

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİN GENİŞLEMELERİ VE KESİRLİ
MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMALARI
ÜZERİNE**

Suliman S. S. Alfaqih

Danışman: Prof. Dr. Emine MISIRLI

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı

Bornova-İzmir

2021

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisanüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum ” **Bazı integral dönüşümlerin genişlemeleri ve kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlere uygulamaları üzerine** ” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışının olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

Suliman S. S. Alfaqeh

Tarih: 02/07/2021

ÖZET

BAZI İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİN GENİŞLEMELERİ VE KESİRLİ MERTEBEDEN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMALARI ÜZERİNE

Suliman S. S. Alfaqih

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emine Mısırlı

2021, 136 Sayfa

Son yıllarda, diferansiyel denklemler, integral denklemler, kısmi diferansiyel denklemler, kesirli diferansiyel denklemler ve bu formlara sahip olan denklem sistemleri fizikçiler, matematikçiler ve mühendisler tarafından büyük ilgi görmektedir. Bu yapılara sahip denklemler, bölünme ve reaksiyon süreçleri, dinamik sistemlerin kontrol teorisi, olasılık ve istatistik, elektrik ağları, sinyal işleme, sistem tanımlama, finansal piyasa ve kuantum mekaniği gibi mühendislik ve bilimin birçok alanında olayları ve süreçleri modellemek için kullanılmaktadır. Bu formlara sahip denklemleri çözenin etkili yöntemlerinden biri, integral dönüşüm yöntemleridir. Bu nedenle, birçok araştırmacı tam sayı ve kesirli mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin geniş sınıflarını çözmek için yeni integral dönüşümlerini bulmak ve genelleştirmek konusunda büyük çaba göstermektedirler.

” **Bazı integral dönüşümlerin genişlemeleri ve kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlere uygulamaları üzerine** ” başlıklı bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, kesirli analiz ve bazı önemli integral dönüşümler ile ilgili temel teoremlere ve formüllere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, tek katlı Shehu dönüşümünün iki katlı Shehu dönüşümüne genelleştirilmesi ve bu genelleştirmenin bazı özelliklerine, teoremlerine ve uygulamalarına yer verilmiştir. Ayrıca, bu bölümde kesirli Black-Scholes denklemlerini çözmek için Aboodh ayrıştırma yöntemi kullanılmıştır ve üç katlı Aboodh dönüşümü tanıtılmıştır, Aboodh dönüşümü ile ilgili bazı temel özellikler ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bazı doğrusal uyumlu (conformable) kesirli kısmi diferansiyel denklemleri ve doğrusal olmayan uyumlu kısmi diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için uyumlu Laplace

dönüşümü ve uyumlu iki katlı Laplace ayrıştırma yönteminin uygulamaları verilmiştir. Bunlara ek olarak, belirli bir türdeki tekillikler ile uyumlu kesirli diferansiyel denklemlere uygulanabilen yeni bir uyumlu integral dönüşümü tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde ise uygulamalı bilimler ve mühendislikte karşılaşılan çeşitli doğrusal olmayan modellerin tam (exact) ve yaklaşık (approximate) çözümlerini elde edebilmek için uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi (conformable Sumudu decomposition method) olarak adlandırılan yeni bir yöntem tanıtılmıştır. Ayrıca, uyumlu Sumudu dönüşümü, iki katlı uyumlu Sumudu dönüşümüne genelleştirilmiştir ve bununla ilgi olarak bazı temel özelliklere, teoremlere ve uygulamalara yer verilmiştir.

Son olarak, beşinci bölümde ise, bu çalışmanın sonuçlarına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli kısmi diferansiyel denklemler, uyumlu kesirli türev, Aboodh dönüşümü, Shehu dönüşümü, uyumlu Sumudu dönüşümü, uyumlu Laplace dönüşümü, iki katlı Shehu dönüşümü.

ABSTRACT

ON EXTENSIONS OF SOME INTEGRAL TRANSFORMS AND THEIR APPLICATIONS TO THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL ORDER

Suliman S. S. Alfaqih

Ph.D in Mathematics Department

Prof. Dr. Emine Mısırlı

2021, 136 Pages

Differential equations, systems of differential equations, integral equations, system of integral equations, partial differential equations, systems of partial differential equations, fractional differential equations, system of fractional differential equations have gained considerable attention of physicists, mathematicians, and engineers because it can be used to model in many fields of engineering and science such as diffusion and reaction processes, control theory of dynamical system, probability and statistics, electrical networks, signal processing, system identification, financial market, and quantum mechanics. One of the effective methods to solve these equations is using the integral transform methods. Therefore, many researchers are still working with great efforts and have been interesting in finding and generalizing novel integral transforms to solve wide classes of differential equations, both ordinary and partial, including fractional.

The current thesis entitled by "**On Extensions of Some Integral Transforms and Their Applications to the Partial Differential Equations with Fractional Order**" consists of five chapters.

The first chapter gives some fundamental theories and formulas related to the fractional calculus and some famous integral transforms.

