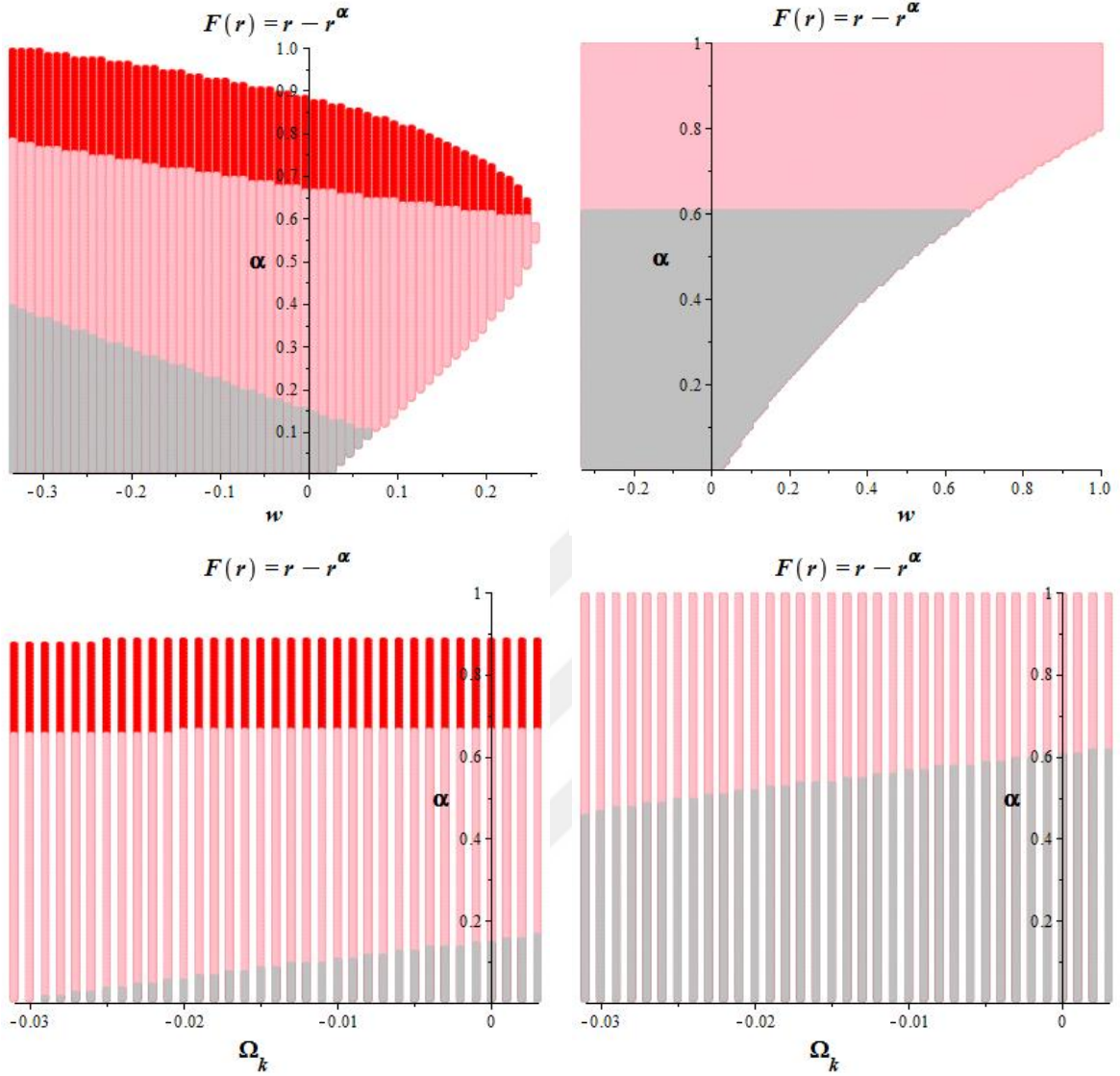
		$\Omega_{k,0} = -0,031$			$\Omega_{k,0} = 0$			$\Omega_{k,0} = +0,003$		
		model sayısı	süper-ivme	%	model sayısı	süper-ivme	%	model sayısı	süper-ivme	%
<i>I. YORUM,</i> <i>1. koşul</i> <i>takımı</i>	$w = -1/4$	3894	1055	27.1	3776	1623	43.0	3766	1669	44.3
	$w = 0$	3680	98	2.7	3550	700	19.7	3540	790	22.3
	$w = +1/4$	3495	131	3.7	3360	74	2.2	3343	67	2.0
<i>I. YORUM,</i> <i>2. koşul</i> <i>takımı</i>	$w = -1/4$	2863	989	34.5	2871	1589	55.3	2882	1639	56.9
	$w = 0$	2576	0	0	2587	647	25.0	2586	741	28.7
	$w = +1/4$	2301	0	0	2335	0	0	2334	0	0
<i>II. YORUM,</i> <i>1. ve 2. koşul</i> <i>takımı</i>	$w = -1/4$	3070	2218	72.2	3066	2652	86.5	3065	2671	87.1
	$w = 0$	2901	2104	72.5	2898	2520	87.0	2897	2538	87.6
	$w = +1/4$	2742	1999	72.9	2740	2391	87.3	2739	2408	87.9

Şimdi, yukarıdaki Şekil 4.10 ile 11 den ve Tablo 4.2 den yararlanarak  $w$  ve  $\Omega_{k,0}$  parametrelerine bağlılık konusundaki saptamalarımızı sıralayalım: *I. YORUM*' a ilişkin Şekil 4.10 daki grafiklerden,  $w: -1/4 \rightarrow 0 \rightarrow +1/4$  (yani, negatif basınç  $\rightarrow$  toz bulutu  $\rightarrow$  pozitif basınç) geçişlerinde (yukarıdan aşağıya) her *iki koşul takımı*'nın sağlandığı bölgeleri gösterir  $K_1 < 0$  olan tarafta,  $\Delta K_1 \approx -1.5$  ve  $\Delta \alpha \approx 0.1$  e varan azalışlar göze çarpmakta; yalnızca *1.koşul takımı*'nın sağlandığı  $K_1 > 0$  olan tarafta ise,  $K_1$  değerinde kaydadeğer bir değişikliğe rastlanmamaktadır. Ve bu durum,  $\Omega_{k,0}$  değerlerine (panellerde soldan sağa) bağlı olmaksızın gerçekleşmektedir; başka bir deyişle, 3-uzayın: kapalı ( $k = +1$ ), düz ( $k = 0$ ) ve açık ( $k = -1$ ) olup olmaması fark etmemektedir. Bu grafiksel durumu; model sayılarında %25 lere varan oranlarda düşümlere işaret eden Tablo 4.2 de *I. YORUM*'a ait “model sayısı” sütunlarındaki çıktılar da doğrulamaktadır. Süper-ivmeli model sayıları bakımından değişime bakıldığında,  $0.6 < \alpha < 1$  aralığında belirli bir  $\alpha$  değerine karşılık düşen  $\Delta K_1$  aralığı genişlediğinden *1. koşul takımı*'na uyan modeller içinde süper-ivmelilerin sayılarının arttığı grafiksel olarak (siyah renkli bölge) görülmektedir ve bu, yine,  $\Omega_{k,0}$  ya bağlı olmaksızın gerçekleşmektedir. Öte yandan, söz konusu  $w: -1/4 \rightarrow 0 \rightarrow +1/4$  geçişlerinde, *2. koşul takımı*'ndaki süper-ivmeli modelleri gösterir gri bölge daralarak sonuçta sıfırlanmaktadır. Bunun sayısal olarak Tablo 4.2 ye yansımaları ise, “*I. YORUM, 2. koşul takımı*” satırındaki “*süper-ivme*” sütunlarındaki çıktı sayılarındaki düşüş olmaktadır. “*I. YORUM, 1. koşul takımı*” durumunda ise;  $\Omega_{k,0} = 0$  ile  $\Omega_{k,0} = +0.003$  ye ait “*süper-ivme*” sütununda” süper-ivmeli model sayısında kayda değer bir azalmaya karşın,  $\Omega_{k,0} = -0.031$  e ait sütunda bu davranış  $1055 \square 98 \square 131$  şeklinde, yani, düşüş sonrası artış şeklinde olmaktadır. Bu istisnanın, olasılıkla, “ $w = 1/4$  ve  $\Omega_{k,0} = -0.031$ ” durumuna özgü olduğunu kabul etmek gerekmektedir.

Şimdi, *II. YORUM*'a ait Şekil 4.11 deki grafiklere bakalım. Süper-ivmeli olanlarla birlikte *I. ve 2. koşul takım*'larını sağlayan bölgelerin üstüste bindirilerek hepsinin birden tek bir *Şekil* üzerinde gösterilmek istenmesi nedeniyle, pembe ve gri bölgelerin aynı zamanda, alt-katman konumundaki kırmızı ve siyah bölgeler olarak da görülebileceğini hatırlattıktan sonra şu saptamaları sıralayalım: gerek grafiksel olarak görülebileceği ve gerekse de tabloda sayısal olarak doğrulanabileceği üzere  $w: -1/4 \rightarrow 0 \rightarrow +1/4$  geçişlerinde,  $\alpha$  parametresi değişmez

iken,  $K_1$  katsayısı negatif yönde  $\Delta K_1 \approx -1.5$  e varan bir azalma göstermekte; hem model ve hem de süper-ivmelilerin sayısı,  $\Omega_{k,0}$  ya bağlı olmaksızın düşmektedir. Öte yandan, verilmiş bir  $w$  için ise, hem model ve hem de süper-ivmelilerin sayısı  $\Omega_{k,0}$  ya bağlı olmaksızın neredeyse sabit kalmaktadır.

Yukarıdaki gözlemler,  $\Omega_{k,0}$  ve/veya  $w$  kozmolojik parametrelerine ilişkin peşinen belirlenmiş muhtelif seçimlerin;  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  modellerinin: sayı, süper-ivme, kuplaj sabiti, üs gibi özelliklerinin en azından bazılarının üzerinde, iki *koşul takımı* ile iki *YORUM*'a da bağlı olarak, artış, değer aralığı daralması... gibi birtakım etkilerinin olabildiği yönünde bir sonuca yöneltmektedir. Ancak, 4-boyutlu grafiksel gösterimin olanaksızlığı,  $\Omega_{k,0}$  ve/veya  $w$  parametrelerinin söz konusu  $K_1$ ,  $\alpha$  ve diğerleriyle ilişkilerini (korelasyonlarını) belirgin bir biçimde ortaya koymayı önlemektedir. Aşağıda, bu eksikliği kapatmayan ve aynı zamanda genel bir örnek de olmayan, fakat yine de bu konuya bir katkı sağlayabilecek mahiyette, Şekil 4.10 ile 11 den farklı üç gösterim daha sunuyoruz. Söz konusu *Şekil*'lerde  $w$  ile  $\Omega_{k,0}$ ; ikisi birden peşinen seçilmiş ve *I. ve 2. koşul takımı* ile *I. ve II. YORUM*'a göre kozmolojik güvenilirlikler  $K_1 - \alpha$  düzleminde gösterilmiş idi. Şimdi ise,  $w$  ile  $\Omega_{k,0}$  parametreleri için, önce  $\Omega_{k,0} = 0$ ,  $w = \text{serbest}$  ve sonra da  $w = 0$ ,  $\Omega_{k,0} = \text{serbest}$  alıp ve  $F(r) - \text{gravite}$  modelini de,  $\alpha$  yı serbest parametre olarak bırakıp peşinen  $F(r) = r - r^\alpha$  şeklinde seçiyor ve sonuçları, sırasıyla, Şekil 4.12 de  $w - \alpha$  düzleminde (orta paneller) ve de  $\Omega_{k,0} - \alpha$  düzleminde (alt paneller) gösteriyoruz (aynı amaç için,  $w - K_1$  ve  $\Omega_{k,0} - K_1$  düzlemleri de oluşturulabilirdi). Ayrıca, Şekil 4.13 de, bu sefer, sırasıyla, peşinen tamamen  $F(r) = r - r^{0.2}$  ve  $F(r) = r - 0.5r^{0.2}$  şeklinde seçtiğimiz modeller için  $w - \Omega_{k,0}$  düzlemini oluşturuyoruz. Şekillerin sol panelleri, yine, *I. YORUM* için; sağ panelleri de *II. YORUM* içindir. Yine; pembe rengin alt katmanında kırmızı; gri rengin de alt katmanında siyah bulunduğu unutulmamalıdır. Daha açık söylersek; “pembe + gri” bölgeler, gri kısım süper-ivmeliler olmak üzere *2. koşul takımı*'ni sağlayan modellere ait olup bunlar, alt katmanı oluşturan ve *1. koşul takımı*'ni sağlayan modellere ait “kırmızı + siyah” bölgeyi kısmen ya da tamamen örtmektedir (bkz. Şekil 4.9).



**Şekil 4.12:** Önce:  $\Omega_{k,0} = 0, w = serbest$  ve sonra da:  $w = 0, \Omega_{k,0} = serbest$  alındığı ve de  $K_1$  kuplaj sabitinin peşinen  $K_1 = -1$  olarak seçilmiş olduğu  $F(r) = r - r^\alpha$  modelinde, *I. YORUM* (sol panel) ile *II. YORUM*'a (sağ panel) göre, *1. ve 2. koşul takım*'larını sağlayan modellerin  $w - \alpha$  düzleminde (üst paneller) ve  $\Omega_{k,0} - \alpha$  düzleminde (alt paneller) gösterimleri. Renklerin anlamı metinde anlatıldığı gibidir.

Şimdi,  $\Omega_{k,0} = 0, w = serbest$  durumunu (Şekil 4.10 daki üst paneller) ele alalım ve incelemelerimizi, önce, *I. YORUM*'a ait sol panel üzerinden yürütelim.  $w = 0$  düşey eksenin, Şekil 4.9 daki  $K_1 - \alpha$  düzlemi gösterimine ait alt panellerdeki  $K_1 = -1$  düşey doğrusuna karşılık düştüğü ve her iki düşey doğru üzerinde renk değişimlerinin  $\alpha$  değerleriyle uyumlu olduğu kolayca görülmektedir. Yine kolayca görüleceği üzere,  $w = sabit \neq 0$  düşey

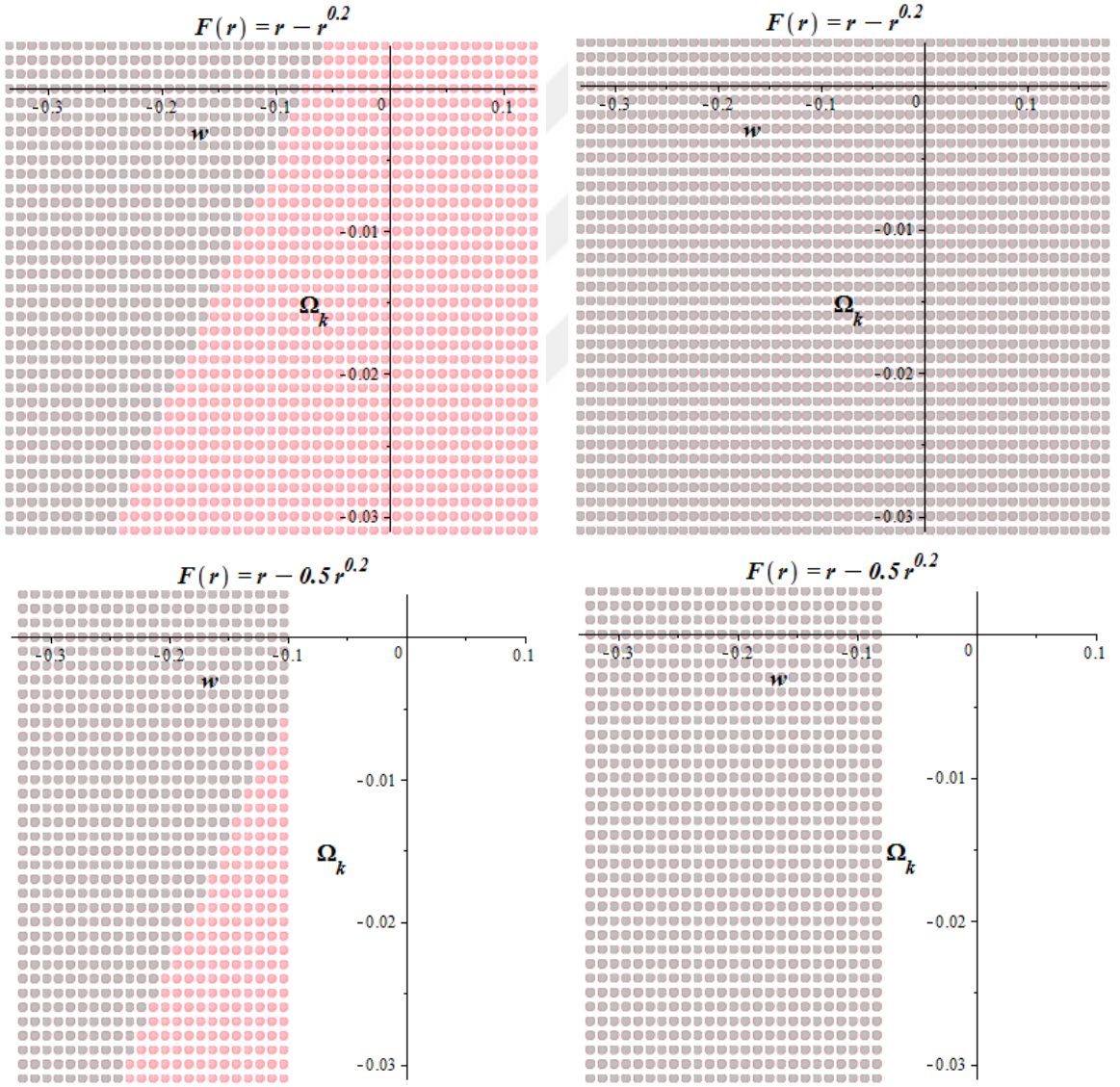
doğrultuların renkli bölgeleri kestiği noktaların  $\alpha$  ordinatları ve dolayısıyla da  $\Delta\alpha$  aralıkları değişmektedir. Buna göre;  $w: 0 \rightarrow -1/3$  yönünde değiştiğinde: 1) gri (aynı zamanda siyah ve kırmızı) bölgenin  $\Delta\alpha$  kalınlığı artmakta ( $\Leftrightarrow$  1. ya da 2. koşul takımı'na uyan süper-ivmeli model sayısında artma); 2) pembe (aynı zamanda kırmızı) bölgenin  $\Delta\alpha$  kalınlığı daralmakta ( $\Leftrightarrow$  2. koşul takımı'na uyan süper-ivmesiz model sayısında azalma); 3) pembe ile gri bölgeler birlikte değerlendirildiğinde, birleşimleri artmakta ( $\Leftrightarrow$  2. koşul takımı'na uyan toplam (süper-ivmeli+süper-ivmesiz) model sayısında artma); 4) kırmızı bölgenin  $\Delta\alpha$  kalınlığı hemen hemen sabit kalmakla birlikte  $\alpha_{maks} \rightarrow 1$  e yönelmektedir (1. koşul takımı'na uyan süper-ivmesiz model sayısı değişmemekte, fakat, toplam (süper-ivmeli+süper-ivmesiz) artmakta). Şimdi,  $w: 0 \rightarrow +1$  yönünde değişime bakalım; bu durumda: model sayısında artma,  $\Delta\alpha$  aralığında daralma... gibi nitelemeler yerini: azalma, genişleme,... gibi karşıtlarına bırakmaktadır. Mesela,  $w=0.1$  için hiçbir süper-ivmeli model bulunmaz iken,  $w=0.252$  için süper-ivmesiz model bile yoktur. Sonuç olarak:  $F(r)=r-r^\alpha$  fonksiyonelinin;  $\Omega_{k,0}=0$  varsayımı altında, I. YORUM çerçevesinde, 1. ve 2. koşul takımı'na göre kozmolojik güvenilirliği için,  $(w,\alpha)$  ikililerinin,  $[-1/3 < w < 0.252] \times [0 < \alpha < 1]$  dikdörtgensel bölgenin içindeki renkli bölgeye ait olmaları gerekmektedir; negatif basınç ( $w < 0$ ) model sayısını arttırıcı ( $w=0$  a göre), pozitif basınç ( $w > 0$ ) ise, azaltıcı yönde etkide bulunmaktadır. Şimdi sağ üst paneldeki II. YORUM'u ele alalım.  $w: 0 \rightarrow -1/3$  yönünde 1. ve 2. koşul takımı'nı sağlayan modellerin ne  $\alpha$ , ne  $\Delta\alpha$  değerlerinde ve ne de sayılarında hiç bir değişiklik olmamaktadır. Buna karşılık,  $w: 0 \rightarrow +1$  yönündeki değişimde 1. ve 2. koşul takımı'nın süper-ivmeli modelleri azalarak sonuçta  $w=0.64$  için sıfırlanmakta; süper-ivmesiz modellerin sayısı da azalarak  $w=1$  değerinde minimum olmaktadır. Sonuç olarak:  $F(r)=r-r^\alpha$  fonksiyonelinin;  $\Omega_{k,0}=0$  varsayımı altında, II. YORUM çerçevesinde, 1. ve 2. koşul takımı'na göre kozmolojik güvenilirliği için,  $(w,\alpha)$  ikililerinin,  $[-1/3 < w < 1] \times [0 < \alpha < 1]$  dikdörtgensel bölgenin içindeki renkli bölgeye ait olmaları gerekmektedir; negatif basınç ( $w < 0$ ) model sayısını değiştirmezken ( $w=0$  a göre), pozitif basınç ( $w > 0$ ), azaltıcı yönde etkide bulunmaktadır.

Şimdi,  $w=0$  alındığında, Şekil 4.12 nin alt panellerindeki  $\alpha - \Omega_{k,0}$  gösterimini inceleyelim.

$\Omega_{k,0}=0$  düşey ekseninin, yine  $K_1 - \alpha$  düzlemi gösterimindeki  $K_1 = -1$  düşey doğrusuna

karşılık düştüğünü söyledikten sonra,  $\Omega_{k,0}:0 \rightarrow -0.031$  ile  $\Omega_{k,0}:0 \rightarrow +0.003$  geçişlerini gözlemleyelim. Hemen görüleceği üzere, iki *YORUM* için de, 1. ve 2. koşul takım'larına uyan model sayısında hiçbir değişiklik olmamakta; buna karşılık süper-ivmeli sayısı,  $\Omega_{k,0}:0 \rightarrow -0.031$  geçişinde 'hafifçe' azalırken,  $\Omega_{k,0}:0 \rightarrow +0.003$  için 'hafifçe' artmaktadır.

Şimdi, son olarak, peşinen parametreleri belirlenmiş  $F(r)=r-r^{0.2}$  ve  $F(r)=r-0.5r^{0.2}$  gibi iki özel örnekten yola çıkarak  $w$  ile  $\Omega_{k,0}$  nın birlikte etkisini gösteren Şekil 4.13 e bakalım.



**Şekil 4.13:** Hem kuplaj sabiti  $K_1$  in ve hem de üs parametresi  $\alpha$  nın peşinen seçilmiş olduğu  $F(r)=r-r^{0.2}$  (üst panel) ve  $F(r)=r-0.5r^{0.2}$  (alt panel) gibi iki özel  $F(r)$  modelinde, 1. *YORUM* (sol

panel) ile *II. YORUM*'a (sağ panel) göre, *1. ve 2. koşul takım*'larına uyan modellerin  $w - \Omega_{k,0}$  düzleminde gösterimleri. Renklerin anlamı metinde anlatıldığı gibidir.

$F(r) = r - r^{0.2}$  modelinde her  $(w, \Omega_{k,0})$  ikilisi, *1. ve 2. koşul takım*'larına uyma bakımından güvenilebilir olmalarına karşın,  $F(r) = r - 0.5r^{0.2}$  modelinde güvenilirlik ancak  $(w_{maks}, \Omega_{k,0})$  ikilileri için söz konusu olmaktadır;  $w_{maks}$ , *II. YORUM*'da  $\Omega_{k,0}$  a bağlı olmaksızın daima  $w_{maks} = 0.17$  olurken, *I. YORUM*'da,  $\Omega_{k,0}$  a bağlı olarak:  $\Omega_{k,0} : 0 \rightarrow -0.031$  yönünde azalmakta;  $\Omega_{k,0} : 0 \rightarrow +0.003$  ise artmaktadır. Bu gözlemin, önceki paragraftakiyle birleştirilmesi şunu telkin etmektedir: verilmiş bir  $w$  için,  $\Omega_{k,0}$  nın negatif değerlere (3-uzayın kapalı olması) kayması, *I. YORUM*'da süper-ivmeli modellerin sayısında artmaya yol açmaktadır.

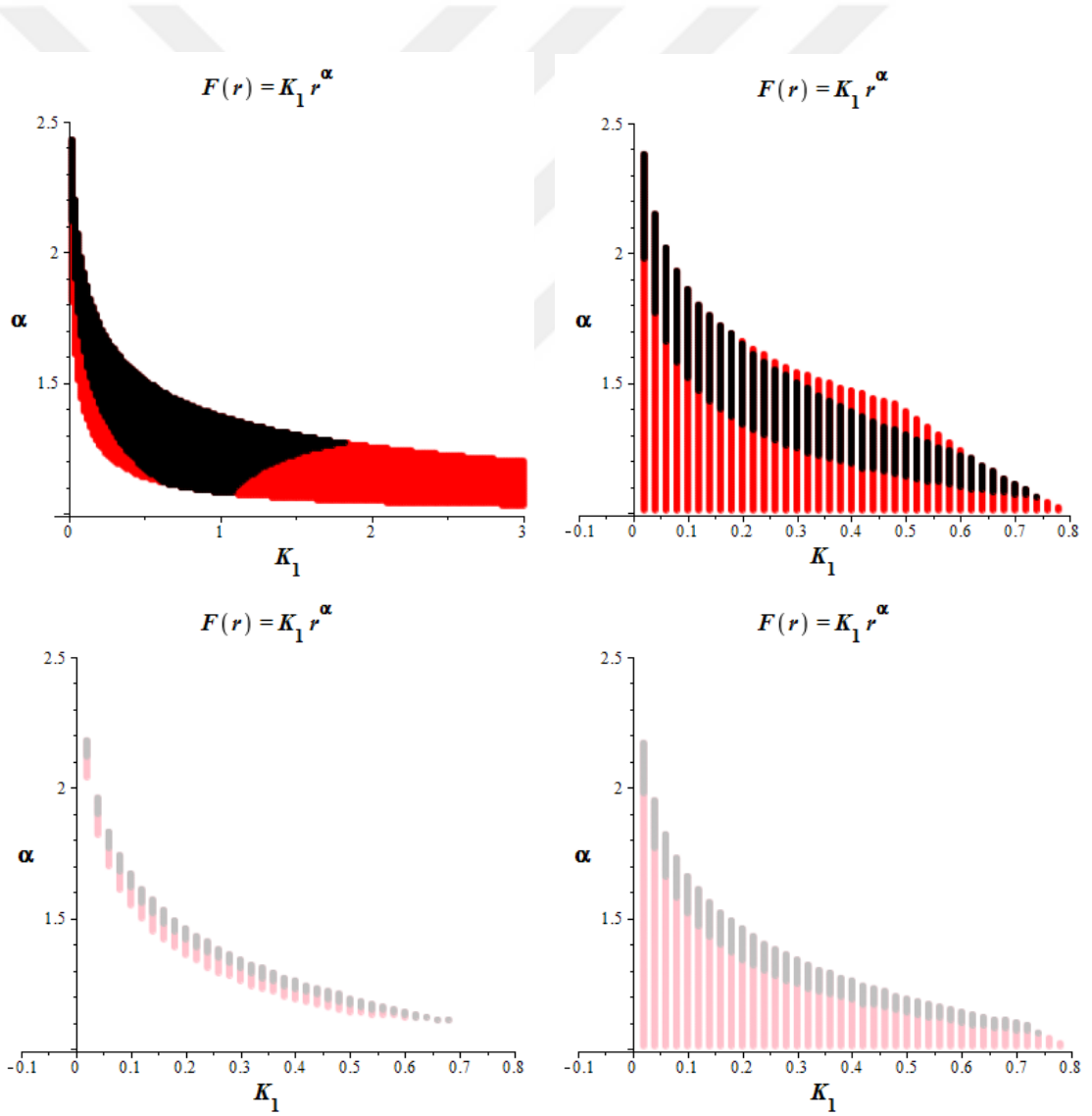
Ele aldığımız söz konusu  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  modeli için incelemelerimizi bitirirken son olarak şu saptamalarımızı vurgulayalım: Modelin enerji koşulları bakımından güvenilirliği, üs parametresi  $\alpha$  ile kuplaj sabiti  $K_1$  in değerlerine 'son derece' duyarlı bir şekilde bağlı olmaktadır; süper-ivmesiz ve ivmeli model sayısı da bundan etkilenmektedir. Aynı duyarlılık,  $w$  ve  $\Omega_{k,0}$  parametrelerinin değerleri için de söz konusudur.

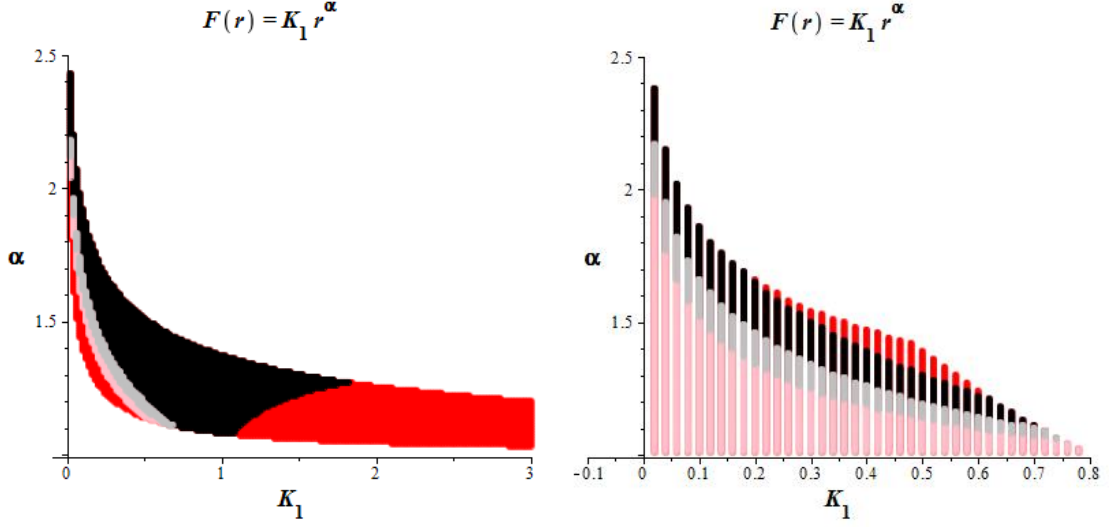
Yukarıdaki incelemeler ışığında, bundan böyle çoğu kere; aşağıda seçeceğimiz  $F(r)$  ve/veya  $F(r, g) - gravite$  modellerinde,  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  modeli için gerçekleştirdiğimiz incelemelerin tümünü değil de, uzunluk kaygısıyla ancak bazılarını sunacağız. Buna göre, aksi belirtilmedikçe tüm simülasyonlar  $w=0$  ve  $\Omega_{k,0}=0$  alınarak yapılacak; parametre aralığı ile model sayısı belirtir tablolar vermekten imtina ederek, yalnızca, tüm bilgileri renkli bölgeler halinde içeren Şekil 4.9 un alt panellerindeki gibi gösterimler sunulacaktır. Netlik sorunu yaşanması durumlarında ise *1. ve 2. koşul takımı* ayrı ayrı resmedilecektir.

**Model 2:**  $f(R) = C_1 R^\alpha \rightarrow F(r) = K_1 r^\alpha$



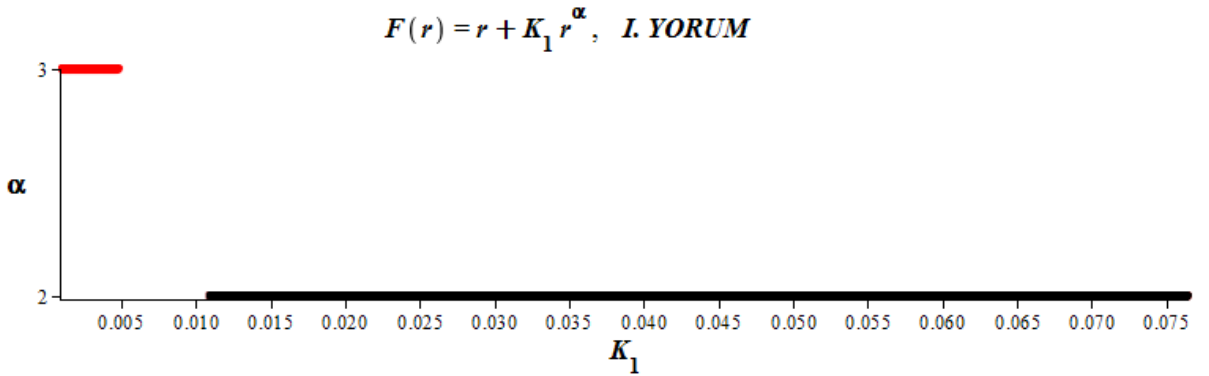
EH-terimini içermeyen, yani GRT'ye düzeltme terimli tipten olmayan bu model için “yalın  $F(r)$ –gravite” yakıştırmasını kullanacağız. Model 1 için yapılanların benzerlerini artık tekrarlamayıp yalnızca kayda değer sonuçları vermekle yetineceğiz. Şekil 4.14 de, yine  $(w, \Omega_{k,0}) = (0,0)$  için *I. ve 2. koşul takım*'larına göre sonuçları (sırasıyla üst ve orta paneller) *I. YORUM* ve *II. YORUM*'a göre (sırasıyla sol ve sağ paneller) gösteriyoruz. Üst ile orta panellerin üstüste bindirilmesi suretiyle oluşturulan alt panellerden açıkça görüleceği üzere, her iki *YORUM*'da da *1. ve 2. koşul takımı*, ancak  $\alpha > 1$  ve  $K_1 > 0$  değerleri için sağlanmaktadır. *I. YORUM*'da  $0 < K_1 < \infty$  iken *II. YORUM*'da  $0 < K_1 < 0.8$  olmaktadır.  $\alpha$  aralığı ise birazdan belirtilecektir.





**Şekil 4.14:**  $(w, \Omega_{k,0}) = (0,0)$  için  $F(r) = K_1 r^\alpha$  tipindeki modellerin Şekil 4.9 dakine benzer analizi. Sol ve sağ paneller, sırasıyla, *I.* ve *II. YORUM* içindir (tarama için  $\Delta K_1 = 0.02$  ve  $\Delta \alpha = 0.01$  alınmıştır).

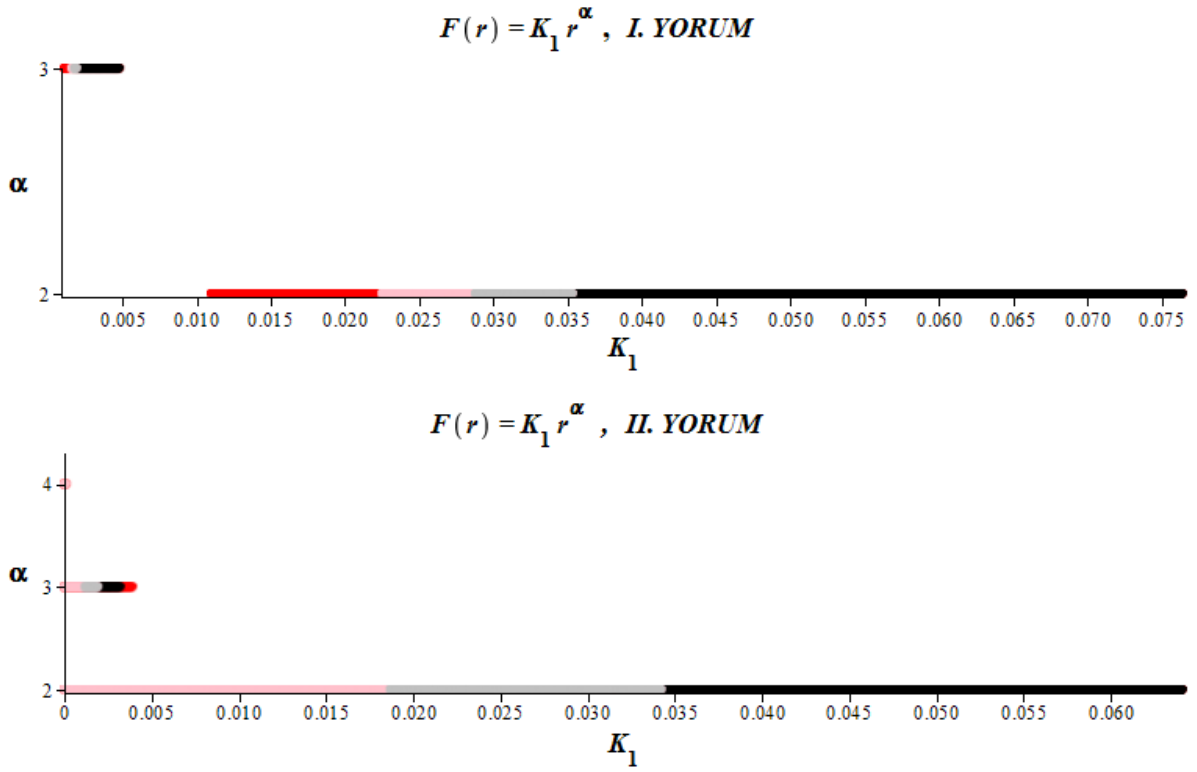
Yukarıdaki *Şekil*'lerde,  $\alpha < 2.5$  olduğu görülmektedir. Ancak bu, tarama için  $\Delta K_1 = 0.02$  ve  $\Delta \alpha = 0.01$  alınmasından kaynaklı bir etki gibi gözükmemektedir. Gerçekten de böyle olup olmadığına bakarken, bu vesileyle de şu soruya cevap arayalım; gerek düzeltme terimli tipteki  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$ ; ve gerekse de yalın tipteki  $F(r) = K_1 r^\alpha$  için, üs parametresinin  $\alpha = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  gibi tam sayı değerler alabileceği modellerin enerji koşulları bakımından kozmolojik olarak güvenilirliği var mıdır? Bunu görmek için Şekil 4.9 ile 14 ün alt panellerindeki  $\alpha = \text{tamsayı}$  doğrularını,  $0.0001 \leq K_1 \leq 0.1$  aralığında  $\Delta K_1 = 0.001$  adımlarıyla, sırasıyla, Şekil 4.15 ve 16 da yeniden üretiyoruz.



**Şekil 4.15:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  modelinde *I. koşul takımı*'na göre,  $\alpha = \text{tamsayı}$  ( $-5 \leq \alpha \leq 7$ ) doğruları için,  $0.0001 \leq K_1 \leq 0.1$ ,  $\Delta K_1 = 0.001$  taraması.

Şekil 4.15 de, *I. YORUM* altında *1. koşul takım*ı gösterilmektedir. Söz konusu  $K_1$  aralığında *I. YORUM* altında *koşul takım*'larından yalnızca birincisi sağlanırken, *II. YORUM* altında, hiçbiri sağlanmamaktadır. Bu son durum zaten Şekil 4.9 un sol panellerinde de açıkça görülmektedir.  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  modelinde  $\alpha = 2$  için kozmolojik güvenirliliğin, *I. YORUM* altında *1. koşul takım*'na göre  $0.011 \leq K_1 \leq 0.076$  için sağlandığı ve bu aralıkta da tüm modellerin süper-ivmeli olduğu görülmektedir.  $\alpha = 3$  için ise, hepsi de süper-ivmesiz olarak  $K_1$  in  $0.0001 \leq K_1 \leq 0.005$  aralığında olması gerekmektedir.  $\alpha = 4$  olduğunda ise, söz konusu model artık dışarılanmış bulunmaktadır.

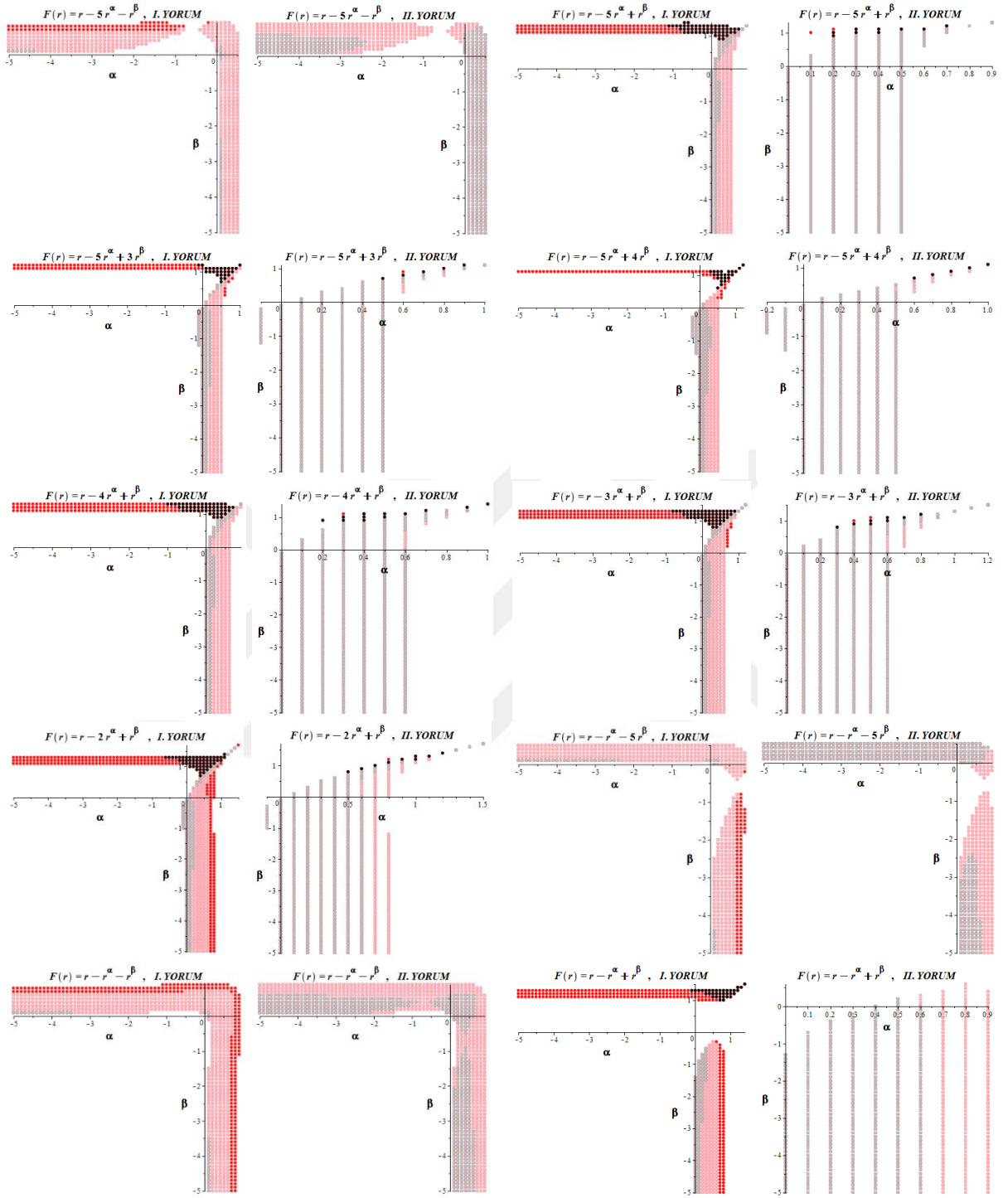
Şekil 4.16,  $F(r) = K_1 r^\alpha$  içindir. *I. YORUM* altında (üst panel) *1. koşul takım*'na göre  $\alpha = 2$  için  $0.011 \leq K_1 \leq 0.076$  olmalıdır ki, bunun  $0.011 < K_1 < 0.028$  olan kısmı süper-ivmesiz;  $0.028 \leq K_1 \leq 0.076$  olan kısmı da süper-ivmeli modelleri içermektedir. Yine *I. YORUM* altında, fakat bu sefer *2. koşul takım*'na göre,  $\alpha = 2$  için;  $0.022 \leq K_1 \leq 0.028$  olan kısım süper-ivmesiz ve  $0.028 < K_1 \leq 0.036$  olan kısım da süper-ivmeli modelleri içermek üzere  $0.022 \leq K_1 \leq 0.036$  olmaktadır.  $\alpha = 3$  için ise, *1. koşul takım*'ı  $0.0001 \leq K_1 \leq 0.005$ ; *2. koşul takım*'ı da  $0.0001 \leq K_1 \leq 0.002$  aralığında sağlanmaktadır. Son derece dar aralıklar nedeniyle süper-ivme ayrıntılanmasına girmiyoruz. Şimdi alt paneldeki *II. YORUM*'a bakalım.  $\alpha = 2$  olduğunda, *1. koşul takım*'na göre  $0.0001 \leq K_1 \leq 0.035$  olan kısım süper-ivmesiz ve  $0.035 < K_1 \leq 0.064$  olan kısım da süper-ivmeli olmak üzere  $0.0001 \leq K_1 \leq 0.064$  olmalıdır. *2. koşul takım*'na göre ise  $0.0001 \leq K_1 \leq 0.018$  olan kısım süper-ivmesiz;  $0.018 < K_1 \leq 0.035$  olan kısım da süper-ivmeli olmak üzere  $0.0001 \leq K_1 \leq 0.064$  olmalıdır.  $\alpha = 3$  için ise, *1. koşul takım*'ı  $0.0001 \leq K_1 \leq 0.004$ ; *2. koşul takım*'ı da  $0.0001 \leq K_1 \leq 0.002$  aralıklarında sağlanmaktadır.  $\alpha = 4$  ise  $10^{-4}$  mertebesinde dışarılanmış görünmektedir. Bu incelemeler; sonuçların, parametre değerlerine duyarlılığını tekrar gözler önüne sermektedir.



**Şekil 4.16:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha$  modelinde I. ve II. YORUM'lar altında 1. ve 2. koşul takım'larına göre,  $\alpha = \text{tamsayı}$  doğruları için  $0.0001 \leq K_1 \leq 0.1$ ,  $\Delta K_1 = 0.001$  taraması.

**Model 3:**  $f(R) = R + C_1 R^\alpha + C_2 R^\beta \rightarrow F(r) = r + K_1 r^\alpha + K_2 r^\beta$

Dört adet serbest parametre içeren bu tür modellerde, döngüler aracılığıyla hesaplanabilecek  $(K_1, K_2, \alpha, \beta)$  dörtlüleri, grafiksel olarak, peşinen seçilmiş bazı  $(K_1, K_2)$  ikilileri için  $\alpha - \beta$  düzleminde gösterilecek olup, taramalar için de:  $-10 \leq K_1 \leq +10$ ,  $\Delta K_1 = 0.2$  ve  $-5 \leq \alpha \leq +5$ ,  $\Delta \alpha = 0.01$  alınacaktır. Toplamda 100 adet model arasından bazılarını aşağıda Şekil 4.17'de her iki YORUM altında gösteriyoruz. Bunlarda pembe rengin altında aynı zamanda kırmızı ve grinin altında da hem kırmızı hem de siyah olduğu gözden uzak tutulmayacaktır.

