



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**NULLUK DAĞILIMINA SAHİP HEMEN
HEMEN α -KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR
ÜZERİNDE İKİNCİ MERTEBEDEN
PARALEL TENSÖRLER**

Emine ÖZGÜR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak-2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Emine ÖZGÜR tarafından hazırlanan ‘**Nulluk Dağılımına Sahip Hemen Hemen α -Kosimplektik Manifoldlar Üzerinde İkinci Mertebeden Paralel Tensörler**’adlı tez çalışması 24/01/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU

Danışman

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Süleyman Savaş DURDURAN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Emine ÖZGÜR

Tarih: 24.01.2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NULLUK DAĞILIMINA SAHİP HEMEN HEMEN α -KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR ÜZERİNDE İKİNCİ MERTEBEDEN PARALEL TENSÖRLER

Emine ÖZGÜR

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nesip AKTAN

2019, 42 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM

Bu çalışmada; ξ vektör alanını içeren (k, μ) -nulluk dağılımına sahip hemen hemen α -kosimplektik manifoldlar üzerinde ikinci mertebeden paralel tensör alanları incelenmiştir. Bu durumda M^{2n+1} manifoldunun n - boyutlu düz bir manifold ve sabit kesit eğriliği $-4\alpha^2$ olan $(n + 1) -$ boyutlu bir manifoldun Riemann çarpımına lokal olarak izomorf olduğu yada ikinci mertebeden paralel tensörün metrik tensörün bir lineer katı olduğu gösterilmiştir ayrıca ξ vektör alanını içeren $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımına sahip hemen hemen α -kosimplektik manifoldun ikinci mertebeden simetrik paralel tensör alanının metrik tensörün bir lineer katı olmaması koşulu altında $H^{n+1}(-4\alpha^2) \times \mathbb{R}^n$ çarpımına lokal olarak izomorf olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Değme manifold, kosimplektik manifold, nulluk dağılımı, paralel tensörler

ABSTRACT

MS THESIS

SECOND ORDER PARALEL TENSORS ON ALMOST α -COSYMPLECTIC MANIFOLDS WITH SATISFING THE NULLITY DISTRIBUTIONS

Emine ÖZGÜR

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Nesip AKTAN

2019, 42 Pages

Jury

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM

In this study, 2nd degree parallel tensor areas on almost cosymplectic vector areas, which contains ξ vector area and has a distribution of (k, μ) , are examined in this case, it is shown that M^{2n+1} manifold was n –dimensional flat manifold and locally isomorph to Riemann multiplication of a $(n + 1) –$ dimensional manifold, whose constant cross-sectional curvature is $-4\alpha^2$, or that 2nd degree parallel tension was a linear multiple of metric tensor. In addition, it is shown that on condition that 2nd degree symmetric parallel tensor area is a linear multiple of metric tensor, almost α –cosymplectic area, which contains ξ vector area and has a distribution of $(k, \mu)'$ was locally isomorph to the multiplication of $H^{n+1}(-4\alpha^2) \times \mathbb{R}^n$.

Keywords: Contact manifold, cosymplectic manifold, nullity distribution, parallel tensors

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sürecinde bana yol gösteren ve değerli bilgilerini benimle paylaşan, desteklerini her zaman gördüğüm değerli danışman hocam Prof. Dr. Nesip AKTAN'a sonsuz teşekkür ederim.

Çalışmamda bana her daim maddi ve manevi desteğini esirgemeyen eşim M.Cahit ÖZGÜR'e ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

KONYA-2019

Emine ÖZGÜR



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Riemann Manifoldları.....	4
2.2. Hemen Hemen Değme Manifoldlar.....	9
2.3. α - Kosimplektik Manifoldlar.....	15
3. k, μ' -NULLUK DAĞILIMINA SAHİP HEMEN HEMEN α -KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR.....	22
4. k, μ -NULLUK DAĞILIMINA SAHİP HEMEN HEMEN α -KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR.....	32
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	39
KAYNAKLAR	40

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

g	:	Metrik tensörü
ξ	:	Karakteristik vektör alanı
ϕ	:	Tensör alanı
η	:	1 –form
M	:	Manifold
$\mathcal{L}$	:	Lie türev operatörü
$[,]$	:	Lie parantez operatörü
Φ	:	Temel 2 –form
$\chi(M)$	:	M üzerindeki C^∞ vektör alanları uzayı
D	:	Değme dağılımı
∇	:	Levi-Civita konneksiyonu
R	:	Riemann eğrilik tensörü
S	:	Ricci eğrilik tensörü
C	:	Weyl konformal eğrilik tensörü
K	:	Kesit eğriliği
Q	:	Ricci operatörü
N	:	Nijenhuis tensör alanı
$\otimes$	:	Tensör çarpımı
θ	:	Tensör Alanı

1. GİRİŞ

Değme geometri bundan iki yüzyıl önce, Huygens, Hamilton ve Jakobi'nin geometrik optikler üzerindeki çalışmalarından doğmuştur. Sophus Lie, Elie Carton ve Darbox gibi pek çok önemli matematikçi bu alanda çalışmalar yapmıştır. Değme geometrinin köklerine 1872'de Lie'nin değme transormasyonu diferensiyel denklem sistemlerinin çalışılmasında geometrik bir araç olarak kullanılmasıyla rastlanır. Değme geometrinin uygulamalarına optik, mekanik ve termodinamik gibi alanlarda da rastlanmaktadır[20].

Manifold teorisinde hemen hemen değme manifoldlar çok önemli bir yere sahiptir. $2n + 1$ -boyutlu bir (C^∞) sınıfından diferensiyellenebilir M manifoldunun tanjant demetlerinin grup yapısı $U(n) \times 1$ tipine indirgenebiliyorsa M 'ye hemen hemen değme manifold denir. İlk olarak J.Gray 1959 yılında tek boyutlu manifoldlar üzerinde yaptığı çalışmada $U(n) \times 1$ yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapıları tanımlamıştır. Buna göre $2n + 1$ -boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1$$

denklemlerini sağlayan ϕ ; $(1,1)$ -tipli bir tensör alanı, ξ ; bir vektör alanı, ve η ; 1 –form olmak üzere (ϕ, ξ, η) -üçlüsü ile ifade edilir. Daha sonra 1960 yılında Sasaki (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı üzerinde

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

eşitlikleriyle verilen uygun bir g metriği tanımlayarak hemen hemen değme metrik yapıyı tam olarak ifade etmiştir. 1961 yılında Sasaki ve Hatakeyama hemen hemen değme manifoldlar için normallik şartının J kompleks yapısının $(J^2 = -I)$ integrallenebilmesi olduğunu ispatlamışlardır.

Hemen hemen değme metrik yapıya bağlı kalarak 1969 yılında Goldberg ve Yano tarafından kosimplektik manifold tanımlanmıştır [15]. Bu tanımlamayı takip eden yıllarda özellikle Olszak kosimplektik manifoldlar üzerinde birçok çalışmaya imza

atmıştır [25]-[26]. 1972 yılında Kenmotsu hemen hemen değme metrik manifoldlar üzerinde yeni bir karakterizasyon ve sınıflama ortaya koymuştur. Bu sınıflama Kenmotsu manifold olarak adlandırılmıştır [18]. 1981 yılında Vanhecke hemen hemen değme yapılarını ele aldığı çalışmasında hemen hemen Kenmotsu manifoldlarını genişleterek hemen hemen α -Kenmotsu manifoldları tanımlamıştır [17].

Kim ve Pak hemen hemen α -Kenmotsu ve hemen hemen kosimplektik yapılarını birleştirerek hemen hemen değme metrik manifoldların geniş bir alt sınıfı olan hemen hemen α -kosimplektik manifold kavramını tanımlamışlardır [19]. (M, ϕ, ξ, η, g) şeklindeki $2n + 1$ – boyutlu bir hemen hemen α -kosimplektik yapısı

$$d\eta = 0, d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$$

şartlarını sağlar. Burada α keyfi bir reel sayı ve Φ temel 2-formdur. Özel olarak, $\alpha = 0$ durumunda hemen hemen kosimplektik, $\alpha \neq 0$ durumunda ise hemen hemen α -Kenmotsu manifoldları elde edilir. Normallik şartı altında ise; α -kosimplektik manifold ya kosimplektik ya da α -Kenmotsu manifoldudur.

Günümüzde nulluk dağılımının çalışılması hemen hemen değme metrik manifoldlar üzerine oldukça ilgi çekici bir konu olmuştur. k -nulluk dağılımı notasyonu ($k \in \mathbb{R}$) Gray (1966) ve Tanno (1978) tarafından (M, g) Riemann manifoldları çalışmasında herhangi bir $p \in M$ ve $k \in \mathbb{R}$ için;

$$N_p(k) = \{Z \in T_p M : R(X, Y)Z = k[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]\}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $X, Y \in T_p M$ olmak üzere $T_p M$; M 'nin herhangi bir $p \in M$ noktasındaki tanjant vektör uzayını ve R ; (1,3)-tipindeki Riemann eğrilik tensörünü gösterir.

Yakın zamanlarda Blair, Koufogiorgos ve Papantoniou (1995) tarafından bir değme metrik manifold olan $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ yapısı üzerinde (k, μ) -nulluk dağılımı isminde k -nulluk dağılımının genelleştirilmiş bir notasyonu herhangi bir $p \in M^{2n+1}$ ve $k, \mu \in \mathbb{R}$ için; $h = \frac{1}{2}E_\xi$ iken;

$$N_p(k, \mu) = \{Z \in T_p M : R(X, Y)Z = k[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \\ + \mu[g(Y, Z)hX - g(X, Z)hY]\}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $\mathcal{E}$; Lie türevi gösterir.

2009 yılında Dileo ve Pastore tarafından bir hemen hemen Kenmotsu manifold olan $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ yapısı üzerinde k -nulluk dağılımının diğer bir genelleştirilmiş notasyonu olan $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımı notasyonu herhangi bir $p \in M^{2n+1}$ ve $k, \mu \in \mathbb{R}$ için; $h' = h \circ \phi$ iken;

$$N_p(k, \mu)' = \{Z \in T_p M : R(X, Y)Z = k[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \\ + \mu[g(Y, Z)h'X - g(X, Z)h'Y]\}$$

olarak tanımlanmıştır.

Birinci bölüm olan giriş bölümünde konu ile ilgili literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölüm temel tanım ve kavramlar için ayrılmıştır. Bu bölüm 3 alt başlıktan oluşmaktadır. Birinci alt başlıkta Riemann manifoldları ile ilgili temel tanımlar verilmiştir. İkinci alt başlıkta hemen hemen değme manifoldlara ait temel kavramlar yer almıştır. Üçüncü alt başlıkta hemen hemen α -kosimplektik manifoldlara ait temel tanım ve özelliklerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımına sahip hemen hemen α -kosimplektik manifoldların ikinci mertebeden paralel tensör alanlarının bazı özellikleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde (k, μ) -nulluk dağılımına sahip hemen hemen α -kosimplektik manifoldlar üzerinde ikinci mertebeden paralel tensör alanları ile ilgili özellikler elde edilmiştir.

Son bölüm ise sonuç ve önerilere ayrılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar 3 alt başlık altında verilmiştir.