In chapter two, we generalize the one-dimensional Shehu transform into two dimensional Shehu transform, and we present some properties and theorems with applications. Moreover, we apply the Aboodh decomposition method to solve the fractional Black-Scholes equations, and we introduce triple Aboodh's definition and present some main properties and theorems related to this transform.

In chapter three, we apply the conformable Laplace transform and the conformable double Laplace decomposition method to solve some linear conformable fractional partial differential equations

and systems of nonlinear conformable partial differential equations. Moreover, introduce a new conformable integral transform that can handle conformable fractional differential equations with singularities of a given kind.

Chapter four applies a new method called the conformable Sumudu decomposition method to get the exact and approximate solutions of various nonlinear models in applied sciences and engineering. Also, we generalize the conformable Sumudu transform into double conformable Sumudu transform, and we present some fundamental properties and theorems with applications. Conclusions are outlined in chapter five.

Keywords: Fractional partial differential equations, conformable fractional derivative, Aboodh transform, Shehu transform, conformable Sumudu transform, conformable Laplace transform, double Shehu transform.



ÖNSÖZ

Literatürde çok sayıda integral dönüşüm vardır ve fizik, astronomi ve mühendislikte yaygın olarak kullanılır. Bu tezi yazmanın amacı, bazı integral dönüşümleri sunmak, genelleştirmek ve tanıtmaktır. Uyumlu türevler gibi yeni kesirli türev tanımlarını içeren kesirli diferansiyel denklemleri araştırmak ve çözmek beni diğer bazı yeni kesirli türevlerle daha fazla çalışmaya teşvik etti. Araştırmamın bir sonraki adımında yeni bir integral dönüşümü (Alfaqeih dönüşümü) tanıtmak dileğiyle.

Doktora öğrenimim boyunca bana destek olan eşime, oğluma, kızıma okulumdaki arkadaşlarıma, derslerime giren çok değerli hocalarıma, bu araştırma konusunda desteğini esirgemeyen danışman hocama sonsuz teşekkür ediyorum.

Suliman S. S. Alfaqeih

Tarih: 02/07/2021

İZMİR

İÇİNDEKİLER

ÖZET	vii
ABSTRACT	x
ÖNSÖZ	xiii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xviii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xx
SİMGELER VE KISALTMALAR	xxi
1. GİRİŞ	1
1.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
1.1.1. Bilinen Bazı İntegral Dönüşümler	3
1.1.2. Özel Fonksiyonlar	6
1.1.2.1. Kesirli Türev ve İntegraller	7
1.1.2.2. Riemann-Liouville ve Caputo Türevleri	7
1.1.3. Uyumlu Kesirli Türevler	9
1.1.4. Uyumlu Kesirli İntegraller	12
1.2. Adomian Ayrıştırma Yöntemi.....	13
2. SHEHU VE ABOODH DÖNÜŞÜMLERİ	15
2.1. Tek Katlı Shehu Dönüşümü	15
2.2. İki Katlı Shehu Dönüşümleri	16
2.2.1. İki Katlı Shehu Dönüşümlerinin Varlığı ve Tekliği	17
2.2.2. Bazı Fonksiyonların İki Katlı Shehu Dönüşümü	18
2.2.3. İki Katlı Shehu Dönüşümünün Özellikleri	19
2.2.4. İki katlı Shehu Yönteminin İntegral ve Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulanması	24
2.2.5. Kesirli Türev ve İntegral Operatörlerinin İki Katlı Shehu Dönüşümü	29
2.2.6. İki Katlı Shehu Dönüşümünün Bazı Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması	32
2.2.6.1. Nümerik Örnekler	34
2.3. Tek Katlı Aboodh Dönüşümü	36
2.3.1. Aboodh Ayrıştırma Yöntemi	37
2.3.1.1. Aboodh Ayrıştırma Yönteminin Uygulamaları	39