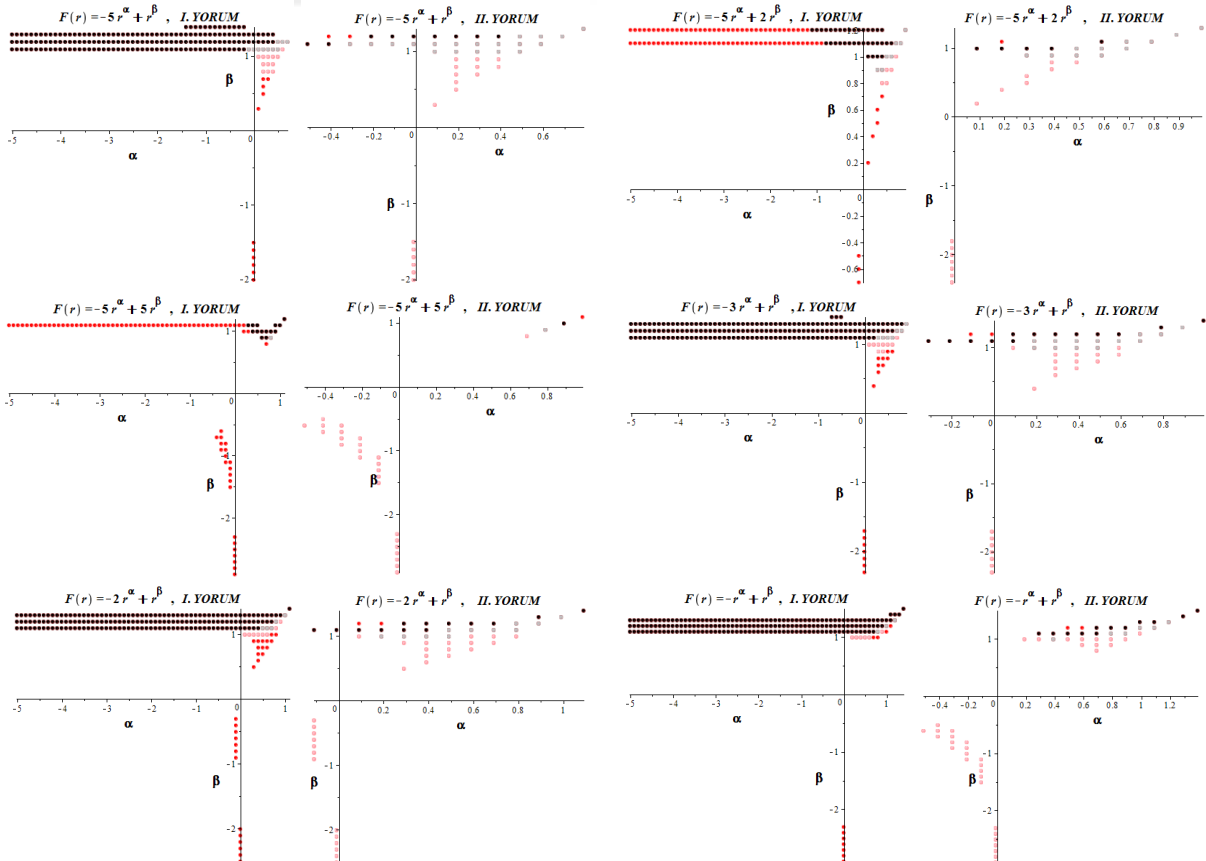


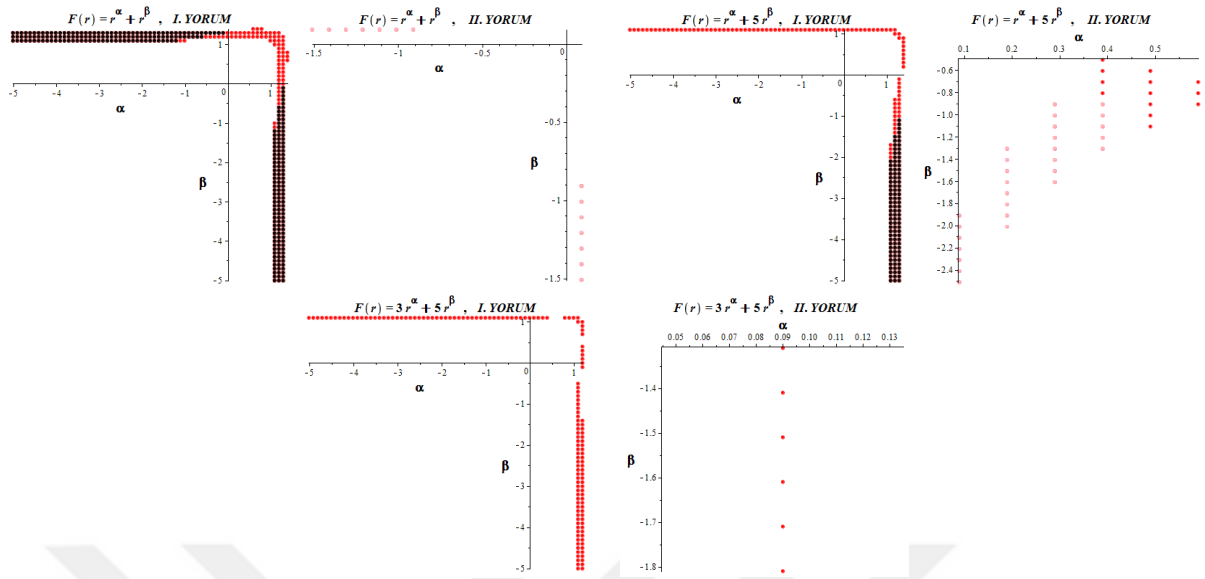
**Şekil 4.17:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha + K_2 r^\beta$  modelinde seçilmiş bazı  $(K_1, K_2)$  ikilileri için her iki YORUM altında 1. ve 2. koşul takımlarının sağlanma durumlarının  $\alpha - \beta$  düzleminde gösterimi. Renklerin anlamı, metinde daha önce açıklandığı gibidir. Özellikle II. YORUM'da görülen noktali ve aralıklı görünüm,  $\Delta\alpha$  aralığı daha da dar alınarak bertaraf edilebilirse de, söz konusu görünümün yeteri kadar fikir vermesinden dolayı, buna gerek görmüyoruz.

Yukarıdaki örnek modellerde göze çarpan ortak özellik  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin her ikisinin de üstten (pozitif değerler bakımından) sınırlı, altan (negatif değerler bakımından) ise sınırsız oluşlarıdır.  $\alpha$  için üst sınır; eğer  $\alpha=1$  değerini aşan bazı münferit  $(\alpha, \beta)$  noktasal modelleri kaale alınmaz ise, genellikle  $\alpha \leq 1$  dir. Benzer şekilde,  $\beta$  için de durum  $\beta \leq 1.3$  dir.

**Model 4:**  $f(R) = C_1 R^\alpha + C_2 R^\beta \rightarrow F(r) = K_1 r^\alpha + K_2 r^\beta$

Düzeltilmesiz, yani “yalın” formda olan bu fonksiyonel form için, yukarıda yapılanları, yine peşinen seçilmiş bazı özel  $(K_1, K_2)$  ikilileri için, Şekil 4.18’de tekrarlıyoruz. Önceki: “düzeltilme terimli model tipi” için saptananlar bu “yalın” form için de geçerli görünmektedir; şu farkla ki, burada,  $\alpha$  nın üst sınırının, bazı durumlarda münferit sayılamayacak kadar  $(F(r) = r^\alpha + r^\beta, F(r) = r^\alpha + 5r^\beta)$  modellerinde olduğu gibi)  $\alpha \geq 1$  değerlerine ulaştığına rastlanmaktadır. Ayrıca, bu yalın  $F(r)$  tipindeki modelde kozmolojik güvenilirliğe sahip model sayısının yalın olmayandakine kıyasla da az olduğugöze çarpmaktır.





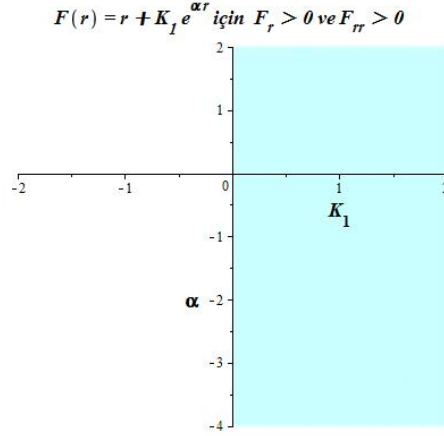
Şekil 4.18:  $F(r) = K_1 r^\alpha + K_2 r^\beta$  için Şekil 4.17'nin benzeri.

Şimdi;  $r$  nin: kuvvet, logaritmik ya da üstel tipten muhtelif ifadelerini içeren fonksiyonlarının  $F(r) = \Phi_1(r) + \Phi_2(r) \times \Phi_3(r)$ ,  $F(r) = \Phi_1(r) + \Phi_2(r) / \Phi_3(r)$ , ... gibi kombinasyonlarıyla oluşturulan karışık  $F(r)$  fonksiyonel formlarını göz önüne alalım. Bunlar arasında üstel fonksiyon barındıran modeller, 'üstel gravite' olarak da anılmakta olup [62, 73, 76, 95, 120, 126 ve 144] no'lu kaynaklarda muhtelif kozmolojik meselelerin incelenmesinde kullanılmışlardır. Biz, bunlardan bazılarını kendi boyutsuz değişkenlerimiz cinsinden yazıyor ve enerji koşullarına göre ele alıp, parametre uzayının kozmolojik güvenilirliğini inceliyoruz. Aşağıda bunlarla birlikte, muhtelif model tipleri için örnekleme olarak seçilecek  $F(r)$  fonksiyonel formlarında, hem GRT'ye düzeltme terimli görünümü sağlamak ve hem de belirlenecek parametre sayısını arttırmamak üzere, önce,  $\Phi_1(r) \equiv r$  almaktayız.

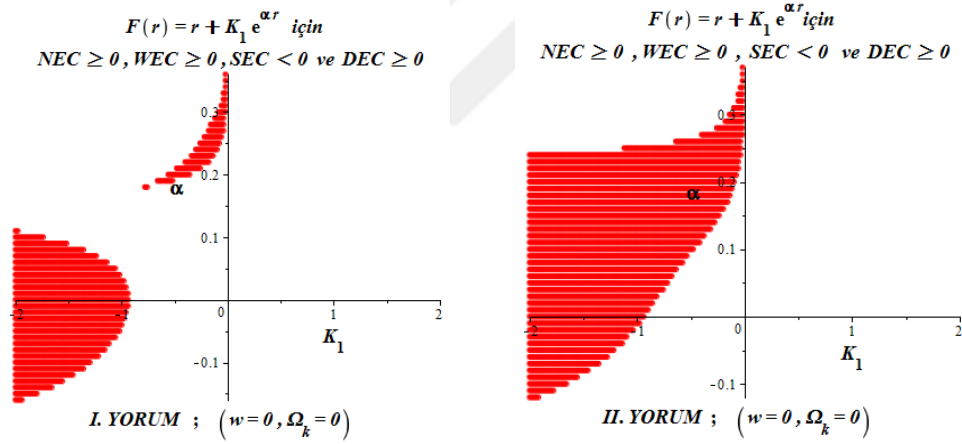
**Model 5:**  $f(R) = R + C_1 e^{\alpha R} \rightarrow F(r) = r + K_1 e^{\alpha r}$

Bu model için, enerji koşullarına göre kozmolojik güvenilirlik hiçbir  $(K_1, \alpha)$  ikilisi için sağlanmamaktadır. Bunu açıkça görmek için Şekil 4.19.a ve Şekil 4.19.b de, sırasıyla,  $(F_r > 0$  ve  $F_{rr} > 0)$  ve  $(NEC \geq 0, WEC \geq 0, SEC < 0$  ve  $DEC \geq 0)$  eşitsizlik sistemlerini sağlayan bölgeleri göstermekteyiz. Şekil 4.19.b dekilerin Şekil 4.19.a ile üstüste bindirilmesi suretiyle

oluşturulan Şekil 4.19.c de, her iki *YORUM* (sol ve sağ panellerde) çerçevesinde ortak  $(K_1, \alpha)$  çözümlerinin bulunmadığı açıkça görülmektedir.

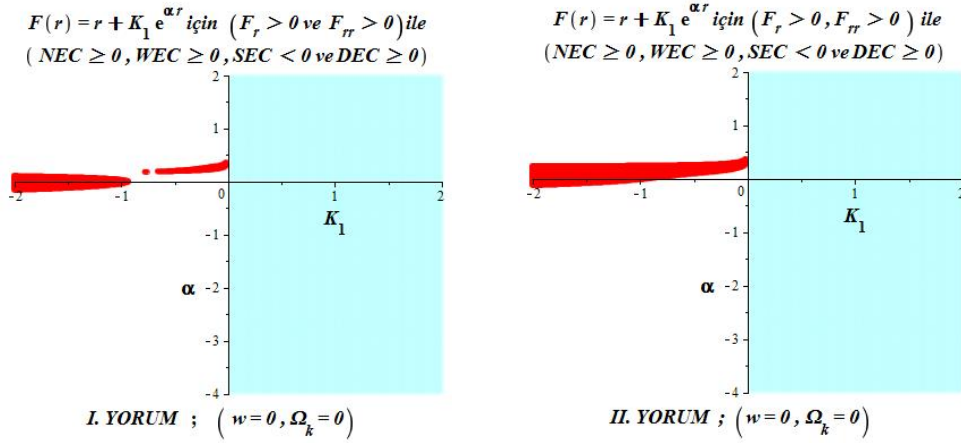


Şekil 4.19.a:  $F(r) = r + K_1 e^{\alpha r}$  için birinci ve ikinci türev koşullarını sağlayan  $(K_1, \alpha)$  ikilileri.



Şekil 4.19.b:  $F(r) = r + K_1 e^{\alpha r}$  için *I.* ve *II. YORUM* için enerji koşullarını sağlayan  $(K_1, \alpha)$  ikilileri.

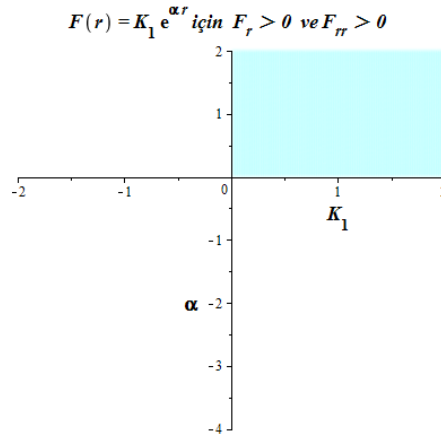




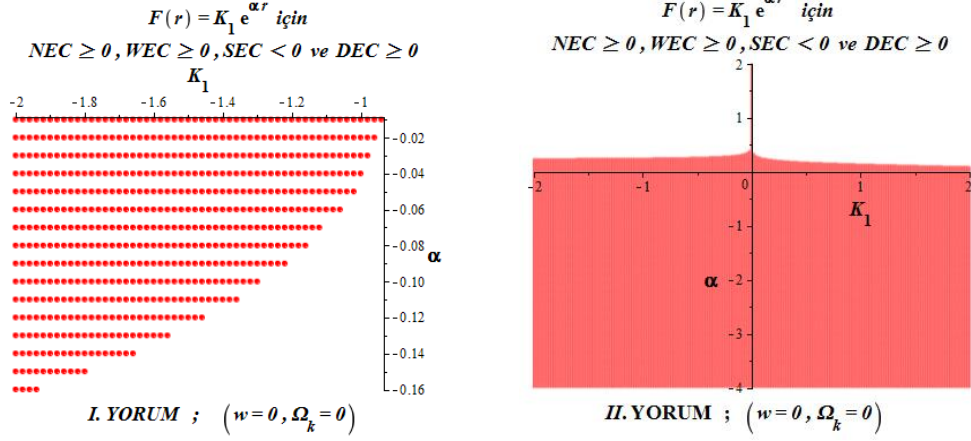
**Şekil 4.19.c:**  $F(r) = r + K_1 e^{\alpha r}$  için I. ve II. YORUM için türev ve enerji koşullarını sağlayan  $(K_1, \alpha)$  ikilileri.

**Model 6:**  $f(R) = C_1 e^{\alpha R} \rightarrow F(r) = K_1 e^{\alpha r}$

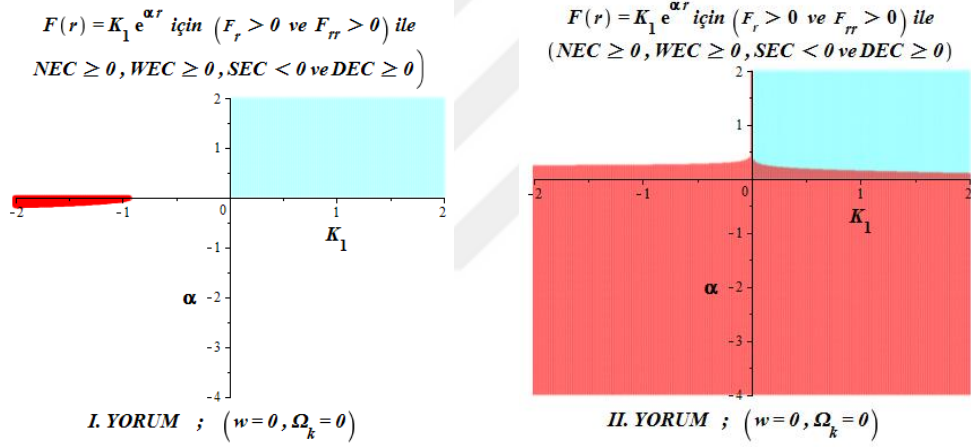
Bu ‘yalın üstel’ model için, önceki benzer gösterimleri Şekil 4.20.a-c de tekrarlıyoruz.



**Şekil 4.20.a:**  $F(r) = K_1 e^{\alpha r}$  için birinci ve ikinci türev koşullarını sağlayan  $(K_1, \alpha)$  ikilileri.

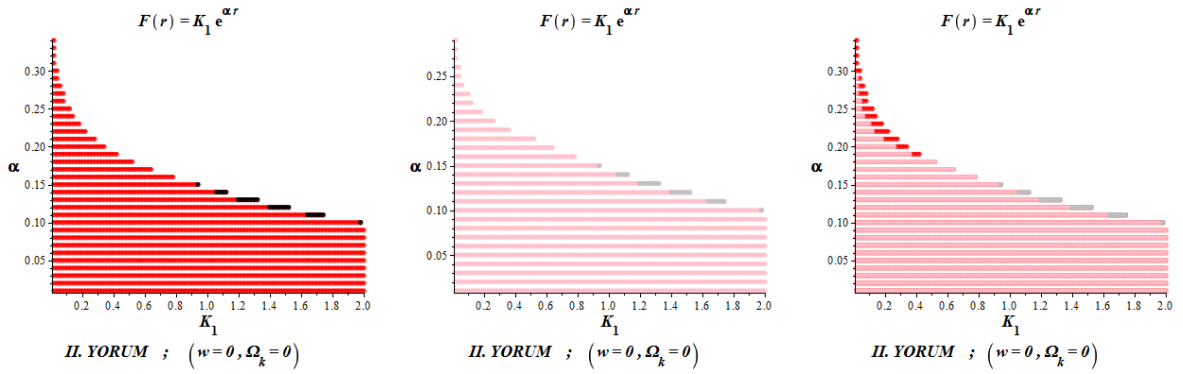


Şekil 4.20.b:  $F(r) = K_1 e^{\alpha r}$  için I. ve II. YORUM için enerji koşullarını sağlayan  $(K_1, \alpha)$  ikilileri.



Şekil 4.20.c:  $F(r) = K_1 e^{\alpha r}$  için I. ve II. YORUM için türev ve enerji koşullarını sağlayan  $(K_1, \alpha)$  ikilileri.

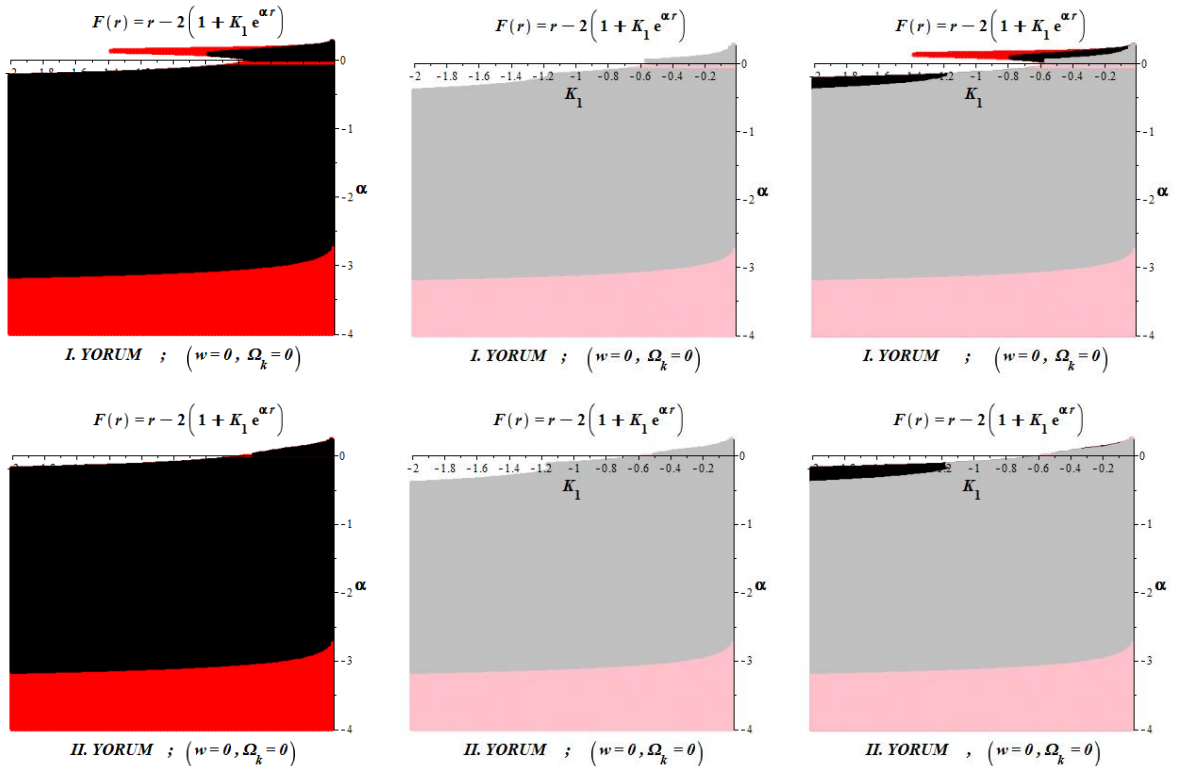
Hemen görüleceği üzere,  $(F_r > 0$  ve  $F_{rr} > 0)$  ile  $(NEC \geq 0, WEC \geq 0, SEC < 0$  ve  $DEC \geq 0)$  eşitsizlik sistemleri için I. YORUM altında bölgelerin kesişimi bulunmaz iken, II. YORUM için durum farklı olmaktadır (sağ alt panelde koyumsu kırmızı bölge). Bu bölgedeki  $(K_1, \alpha)$  ikililerinin I. ile 2. koşul takım'larını sağlama durumları Şekil 4.21de gösterilmektedir (ilk iki panel);



**Şekil 4.21:**  $F(r) = K_1 e^{\alpha r}$  modelini, 1. koşul takımı'na göre (sol panel) ve 2. koşul takımı'na göre (orta panel) güvenilirlebilir kılan  $(K_1, \alpha)$  ikilileri. Sağ panel her ikisinin birlikte gösterimidir.

**Model 7:**  $f(R) = R + C_2(1 + C_1 e^{\alpha R}) \rightarrow F(r) = r + K_2(1 + K_1 e^{\alpha r})$

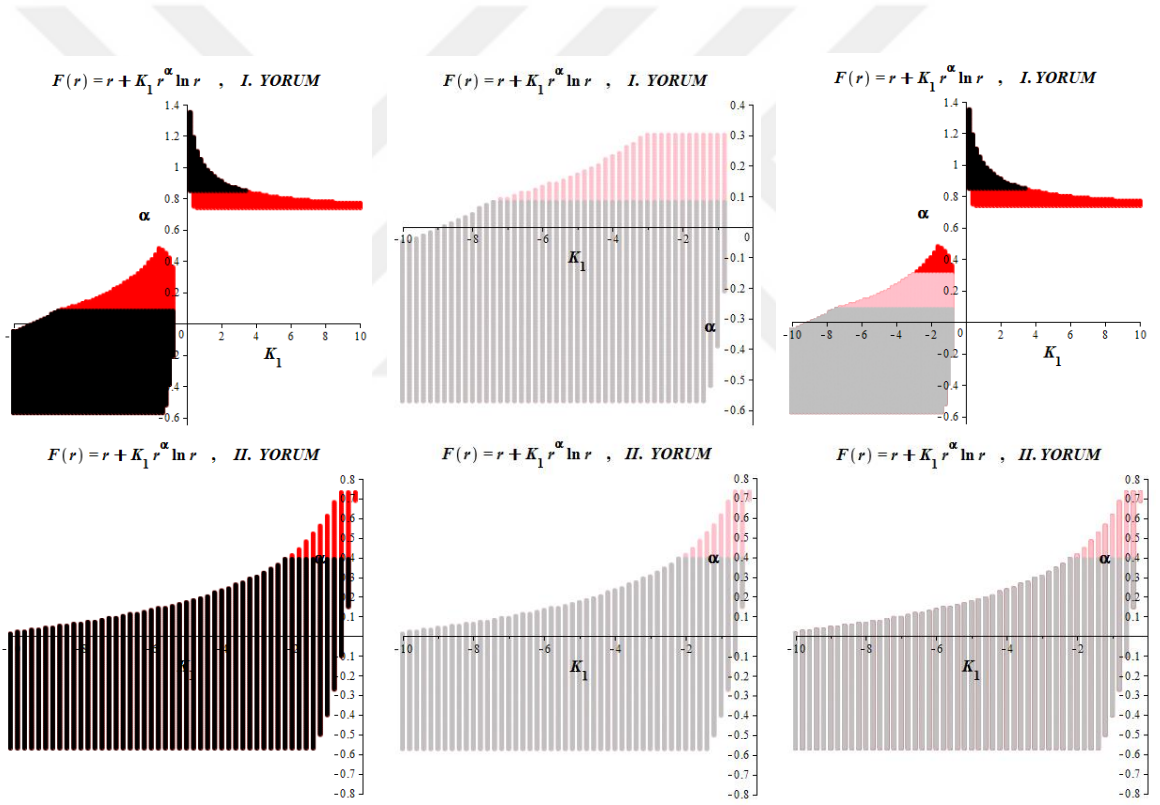
Bu modelde  $K_2 > -1$  (ve dolayısıyla da  $K_2 \geq 0$ ) değerleri için enerji koşullarına göre güvenilirlik bulunmamaktadır. Güvenilirliğin bulunduğu  $K_2 \leq -1$  değerleri arasından,  $K_2 = -1$  ile  $K_2 = -10$  arasındaki modeller için simülasyonlar yapmış olmakla birlikte aşağıdaki Şekil 4.22 de, bunlardan yalnızca  $K_2 = -2$  olanını göstermekteyiz; diğerleri ise bundan, kaydadeğer sayılabilecek bir farklılık göstermemektedir.



**Şekil 4.22:**  $F(r) = r - 2(1 + K_1 e^{\alpha r})$  modelini, 1. ve 2. koşul takım'larına göre (sırasıyla, sol ve orta paneller) güvenilir kılan  $(K_1, \alpha)$  ikilileri. Sağ paneller ise, her ikisinin birlikte gösterimidir.

**Model 8:**  $f(R) = R + K_1 R^\alpha \ln R \rightarrow F(r) = r + K_1 r^\alpha \ln r$

GRT'ye düzeltme teriminde  $r$  nin logaritmik ve kuvvet fonksiyonlarının çarpımını içeren bu fonksiyonel formun 1. ve 2. koşul takımları'na göre sınanma sonuçlarını, Şekil 4.23 de, sırasıyla, I. YORUM ve II. YORUM için gösteriyoruz. Şekillerdeki taramalar:  $-10 \leq K_1 \leq +10$  ve  $-5 \leq \alpha \leq +5$  aralıklarında, sırasıyla,  $\Delta K_1 = 0.2$  ve  $\Delta \alpha = 0.01$  alınarak gerçekleştirilmiştir.

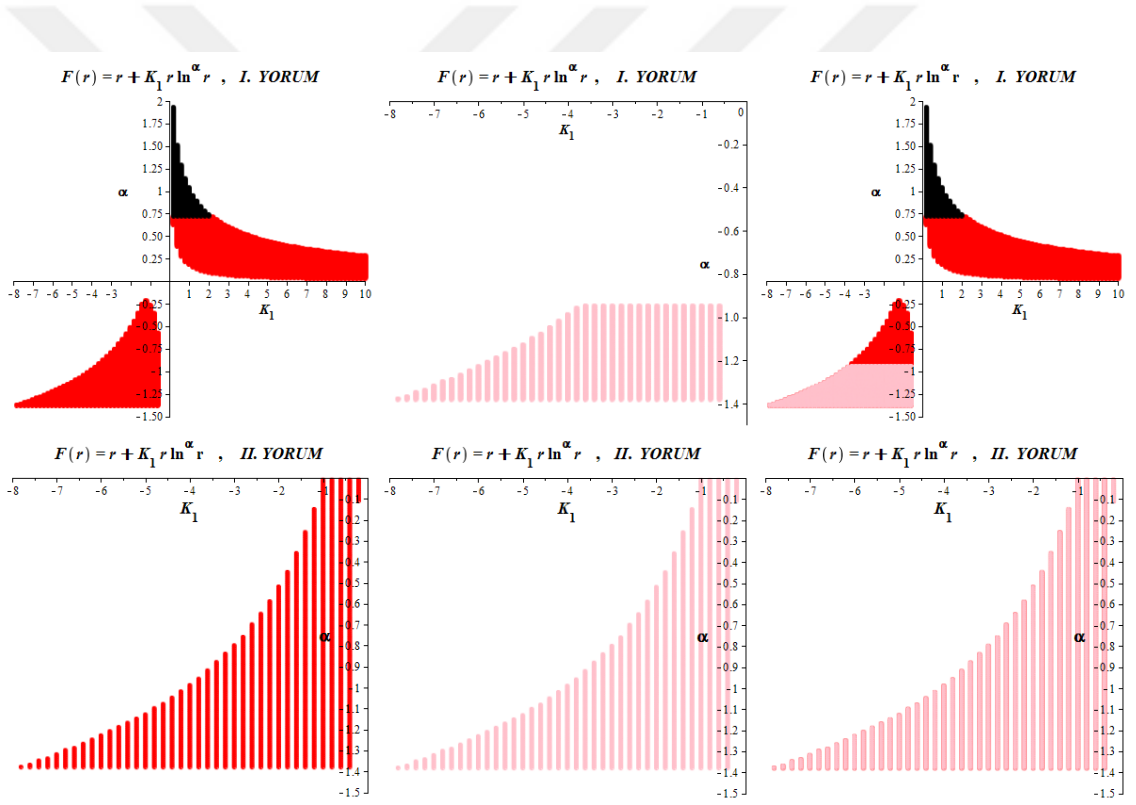


**Şekil 4.23:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha \ln r$  için I. YORUM (üst paneller) ve II. YORUM (alt paneller) altında 1. ve 2. koşul takımları'na göre (sırasıyla sol ve ortadaki paneller) sınanma sonuçları. En sağdaki paneller ilk ikisinin üstüste bindirilmesi suretiyle elde edilmiştir.

Bu modelde kozmolojik güvenilirliğin sağlanması bakımından şu saptamaları not ediyoruz: I. YORUM çerçevesinde, 1. koşul takımı'nın sağlanması için  $K_1 < 0$  ve  $K_1 > 0$  olabiliyorken, 2. koşul takımı için  $K_1 > 0$  değerleri dışarılanmıştır.  $\alpha$  parametresi ise 1. koşul takımı için  $-0.57 \leq \alpha \leq 1.35$  olurken 2. koşul takımı için daha da kısıtlanarak  $-0.57 \leq \alpha \leq 0.73$  olmaktadır.

*II. YORUM* çerçevesinde ise her iki *koşul takımı* birbirlerine denk olarak  $K_1 < 0$  ve  $-0.57 \leq \alpha \leq 0.73$  kısıtlandırmalarını vermektedir. Süper-ivme durumu bakımından ise, şu saptamalar da bulunabiliriz: *I. YORUM* çerçevesinde; *1. koşul takımı* için  $K_1 < 0$  kesiminde süper-ivmeli modeller  $-0.57 \leq \alpha < 0.1$  aralığında iken, *2. koşul takımı* için aralık, genişleyerek  $-0.57 \leq \alpha < 0.5$  olmaktadır. *II. YORUM* çerçevesinde ise durum tersine olmaktadır; *1. koşul takımı* için aralık  $-0.57 \leq \alpha < 0.73$  iken, *2. koşul takımı* için artık  $-0.57 \leq \alpha < 0.4$  olmaktadır.

**Model 9:**  $f(R) = R + C_1 R \ln^\alpha R \rightarrow F(r) = r + K_1 r \ln^\alpha r$



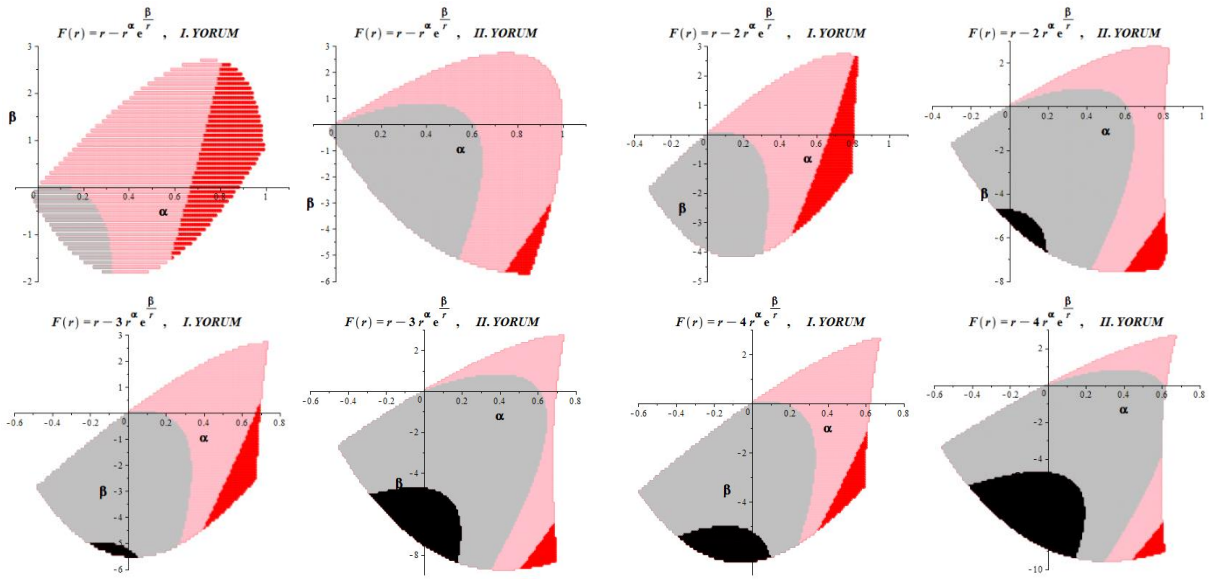
**Şekil 4.24:**  $F(r) = r + K_1 r (\ln r)^\alpha$  modelinin kozmolojik güvenilirliği. Üst paneller *I. YORUM*; alt paneller *II. YORUM* içindir. Sol ve orta paneller, sırasıyla, *1. ve 2. koşul takımı* içindir. Sağ paneller ise, bunların üstüste bindirilmesini göstermektedir.

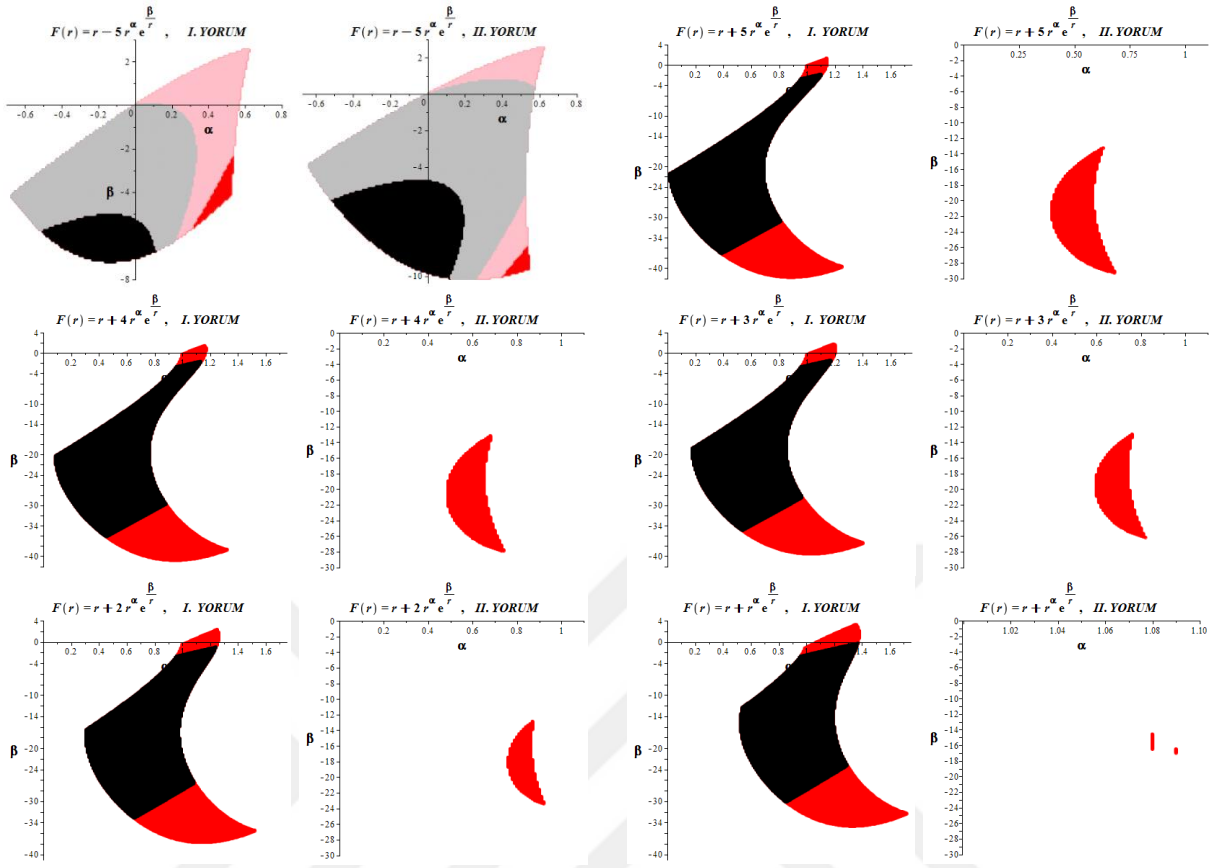
Bu modelde, kozmolojik güvenilirliğin sağlanması: *I. YORUM*'da: *1. koşul takımı*'na göre  $-8 \leq K_1 < 0$  ve  $-1.37 \leq \alpha \leq -0.20$  ile  $K_1 > 0$  ve  $0 < \alpha < 2$  aralıklarında; *2. koşul takımı*'na göre de  $-8 \leq K_1 < 0$  ve  $-1.4 \leq \alpha \leq -0.95$  aralıklarında olmaktadır. *II. YORUM*'da ise, *1. koşul takımı* ile *2. koşul takımı* birbirlerine denk olup sağlanma  $-1.4 \leq \alpha < 0$  için gerçekleşmektedir. Buradan,

$\alpha$  nın,  $K_1 < 0$  ve  $K_1 > 0$  kesimlerinde alttan ve üstten sınırlı;  $K_1$  in ise,  $K_1 > 0$  kesimde üstten sınırsız olduğu anlaşılmaktadır.

**Model 10:**  $f(R) = R + C_1 R^\alpha e^{\beta/R} \rightarrow F(r) = r + K_1 r^\alpha e^{\beta/r}$

Bu tip model;  $K_1, \alpha$  ve  $\beta$  olmak üzere üç parametre içerdiğinden grafiksel gösterimi gerçekleştirebilmek için en az birinin peşinen belirlenmiş olarak alınması gerekmektedir.  $(w, \Omega_{k,0}) = (0,0)$  ve de peşinen seçilmiş  $K_1 \in \{\pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1\}$  değerleri için,  $\Delta\alpha = 0.1$  ve  $\Delta\beta = 0.01$  alınarak elde edilen tarama sonuçlarını Şekil 4.25 de gösteriyoruz. Sol paneller *I. YORUM* için; sağ paneller de *II. YORUM* içindir. Tablo 4.3 de ise; grafiksel gösterimlerin sayısal okumasını, yani, parametrelerin alt ve üst sınırları ile süper-ivme sayı ve oranları gibi bilgileri vermekteyiz. Bu model için; gerek  $K_1 < 0$  ve gerekse de  $K_1 > 0$  için, hem  $\alpha$  nın ve hem de  $\beta$  nın alttan ve üstten sınırlı olduğunu görmekteyiz.  $K_1 < 0$  olduğunda, hem *I.* ve hem de *2. koşul takımı*'ni sağlayan  $(\alpha, \beta)$  ikililerinin bulunmasına karşın,  $K_1 > 0$  için yalnızca *I. koşul takımı* sağlanmaktadır. Öte yandan,  $K_1 < 0$  için, hem  $\alpha < 0$  ve hem de  $\alpha > 0$  için güvenilebilir model bulunuyorken,  $K_1 > 0$  için güvenilebilirlik yalnızca  $\alpha > 0$  değerleri için söz konusu olmaktadır (ve o da yalnızca *I. koşul takımı*'na göredir).





Şekil 4.25:  $F(r) = r + K_1 r^\alpha e^{\beta/r}$  tipi modellere örnekleme olarak seçilen  $K_1 \in \{\pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1\}$  değerleri için, YORUM'lara göre 1. ve 2. koşul takım'larının  $\alpha - \beta$  düzleminde gösterimleri.

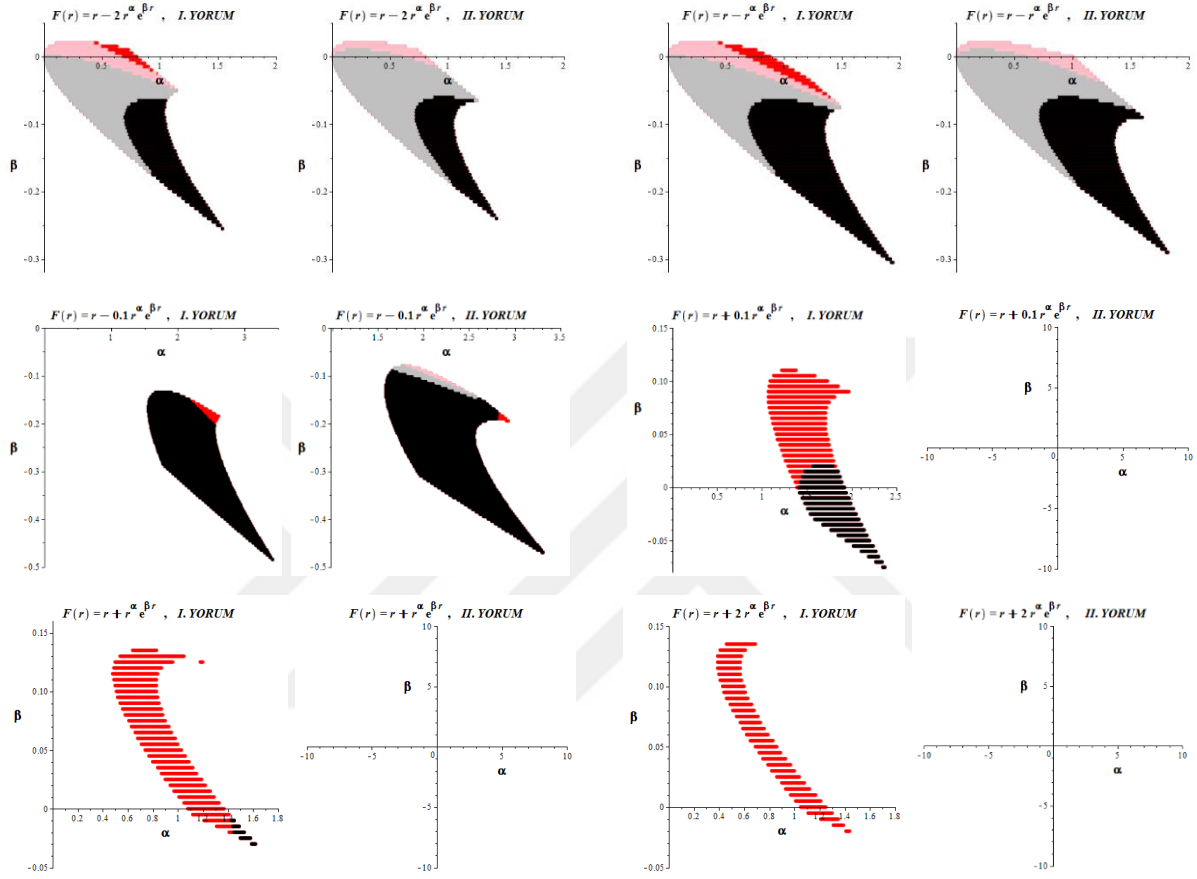
Tablo 4.3: Şekil 4.25 deki modellerin kozmolojik güvenilirliklerinin sağlandığı  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin alt ve üst sınırları.

	I. YORUM		II. YORUM	
$F(r)=r-r^\alpha e^{\beta/r}$	$-0.02 \leq \alpha \leq 0.99$	$-1.8 \leq \beta \leq 2.7$	$-0.02 \leq \alpha \leq 0.99$	$-5.7 \leq \beta \leq 2.7$
$F(r)=r-2r^\alpha e^{\beta/r}$	$-0.31 \leq \alpha \leq 0.82$	$-4.1 \leq \beta \leq 2.7$	$-0.29 \leq \alpha \leq 0.82$	$-7.5 \leq \beta \leq 2.7$
$F(r)=r-3r^\alpha e^{\beta/r}$	$-0.47 \leq \alpha \leq 0.73$	$-5.5 \leq \beta \leq 2.7$	$-0.44 \leq \alpha \leq 0.73$	$-8.7 \leq \beta \leq 2.7$
$F(r)=r-4r^\alpha e^{\beta/r}$	$-0.59 \leq \alpha \leq 0.67$	$-6.4 \leq \beta \leq 2.6$	$-0.55 \leq \alpha \leq 0.67$	$-9.5 \leq \beta \leq 2.6$
$F(r)=r-5r^\alpha e^{\beta/r}$	$-0.67 \leq \alpha \leq 0.62$	$-7.2 \leq \beta \leq 2.5$	$-0.63 \leq \alpha \leq 0.62$	$-10.1 \leq \beta \leq 2.5$
$F(r)=r+5r^\alpha e^{\beta/r}$	$0.02 \leq \alpha \leq 1.25$	$-41.8 \leq \beta \leq 1.3$	$0.40 \leq \alpha \leq 0.68$	$-29.3 \leq \beta \leq 13.3$
$F(r)=r+4r^\alpha e^{\beta/r}$	$0.09 \leq \alpha \leq 1.32$	$-40.8 \leq \beta \leq 1.4$	$0.49 \leq \alpha \leq 0.74$	$-27.9 \leq \beta \leq 13.2$
$F(r)=r+3r^\alpha e^{\beta/r}$	$0.18 \leq \alpha \leq 1.40$	$-39.5 \leq \beta \leq 1.7$	$0.60 \leq \alpha \leq 0.82$	$-26.2 \leq \beta \leq 13.0$
$F(r)=r+2r^\alpha e^{\beta/r}$	$0.31 \leq \alpha \leq 1.52$	$-37.7 \leq \beta \leq 2.3$	$0.76 \leq \alpha \leq 0.92$	$-23.4 \leq \beta \leq 12.9$
$F(r)=r+r^\alpha e^{\beta/r}$	$0.53 \leq \alpha \leq 1.72$	$-34.7 \leq \beta \leq 3.2$	$1.08 \leq \alpha \leq 1.09$	$-17.0 \leq \beta \leq 14.6$

**Model 11:**  $f(R) = R + C_1 R^\alpha e^{\beta/R} \rightarrow F(r) = r + K_1 r^\alpha e^{\beta/r}$

$K_1 \in \{\pm 2, \pm 1, \pm 0.1\}$  seçimi için sonuçları Şekil 4.26 da gösteriyor ve güvenilirlik bölgeleri sınırlı (kompakt) çıktığı için,  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin alt ve üst sınırlarını Tablo 4.4 de

veriyoruz. Sunumda simetriyi bozmamak için bunlar boş  $\alpha-\beta$  düzlemi olarak bırakılmışlardır.