2.1. Riemann Manifoldları

Bu kısımda Riemann manifoldlarına ait temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1.1. M ; n -boyutlu bir C^∞ manifold olsun. M^n ; üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M^n, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$g: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n, \mathbb{R})$$

simetrik, 2-lineer ve pozitif tanımlı bir g dönüşümüne M^n üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve (M^n, g) ikilisiyle verilen manifoldda bir Riemann manifoldu denir. [24].

M^n manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için, M^n üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa; M^n 'ye bağlantılı manifold adı verilir [24].

Tanım 2.1.2. M^n bir C^∞ manifold olsun. M^n üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ olmak üzere,

$$\nabla: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \xrightarrow{2\text{-lineer}} \chi(M^n)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü, $\forall f, g \in C^\infty(M^n, \mathbb{R}), \forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

$$(1) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$(2) \nabla_{fX+g} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$$

$$(3) \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(fY),$$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M^n üzerinde bir afin konneksiyon denir [24].

Tanım 2.1.3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir afin konneksiyon olsun. O zaman, ∇ dönüşümü; $\forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

- (1) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Konneksiyon sıfır torsiyon özelliği),
- (2) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özelliği),

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M^n üzerinde sıfır torsiyonlu bir Riemann konneksiyonu veya M^n nin Levi-Civata konneksiyonu denir [24].

Tanım 2.1.4. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civata konneksiyonu olsun. O zaman,

$$R: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \times \chi(M^n) \longrightarrow \chi(M^n)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.1)$$

ile tanımlanan (1,3)-tipli tensör alanı R ye M^n nin Riemann eğrilik tensörü denir.

Ayrıca $\forall X, Y, Z, V, W \in \chi(M^n)$ olmak üzere, R Riemann eğrilik tensörü

- (1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,
- (2) $g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V)$,
- (3) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$,
- (4) $g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y)$

özelliklerini sağlar [24].

Önerme 2.1.1. (M^n, g) bir Riemann manifoldu, ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civata konneksiyonu ve E , (1,1)-tipli bir tensör alanı olsun. O zaman,

$$(\nabla_X E)Y = \nabla_X EY - E(\nabla_X Y)$$

dır [24].

Önerme 2.1.2. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. F simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X F)Y, Z) = g(Y, (\nabla_X F)Z)$$

eşitliği geçerlidir [24].

Önerme 2. 1. 3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. G ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X G)Y, Z) = -g(Y, (\nabla_X G)Z)$$

dır [24].

Tanım 2.1.5. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. $T_p M$ tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π ve $V, W \in \Pi$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanı

$$g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2 \neq 0$$

olsun. O zaman,

$$K(V, W) = \frac{g(R(V, Y)W, V)}{g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2}$$

eşitliğinde Π nin kesit eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir [24].

Tanım 2.1.6. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal vektör alanları olmak üzere,

$$\begin{aligned} S: \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longrightarrow S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i) \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlı $(0,2)$ -tipindeki S tensör alanına M^n üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir. Ayrıca, $(0,2)$ -tipli Q Ricci operatörü

$$S(X, Y) = g(QX, Y)$$

eşitliği ile tanımlıdır [42].

Tanım 2.1.7. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i)$$

değerine M^n nin skaler eğriliği denir [42].

Tanım 2.1.8. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M^n nin eğrilik tensörü paralel $(\nabla R = 0)$ ise o zaman, M^n ye lokal simetrik uzay denir [42].

Tanım 2.1.9. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n nin $(1,3)$ -tipli Weyl konformal eğrilik tensör alanı C , M^n üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$\begin{aligned} C(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - \frac{1}{n-2} [S(X, Z)Y - S(Y, Z)X + g(X, Z)QY - g(Y, Z)QX] \\ &+ \frac{r}{(n-1)(n-2)} [g(X, Z)Y - g(Y, Z)X] \end{aligned} \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır. Bundan başka, C nin divergensi c olmak üzere $(c = \text{div } C)$,

$$c(X, Y) = (\nabla_X Q)Y - (\nabla_Y Q)X - \frac{1}{2(n-2)} [(\nabla_X r)Y - (\nabla_Y r)X]$$

dır [42].

Teorem 2.1.1. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n nin konformal düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul $n > 3$ için, $C = 0$ ve $n = 3$ için, $c = 0$ olmasıdır [42].

Teorem 2.1.2. (M^n, g) sabit k eğrilğine sahip olan bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, M^n üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$R(X, Y)Z = k[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]$$

dır [42].

Tanım 2.1.10. k sabit eğrilikli, tam ve bağlantılı manifoldlara uzay form denir. n -boyutlu bir M^n uzay formu $M^n(k)$ ile gösterilir [42].

Tanım 2.1.11. M^n bir C^∞ manifold olmak üzere,

$$\varphi: \mathbb{R} \times M^n \longrightarrow M^n$$

$$(t, p) \longrightarrow \varphi_t(P)$$

dönüşümü

- (1) $\forall t \in \mathbb{R}$ için, $\varphi_t: P \longrightarrow \varphi_t(P)$ diffeomorfizm,
- (2) $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ve $P \in M^n$ için, $\varphi_{t+s}(P) = \varphi_t(\varphi_s(P))$

şartlarını sağlıyorsa φ ye M^n nin diferensiyellenebilir bir 1-parametrelili grubu denir [42].

Önerme 2.1.4. M^n bir C^∞ manifold ve M^n üzerindeki bir X vektör alanı yönündeki Lie türevi için,

- (1) $\mathcal{L}_X(Y \otimes Z) = (\mathcal{L}_X Y) \otimes Z + Y \otimes (\mathcal{L}_X Z)$, (Y, Z herhangi tensör alanları)
- (2) $\mathcal{L}_X f = X(f)$, (f, K cismi üzerinde bir fonksiyon)
- (3) $\mathcal{L}_X V = [X, V]$, $V \in \chi(M^n)$

özellikleri sağlanır [42].

Tanım 2.1.12. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Her X vektör alanı için, $E_X g = 0$ ise X vektör alanına Killing vektör alanı denir [42].

2.2.Hemen Hemen Değme Manifolddlar

Bu kısımda, hemen hemen değme manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.2.1. M ; $2n + 1$ -boyutlu bir manifold, ϕ, ξ, η da M^{2n+1} üzerinde, sırasıyla, $(1,1)$ -tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsunlar. Eğer ϕ, ξ, η için, M^{2n+1} üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere,

$$\eta(\xi) = 1$$

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \quad (2.4)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman, (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapı ile birlikte M^{2n+1} ye bir hemen hemen değme manifold denir [42].

Tanım 2.2.2. M^{2n+1} ; (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile verilsin. M^{2n+1} üzerinde bir g Riemann metriği

$$\eta(X) = g(X, \xi),$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2.5)$$

şartlarını sağlıyorsa g metriğine M^{2n+1} üzerinde hemen hemen değme metrik, (ϕ, ξ, η, g) yapısına hemen hemen değme metrik yapı ve (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile M^{2n+1} ye de hemen hemen değme metrik manifold denir [42].

Sonuç 2.2.1. $M^{2n+1}, (\phi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda,

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) \quad (2.6)$$

dır [42].

Tanım 2.2.3. M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olmak üzere,

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısının temel 2-formu denir [42].

Tanım 2.2.4. (M^n, g) bir Riemann manifold ve $x_1, x_2, \dots, x_n$; M^n nin lokal koordinatları olsun. $\omega = \sqrt{|g|} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ ve $g(x) > 0$ ise ω ye M^n üzerindeki bir hacim form denir. Burada dx_i , M^n üzerindeki kotanjant uzayında 1 –formlar ve $|g|$, M^n üzerinde metrik tensörün determinantıdır [37].

Tanım 2.2.5. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde bir hacim form mevcut ise M^n ye yönlendirilebilirdir denir [14].

Sonuç 2.2.2. Φ temel 2 –formu ters simetrik ve Tanım 2.2.3. yardımıyla $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$ ’dır. Böylece Tanım 2.2.5. gereğince $(M^n, \phi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifoldu yönlendirilebilirdir [7].

Tanım 2.2.6. M^n bir C^∞ manifold olsun. Eğer ω 1 –form ise, keyfi X, Y vektör alanları için,

$$2d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega[X, Y]$$

dır. Eğer ω 2 –form ise,

$$\begin{aligned} 3d\omega(X, Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) + Y(\omega(Z, X)) + Z(\omega(X, Y)) - \omega([X, Y], Z) \\ &\quad - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y) \end{aligned}$$

dır [42].

Önerme 2.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, n, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold ve ∇ Riemann konneksiyonu olsun. Keyfi X, Y, Z vektör alanları için,

- (i) $(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X \Phi)Z)$
- (ii) $(\nabla_X \Phi)(Y, Z) + (\nabla_X \Phi)(\phi Y, \phi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\phi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\phi Z$
- (iii) $(\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi) = (\nabla_X \Phi)(\xi, \phi Y)$
- (iv) $2d\eta(X, Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X$
- (v) $3d\Phi(X, Y, Z) = \bigoplus_{X, Y, Z} (\nabla_X \Phi)(Y, Z)$

eşitlikleri sağlanır. Burada $\bigoplus_{X, Y, Z}$ X, Y, Z vektör alanları üzerinden alınan devirli toplamı göstermektedir.

Ayrıca, $\{X_i, \phi X_i, \xi\}$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, M^{2n+1} in açık bir alt cümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz olsun. O zaman, δ operatörü

$$\delta\eta = \sum_{i=1}^n \{(\nabla_{X_i} \eta)X_i + (\nabla_{\phi X_i} \eta)\phi X_i\}$$

şeklinde elde edilir [7].

Tanım 2.2.7. M^n bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M^n nin her p noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde $T_p M$ tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcut ise o zaman M^n üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifoldda bir hemen hemen kompleks manifold denir [42].

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) ile verilsin. O zaman, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$\left(X, f \frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada X , M manifolduna teğet bir vektör alanı; t , $\mathbb{R}$ 'nin bir koordinatı ve f , $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir C^∞ fonksiyondur.

M üzerinde (ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J\left(X, f \frac{d}{dt}\right) = \left(\phi X - f \cdot \xi, \eta(X) \frac{d}{dt}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca $J^2 = -I$ elde edilir [42].

Tanım 2.2.8. M^n bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, M^n üzerinde $(1, 1)$ -tipli bir tensör alanı F olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N_F(X, Y) = F^2[X, Y] + [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir [42].

J , M^n üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.2.8. yardımıyla M^n üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü

$$N_J(X, Y) = J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY]$$

$$= -[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY]$$

şeklindedir [42].

Tanım 2.2.9. (M^{2n}, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir [42].

Tanım 2.2.10. Eğer $M^{2n} \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir [42].

Önerme 2.2.2. M^{2n+1} üzerinde (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul

$$N_\phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Burada N_ϕ , ϕ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür [42].

Tanım 2.2.11. (M^{2n}, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. M^{2n} üzerindeki her X, Y vektör alanları için,

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

şeklinde verilen g Riemann metriğine Hermit metriği denir. Hermit metriği ile verilen bir hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir. Hermit metriği ile verilen kompleks manifolda ise Hermit manifoldu denir [4].