2.4. Üç Katlı Aboodh Dönüşümü	46
2.4.1. Bazı Temel Fonksiyonların Üç Katlı Aboodh Dönüşümü	47
2.4.2. Üç Katlı Aboodh Dönüşümünün Bazı Özellikleri	47
2.4.3. Bazı Kısmi Türevlerin Üç Katlı Aboodh Dönüşümü	50
2.4.4. Üç Katlı Aboodh Dönüşümünün Uygulamaları	51
3. UYUMLU (CONFORMABLE) LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ	54
3.1. Tek Uyumlu Laplace dönüşümleri	54
3.1.1. Uyumlu Laplace Dönüşümünün Bazı Özellikleri	54
3.2. İki Katlı Uyumlu Laplace Dönüşümü	56
3.2.1. İki Katlı Uyumlu Laplace Dönüşümünün Bazı Özellikleri	57
3.2.2. İki Katlı Uyumlu Laplace Yönteminin Temel Fikri	58
3.2.3. İki Katlı Uyumlu Laplace Dönüşümünün Bazı Uygulamaları	59
3.2.4. Uyumlu İki Katlı Laplace Ayırıştırma Yöntemi	65
3.2.4.1. Uyumlu İki Katlı Laplace Ayırıştırma Yönteminin Bazı Uygulamaları ..	67
3.3. Yeni Uyumlu Laplace Dönüşümü	75
3.3.1. Yeni Uyumlu Laplace Dönüşümünün Bazı Özellikleri	77
3.3.2. Yeni Uyumlu Laplace Dönüşümünün Analizi	79
3.3.3. Nümerik Örnekler	81
4. UYUMLU SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ	88
4.1. Tek Katlı Uyumlu Sumudu Dönüşümü	88
4.1.1. Uyumlu Sumudu Dönüşümünün Bazı Özellikleri	90
4.2. Uyumlu Sumudu Ayırıştırma Yöntemi	90
4.2.1. Uyumlu Kesirli Mertebeli Diferensiyel Fornberg-Whitham Denklemi	90
4.2.1.1. Uyumlu Sumudu Ayırıştırma Yöntemi ile Uyumlu Kesirli FW Denkleminin Çözümü	91
4.2.1.2. Nümerik Sonuçlar	93
4.2.2. Uyumlu Gardner-Ostrovsky (GO) Denklemi	97
4.2.2.1. Uyumlu Sumudu Ayırıştırma Yöntemi ile Uyumlu Kesirli Gardner-Ostrovsky Denkleminin Çözümü	97
4.2.3. Uyumlu Zakharov-Kuznetsov (ZK) Denklemi	103
4.2.3.1. Uyumlu Sumudu Ayırıştırma Yöntemi ile Uyumlu Kesirli ZK Denkleminin Çözümü	103
4.2.3.2. Yakınsaklık Analizi	104

4.2.3.3. Nümerik Örnekler	107
4.2.3.4. Nümerik Sonuçlar	111
4.2.4. Uyumlu Fitzhugh-Nagumo (FN) Denklemleri	118
4.2.4.1. Uyumlu Sumudu Ayrıştırma Yöntemi ile Uyumlu Kesirli FN Denkleminin Çözümü	118
4.2.4.2. Yakınsaklık Analizi	119
4.2.4.3. Nümerik Örnekler	120
4.3. İki Katlı Uyumlu Sumudu Dönüşümü	127
4.3.1. İki Katlı Uyumlu Sumudu Dönüşümünün Bazı Özellikleri	129
4.3.2. İki Katlı Uyumlu Sumudu Dönüşümünün Bazı Uygulamaları	131
5. SONUÇ	137
KAYNAKLAR	139
TEŞEKKÜR	147
ÖZGEÇMİŞ	147

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Denklem (2.97)'deki $u(x, t)$ 'nin $k = 3$ ve $\alpha = 1$ için yüzey grafiği.	42
Şekil 2.2. Denklem (2.97)'deki $u(x, t)$ 'nin $k = 3$, $\alpha = 1$ ve $n = 70$ için yaklaşık çözüm grafiği.	42
Şekil 2.3. Denklem (2.106)'deki $u(x, t)$ 'nin $k = 3$ ve $\alpha = 1$ için yüzey grafiği.	44
Şekil 2.4. Denklem (2.106)'deki $u(x, t)$ 'nin $k = 3$, $\alpha = 1$ ve $n = 70$ için yaklaşık çözüm grafiği.	44
Şekil 4.1. $\nu = 1$ ve $\beta = 1$ değerleri için (4.4) denklemine ait uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi CSDM mutlak üç katlı hata grafiği.	95
Şekil 4.2. $\nu = 1$ ve $\beta = 0.75$ değerleri için (4.4) denklemine ait uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi CSDM mutlak üç katlı hata grafiği.	95
Şekil 4.3. $\mu = \beta = 1$ değerleri için (4.4) denklemine ait gerçek çözümün üç katlı grafiği.	95
Şekil 4.4. $\mu = \beta = 1$ değerleri için (4.4) denklemine ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.	96
Şekil 4.5. $\nu = 1$, $\beta = 0.75$ değerleri için (4.4) denklemine ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.	96
Şekil 4.6. $\nu = 0.1$, $\beta = 0.98$ değerleri için (4.4) denklemine ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.	96
Şekil 4.7. $x = 0.75$, ν ve β farklı değerleri için (4.4) denklemine ait gerçek çözümü yaklaşık çözümü ile iki katlı grafiği.	97
Şekil 4.8. $\nu = \beta = 1$ için (4.15) denklemine ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.	100
Şekil 4.9. $\nu = \beta = 0.90$ için (4.15) denklemine ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği. ..	100
Şekil 4.10. $\nu = \beta = 0.80$ için (4.15) denklemine ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği. ..	101
Şekil 4.11. $\nu = \beta = 0.70$ için (4.15) denklemine ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği. ..	101
Şekil 4.12. $\nu = \beta = 0.60$ için (4.15) denklemine ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği. ..	101
Şekil 4.13. $\nu = \beta = 0.50$ için (4.15) denklemine ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği. ..	102
Şekil 4.14. $\tau = 1$ için (4.15) denklemine ait yaklaşık çözümün iki katlı grafiği.	102
Şekil 4.15. $\tau = 0.7$ için (4.15) denklemine ait yaklaşık çözümün iki katlı grafiği.	102
Şekil 4.16. $\tau = 0.3$ için (4.15) denklemine ait yaklaşık çözümün iki katlı grafiği.	103
Şekil 4.17. $\rho = \gamma = \beta = 1$ için (4.36) denklemine ait çözümün üç katlı grafiği.	113
Şekil 4.18. $\rho = \gamma = \beta = 1$ için (4.36) denklemine ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.	113