**Şekil 4.26:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha e^{\beta r}$  tipi modellere örnekleme olarak seçilen  $K_1 \in \{\pm 2, \pm 1, \pm 0.1\}$  değerleri için, YORUM'lara göre 1. ve 2. koşul takım'larının  $\alpha-\beta$  düzleminde gösterimleri.

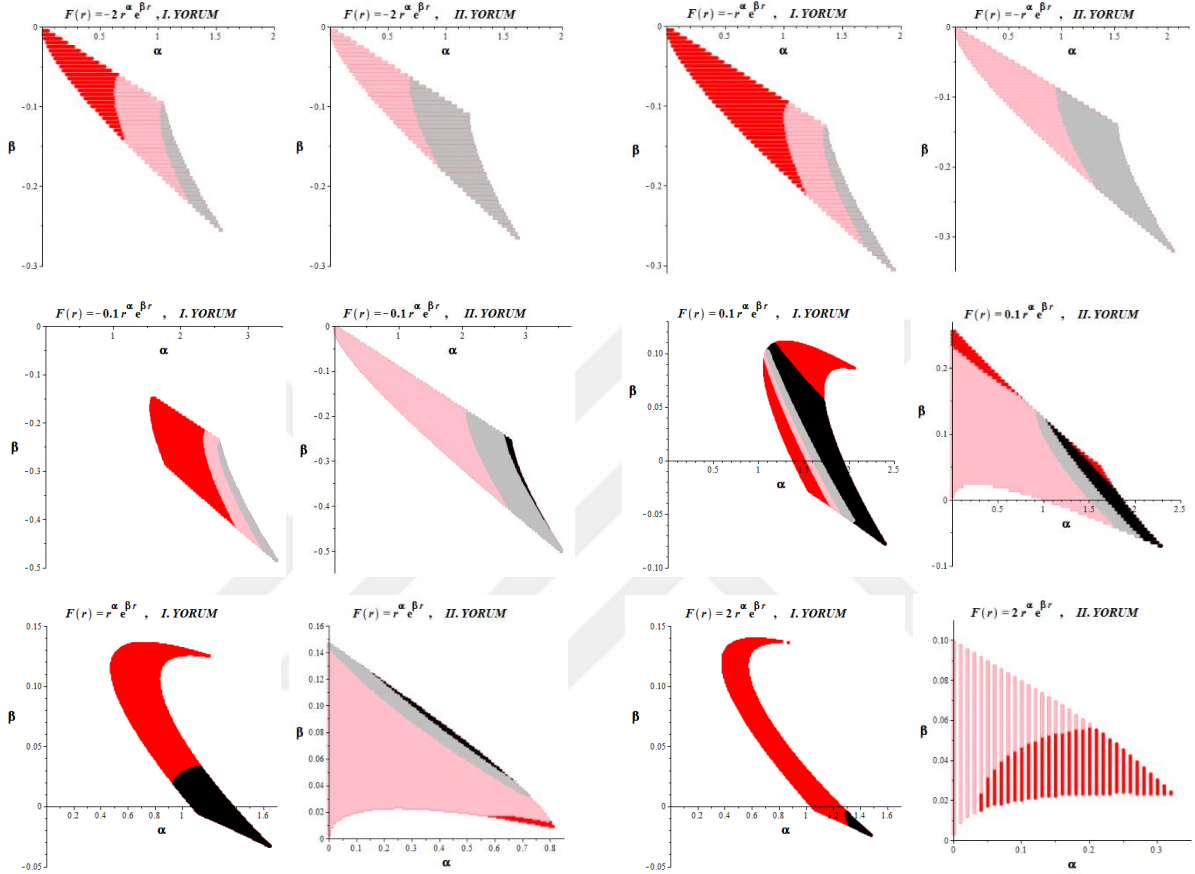
**Tablo 4.4:** Şekil 4.26 daki modellerin kozmolojik güvenilirliklerinin sağlandığı  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin alt ve üst sınırları.

	I. YORUM		II. YORUM	
$F(r) = r - 2r^\alpha e^{\beta r}$	$0.009 \leq \alpha \leq 1.539$	$-0.255 \leq \beta \leq 0.02$	$0.009 \leq \alpha \leq 1.419$	$-0.24 \leq \beta \leq 0.02$
$F(r) = r - r^\alpha e^{\beta r}$	$0.009 \leq \alpha \leq 1.939$	$-0.305 \leq \beta \leq 0.02$	$0.009 \leq \alpha \leq 1.819$	$-0.29 \leq \beta \leq 1.819$
$F(r) = r - 0.1r^\alpha e^{\beta r}$	$1.56 \leq \alpha \leq 3.42$	$-0.485 \leq \beta \leq -0.135$	$1.59 \leq \alpha \leq 3.31$	$-0.47 \leq \beta \leq -0.08$
$F(r) = r + 0.1r^\alpha e^{\beta r}$	$1.40 \leq \alpha \leq 2.38$	$-0.075 \leq \beta \leq 0.115$	YOK	YOK
$F(r) = r + r^\alpha e^{\beta r}$	$0.479 \leq \alpha \leq 1.619$	$-0.030 \leq \beta \leq 0.135$	YOK	YOK
$F(r) = r + 2r^\alpha e^{\beta r}$	$0.389 \leq \alpha \leq 1.439$	$-0.020 \leq \beta \leq 0.135$	YOK	YOK



**Model 12:**  $f(R) = K_1 R^\alpha e^{\beta R} \rightarrow F(r) = K_1 r^\alpha e^{\beta r}$

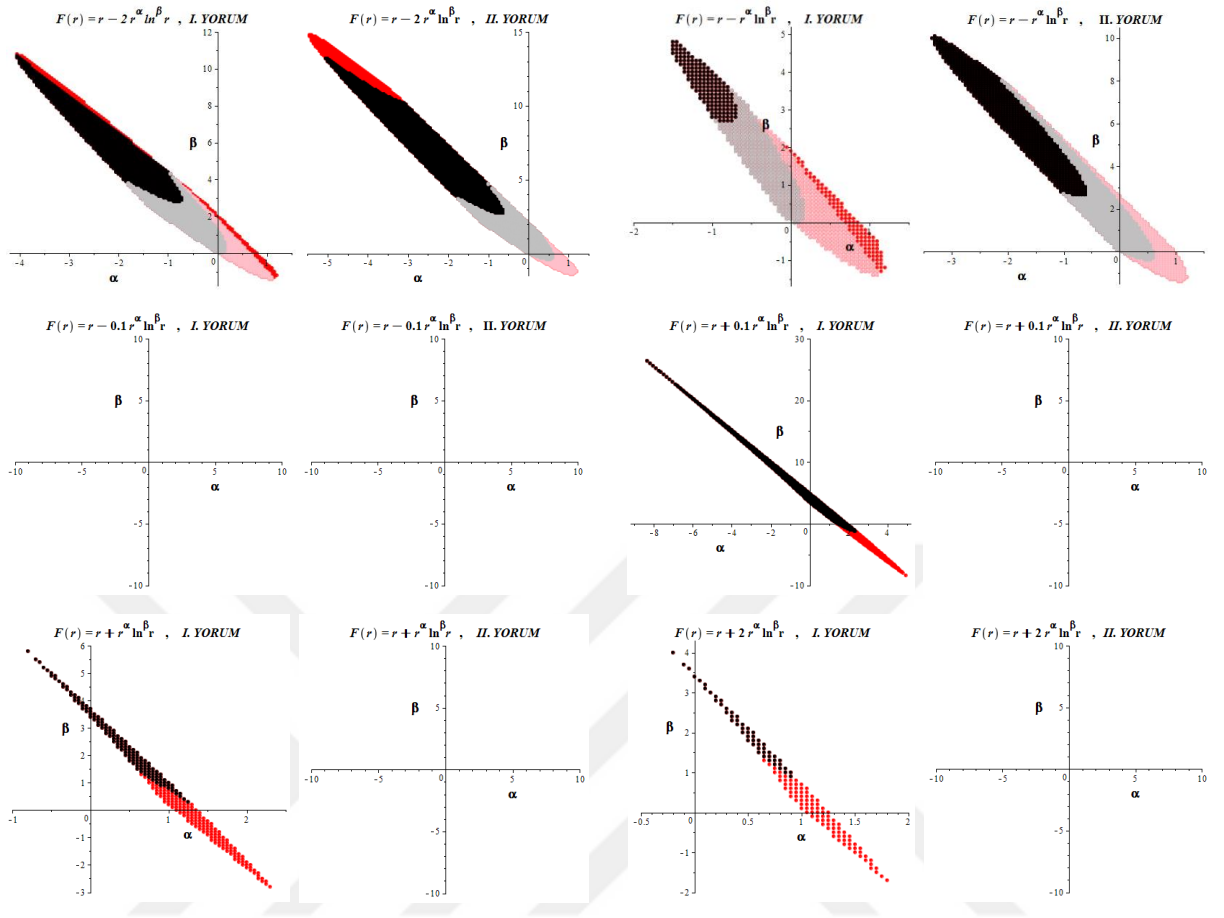
$K_1 \in \{\pm 2, \pm 1, \pm 0.1\}$  özel seçimleri için sonuçlar Şekil 4.27 de verilmektedir.



**Şekil 4.27:**  $F(r) = K_1 r^\alpha e^{\beta r}$  tipi modellere örnekleme olarak seçilen  $K_1 \in \{\pm 2, \pm 1, \pm 0.1\}$  değerleri için, YORUM'lara göre 1. ve 2. koşul takım'larının  $\alpha - \beta$  düzleminde gösterimleri.

**Model 13:**  $f(R) = R + C_1 R^\alpha \ln^\beta R \rightarrow F(r) = r + K_1 r^\alpha \ln^\beta r$

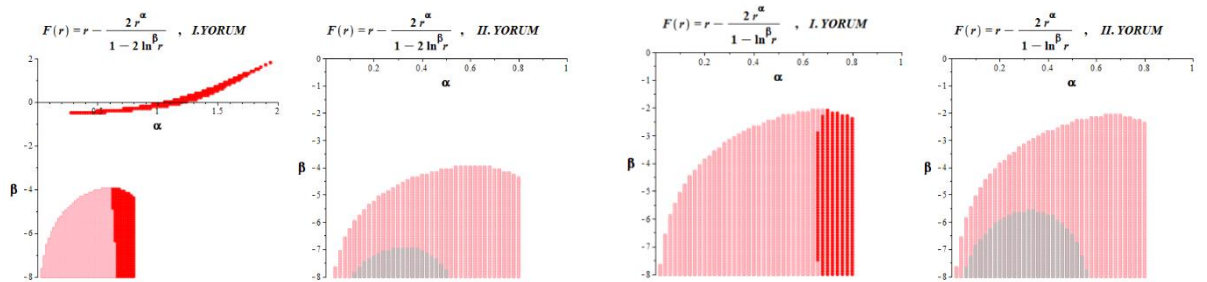
$K_1 \in \{\pm 2, \pm 1, \pm 0.1\}$  özel seçimleri için sonuçlar Şekil 4.28 de verilmektedir. Aşağıda, bazı  $K_1$  değerleri için kozmolojik güvenilirliğe sahip  $(\alpha, \beta)$  ikilileri bulunmamaktadır. Boş  $\alpha - \beta$  düzlemi olarak bırakılan gösterimler bunu belirtmek içindir.

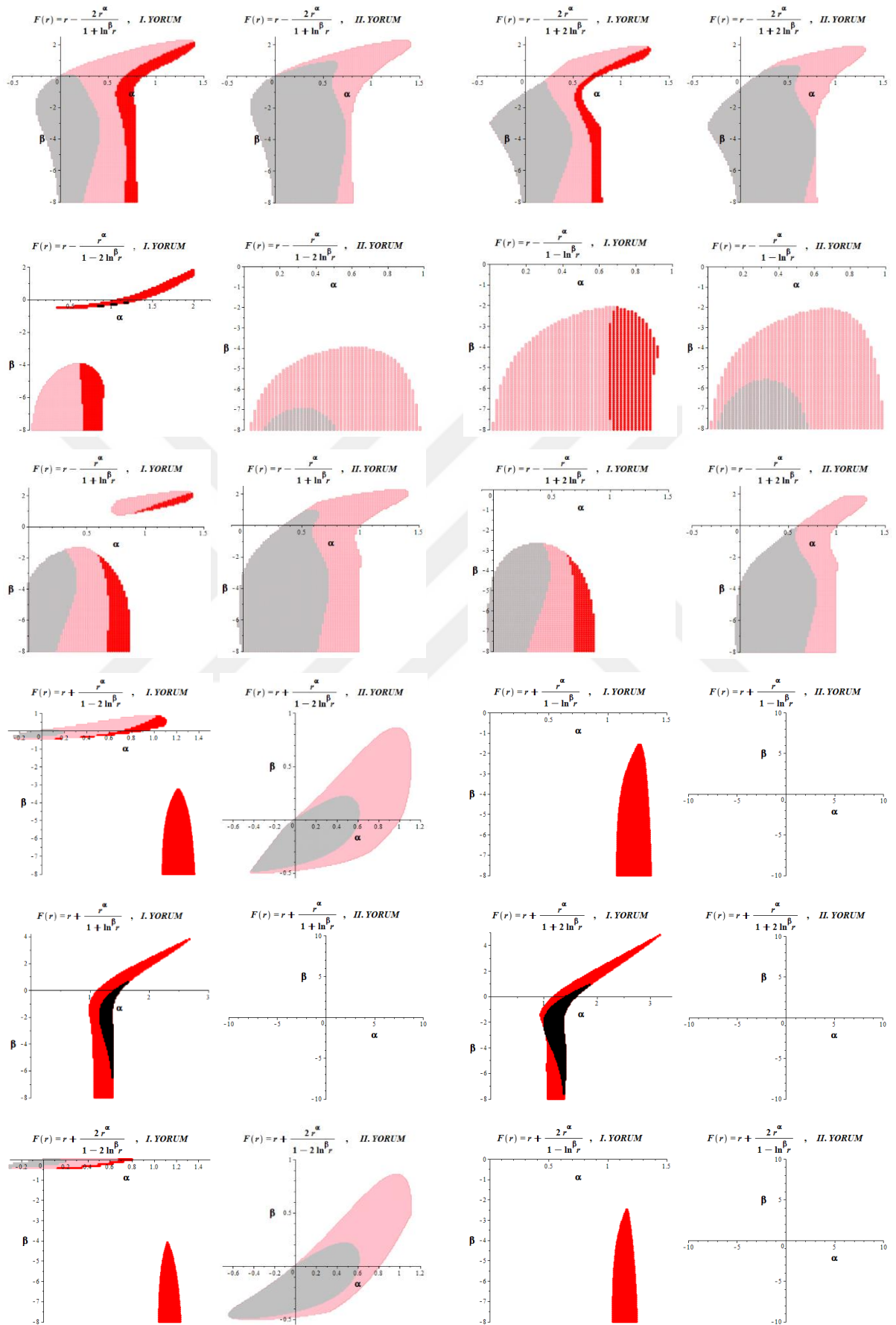


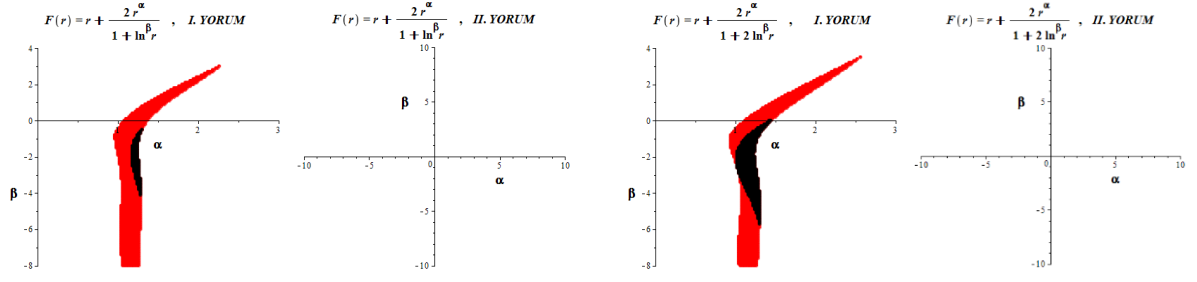
**Şekil 4.28:**  $F(r) = r + K_1 r^\alpha \ln^\beta r$  tipi modellere örnekleme olarak seçilen  $K_1 \in \{\pm 2, \pm 1, \pm 0.1\}$  değerleri için, YORUM'lara göre 1. ve 2. koşul takım'larının  $\alpha - \beta$  düzleminde gösterimleri.

$$\text{Model 14: } f(R) = R + \frac{C_1 R^\alpha}{1 + C_2 \ln^\beta R} \rightarrow F(r) = r + \frac{K_1 r^\alpha}{1 + K_2 \ln^\beta r}$$

Bu tip modellere örnekleme olarak seçilen  $(K_1, K_2) \in \{(\pm 2, \pm 2), (\pm 2, \pm 1), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm 2)\}$  değerleri için, sonuçlar Şekil 4.29 da gösterilmektedir.







**Şekil 4.29:**  $F(r) = r + \frac{K_1 r^\alpha}{1 + K_2 \ln^\beta r}$  tipi modellere örnekleme olarak seçilen  $(K_1, K_2) \in \{(\pm 2, \pm 2), (\pm 2, \pm 1), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm 2)\}$  değerleri için, YORUM'lara göre 1. ve 2. koşul takım'larının  $\alpha - \beta$  düzleminde gösterimleri.

#### 4.10.2. $f(R, G)$ – Modelleri:

$T$  argümanını içermeyen bu modeller için: (4.117), (4.118), (4.121), (4.122) denklemleri, aşağıdaki şekilde sadeleşirler:

►  $(L_m = p^m, I.YORUM)$  için:

$$\Omega_{m,0}^{i.ef} = \frac{1}{F_{r,0}} \left[ \Omega_{m,0} - \frac{1}{6} (F_0 - F_{r,0} \mathfrak{R}_0 - F_{g,0} \Gamma_0) - (F_{rr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{rg,0} \Gamma_0^*) - 4(1 - \Omega_{k,0}) \right. \\ \left. \times (F_{gr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{gg,0} \Gamma_0^*) \right] \quad (4.148)$$

$$\Omega_{P,0}^{i.ef} = \frac{1}{F_{r,0}} \left[ w \Omega_{m,0} + \frac{1}{6} (F_0 - F_{r,0} \mathfrak{R}_0 - F_{g,0} \Gamma_0) + \frac{2}{3} (F_{rr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{rg,0} \Gamma_0^*) + \frac{1}{3} (F_{rrr,0} \mathfrak{R}_0^{*2} \right. \\ \left. + F_{rgg,0} \Gamma_0^{*2} + 2F_{rrg,0} \mathfrak{R}_0^* \Gamma_0^* + F_{rr,0} \mathfrak{R}_0^{**} + F_{rg,0} \Gamma_0^{**}) - \frac{8}{3} q_0 (F_{gr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{gg,0} \Gamma_0^*) \right. \\ \left. + \frac{4}{3} (1 - \Omega_{k,0}) (F_{grr,0} \mathfrak{R}_0^{*2} + F_{ggg,0} \Gamma_0^{*2} + 2F_{grg,0} \mathfrak{R}_0^* \Gamma_0^* + F_{gr,0} \mathfrak{R}_0^{**} + F_{gg,0} \Gamma_0^{**}) \right] \quad (4.149)$$

►  $(L_m = p^m, II.YORUM)$  için:

$$\Omega_{m,0}^{i.ef} = \Omega_{m,0} + (1 - F_{r,0})(1 - \Omega_{k,0}) - \frac{1}{6} (F_0 - F_{r,0} \mathfrak{R}_0 - F_{g,0} \Gamma_0) - (F_{rr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{rg,0} \Gamma_0^*) \\ - 4(1 - \Omega_{k,0})(F_{gr,0} \mathfrak{R}_0^* + F_{gg,0} \Gamma_0^*) \quad (4.150)$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{P,0}^{t,ef} = & w\Omega_{m,0} + \frac{1}{3}(1-F_{r,0})(2q_0 - 1 + \Omega_{k,0}) + \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0 - F_{g,0}\Gamma_0) + \frac{2}{3}(F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{rg,0}\Gamma_0^*) \\
& + \frac{1}{3}(F_{rrr,0}\mathfrak{R}_0^{*2} + F_{rgr,0}\Gamma_0^{*2} + 2F_{rrg,0}\mathfrak{R}_0^*\Gamma_0^* + F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^{**} + F_{rg,0}\Gamma_0^{**}) - \frac{8}{3}q_0(F_{gr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{gg,0}\Gamma_0^*) \\
& + \frac{4}{3}(1-\Omega_{k,0})(F_{grr,0}\mathfrak{R}_0^{*2} + F_{ggg,0}\Gamma_0^{*2} + 2F_{grg,0}\mathfrak{R}_0^*\Gamma_0^* + F_{gr,0}\mathfrak{R}_0^{**} + F_{gg,0}\Gamma_0^{**}) \quad (4.151)
\end{aligned}$$

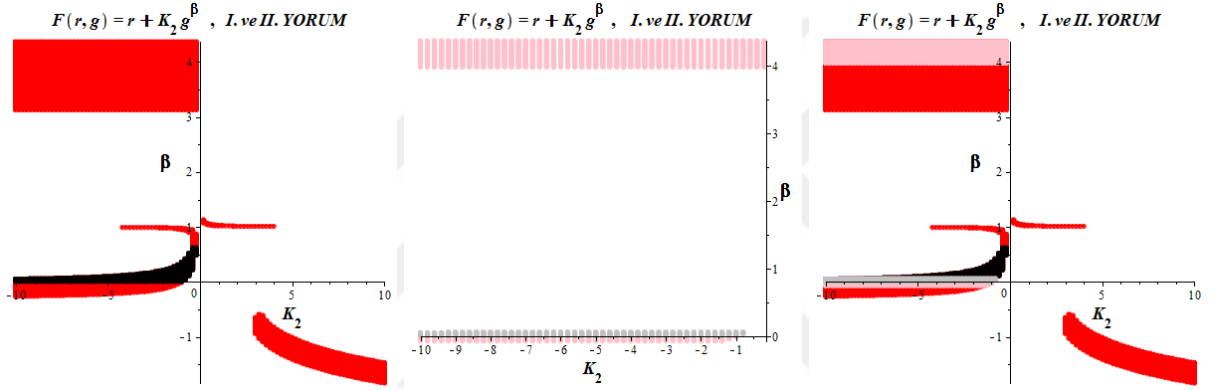
Bunlardan hareketle: *NEC*, *WEC*, *SEC*, *DEC* ve  $w_{KE}$  kolayca oluşturulabileceğinden bunları yazmaya gerek duymuyoruz.

Karanlık enerji bağlamında, Literatürde; erken enflasyon sonrası yavaşlama ve ardından da tekrar enflasyon evresine girme, Güneş sistemi testleriyle uygunluk gibi meseleleri açıklamak üzere teklif edilen başlıca  $f(R,G)$ –*gravite* modelleri, bilebildiğimiz kadarıyla, şunlardır:

1.  $f(R,G) = R + \frac{C_1 G^\alpha + C_2}{C_3 G^\alpha + C_4}$ , 2.  $f(R,G) = R + C_1 G^\alpha (1 + C_2 G^\beta)$ , 3.  $f(R,G) = R + C_1 G^\alpha + C_2 G \ln G$ ,  
4.  $f(R,G) = C_1 R + C_2 R^\alpha G^\beta$ , 5.  $f(R,G) = C_2 R^\alpha G^\beta$ . Bunlardan 1. ve 2. model, [148 ve 149] no’lu kaynaklarda; 3. model ise, [150] no’lu kaynakta ileri sürülmüş olup, [112 ve 117] de:  $\alpha > 0$ ,  $\mu^m = p^m = 0$  ve düz uzay alınarak enerji koşulları bakımından (ve o da yalnızca *WEC* bakımından) incelenmiştir. Apaynı inceleme [115] no’lu kaynakta, [151] no’lu kaynakta teklif edilen 4. ve 5. modellere uygulanmıştır. Bu modeller, Tez’imizde, kendi enerji koşulları formalizmimize göre daha genel bir çerçevede ele alınacaktır. Parametre sayısında eksiltme sağlamak üzere  $f(R,G)$ –*gravite* modellerini *GRT*’ye düzeltme terimli şekilde, yani  $f(R,G) = R + \psi(R,G) \rightarrow F(r,g) = r + \Psi(r,g)$  yapısında ele alıyoruz. Yukarıdaki modeller arasında ‘4 no’lu model bu tipte; 5 no’lu model ise bunun yalın şekli olan  $F(r,g) = K_2 r^\alpha g^\beta$  tipindedir. Biz, bunlara bir de  $F(r,g) = r + K_1 r^\alpha + K_2 g^\beta$  modelini ekleyeceğiz. Yukarıdaki 1, 2 ve 3 no’lu modeller ise;  $\Psi$  fonksiyonu  $\Psi = \Psi(g)$  şeklinde yalnızca  $g$  nin fonksiyonu olmak üzere,  $F(r,g) = r + \Psi(g)$  tipindedir. Biz bunlara; kuvvet kanunu, logaritmik ve üstel fonksiyonlar içeren:  $F(r,g) = r + K_2 g^\beta$ ,  $F(r,g) = r + K_2 \ln^\beta g$  ve  $F(r,g) = r + K_2 e^{\beta/g}$  modellerini de ekliyoruz. Bu tipten modeller için, §4.2’de de söylenildiği üzere, *I.* ve *II. YORUM* birbirlerine denk olmaktadır. Şimdi, enerji koşullarına göre muhtelif  $f(R,G)$ –*gravite* modellerinin kozmolojik güvenilirliklerini ele alalım.

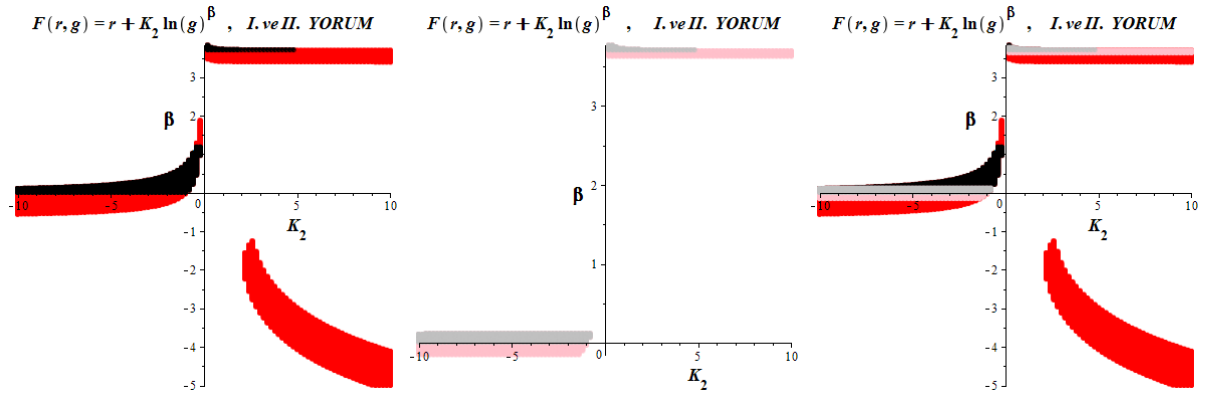
**Model 1:**  $f(R,G) = R + C_2 G^\beta \rightarrow F(r,g) = r + K_2 g^\beta$

$F(r,g) = r + \Psi(g)$  tipinde olan bu model kuvvet kanunu formunda olup,  $\beta$  ve  $K_2$  olmak üzere enerji koşullarına göre belirlenmesi gereken iki serbest parametre içermektedir ve bunlar hakkında da peşinen herhangi bir kısıtlayıcı veri bulunmamaktadır. Biz, bunların tanım kümelerini, yine,  $\beta \in [-5,5]$  ve  $K_2 \in [-10,10]$  aralıkları olarak alacağız. Sonuçları Şekil 4.30 da  $w=0$  ve  $\Omega_{k,0} = 0$  için gösteriyoruz. Yukarıda söylenildiği üzere  $F(r,g) = r + \Psi(g)$  tip modeller için *I.* ile *II. YORUM* birbirine denk olmaktadır.



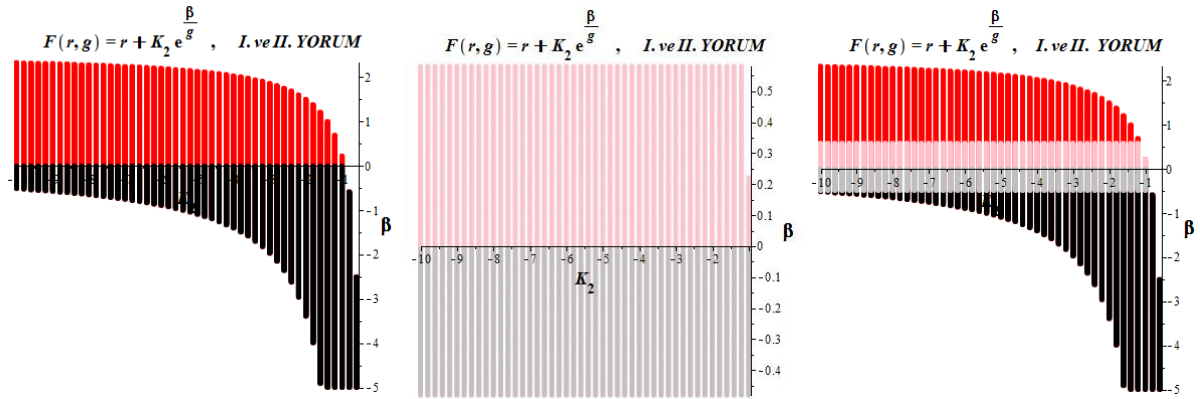
**Şekil 4.30:**  $F(r,g) = r + K_2 g^\beta$  modeli için  $K_2 - \beta$  düzleminde *I.* ve *2. koşul takımları* (sırasıyla sol ve orta paneller). Sağ panelde ise, bunların birlikte gösterimi yer almaktadır.

**Model 2:**  $f(R,G) = R + C_2 \ln^\beta G \rightarrow F(r,g) = r + K_2 \ln^\beta g$



**Şekil 4.31:**  $F(r,g) = r + K_2 \ln^\beta g$  modeli için  $K_2 - \beta$  düzleminde *I.* ve *2. koşul takımları* (sırasıyla sol ve orta paneller). Sağ panelde ise, bunların birlikte gösterimi yer almaktadır.

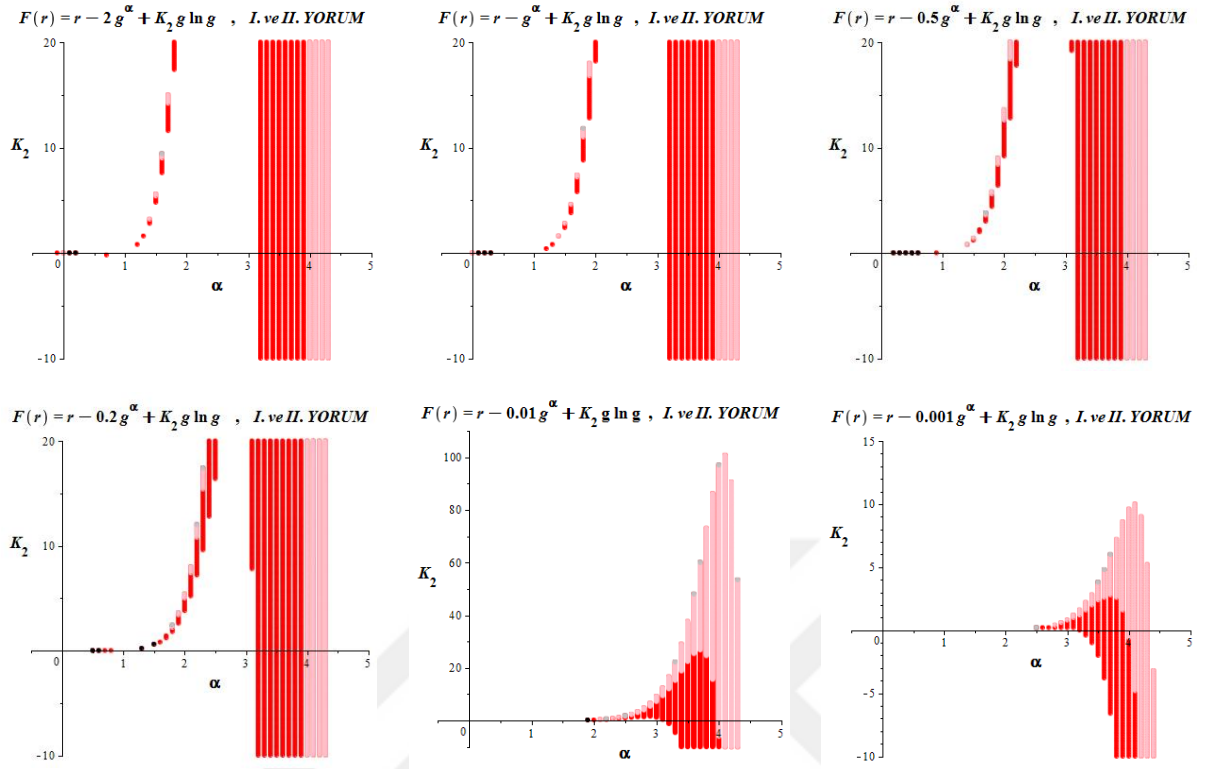
**Model 3:**  $f(R, G) = R + C_2 e^{\beta/G} \rightarrow F(r, g) = r + K_2 e^{\beta/g}$



**Şekil 4.32:**  $F(r, g) = r + K_2 e^{\beta/g}$  modeli için  $K_2 - \beta$  düzleminde 1. ve 2. koşul takımları (sırasıyla sol ve orta paneller). Sağ panelde ise, bunların birlikte gösterimi yer almaktadır.

**Model 4:**  $f(R, G) = R + C_1 G^\alpha + C_2 G \ln G \rightarrow F(r, g) = r + K_1 g^\alpha + K_2 g \ln g$

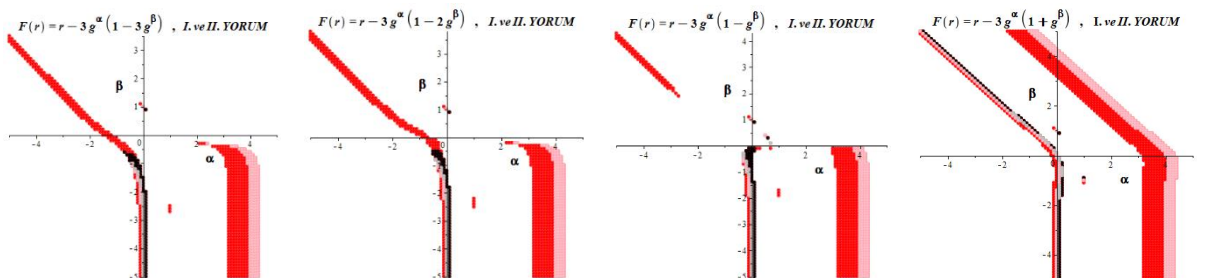
$K_1, K_2$  ve  $\alpha$  olmak üzere üç serbest parametre içeren bu modeli [112, 117, 150] örnekleme için  $K_1 = -2, -1, -0.5, -0.2, -0.01, -0.001$  değerlerini seçmekte ve 1. ve 2. koşul takım'larının sağlanmalarını ayrı ayrı değil de, birlikte, yani tek bir Şekil üzerinde ( $\alpha - K_2$  düzleminde) göstermekteyiz.



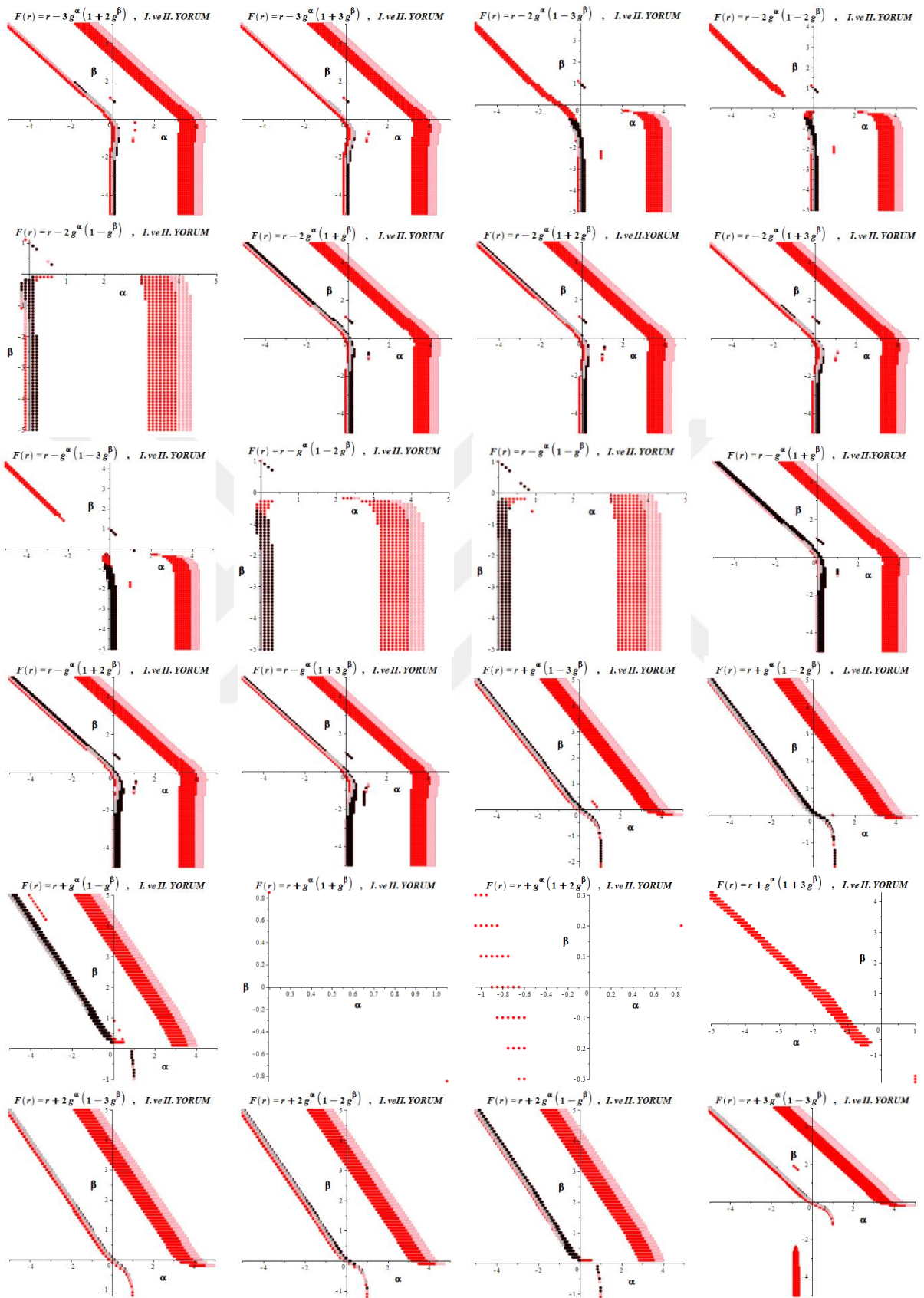
**Şekil 4.33:**  $F(r, g) = r + K_1 g^\alpha + K_2 g \ln g$  modeli için bazı  $K_1$  değerleri için 1. ve 2. koşul takımlarının  $\alpha - K_2$  düzleminde birlikte gösterimi.

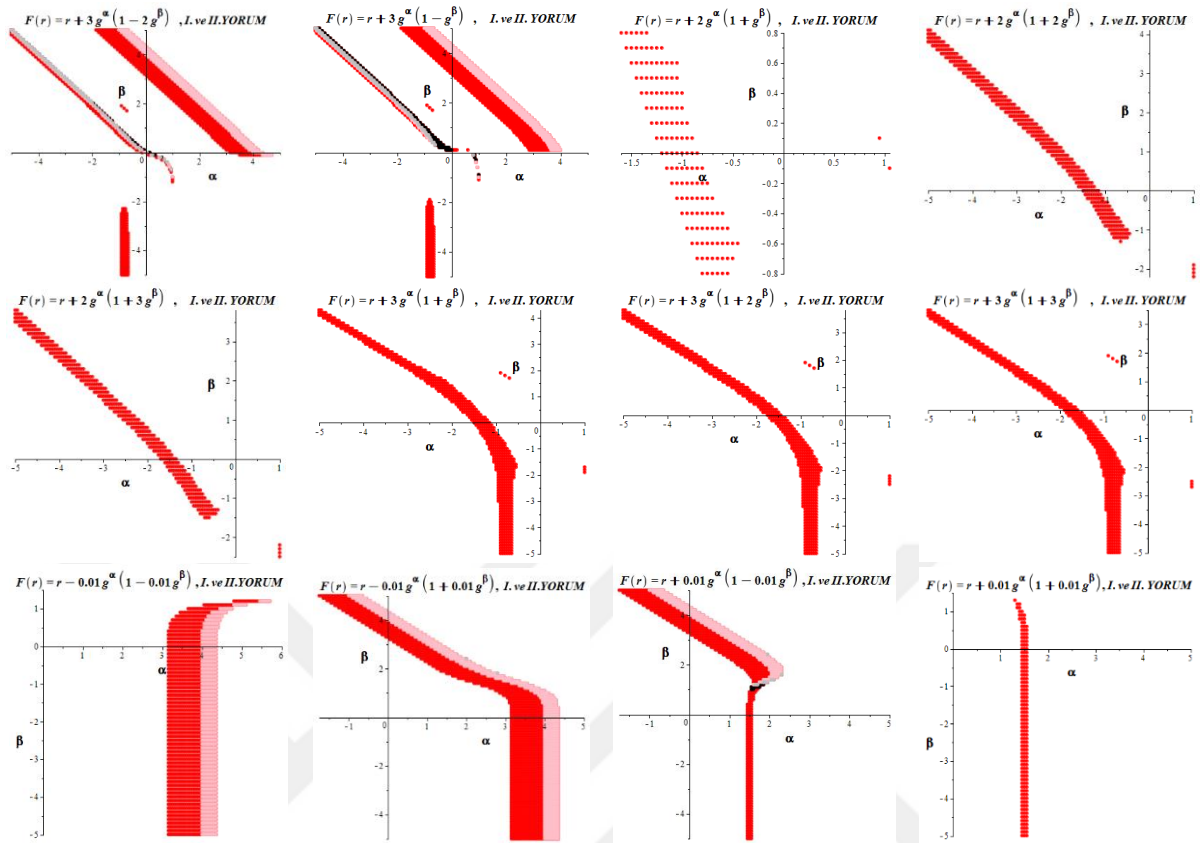
**Model 5:**  $f(R, G) = R + C_1 G^\alpha (1 + C_2 G^\beta) \rightarrow F(r, g) = r + K_1 g^\alpha (1 + K_2 g^\beta)$

$K_1, K_2, \alpha$  ve  $\beta$  olmak üzere dört serbest parametre içeren bu modelde [148, 149]  $K_1$  ve  $K_2$  için  $(K_1, K_2) \in \{-3, -2, -1, +1, +2, +3\} \times \{-3, -2, -1, +1, +2, +3\}$  değerlerini seçerek ve  $\alpha, \beta$  için de  $\alpha \in [-5, +5]$  ve  $\beta \in [-5, +5]$  aralıklarını  $\Delta\alpha = 0.1$  ve  $\Delta\beta = 0.1$  adımlarıyla tarayarak 1. ve 2. koşul takım'larının sağlanma durumlarını Şekil 4.34 de gösteriyoruz. Şekil'e ayrıca, nispeten küçük değerli  $K_1$  ve  $K_2$  değerlerinin oluşturduğu  $(K_1, K_2) \in \{(-0.01, -0.01), (-0.01, +0.01), (+0.01, -0.01), (+0.01, +0.01)\}$  ikililerine ilişkin sonuçları da ekliyoruz.