Tanım 2.2.12. (M^{2n}, J, g) bir hemen hemen Hermit manifoldu olsun. Her X, Y vektör alanları için,

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY)$$

eşitliği ile tanımlanan Ω 2-formuna hemen hemen Hermit yapısının temel 2-formu denir. Eğer $d\Omega = 0$ ise (J, g) yapısına hemen hemen Kaehler yapı denir. Bu yapı ile elde edilen manifolda ise hemen hemen Kaehler manifoldu denir. Bir Kaehler yapı ile verilen kompleks manifolda Kaehler manifoldu denir. Bir Hermit manifoldunun bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır [4].

Tanım 2.2.13. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O zaman verilen bu yapı

$$d\phi = 0 \text{ } (\phi, \text{kapalıdır}), \quad d\eta = 0 \text{ } (\eta, \text{kapalıdır})$$

şartlarını sağlıyorsa M^{2n+1} manifolduna hemen hemen kosimplektik manifold denir.

Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifold normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir [25].

Teorem 2.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} manifoldunun bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla\Phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin sıfıra eşit olmasıdır [25].

Yardımcı Teorem 2.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme manifoldu olsun. Eğer Φ 2-formu kapalı ise,

$$\begin{aligned} &(\nabla_{\phi X}\Phi)(\phi Y, Z) + (\nabla_X\Phi)(Y, Z) - \eta(X)[d\eta(\phi Y, Z) + d\eta(Y, \phi Z)] \\ &+ \eta(Y)\left[d\eta(\phi Z, X) - \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi g)(Z, \phi X)\right] + \eta(Z)[d\eta(\phi X, Y)] = 0 \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır [25].

Yardımcı Teorem 2.2.2. Bir hemen hemen kosimplektik manifold üzerinde

$$(\nabla_{\phi X}\phi)(\phi Y) + (\nabla_X\phi)(Y) - \eta(Y)\nabla_{\phi X}\xi = 0$$

eşitliği sağlanır [25].

Tanım 2.2.14. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Eğer M manifoldu üzerinde her X, Y, Z vektör alanları ve $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ için,

$$d\eta = 0, d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$$

şartları geçerli ise M manifolduna bir hemen hemen α -Kenmotsu manifoldu denir.

$\alpha = 1$ durumu hemen hemen Kenmotsu olarak adlandırılır [18].

Önerme 2.2.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda,

$$\eta' = \frac{1}{\alpha}\eta, \xi' = \alpha\xi, \phi' = \phi, g' = \frac{1}{\alpha^2}g, \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlı homotetik deformasyon yardımıyla M^{2n+1} üzerinde bir (ϕ', ξ', η', g') hemen hemen α -Kenmotsu manifoldu elde edilir [19].

Teorem 2.2.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} nin bir Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X, \nabla_X \xi = -\phi^2 X; \forall X, Y \in \chi(M^{2n+1})$$

dır [18].

2.3. α -Kosimplektik Manifoldlar

Bu kısımda hemen hemen α -kosimplektik manifoldlar ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.3.1. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Herhangi vektör alanları ve keyfi α reel sayısı için, M^{2n+1} üzerinde

$$d\eta = 0, \quad d\phi = 2\alpha\eta \wedge \phi$$

eşitlikleri sağlanıyorsa M^{2n+1} ye hemen hemen α -kosimplektik manifold denir. Özel olarak, $\alpha = 0$ için hemen hemen kosimplektik, $\alpha \neq 0$ durumunda ise hemen hemen α -Kenmotsu manifoldu elde edilir [19].

Yardımcı Teorem 2.3.1. M^{2n+1} manifoldunun bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı için,

$$2g((\nabla_X \phi)Y, Z) = 2d\phi(X, \phi Y, \phi Z) - 3d\phi(X, Y, Z) + g(N^{(1)}(Y, Z), \phi X) + (Y, Z)\eta(X) + 2d\eta(\phi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\phi Z, X)\eta(Y) \quad (2.9)$$

dir. Burada $N^{(1)}, N^{(2)}$ tensör alanları sırasıyla,

$$N^{(1)}(X, Y) = N_\phi(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi \quad (2.10)$$

$$N^{(2)}(X, Y) = (\mathcal{L}_{\phi X}\eta)Y - (\mathcal{L}_{\phi Y}\eta)X \quad (2.11)$$

dir [4].

Önerme 2.3.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. O zaman, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$hX = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi \phi)X, \quad h(\xi) = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla_X \xi = -\alpha \phi^2 X - \phi hX \quad (2.13)$$

$$\nabla_\xi \xi = 0, \quad \nabla_\xi \phi = 0 \quad (2.14)$$

$$(\phi \circ h)X + (h \circ \phi)X = 0 \quad (2.15)$$

$$(\nabla_X \eta)Y = \alpha[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] + g(\phi Y, hX) \quad (2.16)$$

$$\delta_\eta = -2\alpha n, \quad \text{tr}(h) = 0 \quad (2.17)$$

$$h = 0 \Leftrightarrow \nabla \xi = -\alpha \phi^2 \quad (2.18)$$

eşitlikleri sağlanır [11]-[19].

Yardımcı Teorem 2.3.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme manifold olsun. O zaman,

$$(\nabla_\xi h) \circ \phi + \phi \circ (\nabla_\xi h) = 0$$

eşitliği sağlanır [4].

Önerme 2.3.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. O zaman, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için Levi-Civita konneksiyonu

$$(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_{\phi X} \phi)\phi Y = -\alpha[\eta(Y)\phi X + 2g(X, \phi Y)\xi] - \eta(Y)hX \quad (2.19)$$

eşitliğini sağlar. Ayrıca, (2.19) eşitliği kullanılarak

$$\phi(\nabla_X \phi)Y - (\nabla_X \phi)Y = 2\alpha\eta(Y)\phi X - g(\alpha\phi X + hX, Y)\xi \quad (2.20)$$

elde edilir [19].

Önerme 2.3.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$g(R_{\xi X}Y, Z) - g(R_{\xi X}\phi Y, \phi Z) + g(R_{\xi\phi X}\phi Y, \phi Z) + g(R_{\xi\phi X}\phi Y, Z) = 2(\nabla_{hX}\Phi)(Y, Z) + 2\alpha^2\eta(Y)g(X, Z) - 2\alpha^2\eta(Z)g(X, Y) - 2\alpha\eta(Y)g(\phi hX, Z) + 2\alpha\eta(Z)g \quad (2.21)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. R Riemann eğrilik tensörü simetrik olduğundan $g(R_{\xi X}Y, Z) = g(X, R_{YZ}\xi)$ 'dir. Buradan (2.21) eşitliğinin sol tarafı

$$2\alpha^2\eta(Y)g(X, Z) - 2\alpha^2\eta(Z)g(X, Y) + B(X, Y, Z) - B(X, Z, Y) \quad (2.22)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$B(X, Y, Z) = g(X, (-\nabla_Y \phi h)Z + \phi(\nabla_Y \phi h)\phi Z) + g(X, (\nabla_{\phi Y} \phi h)\phi Z) - g(\phi X, (\nabla_{\phi Y} \phi h)Z)$$

dır. Bu eşitlik göz önüne alınarak

$$\phi(\nabla_Y \phi h)\phi Z - (\nabla_Y \phi h)Z = -(\nabla_Y \phi)hZ + h(\nabla_Y \phi)Z \quad (2.23)$$

bulunur. Metrik tensör alanı yardımıyla

$$g(X, (\nabla_{\phi Y} \phi h)\phi Z) - g(\phi X, (\nabla_{\phi Y} \phi h)Z) = g(\phi X, \phi((\nabla_{\phi Y} \phi h)\phi Z) + \eta(Z)\eta((\nabla_{\phi Y} \phi h)\phi Z) - g(\phi X, (\nabla_{\phi Y} \phi h)Z))$$

elde edilir. Bu son denkleme (2.23) uygulanarak

$$g(hZ, -\alpha\phi Y + hY) = \eta((\nabla_{\phi Y} \phi h)\phi Z) \quad (2.24)$$

eşitliğine ulaşılır. (2.20) ve (2.24) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$B(X, Y, Z) = 2g(hX, (\nabla_Y \phi)Z) + 2\alpha\eta(Z)g(h\phi Y, X) - 2\alpha\eta(X)g(h\phi Y, Z) \quad (2.25)$$

bulunur. Ayrıca, $d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$ ve

$$3d\Phi(Y, Z, hX) = (\nabla_Y \Phi)(Z, hX) + (\nabla_Z \Phi)(hX, Y) + (\nabla_{hX} \Phi)(Y, Z)$$

eşitlikleri kullanılarak (2.25) eşitliğin (2.21) ifadesinde Y ve Z vektör alanlarının yer değiştirilmesiyle istenen sonuca ulaşılır.

Tanım 2.3.2. M^n bir C^∞ manifold olsun. Keyfi bir $p \in M^n$ noktası için $T_p M$ nin r -boyutlu alt uzayı ($r \leq n$) D ve D_p nin bir koleksiyonu $D = \{D_p\}$ olmak üzere, p noktasını ihtiva eden M^n nin bir U açık altcümlesi üzerinde C^∞ sınıfından lineer bağımsız $\{X_1, \dots, X_r\}$ vektör alanları U nun her $q \in M^n$ noktasında D_p nin bir bazı oluyorsa D ye M^n üzerinde bir r -boyutlu dağılım ve $\{X_1, \dots, X_r\}$ cümlesine U üzerinde D için bir lokal baz denir [36].

Tanım 2.3.3. M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r -boyutlu dağılımı D olsun. M^n nin bir haritası $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ olmak üzere, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r}\right\}$ cümlesi D dağılımı için bir baz oluşturuyorsa x haritasına D dağılımına göre düzlemseldir denir. Eğer M^n nin her noktasında tanımlı olan D dağılımı için bir düzlemsel harita bulunabiliyorsa D dağılımına integrallenebilirdir denir [36].

Tanım 2.3.4. M^n bir C^∞ manifold, M^n nin r -boyutlu bağlantılı altmanifoldu N ve M^n nin bir r -boyutlu dağılımı olsun. Her $p \in N$ için, $D_p = T_p N$ ise N ye M^n nin r -boyutlu integral alt manifoldu denir [36].

Önerme 2.3.4. M^n bir manifold ve ω , M^n üzerinde C^∞ bir 1-form olsun. M^n nin her $p \in M^n$ noktası için $n = \text{boy}(\ker \omega_p) = r$ sabit ise $\ker \omega_p$, M^n üzerinde bir r -boyutlu dağılımdır [36].

Teorem 2.3.1. (Frobenius Teoremi) M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r -boyutlu dağılımı D olsun. D dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $X, Y \in D$ için $[X, Y] \in D$ olmasıdır [36].

Önerme 2.3.5. M^n bir C^∞ manifold ω , M^n üzerinde C^∞ bir 1-form ve her $p \in M^n$ noktası için $n = \text{boy}(\ker \omega_p) = r$ sabit olsun. Böylece $D = \{\ker \omega_p : p \in M^n\}$

dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $X, Y \in \ker \omega_p$ için $d\omega(X, Y) = 0$ olmasıdır [36].

Uyarı 2.3.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. Her $p \in M^{2n+1}$ için,

$$\mathcal{D}_p = \ker n_p = \{X \in T_p M : \eta(X_p) = 0\}$$

ve $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_p\}$ olmak üzere, $\text{boy}(\mathcal{D}_p) = 2n$ olduğundan Önerme 2.3.4. gereğince $\mathcal{D}$ M^{2n+1} nin bir $2n$ -boyutlu dağılımı olur. Diğer yandan, M^{2n+1} bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olduğundan $d\eta = 0$ olup, Önerme 2.3.5. yardımıyla $\mathcal{D}$ dağılımı integrallenebilirdir. Böylece $\mathcal{D}$ dağılımına $2n$ -boyutlu integral altmanifoldları karşılık gelir.