Şekil 4.19. $\rho = \gamma = \beta = 1$ için (4.36) denkleminde ait uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi CSDM mutlak üç katlı hata grafiği.	114
Şekil 4.20. $\rho = \gamma = 0.99$ ve β farklı değerleri için (4.40) denkleminde ait iki katlı grafikleri.	114
Şekil 4.21. $\rho = \gamma = \beta$ için (4.36) denkleminde ait iki katlı grafikleri	114
Şekil 4.22. $\rho = \beta = 0.98$, ve γ farklı değerleri için (4.36) denkleminde ait iki katlı grafikleri.	115
Şekil 4.23. $\rho = \gamma = \beta = 1$ için (4.41) denkleminde ait çözümün üç katlı grafiği.	115
Şekil 4.24. $\rho = \gamma = \beta = 1$ için (4.41) denkleminde ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.	115
Şekil 4.25. $\rho = \gamma = \beta = 1$ için (4.41) denkleminde ait uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi CSDM mutlak üç katlı hata grafiği.	116
Şekil 4.26. $\rho = \gamma = 0.99$ ve β farklı değerleri için (4.41) denkleminde ait iki katlı grafikleri.	116
Şekil 4.27. $\rho = \gamma = \beta$ için (4.41) denkleminde ait iki katlı grafikleri.	116
Şekil 4.28. $\rho = \beta = 0.98$ ve γ farklı değerleri için (4.41) denkleminde ait iki katlı grafikleri.	117
Şekil 4.29. $\mu = \lambda = 1$, $0 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 0.5$ değerleri için (4.57) denkleminde ait gerçek çözümün üç katlı grafiği.	122
Şekil 4.30. $\mu = \lambda = 1$, $0 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 0.5$ değerleri için (4.57) denkleminde ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.	123
Şekil 4.31. $\mu = \lambda = 1$, $0 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 0.5$ değerleri için (4.57) denkleminde ait uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi CSDM mutlak üç katlı hata grafiği.	123
Şekil 4.32. $t = 0.02$, μ ve λ farklı değerleri için (4.57) denkleminde ait gerçek çözümü yaklaşık çözümü ile iki katlı grafiği.	123
Şekil 4.33. $\mu = \lambda = 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 0.5$ değerleri için (4.60) denkleminde ait gerçek çözümün üç katlı grafiği.	125
Şekil 4.34. $\mu = \lambda = 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 0.5$ değerleri için (4.60) denkleminde ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.	126
Şekil 4.35. $\mu = \lambda = 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 0.5$ değerleri için (4.60) denkleminde ait uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi CSDM mutlak üç katlı hata grafiği.	126
Şekil 4.36. $t = 0.02$, çeşitli kesirli μ ve λ değerleri için (4.60) denkleminde ait gerçek çözümü yaklaşık çözümü ile iki katlı grafiği.	126

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1. $\nu = \beta = 1$ için uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi CSDM çözümünün gerçek çözümle karşılaştırılması.	94
Çizelge 4.2. $\nu = 1, \beta = 0.75$ için uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi CSDM çözümünün gerçek çözümle karşılaştırılması.	94
Çizelge 4.3. $\rho = \gamma = \beta = 1$ olduğunda $CZK(2, 2, 2)$ için yaklaşık çözümün ile tam çözüm karşılaştırılması.	113
Çizelge 4.4. $\varpi = 0.002, \rho = \gamma = \beta = 1$ olduğunda $CZK(3, 3, 3)$ için yaklaşık çözüm ile tam çözüm arasındaki karşılaştırması.	117
Çizelge 4.5. $\mu = \lambda = 1$ için (4.57) denklemine ait mutlak hata tablosu.	124
Çizelge 4.6. $\mu = \lambda = 1$ için (4.60) denklemine ait mutlak hata tablosu.	127