Şekil 4.34:  $F(r, g) = r + K_1 g^\alpha (1 + K_2 g^\beta)$  modeli için muhtelif  $(K_1, K_2)$  ikilileri için 1. ve 2. koşul takım'larını sağlayan  $(\alpha, \beta)$  değerleri.

$$\text{Model 6: } f(R, G) = R + \frac{C_1 G^\alpha + C_2}{C_3 G^\alpha + C_4} \rightarrow F(r, g) = r + \frac{k_1 g^\alpha + k_2}{k_3 g^\alpha + k_4}$$

Bu modelde [148, 149]  $k_1, k_2, k_3, k_4, \alpha$  olmak üzere beş serbest parametre varmış gibi görünmekle beraber, ikinci terimin pay ve paydası  $k_3$  e bölünür de  $K_1 \equiv k_1 / k_3$ ,  $K_2 \equiv k_2 / k_3$ ,

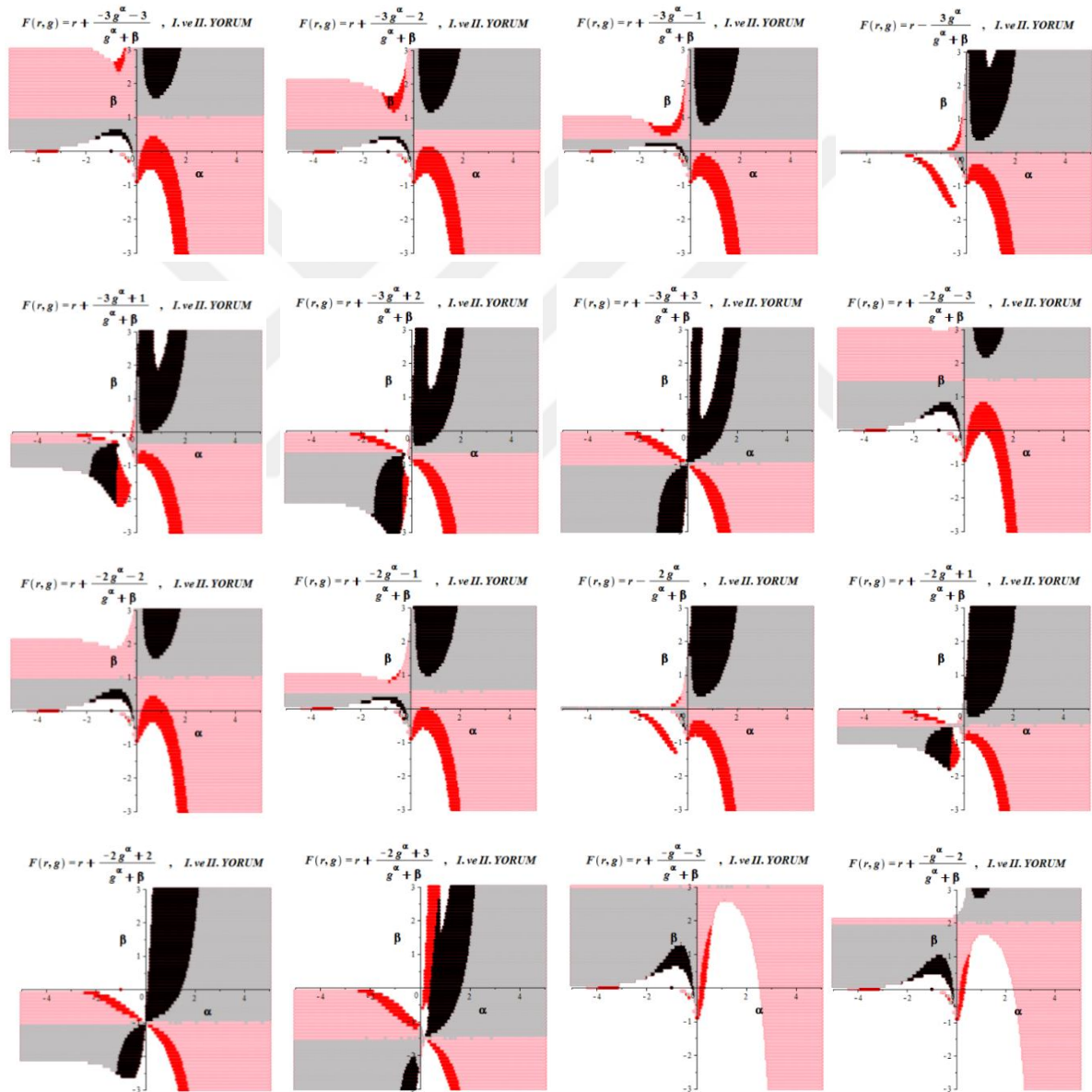
$K_3 \equiv k_4 / k_3$  tanımları yapılırsa, söz konusu fonksiyonel form  $F(r, g) = r + \frac{K_1 g^\alpha + K_2}{g^\alpha + K_3}$  şeklinde

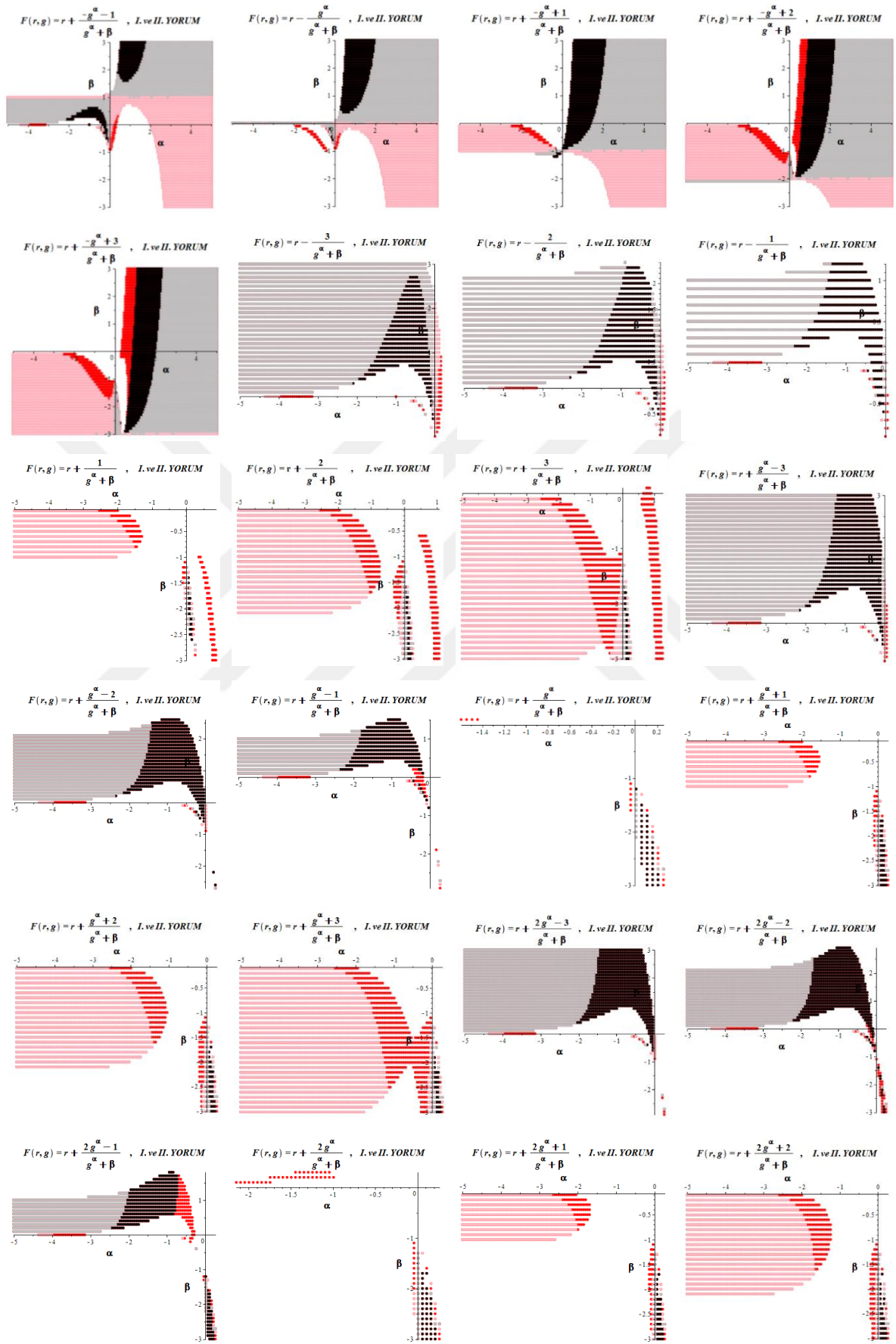
dört parametrelidir. İki parametre üzerinden simülasyon yapmak üzere  $\alpha$  parametresi dışında geri kalan  $K_1, K_2$  ve  $K_3$  parametrelerini ikişer ikişer üç türlü seçmek mümkündür. Buna göre, eğer  $(K_1, K_2)$  ikilisi peşinen seçilir ve geri kalan  $K_3$  e de  $K_3 \equiv \beta$  denirse simüle edilecek

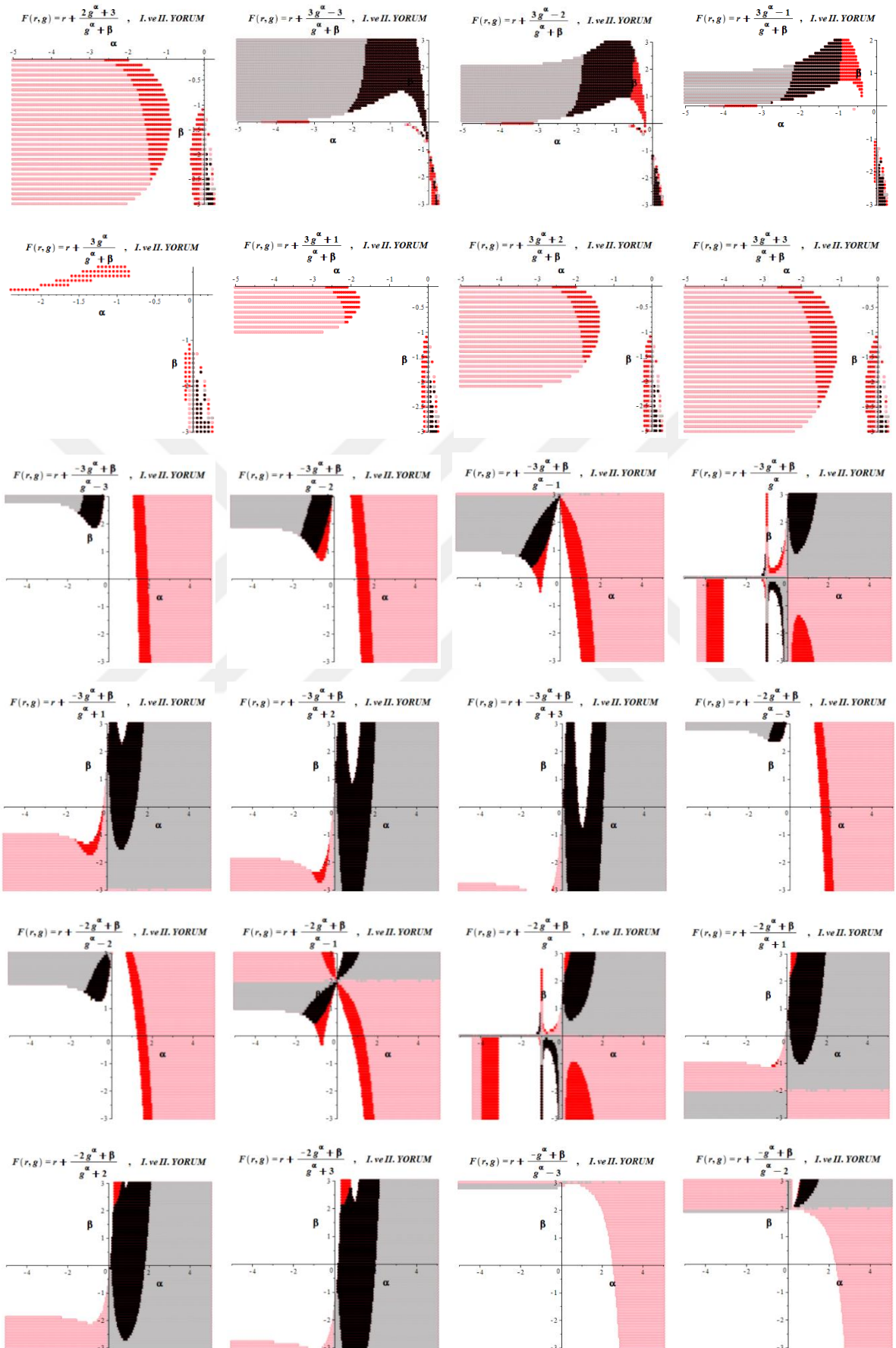
fonksiyonel form  $F(r, g) = r + \frac{K_1 g^\alpha + K_2}{g^\alpha + \beta}$  şeklini alır. Benzer şekilde:  $(K_1, K_3)$  seçimi ve  $K_2 \equiv \beta$

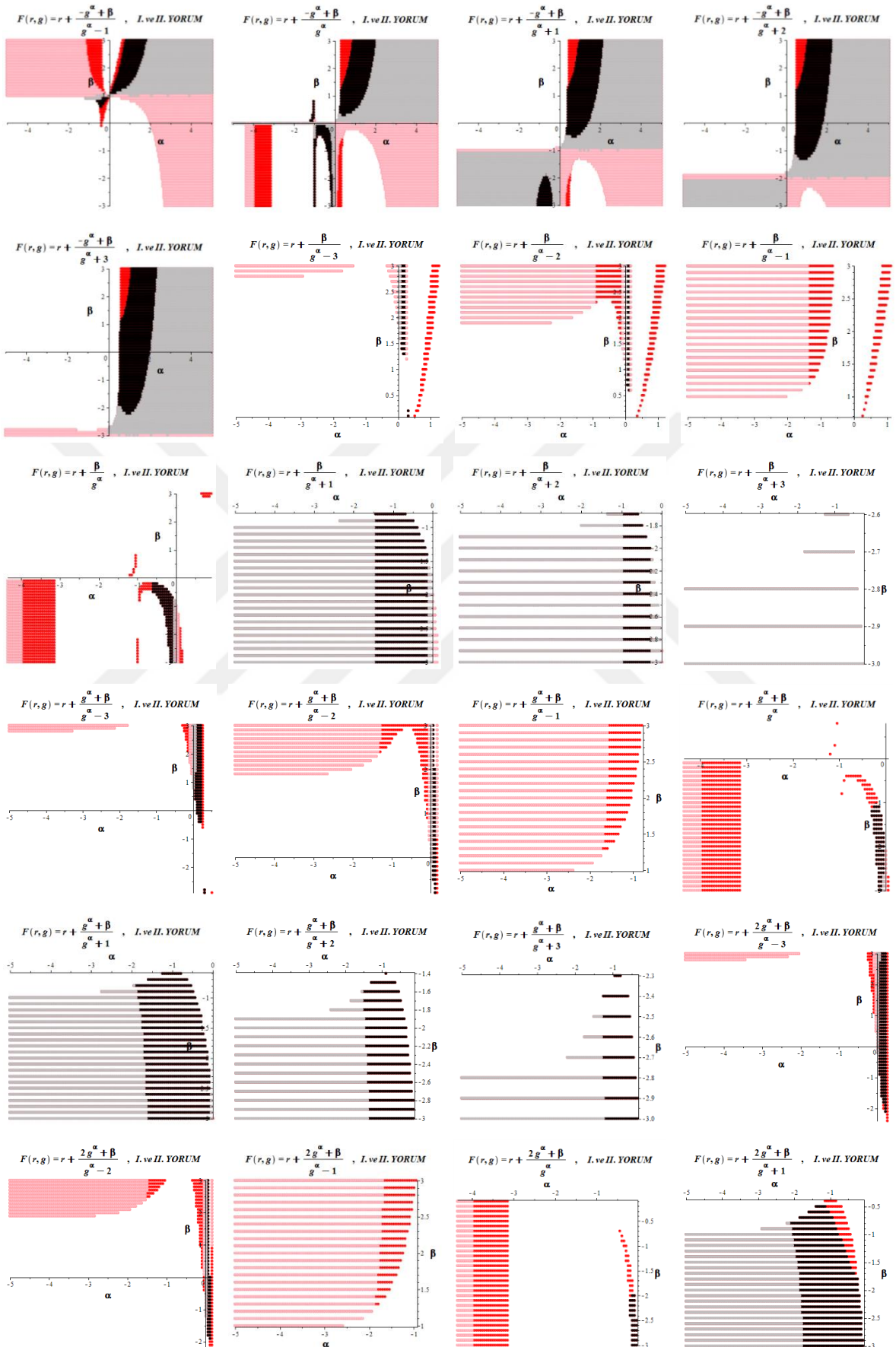
için  $F(r, g) = r + \frac{K_1 g^\alpha + \beta}{g^\alpha + K_3}$  ve  $(K_2, K_3)$  seçimi ve  $K_1 \equiv \beta$  için de  $F(r, g) = r + \frac{\beta g^\alpha + K_2}{K_3 g^\alpha + 1}$  olur.

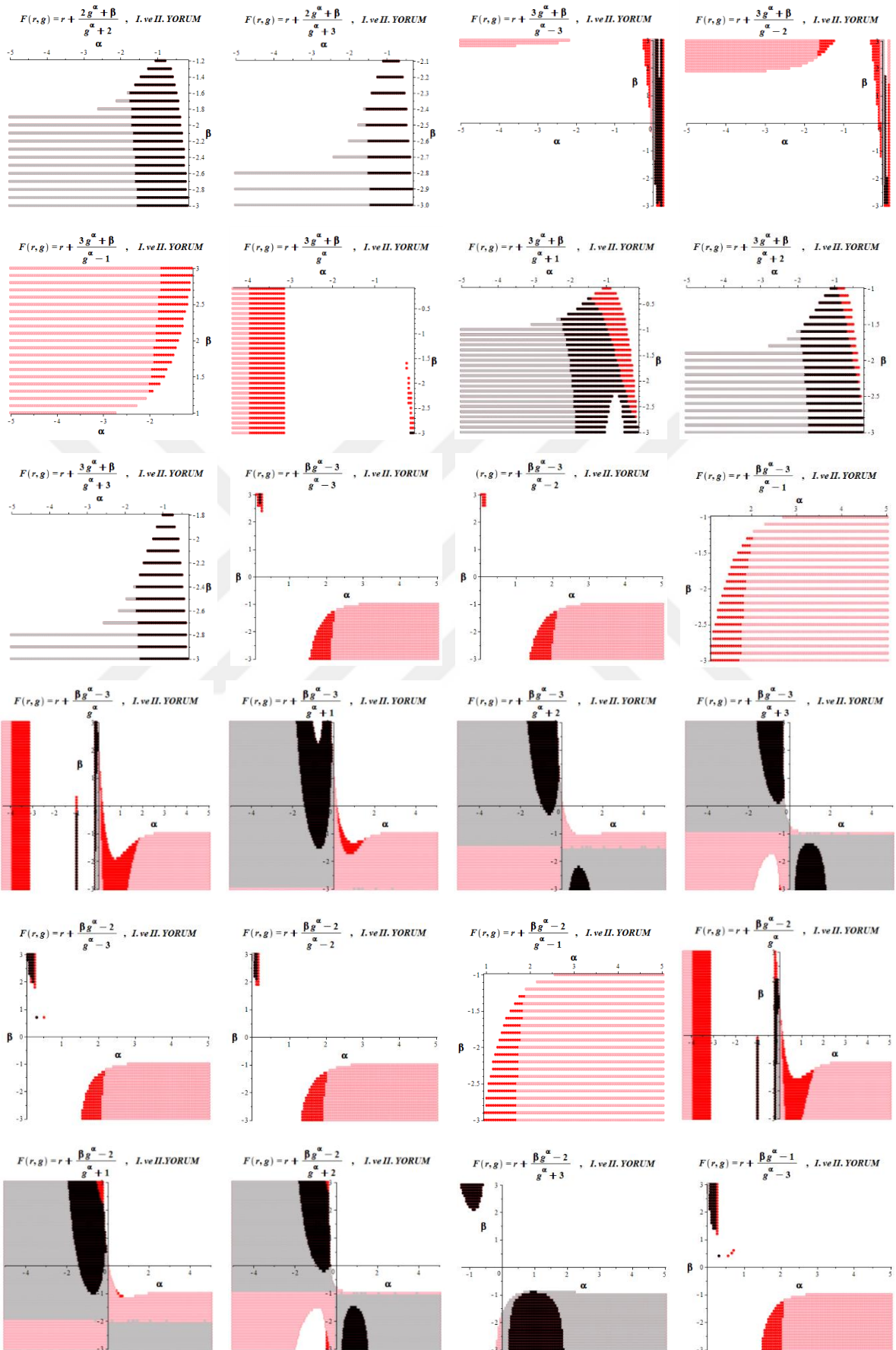
Aşağıda, enerji koşulları bu üç tür fonksiyon yazılımı için, seçilmiş  $(K_i, K_j)$  ikililerine göre  $\alpha$  ve  $\beta$  parametreleri üzerinden sınıarak  $\alpha - \beta$  düzleminde gösterilecektir. Bunun için,  $\alpha$  ve  $\beta$  yı:  $-5 \leq \alpha \leq +5$  ve  $-3 \leq \beta \leq +3$  aralıklarında  $\Delta\alpha = 0.05$ ,  $\Delta\beta = 0.1$  adımlarıyla alıyoruz.  $(K_i, K_j)$  ikileri ise,  $(K_i, K_j) \in \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\} \times \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$  kartezyen çarpım kümesinden seçilecektir. Toplamda  $3 \times 7^2 = 147$  adet olan modellerin pek çoğunu Şekil 4.35 de resmetmekteyiz.

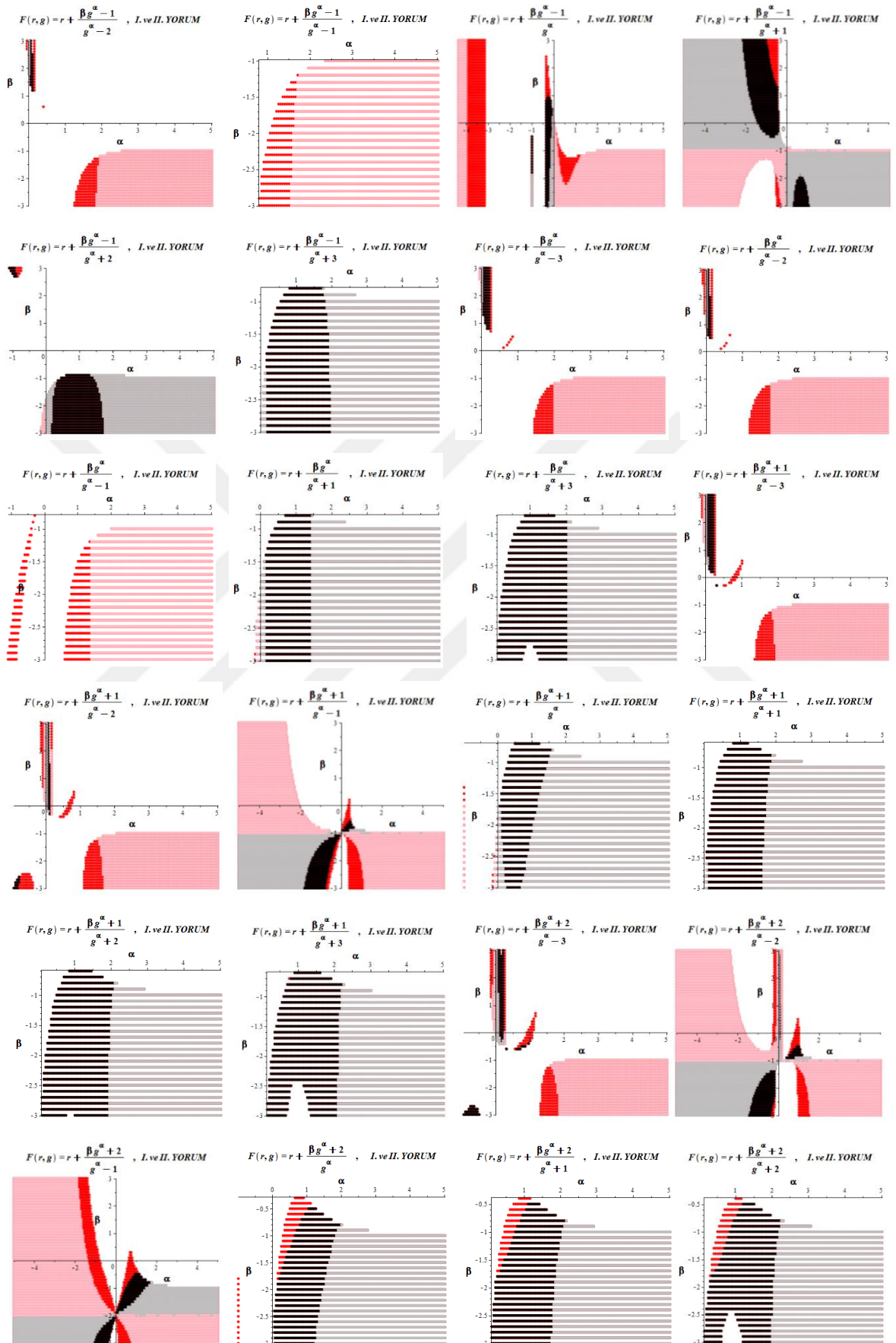




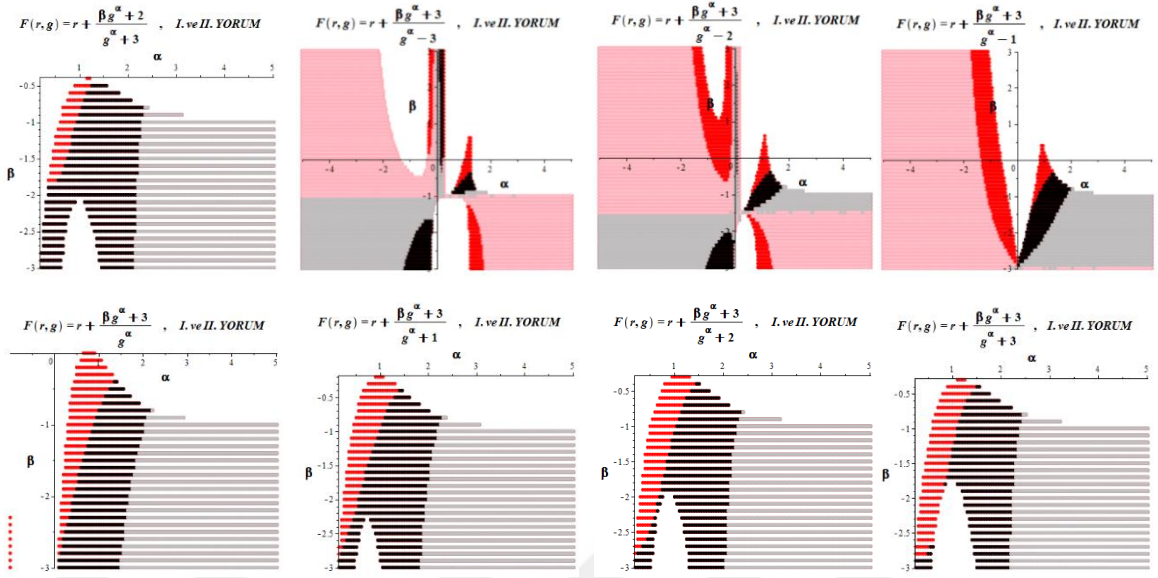








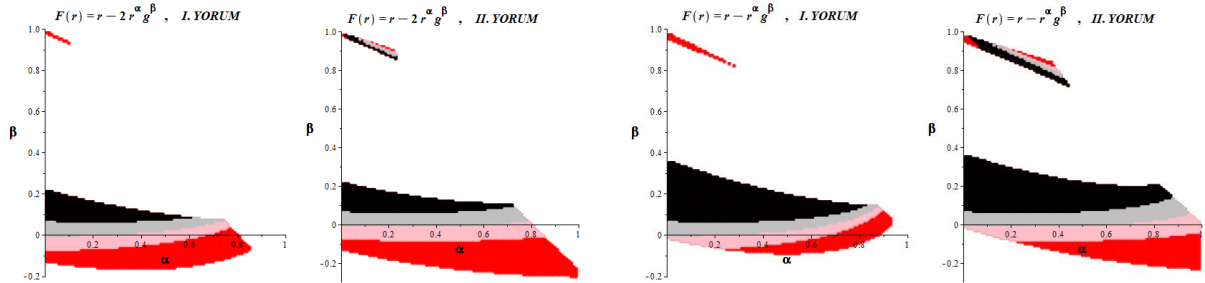


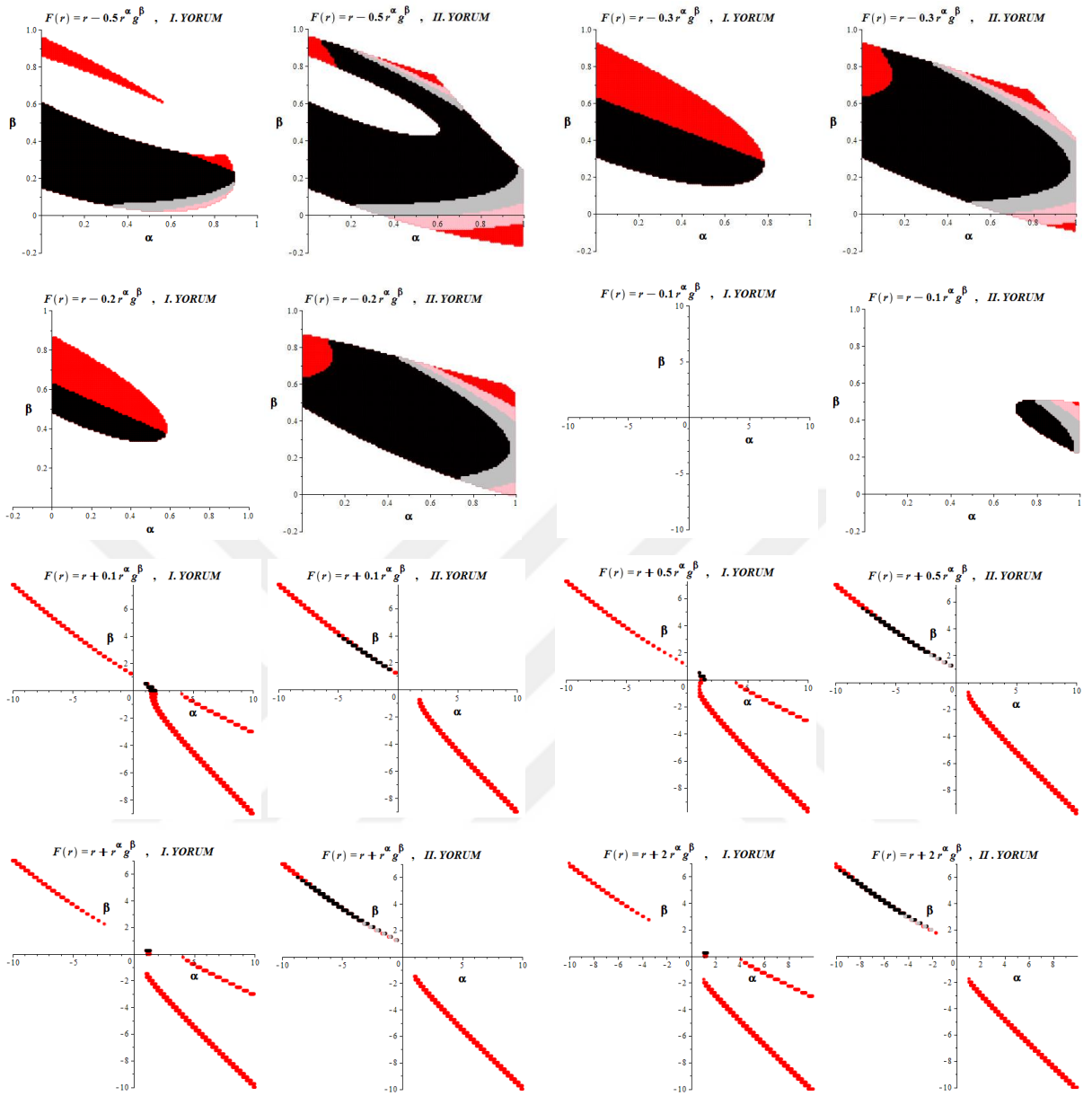


**Şekil 4.35:**  $F(r, g) = r + \frac{K_1 g^\alpha + K_2}{g^\alpha + \beta}$ ,  $F(r, g) = r + \frac{K_1 g^\alpha + \beta}{g^\alpha + K_3}$  ve  $F(r, g) = r + \frac{\beta g^\alpha + K_2}{K_3 g^\alpha + 1}$  yazılımları için peşinen seçilmiş bazı  $(K_i, K_j)$  ikililerine göre enerji koşullarının sağlanma durumlarının  $\alpha - \beta$  düzleminde gösterimi.

**Model 7:**  $f(R, G) = R + C_2 R^\alpha G^\beta \rightarrow F(r, g) = r + K_2 r^\alpha g^\beta$

$K_2, \alpha$  ve  $\beta$  olmak üzere üç serbest parametre içeren bu modeli [115, 151] örneklemek için  $K_1 = -2, -1, -0.3, -0.2, -0.1, +0.1, +0.5, +1, +2$  değerlerini seçmekte ve 1. ve 2. koşul takım'larının sağlanmalarını ayrı ayrı değil de, birlikte, yani tek bir Şekil üzerinde ( $\alpha - K_2$  düzleminde), iki panelli bloklar halinde I. YORUM ve II. YORUM'a göre göstermekteyiz.

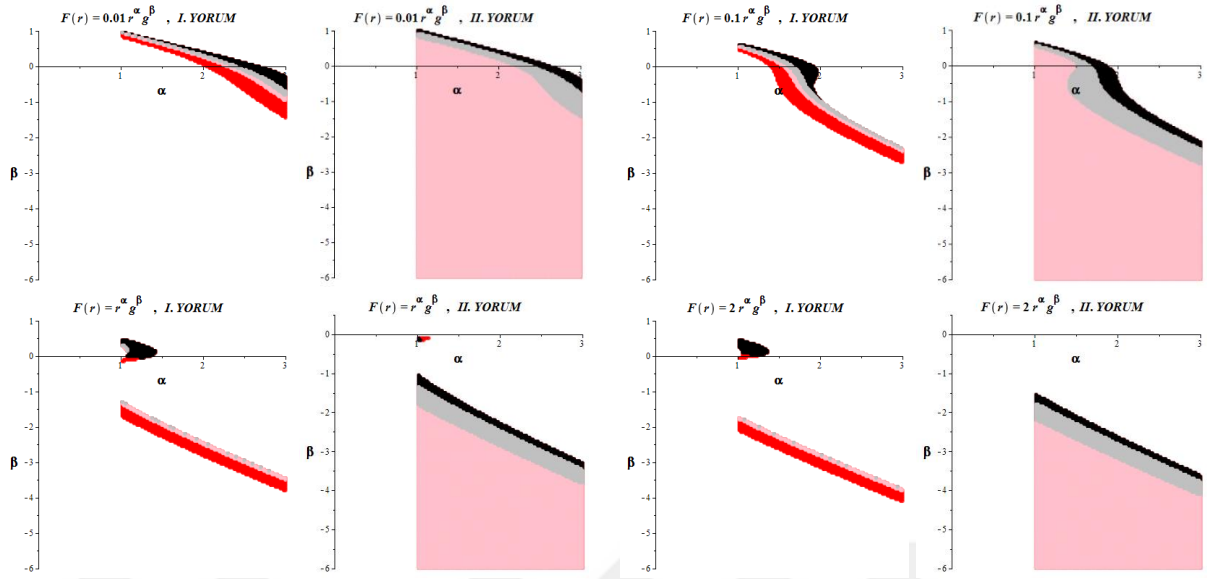




**Şekil 4.36:**  $F(r, g) = r + K_2 r^\alpha g^\beta$  modeli için bazı  $K_1$  değerleri için 1. ve 2. koşul takımlarının  $\alpha - \beta$  düzleminde birlikte gösterimi.

**Model 8:**  $f(R, G) = C_2 R^\alpha G^\beta \rightarrow F(r, g) = K_2 r^\alpha g^\beta$

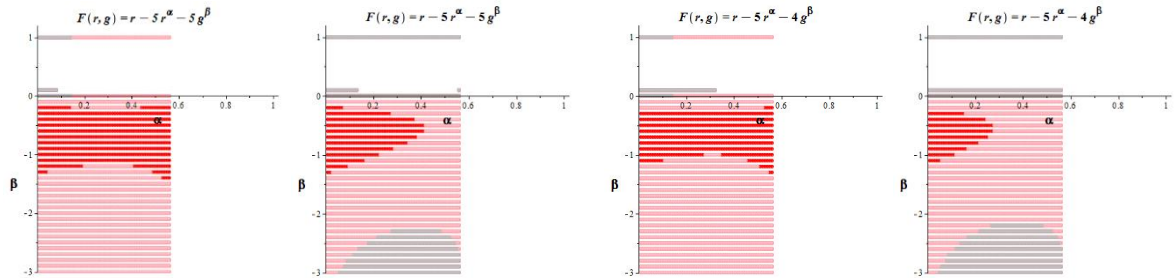
Yalın yapıdaki bu modelde [115, 151],  $K_2 = +0.01, +0.1, +1, +2$  seçimleri için 1. ve 2. koşul takım'larının sağlanma durumlarını tek bir Şekil üzerinde ( $\alpha - K_2$  düzleminde), I. YORUM (sol paneller) ve II. YORUM'a (sağ paneller) göre aşağıda göstermekteyiz.

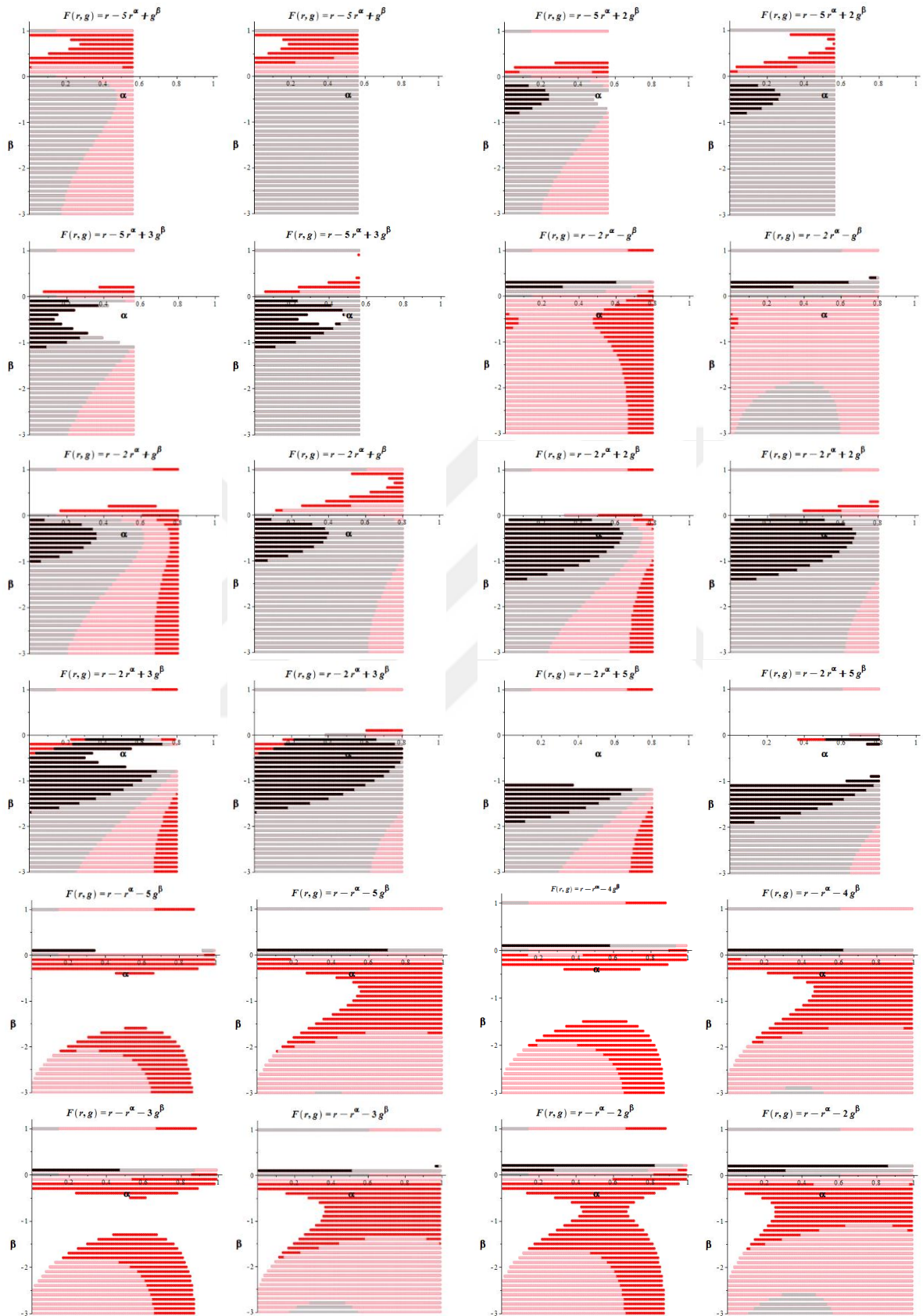


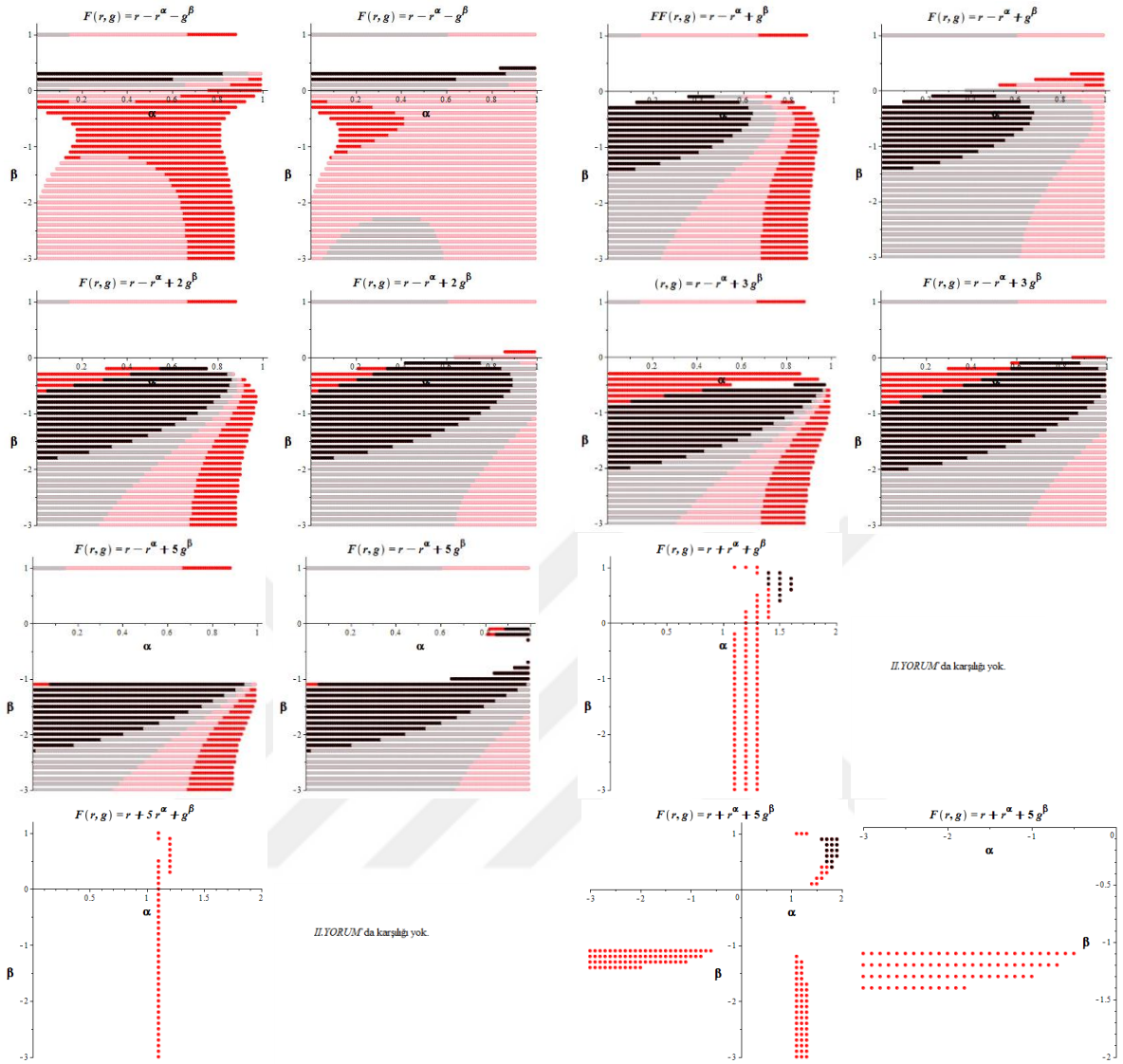
**Şekil 4.37:**  $F(r, g) = K_2 r^\alpha g^\beta$  modeli için bazı  $K_1$  değerleri için 1. ve 2. koşul takımlarının  $\alpha - \beta$  düzleminde birlikte gösterimi.

**Model 9:**  $f(R, G) = R + C_1 R^\alpha + C_2 G^\beta \rightarrow F(r, g) = r + K_1 r^\alpha + K_2 g^\beta$

$F(r, g) = r + K_1 r^\alpha + K_2 g^\beta$  modeli,  $(K_1, K_2)$  seçimlerine göre  $(\alpha, \beta)$  ikilileri için zengin bir güvenilirlik uzayı sunmaktadır. Bunu, aşağıda Şekil 4.38 de  $(K_1, K_2) \in \{(-5, -5), (-5, -4), (-5, +1), (-5, +2), (-5, +3), (-2, -1), (-2, +1), (-2, +2), (-2, +3), (-2, +5), (-1, -5), (-1, -4), (-1, -3), (-1, -2), (-1, -1), (-1, +2), (-1, +3), (-1, +5), (+1, +1), (+5, +1), (1, +5)\}$  değerleri için göstermekteyiz. Panellerde 1. ve 2. koşul takım'larının birlikte gösterimi kullanılmıştır. Sol bloktaki iki panelden ilki I. YORUM ve ikincisi de II. YORUM içindir. Aynı durum sağ blok için de geçerlidir.







**Şekil 4.38:**  $F(r, g) = r + K_1 r^\alpha + K_2 g^\beta$  modelinde bazı özel  $(K_1, K_2)$  ikilileri için, 1. ve 2. koşul takımları'nı sağlayan  $(\alpha, \beta)$  ikilileri. Sol bloktaki iki panelden ilki I. YORUM ve ikincisi de II. YORUM içindir; aynı durum sağ blok için de geçerlidir.

#### 4.10.3. $f(R, T)$ – Modelleri:

► Lagrange madde yoğunluğu için  $L_m = p^m$  seçilmesi durumu:

Lagrange madde yoğunluğunun  $L_m = p^m$  olarak seçilmesi durumunda  $f(R, G, T)$  – gravite için yazılmış (4.114) - (4.128) deki genel formüllerin  $f(R, T)$  – gravite 'ye indirgenmiş şekillerini topluca verelim.  $G$  ye ilişkin  $\Gamma_0, \Gamma_0^*, \Gamma_0^{**}$  büyüklükleri ile  $g$  ye göre  $F_{g,0}, F_{rg,0}, \dots$  gibi türev terimleri kaldırılırsa  $f(R, T)$  için indirgenmiş denklemler şunlar olur:

•  $L_m = p^m$ , *I. ve II. YORUM* için, enerji-momentum tansörünün izi ve türev bağıntıları:

$$\tau_0 = (-1 + 3w)\Omega_{m,0} \quad (4.152)$$

$$\tau_0^* = \frac{-2(1+w)[3(3+F_{t,0})+F_{tr,0}\mathfrak{R}_0^*]}{6+(3-w)F_{t,0}+2(1+w)F_{tt,0}\tau_0} \tau_0 \quad (4.153)$$

$$\begin{aligned} \tau_0^{**} &= \frac{-2(1+w)}{[6+(3-w)F_{t,0}+2(1+w)F_{tt,0}\tau_0]^2} \\ &\times \{ [-3(1+q_0)(3+F_{t,0})+3(F_{tr,0}\mathfrak{R}_0^*+F_{tt,0}\tau_0^*)+(F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^{*2}+F_{rt,0}\mathfrak{R}_0^*\tau_0^*)+F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^{**}]\tau_0 \\ &+ [3(3+F_{t,0})+F_{tr,0}\mathfrak{R}_0^*]\tau_0^* \} [6+(3-w)F_{t,0}+2(1+w)F_{tt,0}\tau_0] - [(3-w)(F_{tr,0}\mathfrak{R}_0^*+F_{tt,0}\tau_0^*) \\ &+ 2(1+w)(F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^*+F_{rt,0}\tau_0^*)\tau_0 + 2(1+w)F_{tt,0}\tau_0^*][3(3+F_{t,0})+F_{tr,0}\mathfrak{R}_0^*]\tau_0 \} \end{aligned} \quad (4.154)$$

•  $L_m = p^m$ , *I. YORUM* için toplam efektif madde ve basınç parametreleri:

$$\Omega_{m,0}^{t.ef} = \frac{1}{F_{r,0}} [\Omega_{m,0} + \frac{1}{3}(1+w)\Omega_{m,0}F_{t,0} - \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) - (F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{rt,0}\tau_0^*)] \quad (4.155)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{P,0}^{t.ef} &= \frac{1}{F_{r,0}} [w\Omega_{m,0} + \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) + \frac{2}{3}(F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{rt,0}\tau_0^*) + \frac{1}{3}(F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^{*2} + F_{rt,0}\tau_0^{*2} \\ &+ 2F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^*\tau_0^* + F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^{**} + F_{rt,0}\tau_0^{**})] \end{aligned} \quad (4.156)$$

•  $L_m = p^m$ , *II. YORUM* için toplam efektif madde ve basınç parametreleri:

$$\Omega_{m,0}^{t.ef} = \Omega_{m,0} + \frac{1}{3}(1+w)\Omega_{m,0}F_{t,0} + (1-F_{r,0})(1-\Omega_{k,0}) - \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) - (F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{rt,0}\tau_0^*) \quad (4.157)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{P,0}^{t.ef} &= w\Omega_{m,0} + \frac{1}{3}(1-F_{r,0})(2q_0 - 1 + \Omega_{k,0}) + \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) + \frac{2}{3}(F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{rt,0}\tau_0^*) \\ &+ \frac{1}{3}(F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^{*2} + F_{rt,0}\tau_0^{*2} + 2F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^*\tau_0^* + F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^{**} + F_{rt,0}\tau_0^{**}) \end{aligned} \quad (4.158)$$

Model sınamalarına geçmeden önce, (4.36) daki süreklilik denkleminde dayalı bulguları da kısaca hatırlatmak iyi olacaktır.