Önerme 2.3.6. Bir hemen hemen kosimplektik manifoldunun bir hemen hemen Kaehler manifold ile $\mathbb{R}$ veya S^1 nin bir lokal aşıkarp çarpımı olması için gerek ve yeter koşul $h = 0$ olmasıdır [19].

Teorem 2.3.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu ve $h = 0$ olsun. O zaman, M manifoldu $M' \times_{f^2} N^{2n}$ olacak şekilde lokal bir katlı çarpımla ifade edilir. Burada N^{2n} bir hemen hemen Kaehler manifold, t koordinatı ile verilen açık aralık M' ve bazı c pozitif sabitleri için $f^2 = ce^{2t}$ dır [11].

Önerme 2.3.7. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. Bu durumda,

- (1) D dağılımının integral altmanifoldu hemen hemen Kaehler yapıdadır,
- (2) $\alpha = 0$ durumunda D dağılımının integral altmanifoldu total geodezik veya $\alpha \neq 0$ durumunda D dağılımının integral alt manifoldunun total umbilik olması için gerek ve yeter koşul $h = 0$ olmasıdır [19].

Önerme 2.3.8. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} nin α -kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul D dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler ve $h = 0$ olmasıdır [19].

Önerme 2.3.9. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $\mathcal{D}$ değme dağılımının integral altmanifoldları Kaehler olacak şekilde bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} in α -kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla \xi = -\alpha \phi^2$ olmasıdır.

İspat X , herhangi bir vektör alanı olmak üzere, $N_\phi(X, \xi) = 2\phi hX$ eşitliği yazılır. Bu nedenle, yapının normal olduğunu kabul edersek $Y \in \mathcal{D}$ için, $h(Y) = 0$ elde edilir. $h(\xi) = 0$ olduğundan $h = 0$ bulunur ve (2.18) ifadesi $\nabla \xi = -\alpha \phi^2$ eşitliğini gerektirir. (2.18) ifadesi yardımıyla eğer $\nabla \xi = -\alpha \phi^2$ ise $h = 0$ dır. O halde, keyfi X vektör alanları için $N_\phi(X, \xi) = 0$ dır. $J_{\mathcal{D}}$ hemen hemen kompleks yapı olsun. Bu durumda her $X, Y \in \mathcal{D}$ için $N_\phi(X, Y) = N_{J_{\mathcal{D}}}(X, Y) = 0$ dır. Böylece $\mathcal{D}$ dağılımının integral manifoldları Kaehler yapıdadır.

Sonuç 2.3.1. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu bir hemen hemen α -kosimplektik manifoldu $\nabla \xi = -\alpha \phi^2$ şartını sağlıyorsa bir α -kosimplektik manifoldudur.

İspat Boyutun 3 olması durumunda, $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldları boyutu 2 olan hemen hemen Kaehler yapıdadırlar. Böylece Önerme 2.3.8. den dolayı ispat tamamlanır.

Uyarı 2.3.2. Yukarıda verilen sonuçlar [11] de $\alpha = 1$ durumu için elde edilmiştir.

M^{2n+1} hemen hemen α -kosimplektik manifold olmak üzere M^{2n+1} , $(1,1)$ -tipindeki $h = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi \phi)$ ve $\ell = R(., \xi)\xi$ simetrik tensör alanları aşağıdaki koşulları sağlar.

$$h\xi = 0, \ell\xi = 0, tr(h) = 0, tr(h\phi) = 0, h\phi + \phi h = 0 \quad (2.26)$$

ayrıca aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir [12].

$$\nabla_X \xi = -\alpha \phi^2 X - \phi hX, \quad \nabla_\xi \xi = 0 \quad (2.27)$$

$$\phi \ell \phi - \ell = 2(h^2 - \alpha^2 \phi^2) \quad (2.28)$$

$$R(X, Y)\xi = \alpha^2[\eta(X)Y - \eta(Y)X] - \alpha[\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] + (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y \quad (2.29)$$

(1,1) – tipindeki $h' = h \circ \phi$ simetrik tensör alanı ϕ ile ters değişmelidir ve $h'\xi = 0$ dır.

$$h = 0 \Leftrightarrow h' = 0, h'^2 = (k + \alpha^2)\phi^2 \Leftrightarrow h^2 = (k + \alpha^2)\phi^2 \quad (2.30)$$

3. $(k, \mu)'$ -NULLUK DAĞILIMINA SAHİP HEMEN HEMEN α -KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde; ξ 'yi ihtiva eden $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımı ile bir hemen hemen α -kosimplektik manifold ele alınmıştır. $X \in D$; h' için λ özdeğerine karşılık gelen özvektör olsun. (2.30)' den açıktır ki; $\lambda^2 = -(k + \alpha^2)$ bir sabittir. Böylece; $k \leq -\alpha^2$ ve $\lambda = \pm\sqrt{-k - \alpha^2}$ dir. h' nün sırasıyla sıfırdan farklı λ ve $-\lambda$ özdeğerlerine karşılık gelen öz uzayları $[\lambda]'$ ve $[-\lambda]'$ ile gösterilecektir.

Lemma 3.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun öyle ki ξ ; $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımına ait ve $h' \neq 0$ 'dır. O halde 0 gibi basit bir özdeğer ile $k \leq -\alpha^2$, $\mu = -2\alpha$, $Ger(h') = \{0, \lambda, -\lambda\}$ ve $\lambda = \sqrt{-k - \alpha^2}$ dir. $[\xi] \oplus [\lambda]'$ ve $[\xi] \oplus [-\lambda]'$ dağılımları; total geodezik yaprakları ile ve $[\lambda]'$ ve $[-\lambda]'$ dağılımları total umbilik yaprakları ile integrallenebilir [1].

Ayrıca kesit eğriliği aşağıdaki gibi verilir:

- (a) Eğer $X \in [\lambda]'$ ise $K(X, \xi) = k - 2\alpha\lambda$ ve
eğer $X \in [-\lambda]'$ ise $K(X, \xi) = k + 2\alpha\lambda$
- (b) Eğer $X, Y \in [\lambda]'$ ise $K(X, Y) = k - 2\alpha\lambda$
eğer $X, Y \in [-\lambda]'$ ise $K(X, Y) = k + 2\alpha\lambda$ ve
eğer $X \in [\lambda]'$ ve $Y \in [-\lambda]'$ ise $K(X, Y) = -(k + 2\alpha)$
- (c) M^{2n+1} ; sabit negatif $r = 2n(k - 2\alpha^2n)$ skaler eğriliğine sahiptir.

İspat. [12] çalışmasında Özellik 4.3 ispatı tekrar edilerek $k \leq -\alpha^2$ ve $\mu = -2\alpha$ olduğu görülebilir. (a) $(\kappa, -2\alpha)'$ -nulluk koşulundan hareketle doğrulanır. Gerçekten herhangi $X \in [\lambda]'$ için $R(X, \xi)\xi = (k - 2\alpha\lambda)X$ 'dir ve X ile skaler çarpımından $K(X, \xi) = k - 2\alpha\lambda$ elde edilir. Şimdi herhangi $X, Y \in [\lambda]'$ için [12]'deki özellik 4.2'den;

$$R(X, Y)Y = (k - 2\alpha\lambda)(\|Y\|^2X - g(X, Y)Y)$$

dir ve X ile skaler çarpımından $K(X, Y) = k - 2\alpha\lambda$ elde edilir. (b)'deki diğer durumlar da benzer şekilde elde edilir.

Sonuç olarak $\{\xi, e_i, \phi e_i\}$ lokal ortonormal baz, $e_i \in [\lambda]'$ olmak üzere **(a)** ve **(b)** durumlarından $Ric(\xi, \xi) = n(k - 2\alpha\lambda)$ $Ric(e_i, e_i) = -2n(\alpha + \lambda)$,
 $Ric(\phi e_i, \phi e_i) = -2n(\alpha - \lambda)$ ve $r = 2n(k - 2\alpha^2 n)$ elde edilir.

Teorem 3.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $(n > 1)$ yapısı ξ' yi içeren $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımına sahip hemen hemen α –kosimplektik manifold ve $h' \neq 0$ olsun. Eğer M^{2n+1} , ikinci mertebeden simetrik paralel tensörü ise M^{2n+1} , n –boyutlu düz bir manifoldu ikinci mertebeden paralel tensör g 'nin bir lineer katıdır.

İspat: $k, \mu \in \mathbb{R}$ ve M^{2n+1} üzerindeki herhangi X, Y vektör alanları için

$$R(\xi, X)\xi = k[\eta(X)\xi - X] - \mu h'X \quad (3.1.1)$$

ifadesi mevcuttur. Bu ifade $\theta(R(\xi, X)\xi, \xi) = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \theta(k[\eta(X)\xi - X] - \mu h'X, \xi) &= 0 \\ k\eta(X)\theta(\xi, \xi) - k\theta(X, \xi) - \mu\theta(h'X, \xi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$k\eta(X)\theta(\xi, \xi) - k\theta(X, \xi) = \mu\theta(h'X, \xi)$$

$$\theta(h'X, \xi) = \frac{-k}{\mu} [\theta(X, \xi) - \eta(X)\theta(\xi, \xi)] \quad (3.1.3)$$

bulunur. Burada $\mu = -2\alpha$ olduğu dikkate alınır

$$\theta(h'X, \xi) = \frac{k}{2\alpha} [\theta(X, \xi) - \eta(X)\theta(\xi, \xi)] \quad (3.1.4)$$