SİMGELER VE KISALTMALAR

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
FPDEs	Kesirli kısmi diferansiyel denklemler (Fractional Partial Differential Equations)
CFPDEs	Uyumlu Kesirli kısmi diferansiyel denklemler (Conformable Fractional Partial Differential Equations)
$K(p), (A(.))$	Aboodh dönüşümü (operatörü)
$K(p, q, r), (A_{xyt}(.))$	Üç katlı Aboodh dönüşümü (operatörü)
$H(.)$	Shehu dönüşümü (operatörü)
$L(g(x))$	Laplace dönüşümü
$S(g(x))$	Sumudu dönüşümü
$Z(g(x))$	ZZ dönüşümü
$N(g(x))$	Natural dönüşümü
$N(.)$	Lineer olmayan operatörü
$H_{xt}^2 (.)$	İki katlı Shehu dönüşümü
$g * * h$	İki katlı konvolüsyon
CLT	Uyumlu Laplace dönüşümü (Conformable Laplace Transform)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
CDLT	Uyumlu iki katlı Laplace dönüşümü (Conformable Double Laplace Transform)
FW	Fornberg-Whitham
GO	Gardner-Ostrovsky
ZK	Zakharov-Kuznetsov
FN	Fitzhugh-Nagumo
I^μ	μ . mertebeden Riemann Liouville kesirli integral operatörü
${}_R D^\mu$	μ . mertebeden Riemann Liouville kesirli türev operatörü
$NCLT$	Yeni uyumlu Laplace dönüşümü (New Conformable Laplace Transform)
D^μ	μ . mertebeden Caputo kesirli türev operatörü
$\frac{\partial^\rho \phi(x, \tau)}{\partial x^\rho}$	ϕ 'nin x 'e göre uyumlu kesirli kısmi türevi
J_ρ^c	Uyumlu kesirli integral (Conformable Fractional Integral)
R-L	Riemann Liouville
ADM	Adomian ayrıştırma yöntemi (Adomian Decomposition Method)
HT	Tek katlı Shehu dönüşümü (Shehu Transform)
TAT	Üç katlı Aboodh dönüşümü (Triple Aboodh Transform)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
DHT	İki katlı Shehu dönüşümü (Double Shehu Transform)
CDLDM	Uyumlu iki katlı Laplace ayrıştırma yöntemi (Conformable Double Laplace Decomposition Method)
CST	Uyumlu Sumudu Dönüşümü (Conformable Sumudu Transform)
CSDM	Uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi
CSDM	(Conformable Sumudu Decomposition Method)
AT	Aboodh dönüşümü (Aboodh Transform)
ATDM	Aboodh ayrıştırma yöntemi (Aboodh Decomposition Method)
DST	İki katlı Sumudu dönüşümü (Double Sumudu Transform)
DLT	İki katlı Laplace dönüşümü (Double Laplace Transform)

1. GİRİŞ

Uygulamalı matematikteki en önemli konulardan biri, adi ve kısmi türevelere sahip diferansiyel denklemler konusudur. Bu konunun önemi, diferansiyel denklemlerin gerçek dünya problemlerinde ve mühendislikteki birçok alanda kullanılmasından kaynaklanmaktadır. Bu nedenle, birçok araştırmacı günümüzde bu tür denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümlerini bulmak için büyük çaba göstermektedir. Doğal bilimleri ve mühendislikteki birçok olgu, tam sayı mertebeli adi veya kısmi diferansiyel denklemler ile açıklanamamaktadır. Bu tür denklemler, kesirli analiz teorisi kullanılarak oluşturulan modeller ile daha kolay bir şekilde açıklanabilmektedir. Son yıllarda, kesirli kısmi diferansiyel denklemler (FPDE'ler) ve bu tip denklemlerin uygulamaları giderek daha çok önem kazanmaktadır. Bu yapıya sahip denklemlere karşı olan ilgi, matematiksel yapılarından ve uygulamalarından gelmektedir. Kesirli kısmi diferansiyel denklemler (FPDE'ler) mühendislik, bilim, finans, uygulamalı matematik, biyomühendislik gibi pek çok alanda kullanılabilmektedir (Baleanu et al., 2009, 2018b,a; Laskin, 2000).

Günümüzde literatürde, kesirli türevler ve kesirli integraller için Hardy, Littlewood, Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard vb. olarak adlandırılan çeşitli tanımlar bulunmaktadır. Bu tanımlardan, en çok kullanılan Riemann-Liouville ve Caputo tanımlarıdır. Bu kesirli türev tanımları çok tercih edilmekle birlikte matematiksel fizik ve mühendislik gibi alanlardaki uygulamalarında ise bazı eksik kaldıkları durumlar da mevcuttur. Khalil ve arkadaşları (2014)'te (Abdeljawad, 2015) fonksiyonun türevinin bilinen limit tanımını genişletmiştir ve türevlerin temel klasik özelliklerini karşılayan, uyumlu kesirli türevi (CFD) önermiştir. Geçtiğimiz birkaç yıl boyunca, uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etme konusunda büyük bir ilgi ortaya çıkmıştır. Bu nedenle, birçok bilim insanı uyumlu kesirli türevi pek çok uygulamada kullanmaktadır (Zhao and Luo, 2017; Zhao et al., 2018; Sitho et al., 2018; Hammad and Khalil, 2014).

Literatürde, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini veya integral denklemlerin çözümlerini elde etmek için çeşitli matematiksel yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemlere örnek olarak, Adomian ayrıştırma yöntemi (Adomian, 1988), Varyasyonel iterasyon yöntemi (He, 1999), yeni iteratif yöntem (Bhalekar and Daftardar-Gejji, 2008), diferansiyel dönüşüm yöntemi (Arikoglu and Ozkol, 2007), homotopi analiz yöntemi (Shijun, 1998), homotopi

pertürbasyon yöntemi (He, 2003), indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi (Keskin and Oturanc, 2009), güç serisi yöntemi (power series method) (Al-Smadi, 2013), dalgacık yöntemi (wavelet method) (Chen and Hsiao, 1997), q-homotopi analiz yöntemi (El-Tawil and Huseen, 2012), modifiye deneme denklem yöntemi (modified trial equation method) (Bulut et al., 2013), sonlu elemanlar yöntemi (Zienkiewicz et al., 1977) verilebilir.