### A. Standart Maddenin Korunduğu Durum:

Bu varsayım altında (bkz. §(4.5.3), genel bir  $f(R,G,T)$  fonksiyonunun formu, (4.40) koşulunun geçerli olması kaydıyla,  $f(R,G,T) = \phi(R,G) + \psi(T)$  şeklinde kısıtlanmış olarak, (4.49) ile verilmekteydi. Konu edilen bağıntılar, boyutsuz değişkenler diliyle

$$6 + (3 - w)F_{t,0} + 2(1 + w)F_{r,0}\tau_0 \neq 0 \quad (4.159)$$

$$F(r,t) = \Phi(r) + \Psi(t) \quad (4.160)$$

$$\Psi(t) = \begin{cases} K_3 \ln|t| & , w = -1/3 \text{ için} \\ K_3 |t|^\gamma & , w \in ]-1/3, 1/3[ \cup ]1/3, 1] \text{ için} \end{cases} \quad (4.161)$$

şeklinde ifade edilebilirler. Burada,  $\gamma$  üssü keyfi olmayıp, (4.50) bağıntısıyla  $w$  ya bağlı idi ve Şekil 4.1 de de,  $\gamma = \gamma(w)$  ve  $w = w(\gamma)$  fonksiyonlarının değişimleri verilmiş idi. Bunlardan da açıkça görüleceği üzere,

$$w \in ]-1/3, 1/3[ \cup ]1/3, 1] \Leftrightarrow \gamma \in ]0, 3/4[ \cup ]3/4, 1] \quad (4.162)$$

dir. Boyutsuz  $K_3$  katsayısı ise, keyfi olmakla birlikte, verilmiş bir  $w$  ya da  $\gamma$  değeri için  $\tau_0^*$  ve  $\tau_0^{**}$  in varlık koşulu olan (4.159) u sağlamak zorundadır. Buna göre, (4.161) için (4.159) değerlendirilirse,  $K_3$  için şu kısıtlamalar bulunur:

1)  $w = -1/3$  için, şimdiki  $t = t_0$  zamanında  $t_0 \equiv \tau_0 = -2\Omega_{m,0} < 0$  olacağından  $\Psi(t) = K_3 \ln(-t)$  fonksiyonunun türevleri (4.159) a yerleştirildiğinde,  $K_3$  ün

$$K_3 \neq 6\Omega_{m,0} \quad \Rightarrow \quad K_3 \neq 1.86 \quad (4.163)$$

şeklinde kısıtlandırılmış olduğu bulunur.

2)  $-1/3 < w < 1/3$  ( $\Rightarrow 0 < \gamma < 3/4$ ) aralığında  $t_0 \equiv \tau_0 = (-1 + 3w)\Omega_{m,0} < 0$  olduğundan  $\Psi(t) = K_3(-t)^\gamma$  için (4.159), (4.50 ve 51) in de kullanımıyla, gerekli düzenlemeler sonrasında

$$K_3 \neq 3(-\tau_0)^{1-\gamma} \Rightarrow K_3 \neq \frac{3}{\gamma} \left( 0.62 \frac{4\gamma-3}{2\gamma-3} \right)^{1-\gamma} \Leftrightarrow K_3 \neq \frac{6(1+w)}{1+3w} [0.31(1-3w)]^{\frac{2(1-w)}{1+w}} \quad (4.164)$$

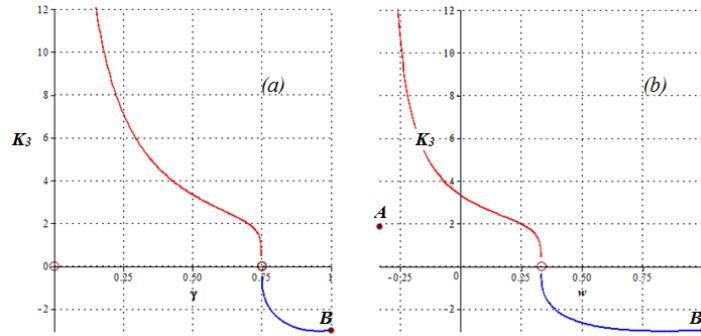
kısıtlamasını verir.

3)  $1/3 < w \leq 1$  ( $\Rightarrow 3/4 < \gamma \leq 1$ ) aralığında  $\Psi(t) = K_3(t)^\gamma$  için, benzer yolla

$$K_3 \neq -3(\tau_0)^{1-\gamma} \Rightarrow K_3 \neq -\frac{3}{\gamma} \left( -0.62 \frac{4\gamma-3}{2\gamma-3} \right)^{1-\gamma} \Leftrightarrow K_3 \neq -\frac{6(1+w)}{1+3w} [0.31(3w-1)]^{\frac{2(1-w)}{1+w}}$$

(4.165)

kısıtlaması bulunur. Özel olarak,  $w=1$  ( $\Rightarrow \gamma=1$ ) değeri için,  $\tau_0 = 2\Omega_{m,0} > 0$  olduğundan  $K_3 \neq -3$  olmak üzere  $\Psi(t) = K_3 t$  olur. Bu, §(4.5.3) de sıralanan 3 üncü saptamaya karşılık düşen durumdur. Boyutlu büyüklükler diliyle, bu;  $w=1$  için,  $\psi(T) = -\kappa^2 T$  şeklinde bir fonksiyonel formun var olamayacağını ifade eder. Buna karşılık,  $\psi(T) = -\lambda \kappa^2 T$  ( $\lambda \neq -1$ ) şeklinde bir fonksiyon mümkündür, fakat o da, yalnız ve yalnız  $w=1$  içindir. Şekil 4.39 da (4.161) için,  $\gamma$  ve  $w$  cinsinden  $K_3$  ün tüm yasak değerleri gösterilmektedir.



**Şekil 4.39:** (4.161) deki fonksiyon için: (a) da  $\gamma$  ya göre, (b) de ise  $w$  ya göre  $K_3$  ün tüm yasak değerleri. Kırmızı eğri (4.164); mavi eğri ise (4.165) kullanılarak çizilmiştir. (b) de, A ve B noktalarının koordinatları, sırasıyla,  $(-1/3, 1.86)$  ve  $(1, -3)$  dür. Boş yuvarlakçıklar ise fonksiyonun tanımlanmadığı  $\gamma$  ve  $w$  değerlerini göstermektedir.  $w = -1/3$  için  $\Psi(t) = K_3 \ln(-t)$  ve  $K_3 \neq 1.86$ ;  $w = 1$  için  $\Psi(t) = K_3 t$  ve  $K_3 \neq -3$  olduğunu vurgulayalım.



Şimdi,  $L_m = p^m$  seçiminde standart maddenin korunduğu duruma karşılık düşen yukarıda: 1), 2) ve 3) şeklinde sıraladığımız modellerin, enerji koşulları bakımından sınanmasını ele alalım.

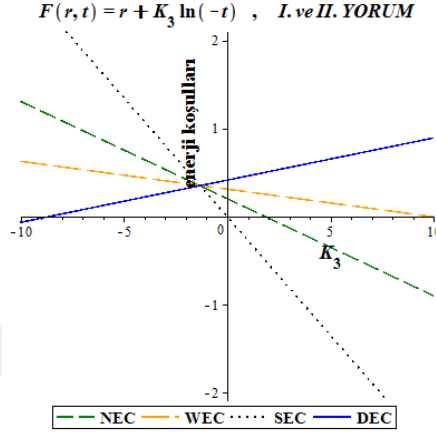
**Model 1:**  $F(r,t) = r + K_3 \ln(-t)$ ,  $w = -1/3$  ( $L_m = p^m$  ve korunum var)

(4.152 - 158) bağıntılarında yer alan büyüklüklerin *I. YORUM*'a ilişkin hesap sonuçlarını,  $\Omega_{k,0}$  yı serbest parametre olarak  $K_3$  cinsinden aşağıda dökümlüyoruz ( $10^{-12}$  duyarlılıklı bir hesaplamada bazı sayılarda onbindebirlik basamağa kadar yuvarlama yapılmıştır). Şekil 4.39 da ise enerji koşulları gösterilmektedir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_0 &= 10.86 - 6\Omega_{k,0}, \quad \mathfrak{R}_0^* = 5.82 + 12\Omega_{k,0}, \quad \mathfrak{R}_0^{**} = -26.28\Omega_{k,0} - 0.2634 \\ \tau_0 &= -0.62, \quad \tau_0^* = \frac{0.8267(3 - 1.6129K_3)}{2 - 1.0753K_3}, \quad \tau_0^{**} = \frac{0.3333(-32.5872 + 35.0400K_3 - 9.4194K_3^2)}{(2 - 1.0753K_3)^2} \\ F_0 &= 10.86 - 6\Omega_k - 0.4780K_3, \quad F_{r,0} = 1, \quad F_{rr,0} = 0 \\ F_{t,0} &= -1.6129K_3, \quad F_{tt,0} = -2.6015K_3, \quad F_{ttt,0} = -8.3918K_3 \\ \Omega_{m,0}^{t.ef} &= 0.3100 - 0.0314K_3, \quad \Omega_{p,0}^{t.ef} = -0.1033 - 0.0797K_3 \\ NEC &: 0.2067 - 0.1111K_3 \geq 0 \\ WEC &: 0.3100 - 0.0314K_3 \geq 0 \\ SEC &: 1 \times 10^{-11} - 0.2705K_3 < 0 \\ DEC &: 0.4133 + 0.0482K_3 \geq 0 \end{aligned}$$

*1. koşul takımı*'nın ifadesi olan yukarıdaki eşitsizliklerinin ortak çözümü olan  $K_3$  kuplaj sabitini, (4.163) koşulunu da göz önünde bulundurarak  $3.69745393711 \times 10^{-11} < K_3 < 1.86$  aralığı ile kısıtlandırılmış şekilde bulmaktayız. Bunu, aşağıdaki grafiksel gösterim de doğrulamaktadır. Süper ivmelenmenin ölçüsü olan  $w_{KE,0}$  nin değeri ise, bu  $F(r,t)$  modelinde,  $w_{KE,0} = -(9.54244679439 \times 10^{-11} / K_3) + 2.53423955351$  olup,  $-1.2 \leq w_{KE} \leq -0.8$  için,  $2.555392244570 \times 10^{-11} < K_3 < 2.86195596964 \times 10^{-11}$  ve  $w_{KE,0} < -1$  için de  $0 < K_3 < 2.69999999998 \times 10^{-11}$  gibi bir ince ayar gerektirmektedir. Güncel gözlemsel verilerin bu denli bir duyarlılığı taşımadığı göz önünde bulundurulursa, söz konusu değer aralıklarını

anlamli bulmamak gerekmektedir. Bu model hakkında son olarak şunları da belirtelim:  $\Omega_{k,0}$  'a bir değer atfetmeden yapılan hesaplamalarda sonuçlar bu parametreden bağımsız çıkmaktadır. Öte yandan, ele almış olduğumuz model  $f(R,G,T) = R + F(T)$  tipinde olduğundan, §4.2 de belirtildiği üzere *I.* ve *II.* *YORUM*'lar birbirlerine denk olmaktadır.

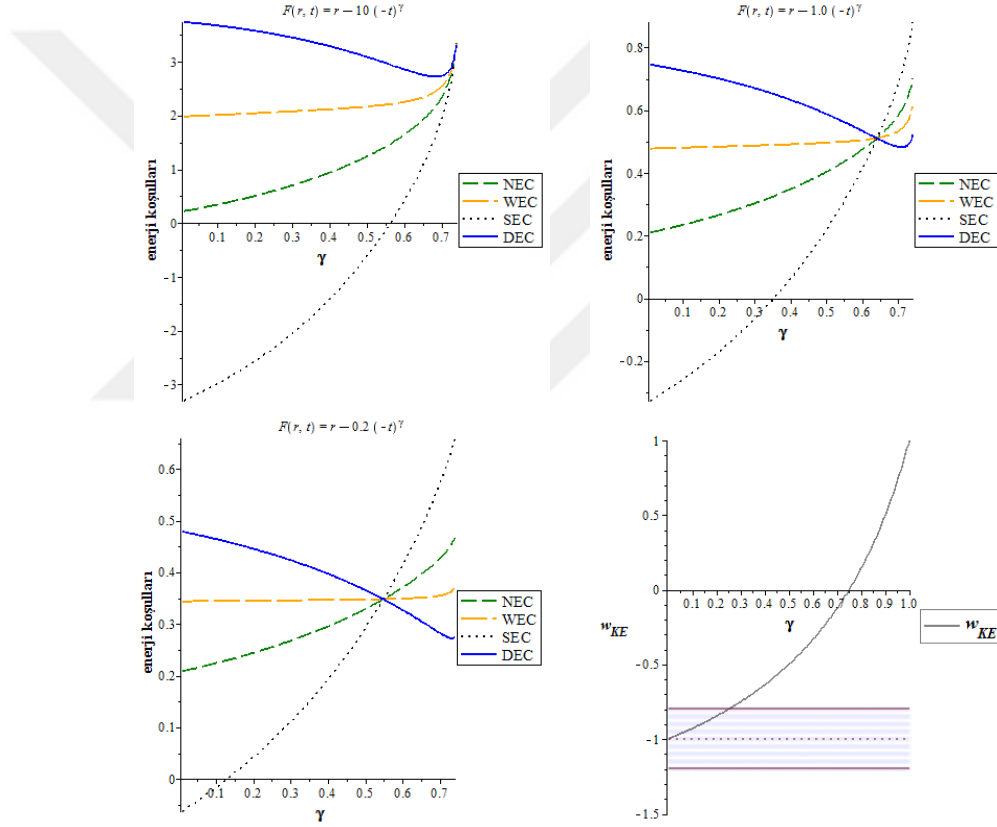


**Şekil 4.40:**  $F(r,t) = r + K_3 \ln(-t)$  modeli için, standart maddenin korunduğu  $w = -1/3$  durumunda enerji koşulları.

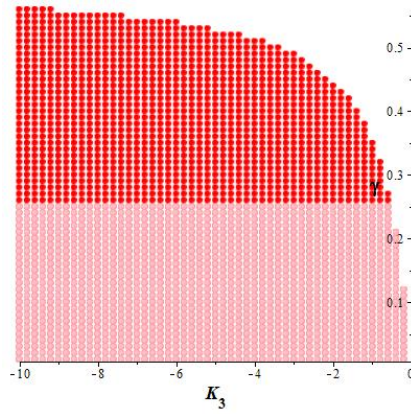
**Model 2:**  $F(r,t) = r + K_3(-t)^\gamma$ ,  $-1/3 < w < 1/3 \Leftrightarrow 0 < \gamma < 3/4$  ( $L_m = p^m$  ve korunum var)

Bu modelin sınanmasını önce *I. YORUM* altında, yine  $\Omega_{k,0}$  parametresini serbest tutarak, ele alıyoruz. İfadelerinin aşırı karmaşık olmalarından ötürü ilgili denklemleri yazmayıp, sonuçları yalnızca grafiklerle göstermeyi tercih ediyoruz.  $K_3$  parametresini,  $K_3 \in [-10, +10]$  aralığında ve  $\gamma$  parametresini de  $\gamma \in ]0, 0.75[$  aralığında, sırasıyla,  $\Delta K_3 = 0.2$  ve  $\Delta \gamma = 0.01$  adımlarıyla alarak ve  $\gamma$  ile  $w$  arasındaki (4.50) bağıntısını da hesaba katarak ve ayrıca, *1. ve 2. koşul takımları*'na (4.164) kısıtlamasını da ekleyerek sonuçları Şekil 4.40 ve 41 de gösteriyoruz. Şekil 4.41 de  $K_3$  ün  $[-10, +10]$  aralığında bazı seçilmiş özel değerleri için: NEC, WEC, SEC ve DEC'in  $\gamma$  üssüne göre değişimleri ile  $w_{KE,0}$  in değişimi gösterilmektedir. Bu beriki,  $w_{KE,0} = (\gamma - 1.5)(4\gamma - 3) / 2(\gamma^2 - 3\gamma + 0.25)$  sonucu uyarınca  $K_3$  den bağımsız olmaktadır. Söz konusu grafiklerden *1. koşul takımı*'nı sağlayan  $(K_3, \gamma)$  ikililerin bulunduğu ve bunların

hiçbirinin süper ivme içermediği anlaşılmaktadır. Söz konusu ikilileri hem belirginleştirmek ve hem de 2. koşul takımı'nın sağlanıp sağlanmadığını görmek için Şekil 4.42 yi oluşturuyoruz. Buradan; 1. koşul takımı'nın,  $\gamma$  için  $0 < \gamma < 3/4$  olan en geniş tanım aralığını her  $K_3 < 0$  değerleri için  $0 < \gamma < 0.56$  olarak; 2. koşul takımı'nın da,  $0 < \gamma \leq 0.25$  olarak sınırlandırdığı görülmektedir. Bu aralıklar, (4.51) uyarınca sırasıyla  $-1/3 < w < +0.064$  ve  $-1/3 < w < -1/5$  aralıklarına karşılık düşmektedir. Söz konusu model için elde edilen sonuçların II. YORUM için de apayını ve de  $\Omega_{k,0}$  büyüklüğünden bağımsız olduğunu kaydedelim.



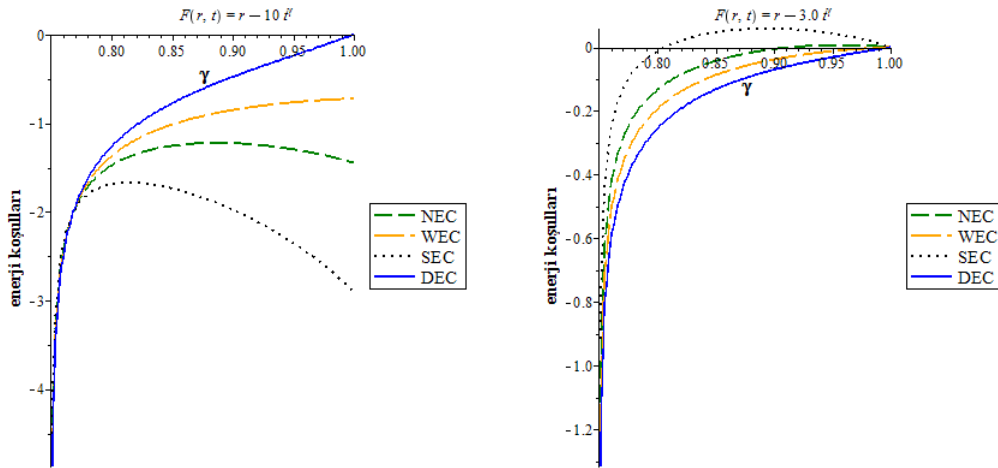
**Şekil 4.41:**  $F(r,t) = r + K_3 (-t)^\gamma$  için NEC, WEC, SEC ve DEC'in seçilmiş bazı özel  $K_3$  değerleri için  $\gamma$  ya göre değişimleri. Sağ alt-panelde ise  $K_3$  e bağımsızın  $w_{KE,0}$  nin değişimi yer almaktadır. Görüleceği üzere  $0 < \gamma < 3/4$  aralığı için daima  $w_{KE,0} > -1$  dir, yani, süper ivme bulunmamaktadır.

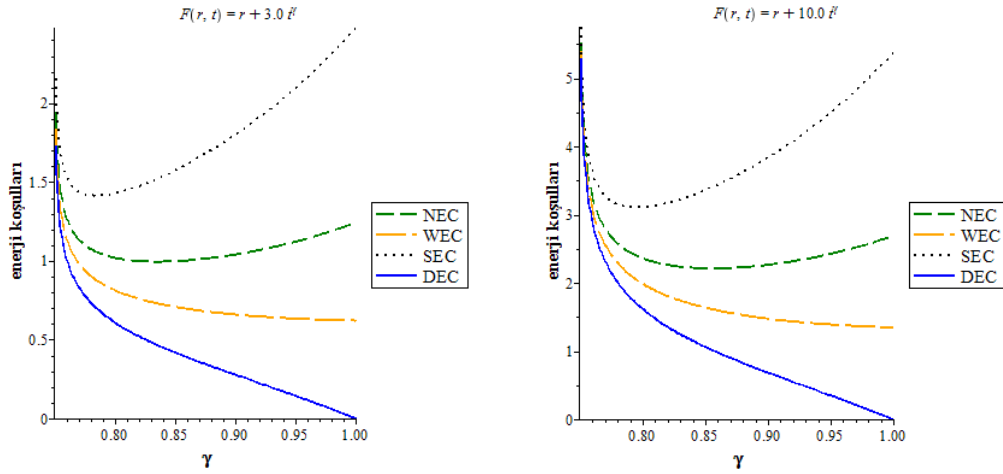


**Şekil 4.42:** 1. koşul takımı (pembe görünen bölge+sırf kırmızı bölge) ile 2. koşul takımı'nı sağlayan (pembe görünen bölge)  $(K_3, \gamma)$  ikilileri.  $(-10 \leq K_3 < 0) \times (0 < \gamma < 0.56)$  bölgesinde 2. koşul takımı'nı sağlayan model sayısının 1. koşul takımı'ninkine oranı:  $1233/2444 = \%50.5$  dir.

**Model 3:**  $F(r, t) = r + K_3 t^\gamma, 1/3 < w \leq 1 \Leftrightarrow 3/4 < \gamma \leq 1$  ( $L_m = p^m$  ve korunum var)

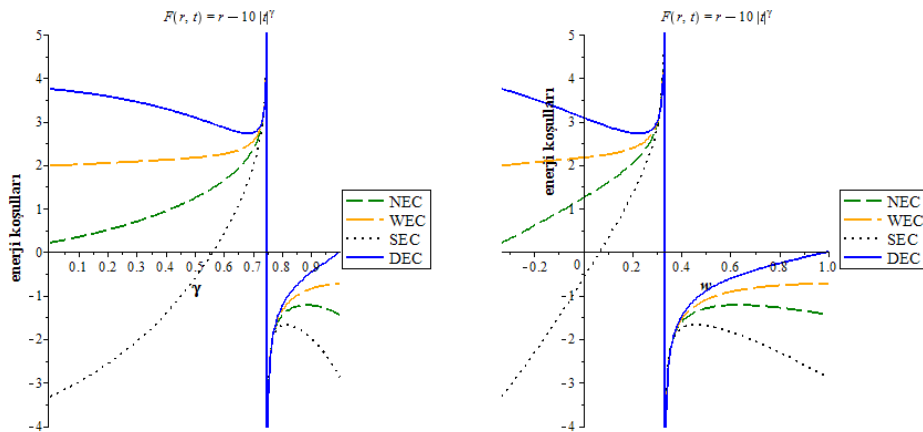
Bir önceki modelde izlenene benzer tarzdaki işlemler sonucunda, bu modelde 1. ve 2. koşul takımları'nın,  $\Omega_{k,0}$  parametresine bağlı olmaksızın, I. -ve dolayısıyla da- II. YORUM altında hiçbir  $(K_3, \gamma)$  ikilisi için sağlanmadığını bulmaktayız. Bu sonucu örnekleme amacıyla enerji koşullarının  $\gamma$  ya göre değişimlerini bazı  $K_3$  değerleri için aşağıda gösteriyoruz:





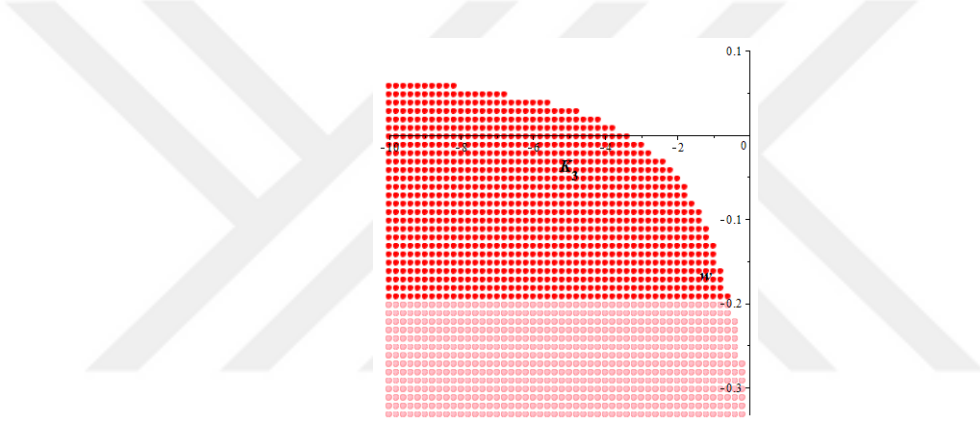
**Şekil 4.43:**  $F(r, t) = r + K_3 t^\gamma$  için NEC, WEC, SEC ve DEC' in seçilmiş bazı özel  $K_3$  değerleri için  $\gamma$  ya göre değişimleri.  $-10 \leq K_3 \leq +10$  ve  $3/4 < \gamma \leq 1$  aralıklarına ait hiçbir  $(\gamma, K_3)$  ikilisi için 1. koşul takımının sağlanması gerçekleşmemektedir.

Yukarıda Model 2 ve Model 3 olarak ele aldığımız iki model için, tanım kümelerini  $-1/3 < w < 1/3 < w \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \gamma < 3/4 < \gamma \leq 1$  şeklinde genişlettiğimizde, her iki modeldeki fonksiyonel formu tek türlü olarak  $F(r, t) = r + K_3 |t|^\gamma$  şeklinde alabiliriz. Bu taktirde, mesela Şekil 4.40 de yer alan  $F(r, t) = r - 10(-t)^\gamma$  modeli ile Şekil 4.42 de yer alan  $F(r, t) = r - 10 t^\gamma$  modeli yukarıda söylenene uygun olarak  $F(r, t) = r - 10 |t|^\gamma$  şeklinde “tek” bir fonksiyon olarak birleştirildiğinde bunun enerji koşulları grafiği,  $\gamma$  ya ve  $w$  ya göre Şekil 4.44 deki gibi olur.



**Şekil 4.44:**  $F(r, t) = r - 10 |t|^\gamma$  için NEC, WEC, SEC ve DEC in için  $\gamma$  ya göre (sol panel) ve  $w$  ya göre (sağ panel) değişimleri.

Şekil 4.45 de ise, söz konusu  $F(r,t) = r + K_3|t|^\gamma$  fonksiyonel tip için 1. ve 2. koşul takımları'nın sağlanmasını Şekil 4.42 deki gibi, ama bu sefer,  $(K_3, w)$  ikilileri olarak gösteriyoruz. Buradan, 1. koşul takımı'nın sağlanması için standart maddenin hal parametresinin üst sınırının  $w_{maks} \cong 0.06$  ( $\Leftrightarrow \gamma_{maks} \cong 0.56$ ) olması gerektiğini açıkça görmekteyiz.  $0 < w < 0.06$  aralığı  $p^m = w\mu^m$  bağıntısı uyarınca pozitif bir basınca karşılık gelmektedir ve bu durum için  $K_3$  ün alabileceği maksimum değer  $K_3 \approx -3.4$  olmaktadır ki, bu da basınçsız ( $w=0$ ) toz bulutu için olan değerdir. Grafikten ayrıca, 2. koşul takımı'nın ancak ve ancak  $-0.33 < w < -0.20$  aralığı için, yani, aşırıya yakın negatif basınç durumu için sağlandığı görülmektedir.



Şekil 4.45:  $F(r,t) = r - 10|t|^\gamma$  için 1. koşul takımı (pembe görünen bölge+sıfır kırmızı bölge) ile 2. Koşul takımı'nı sağlayan (pembe görünen bölge)  $(K_3, w)$  ikilileri.

Yukarıdaki sonuçların Şekil 4.42 den de, ama dolaylı olarak, yani, (4.51) bağıntısını kullanmak kaydıyla elde edilebileceğini belirtelim.

### B. Standart Maddenin Korunmadığı Durum:

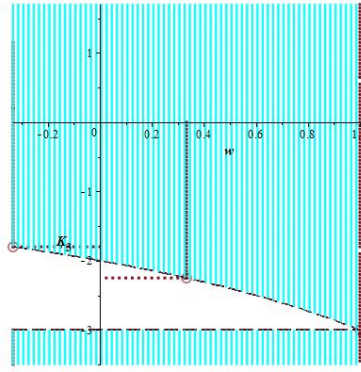
§(4.5.4) de  $w \neq 1$  varsayımı altında standart maddenin korunumunun olmaması için  $f_T \neq -\kappa^2$   
 $\Rightarrow f(R,T) \neq \phi(R) - \kappa^2 T$ , yani,  $\psi(T) \neq -\kappa^2 T$  olması gerektiği gösterilmiştir. Boyutsuz değişkenler diliyle bu:  $(c^2 / H_0^2) \times \psi(T) = (c^2 / H_0^2) \times (-\kappa^2) \times (3H_0^2 / \kappa^2 c^2) \times t \Rightarrow \Psi(t) \neq -3t$  demektir. Başka bir deyişle,  $\Psi(t)$  nin  $\Psi(t) = K_3 t$  şeklinde bir genelleştirilmesi için  $K_3 \neq -3$  olmalıdır. Yine, boyutlu şekliyle:  $\psi(T) = \lambda \kappa^2 T$  ( $\lambda \neq -1$ ); boyutsuz şekliyle de:

$\Psi(t) = K_3 t$  ( $K_3 \neq -3$ ) olarak yazdığımız bu fonksiyonel form için, verilmiş bir  $w \neq 1$  için  $\lambda$  yı (ya da  $K_3$  ü) veya verilmiş bir  $\lambda \neq -1$  için (ya da  $K_3 \neq -3$  için)  $w$  yu kısıtlayan (4.59) ve (4.62) olmak üzere iki bağıntı daha bulunmaktaydı (bkz. §(4.5.4)). Bunlar,  $K_3$  sabiti kullanılarak tekrar ifade edilirse:

$$6 + K_3(3 - w) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad K_3 \neq \frac{-6}{3 - w} \quad \text{veya} \quad w \neq \frac{3(2 + K_3)}{K_3} \quad (4.166)$$

$$\frac{-6(3 + K_3)(1 + w)}{6 + K_3(3 - w)} < 0 \quad (4.167)$$

olur. Bu kısıtlamaları Şekil 4.46 da gösteriyoruz.



**Şekil 4.46:**  $L_m = p^m$  için I. ve II. YORUM'a göre sıradan maddenin korunmadığı durumda  $F(r, t) = \Phi(r) + \Psi(t)$ ,  $\Psi(t) = K_3 |t|$  için  $w - K_3$  düzlemi. Modeli geçerli kılan  $(w, K_3)$  değer çiftleri koyulaştırılmış bölge ile gösterilmektedir. Noktalı ve kesikli çizgiler  $6 + K_3(3 - w) \neq 0$  ve  $\frac{-6(3 + K_3)(1 + w)}{6 + K_3(3 - w)} < 0$  uyarınca yasak  $(w, K_3)$  değerlerini belirtmektedir.

Yukarıdaki sonuçlar,  $w \neq 1$  varsayımı altında standart maddenin korunumunun olmaması için  $\Psi(t) = K_3 t$  ( $K_3 \neq -3$ ) dışında başka tip fonksiyonel form alınmasını dışlamamaktadır. Nitekim, mesela,  $\Psi(t) = K_3(t)^\gamma$  tipinde bir fonksiyon da alınabilir; zira,  $\gamma \neq 1$  için  $\Psi_t = K_3 \gamma t^{\gamma-1} \neq -3$ , yani,  $f_T \neq -\kappa^2$  dir. Ancak, bu tip bir fonksiyon, ya da genel olarak,  $\Psi(t) = K_3 t$  dışında herhangi bir fonksiyon için, (4.58) in integralini analitik olarak elde edip de (4.47) aracılığıyla (4.61) e benzer tarzda simülasyon parametreleri cinsinden  $\mu^m \propto a^{Y(w, K_3, \dots)}$

açık çözümünü tesis etmek mümkün olmadığından (bkz. §(4.5.4)), (4.102) nin benzeri bir  $Y(w, K_3, \dots) < 0$  koşulu ileri sürülemez gözükmektedir. Durum böyle görünmekle birlikte, yine de bu amacı sağlayacak bir çözüm bulunmaktadır; o da, tam çözüm yerine, (4.38) deki  $(\dot{\mu}^m / \mu^m) = (\dot{T} / T)$  ile (4.98) den elde edilebilecek  $(\dot{T} / T) = H(\tau^* / \tau)$  bağıntısının birleştirilmesi olan

$$\frac{\dot{\mu}^m}{\mu^m} = \frac{\dot{T}}{T} = H \frac{\tau^*}{\tau} \quad (4.168)$$

denkleminde yola çıkmaktır. Kozmik zamanla standart madde yoğunluğunun azalması,  $\mu^m > 0$  varsayımı altında matematiksel olarak  $\dot{\mu}^m < 0$  demek olduğundan, buradan,  $H(\tau^* / \tau) < 0$  olması gerektiği sonucu çıkar ve bu da şimdiki zaman için değerlendirildiğinde,  $H_0 > 0$  dolayısıyla,  $\tau_0^* / \tau_0 < 0$  koşuluna yol açar.  $L_m = p^m$ , *I. YORUM* çerçevesinde ve standart maddenin korunmadığı duruma ilişkin bu koşul, (4.152 ve 153) kullanılarak payda koşuluyla birlikte açıkça

$$\text{payda}(\tau_0^*) \neq 0 \Rightarrow 6 + (3 - w)F_{t,0} + 2(1 + w)(-1 + 3w)\Omega_{m,0}F_{tt,0} \neq 0 \quad (4.169.a)$$

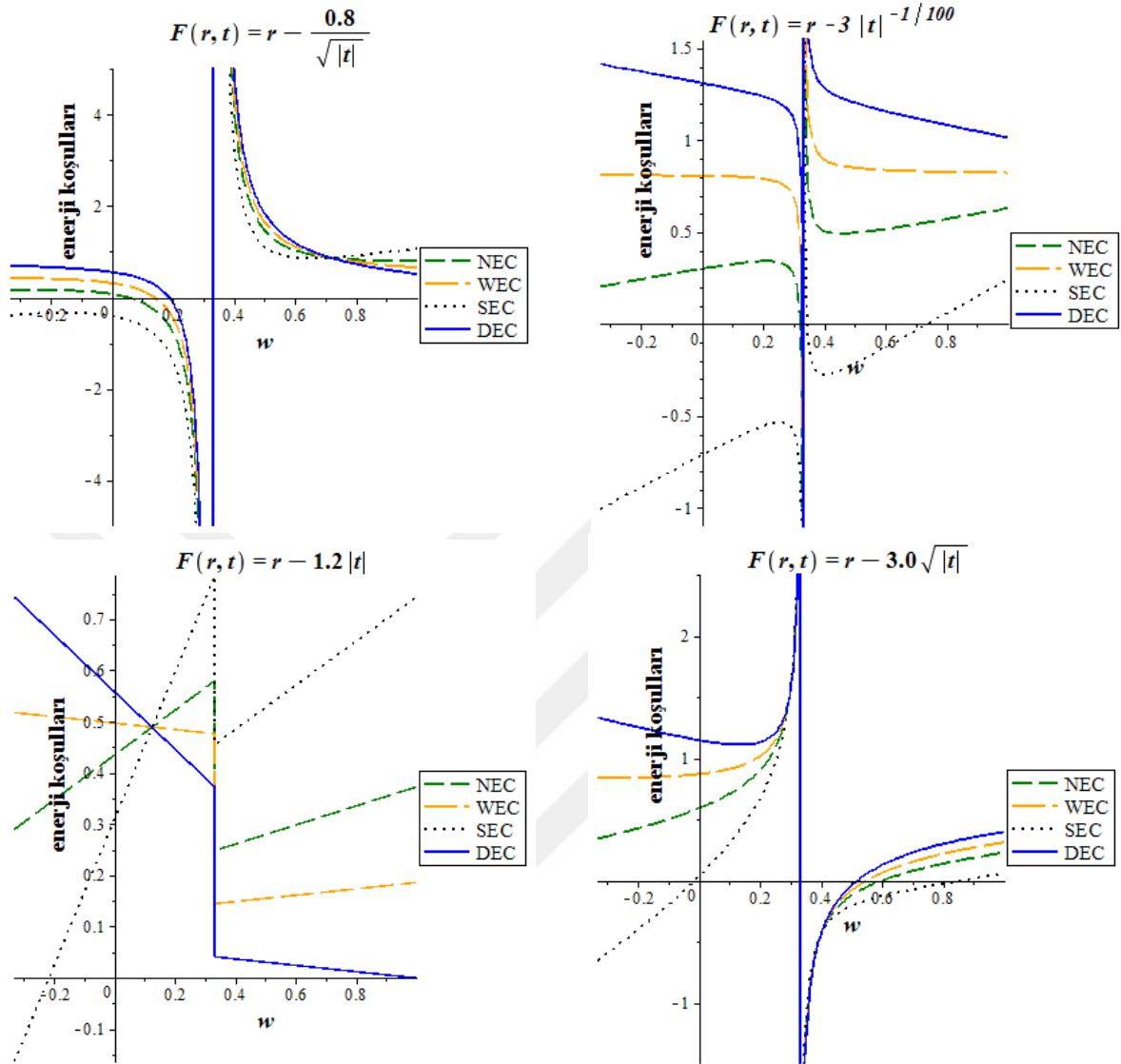
$$\tau_0^* / \tau_0 < 0 \Rightarrow \frac{-2(1 + w)[3(3 + F_{t,0}) + F_{tr,0}\mathfrak{R}_0^*]}{6 + (3 - w)F_{t,0} + 2(1 + w)(-1 + 3w)\Omega_{m,0}F_{tt,0}} < 0 \quad (4.169.b)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu bağıntıların,  $F(r, t) = \Phi(r) + \Psi(t)$  ve  $\Psi(t) = K_3 t$  özel durumu için, (4.166) ve (4.167) bağıntılarına indirgenecekleri kolaylıkla doğrulanabilir. Simülasyonlarda *1. ve 2. koşul takımları*'na ek olarak (4.169) kısıtlamaları da göz önüne alınacaktır. Simülasyonlar konusunda bir de şunu vurgulamak iyi olacaktır: her ne kadar  $\Psi(t) = K_3 t$  gibi bir fonksiyonel form, korunumun hem olduğu ve hem de olmadığı durum için kullanılabilirse de, aralarında şöyle bir farklılık vardır: ikinci durumda, ilk durumdakinden farklı olarak,  $\gamma$  üssü ile  $w$  hal parametresi arasında  $\gamma = \gamma(w)$  (ya da  $w = w(\gamma)$ ) gibi herhangi bir bağıllık söz konusu olmamaktadır. Şimdi, bu farklılıkları göz önünde bulundurarak aşağıdaki fonksiyonel form çerçevesinde bazı model örneklemeleri sunalım.



**Model 4:**  $F(r,t) = r + K_3 |t|^\gamma$ ,  $w \neq 1$  ( $L_m = p^m$  ve korunum yok)

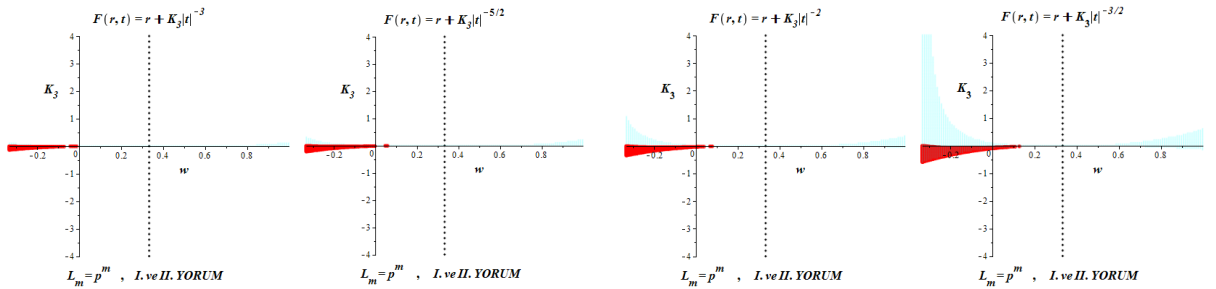
Bu fonksiyonel formda,  $K_3$  ün serbest bir parametre olmasının yanısıra  $\gamma$  da,  $\gamma = \gamma(w)$  gibi bir bağıntı olmaması nedeniyle, serbest bir parametredir. Dolayısıyla; grafiksel gösterimler için,  $K_3$ ,  $\gamma$  ve  $w$  parametrelerinden en az birini peşinen seçmek zorunluluğu bulunmaktadır.  $f(R)$  ile  $f(R,G)$  modellerinde daha önce yaptığımız gibi  $w=0$  almak, buradaki gibi  $T$  barındıran modellerde, basıncın etkisini hiç yansıtmaması bakımından fazla kısıtlayıcı bir varsayım mahiyetini taşıyacaktır. Dolayısıyla, bundan böyle  $w$  parametresi grafiksel gösterimlerde, aksi söylenmedikçe, vazgeçilmez bir değişken olarak alınacaktır. Eğer geri kalan  $\gamma$  ile  $w$  parametrelerinin ikisi de birden peşinen seçilirse, bu taktirde, söz konusu model için  $F_{r,0} = 1$  olduğunu göz önünde bulundurarak, *1. koşul takım*'ının gösterimi  $w$  ya göre değişim eğrileri şeklinde yapılabilir. Yalnızca birinin peşinen seçilmesi ise, iki boyutta bölgesel gösterimler verir. Şimdi bu söylenenleri örneklendirelim; Şekil 4.46 da peşinen seçilmiş bazı özel  $(K_3, \gamma) \in \{(-0.8, -1/2), (-3, -1/100), (-1.2, 1), (-3, 1/2)\}$  ikilileri için NEC, WEC, SEC ve DEC'in  $w$  ya göre değişimlerini vermekteyiz. Şekil 4.47 de ise, bu sefer yalnızca  $\gamma$  parametresini peşinen seçip, (4.169) koşullarının sağlanması kaydıyla, *I. YORUM* altında (ki aynı zamanda *II. YORUM* a denktir), *1. ve 2. koşul takımları*'nın sağlanıp sağlanmamasını  $\Delta K_3 = 0.2$  ve  $\Delta w = 0.01$  adımlarıyla taranan  $-4 \leq K_3 \leq 4$  ve  $-1/3 < w < 1/3 < w < 1$  aralıklarında araştırıyoruz.  $\gamma$  üssü için, tam ve buçuklu sayılar da içerilecek şekilde,  $\gamma \in \{\pm 3, \pm 5/2, \pm 2, \pm 3/2, \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/4, \pm 1/10, \pm 1/100\}$  değerlerini seçiyoruz. Şekil 4.48 de mavimsi fonlu bölgeler, (4.169) koşullarının sağlandığı bölgeleri göstermektedir.

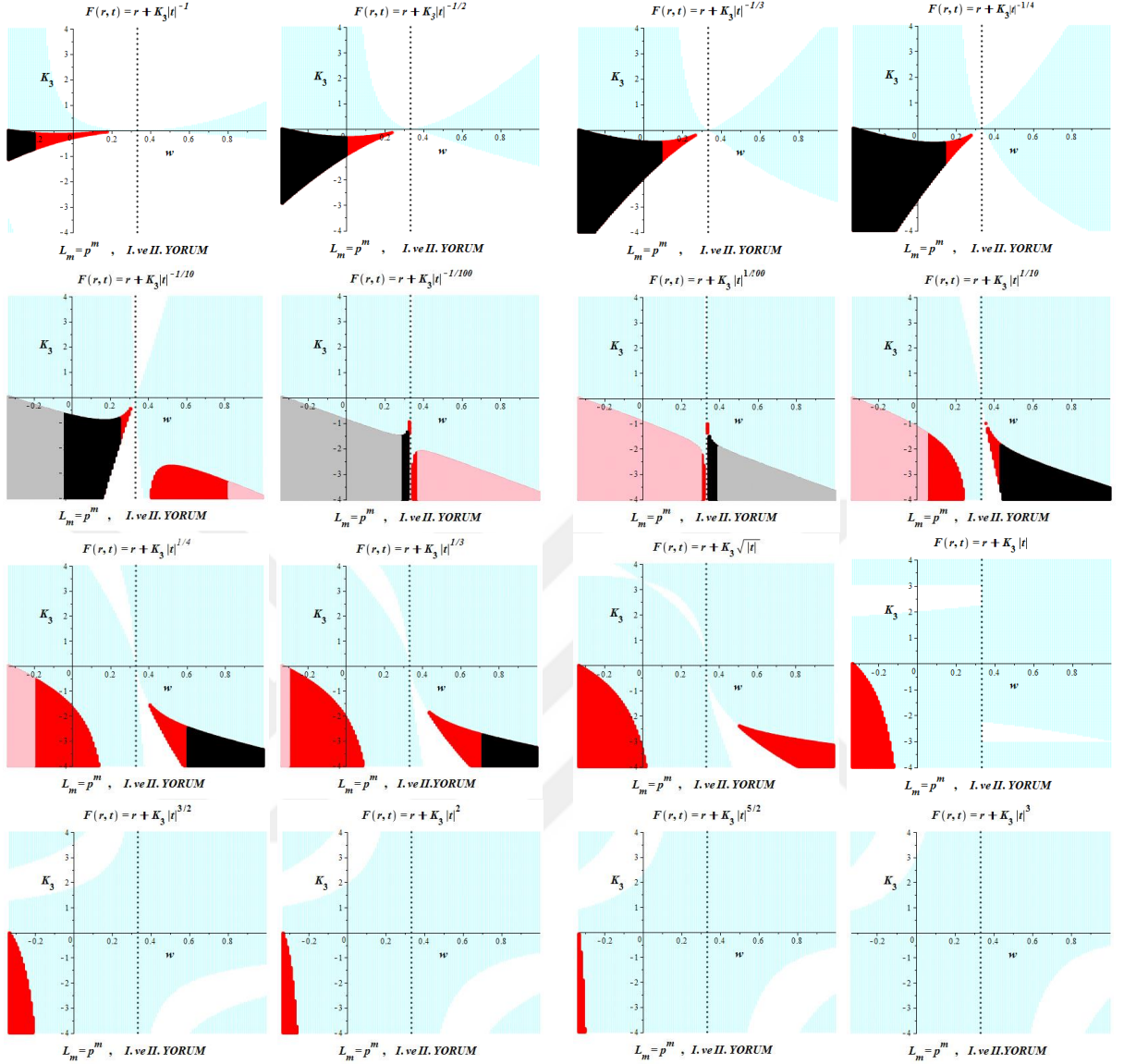


**Şekil 4.47:**  $K_3$  ve  $\gamma$  parametreleri peşinen seçilmiş  $F(r,t) = r + K_3 |t|^\gamma$  modelleri için NEC, WEC, SEC ve DEC'in  $w$  ya göre değişimleri. Düşey çizgi,  $t$  (ya da  $T$ ) nin tanımlanmadığı  $w = 1/3$  değerine karşılık düşmektedir. Buna göre:  $w < 1/3$  için  $t < 0$ ;  $w > 1/3$  için ise  $t > 0$  dir.