Ayrıca (3.1.2) ifadesinde X yerine $h'X$ yazılırsa

$$k\eta(h'X)\theta(\xi, \xi) - k\theta(h'X, \xi) + 2\alpha\theta(h'^2X, \xi) = 0 \quad (3.1.5)$$

elde edilir. Burada $h'^2X = (k + \alpha^2)(-X + \eta(X)\xi)$ ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& -k\theta(h'X, \xi) + 2\alpha\theta((k + \alpha^2)(-X + \eta(X)\xi), \xi) = 0 \\
& -k\theta(h'X, \xi) - 2\alpha(k + \alpha^2)(\theta(X, \xi) - \eta(X)\theta(\xi, \xi)) = 0
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

bulunur. Bu ifadede (3.1.4) eşitliği dikkate alınır

$$-k\left(\frac{k}{2\alpha}(\theta(X, \xi) - \eta(X)\theta(\xi, \xi))\right) - 2\alpha(k + \alpha^2)(\theta(X, \xi) - \eta(X)\theta(\xi, \xi)) = 0 \tag{3.1.6}$$

$$\frac{-k^2}{2\alpha}(\theta(X, \xi) - \eta(X)\theta(\xi, \xi)) - 2\alpha(k + \alpha^2)(\theta(X, \xi) - \eta(X)\theta(\xi, \xi)) = 0 \tag{3.1.7}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{k^2}{2\alpha} + 2\alpha(k + \alpha^2)\right)(\theta(X, \xi) - \eta(X)\theta(\xi, \xi)) = 0 \\
& -(k + 2\alpha^2)^2[\theta(X, \xi) - g(X, \xi)\theta(\xi, \xi)] = 0
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

elde edilir. $k, \mu \in \mathbb{R}$ ve M^{2n+1} üzerindeki herhangi X, Y vektör alanları için $k \neq -2\alpha^2$ olsun. O halde

$$g(X, \xi)\theta(\xi, \xi) = \theta(X, \xi) \tag{3.1.9}$$

olacaktır. Bu ifadede Y ' ye göre diferansiyel alınır

$$\nabla_Y \theta(X, \xi) = (\nabla_Y g(X, \xi))\theta(\xi, \xi) + g(X, \xi)\nabla_Y \theta(\xi, \xi) \tag{3.1.10}$$

$$\theta(\nabla_Y X, \xi) + \theta(X, \nabla_Y \xi) = \eta(\nabla_Y X)\theta(\xi, \xi) + g(X, \nabla_Y \xi)\theta(\xi, \xi) + 2\eta(X)\theta(\nabla_Y \xi, \xi) \tag{3.1.11}$$

elde edilir. (3.1.9) ifadesinde X yerine $\nabla_Y X$ alınır

$$\theta(\nabla_Y X, \xi) = g(\nabla_Y X, \xi)\theta(\xi, \xi) \tag{3.1.12}$$

bulunur. Bu eşitlik (3.1.11)'de yerine yazılırsa

$$g(\nabla_Y X, \xi)\theta(\xi, \xi) + \theta(X, \nabla_Y \xi) = \eta(\nabla_Y X)\theta(\xi, \xi) + g(X, \nabla_Y \xi)\theta(\xi, \xi) + 2\eta(X)\theta(\nabla_Y \xi, \xi)$$

$$\theta(X, \nabla_Y \xi) = g(X, \nabla_Y \xi) \theta(\xi, \xi) + 2\eta(X) \theta(\nabla_Y \xi, \xi) \quad (3.1.13)$$

bulunur. Ayrıca $\nabla_X \xi = -\alpha(X - \eta(X)\xi) + h'X$ ifadesinde X yerine Y yazılırsa

$$\nabla_Y \xi = -\alpha(Y - \eta(Y)\xi) + h'Y \quad (3.1.14)$$

elde edilir. Bu ifade (3.1.13) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \theta(X, -\alpha(Y - \eta(Y)\xi) + h'Y) \\ = g(X, -\alpha(Y - \eta(Y)\xi) + h'Y) \theta(\xi, \xi) + 2\eta(X) \theta(-\alpha(Y - \eta(Y)\xi) \\ + h'Y, \xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(X, -\alpha Y) + \theta(X, \alpha \eta(Y)\xi) + \theta(X, h'Y) \\ = g(X, -\alpha Y) \theta(\xi, \xi) + g(X, \alpha \eta(Y)\xi) \theta(\xi, \xi) + g(X, h'Y) \theta(\xi, \xi) \\ + 2\eta(X) \theta(-\alpha Y, \xi) + 2\eta(X) \theta(\alpha \eta(Y)\xi, \xi) + 2\eta(X) \theta(h'Y, \xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\alpha \theta(X, Y) + \alpha \eta(Y) \theta(X, \xi) + \theta(X, h'Y) \\ = -\alpha g(X, Y) \theta(\xi, \xi) + \alpha \eta(Y) g(X, \xi) \theta(\xi, \xi) + g(X, h'Y) \theta(\xi, \xi) \\ - 2\alpha \eta(X) \theta(Y, \xi) + 2\alpha \eta(X) \eta(Y) \theta(\xi, \xi) + 2\eta(X) \theta(h'Y, \xi) \end{aligned}$$

$$-\alpha \theta(X, Y) + \theta(X, h'Y) = -\alpha g(X, Y) \theta(\xi, \xi) + g(X, h'Y) \theta(\xi, \xi)$$

$$\alpha \theta(X, Y) - \theta(X, h'Y) = \alpha g(X, Y) \theta(\xi, \xi) - g(X, h'Y) \theta(\xi, \xi) \quad (3.1.15)$$

bulunur. Burada Y yerine $h'Y$ yazılırsa

$$\alpha \theta(X, h'Y) - \theta(X, h'^2 Y) = \alpha g(X, h'Y) \theta(\xi, \xi) - g(X, h'^2 Y) \theta(\xi, \xi) \quad (3.1.16)$$

$h'^2 Y = (k + \alpha^2)(-Y + \eta(Y)\xi)$ ifadesi (3.1.16)'te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \alpha \theta(X, h'Y) - \theta(X, (k + \alpha^2)(-Y + \eta(Y)\xi)) \\ = \alpha g(X, h'Y) \theta(\xi, \xi) - g(X, (k + \alpha^2)(-Y + \eta(Y)\xi)) \theta(\xi, \xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \theta(X, h'Y) + (k + \alpha^2) \theta(X, Y) - (k + \alpha^2) \eta(Y) \theta(X, \xi) \\ = \alpha g(X, h'Y) \theta(\xi, \xi) + (k + \alpha^2) g(X, Y) \theta(\xi, \xi) \\ - (k + \alpha^2) \eta(Y) g(X, \xi) \theta(\xi, \xi) \end{aligned}$$

$$\alpha\theta(X, h'Y) + (k + \alpha^2)\theta(X, Y) = \alpha g(X, h'Y)\theta(\xi, \xi) + (k + \alpha^2)g(X, Y)\theta(\xi, \xi) \quad (3.1.17)$$

(3.1.15) ifadesi α ile çarpılıp (3.1.17) ifadesiyle toplanırsa

$$(k + 2\alpha^2)\theta(X, Y) = (k + 2\alpha^2)g(X, Y)\theta(\xi, \xi) \quad (3.1.18)$$

elde edilir. Burada $k \neq -2\alpha^2$ olduğundan $\theta(X, Y) = g(X, Y)\theta(\xi, \xi)$ olduğu elde edilir.

Sonuç 3.3: M^{2n+1} , ξ' yi içeren $(k, \mu)'$ - nulluk dağılımına sahip hemen hemen α kosimplektik manifold ve $h' \neq 0$ olsun M^{2n+1} , Ricci simetrik yani $\nabla S = 0$ ise M^{2n+1} , n –boyutlu düz bir manifold ile sabit kesit eğriliği $-4\alpha^2$ olan $(n + 1)$ – boyutlu manifoldun Riemann çarpımına lokal olarak izometriktir.

Teorem 3.4: $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ ($n > 1$), ξ' yi içeren $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımına sahip hemen hemen α – kosimplektik manifold ve $h' \neq 0$ olsun eğer M^{2n+1} , ikinci mertebeden ters simetrik paralel tensörü yani 2 –formu sağlarsa M^{2n+1} , n –boyutlu düz bir manifold ve sabit kesit eğriliği $-4\alpha^2$ olan $(n + 1)$ – boyutlu manifoldun Riemann çarpımına eşit olur.

İspat: $k, \mu \in \mathbb{R}$ ve M^{2n+1} üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için ,

$$\theta(R(\xi, X)\xi, Z) + \theta(\xi, R(\xi, X)Z) = 0 \quad (3.4.1)$$

$$R(\xi, X)\xi = k[g(\xi, X)\xi - \eta(\xi)X] + \mu[g(h'X, \xi)\xi - \eta(\xi)h'X] \quad (3.4.2)$$

$$R(\xi, X)Z = k[g(X, Z)\xi - \eta(Z)X] + \mu[g(h'X, Z)\xi - \eta(Z)h'X] \quad (3.4.3)$$

$$\begin{aligned} &\theta(k[g(X, \xi)\xi - \eta(\xi)X] + \mu[g(h'X, \xi)\xi - \eta(\xi)h'X], Z) \\ &+ \theta(\xi, k[g(X, Z)\xi - \eta(Z)X] + \mu[g(h'X, Z)\xi - \eta(Z)h'X]) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\theta(kg(X, \xi)\xi, Z) - \theta(k\eta(\xi)X, Z) + \theta(\mu(g(h'X, \xi)\xi, Z)) - \theta(\mu\eta(\xi)h'X, Z) \\ &+ \theta(\xi, kg(X, Z)\xi) - \theta(\xi, k\eta(Z)X) + \theta(\xi, \mu g(h'X, Z)\xi) \\ &- \theta(\xi, \mu\eta(Z)h'X) = 0 \end{aligned}$$

$$k\eta(X)\theta(\xi, Z) - k\eta(\xi)\theta(X, Z) - \mu\eta(\xi)\theta(h'X, Z) + kg(X, Z)\theta(\xi, \xi) - k\eta(Z)\theta(\xi, X) + \mu g(h'X, Z)\theta(\xi, \xi) - \mu\eta(Z)\theta(\xi, h'X) = 0 \quad (3.4.4)$$

elde edilir. (3.4.4) ifadesinde $\mu = -2\alpha$, θ' nin ters simetrik olduğu ve $\eta(\xi) = 1$ ifadeleri dikkate alınır

$$-k\theta(X, Z) + k\eta(X)\theta(\xi, Z) + 2\alpha\theta(h'X, Z) - k\eta(Z)\theta(\xi, X) + 2\alpha\eta(Z)\theta(\xi, h'X) = 0 \quad (3.4.5)$$

(3.4.5) ifadesinde X yerine $h'X$ yazılırsa

$$-k\theta(h'X, Z) + k\eta(h'X)\theta(\xi, Z) + 2\alpha\theta(h'^2X, Z) - k\eta(Z)\theta(\xi, h'X) + 2\alpha\eta(Z)\theta(\xi, h'^2X) = 0 \quad (3.4.6)$$

(3.4.6) ifadesinde de $h'^2 = (k + \alpha^2)(-X + \eta(X)\xi)$ olduğu dikkate alınır

$$-k\theta(h'X, Z) + k\eta(h'X)\theta(\xi, Z) + 2\alpha\theta(k + \alpha^2)((-X + \eta(X)\xi), Z) - k\eta(Z)\theta(\xi, h'X) + 2\alpha\eta(Z)\theta(\xi, (k + \alpha^2)(-X + \eta(X)\xi)) = 0$$

$$-k\theta(h'X, Z) + k\eta(h'X)\theta(\xi, Z) + 2(k + \alpha^2)(\theta(-X, Z) + \theta(\eta(X)\xi, Z)) - k\eta(Z)\theta(\xi, h'X) + 2\alpha\eta(Z)(k + \alpha^2)(\theta(\xi, -X) + \theta(\xi, \eta(X)\xi)) = 0$$

$$-k\theta(h'X, Z) + k\eta(h'X)\theta(\xi, Z) - 2\alpha(k + \alpha^2)\theta(X, Z) + 2\alpha(k + \alpha^2)\eta(X)\theta(\xi, Z) - k\eta(Z)\theta(\xi, h'X) - 2\alpha\eta(Z)(k + \alpha^2)\theta(\xi, X) + 2\alpha\eta(Z)(k + \alpha^2)\eta(X)\theta(\xi, \xi) = 0$$

$$-k\theta(h'X, Z) + k\eta(h'X)\theta(\xi, Z) - 2\alpha(k + \alpha^2)\theta(X, Z) + 2\alpha(k + \alpha^2)\eta(X)\theta(\xi, Z) - k\eta(Z)\theta(\xi, h'X) - 2\alpha\eta(Z)(k + \alpha^2)\theta(\xi, X) = 0 \quad (3.4.7)$$

$$\theta(h'X, Z) = \frac{k}{2\alpha} [\theta(X, Z) - \eta(X)\theta(\xi, Z) + \eta(Z)\theta(\xi, Z)] - \eta(Z)\theta(\xi, h'X) \quad (3.4.8)$$