İntegral dönüşüm yöntemleri, kısmi diferansiyel denklemler, adi diferansiyel denklemler ve integral denklemlerini çözmek için en kullanışlı ve etkili yöntemlerden biri olarak kabul edilmektedir. Bu yöntem, diferansiyel denklemleri cebirsel bir denkleme dönüştürmektedir. İntegral dönüşümün genel formu;

$$I(g(x))(p) = G(p) = \int_{x_1}^{x_2} U(p, x)g(x) dx, \quad (1.1)$$

şeklindedir. Burada, $g(x)$ giriş fonksiyonu, $I(p, u)$ çıkış fonksiyonu ve $U(p, x)$ çekirdek fonksiyonudur. Ayrıca, integral dönüşümün tersi,

$$g(x) = \int_{p_1}^{p_2} U^{-1}(p, x)G(p) dp, \quad (1.2)$$

formu ile ifade edilmektedir.

Fransız matematikçi ve fizikçi P.S. Laplace, tek katlı integral dönüşümünü 1780’de ve Joseph Fourier’de 1822’de tanıtmıştır. Laplace ve Fourier’in dönüşümleri (Bochner et al., 1949; Widder, 2015), uygulamalı matematik, fizik, mühendislik ve astronomi vb. gibi diğer bilim dallarında güçlü uygulamaları olan bir matematik dalı olan operasyonel analizin temelini oluşturmaktadır. Son zamanlarda, bazı araştırmacılar yeni integral dönüşümlerini oluşturmak ve geliştirmek için büyük çaba sarf etmektedirler. Örneğin, 1993 yılında Watugala (Watugala, 1993), ölçeği (scale) ve birimi (unit) koruma özellikleri nedeniyle Laplace’a göre bazı avantajlara sahip olan Sumudu dönüşümünü tanıtmıştır. 2008’de Khan (Khan and Khan, 2008), Laplace ve Sumudu dönüşümlerine benzer doğal dönüşümü tanıtmıştır. Son zamanlarda, bu dönüşüm uygulamalı bilimlerde çok güçlü bir uygulamaya sahiptir. 2011’de Elzaki dönüşümü (Elzaki, 2011), Elzaki tarafından tasarlanmıştır ve bu tasarlanan dönüşüm Laplace ve Sumudu dönüşümlerinden daha kolay özelliklere sahiptir. Atangana ve Kiliçman (Atangana and Kilicman), 2013 yılında Roman dönüşümünü tanıtmıştır. 2015 yılında Srivastava, Luo ve Raina (Srivastava et al., 2015) M-dönüşümünü tanıtmıştır. Son yıllarda, ZZ dönüşümü (Debnath and Bhatta, 2014), Ramazan Grubu (RG) dönüşümü (Ramadan et al., 2016), polinom

dönüşümü (Barnes, 2016), Aboodh dönüşümü (Aboodh, 2013) ve Rangaig dönüşümü (Filipinas and Convicto, 2017), Shehu dönüşümü (Maitama and Zhao, 2019) 2019 yılında Shehu ve Weidong tarafından oluşturulmuştur.

Bazı çalışmalarda tek katlı integral dönüşüm kavramı, iki katlı integral dönüşümüne geliştirilmiştir. Örneğin (Kilicman and Gadain, 2009)'deki yazarlar tek katlı Laplace dönüşümünü iki katlı, yani iki katlı Laplace dönüşümüne genişletmiştir. Bu dönüşüm ısı denklemini, dalga denklemini, telgraf denklemini, kısmi integro-differansiyel denklemleri ve konvolüsyon terimlerini içeren Laplace denklemlerinin çözümleri için kullanılmıştır. (Tchuenche and Mbare, 2007)'deki yazarlar iki katlı Sumudu dönüşümünü önermişlerdir ve homojen olmayan dalga denkleminin sabit katsayılı çözümünü elde etmek için kullanmışlardır. Tek katlı doğal dönüşüm iki katlı olarak genişletilmiştir ve (Kilicman and Omran, 2017)'de iki katlı doğal dönüşüm olarak adlandırılmıştır. Laplace, Sumudu ve doğal dönüşümlerine benzer şekilde iki katlı Shehu dönüşümü 2020 yılında Suliman Alfaqeh ve Emine Mısırlı tarafından önerilmiştir (Alfaqeh and Misirli, 2020).

1.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, kesirli analiz ile ilgili önemli integral dönüşümlerin, temel teoremlerin ve bazı formüllerin tanımları verilmiştir.