Yukarıdaki Şekil'in sol panellerinde yer alan  $F(r,t) = r - 0.8|t|^{-1/2}$  ve  $F(r,t) = r - 1.2|t|$  modellerinde 1. koşul takımı'nın, sırasıyla,  $w < 0.1$  ve  $w < -0.2$  değerleri için sağlandığı görülmektedir.  $w > 1/3$  kesiminde ise hiçbir sağlanma söz konusu değildir. Sağ panellerdeki her iki model için ise sağlanma, hem  $w < 1/3$  ve hem de  $w > 1/3$  kesimlerinde gerçekleşmektedir. Buna göre:  $F(r,t) = r - 3|t|^{-1/100}$  için  $-1/3 < w < 1/3$  ile  $1/3 < w < 0.72$ ;  $F(r,t) = r - 3|t|^{1/2}$  için de  $-1/3 < w < 0$  ile  $0.6 < w < 0.9$  dir. Yukarıdaki gösterimlerden elde

edilebilecek maksimum bilgi bu kadardır;  $w_{KE}$  parametresiyle ilişkili süper-ivme ile birlikte 2. koşul takımı hakkında da bu tür gösterimler sunmak,  $w$  aralığını ayarlamak gibi birtakım ayrıntı ve incelikler gerektirdiğinden, en azından pratik görünmemektedir. Bu eksiklikleri, Şekil 4.48 de seçilmiş bazı  $\gamma = \text{sabit}$  modellerin  $w - K_3$  düzleminde gösterimiyle kapatmış oluyoruz. Şekil 4.48 de ilk göze çarpan,  $w > 1/3$  kesiminde  $\gamma = -3, -5/2, -2, -3/2, -1, -1/2, -1/3, -1/4$  değerleri için, ne 1. ve ne de 2. koşul takımları'nın sağlandığı  $w$  değerlerinin bulunmadığıdır. Aynı durum  $\gamma > 0$  değerler arasında  $\gamma = 1, 3/2, 2, 5/2, 3$  değerleri için de söz konusudur. Buna karşılık,  $\gamma = -1/10, -1/100, 1/100, 1/10, 1/4, 1/3, 1/2$  olduğunda süper-ivme ve koşulların sağlanma durumları şöyledir:  $\gamma = 1/2$  için süper-ivmesiz 1. koşul takımı;  $\gamma = 1/3, \gamma = 1/4$  ve  $\gamma = 1/10$  için süper-ivmeli 1. koşul takımı ve süper-ivmesiz 2. koşul takımı;  $\gamma = 1/100$  ile  $\gamma = -1/100$  için hem süper-ivmeli 1. koşul takımı ve hem de süper-ivmeli 2. koşul takımı;  $\gamma = -1/10$  için süper-ivmesiz 1. ve 2. koşul takımı. Bu sonuçlar ışığında;  $1/3 < w < 1$  kesiminde  $F(r, t) = r + K_3 |t|^\gamma$  modelinin kozmolojik güvenilirliğinin ancak  $-1/100 < \gamma \neq 0 < 1$  değerleri için gerçekleştiği yargısına varmaktayız. Ancak;  $\gamma$  ya göre farklılıkları, koşul takımları ile süper-ivme öğeleri arasında düşünülebilecek herhangi bir sistematığe bağlayamadığımızı da ifade etmeliyiz. Şimdi,  $-1/3 < w < 1/3$  kesimini ele alalım. Negatif basıncın da yer aldığı bu kesimde, Şekil'de gösterilmeyen  $\gamma = +3$  dışında geri kalan tüm  $\gamma$  lar için kozmolojik güvenilirlik sağlanmaktadır. Burada yine, koşul takımları ve süper-ivme öğeleri hakkında  $\gamma$  daki farklılıklarla ilişkilendirilebilecek bir sistematığe rastlamadığımızı da belirtelim.





**Şekil 4.48:** Standart maddenin korunmadığı durum için  $F(r, t) = r + K_3 |t|^\gamma$  tip modellerde, seçilmiş bazı özel  $\gamma$  değerleri için 1. ve 2. koşul takımları'nı sağlayan  $(w, K_3)$  ikilileri. Kozmolojik güvenilirlik için  $K_3 < 0$  olmasının gerektiği görülmektedir.

Şimdi;  $F(r, g, t)$  – gravite modelleriyle ilgili buraya kadar yapılanlar hakkında kısa bir durum değerlendirmesi yapmak iyi olacaktır. Yukarıda incelemiş olduğumuz: ‘Model 1’, ‘Model 2’ ve ‘Model 3’,  $L_m = p^m$  seçimi altında standart maddenin korunumunun olduğu  $F(r, t) = r + \Psi(t)$  formunda yegane modellerdir. Bunlara ek olarak,  $\Psi(t)$  yi değiştirmek kaydıyla keyfi  $\Phi(r, g)$  fonksiyonları seçerek  $F(r, g, t) = \Phi(r, g) + \Psi(t)$  formunda başka modeller de ele almak mümkün olmakla birlikte, yer darlığı nedeniyle buna, bu Tez’de

girişmiyoruz. Korunumun olmadığı durumu örneklemek için seçilen ‘Model 4’ ise, ‘Model 2’ ve ‘Model 3’ deki gibi aynı  $\Psi(t) = K_3 |t|^\gamma$  kuvvet kanunu tipini içermesine karşın  $\gamma$  üssü burada,  $\gamma = \gamma(w)$  gibi (bkz.(4.50 ve 51)) bir bağıntıya tabi olmayıp tamamen keyfi alınabilecek bir parametredir. Bu serbestlik sayesinde, korunumun olmadığı durumu örneklemek üzere sayısız  $F(r, g, t)$  modeli seçilebilebileceği aşikardır. Ancak, bunlardan birkaçını şimdi değil de,  $L_m = -\mu^m$  seçimi için olanlarla karşılaştırmalar yapabilmek amacıyla, sonraya bırakıyoruz.

► Lagrange madde yoğunluğu için  $L_m = -\mu^m$  seçimi:

Şimdi, Lagrange madde yoğunluğunun  $L_m = -\mu^m$  olarak seçilmesi durumunu ele alalım. Bu taktirde  $F(r, t) - \text{gravite}$  'ye indirgenmiş denklemler şunlar olur:

•  $L_m = -\mu^m$ , *I. ve II. YORUM* için  $T$  ve türev bağıntıları:

$$\tau_0 = (-1 + 3w)\Omega_{m,0} \quad (4.170)$$

$$\tau_0^* = \frac{-6(1+w)(3+F_{t,0})}{6+(1-3w)F_{t,0}} \tau_0 \quad (4.171)$$

$$\tau_0^{**} = \frac{-6(1+w)(3+F_{t,0})}{[6+(1-3w)F_{t,0}]^2} \{-(1+q_0)[6+(1-3w)F_{t,0}] - 6(1+w)(3+F_{t,0})\} \\ + \frac{3(1+3w)(F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{tg,0}\Gamma_0^* + F_{tt,0}\tau_0^*)}{(3+F_{t,0})} \tau_0 \quad (4.172)$$

•  $L_m = -\mu^m$ , *I. YORUM* için toplam efektif madde ve basınç parametreleri:

$$\Omega_{m,0}^{i.ef} = \frac{1}{F_{r,0}} [\Omega_{m,0} - \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) - (F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{rt,0}\tau_0^*)] \quad (4.173)$$

$$\Omega_{m,0}^{i.ef} = \frac{1}{F_{r,0}} [\Omega_{m,0} - \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) - (F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{rt,0}\tau_0^*)] \quad (4.173)$$

$$\Omega_{P,0}^{i.ef} = \frac{1}{F_{r,0}} [w\Omega_{m,0} + \frac{1}{3}(1+w)\Omega_{m,0}F + \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) + \frac{2}{3}(F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{rt,0}\tau_0^*) + \frac{1}{3}(F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^{*2} \\ + F_{rt,0}\tau_0^{*2} + 2F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^*\tau_0^* + F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^{**} + F_{rt,0}\tau_0^{**})] \quad (4.174)$$

•  $L_m = -\mu^m$ , II.YORUM için toplam efektif madde ve basınç parametreleri:

$$\Omega_{m,0}^{i.ef} = \Omega_{m,0} + (1 - F_{r,0})(1 - \Omega_{k,0}) - \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) - (F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{rt,0}\tau_0^*) \quad (4.175)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{p,0}^{i.ef} = & w\Omega_{m,0} + \frac{1}{3}(1+w)\Omega_{m,0}F_{t,0} + \frac{1}{3}(1-F_{r,0})(2q_0 - 1 + \Omega_{k,0}) + \frac{1}{6}(F_0 - F_{r,0}\mathfrak{R}_0) \\ & + \frac{2}{3}(F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^* + F_{rt,0}\tau_0^*) + \frac{1}{3}(F_{rrr,0}\mathfrak{R}_0^{*2} + F_{rtt,0}\tau_0^{*2} + 2F_{rrt,0}\mathfrak{R}_0^*\tau_0^* + F_{rr,0}\mathfrak{R}_0^{**} + F_{rt,0}\tau_0^{**}) \end{aligned} \quad (4.176)$$

İncelemelerimizi yine, standart maddenin korunup korunmamasına göre iki durum için ele alıyoruz.

#### A. Standart Maddenin Korunduğu Durum:

§(4.6) daki (4.63) ile gösterilen süreklilik denkleminde dayalı olarak, standart maddenin, ancak ve ancak  $w = -1/3$  için korunduğu gösterilmiş ve bu durumda da  $\psi(T) \neq -\kappa^2 T$  olmak kaydıyla tamamen keyfi bir  $\psi(T)$  formunun alınabileceği; fakat genel bir  $f(R, G, T)$  fonksiyonunun formunun ancak ve ancak keyfi bir  $\phi(R)$  fonksiyonuyla toplamsal olarak  $f(R, G, T) = \phi(R, G) + \psi(T)$  şeklinde kısıtlanmış olduğu belirtilmişti (dolayısıyla  $f(R, T) = \phi(R)\psi(T)$  gibi bir fonksiyonel form dışarılanmış olmaktadır). Konu edilen bağıntılar (4.98) ve (4.105) bağıntıları kullanılarak boyutsuz değişken ve fonksiyonlar diliyle

$$F(r, t) = \Phi(r) + \Psi(t) \quad , \quad \Psi(t) \neq -3t \quad (4.177)$$

biçiminde ifade edilebilir. Korunum olması durumunda,  $\mu^m(t) \propto a^{-2}(t)$  uyarınca değiştiğini ve boyutsuz türev büyüklüklerinin de  $\Psi(t)$  ye bağlı olmaksızın:  $\tau_0 = -2\Omega_{m,0}$ ,  $\tau_0^* = 4\Omega_{m,0}$ ,  $\tau_0^{**} = -4(3 + q_0)\Omega_{m,0}$  olarak verildiğini kaydedelim. O halde  $L_m = -\mu^m$  durumu için:

- 1) Korunum olması için  $w = -1/3$  olmalıdır.
- 2)  $\Psi(t)$ ;  $\Phi(r)$  ye,  $F(r, t) = \Phi(r) + \Psi(t)$  şeklinde toplamsal olarak bağlı olmalıdır.
- 3) Eğer,  $\Psi(t)$  için  $\Psi(t) = K_3 t$  fonksiyonel formu seçilirse, burada  $K_3 \neq -3$  olmak zorundadır (bu koşul, (4.171) deki  $\tau_0^*$  ifadesinin paydası sıfırdan farklı yapılarak da elde edilebilir).

4)  $\Psi(t)$  fonksiyonel formu,  $w = -1/3$  korunum koşuluna sadık kalmak kaydıyla tamamen keyfi alınabileceği gibi,  $\Psi(t) = K_3 (-t)^\gamma$ ,  $\gamma \neq 1$  şeklinde de alınabilir ve bu durum için  $K_3 \neq -3$  olması gerekmektedir. Bu noktada, yukarıda “Model 3 olarak ele alınan durumdan farklı bir durum ortaya çıkmaktadır. Orada, üs konumundaki  $\gamma$  parametresi, korunum olduğunda (4.50) uyarınca  $w$  ya bağlı iken, burada,  $\gamma = \gamma(w)$  gibi herhangi bir bağıllık bulunmamaktadır.

Şimdi, standart maddenin korunduğu duruma örnek olarak, aşağıda, biri  $K_3$  gibi tek; diğeri de  $K_3$  ve  $\gamma$  gibi iki serbest parametre içeren iki fonksiyonel formun enerji koşulları formalizmine göre güvenilebilirliklerini inceleyelim. Bunlar için grafiksel sonuçlar Şekil 4.49 ve Şekil 4.50 de gösterilmektedir.

**Model 5:**  $F(r,t) = r + K_3 t$ ,  $w = -1/3$  ve  $K_3 \neq -3$

Bu modelde, ‘Model 1’ dekine benzer tarzda hesap yapıldığında:

$$\tau_0 = -0.62, \quad \tau_0^* = -2\tau_0 = 1.24, \quad \tau_0^{**} = \frac{6(2.19 + 0.73K_3)\tau_0}{3 + K_3} = -2.7156$$

$$F_0 = 10.86 - 6\Omega_{k,0} - 0.62K_3, \quad F_{r,0} = 1, \quad F_{rr,0} = 0, \quad F_{t,0} = K_3, \quad F_{tt,0} = 0 = F_{ttt,0}$$

$$\Omega_{m,0}^{t.ef} = 0.3100 + 0.1722K_3, \quad \Omega_{p,0}^{t.ef} = -0.1033 - 0.1033K_3$$

$$NEC: \quad 0.2067 + 0.0689K_3 \geq 0$$

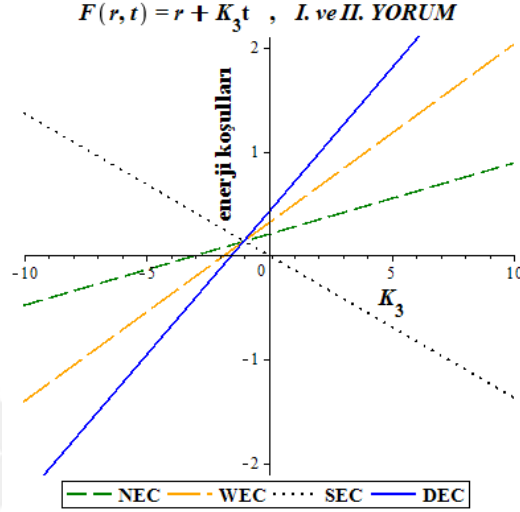
$$WEC: \quad 0.3100 + 0.1722K_3 \geq 0$$

$$SEC: \quad 1 \times 10^{-11} - 0.1377K_3 < 0$$

$$DEC: \quad 0.4133 + 0.2755K_3 \geq 0$$

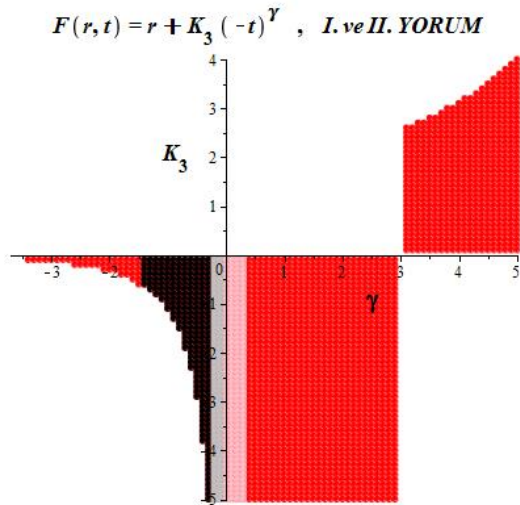
bulunur. *1. koşul takımı*’nın ifadesi olan yukarıdaki eşitsizliklerinin ortak çözümü olan  $K_3$  kuplaj sabitini, (4.163) koşulunu da göz önünde bulundurarak  $7.25806451617 \times 10^{-11} < K_3 < \infty$  aralığı ile kısıtlandırılmış şekilde bulmaktayız. Bunu, Şekil 4.48 deki grafiksel gösterim de doğrulamaktadır. Süper ivmelenmenin ölçüsü olan  $w_{KE,0}$  nin değeri ise, bu  $F(r,t)$  modelinde,  $w_{KE,0} = 1.74193548387 \times 10^{-11} / K_3) - 0.599999999999$  olup,  $-1.2 \leq w_{KE} \leq -0.8$  için,  $-8.70967741931 \times 10^{-11} < K_3 < -2.90322580645 \times 10^{-11}$  ve  $w_{KE,0} < -1$  için de

$-4.35483870966 \times 10^{-11} < K_3 < 0$  gibi bir ince ayarlar gerektirmektedir. Burada da, ‘Model 1’ için söylenildiği gibi, güncel gözlemsel verilerin bu denli bir duyarlılığı taşımadığı göz önünde tüm sonuçların  $\Omega_{k,0}$  dan ve *YORUM* lardan bağımsız olduğunu kaydedelim.



**Şekil 4.49:**  $F(r, t) = r + K_3 t$  modeli için, standart maddenin korunduğu  $w = -1/3$  durumunda enerji koşulları.

**Model 6:**  $F(r, t) = r + K_3 (-t)^\gamma$  ,  $w = -1/3$  ,  $\gamma \neq 1$  ve  $K_3$  keyfi



**Şekil 4.50:**  $F(r, t) = r + K_3 (-t)^\gamma$  modeli için, standart maddenin korunduğu  $w = -1/3$  durumunda enerji koşulları. Bu model için de sonuçlar,  $\Omega_{k,0}$  ve *YORUM* lardan bağımsızdır.



### B. Standart Maddenin Korunmadığı Durum:

§4.6 daki sonuçlar boyutsuz büyüklükler diliyle özetlenirse: 1) korunumun olmaması için  $w \neq -1/3$  olmalıdır; 2)  $F(r,t) = \Phi(r) + \Psi(t)$  şeklinde alınabilecek  $\Psi(t)$  fonksiyonu,  $\tau_0^* / \tau_0 < 0$ , yani, (4.169) koşulunun  $L_m = -\mu^m$  durumundaki karşılığı olan

$$6 + (1 - 3w)F_{t,0} \neq 0 \quad (4.178.a)$$

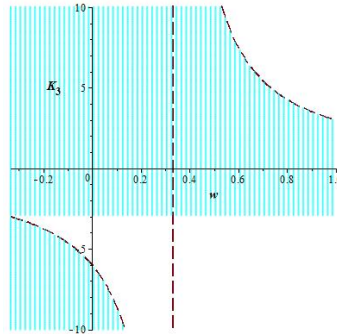
$$\frac{-6(1+w)(3+F_{t,0})}{6+(1-3w)F_{t,0}} < 0 \quad (4.178.b)$$

bağıntılarını sağlamak kaydıyla tamamen keyfi olarak alınabilir. Özel olarak  $\Psi(t) = K_3 |t|$  alınır. Söz konusu bağıntılardan, daha önce (4.68 ve 70) de değinilen

$$6 + (1 - 3w)K_3 \neq 0 \Leftrightarrow (K_3 \neq \frac{-6}{1-3w} \text{ veya } w \neq -\frac{6+K_3}{3K_3}) \quad (4.179.a)$$

$$\frac{-6(1+w)(3+K_3)}{6+(1-3w)K_3} < 0 \quad (4.179.b)$$

kısıtlamaları elde edilir. Bunlardan da, kolayca görüleceği üzere, mesela,  $w=1$  için  $K_3 \neq 3$ , yani,  $\Psi(t) \neq 3t$  kısıtlaması bulunur. Söz konusu kısıtlamaları Şekil 4.51 de gösteriyoruz.



**Şekil 4.51:**  $L_m = -\mu^m$  için I. ve II. YORUM'a göre sıradan maddenin korunmadığı durumda  $F(r,t) = \Phi(r) + \Psi(t)$ ,  $\Psi(t) = K_3 |t|$  için  $K_3 - w$  düzlemi. Modeli geçerli kılan  $w - K_3$  değer çiftleri

koyulaştırılmış bölge ile gösterilmektedir. Noktalı ve kesikli çizgiler  $6 + (1-3w)K_3 \neq 0$  ve  $\frac{-6(1+w)(3+K_3)}{6+(1-3w)K_3} < 0$  uyarınca yasak  $(w, K_3)$  değerlerini belirtmektedir.

Şimdi; ele almakta olduğumuz ' $L_m = -\mu^m$  ve korunum yok' durumunu, literatürde kullanılmış ya da teklif edilmiş örnekler üzerinden ' $L_m = p^m$  ve korunum yok' durumuyla karşılaştırmalı olarak inceleyeceğiz. Literatürde şimdiye kadar gördüklerimizin yanında şu dört fonksiyonel forma daha rastlanmaktadır: bunlardan biri; [114] no'lu kaynakta ele alınan ve  $f(R, G) - gravite$  çerçevesinde bizim 'Model 6' olarak incelemiş olduğumuz

$f(R, G) = R + \frac{C_1 G^\alpha + C_2}{C_3 G^\alpha + C_4}$  fonksiyonel formuna benzetilerek  $G$  yerine  $T$  koymak suretiyle

oluşturulmuş 1)  $f(R, T) = R + \frac{C_1 T^\alpha + C_2}{C_3 T^\alpha + C_4}$  formudur. Aynı kaynakta incelen bir başka model ise

2)  $f(R, T) = R + C_1 \ln^\alpha(C_2 T^\beta)$  dir. Bunlar, sözkonusu kaynakta,  $L_m = p^m$  çerçevesinde,  $p^m = \mu^m = 0$  özel durumunda ele alınmışlardır. Öte yandan, [143] no'lu kaynakta ise, 3)

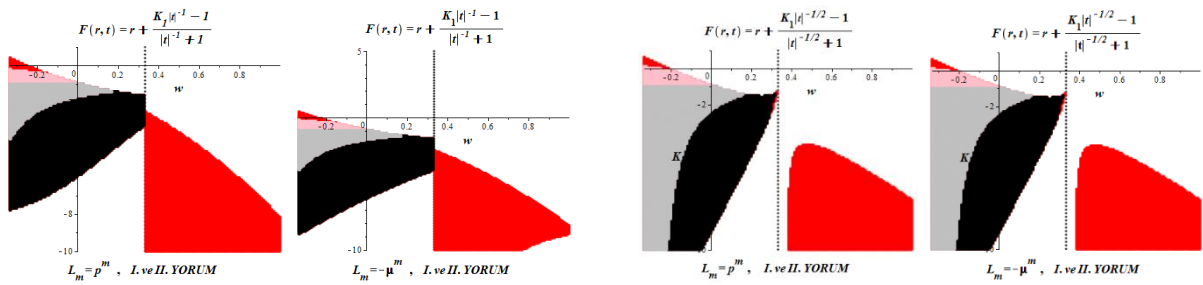
$f(R, T) = C_1 e^{(R/C_1 + C_2 T)}$  ve 4)  $f(R, T) = R + C_1 R^\alpha T^\beta$  modelleri ele alınmış olup hem  $L_m = p^m$  ve

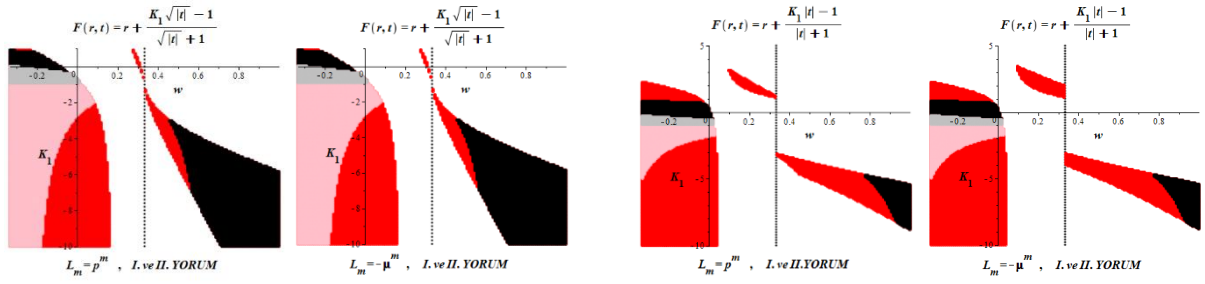
hem de  $L_m = -\mu^m$  çerçevesinde; fakat yalnızca WEC bakımından incelenmiştir. Biz, aşağıda sırasıyla: Model 7-10 olarak numaralanacak bu dört modeli, kendi boyutsuz değişkenlerimizi kullanarak ve aynı zamanda da, özüne sadık kalmak kaydıyla amacımıza uygun şekilde düzenleyip literatürdekilerden çok daha geniş bir çerçeve oluşturan kendi enerji koşulları formalizmimize göre ele alıyoruz.

**Model 7:**  $F(r, t) = r + \frac{K_1 t^\gamma + K_2}{K_3 t^\gamma + K_4}$ , (hem  $L_m = p^m$  ve hem de  $L_m = -\mu^m$  alınarak, korunum yok)

Eğer  $w$  hal parametresine değişken gözüyle bakılırsa bu modelde  $K_1, K_2, K_3, K_4$  ve  $\gamma$  olmak üzere beş bağımsız parametre bulunmaktadır.  $w$  ya göre değişimler elde etmek için en fazla bir parametrenin serbest tutulabileceği açıktır. Şüphesiz bu iş sayısız türlü yapılabilir. Aşağıdaki Şekil 4.52.a da şu seçimleri tercih ettik: önce,  $K_1$  kuplaj sabitini serbest parametre olarak alıyoruz ve geri kalan  $K_2, K_3, K_4$  ve  $\gamma$  yı da  $(K_2, K_3, K_4, \gamma) \in \{(-1, +1, +1, -1),$

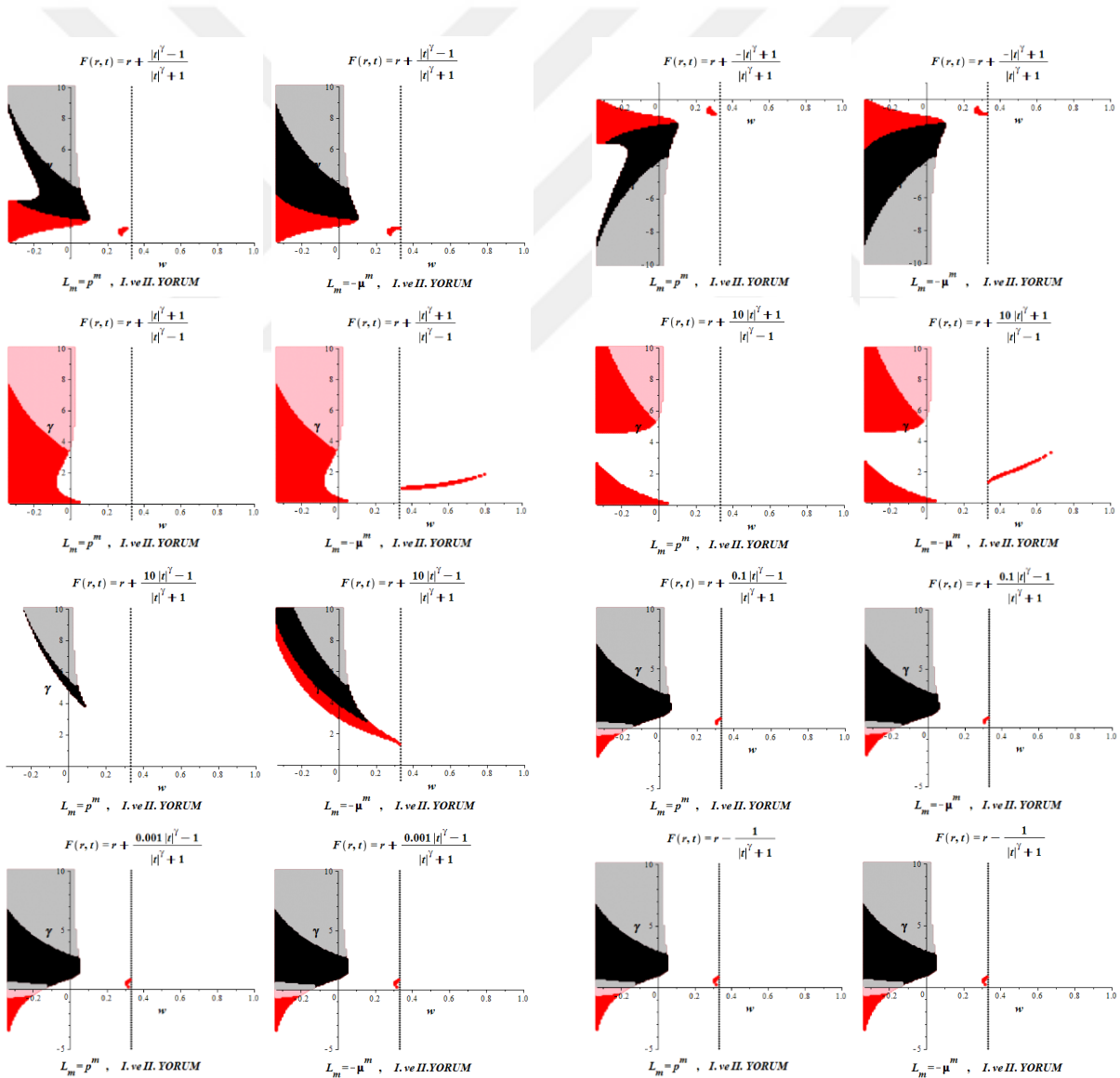
$(-1,+1,+1,-1/2), (-1,+1,+1,+1/2), (-1,+1,+1,+1)$  kümesi olarak seçiyor ve  $K_1$  in  $w$  cinsinden değişimini gösteriyoruz. Devamında, Şekil 4. 52.b de ise, bu sefer  $\gamma$  üssünü serbest parametre olarak alıp, geri kalan  $K_1, K_2, K_3$  ve  $K_4$  ü de  $(K_1, K_2, K_3, K_4) \in \{(+1,-1,+1,+1), (-1,+1,+1,+1), (+1,+1,+1,-1), (+10,+1,+1,-1), (+10,-1,+1,+1), (+0.1,-1,+1,+1), (+0.001,-1,+1,+1), (0,-1,+1,+1), (0,+1,+1,+1), (0,+1,+1,-1), (0,-1,+1,-1)\}$  kümesi olarak seçip  $\gamma$  nın  $w$  cinsinden değişimini gösteriyoruz. Şekillerdeki paneller ikişer ikişer iki bloğa ayrılmıştır, her bloğun sol panelleri  $L_m = p^m$ ; sağ panelleri ise  $L_m = -\mu^m$  seçimi içindir. Grafikselle gösterimlerde netliği bozmamak için her iki YORUM için de, (4.170) ve (4.171) in kullanımıyla oluşturulacak, (4.169) koşullarıyla tanımlanan arkafonlardaki mavimsi bölgeleri göstermedik. Sonuçlar,  $\Omega_{k,0}$  ve YORUM'lardan bağımsızdır. Grafikselle gösterimler, enerji koşullarının sağlanıp sağlanmamaları hakkında  $K_1, K_2, K_3, K_4, \gamma$  ve  $w$  parametrelerinin muhtelif seçimlerine göre pek çok çeşitlilikler sergilemektedirler. Yer darlığından dolayı bunları ayrıntılamaya girişmeyip, yalnızca,  $L_m = p^m$  ile  $L_m = -\mu^m$  seçimlerinin nasıl bir farklılık yarattığı konusuna değinmekle yetiniyoruz. Şekil 4. 52.a ve b deki tüm panellerde,  $L_m = -\mu^m$  seçimine ait grafikselle gösterimlerin: ya  $L_m = p^m$  seçimi için olanlarla aynı; ya da onlardan çok az farklı oldukları göze çarpmaktadır. Nicel olarak belirtmek gerekirse: göz önüne alınmış 15 fonksiyonel formun 7 si  $L_m = p^m$  ve  $L_m = -\mu^m$  için az da olsa farklı olmaktadır. Geri kalanların neden apayrı olduklarını; ilgili teorik formülasyonun da son derece uzun ve karmaşık (özellikle,  $\tau^*$  ve  $\tau^{**}$  in ifadeleri) olmaları nedeniyle, yalnızca bu grafikselle sonuçlardan hareketle açıklamayı başaramadığımızı ifade etmek isteriz.

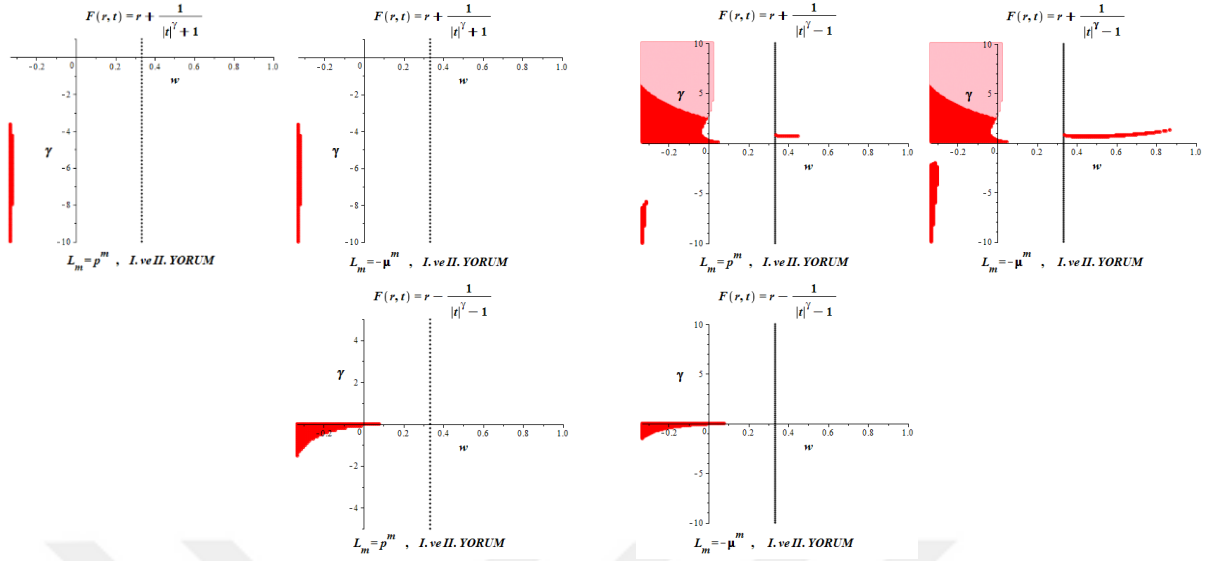




Şekil 4.52.a:  $F(r, t) = r + \frac{K_1 t^\gamma + K_2}{K_3 t^\gamma + K_4}$  tip modelde, standart maddenin korunmadığı durumda  $L_m = p^m$

ve de  $L_m = -\mu^m$  için,  $K_2, K_3, K_4$  ve  $\gamma$  parametrelerinin muhtelif seçimleri altında,  $K_1$  in  $w$  ya göre değişimi cinsinden enerji koşullarının sağlanma durumları.





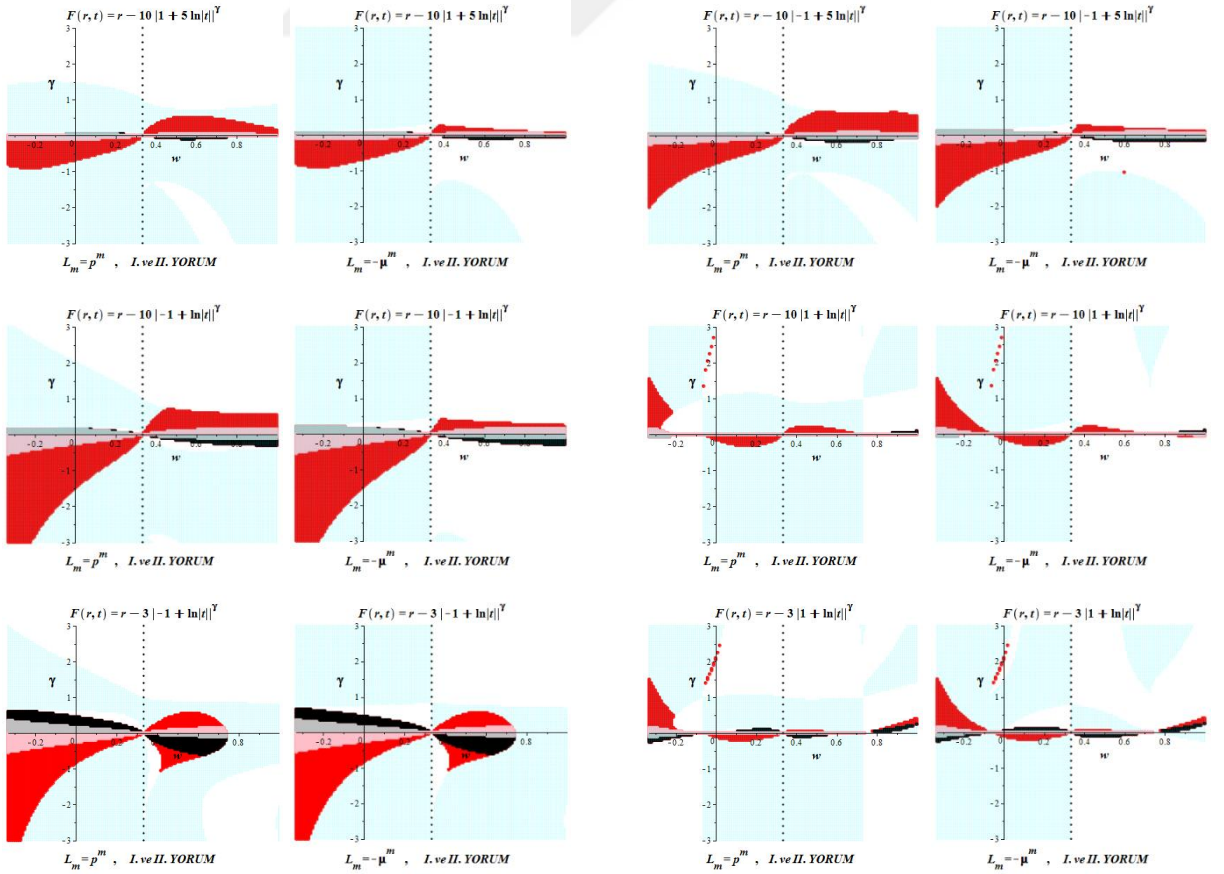
**Şekil 4.52.b:**  $F(r,t) = r + \frac{K_1 t^\gamma + K_2}{K_3 t^\gamma + K_4}$  tip modelde, standart maddenin korunmadığı durumda  $L_m = p^m$

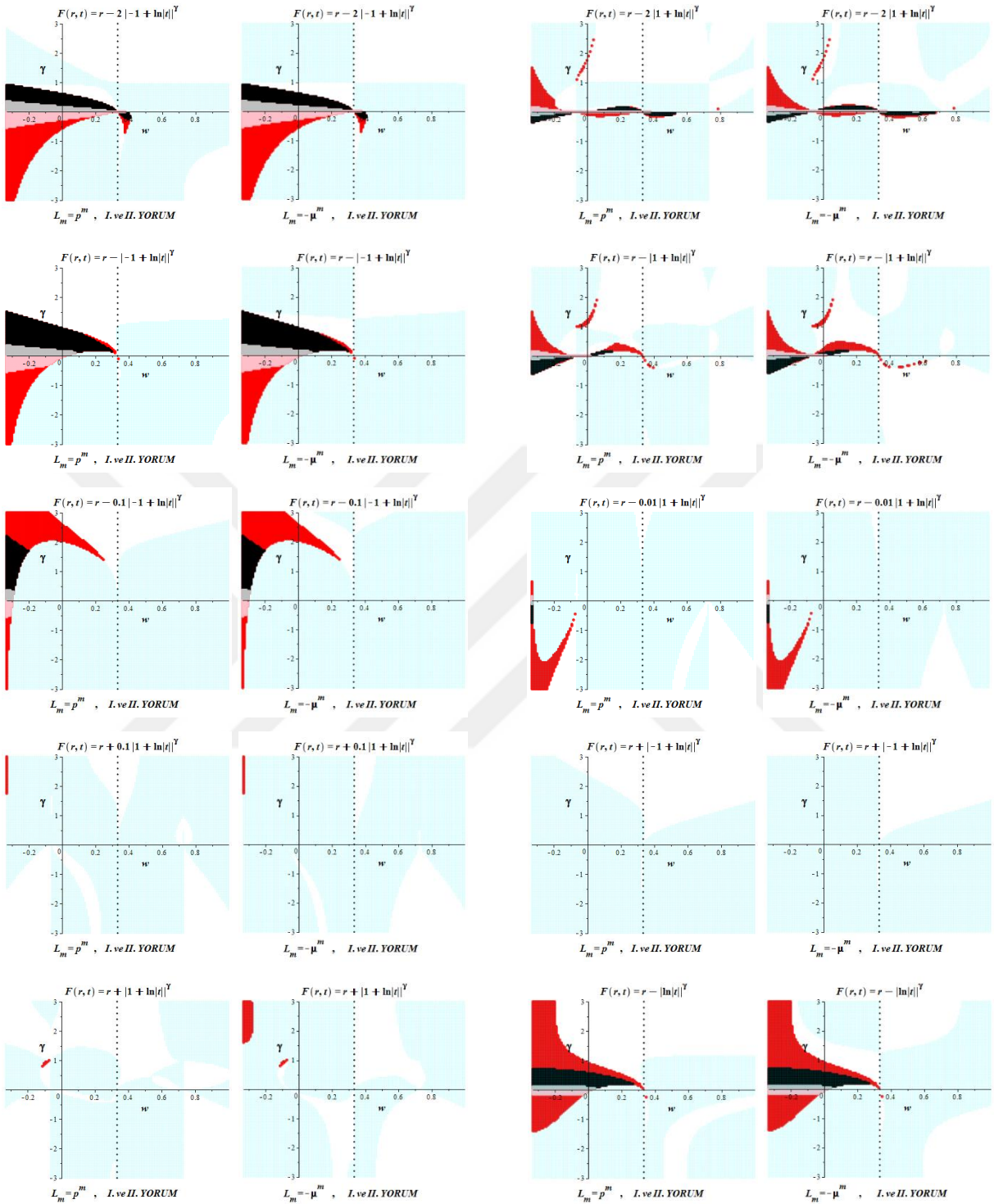
ve de  $L_m = -\mu^m$  için,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  ve  $K_4$  parametrelerinin muhtelif seçimleri altında,  $\gamma$  nın  $w$  ya göre değişimi cinsinden enerji koşullarının sağlanma durumları.

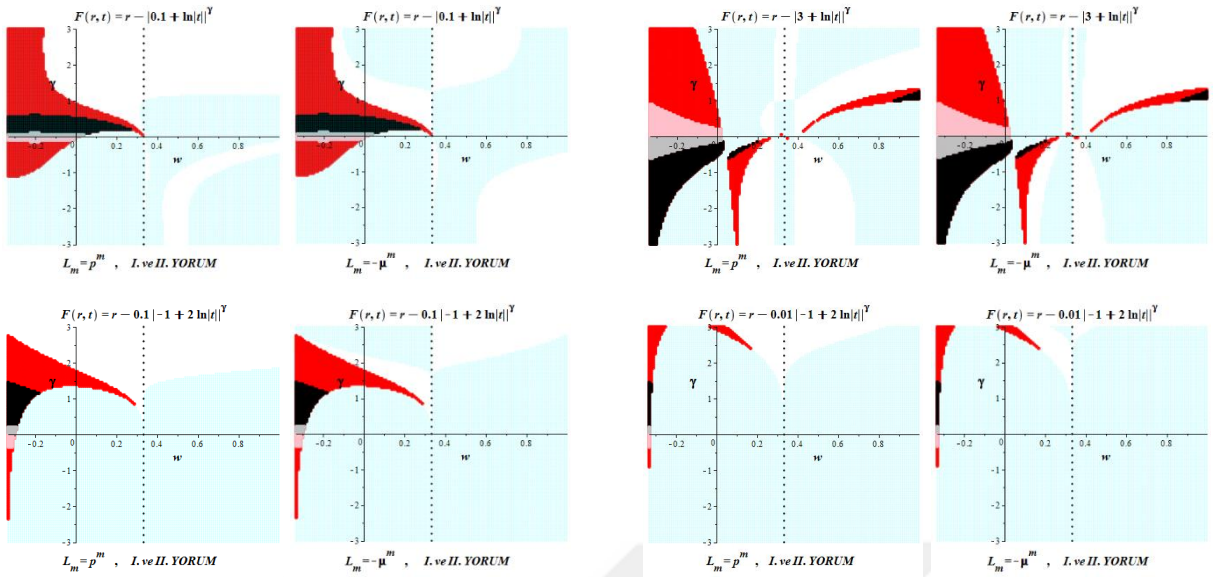
**Model 8:**  $F(r,t) = r + K_1 |K_2 + K_3 \ln |t||^\gamma$ , ( $L_m = p^m$  ve de  $L_m = -\mu^m$  alınarak ve korunum yok)

Yukarıda '2)' olarak işaretlenen fonksiyonel formu uygun işlemler sonucunda dönüştürüp de kendi formalizmime göre yeniden yazarsak yukarıdaki yazılımı elde ederiz. Bu;  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  ve  $\gamma$  olmak üzere dört serbest parametre içermektedir. Dolayısıyla, eğer  $w$  ya göre gösterimler yapmak istenirse bunun için herhangi üç parametreyi peşinen seçmiş olmalıyız. Serbest parametreyi özel olarak  $\gamma$  seçiyoruz ve geri kalan  $K_1$ ,  $K_2$  ve  $K_3$  parametrelerini de  $(K_1, K_2, K_3) \in \{(-10, 1, 5), (-10, -1, 5), (-10, -1, 1), (-10, 1, 1), (-3, -1, 1), (-3, 1, 1), (-2, -1, 1), (-2, 1, 1), (-1, -1, 1), (-1, 1, 1), (-0.1, -1, 1), (-0.01, 1, 1), (0.1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, 1), (-1, 0, 1), (-1, 0.1, 1), (-1, 3, 1), (-0.1, -1, 2), (-0.01, -1, 2)\}$  şeklinde alıp sonuçları  $\gamma$  nın  $w$  ya göre değişimini Şekil 4.53 te gösteriyoruz. Kuplaj sabitlerini seçerken mutlak değer içinde olmaları nedeniyle  $(K_1, K_2, K_3) \equiv (K_1, -K_2, K_3) \equiv (K_1, K_2, -K_3)$  özdeşliğini de göz önünde bulundurduk. Öte yandan, Şekil'lerde;  $L_m = p^m$  için olan grafiksel gösterimlerde (4.169) ve  $L_m = -\mu^m$  için olanlarda da (4.170) ile (4.171) bağıntılarının kullanımı suretiyle oluşturulan  $\tau^* / \tau < 0$  koşulunun grafiksel gösterimi olarak mavi arkafonu da göstermekteyiz.

Bu *Şekil*'lerde de gösterimleri yine iki blok halinde vermekteyiz. Blokların sol panelleri  $L_m = p^m$  için ve sağ panelleri de  $L_m = -\mu^m$  içindir. Burada da sonuçlar, yine,  $\Omega_{k,0}$  ve *YORUM* lardan bağımsızdır. Grafikselleştirme, enerji koşullarının sağlanıp sağlanmaması hakkında  $K_1, K_2, K_3, K_4, \gamma$  ve  $w$  parametrelerinin muhtelif seçimlerine göre bir önceki modeldeki gibi pek çok çeşitlilikler sergilemektedirler. Yine, yer darlığından dolayı bunları ayrıntılamaya girişmeyip, yalnızca, Lagrange'yen seçimlerinin bu modelde nasıl bir farklılığa yol açtığına değinelim. *Şekil 4.53* den hareketle bu modelde de  $L_m = -\mu^m$  seçimine ait grafikselleştirme gösterimlerin: ya  $L_m = p^m$  seçimi için olanlarla ya aynı; ya da çok az farklı oldukları gözlemlenmektedir. Göz önüne alınmış 20 fonksiyonel form arasında farklı olanlar 8 adettir. Bu sonuç bir önceki Model 7 için varmış olduğumuz sonuçla birleştirilirse şunu söylememiz gerekmektedir: Lagrange'yenin iki türlü seçimin farklılıklara yol açabileceği beklentisi gerçekleşmiş olmakla birlikte bazı durumlarda aynı grafikselleştirme gösterimleri vermiş olduğunu da gözlemlemekteyiz. Bunun nedeni hâlâ tarafımızdan meçhul kalmaktadır.