(3.4.8) ifadesi (3.4.7) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{k^2}{2\alpha} [\theta(X, Z) - \eta(X)\theta(\xi, Z) + \eta(Z)\theta(\xi, X)] + k\eta(Z)\theta(\xi, h'X) + k\eta(h'X)\theta(\xi, Z) \\
& \quad - 2\alpha(k + \alpha^2)\theta(X, Z) + 2\alpha(k + \alpha^2)\eta(X)\theta(\xi, Z) - k\eta(Z)\theta(\xi, h'X) \\
& \quad - 2\alpha\eta(Z)(k + \alpha^2)\theta(\xi, X) = 0 \\
& - \left(\frac{k^2}{2\alpha} + 2(k + \alpha^2) \right) (\theta(X, Z) - \eta(X)\theta(\xi, Z) + \eta(Z)\theta(\xi, X)) + k\eta(h'X)\theta(\xi, Z) = 0 \\
& -(k + 2\alpha^2)^2 [\theta(X, Z) - \eta(X)\theta(\xi, Z) + \eta(Z)\theta(\xi, X)] = 0 \quad (3.4.9)
\end{aligned}$$

bulunur. $k, \mu \in \mathbb{R}$ ve M^{2n+1} üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için $k \neq -2\alpha^2$ olsun. Bu durumda

$$\theta(\xi, Z) = \eta(X)\theta(\xi, Z) - \eta(Z)\theta(\xi, Z) \quad (3.4.10)$$

olur. Ayrıca

$$\theta(X, Y) = g(AX, Y) \quad (3.4.11)$$

$$AX = \eta(X)A\xi - g(A\xi, Z)\xi \quad (3.4.12)$$

bu ifadenin Z ile iç çarpımı alınır

$$g(AX, Z) = \eta(X)g(A\xi, Z) - \eta(Z)g(A\xi, X)$$

elde edilir. (3.4.12) ifadesinde $A\xi = 0$ olursa $AX = 0$ olup $\theta(X, Y) = 0$ olacağından $A\xi \neq 0$ olsun. (3.4.12) ifadesinin $A\xi$ ile iç çarpımı alınır

$$g(AX, A\xi) = \eta(X)g(A\xi, A\xi) - g(A\xi, X)g(A\xi, \xi) \theta(\xi, \xi) \quad (3.4.13)$$

elde edilir. Ayrıca $\theta(X, Y) = g(AX, Y)$ ifadesi $\theta(Y, X) = -g(AY, X)$ olduğundan

$$-g(X, A^2\xi) = \eta(X)g(A\xi, A\xi) \quad (3.4.14)$$

elde edilir.

$$A^2\xi = -g(A\xi, A\xi)\xi \quad (3.4.15)$$

$$A^2\xi = -\|A\xi\|^2\xi \quad (3.4.16)$$

bulunur. (3.4.16) ifadesinde X 'e göre diferansiyel alınır

$$\nabla_X A^2\xi = -\nabla_X[-\|A\xi\|^2\xi]$$

$$\nabla_X A^2\xi = -(\nabla_X\|A\xi\|^2)\xi - \|A\xi\|^2\nabla_X\xi$$

$$\nabla_X A^2\xi = (g(-\nabla_X A\xi, A\xi)\xi - g(A\xi, \nabla_X A\xi)\xi) - \|A\xi\|^2\nabla_X\xi$$

$$\nabla_X A^2\xi = -g(\xi\nabla_X A + A\nabla_X\xi, A\xi)\xi - g(A\xi, A\nabla_X\xi + \xi\nabla_X A)\xi - \|A\xi\|^2\nabla_X\xi$$

$$\begin{aligned} \nabla_X A^2\xi &= -g(\xi\nabla_X A, A\xi)\xi - g(A\nabla_X\xi, A\xi)\xi - g(A\xi, A\nabla_X\xi)\xi - g(A\xi, \xi\nabla_X A)\xi \\ &\quad - \|A\xi\|^2\nabla_X\xi \end{aligned}$$

$$\nabla_X A^2\xi = -g(A\nabla_X\xi, A\xi)\xi - g(A\xi, A\nabla_X\xi)\xi - \|A\xi\|^2\nabla_X\xi \quad (3.4.17)$$

elde edilir. Bu ifadede $\nabla_X\xi = -\alpha(X - \eta(X)\xi) + h'X$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_X A^2\xi &= -g(-\alpha AX + \alpha A\eta(X)\xi + Ah'X, A\xi)\xi - g(A\xi, -\alpha AX + \alpha A\eta(X)\xi + Ah'X)\xi \\ &\quad - \|A\xi\|^2(-\alpha X + \alpha\eta(X)\xi + Ah'X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_X A^2\xi &= \alpha g(AX, A\xi)\xi - \alpha\eta(X)g(A\xi, AX)\xi \\ &\quad - g(Ah'X, A\xi)\xi + \alpha g(A\xi, AX)\xi - \alpha\eta(X)g(A\xi, A\xi)\xi - g(A\xi, Ah'X)\xi \\ &\quad + \|A\xi\|^2(\alpha X - h'X) - \alpha\eta(X)\|A\xi\|^2\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_X A^2\xi &= g(A(\alpha X - h'X), A\xi)\xi + g(A\xi, A(\alpha X - h'X))\xi + \|A\xi\|^2(\alpha X + h'X) \\ &\quad - 3\alpha\eta(X)\|A\xi\|^2\xi \end{aligned}$$

$$\nabla_X A^2\xi = -2g(\alpha X - h'X, A^2\xi)\xi + \|A\xi\|^2(\alpha X - h'X) - 3\eta(X)\|A\xi\|^2\xi \quad (3.4.18)$$

bulunur. (3.4.12) ifadesi A ile çarpılıp X yerine $\nabla_X \xi$ yazılırsa

$$A^2 X = \eta(X) A^2 \xi - \eta(A\xi, X) A\xi$$

$$A^2 \nabla_X \xi = \eta(\nabla_X \xi) A^2 \xi - g(A\xi, \nabla_X \xi) A\xi$$

$$A^2 \nabla_X \xi = -g(A\xi, \nabla_X \xi) A\xi \quad (3.4.19)$$

(3.4.19) ifadesinde

$$\nabla_X \xi = -\alpha(X - \eta(X)\xi) + h'X$$

yerine yazılırsa

$$-\alpha A^2 X + \alpha \eta(X) A^2 \xi + A^2 h'X = -g(A\xi, -\alpha X + h'X) A\xi - \alpha \eta(X) g(A\xi, \xi) A\xi$$

$$-\alpha A^2 X + A^2 h'X = -\alpha \eta(X) A^2 \xi - \alpha \eta(X) g(A\xi, \xi) A\xi + \alpha g(A\xi, X) A\xi - g(A\xi, h'X) A\xi$$

$$-\alpha A^2 X + A^2 h'X = -\alpha \eta(X) A^2 \xi$$

$$\alpha A^2 X + A^2 h'X + \alpha \eta(X) A^2 \xi = 0 \quad (3.4.20)$$

$$A^2 \xi = -\|A\xi\|^2 \xi = -g(A\xi, A\xi) \xi \quad (3.4.21)$$

elde edilir. Bu ifadede X yönünden diferansiyel alınır

$$\nabla_X A^2 \xi = (\nabla_X A^2) \xi + A^2 \nabla_X \xi$$

$$\nabla_X A^2 \xi = A^2 \nabla_X \xi \quad (3.4.22)$$

burada $\nabla_X \xi = -\alpha X + \alpha \eta(X)\xi + h'X$ yerine yazılırsa

$$\nabla_X A^2 \xi = A^2 (-\alpha X + \alpha \eta(X)\xi + h'X)$$

$$\nabla_X A^2 \xi = -\alpha A^2 X + \alpha A^2 \eta(X) \xi + A^2 h' X \quad (3.4.23)$$

bulunur. (3.4.21) ve (3.4.23) ifadeleri (3.4.18)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & -\alpha A^2 X + \alpha \eta(X) A^2 \xi + A^2 h' X \\ & = -2g(\alpha X - h' X, A^2 \xi) \xi + \|A\xi\|^2(\alpha X - h' X) - 3\alpha \eta(X) \|A\xi\|^2 \xi \\ & -\alpha A^2 X + A^2 h' X - \|A\xi\|^2(\alpha X - h' X) = 2\|A\xi\|^2 g(\alpha X - h' X, \xi) - 2\alpha \eta(X) \|A\xi\|^2 \xi \\ & -\alpha A^2 X + A^2 h' X - \|A\xi\|^2(\alpha X - h' X) = 0 \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

elde edilir. Bu eşitlikte X yerine $h' X$ yazılırsa

$$-\alpha A^2 h' X + A^2 h'^2 X - \|A\xi\|^2(\alpha h' X - h'^2 X) = 0 \quad (3.4.25)$$

bulunur. Burada $h'^2 X = (k + \alpha^2)(-X + \eta(X)\xi)$ olduğu dikkate alınır

$$\begin{aligned} & -\alpha A^2 h' X + A^2(k + \alpha^2)(-X + \eta(X)\xi) - \|A\xi\|^2(\alpha h' X - (k + \alpha^2)(-X + \eta(X)\xi)) \\ & = 0 \\ & -\alpha A^2 h' X - (k + \alpha^2)A^2 X + (k + \alpha^2)\eta(X)A^2 \xi - \alpha\|A\xi\|^2 h' X - (k + \alpha^2)\|A\xi\|^2 X + \\ & (k + \alpha^2)\eta(X)\|A\xi\|^2 \xi = 0 \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

(3.4.26) ifadesinde (3.4.21) eşitliği dikkate alınır

$$\begin{aligned} & -\alpha A^2 h' X - (k + \alpha^2)A^2 X - (k + \alpha^2)\eta(X)\|A\xi\|^2 \xi \\ & + \|A\xi\|^2(-\alpha h' X - (k + \alpha^2)X + \|A\xi\|^2(k + \alpha^2)\eta(X)\xi) = 0 \\ & -\alpha A^2 h' X - (k + \alpha^2)A^2 X - \|A\xi\|^2(\alpha h' X + (k + \alpha^2)X) = 0 \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

elde edilir. (3.4.24) ifadesi α çarpılıp (3.4.27) ile taraf tarafa çıkarılırsa

$$(k + 2\alpha^2)(A^2 X + \|A\xi\|^2 X) = 0 \quad (3.4.28)$$

elde edilir. $k \neq -2\alpha^2$ olduğundan ispat tamamlanır.

4. (k, μ) -NULLUK DAĞILIMINA SAHİP HEMEN HEMEN α -KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Teorem4.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$; ξ 'yi içeren (k, μ) -nulluk dağılımına sahip bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. Eğer M^{2n+1} ikinci mertebeden simetrik paralel tensör alanına sahip ise bu ikinci mertebeden paralel tensör alanı M^{2n+1} in sabit katlı bir metrik tensörüdür.