1.1.1. Bilinen Bazı İntegral Dönüşümler

Bu bölümde, en eski ve en çok kullanılan Laplace dönüşümü ile başlayan integral dönüşümleri, ardından Sumudu dönüşümü, doğal dönüşüm, Elzaki dönüşümü, Aboodh dönüşümü, ZZ dönüşümü ve Shehu dönüşümü gibi bazı yeni dönüşümleri sunulmaktadır.

Tanım 1.1 (Laplace Dönüşümü) $\phi(x)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü (LT)

$$L(\phi(x) : p) = \int_0^{\infty} e^{-px} \phi(x) dx, \quad p \in \mathbb{C} \quad (1.3)$$

ile tanımlanır. $\phi(x)$ 'in x 'e göre k . mertebeden türevinin Laplace dönüşümü

$$L(\phi^{(k)}(x)) = p^k L(\phi(x)) - \sum_{j=0}^{k-1} p^{k-j-1} \phi^{(j)}(0), \quad (1.4)$$

şekilde verilir.

Tanım 1.2 (Sumudu Dönüşümü) D bir fonksiyonlar kümesi

$$D = \left\{ \phi(x) : \exists K, \lambda_1, \lambda_2 > 0, |\phi(x)| < K \exp\left(\frac{|x|}{\lambda_j}\right), j = 1, 2 \text{ ve } x \in (-1)^j \times \mathbb{R} \setminus (-\infty, 0) \right\}$$

olmak üzere $\phi(x)$ 'in Sumudu dönüşümü (ST);

$$S(\phi(x) : q) = \int_0^{\infty} e^{-qx} \phi(qx) dx, \quad q \in (\lambda_1, \lambda_2), \quad (1.5)$$

olarak tanımlanır ve $\phi(x)$ 'in x 'e göre k . mertebeden türevinin Sumudu dönüşümü

$$S(\phi^{(k)}(x)) = q^{-k} S(\phi(x)) - \sum_{j=0}^{k-1} q^{j-k} \phi^{(j)}(0) \quad (1.6)$$

özellğine sahiptir.

Tanım 1.3 (Natural Dönüşümü) D bir fonksiyonlar kümesi

$$D = \left\{ \varphi(x) : \exists K, \lambda_1, \lambda_2 > 0, |\varphi(x)| < K \exp\left(\frac{|x|}{\lambda_j}\right), j = 1, 2 \text{ ve } x \in (-1)^j \times \mathbb{R} \setminus (-\infty, 0) \right\}$$

olmak üzere $\phi(x)$ 'in Natural dönüşümü (NT);

$$N(\varphi(x) : p, q) = \int_0^{\infty} e^{-px} \varphi(qx) dx, \quad p, q \in (\lambda_1, \lambda_2), \quad (1.7)$$

olarak tanımlanır ve $\varphi(x)$ 'in x 'e göre k . mertebeden türevinin Natural dönüşümü

$$N(\varphi^{(k)}(x)) = \frac{p^k}{q^k} N(\varphi(x)) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{p^{k-j-1}}{q^{j-k}} \varphi^{(j)}(0), \quad (1.8)$$

özellğine sahiptir.

Tanım 1.4 (Elzaki Dönüşümü) D bir fonksiyonlar kümesi

$$D = \left\{ \varphi(x) : \exists K, \lambda_1, \lambda_2 > 0, |\varphi(x)| < K \exp\left(\frac{|x|}{\lambda_j}\right), j = 1, 2 \text{ ve } x \in (-1)^j \times \mathbb{R} \setminus (-\infty, 0) \right\}$$

olmak üzere $\varphi(x)$ 'in Elzaki dönüşümü (ET);

$$E(\varphi(x) : q) = q \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{q}} \varphi(x) dx, \quad q \in (\lambda_1, \lambda_2) \quad (1.9)$$

olarak tanımlanır ve $\varphi(x)$ 'in x 'e göre k . mertebeden türevinin Elzaki dönüşümü

$$E(\varphi^{(k)}(x)) = p^{-k} E(\varphi(x)) - \sum_{j=0}^{k-1} p^{2+j-k} \varphi^{(j)}(0), \quad (1.10)$$

özellğine sahiptir.

Tanım 1.5 (Aboodh Dönüşümü) D bir fonksiyonlar kümesi

$$D = \left\{ \varphi(x) : \exists K, \lambda_1, \lambda_2 > 0, |\varphi(x)| < K e^{-px}, j = 1, 2 \text{ ve } x \in (-1)^j \times R \setminus (-\infty, 0) \right\}$$

olmak üzere $\varphi(x)$ 'in Aboodh dönüşümü AT;

$$A(\varphi(x) : p) = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-px} \varphi(x) dx, \quad p \in \mathbb{C}, \quad (1.11)$$

şeklinde tanımlanır ve $\varphi(x)$ 'in x 'e göre k . mertebeden türevinin Aboodh dönüşümü

$$L(\varphi^{(k)}(x)) = p^k L(\varphi(x)) - \sum_{j=0}^{k-1} p^{k-j-2} \varphi^{(j)}(0), \quad (1.12)$$

özelliğine sahiptir.