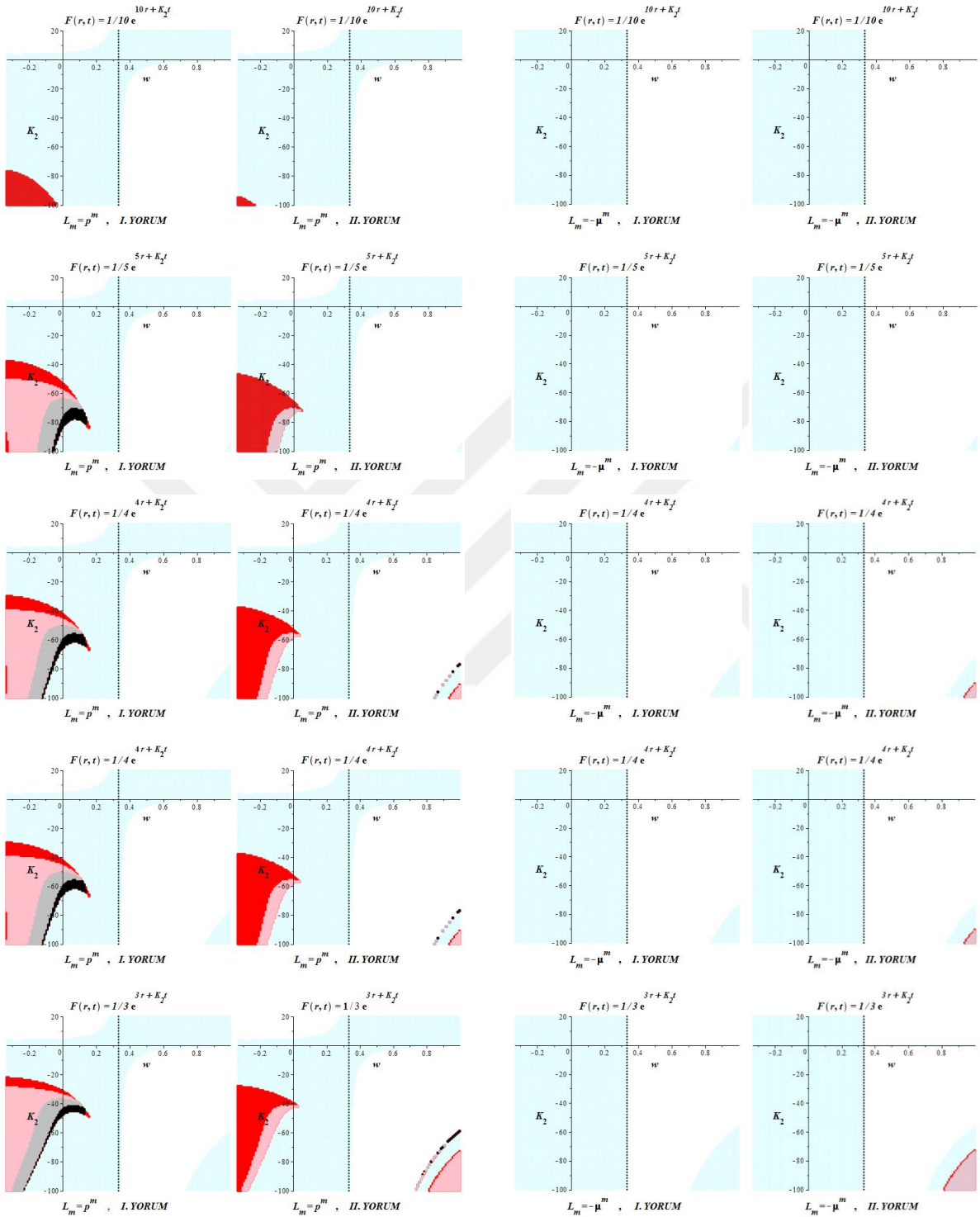


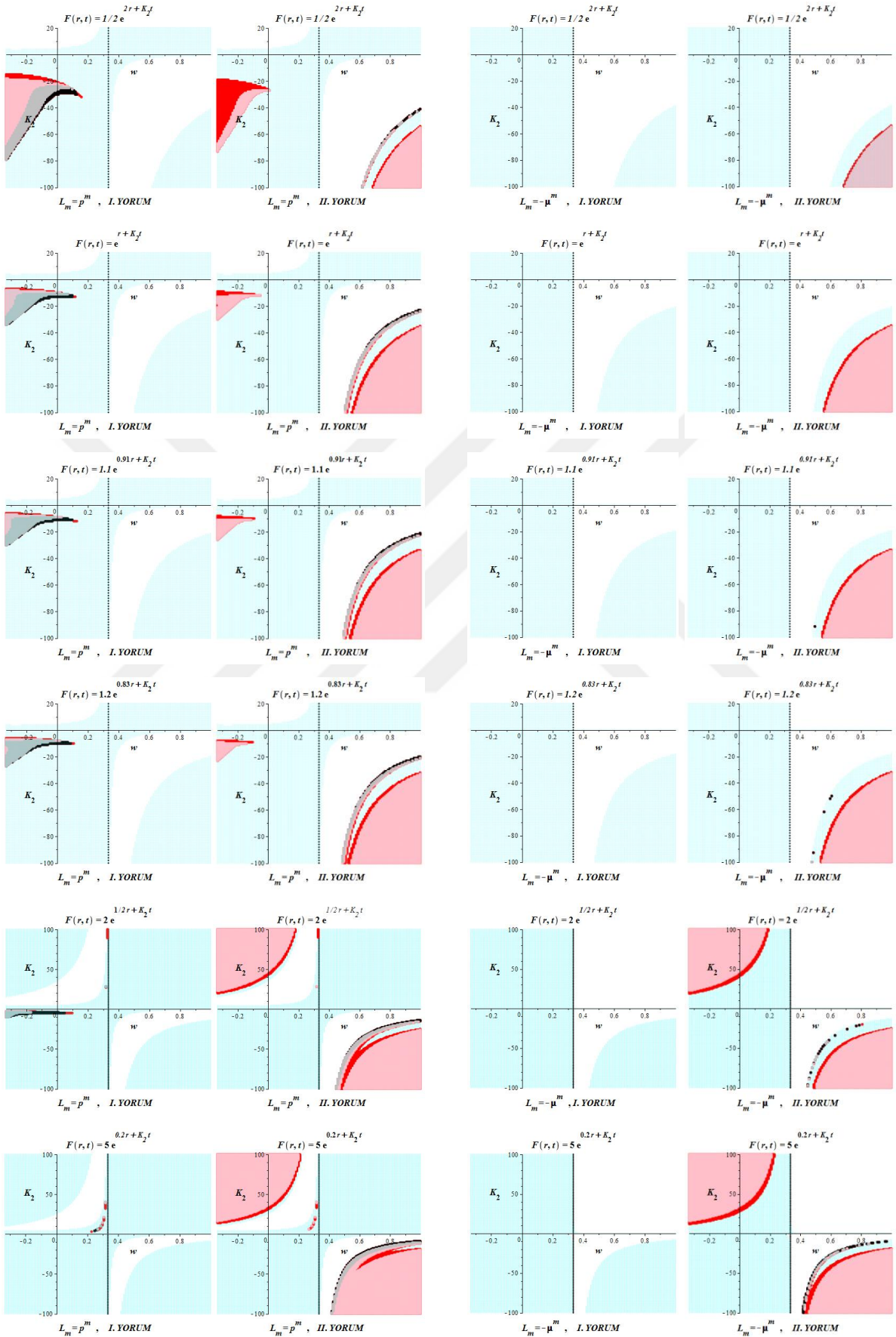
**Şekil 4.53:**  $F(r, t) = r + K_1 |K_2 + K_3 \ln |t||^\gamma$  tip modelde, standart maddenin korunmadığı durumda  $L_m = p^m$  ve de  $L_m = -\mu^m$  için  $K_1$ ,  $K_2$  ve  $K_3$  parametrelerinin muhtelif seçimlerine göre,  $\gamma$  nın  $w$  ya göre değişimi cinsinden enerji koşullarının, gösterimleri. Arkafondaki mavimsi bölgeler, Lagrange'yen seçimlerinin herbiri için  $\tau^* / \tau < 0$  koşulunun sağlandığı bölgeleri göstermektedir.

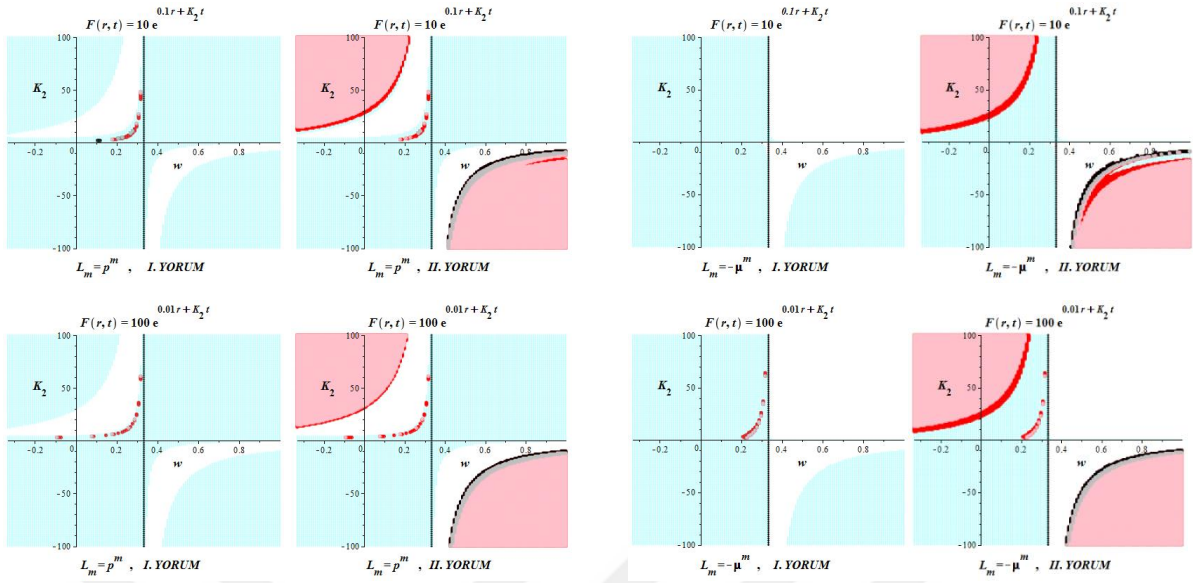
**Model 9:**  $F(r, t) = K_1 e^{(r/K_1 + K_2 t)}$  ( $L_m = p^m$  ve de  $L_m = -\mu^m$  alınarak ve korunum yok)

Yalın, yani, EH-Lagrange'yeni düzeltmesiz görünümde olan bu modelde,  $K_1$  parametresini  $K_1 \in \{1/10, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 1, 1.1, 1.2, 2, 5, 10, 100\}$  değerleri olarak seçip enerji koşullarını: Şekil 4.54.a da  $L_m = p^m$  durumu ve Şekil 4.54.b de de  $L_m = -\mu^m$  durumu için  $K_2$  nin  $w$  cinsinden gösterimleri şeklinde gösteriyoruz.  $K_1$  için  $K_1 > 0$  seçmemizin nedenini, enerji koşullarının öğelerinden olan  $F_r > 0$  ile  $F_{rr} > 0$  eşitsizliklerinin birlikte sağlanması gerekliliği oluşturmaktadır. Gösterimler, *I. ve II. YORUM*'a göre olan sonuçları da yansıtmaktadırlar. Bu modelde sonuçlar 3-uzayın eğriliğine bağlı çıktığından gösterimler  $\Omega_{k,0}$  ın yalnızca  $\Omega_{k,0} = 0$  seçimi için verilmiştir. Sonuçlar, Lagrange'yenlerin  $L_m = p^m$  ve  $L_m = -\mu^m$  seçimleri bakımından karşılaştırıldığında; her ikisinin de hem *I. YORUM*'ları arasında ve hem de *II. YORUM*'ları arasında belirgin farklılıklar bulunduğu göze çarpmaktadır. Öte yandan, her bir Lagrange'yen seçiminde *I. YORUM* ile *II. YORUM* karşılaştırıldığında, ikisi de birden güvenilirlikli model içermeyen paneller (sağ bloğun ilk dört paneli) hariç tutulursa, bunların da apaçık bir şekilde farklı oldukları görülmektedir.







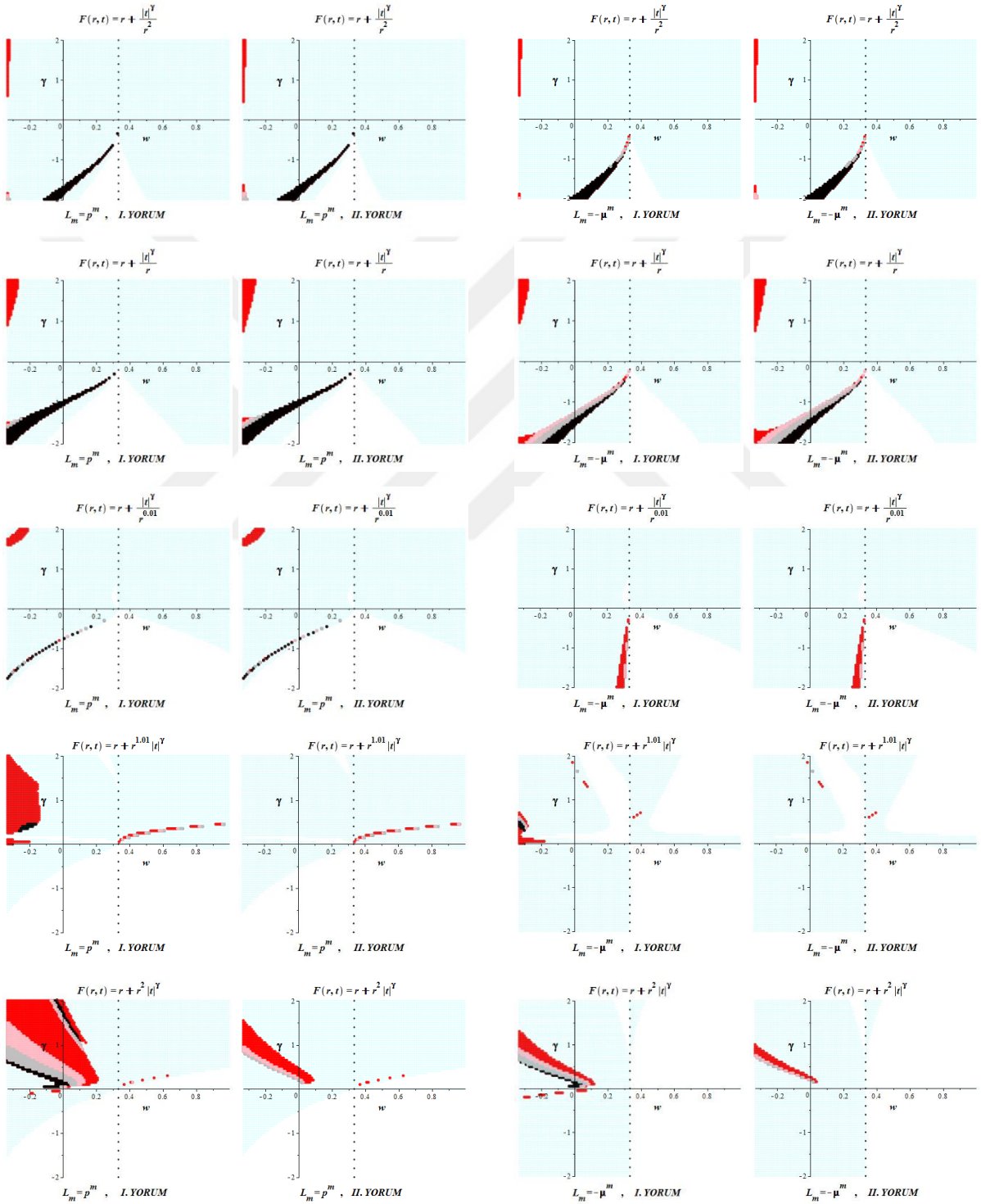


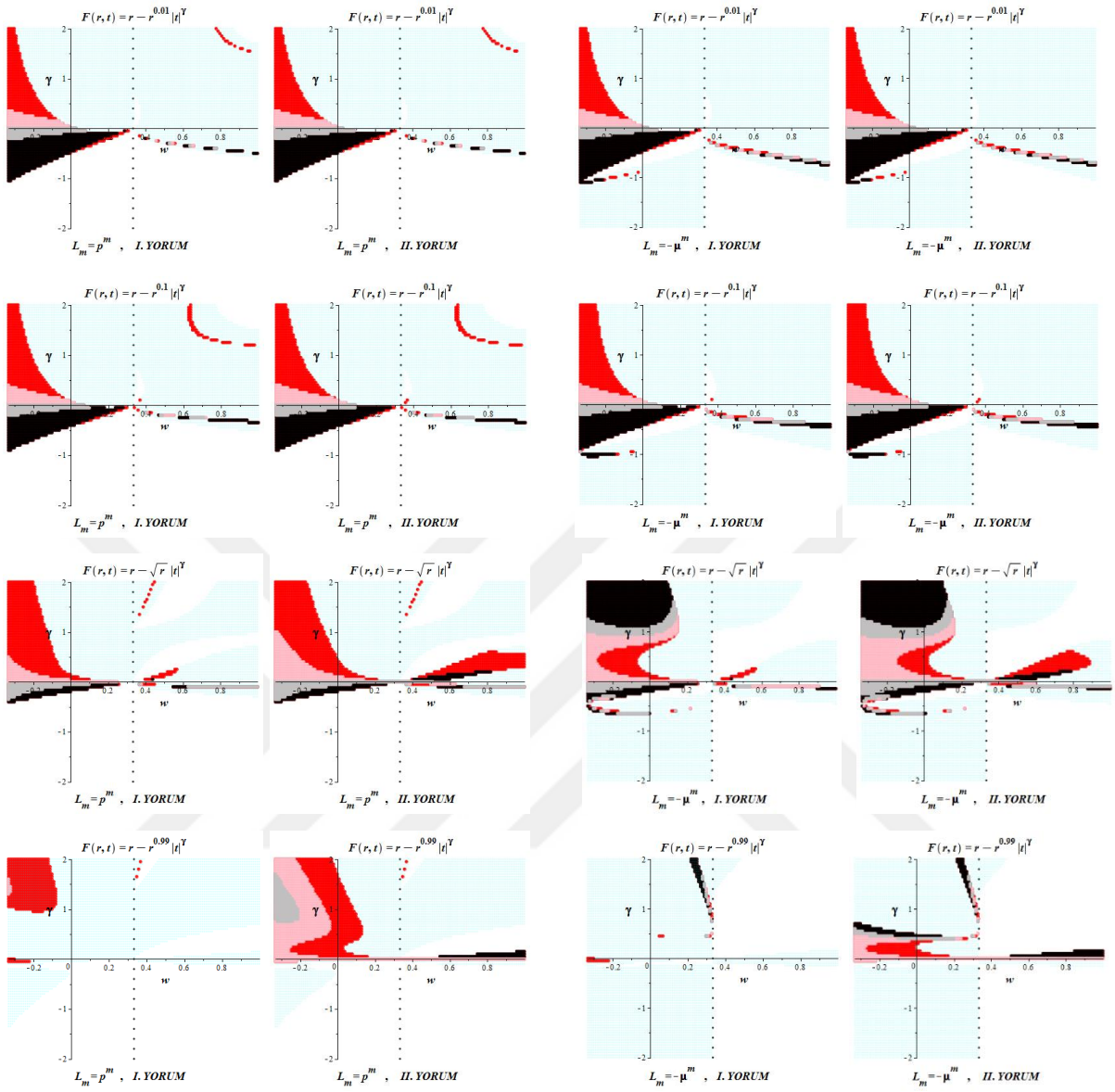
**Şekil 4.54:**  $F(r,t) = K_1 e^{(r/K_1 + K_2 t)}$  tip modelde, standart maddenin korunmadığı durumda  $L_m = p^m$  ve de  $L_m = -\mu^m$  için,  $K_1$  parametresinin muhtelif seçimlerine göre enerji koşullarının *I. ve II. YORUM* lar altında sağlanıp sağlanmamasının,  $K_2$  nin  $w$  cinsinden değişimi aracılığıyla gösterimleri.

**Model 10:**  $F(r,t) = r + K_1 r^\alpha |t|^\gamma$ , ( $L_m = p^m$  ve  $L_m = -\mu^m$  için, korunum yok)

Bu model; yukarıda ‘4)’ olarak belirtilmiş fonksiyonel formun boyutsuz değişkenler cinsinden yazılmış şekli olup,  $K_1$ ,  $\alpha$  ve  $\gamma$  olmak üzere üç parametre içermektedir. Enerji koşullarını peşinen seçilmiş bazı özel  $K_1$  ve  $\alpha$  değerleri için  $\gamma$  nın  $w$  ya göre değişim gösterimleri aracılığıyla inceleyeceğiz. Bu amaçla  $\gamma$  yı,  $-2 \leq \gamma \leq +2$  aralığında  $\Delta\gamma = 0.05$  arttırmalarıyla seçiyor ve  $w$  nun değişimini de önceki model örneklemelerinde olduğu gibi  $-1/3 < w < 1$  aralığında alıyoruz. Bu modelde,  $F_{rr} = K_1 \alpha (\alpha - 1) r^{\alpha-2} |t|^\gamma > 0$  koşulu,  $K_1$  ve  $\alpha$  parametrelerinin seçimlerine bir takım kısıtlamalar getirmektedir. Buna göre:  $K_1 \neq 0$ ,  $\alpha \neq 0$  ve  $\alpha \neq 1$  olması gerekmektedir. Öte yandan,  $K_1 > 0$  alındığında  $\alpha < 0$  ve  $\alpha > 1$ ;  $K_1 < 0$  alındığında ise  $0 < \alpha < 1$  olmalıdır. Bunları dikkate alarak,  $K_1$  ve  $\alpha$  parametrelerini:  $(K_1, \alpha) \in \{(+1, -2), (+1, -1), (+1, -0.01), (+1, 1.01), (+1, 2), (-1, 0.01), (-1, 1/2), (-1, 0.99)\}$  seçmekte ve sonuçları  $\Omega_{k,0} = 0$  için Şekil 4.55 te göstermekteyiz. Sonuçlar, Lagrange’yenlerin  $L_m = p^m$  ve  $L_m = -\mu^m$  seçimleri bakımından karşılaştırıldığında; her ikisinin de hem *I. YORUM* ları arasında ve hem de *II. YORUM* ları arasında belirgin farklılıklar bulunduğu göze çarpmaktadır. Öte yandan, her

bir Lagrange'yen seçiminde *I. YORUM* ile *II. YORUM* karşılaştırıldığında, ikisi de birden güvenilirlikli model içermeyen paneller (sağ bloğun ilk dört paneli) hariç tutulursa, bunların da açık bir şekilde farklı oldukları görülmektedir.





**Şekil 4.55:**  $F(r,t) = r + K_1 r^\alpha |t|^\gamma$  tipi modelde, standart maddenin korunmadığı durumda,  $L_m = p^m$  (iki panelden oluşmuş sol blok) ve de  $L_m = -\mu^m$  (iki panelden oluşmuş sağ blok) için  $K_1$  ve  $\alpha$  parametrelerinin muhtelif seçimlerine göre, enerji koşullarının (1. ve 2. koşul takım'larının) I. YORUM ve II. YORUM altında (her blok da, sırasıyla, sol ve sağ paneller) sağlanma durumlarının,  $\gamma$  nın  $w$  cinsinden değişimi aracılığıyla gösterimleri.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Evrenin, günümüzde ivmeli bir genişleme sürecinde olduğunun gözlemsel keşfi ile başlayan kozmolojideki bu yeni durumu açıklamak üzere, ‘karanlık enerji problemi’ şeklinde genel bir adlandırma altında son yirmi yıldan bu yana sürdürülen tartışmalarda, GRT’ye alternatif olarak ileri sürülen değişikliğe uğratılmış gravite teorileri yoğun bir ilgi görmeyi sürdürmektedirler. Bu Tez’de, böyle alternatif teoriler arasında yer alan  $f(R)$ ,  $f(R, G)$  ve  $f(R, T)$  teorilerini,  $f(R, G, T)$  gravite adlandırmasıyla birleştirilmiş bir şekilde ele aldık ve GRT’de standart maddenin enerji-momentum tansörünün fizikseliği temeline dayandırılan enerji koşullarının bu teoriye uyarlanmış şekillerini, kozmolojik parametrelerin güncel gözlemsel değerleri ışığında muhtelif  $f$  fonksiyonel formlarının kozmolojik güvenilirliklerinin sınanması için bir ölçüt olarak kullandık.

Bu amaçla, önce, literatürde  $f(R)$ ,  $f(R, G)$  ve  $f(R, T)$  için tesis edilmiş alan denklemlerini, üç argüman içeren bu yeni  $f(R, G, T)$  gravite teorisine genişletilmesini ayrıntılı bir varyasyon hesabı ile verdik. Böyle bir hesabın kendi sembol ve kabullerimizle yeniden yapılmış olması, geometrik ve dinamik büyüklüklere ilişkin literatürde rastlanan muhtelif işaret (notasyon) farklılıklarından, kabul çeşitliliklerinden doğabilecek tutarsızlık ve iç çelişkiler gibi olumsuzlukların bertaraf edilmesi yolunda güvenilebilir isabetli bir hareket noktası oluşturmuştur.

Enerji koşullarının bir değiştirilmiş gravite teorisine uyarlanmasında kilit rolü, enerji momentum tansörünün tanım ve ifadesi oynamaktadır.  $f(R, G, T)$ –gravite teorisinin alan denklemlerinin GRT’nin alan denklemleriyle formel benzerlik sağlanacak şekilde düzenlenmesiyle, fiziksel madde içeriğinin yanısıra geometrik kökenli terimler de içeren bir efektif toplam enerji-momentum tansörü tanımlama olanağı ortaya çıkmaktadır. Tez’de, ‘efektif alan yaklaşımı’ denilen bu yöntem kullanılmıştır. Ancak, bu konuda şöyle bir durum ortaya çıkmaktadır; o da, efektif enerji-momentum tansörünün inşası tek türlü olmamaktadır. GRT’nin alan denklemleriyle formel benzerliği sağlayan birbirlerine matematiksel olarak eşdeğer, fakat birincisinden farklı efektif-enerji-momentum tansörü ifadesi veren bir ikinci düzenleme daha bulunmaktadır. Tez’de bunlar *I. YORUM* ve *II. YORUM* diye adlandırılmışlardır ve enerji koşullarına göre model sınamaları da her iki yorum çerçevesinde ele alınmıştır. Bu noktada şunu da belirtelim; her ne kadar literatürde  $f(R)$ ,  $f(R, G)$  ve  $f(R, T)$

denklemlerinin bu iki yorum altında yazılışlarına raslanılmaktaysa da, enerji koşullarıyla ilgili çalışmalarda, bilebildiğimiz kadarıyla, *II. YORUM*'u kullanan olmamıştır. Tez'e bu *II. YORUM*'un eklenmesi, çalışmanın çerçevesini genişleten bir unsur olmuştur. §(4.2) de belirtildiği üzere  $f(R,G,T) = R + F(G,T)$  durumu için her iki yorum da birbirlerine denk olmaktadır. Yukarıda sözü edilen iki tür yoruma ilave olarak, Tez'in kapsamını genişleten bir diğer unsur da,  $T$  argümanının varlığı durumundan kaynaklanmaktadır; nedenine gelince; standart maddenin enerji-momentum tansörünün inşasını verecek olan aksiyondaki geometrik Lagrange yoğunluğuna bağlanabilecek ifade için, tek olmak yerine,  $L_m = p^m$  ve  $L_m = -\mu^m$  gibi iki türlü seçenek bulunuyor olmasıdır. Literatürdeki enerji koşulları uygulamalarında, yine bilebildiğimiz kadarıyla, [143] no'lu kaynak dışında bu ikincisiyle iş görmüş olan bulunmamaktadır. Tez'imize bu ikincinin de eklenmesi, standart madde için iki farklı süreklilik denklemini de tartışmak durumunu ortaya çıkarmıştır.

Tez'de,  $f(R,G,T) - gravite$  'nin alan denklemlerine 1+3 kovaryant ayrışım yöntemi uygulamak suretiyle, enerji koşullarının akışkanın dinamik büyüklükleri cinsinden ifade edilebilmesi için elzem olan: efektif toplam madde yoğunluğu, efektif toplam basınç gibi efektif dinamik büyüklükler tanımlanmış ve hepsi de, uzayca homojen ve eşyönlü bir evreni tasvir eden ve 3-boyutlu uzayın eğriliğini de içeren genel RW metriği çerçevesinde ortonormal bir tetrad çatısında açık bir şekilde en genel şekilleriyle hesaplanmışlardır. Bu bağlamda, evreni dolduran standart madde-enerji içeriğinin mükemmel akışkan olarak alındığını ve basıncı ile madde-enerji yoğunluğunun da birbirlerine sabit hal parametrelili lineer barotropik bir hal denklemini uyarınca bağlı olduğunun varsayıldığını kaydedelim. Literatürdeki enerji koşullarına ilişkin çalışmalarda bu parametre, neredeyse tüm çalışmalarda matematiksel kolaylık amacıyla  $w = 0$  (basıncısız akışkan  $\equiv$  toz bulutu) olarak alınmış olmasına karşılık, bizde, pozitif ve negatif basıncın da etkisini görmek üzere bazı  $f(R)$  modellerinde  $w = \pm 0.25$  alınmış;  $T$  argümanlı modellerde ise,  $w$  ya  $w = 0$  gibi tek bir değer atfetmek yerine,  $w$  nun  $-1/3 \leq w < 1/3 < w \leq 1$  aralığı ile iş görülmüştür.

Tez'de: 'standart madde', 'efektif', 'toplam efektif' gibi muhtelif nitelendirmeler ile tanımlı enerji-momentum tansörlerinin diverjanslarının yol açtığı süreklilik denklemlerinin ayrıntılı tesisine geniş yer verilmiştir.  $f(R)$  ve  $f(R,G) - gravite$  'de, standart maddeye bağlanan enerji-momentum tansörünün diverjansının her iki yorum altında ve de gravite teorisine bağlı

olmaksızın daima sıfır olduğu, yani standart maddenin daima korunduğu açıkça gösterilmiştir. Ancak,  $T$  argümanı içeren modeller, madde Lagrange'yenin seçimine bağlı olarak iki farklı süreklilik denklemi ortaya çıkarmaktadır. Yorumlara bağlı olmayan ve  $f(R,G,T)$  ile birlikte ve bunun  $f_T, \dot{f}_T$  gibi türevlerini de içermekte olan bu oldukça karmaşık iki denklem, en genel halleriyle integre edilip tartışılmıştır. Söz konusu denklemler  $f(R,G,T)$  nin formu ya da  $w$  parametresinin değerleri hakkında ancak özel seçimler için standart maddenin korunumuna izin vermektedirler.  $f(R)$  ve  $f(R,G)$  –*gravite* modellerinde korunum, model parametreleri üzerine hiçbir kısıtlama getirmezken,  $T$  argümanı içeren modellerde durum böyle olmamaktadır. Bu modellerde standart maddenin korunması istendiğinde bu; hal parametresi  $w$  ya bağlı olarak  $f(R,T)$  (ya da  $f(R,G,T)$ ) nin fonksiyonel formu ile kuplaj sabitleri üzerinde seçim serbestliğini ortadan kaldırıp bir takım kısıtlamalara yol açmaktadır. Öte yandan, standart maddenin korunumunun olmaması durumunda ise, bu sefer, evrenin genişlediğine işaret eden gözlemlerle uygunluğun sağlanması meselesi ortaya çıkmaktadır. Korunum olduğunda, evrenin ölçek çarpanının kozmik zamanla değişimi  $a(t) \propto t^{-3(1+w)}$  iken, yani  $t$  arttıkça  $a(t)$  de artarken, benzer bir davranışın korunum olmaması durumunda da geçerli olması için  $T$  ve  $\dot{T}$  üzerine fazladan bir kısıtlama ileri sürme gerekliliği bulunmaktadır. Tez'de bu, (4.169.b) bağıntısıyla ifade edilmiştir.  $T$  içeren modellerde, korunum olsun ya da olmasın sözü edilen yukarıdaki kısıtlamalara ilişkin tartışmalar  $L_m = p^m$  ve  $L_m = -\mu^m$  seçeneklerinin her ikisi için de açıkça ayrıntılanmıştır.

$f(R,G,T)$ –*gravite* teorilerini; evrenin günümüzde de süregelen bir ivmeli genişleme sürecinde bulunduğu olgusuyla ilişkilendirebilmenin matematiksel dayanağını, güncel kozmolojik gözlemsel verilerle değerlendirilmiş olan SEC'in,  $w_{ef} < -1/3 \Rightarrow SEC < 0$  olması gerekliliği oluşturmaktadır. Geri kalan koşullardan  $NEC \geq 0$ ,  $WEC \geq 0$  ve  $DEC \geq 0$  bağıntıları, toplam efektif enerji momentum tansörününün fiziksellğine dayandırılmış ölçütlerdir. Bunlara  $f_R > 0$  ve  $f_{RR} > 0$  eşitsizliklerin eklenmesiyle 1. koşul takımı; ve buna da  $-1.2 \leq w_{KE} \leq -0.8$  eklenmesiyle 2. koşul takımı adlandırmaları altında sonuçta, iki koşul takımı oluşturulmuştur. Son eşitsizlik, ilk defa tarafımızdan 'enerji koşullarına göre kozmolojik güvenilirlik' formalizmine dahil edilmiş olmaktadır. Aşıkarak, 2. koşul takımı daha kısıtlayıcı bir özellik taşımaktadır. Bu koşullar bağlamında, Tez'de bir de,  $w_{KE} < -1$  bağıntısı uyarınca süper-ivme



varlığının araştırıldığını söyleyelim. Gözlemler süper ivmenin varlığını dışlamadığından,  $w_{KE} < -1$  eşitsizliğine bir koşul olmaktan ziyade bir bilgilendirme amacı taşıdığı gözleyle bakmak gerekmektedir.

Şimdi; yukarıdaki teorik altyapıya ilişkin değerlendirmelerimizin sayısal uygulamalara nasıl yansıtılmış olduğunu değerlendirelim. İşin içine giren:  $R, G, T, f(R, G, T), H, \mu, p, C_1, C_2, \dots$  gibi tüm değişken ve fonksiyonlar farklı farklı boyut taşıdıkları için bunların kombinasyonlarından oluşan ifadeler de boyutlu olmaktadır. Parametre seçimleri yoluyla sayısal simülasyonlar yaparken: birliği, tutarlılığı, uyumu ve kolaylığı sağlamak üzere matematiksel ifadelerin boyutsuz olmalarının arzulanabilir bir durum olduğu aşikardır. Tez’de bunu sağlamak üzere: ışık hızı  $c$ , Hubble sabiti  $H_0$  ve Einstein kuplaj sabiti  $\chi^2$  yardımıyla ilgili değişkenlere boyutsuz değişkenler bağlanmış ve tüm denklem ve bağıntılar bu boyutsuz değişkenler cinsinden ifade edilmiştir. Bu işlem, sayısal hesaplamalarda: sistematiklik, sağlamlık, kolaylık ve berraklık gibi pek çok olumluluklar sağlamanın yanısıra şöyle de önemli bir sadeleştirme sağlamıştır; o da, denklem ya da eşitsizliklerdeki zamana bağlı değişken ve fonksiyonlar, kozmolojik parametrelerin güncel değerleriyle değerlendirildiğinde,  $H_0$  Hubble sabiti elenmiş olmaktadır. Literatürde, bilebildiğimiz kadarıyla, enerji koşulları çerçevesinde boyutsuzlaştırma yoluna giden bir çalışma, [144] no’lu kaynak dışında (bizimkinden de kısmen farklı olarak), bulunmamaktadır.

Tez’de, kozmolojik büyüklüklerin güncel gözlemsel verilerine dayanarak  $f(R, G, T) - gravite$ , ya da boyutsuz yazılışıyla,  $F(r, g, t) - gravite$  modellerinin, enerji koşullarına göre kozmolojik güvenilirliklerinin sınanması, sırasıyla, bu genel teorinin alt-sınıflarını oluşturan:  $F(r)$ ,  $F(r, g)$  ve  $F(r, t)$  için ele alınmıştır. Bu çerçevede: 14 adet  $F(r)$ ; 9 adet  $F(r, g)$  ve 10 adet  $F(r, t)$  fonksiyonel form: çarpan, üs, kuplaj sabitleri... gibi parametreleri bakımından, *I. YORUM* ve *II. YORUM* altında, *1. koşul takımı* ile *2. koşul takım*’ına göre sayısal olarak sınanmış ve her bir koşul takımının sağlanıp sağlanmamasına göre parametre aralıkları görüntüsel (pek azında da tablosal) olarak belirlenmiştir. Ayrıca, *YORUM* ve *koşul takımı* kombinasyonlarının her birinde süper-ivme varlığı da araştırılmıştır. Bir fonksiyonel forma ait tüm bulguları, yerden tasarruf etmek üzere tek bir *Şekil* paneli üzerinde göstermeye gayret edilmiştir. Eğrisel gösterimler bir kenara bırakılırsa, geri kalanlar iki boyutlu olup bir

parametrenin başka bir parametre cinsinden değişiminin bölgeler şeklinde renkli gösterimlerinden oluşmaktadır.

Fonksiyonel formların çoğu, geometrik EH-Lagrange'yenine bir düzeltme terimi eklenmiş görünümünde alınmıştır. Bununla beraber, böyle olmayan, yani yalın görünümlü fonksiyonel formlara da, az da olsa, yer verilmiştir.  $F(r)$  ve  $F(r, g)$  modellerinde, literatürde genellikle yapıldığı üzere  $w$  hal parametresi için  $w=0$  (basınçsız akışkan) alınmıştır. Ancak bunun, gerçek fiziksel durumu yansıttığını söylemek pek doğru görünmemektedir. Bu bakımdan, Tez'imizde, özel olarak,  $F(r)=r+K_1r^a$  modelinde,  $w$  için  $w=\pm 0.25$  gibi iki değer daha alarak sonuçların  $w$  ya bağlılığının tartışılmasına da yer verdik ve sonuç olarak söz konusu modelde  $w$  nun muhtelif seçimlerinin: model sayısı, süper-ivme, kuplaj sabiti, üs, ... gibi özellikler üzerinde, iki *koşul takımı* ile iki *YORUM* 'a da bağlı olarak, artış, değer aralığı daralması, ... gibi birtakım etkilerinin bulunduğu yönünde sonuçlara ulaştık. Benzer davranışlar, kaydadeğer bir belirginlikte olmasa da, uzaysal eğriliğe bağlanan  $\Omega_{k,0}$  eğrilik parametresi için, düz uzayı temsil eden  $\Omega_{k,0} = 0$  değeri yerine, sırasıyla kapalı ve açık uzayları temsil eden  $\Omega_{k,0} = -0.031$  ve  $\Omega_{k,0} = +0.003$  değerleri alındığında da saptanmıştır. Ancak,  $\Omega_{k,0}$  nin etkileri konusunda, söz konusu model dışında diğer  $f$  - modelleri de göz önüne alınıp ayrıntılı bir tartışmaya; bir yandan pek çok model ve parametre ile çalışılıyor olmak, diğer yandan da yer darlığı nedeniyle, girilemediğini belirtelim. Hal parametresi  $w$  ya tekrar dönersek;  $T$  argümanlı  $f$  - modellerde  $w$  cinsinden gösterimlerden apaçık görüleceği üzere bu parametrenin  $w \in [-1/3, 1]$  şeklinde en geniş tanım aralığındaki değerleri, güvenilir modellerin: parametrelerinden süper ivme durumlarına kadar herşeyin belirleyicisi özelliğini taşımaktadır. Bu durum göz önünde bulundurulduğunda, literatürde standart madde enerjisi basınçsız ( $w=0$ , toz bulutu) olarak almanın hem çok özel ve hem de gerçekçi olmadığını söylemek gerekmektedir.

$f$  - modellerinin parametrelerini bire ya da en fazla ikiye indirgeyerek simülasyonlar yapmak için, geri kalan parametrelerin değerlerinin peşinen seçimi konusunda tüm olasılıkların kapsandığı aşıkarak söylenemez. Böyle olmakla birlikte, Tez'de toplamda 33 gibi oldukça çok sayıda modelin güvenilirliği araştırılmış ve hepsinin olmasa da büyük bir çoğunluğunun uygun parametre aralıklarında güvenilirliğe sahip oldukları gösterilmiştir. Bu sonucu dikkate alarak  $f(R, G, T)$  - *gravite* teorilerinin evrenin ivmeli genişleme olgusuyla kozmolojik sabit

ithalini gerektirmeksizin tutarlı olduğunu söylemek gerekir. Ancak, bu kozmolojik geçerliliği sağlayan parametre aralıkları genel olarak oldukça geniş bir spektrum oluşturmaktadır. Buradan şunu kastetmekteyiz: *Şekil*'lerden açıkça görüleceği üzere, peşinen seçilmiş parametreler dışında, mesela,  $K_1$  ve  $\alpha$  gibi iki serbest parametreye indirgenmiş bir modelde verilmiş bir  $\alpha$  değeri için onlarca ya da yüzlerce  $K_1$  parametre değeri ortaya çıkabilmektedir. Bu şekilde,  $f$ -modelini kozmolojik geçerli kılan  $(K_1, \alpha)$  ikili sayısı, hesaplarda kullanılan parametre adımlarının duyarlılığına bağlı olarak, yüzlere ve hatta binlere varabilmektedir. Model sayısını indirmek için Tez'imizde 2. koşul takımı kullanılmıştır: Şekillerdeki gösterimlerin karşılaştırılmasından kolayca anlaşılacağı üzere, 4.140.b koşul takımı, yani, 2. koşul takımı,  $f$ -modelleri parametreleri üzerinde, beklentiye uygun olarak, her iki yorumda da daha kısıtlayıcı bir rol oynamaktadır. Eğer kozmolojik güvenilirlik için  $w_{KE}$  ye ilişkin  $-1.2 \leq w_{KE} \leq -0.8$  gözlemsel verisi gerçekten de bir kısıtlama olarak kabul edilirse, bu takdirde 4.140.b koşul takımı ile belirlenen pembe bölgeler göz önüne alınmalıdır. Yok eğer, bu veri bir kısıtlama olarak düşünülmezse, bu takdirde, söz konusu *Şekil*'lerdeki "kırmızı+siyah" bölgeler kozmolojik geçerliliğe sahip modeller olarak kabul edilmelidir. (4.141) deki bağıntılar birer koşul takımı olmaktan ziyade sözü edilen 1. ve/veya 2. koşul takımları'nı sağlayan modeller arasında hangilerinin süper-ivmeli olduğunu belirten bir bilgilendirme mahiyeti taşımaktadır. Eğer süper-ivmeli modellerin dışarılanması istenirse bu takdirde kozmolojik güvenilirlik için, *Şekil*'lerdeki yalnızca kırmızı ve pembe ile belirtilmiş bölgelerdeki modellerin kabul edilebilir olduğunu söylemek gerekecektir. Ve bu da model sayısını, yani, parametre aralıklarını hatırı sayılır sayıda sınırlandırmış olmaktadır.

Bir diğer saptama olarak şunu da belirtelim:  $f$ -modellerinin enerji koşullarına göre kozmolojik güvenilirliklerinin sorgulanmasında dikkate alınması gereken iki mesele daha bulunmaktadır: Bunlardan birincisi, (4.133) de verilen:  $H_0$ ,  $q_0$ ,  $j_0$ ,  $s_0$ ,  $\Omega_{m,0}$  kozmolojik parametrelerinin güncel değerlerinin seçimidir ( $H_0$  büyüklüğünün değerinin bilinmesine gerek olmadığına daha önce işaret edilmiş idi.). Tez'de biz bunların güven aralıklarını dikkate almayarak yalnızca 'en iyi değerleri'ni (best values) kullandık. Herbir kozmolojik parametrenin güven aralıklarını da işin içine katarak simülasyonlar yapmak, matematiksel olarak mümkün olmakla birlikte, bu işin; hem muazzam bir bilgisayar zamanı gerektireceğini ve hem de grafiksel ya da tablosal gösterimler sayısını aşırı arttıracığını söylemeliyiz. İki boyutlu gösterimler bakımından, söz

konusu kozmolojik büyüklükleri kendi güven aralıkları içinde değişken olarak tasarlamak (tıpkı  $\Omega_{m,0}$  parametresi için yapılan gibi), zaten çok olan parametre sayısını daha da arttırmak anlamını taşımaktadır. Bu ise,  $f$ -fonksiyonlarının bir parametresinin, anlamlı bir role sahip  $w$  büyüklüğü cinsinden değişiminin araştırılmasından feragat etmek demektir ki, bu da hiç istenmeyecek bir durum olacaktır. Dolayısıyla, Tez’de bu değişkenler için böyle bir hesaba girilmemiştir. Diğer mesele ise, söz konusu kozmolojik parametrelerin güncel değerlerinin gerçekte ne olduğudur. Bunlar hakkında literatürde yalnızca (4.133) de verilen değerler değil, fakat ileri sürülen başka değer takımları da bulunmaktadır. Farklı gözlem verileri kullanmak ya da verilere farklı yöntemler kullanmaktan kaynaklanan bu durumlara örnek olmak üzere, mesela, yakın zamanlardaki [145] no’lu kaynakta, gözlemler için en iyi uyuşturma (fit), ancak bunların güven aralıklarını dikkate almadık. Güven aralıkları içinde kalmak kaydıyla söz konusu parametrelerin  $f$ -model parametreleri üzerinde kozmolojik güvenilirlik bakımından farklılığa yol açacağı beklenebilir. Nitekim Tez’imizde göstermemiş olmamıza rağmen yapmış olduğumuz pek çok simülasyonda böyle durumlar oluşmuştur. Öte yandan, söz konusu kozmolojik parametrelerin güncel verileri hakkında literatürde yalnızca (4.133) de verilen değerler değil fakat başka değer takımları da bulunmaktadır. Nitekim yakın zamanlardaki [145] no’lu kaynakta, gözlemler için en iyi uyuşturma (best fit) değerleri olarak

$$H_0 = 71.8 \text{ kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}, q_0 = -0.64, j_0 = 1.02, s_0 = -0.39, \Omega_{m,0} = 0.272^{+0.036}_{-0.034}$$

takımı belirlenmiş olduğu belirtilmektedir ve bunlar da [116, 117, 146, 147, 148] no’lu kaynaklarda kullanılmıştır. [148] no’lu kaynakta  $\Omega_{m,0}$  değerinin; 557 Tip-Ia süpernova kümesinin, baryon akustik osilasyonları ve kozmik mikrodalga arkafon ışınımı ile birleştirilmesi suretiyle %95 güvenilirlik seviyesinde elde edilmiş olduğu ifade edilmektedir. Bu değerlerle hesaplarımızın tekrarını sonraki çalışmalarımıza bırakmaktayız.

Kozmolojik büyüklüklerin güncel değerlerini kullanarak, kısıtlı ya da genişletilmiş enerji koşulları aracılığıyla  $f(R,G,T)$ -gravite modellerinin kozmolojik güvenilirliklerinin sınanması, pek çok türlü seçilebilecek  $f(R,G,T)$  fonksiyonel formlarının parametreleri hakkında bir takım kısıtlamalara yol açmaktaysa da, bunların kabul edilebilirlik aralıkları yine de oldukça geniş olabilmektedir. Bunları daha da daraltmak ve hatta elemek üzere, enerji koşullarına göre güvenilirliği saptanmış modelleri bir de: Güneş sistemi testleriyle uygunluk,

erken evre enflasyon sonrası yavaşlamanın ardından geç evre enflasyon senaryosunu verme, ... gibi birtakım astrofiziksel ölçütlere baş vurarak değerlendirmek yararlı olacaktır. Bu konu da ilerideki çalışmalarımızda ele alınacaktır.

Sonuç olarak Tez; enerji koşulları tek başına kullanıldığında: ister  $f(R)$ , ister  $f(R,G)$ , ister  $f(R,T)$  ve isterse de  $f(R,G,T)$  olsun, kozmolojik güvenilirliğe sahip sayısız model bulunduğunu örnekleriyle ortaya koymaktadır. Ancak, bunlardan hangisinin ya da hangilerinin tercih edilebilir olduğu sorusunun, astrofiziksel başka veriler olmadıkça, açık bir soru olarak kalacağını söylemek pek de yanlış olmayacaktır.