İspat. $k, \mu \in \mathbb{R}$ ve M^{2n+1} üzerindeki herhangi X, Y, Z, W vektör alanları için

$$R(X, Y)\xi = k[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + \mu[\eta(Y)hX - \eta(X)hY] \quad (4.1.1)$$

$$R(\xi, Y)Y = k[g(X, Y)\xi - \eta(Y)X] + \mu[g(hX, Y)\xi - \eta(Y)hX] \quad (4.1.2)$$

$$\theta(R(W, X)Y, Z) + \theta(Y, R(W, X)Z) = 0 \quad (4.1.3)$$

ifadesinde $Y = Z = W = \xi$ yazılırsa

$$\theta(R(\xi, X)\xi, \xi) + \theta(\xi, R(\xi, X)\xi) = 0 \quad (4.1.4)$$

elde edilir. Aynı zamanda $\nabla\theta = 0$ olduğundan

$$\theta(R(\xi, X)\xi, \xi) = 0 \quad (4.1.5)$$

elde edilir. (3.1. 1) ifadesinde $Y = \xi$ alınır

$$R(X, \xi)\xi = k[\eta(\xi)X - \eta(X)\xi] + \mu[g(hX, \xi)\xi - \eta(\xi)hX] \quad (4.1.6)$$

$$R(X, \xi)\xi = k[X - \eta(X)\xi] - \mu hX \quad (4.1.7)$$

bulunur. Bu ifadede $h = 0$, $k = -\alpha^2$ olarak alınır

$$R(X, \xi)\xi = -\alpha^2(X - \eta(X)\xi) \quad (4.1.8)$$

elde edilir. Bu ifade (3.1.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\theta(-\alpha^2(X - \eta(X)\xi, \xi) = 0 \quad (4.1.9)$$

$$-\alpha^2\theta(X, \xi) + \alpha^2\eta(X)\theta(\xi, \xi) = 0 \quad (4.1.10)$$

$$\alpha^2\theta(X, \xi) = \alpha^2\eta(X)\theta(\xi, \xi) \quad (4.1.11)$$

elde edilir. Y' ye göre diferansiyel alınır

$$\alpha^2\nabla_Y\theta(X, \xi) = \alpha^2(\nabla_Y\eta(X))\theta(\xi, \xi) + \alpha^2\eta(X)(\nabla_Y\theta(\xi, \xi)) \quad (4.1.12)$$

$$\alpha^2\theta(\nabla_Y X, \xi) + \alpha^2\theta(X, \nabla_Y \xi) = \alpha^2(\nabla_Y\eta(X))\theta(\xi, \xi) + 2\alpha^2\eta(X)\theta(\nabla_Y \xi, \xi) \quad (4.1.13)$$

$\nabla_Y X$ yerine X yazılırsa

$$\alpha^2\theta(X, \xi) + \alpha^2\theta(X, \nabla_Y \xi) = \alpha^2(\nabla_Y g(X, \xi))\theta(\xi, \xi) + 2\alpha^2\eta(X)\theta(\nabla_Y \xi, \xi) \quad (4.1.14)$$

$$\alpha^2\theta(X, \xi) + \alpha^2\theta(X, \nabla_Y \xi) = \alpha^2 g(\nabla_Y X, \xi)\theta(\xi, \xi) + \alpha^2 g(X, \nabla_Y \xi)\theta(\xi, \xi) + 2\alpha^2\eta(X)\theta(\nabla_Y \xi, \xi) \quad (4.1.15)$$

$$\begin{aligned} \alpha^2\theta(X, \xi) + \alpha^2\theta(X, \nabla_Y \xi) \\ = \alpha^2 g(X, \xi)\theta(\xi, \xi) + \alpha^2 g(X, \nabla_Y \xi)\theta(\xi, \xi) + 2\alpha^2\eta(X)\theta(\nabla_Y \xi, \xi) \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

$$\alpha^2\theta(X, \nabla_Y \xi) = \alpha^2 g(X, \nabla_Y \xi)\theta(\xi, \xi) + 2\alpha^2\eta(X)\theta(\nabla_Y \xi, \xi) \quad (4.1.17)$$

bulunur. Burada $\nabla_Y \xi = -\alpha(Y - \eta(Y)\xi) - \phi hY = -\alpha(Y - \eta(Y)\xi)$ yerine yazılırsa

$$\alpha^2\theta(X, -\alpha(Y - \eta(Y)\xi)) = \alpha^2 g(X, -\alpha(Y - \eta(Y)\xi))\theta(\xi, \xi) + 2\alpha^2\eta(X)(-\alpha(Y - \eta(Y)\xi), \xi) \quad (4.1.18)$$

$$\begin{aligned} \alpha^2[-\alpha\theta(X, Y) + \alpha\eta(Y)\theta(X, \xi)] &= \alpha^2[-\alpha g(X, Y)\theta(\xi, \xi) + \alpha\eta(Y)g(X, \xi)\theta(\xi, \xi) \\ &\quad - 2\eta(X)\alpha\theta(Y, \xi) + 2\alpha\eta(X)\eta(Y)\theta(\xi, \xi)] \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

$$\begin{aligned} -\alpha^3\theta(X, Y) &= -\alpha^3[\eta(Y)\theta(X, \xi) + g(X, Y) - \eta(Y)\eta(X)\theta(\xi, \xi) + 2\eta(X)\theta(Y, \xi) \\ &\quad - 2\eta(X)2\eta(Y)\theta(\xi, \xi)] \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

$$\alpha^3 \theta(X, Y) = \alpha^3 g(X, Y) \theta(\xi, \xi)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2: $(M^{2n+1}, \mu, \xi, \eta, g)$, ξ 'yi içeren (k, μ) -nulluk dağılımına sahip hemen hemen α – kosimplektik manifold olsun. Eğer M^{2n+1} ikinci mertebeden simetrik paralel tensör alanına sahip ise bu durumda M^{2n+1} bir kosimplektik manifoldtur ya da sıfırdan farklı ikinci mertebeden simetrik paralel tensör alanına sahip değildir.

İspat. $k, \mu \in \mathbb{R}$ ve M^{2n+1} üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için

$$\theta(R(\xi, X)\xi, Z) + \theta(\xi, R(\xi, X)Z) = 0 \quad (4.2.1)$$

$$R(\xi, X)Y = k[g(X, Y)\xi - \eta(Y)X] + \mu[g(hX, Y)\xi - \eta(Y)hX] \quad (4.2.2)$$

$Y = \xi$ yazılıp $k = -\alpha^2$ ve $h = 0$ yerine yazılırsa

$$R(\xi, X)\xi = -\alpha^2[g(X, \xi)\xi - \eta(\xi)X]$$

$$R(\xi, X)\xi = -\alpha^2[\eta(X)\xi - X] \quad (4.2.3)$$

Bulunur. Ayrıca (4.2.2) ifadesinde $Y = Z$ yazılıp $k = -\alpha^2$ ve $h = 0$ dikkate alınır

$$R(\xi, X)Z = -\alpha^2[g(X, Z)\xi - \eta(Z)X] \quad (4.2.4)$$

olduğu görülür. (4.2.3) ve (4.2.4) ifadeleri (4.2.1) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\theta(-\alpha^2(\eta(X)\xi - X), Z) + \theta(\xi, -\alpha^2(g(X, Z)\xi - \eta(Z)X)) = 0 \quad (4.2.5)$$

$$-\alpha^2\eta(X)\theta(\xi, Z) + \alpha^2\theta(X, Z) - \alpha^2g(X, Z)\theta(\xi, \xi) + \alpha^2\eta(Z)\theta(\xi, X) = 0 \quad (4.2.6)$$

elde edilir. θ 'nın ters simetrik olduğu (4.2.6)'de dikkate alınır

$$-\alpha^2(\eta(X)\theta(\xi, Z) - \theta(X, Z) - \eta(Z)\theta(\xi, X)) = 0 \quad (4.2.7)$$

$$\alpha^2\theta(X, Z) = \alpha^2(\eta(X)\theta(\xi, Z) - \theta(X, Z) - \eta(Z)\theta(\xi, X)) \quad (4.2.8)$$

elde edilir. Ayrıca $\theta(X, Y) = g(AX, Y)$ ifadesi (4.2.8) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\alpha^2 g(AX, Z) = \alpha^2(\eta(X)g(A\xi, Z) - \eta(Z)g(A\xi, X)) \quad (4.2.10)$$

$$\alpha^2 AX = \alpha^2(\eta(X)A\xi - g(A\xi, X)\xi) \quad (4.2.11)$$

elde edilir. Burada Y 'ye göre diferansiyel alınır

$$\alpha^2 \nabla_Y AX = \alpha^2(\nabla_Y \eta(X)A\xi - \nabla_Y g(A\xi, X)\xi)$$

$$\alpha^2 \nabla_Y AX = \alpha^2[(\nabla_Y \eta(X))A\xi + \eta(X)(\nabla_Y A\xi) - \nabla_Y g(A\xi, X)\xi - g(A\xi, X)\nabla_Y \xi]$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 \nabla_Y AX &= \alpha^2(\nabla_Y \eta(X))A\xi + \eta(X)(\nabla_Y A\xi) - g(\nabla_Y A\xi, X)\xi \\ &\quad - g(A\xi, \nabla_Y X)\xi - g(A\xi, X)\nabla_Y \xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 \nabla_Y AX &= \alpha^2[(g(\nabla_Y X, \xi) + g(X, \nabla_Y \xi))A\xi + \eta(X)\nabla_Y A\xi \\ &\quad - (g(\nabla_Y A\xi, X) - g(A\xi, \nabla_Y X))\xi - g(A\xi, X)\nabla_Y \xi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 \nabla_Y AX &= \alpha^2[g(\nabla_Y X, \xi)A\xi + g(X, \nabla_Y \xi)A\xi + \eta(X)\nabla_Y A\xi - g(\nabla_Y A\xi, X)\xi - \\ &\quad g(A\xi, \nabla_Y X)\xi - g(A\xi, X)\nabla_Y \xi] \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$\begin{aligned} \alpha^2[X\nabla_Y A + A\nabla_Y X] &= \alpha^2[(\nabla_Y g(X, \xi))A\xi + \eta(X)\nabla_Y(A\xi) - \nabla_Y g(A\xi, X)\xi - g(A\xi, X)\nabla_Y \xi] \end{aligned}$$

$$\alpha^2 A\nabla_Y X = \alpha^2[(\nabla_Y g(X, \xi))A\xi + \eta(X)\nabla_Y A\xi - \nabla_Y g(A\xi, X)\xi - g(A\xi, X)\nabla_Y \xi] \quad (4.2.13)$$

olduğu görülür. Ayrıca (4.2.11) ifadesinde X yerine $\nabla_Y X$ yazılırsa

$$\alpha^2 A \nabla_Y X = \alpha^2 (\eta(\nabla_Y X) A \xi - g(A \xi, \nabla_Y X) \xi) \quad (4.2.14)$$

eşitliği elde edilir. θ' 'nin ve A' 'nin paralel oldukları göz önüne alınıp (4.2.14) eşitliği (4.2.13) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \alpha^2 [\eta(\nabla_Y X) A \xi - g(A \xi, \nabla_Y X) \xi] \\ &= \alpha^2 [\nabla_Y g(X, \xi) A \xi + \eta(X) \nabla_Y A \xi - \nabla_Y g(A \xi, X) \xi - g(A \xi, X) \nabla_Y \xi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha^2 [\eta(\nabla_Y X) A \xi - g(A \xi, \nabla_Y X) \xi] \\ &= \alpha^2 [g(\nabla_Y X, \xi) A \xi + g(X, \nabla_Y \xi) A \xi + \eta(X) \nabla_Y A \xi - g(\nabla_Y A \xi, X) \xi \\ & \quad - g(A \xi, \nabla_Y X) \xi - g(A \xi, X) \nabla_Y \xi] \end{aligned}$$