## KAYNAKLAR

- [1]. Hawking, S., Ellis, G.F.R, 1973, *The Large Structure of Spece-Time*, Ch.4.3, Cambridge University Press, ISBN 0-521-09906-4.
- [2]. Poisson, E., 2004, *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black Hole Mechanics*, Sec. 2.1, Cambridge University Press, ISBN 0-521-83091-5.
- [3]. Carroll, S. M., 2004, *Spacetime and Geometry: An introduction to General Relativity*, Sec. 4.6, Addison-Wesley, ISBN 0-8053-8732-3.
- [4]. Wald, R. M., 1984, *General Relativity*, Sec. 9.2, University of Chicago Press, ISBN 0-226-87033-2.
- [5]. Ellis, G.F.R., Maartens, R., MacCallum, M. A. H., 2012, *Relativistic Cosmology*, Sec. 6.1, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-38115-4.
- [6]. Riess, A.G., et al.,1998, Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant, *Astron. J.* 116, 1009-1038.
- [7]. Perlmutter, S., et al., 1999, Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-redshift supernovae, *Astrophys. J.*, 517, 565-586.
- [8]. Riess, A.G., et al., 1999, BV RI light curves for 22 type Ia supernovae, *Astron. J.*, 117, 707.
- [9]. Tonry, J.L., et al., 2003, Cosmological results from high-z supernovae, *Astrophys. J.*, 594, 1-24.
- [10]. Riess, A.G., et al., 2004, Type Ia supernova discoveries at  $z > 1$  from Hubble Space Telescope: evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution, *Astrophys. J.*, 607, 665-687.
- [11]. Clocchiatti , A., et al., 2006, Hubble Space Telescope and ground-based observations of Type Ia supernovae at redshift 0.5: cosmological implications, *Astrophys. J.*, 642, 1-21.
- [12]. Peiris, H.V., et al., 2003, First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: implications for inflation, *Astrophys. J. Suppl.* 148, 213.
- [13]. Astier, P. et al., 2006, The supernova legacy survey: measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  and  $w$  from the first year data set, *Astron. Astrophys.* 447, 31.
- [14]. Riess, A.G., et al., 2007, New Hubble space telescope discoveries of Type Ia supernovae at  $z > 1$ : narrowing constraints on the early behaviour of dark energy, *Astrophys. J.*, 659, 98.

- [15]. Spergel, D.N., et al., 2007, Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: implications for cosmology, *Astrophys. J. Suppl.* 170, 377.
- [16]. Komatsu, E., et al., 2009, Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation, *Astrophys. J. Suppl.* 180, 330.
- [17]. Komatsu, E., et al., 2011, Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation, *Astrophys. J. Suppl.* 192,18.
- [18]. Hinshaw, G., et al., 2012, Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results, *Astrophys. J. Suppl.* 208, 19.
- [19]. Ade, P.A.R., et al., 2014, Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results, *Astron. Astrophys.*, 571, A1.
- [20]. Ade, P.A.R., et al., 2016, Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters, *Astron. Astrophys.*, 594, A13.
- [21]. de Bernardis, P., et al., 2000, A flat universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation, *Nature*, 404, 955-959.
- [22]. Hanany, S., et al., 2000, MAXIMA-1: a measurement of the cosmic microwave background anisotropy on angular scales of  $10^{-5}$ , *Astrophys. J.*, 545, 1.5-1.9.
- [23]. Bennett, C.L., et al., 2003, First year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: preliminary maps and basic results, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 148, 1.
- [24]. Spergel, D.N., et al., 2003, First-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: determination of cosmological parameters, *Astrophys. J. Suppl.* 148, 175-194.
- [25]. Tegmark, M., et al., 2004, Cosmological parameters from SDSS and WMAP, *Phys.Rev. D*, 69, 103501.
- [26]. Tegmark, M., et al., 2004, The 3D power spectrum of galaxies from SDSS, *Astrophys. J.*, 606, 702-740.
- [27]. Seljak, U., et al., 2005, Cosmological parameter analysis including SDSS Ly $\alpha$  forest and galaxy bias: constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy, *Phys.Rev. D*, 71, 103515.
- [28]. Eisenstein D.J., et al., 2005, Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies, *Astrophys. J.*, 633, 560.
- [29]. Jain, B., Taylor, A., 2003, Cross-correlation Tomography: Measuring Dark Energy Evolution with Weak Lensing, *Phys. Rev. Lett.*, 91, 141302.

- [30]. Copeland, E.J., Sami, M., Tsujikawa, S., 2006, Dynamics of dark energy, *Int. J. Mod. Phys. D*, 15, 1753-1936.
- [31]. Turner, M.S., Huterer, D., 2007, Cosmic Acceleration, Dark Energy and Fundamental Physics, *J.Phys.Soc.Jap.*, 76:111015.
- [32]. Frieman, J.A., Turner, M.S., Huterer, D., 2008, Dark Energy and the Accelerating Universe, *Ann.Rev.Astron.Astrophys.*, 46:385.
- [33]. Peebles, P.J.E., Ratra, B. 2003, The cosmological constant and dark energy, *Rev. Mod. Phys.*, 75, 559-606.
- [34]. Carroll, S.M., 2001, The cosmological constant, *Living Reviews in Relativity*, 4, 1.
- [35]. Bean, R., Dore, O., 2003, Are chaplygin gases serious contenders for the dark energy?, *Phys. Rev. D* 68, 023515.
- [36]. S.M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden and M.S. Turner, 2004, Is cosmic speed up due to new gravitational physics? *Phys. Rev. D* 70, 043528.
- [37]. Polarski, D., 2006, Dark energy: Current issues, *Ann. Phys. (Berlin)* 15, 342.
- [38]. Schmidt, H.J., 2007, Fourth order gravity: Equations, history, and applications to cosmology, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 4, 209.
- [39]. Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2007, Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 4, 115.
- [40]. Durrer, R., Maartens, R., 2008, Dark energy and dark gravity: theory overview, *Gen. Relativ. Gravit.*, 40, 301.
- [41]. Capozziello, S., Francaviglia, M., 2008, Extended theories of gravity and their cosmological and astrophysical applications, *Gen. Relativ. Gravit.*, 40, 357.
- [42]. Sotiriou, T.P., 2009, 6+1 lessons from  $f(R)$  gravity, *J. Phys. Conf. Ser.*, 189, 012039.
- [43]. Tsujikawa, S., 2010, *Dark energy: investigation and modeling*, Dark Matter and Dark Energy, In: Matarrese, S., Colpi, M., Gorini, V., Moschella, U. (ed), Chapter 8, Springer, Dordrecht, The Netherlands, ISBN: 978-90-481-8684-6, 331.
- [44]. Felice, A. De, Tsujikawa, S., 2010,  $f(R)$  theories, *Living Reviews in Relativity*, 13, 3.
- [45]. Sotiriou, T.P., Faraoni, V., 2010,  $f(R)$  theories of gravity, *Rev. Mod. Phys.*, 82, 451.
- [46]. Amendola, L., Tsujikawa, S., 2010, *Dark Energy: Theory and Observations*, (Cambridge University Press, Cambridge.
- [47]. Linder, E.V., 2010, Einstein's other gravity and the acceleration of the universe, *Phys. Rev. D*, 81, 127301.



- [48]. Tsujikawa, S., 2010, Recent status of dark energy, *Mod. Phys. Lett. A* 25, 843.
- [49]. Capozziello, S., de Laurentis, M., 2011, Extended theories of gravity, *Phys. Rep.*, 509, 167.
- [50]. Capozziello, S., Faraoni, V., 2011, *Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*, Springer, London.
- [51]. Clifton, T., Ferreira, P.G., Padilla, A., Skordis, C., 2012, Modified gravity and cosmology, *Phys. Rep.*, 513, 1.
- [52]. Buchdahl, H.A., 1970, Non-linear lagrangians and cosmological theory, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 150, 1.
- [53] Rippl, S., van Elst, H., Tavakol, R., Taylor, D., 1996, Kinematics and dynamics of  $f(R)$  theories of gravity, *Gen. Rel. Grav.*, 28, 193.
- [54]. Nojiri, S., Odintsov, S., D., 2003, Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration, *Phys. Rev. D*, 68, 123512.
- [55]. Nojiri, S., Odintsov, S., D., 2005, Modified Gauss-Bonnet Theory as Gravitational Alternative for Dark Energy, *Phys. Lett. B*, 631, 1.
- [56]. Nojiri, S., Odintsov, S., D., Sasaki, M., 2005, Gauss-Bonnet Dark Energy, *Phys. Rev. D*, 71, 123509.
- [57]. Harko T., 2008, Modified gravity with arbitrary coupling between matter and geometry, *Phys. Lett. B* 669, 376.
- [58]. Harko T., Lobo, F.S.N., Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2011,  $f(R, T)$  gravity, *Phys. Rev. D* 84, 024020.
- [59]. Weyl, H., 1919, Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, *Annalen der Physik*, 364, 101-133.
- [60]. Eddington, A.S., 1923, *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [61]. Starobinsky, A.A., 1980, A new type of isotropic cosmological models without singularity, *Phys. Lett. B*, 91, 99.
- [62]. Zhang, P.-J., 2007, The behavior of  $f(R)$  gravity in the solar system, galaxies and clusters, *Phys. Rev. D*, 76, 024007.
- [63]. Hu, W., Sawicki, I., 2007, Models of  $f(R)$  cosmic acceleration that evade Solar-System tests, *Phys. Rev. D*, 76, 064004.
- [64]. Chiba, T, Smith, T.L. Erickcek, A.L., 2007, Solar system constraints to general  $f(R)$  gravity, *Phys. Rev. D*, 75, 124014.

- [65]. Tsujikawa, S., 2008, Observational signatures of  $f(R)$  dark energy models that satisfy cosmological and local gravity constraints, *Phys. Rev. D*, 77, 023507.
- [66]. Shabani, H., Farhoudi, M., 2014, Cosmological and solar system consequences of  $f(R, T)$  gravity models, *Phys. Rev. D* 90, 044031.
- [67]. Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2003, Modified gravity with negative and positive powers of the curvature: unification of the inflation and of the cosmic acceleration, *Phys. Rev. D*, 68, 123512.
- [68]. Nojiri, S., Odintsov, S.D., Gorbunova, O.G., 2005, Dark energy problem: from phantom theory to modified Gauss-Bonnet gravity, *J. Phys. A* 39, 6627.
- [69]. Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2007, Unifying inflation with  $\Lambda$ CDM epoch in modified  $f(R)$  gravity consistent with solar system tests, *Phys. Lett. B*, 657, 238.
- [70]. Song, Y.-S., Hu, W., Sawicki, I., 2007, Large scale structure of expansion of  $f(R)$  gravity, *Phys. Rev. D*, 75, 044004.
- [71]. Li, B., Barrow, J.D., 2007, The cosmology of  $f(R)$  gravity in the metric variational approach, *Phys. Rev. D*, 75, 084010.
- [72]. Li, B., Barrow, J.D., 2007, Mota, D.F., 2007, The Cosmology of Modified Gauss-Bonnet Gravity, *Phys. Rev. D*, 76, 044027.
- [73]. Cognola, G., et al., 2008, A class of viable modified  $f(R)$  gravities describing inflation and the onset of accelerated expansion, *Phys. Rev. D*, 77, 046009.
- [74]. Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2008, Modified  $f(R)$  gravity unifying  $R^m$  inflation with  $\Lambda$ CDM epoch, *Phys. Rev. D*, 77, 026007.
- [75]. Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2009, Non-singular modified gravity: the unification of the inflation, dark energy and dark matter, *AIP Conf. Proc.* 1241, 1094.
- [76]. Bamba, K., Geng, C.-Q., Lee, C.-C., 2010, Cosmological evolution in exponential gravity, *JCAP* 08, 021.
- [77]. Zaregonbadi, R., Farhoudi, M., 2016, Cosmic acceleration from matter-curvature coupling, *Gen. Rel. Gravit.*, 48, 142.
- [78]. de la Cruz-Dombriz, A., Dobado, A., Maroto, A.I., 2008, Evolution of density perturbations in  $f(R)$  theories of gravity, *Phys. Rev. D*, 77, 123515.
- [79]. De Felice, A., Gérard, J.M, Suyama, T., 2010, Cosmological perturbation in  $f(R, G)$  theories with a perfect fluid, *Phys. Rev. D* 82, 063526.

- [80]. De Felice, A., Suyama, T., 2011, Linear growth of matter density perturbations in  $f(R,G)$  theories, *Prog. Theor. Phys.* 125, 603.
- [81]. Alvarenga, F.G., de la Cruz-Dombriz, A., Houndjo, M.J.S., Rodrigues, M.E., Saez-Gómez, D., 2013, Dynamics of scalar perturbations in  $f(R,T)$  gravity, *Phys. Rev. D*, 87, 103526.
- [82]. Zaregonbadi, R., Farhoudi, M., Riazi, N., 2016, Dark Matter From  $f(R,T)$  Gravity, *Phys. Rev. D* 94, 084052.
- [83]. Nojiri, S., Odintsov, S., D., Gorbunova, O., G., 2005, Dark Energy Problem: from Phantom Theory to Modified Gauss-Bonnet Gravity, *J. Phys. A*, 39, 6627.
- [84]. Bamba, K., 2009, Behavior of  $F(R)$  gravity around a crossing of the phantom divide, *Open Astron. J.*, 3, 13.
- [85]. Makarenko, A.N., Obukhov, V.V., Kirnos, I.V., 2012, From Big to Little Rip in modified  $f(R,G)$  gravity, *Astrophys. Space Sci.*, 343, 481.
- [86]. Alani, I., Santillan, O.P., 2016, Cosmological singularity theorems for  $f(R)$  gravity theories, *JCAP* 05, 023.
- [87]. Dolgov, A.D., Kawasaki, M., 2003, Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion?, *Phys. Lett. B*, 573, 1.
- [88]. Faraoni, V., 2005, The stability of modified gravity models, *Phys. Rev. D*, 72, 124005.
- [89]. Faraoni, V., 2006, Matter instability in modified gravity, *Phys. Rev. D*, 74, 104017.
- [90]. Sawicki, I., Hu, W., 2007, Stability of cosmological solutions in  $f(R)$  models of gravity, *Phys. Rev. D*, 75, 127502.
- [91]. Sharif, M., İkrām, A., 2016, Stability Analysis of Some Reconstructed Cosmological Models in  $f(R,G)$  gravity, *Physics of the Dark Universe* 17, 1.
- [92]. Sharif, M., İkrām, A., 2017, Stability Analysis of Einstein Universe in  $f(G,T)$  Gravity, *Int. J. Mod. Phys. D*, 26, 1750084.
- [93]. Ananda, K.N., Carloni, S., Dunsby, P.K.S., 2008, A characteristic signature of fourth order gravity, *Springer Proc. Phys.*, 137, 165.
- [94]. Carloni, S., Troisi, A., Dunsby, P.K.S., 2008, Some remarks on the dynamical systems approach to fourth order gravity, *Gen. Rel. Grav.*, 41, 1757.
- [95]. Abdelwahab, M., Carloni, S., Dunsby, P.K.S., 2008, Cosmological dynamics of exponential gravity, *Class. Quant. Grav.*, 25, 135002.
- [96]. Carloni, S., Dunsby, P.K.S., Troisi, A., 2009, Cosmological dynamics of fourth order gravity, *arXiv:0906.1998 [gr-qc]*.

- [97]. Ivanov, M.M., Toporensky, A.V. 2011, Cosmological dynamics of fourth order gravity with Gauss-Bonnet term, *Grav. Cosmol.*, 18, 43.
- [98]. Guo, J.-Q., Frolov, A.V., 2013, Cosmological dynamics in  $f(R)$  gravity, *Phys. Rev. D*, 88, 124036.
- [99]. Amendola, L., Charmousis, C., Davis, S., C., 2006, Constraints on Gauss-Bonnet Gravity in Dark Energies Cosmologies, *JCAP* 0612, 020.
- [100]. Koivisto, T., Mota, D., F., 2006, Cosmology and Astrophysical Constraints of Gauss-Bonnet Dark Energy, *Phys. Lett. B* 644, 104.
- [101]. Wu, P.-U., Yu, H.-W., 2006, Constraints on a variable dark energy model with recent observations, *Phys. Lett. B*, 643, 315.
- [102]. Calcagni, G., Carlos, B., Felice, A., 2006, Ghost Conditions for Gauss-Bonnet Cosmologies, *Nucl. Phys. B*, 752, 404.
- [103]. Amendola, L., Gannouji, R., Polarski, D, Tsujikawa, S., 2007, Conditions for the cosmological viability of  $f(R)$  dark energy models, *Phys. Rev. D*, 75, 083504.
- [104]. Neupane, I. P., 2007, Constraints on Gauss-Bonnet Cosmologies, *JCAP* 12, 020.
- [105]. Martinelli, M., Melchiorri, A., Amendola, L., 2009, Cosmological constraints on the Hu-Sawicki modified gravity scenario, *Phys. Rev. D*, 79, 123516
- [106]. Ali, A., Gannouji, R., Sami, M., Sen, A.A, 2010, Background cosmological dynamics in  $f(R)$  gravity and observational constraints, *Phys. Rev. D*, 81, 104029.
- [107]. Linder, E.V., 2010, Constraining models of dark energy, arXiv:1004.4646 [astro-ph.CO].
- [108]. Santos, J., Alcaniz, J.S., Rebouças, M.J., Carvalho, F.C., 2007, Energy conditions in  $f(R)$  gravity, *Phys. Rev. D.*, 76, 083513.
- [109]. Santos, J., Alcaniz, J.S., Pires, N., Rebouças, M.J., 2007, Energy conditions and cosmic acceleration, *Phys. Rev. D* 75, 083523.
- [110]. Santos, J., Rebouças, M.J., Alcaniz, J.S., 2008, Energy conditions constraints on a class of  $f(R)$  gravity, *Int. J. Mod. Phys. D* 19, 1315.
- [111]. Bertolami, O., Sequeira, M.C., 2009, Energy conditions and stability in  $f(R)$  theories of gravity with nonminimal coupling to matter, *Phys. Rev. D*, 79, 104010.
- [112]. Garcia, N.M., Harko, T., Lobo, F.S.N., Mimoso, J.P., 2011, Energy conditions in modified Gauss-Bonnet gravity, *Phys. Rev. D*, 83, 104032.
- [113]. Sharif, M., Zubair, M., 2012, Energy conditions constraints and stability of power law solutions in  $f(R,T)$  gravity, *J. Phys. Soc. Jpn.* 82, 014002.

- [114]. Alvarenga, F.G., Houndjo, M.J.S., Monwanou, A.V., Chabi Orou, J.B., 2012, Testing some  $f(R,T)$  gravity models from energy conditions, *Journal of Modern Physics*, 4, 130.
- [115]. Atazadeh, K., Darabi, F., 2014, Energy conditions in  $f(R,G)$  gravity, *Gen. Relativ. Gravit.*, 46, 1664.
- [116]. Sharif, M., Ikram. A., 2016, Energy conditions in  $f(G,T)$  gravity, *Eur. Phys. J. C*, 76, 640.
- [117]. Bamba, K., İlyas M., Bhatti, M.Z., Yousaf, Z., 2017, Energy Conditions in Modified  $f(G)$  Gravity, *Gen. Relativ. Gravit.* 49, 112.
- [118]. Capozziello, S., Lobo, F.S.N., Mimoso, J.P., 2015, Generalized energy conditions in extended theories of gravity, *Phys. Rev. D* 91, 124019.
- [119]. S. Capozziello, V.F. Cardone, S. Carloni and A. Troisi, 2003, Curvature quintessence matched with observational data, *Int. J. Mod. Phys. D* 12, 1969.
- [120]. Zhang, P., 2006, Testing  $f(R)$  gravity against the large scale structure of the universe, *Phys. Rev. D*, 73, 123504.
- [121]. Copeland, E.J., Sami, M., Tsujikawa, S., 2006, Dynamics of dark energy, *Int. J. Mod. Phys. D*, 15, 1753.
- [122]. Alam, U., Sahni, V., Starobinsky, A.A., 2007, Exploring the properties of dark energy using type Ia supernovae and other datasets, *JCAP*, 0702, 011.
- [123]. Baghram, S., Farhang, S., Rahvar, S., 2007, Modified gravity with  $f(R) = \sqrt{R^2 - R_0^2}$ , *Phys. Rev. D*, 75, 044024.
- [124]. Nesseris, S., Perivolaropoulos, L., 2007, Crossing the phantom divide: theoretical implications and observational status, *JCAP*, 0701, 018.
- [125]. Bamba, K., Geng, C.-Q., Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2009, Crossing of the phantom divide in modified gravity, *Phys. Rev. D*, 79, 083014.
- [126]. Linder, E.V., 2009, Exponential gravity, *Phys. Rev. D*, 80, 123528 .
- [127]. Jassal, H.K., Bagla, J.S., Padmanabhan, T., 2010, Understanding the origin of CMB constraints on dark energy, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 405, 2639.
- [128]. Bamba, K., Geng, C.-Q., Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2010, Crossing of phantom divide in  $F(R)$  gravity, *Mod. Phys. Lett. A* 25, 900.
- [129]. Bamba, K., Capozziello, S., Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2012, Dark energy cosmology: The equivalent description via different theoretical models and cosmography tests, *Astrophys. Space Sci.* 342, 155.

- [130]. Bisabr, Y. , 2012, Modied gravity with a nonminimal gravitational coupling to matter, *Phys. Rev. D* 86, 044025.
- [131]. Zaregonbadi, R., Farhoudi, M., 2016, Cosmic acceleration from matter-curvature coupling, *Gen Relativ Gravit*, 48, 142.
- [132]. Özemre, A. Y., 1982, Teorik Fizik Dersleri Cild 7: Gravitasyonun Rölâivist Teorileri, *İst. Üniv. Fen Fak. Yay.*, İstanbul.
- [133]. Ellis, G.F.R., van Elst, H., 1999, *Cosmological models (Cargese lectures 1998)*, In: Theoretical and Observational Cosmology, NATO Series C: Math. Phys. Sci., Lachieze-Ray, M. (ed.), Vol 541, Kluwer, Dordrecht, 1-116.
- [134]. Mutuş, H., 2016, Kozmoloji ders notları (manuskri halinde, düzeltilmiş v5., 376 s).
- [135]. Güdekli, E., 2004, Bianchi tip çözümlerde ufuk-eşyönlüleşme meseleleri, Doktora Tezi, *İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü*.
- [136]. Sofuoğlu, D., 2014, Yüksek mertebeden eğrilikli gravitasyonda makaslamasız kozmik akışkan iddiası, Doktora Tezi, *İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü*.
- [137]. Paschalidis, V., Halataei, S.M.H., Shapiro, S.L., Sawicki, I., 2011, Constraint propagation equations of the 3+1 decomposition of  $f(R)$  gravity, *Class.Quantum Grav.*, 28, 085006.
- [138]. van Elst, H., 1996, Extensions and applications of 1+3 decomposition methods in general relativistic cosmological modelling, Doktora Tezi, *London Üniversitesi*.
- [139]. Ries, A.G., et al., 2011, A 3% Solution: Determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3, *ApJ*, 730, 119.
- [140]. Rapetti, D., Allen, S.W., Amin, M.A., Blandford, R.D., 2007, A kinematical approach to dark energy studies, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 375, 1510.
- [141]. Ade, P.A.R., et al., Planck Collaboration, 2016, Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters, *A&A* 594, A13.
- [142]. Poplawski, N.J., 2007, The cosmic snap parameter in  $f(R)$  gravity, *Class. Quant. Grav.*, 24, 3013.
- [143]. Sharif, M., Zubair, M. 2013, Energy Conditions in  $f(R, T, R_{\mu\nu} T^{\mu\nu})$  Gravity, *JHEP*, 12, 079.
- [144]. Shiravand, M., Haghani, Z., Shahidi, S., 2018, Energy conditions in mimetic- $f(R)$  gravity, *IJMPD*, 27, 1850049.
- [145]. Spergel, D.N., et al., 2003, First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters, *Astrophys. J. Suppl.* 148, 175.

- [146]. Spergel, D.N., et al., 2007, Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology, *Astrophys. J. Suppl.*, 170, 377
- [147]. Starobinsky, A.A., 2007, Disappearing cosmological constant in  $f(R)$  gravity, *JETP Lett.*, 86, 157.
- [148]. Nojiri, S., Odintsov, S.D., Tretyakov, P. V., 2008, From Inflation to Dark Energy in the Non-Minimal Modified Gravity, *Theor. Phys. Suppl.*, 172, 81.
- [149]. Bamba, K., Odintsov, S., Sebastiani, L., Zerbini, S., 2010, Finite-time future singularities in modified Gauss-Bonnet and  $F(R,G)$  gravity and singularity avoidance, *Eur. Phys. J.*, C67, 295.
- [150]. Schmidt, H.,-J., 2011, Gauss-Bonnet lagrangian  $G \ln G$  and cosmological exact solutions, *Phys. Rev. D* 83, 083513.
- [151]. de la Cruz-Dombriz, A, S.-Gómez, D., 2012, On the stability of the cosmological solutions of  $f(R, G)$  gravity, *Class. Quant. Grav.*, 29, 245014.
- [152]. Guarnizo, A., Castaneda, L., Juan, M. T., 2010, Variational principles in modified gravity: field equations in  $f(R)$  Gravity, *Gen. Rel. Grav.* 42, 2713-2728.
- [153]. De Felice, F., Clarke, C.J.S., 1990, *Relativity on curved manifolds*, Ch. 6, 195-198, Cambridge University Press.

## EKLER

### EK A. $f(R,G,T)$ GRAVİTE'NİN ALAN DENKLEMLERİNİN METRİĞE GÖRE VARYASYONLA ÇIKARTIŞI

Bilindiği üzere

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij} = k^2 T_{ij}$$

(A.1)

şeklindeki EAD,

$$S_{EH} = \frac{1}{2k^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_m \quad (A.2)$$

olarak tanımlanan Einstein-Hilbert (EH) aksiyonundan  $(\Lambda$ -lı)  $g_{ij}$  metriğine göre varyasyon olarak ve  $g_{ij}$  lerin hem kendilerinin ve hem de  $\delta g_{ij}$  (veya  $\delta g^{ij}$ ) varyasyonlarının  $V$  bölgesini kuşatan  $\partial V$  sınır yüzeyi üzerinde sıfır olduğunu ifâde eden

$$g_{ij}|_{\partial V} = g^{ij}|_{\partial V} = 0 \quad \text{ve} \quad \delta g_{ij}|_{\partial V} = \delta g^{ij}|_{\partial V} = 0 \quad (A.3)$$

sınır koşulları varsayımı altında,  $S_{EH}$  nin stasyoner, yâni  $\delta S_{EH} = 0$  olması koşulu sonucu elde edilebilmektedirler. Yukarıda  $d^4x$ , 4-boyutlu hacim elemanı;  $g$  ise determinanttır ( $g = \det g_{ij}$ ).  $S_m$  ise madde alanlarına bağlanan aksiyon olup  $L_m$  madde Lagrange yoğunluğundan hareketle

$$S_m = \int_V d^4x \sqrt{-g} L_m \quad (A.4)$$

olarak tanımlanmıştır.  $L_m$  için, mesela metrik tansörün türevlerine ya da bir  $\phi$  skaler alana bağlılık gibi pekçok form göz önüne almak mümkünse de, biz bu Tez'de amacımıza yönelik olarak  $L_m$  nin yalnızca metrik tansörün bileşenlerine bağlı olduğu durumu göz önüne alacağız, yani



$$L_m = L_m(g^{ij}, g_{ij}) \quad (\text{A.5})$$

olacaktır. Maddenin baryonik olması hâlinde (A.5) e bağlanabilecek  $T_{ij}^{(m)}$  enerji-momentum tansörü

$$T_{ij}^{(m)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{ij}} \quad (\text{A.6})$$

olarak tanımlanır. Şimdi, (A.2) deki aksiyonun

$$R = g^{ij}R_{ij} \equiv \dot{I}z(R_{ij}) \quad (\text{A.7})$$

$$G = R^2 - 4R_{ij}R^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl} \quad (\text{A.8})$$

$$T = g^{ij}T_{ij} \equiv \dot{I}z(T_{ij}) \quad (\text{A.9})$$

biçiminde tanımlı:  $R$ : Ricci eğrilik skaleri,  $G$ : Gauss-Bonnet eğrilik invariantı ve  $T$ : enerji momentum tansörünün izi olmak üzere, bu 3 skaleri argüman olarak kabul eden keyfî bir  $f(R, G, T)$  fonksiyonu ile

$$S = \frac{1}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R, G, T) + S_m \quad (\text{A.10})$$

biçiminde değişiklikle uğratılmasını göz önüne alalım ( $\Lambda$  kozmolojik sâbit terimi  $f(R, G, T)$  fonksiyonunun içine atılmıştır).  $f(R, G, T)$  - gravite olarak anılacak bu alternatif teorinin alan denklemlerinin metriğe göre varyasyonla çıkartılmasını [132, 134, 136 ve 152] no'lu kaynaklardan yararlanarak aşağıda ele alıyoruz. Ancak, bu iş için önce, bazı gerekli bağıntı ve özdeşlikleri aşağıda sıralayalım:

Metrik tansör için varyasyon ifâdeleri:

$$\delta g_{ij} = -g_{ik} \delta g^{kl} g_{lj}, \quad \delta g^{ij} = -g^{ik} \delta g_{kl} g^{lj} \quad (\text{A.11.a})$$

$$\delta g = -g g_{ij} \delta g^{ij}, \quad \delta g = g g^{ij} \delta g_{ij} \quad (\text{A.11.b})$$

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ij} \delta g^{ij}, \quad \delta \sqrt{-g} = +\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ij} \delta g_{ij} \quad (\text{A.11.c})$$

Christoffel sembollerinin varyasyonu:

$$\delta \Gamma^k_{ij} = -\frac{1}{2} \left[ g_{il} \nabla_j (\delta g^{kl}) + g_{jl} \nabla_i (\delta g^{kl}) - g_{im} g_{jn} \nabla^k (\delta g^{mn}) \right] \quad (\text{A.12.a})$$

$$\delta \Gamma^k_{ik} = -\frac{1}{2} g_{mn} \nabla_i (\delta g^{mn}) \quad (\text{A.12.b})$$

Riemann ve Ricci tansörlerinin varyasyonu:

$$\delta R^i_{jkl} = \nabla_k (\delta \Gamma^i_{lj}) - \nabla_l (\delta \Gamma^i_{kj}) \quad (\text{A.13.a})$$

$$\delta R_{ij} = \nabla_k (\delta \Gamma^k_{ij}) - \nabla_i (\delta \Gamma^k_{kj}) \quad (\text{A.13.b})$$

Şimdi, (A.10) un varyasyonunu ele alalım.

$$f \equiv f(R, G, T); \quad f_x \equiv \frac{\partial f(R, G, T)}{\partial X}; \quad X = R, G, T \quad (\text{A.14})$$

kısaltmaları kullanılarak ve

$$\delta f(R, G, T) \equiv \delta f = f_R \delta R + f_G \delta G + f_T \delta T \quad (\text{A.15})$$

olduğuna da dikkat edilerek, (A.11.c) nin de kullanımıyla

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2k^2} \int_V d^4x \left[ (\delta \sqrt{-g}) f + \sqrt{-g} \delta f \right] + \delta S_m \\ &= \frac{1}{2k^2} \int_V d^4x \left[ (\delta \sqrt{-g}) f + \sqrt{-g} (f_R \delta R + f_G \delta G + f_T \delta T) \right] + \delta S_m \\ &= \frac{1}{2k^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g_{ij} f \delta g^{ij} + f_R \delta R + f_G \delta G + f_T \delta T \right] + \delta S_m \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

bulunur. R ve G nin varyasyonları, tanımlarından hareketle

$$\begin{aligned}\delta R &= \delta(g^{ij} R_{ij}) \\ &= R_{ij} \delta g^{ij} + g^{ij} \delta R_{ij}\end{aligned}\quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned}\delta G &= \delta(R^2 - 4R_{ij} R^{ij} + R_{ijkl} R^{ijkl}) \\ &= 2R \delta R - 4R_{ij} \delta R^{ij} - 4R^{ij} \delta R_{ij} + R_{ijkl} \delta R^{ijkl} + R^{ijkl} \delta R_{ijkl}\end{aligned}\quad (\text{A.18})$$

olur. Bu son ifâdeye (A.17) ile birlikte, kolayca tesis edilebilecek

$$R_{ij} \delta R^{ij} = 2R_i^k R_{jk} \delta g^{ij} + R^{ij} \delta R_{ij} \quad (\text{A.19})$$

$$R_{ijkl} \delta R^{ijkl} = 3R_i^{klm} R_{jklm} \delta g^{ij} + R_i^{jkl} \delta R^i_{jkl} \quad (\text{A.20})$$

özdeşlikleri yerleştirilip düzenlenirse

$$\begin{aligned}\delta G &= (2RR_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_j^k R_{ik} + 2R_i^{klm} R_{jklm}) \delta g^{ij} + 2R g^{ij} R_{ij} \\ &\quad - 8R^{ij} \delta R_{ij} + 2R_i^{jkl} \delta R^i_{jkl}\end{aligned}\quad (\text{A.21})$$

elde edilir. (A.17) ile (A.21) ifâdeleri, (A.13) ten hareketle (A.12) nin de kullanımıyla elde edilebilecek

$$g^{ij} \delta R_{ij} = -\nabla_i \nabla_j (\delta g^{ij}) + g_{ij} \square (\delta g^{ij}) \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned}R^{ij} \delta R_{ij} &= -\frac{1}{2} R_i^k \nabla_j \nabla_k (\delta g^{ij}) - \frac{1}{2} R_j^k \nabla_i \nabla_k (\delta g^{ij}) + \frac{1}{2} R_{ij} \square (\delta g^{ij}) \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n (\delta g^{ij})\end{aligned}\quad (\text{A.23})$$

$$R_i^{jkl} R^i_{jkl} = -2R_i^{mn} \nabla_n \nabla_m (\delta g^{ij}) \quad (\text{A.24})$$

bağıntıları yardımıyla, sırasıyla,

$$\delta R = R_{ij} \delta g^{ij} - \nabla_i \nabla_j (\delta g^{ij}) + g_{ij} \square (\delta g^{ij}) \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned}
\delta G = & \left( 2RR_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_j^k R_{ik} + 2R_i^{klm} R_{jklm} \right) \delta g^{ij} - 2R \nabla_i \nabla_j (\delta g^{ij}) + 2R g_{ij} \square (\delta g^{ij}) \\
& + 2R g_{ij} \square (\delta g^{ij}) + 4R_i^k \nabla_j \nabla_k (\delta g^{ij}) + 4R_j^k \nabla_i \nabla_k (\delta g^{ij}) - 4R_{ij} \square (\delta g^{ij}) \\
& - 4g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n (\delta g^{ij}) - 4R_i^{mn} \nabla_n \nabla_m (\delta g^{ij})
\end{aligned} \tag{A.26}$$

şeklini alırlar.  $\delta T$  varyasyonu ise

$$\begin{aligned}
\delta T &= \delta (g^{ij} T_{ij}) \\
&= T_{ij} \delta g^{ij} + g^{ij} \delta T_{ij} \\
&= T_{ij} \delta g^{ij} + g^{mn} \frac{\delta T_{mn}}{\delta g^{ij}} \delta g^{ij}
\end{aligned} \tag{A.27}$$

ya da

$$\Theta_{ij} \equiv g^{mn} \frac{\delta T_{mn}}{\delta g^{ij}} \tag{A.28}$$

tanımlanırsa

$$\delta T = (T_{ij} + \Theta_{ij}) \delta g^{ij} \tag{A.29}$$

olur. (A.6) daki varyasyonun hesap edilmesi sonucu elde edilebilecek

$$T_{mn} = g_{mn} L_m - 2 \frac{\delta L_m}{\delta g^{mn}} \tag{A.30}$$

ifadesi (A.28) e yerleştirilirse,  $\Theta_{ij}$  nin  $T_{ij}$  ve  $L_m$  ye bağılılığı için

$$\Theta_{ij} = g_{ij} L_m - 2T_{ij} - 2g^{mn} \frac{\delta}{\delta g^{ij}} \left( \frac{\delta L_m}{\delta g^{mn}} \right) \tag{A.31}$$

elde edilir. Bunun daha da işlenişi birazdan ele alınacaktır. Şimdi, bir de  $S_m$  nin varyasyonunu hesaplayalım. (A.4) den, (A.6) ve (A.11.c) nin de kullanımıyla  $\delta S_m$  nin

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int_V d^4 x \sqrt{-g} T_{ij} \delta g^{ij} \quad (\text{A.32})$$

olacağını görmek kolaydır. Şimdi, (A.25), (A.26), (A.29) ve (A.32) ifadeleri (A.16) ya yerleştirilir ve uygun düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2k^2} \int_V d^4 x \sqrt{-g} \left\{ \left[ f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f + f_G (2R R_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_j^k R_{ik} + 2R_i^{klm} R_{jklm}) \right. \right. \\ \left. \left. + f_T (T_{ij} + \Theta_{ij}) - k^2 T_{ij} \right] \delta g^{ij} + f_R (g_{ij} \square \delta g^{ij} - \nabla_i \nabla_j (\delta g^{ij})) \right. \\ \left. + f_G \left[ -2R \nabla_i \nabla_j (\delta g^{ij}) - 4R_{ij} \square (\delta g^{ij}) + 4R_i^m \nabla_j \nabla_m (\delta g^{ij}) \right. \right. \\ \left. \left. + 4R_j^m \nabla_i \nabla_m (\delta g^{ij}) - 4g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n (\delta g^{ij}) - 4R_i^{mn} \nabla_j \nabla_n (\delta g^{ij}) \right] \right\} \quad (\text{A.33}) \end{aligned}$$

elde edilir. Son dokuz terimde  $\delta g^{ij}$  varyasyonu türev içinde yer almaktadır. Bu terimler için kısmî integrasyon uygulanır ve  $V$  hacmi üzerinden integrasyon Gauss teoremi aracılığıyla  $V$  yi kuşatan  $\partial V$  sınır yüzey üzerine dönüştürülüp de (A.3) deki sınır koşulları uygulanırsa bu terimler sıfırlanır ve sonuçta (A.33) aksiyonu

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2k^2} \int_V d^4 x \sqrt{-g} \left[ f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f + g_{ij} \square f_R - \nabla_i \nabla_j f_R + f_G (2R R_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_j^k R_{ik} \right. \\ \left. - 4R_{iklm} R^{km} + 2R_i^{klm} R_{jklm}) - 2R \nabla_i \nabla_j f_G - 4R_{ij} \square f_G + 4R_i^m \nabla_j \nabla_m f_G + 4R_j^m \nabla_i \nabla_m f_G \right. \\ \left. - 4g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n f_G - 4R_i^{mn} \nabla_j \nabla_n f_G + f_T (T_{ij} + \Theta_{ij}) - k^2 T_{ij} \right] \delta g^{ij} \quad (\text{A.34}) \end{aligned}$$

ifâdesine indirgenir ve  $\delta S = 0$  stasyoner olma koşulundan da

$$\begin{aligned} f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f + g_{ij} \square f_R - \nabla_i \nabla_j f_R + f_G (2R R_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_j^k R_{ik} - 4R_{iklm} R^{km} \\ + 2R_i^{klm} R_{jklm}) - 2R \nabla_i \nabla_j f_G - 4R_{ij} \square f_G + 4R_i^m \nabla_j \nabla_m f_G + 4R_j^m \nabla_i \nabla_m f_G \\ - 4g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n f_G - 4R_i^{mn} \nabla_j \nabla_n f_G + f_T (T_{ij} + \Theta_{ij}) - k^2 T_{ij} = 0 \quad (\text{A.35}) \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemi biraz daha işlemek iyi olacaktır. Bilindiği üzere 4-boyutta  $G$  Gauss-Bonnet invariantı bir topolojik invarianttır, yâni,  $G$  'nin aksiyona toplamsal olarak eklenmesi Einstein denklemlerini değiştirmemektedir. Dolayısıyla  $f(R, G, T) = R + G$  olduğunda  $f_R = 1, f_G = 1, f_T = 0$  olacağından (A.35) in indirgeneceği

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \frac{1}{2} g_{ij} G + 2RR_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_{iklj} R^{kl} + 2R_i^{klm} R_{jklm} - k^2 T_{ij} = 0 \quad (\text{A.36})$$

denklemini Einstein denklemleri olmalıdır. Buradan

$$-\frac{1}{2} g_{ij} G + 2RR_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_{iklj} R^{kl} + 2R_i^{klm} R_{jklm} = 0 \quad (\text{A.37})$$

olması gerektiği sonucu çıkar. Bu özdeşlik (A.35) e yerleştirilirse sonuçta  $f(R, G, T)$ -gravitenin alan denklemleri olarak

$$\begin{aligned} f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R + \frac{1}{2} g_{ij} G f_G - 2R \nabla_i \nabla_j f_G - 4G_{ij} \square f_G + 4R_i^m \nabla_j \nabla_m f_G \\ + 4R_j^m \nabla_i \nabla_m f_G - 4g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n f_G - 4R_i^{mn} \nabla_j \nabla_n f_G = k^2 T_{ij} - f_T (T_{ij} + \Theta_{ij}) \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

elde edilir. Burada (A.31) ile verilen  $\Theta_{ij}$  nin açık ifadesini, kozmik akışkanın

$$T_{ij} = (\mu + p) u_i u_j + p g_{ij} \quad (u_i u^i = -1) \quad (\text{A.39})$$

enerji-momentum tansörü ile gösterilen bir mükemmel akışkan olduğu varsayımı altında hesaplayalım. Ancak, (A.39) ifadesini veren  $L_m$  madde Lagrange yoğunluğu için tek değil fakat  $L_m = p$  ve  $L_m = -\mu$  olmak üzere farklı iki ifâde bulunmaktadır[153]. Bunlar için (A.31) den:

$$L_m = p \text{ için:} \quad \Theta_{ij} = p g_{ij} - 2T_{ij} \quad (\text{A.40.a})$$

$$L_m = -\mu \text{ için:} \quad \Theta_{ij} = -\mu g_{ij} - 2T_{ij} \quad (\text{A.40.b})$$

elde edilir. (A.38) denklemini, (A.40.a) seçimi için

$$\begin{aligned} f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R + \frac{1}{2} g_{ij} G f_G - 4g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n f_G - 4G_{ij} \square f_G - 2R \nabla_i \nabla_j f_G \\ + 4R_i^m \nabla_j \nabla_m f_G + 4R_j^m \nabla_i \nabla_m f_G - 4R_i^{mn} \nabla_j \nabla_n f_G = k^2 T_{ij} + f_T (T_{ij} - p g_{ij}) \end{aligned} \quad \text{A.41.a)}$$

ve (A.40.b) seçimi için de

$$f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R + \frac{1}{2} g_{ij} G f_G - 4 g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n f_G - 4 G_{ij} \square f_G - 2 R \nabla_i \nabla_j f_G + 4 R_i^m \nabla_j \nabla_m f_G + 4 R_j^m \nabla_i \nabla_m f_G - 4 R_i^m \nabla_j \nabla_n \nabla_m f_G = k^2 T_{ij} + f_T (T_{ij} + \mu g_{ij}) \quad (\text{A.41.b})$$

biçimlerinde olur. Öte yandan, bu  $f(R, G, T)$  gravitenin alan denklemlerinin, aşağıdaki özel seçimler için, literatürdeki diğer  $f$ -gravite teorilerinininkilerine indirgeneceği kolayca görülebilir:

- **$f(R)$ -gravite** ( $f(R, G, T) \equiv f(R)$  olarak):

$$f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R = k^2 T_{ij} \quad (\text{A.42})$$

- **$f(R, G)$ -gravite** ( $f(R, G, T) \equiv f(R, G)$  olarak):

$$f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R + \frac{1}{2} g_{ij} G f_G - 4 g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n f_G - 4 G_{ij} \square f_G - 2 R \nabla_i \nabla_j f_G + 4 R_i^m \nabla_j \nabla_m f_G + 4 R_j^m \nabla_i \nabla_m f_G - 4 R_i^m \nabla_j \nabla_n \nabla_m f_G = k^2 T_{ij} \quad (\text{A.43})$$

- **$f(R, T)$ -gravite** ( $f(R, G, T) = f(R, T)$  olarak):

$$L_m = p \text{ için: } f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R = k^2 T_{ij} + f_T (T_{ij} - p g_{ij}) \quad (\text{A.44.a})$$

ve

$$L_m = -\mu \text{ için: } f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R = k^2 T_{ij} + f_T (T_{ij} + \mu g_{ij}) \quad (\text{A.44.b})$$

olur.

## EK B. BAZI SABİTLER VE BOYUTLARI

L : uzunluk, M : kütle, T : zaman olmak üzere:

$\pi = 3.14159$	
$c = 2.998 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$	$[c] = LT^{-1}$
$G_N = 6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	$[G_N] = L^3 M^{-1} T^{-2}$
$\kappa^2 = \frac{8\pi G_N}{c^4} = 2.076 \times 10^{-43} \text{ m}^{-1} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^2$	$[\kappa^2] = L^{-1} M^{-1} T^2$
ışık yılı = $9.460 \times 10^{15} \text{ m} \approx 10^{13} \text{ km}$	$[\text{ışık yılı}] = L$
parsec (pc) = $3.086 \times 10^{16} \text{ m} \approx 3.26 \text{ ışık yılı}$	$[\text{parsec}] = L$
$H_0 = 100 h_0 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (0.5 \leq h_0 \leq 1)$	$[H_0] = T^{-1}$
$= 3.241 h_0 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$	
$H_0 / c = 1.081 h_0 \times 10^{-26} \text{ m}^{-1}$	$[H_0 / c] = L^{-1}$
$c / H_0 = 9.250 h_0 \times 10^{+25} \text{ m}$	$[c / H_0] = L$
$\kappa^2 c^4 / 3H_0^2 \equiv 8\pi G_N / 3H_0^2 = 5.322 h_0^{-2} \times 10^{+25} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$	$[\kappa^2 c^4 / 3H_0^2] = M^{-1} L T^2$
$3H_0^2 / \kappa^2 c^4 \equiv 3H_0^2 / 8\pi G_N = 1.879 h_0^2 \times 10^{-26} \text{ kg m}^{-3}$	$[3H_0^2 / \kappa^2 c^4] = M L^{-1} T^{-2}$
Hubble yaşı : $H_0^{-1} \cong 3.086 h_0^{-1} \times 10^{17} \text{ s}$	$[H_0^{-1}] = T$
$\cong 9.8 h_0^{-1} \times 10^9 \text{ yıl}$	
$0.5 \leq h_0 \leq 1 \Rightarrow 50 \leq H_0 \leq 100 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad \text{ve} \quad 9.8 \times 10^9 \leq H_0^{-1} \leq 19.6 \times 10^9 \text{ yıl}$	
Madde yoğunluğu : $\rho$	$[\rho] = M L^{-3}$
Enerji yoğunluğu : $\mu = \rho c^2$	$[\mu] = M L^{-1} T^{-2}$
Basınç : $p$	$[p] = M L^{-1} T^{-2} = [\mu]$
Ricci eğrilik skaleri : $R$	$[R] = L^{-2}$
Gauss-Bonnet invariantı : $G$	$[G] = L^{-4}$
Enerji-momentum tansörünün izi : $T$	$[T] = M L^{-1} T^{-2}$



## ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Diyadin CAN
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	Tarih girmek için tıklayın veya dokununuz.
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Fizik Bölümü
Mezuniyet Yılı	17.06.2002

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Fizik
Programı	Matematiksel Fizik
Mezuniyet Tarihi	17.06.2005

Doktora	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Fizik Anabilim Dalı
Programı	Matematiksel Fizik Programı
Mezuniyet Tarihi	30.10.2021

Makale ve Bildiriler	
An Analysis for Conservative and Non-conservative $f(R, T)$ Gravity Models, 2021, Diyadin CAN, Ertan GÜDEKLİ, Asian Journal of Research and Reviews in Physics, Page 1-11, DOI: 10.9734/ajr2p/2021/v5i130152	