$$\alpha^2 [g(X, \nabla_Y \xi) A \xi + \eta(X) \nabla_Y A \xi - g(\nabla_Y A \xi, X) \xi - g(A \xi, X) \nabla_Y \xi] = 0 \quad (4.2.15)$$

bulunur. $X = \xi$ yazılırsa

$$\alpha^2 [g(\xi, \nabla_Y \xi) A \xi + \eta(\xi) \nabla_Y (A \xi) - g(\nabla_Y A \xi, \xi) \xi - g(A \xi, \xi) \nabla_Y \xi] = 0$$

$$\alpha^2 [\nabla_Y A \xi - g(\nabla_Y A \xi, \xi) \xi] = 0$$

$$\alpha^2 A \nabla_Y \xi = \alpha^2 g(A \xi, \nabla_Y \xi) \xi \quad (4.2.16)$$

elde edilir. $\nabla_Y \xi = -\alpha(Y - \eta(Y)\xi)$ ifadesi (4.2.16) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\alpha^2 A (-\alpha(Y - \eta(Y)\xi)) = \alpha^2 g(A \xi, -\alpha(Y - \eta(Y)\xi)\xi)$$

$$-\alpha^3 (AY - A\eta(Y)\xi) = -\alpha^3 (g(A \xi, Y)\xi - \eta(Y)g(A \xi, \xi)\xi)$$

$$\alpha^3 AY = \alpha^3 (\eta(Y)A \xi + g(A \xi, Y)\xi) \quad (4.2.17)$$

ve ξ ile iç çarpımı alınırsa

$$\alpha^3 g(AY, \xi) = -\alpha^3 g(AY, \xi)$$

$$2\alpha^3 g(AY, \xi) = 0 \quad (4.2.18)$$

Olur. Buradan da 2 durum söz konusudur.

$$2\alpha^3 = 0 \text{ veya } g(AY, \xi) = 0$$

1.Durum. $g(AY, \xi) = 0$ olsun.

$g(AY, \xi) = 0$ ifadesinde X yönünde diferansiyel alınırsa

$$g(\nabla_X AY, \xi) + g(AY, \nabla_X \xi) = 0 \quad (4.2.19)$$

elde edilir. Bu denklemde $A\nabla_X Y = \eta(\nabla_X Y)A\xi - g(A\xi, \nabla_X Y)$ eşitliği kullanılırsa

$$g(\eta(\nabla_X Y)A\xi, \xi) - g(A\xi, \nabla_X Y)g(\xi, \xi) + g(AY, \nabla_X \xi) = 0$$

$$\eta(\nabla_X Y)g(A\xi, \xi) - g(A\xi, \nabla_X Y) + g(AY, \nabla_X \xi) = 0$$

$$-g(A\xi, \nabla_X Y) + g(AY, \nabla_X \xi) = 0 \quad (4.2.20)$$

elde edilir. (4.2.20) ifadesinde $\nabla_X \xi = -\alpha(X - \eta(X)\xi)$ eşitliği yazılırsa

$$-g(A\xi, \nabla_X Y) + g(AY, -\alpha(X - \eta(X)\xi)) = 0$$

$$-g(A\xi, \nabla_X Y) + g(AY, -\alpha X) + g(AY, \alpha\eta(X)\xi) = 0$$

$$-g(A\xi, \nabla_X Y) - \alpha g(AY, X) + \alpha\eta(X)g(AY, \xi) = 0$$

$$-g(A\nabla_X Y, \xi) - \alpha g(AY, X) = 0$$

$$-\alpha g(AY, X) = 0 \quad (4.2.21)$$

elde edilir. $\alpha \neq 0$ olduğundan $g(AY, X) = 0$ yani $\theta(Y, X) = 0$ olur.

2.Durum. $\alpha = 0$ olursa manifold kosimplektiktir.



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde hemen hemen α -kosimplektik manifoldların sahip olduğu $(k,\mu)'$ -nulluk dağılımı ve (k,μ) -nulluk dağılımları ile ilgili bazı özellikler elde edilmiştir. Bu yapı değişik manifold yapılarında da ayrıca ele alınabilir.



KAYNAKLAR

- [1] Ari N., 2018, Nulluk Dağılımına Sahip Hemen Hemen α – Kosiplektik Manifoldların Bir Sınıfı Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, *Necmettin Erbakan Üni. Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.
- [2] Bejan C.L., Crasmareanu M., 2011, Ricci solitons in manifolds with quasi-constant curvature, *Publicationes Mathematicae Deprecen* 78(1), 235-243.
- [3] Binh T.Q., Tamassy L., De U.C., Tarafdar M., 2002, Some remarks on almost Kenmotsu manifolds, *Mathematica Pannonica* 13(1), 31-39.
- [4] Blair D.E., 2010, Riemann geometry of contact and symplectic manifolds, *Progress in Mathematic*, Vol. 203, Birkhauser.
- [5] Blair, D.E., Koufogiorgos, T., Papantoniou, B.J., 1995, Contact metric manifolds satisfying a nullity condition, *Israel. J. Math.* 91, 189-214.
- [6] Calin C., Crasmareanu M., 2010, *From the Eisenhart problem to Ricci solitions in f –Kenmotsu manifolds*.
- [7] Chinea, D., Gonzalez, C., 1990, A classification of almost contact metric manifolds, *Annali di Matematica pura ed applicata*, 156(4), 15-36.
- [8] Das L., 2007, Second order parallel tensor on α –Sasakian manifold, *Acta Math. Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis* 23(1), 65-69.
- [9] De U.C., 1996, Second order parallel tensor on P –Sasakian manifolds, *Publicationes Math.*, Derecen 49, 33-37.
- [10] De, U.C., Mondal A.K., 2009, On 3-dimensional normal almost contact metric manifolds satisfying certain curvatures conditions, *Communications of the Korean Math. Sci.* 24(2), 265-275.
- [11] Dileo, G., Pastore, A.M., 2007, Almost Kenmotsu manifolds and local symmetry, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 14, 343-354.
- [12] Dileo, G., Pastore, A.M., 2009, Almost Kenmotsu manifolds and nullity distribution, *J. Geom.* 93 , 46-61.
- [13] Eisnhart L.P., 1923, Symmetric tensors of the second order whose first covariant derivatives are zero, *Transactions of the American Math. Soc.* 25(2), 297-306.
- [14] Gallot, S., Hulin, D. and Lafontaine, J., 2004, Riemann Geometry, 3rd ed., XVI, 322, p., *Springer Universitext*, ISBN: 9783540204930.
- [15] Goldberg, S. I., Yano, K., 1969, Integrability of almost cosymplectic structure, *Pacific J. Math.*, 31, 373-382.
- [16] Gray, A., 1966, Spaces of constancy of curvature operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* 17, 897-902.
- [17] Janssens D., Vanhecke L., 1981, Almost contact structures and curvature tensors, *Kodai Math.* 4, 1-27.
- [18] Kenmotsu, K., 1972, A class of almost contact Riemannian manifolds, *Tohoku Math. J.* 24, 93-103.
- [19] Kim, T.W., Pak, H.K., 2005, Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures, *Acta Math. Sinica*, Eng. Ser. Aug., 21, 4, 841-846.
- [20] Küpeli Erken, İ., 2010, Paradeğme manifoldlar, Yüksek Lisans Tezi, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Bursa.
- [21] Levy H., 1925, Symmmetric tensors of the second order whose covariant derivatives vanish, *Annals of Math.* 27(2), 91-98.
- [22] Li Z., 1997, Second order parallel tensors on P –Sasakian manifolds with a coetacient k, *Soochow J: of MATH.* 23(1), 97-102.

- [23] Mondal A.K., De U. C., Özgür C., 2010, Second order parallel tensors on (k, μ) – contact metric manifolds, *Analele Ştintifice Ale Uni. Ovidius Constanta-Seria Math.* 18(1), 229-23.
- [24] O’Neill, Press A., Somi B., 1983, *Riemannian Geometry*, London.
- [25] Olszak, Z., 1981, On almost cosymplectic manifolds, *Kodai Math.* 4(2), 239-250.
- [26] Olszak, Z., 1989, Locally conformal almost cosymplectic manifolds, *Coll. Math.*, 57, 73-87.
- [27] Ozturk, H., Aktan, N., Murathan, C., Almost α -cosymplectic (k, μ, ν) -Spaces, *Mathematics Subject Classification*, 53D10, 53C25, 53C35.
- [28] Ozturk, H., Aktan, N., Murathan, C., 2000, Conformally flat almost α -cosymplectic manifolds with Kaehlerian integral submanifolds, *Mathematics Subject Classification.*, 53D10, 53C15, 53C25, 53C35.
- [29] Pastore A.M., Saltarelli V, 2011, Generalized nullity distributions on almost Kenmotsu manifolds, *International Electronik J. Of Geo.* 4(2), 168-183.
- [30] Pastore A.M., Saltarelli V, 2012, Almost Kenmotsu manifolds with conformal Reeb foliation, *Bulletin of the Belgian Math. Soc-Simon Stevin* 21, 343-354.
- [31] Rasmareanu M., 2012, Parallel tensors and Ricci solitons in $N(k)$ –quasi Einstein manifolds, *India Journal of Pure and Applied Math.* 43(4), 359-369.
- [32] Sharma R., 1989, Second order parallel tensor in real and complex space forms, *International J. Of Math. and Math Sciences* 12, 787-790.
- [33] Sharma R., 1990, On the curvature of contact metric manifolds, *J. Of Geo.* 53, 509-531.
- [34] Sharma R., 1990, Second order parallel tensor on contact manifolds, *Algebra, Groups* 7, 787-790.
- [35] Sharma R., 1990, Second order parallel tensor on contact manifolds II., *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* 13(6), 259-264.
- [36] Sharpe, R. W., 1997, Differential Geometry, *Graduate Texts in Math.* Springer.
- [37] Spivak, M., 1965, Calculus on manifolds, *Reading, Massachusetts, W.A. Benjamin, Inc.*, ISBN: 0805902193.
- [38] Tanno, S., 1978, Some differential equations on Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan* 30, 509-531.
- [39] Wang Y.N., Liu X.M., Almost Kenmotsu pseudo-metric manifolds, to appear in *Analele Ştiinţifice ale Uni. Al. I. Cuza din Iaşi-Serie Noua-Math.*
- [40] Wang Y.N., Liu X.M., On almost Kenmotsu manifolds satisfying some nullity distributions, submitted.
- [41] Wang, Y., Liu, X., 2014, Second order parallel tensors on almost Kenmotsu manifolds satisfying the nullity distributions, *Filomat* 28, 839-847.
- [42] Yano K., Kon M., 1984, Structures On Manifolds, *Series In Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Corp*, Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Emine ÖZGÜR
Uyruğu : TC
Doğum Yeri ve Tarihi : MARDİN/1993
Telefon : 05413913640
Faks :
e-mail : emineozgur093@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Ömerli Mehmet Kavak Lisesi Ömerli/MARDİN	2010
Üniversite	: Kafkas Üniversitesi/KARS	2014
Yüksek Lisans	: Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya	
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2016	Afşin Kız Anadolu İmam Hatip Lisesi	Öğretmen

YAYINLAR