Tanım 1.6 (ZZ Dönüşümü) Herhangi bir üstel sıralama fonksiyonu $\phi(x)$ için ZZ dönüşümü

$$Z(\phi(x) : p, q) = p \int_0^{\infty} e^{-px} \phi(qx) dx, \quad p, q \in \mathbb{C}, \quad (1.13)$$

olarak tanımlanır ve $\phi(x)$ 'in x 'e göre k . mertebeden türevinin ZZ dönüşümü

$$Z(\phi^{(k)}(x)) = \frac{p^k}{q^k} Z(\phi(x)) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{p^{k-j}}{q^{k-j}} \phi^{(j)}(0), \quad (1.14)$$

özelliğine sahiptir.

Tanım 1.7 (Shehu Dönüşümü) D bir fonksiyonlar kümesi

$$D = \left\{ \varphi(x) : \exists K, \lambda_1, \lambda_2 > 0, |\varphi(x)| < K \exp\left(\frac{|x|}{\lambda_j}\right), j = 1, 2 \text{ ve } x \in (-1)^j \times R \setminus (-\infty, 0) \right\}$$

olmak üzere $\varphi(x)$ 'in Shehu dönüşümü HT;

$$H(\varphi(x) : p, q) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{px}{q}} \varphi(x) dx, \quad p, q \in (\lambda_1, \lambda_2), \quad (1.15)$$

biçiminde tanımlanır. $\varphi(x)$ 'in x 'e göre k . mertebeden türevinin Shehu dönüşümü ise

$$H(\varphi^{(k)}(x)) = \frac{p^k}{q^k} H(\varphi(x)) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{p^{k-j-1}}{q^{k-j-1}} \varphi^{(j)}(0), \quad (1.16)$$

özelliğine sahiptir.

1.1.2. Özel Fonksiyonlar

Tanım 1.8 *Gama fonksiyonu* (Miller and Ross, 1993):

$\varepsilon > 0$ ise *gama fonksiyonu*

$$\Gamma(\varepsilon) = \int_0^{\infty} \omega^{\varepsilon-1} e^{-\omega} d\omega, \quad (1.17)$$

olarak tanımlanır. Gamma fonksiyonu aşağıdaki

$$1. \Gamma(\varepsilon + 1) = \varepsilon \Gamma(\varepsilon),$$

$$2. \Gamma(\varepsilon + 1) = \varepsilon!,$$

$$3. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

eşitliklerini sağlar.

Tanım 1.9 *Beta fonksiyonu* (Miller and Ross, 1993):

$\text{Re}(\varepsilon) > 0$ ve $\text{Re}(\lambda) > 0$ ise *Beta fonksiyonu*,

$$\begin{aligned} B(\varepsilon, \lambda) &= \int_0^1 \omega^{\varepsilon-1} (1 - \omega)^{\lambda-1} d\omega \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{2\varepsilon-1} (\cos u)^{2\lambda-1} du \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\mu^{\varepsilon-1}}{(1 + \mu)^{\varepsilon+\lambda}} d\mu, \end{aligned} \quad (1.18)$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Beta fonksiyonunun Gamma fonksiyonu cinsinden ifadesi ise

$$B(\varepsilon, \lambda) = \frac{\Gamma(\varepsilon) \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\varepsilon + \lambda)} = B(\lambda, \varepsilon), (\varepsilon, \lambda \neq 0, -1, -2, \dots), \quad (1.19)$$

şeklindedir.

Tanım 1.10 *Üstel fonksiyonun bazı genelleştirme formülleri*

1. *Bir parametrelili Mittag Leffler Fonksiyonu* (Miller and Ross, 1993):

$$E_{\nu}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(\nu j + 1)}, x \in \mathbb{C}, \text{Re}(\nu) > 0. \quad (1.20)$$

2. **İki parametrelili Mittag Leffler Fonksiyonu** (Miller and Ross, 1993):

$$E_{\nu,\beta}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(\nu j + \beta)}, \quad x, \beta \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\nu) > 0. \quad (1.21)$$

3. **Üç parametrelili Mittag Leffler Fonksiyonu** (Miller and Ross, 1993):

$$E_{\nu,\beta}^{\lambda}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_j x^j}{j! \Gamma(\nu j + \beta)}, \quad \nu, \beta, \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\nu) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0, \operatorname{Re}(\lambda) > 0. \quad (1.22)$$

Tanım 1.11 (Üstel Mertebeli Fonksiyon (Ross, 1984))

$X, T \geq 0$ için

$$|\varphi(x, \tau)| < K e^{\alpha x + \beta \tau}, \quad x \geq X, \tau \geq T \quad (1.23)$$

olacak şekilde $K > 0$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ varsa $\varphi(x, \tau)$ fonksiyonuna üstel mertebeden denir ve

$$\varphi(x, \tau) = O(e^{\alpha x + \beta \tau}),$$

olarak yazılır.

Tanım 1.12 (Parçalı Sürekli Fonksiyon (Ross, 1984)) *Parçalı sürekli fonksiyon, kendi alanındaki sonlu sayıdaki nokta dışında sürekli olan bir fonksiyondur.*

$g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ parçalı sürekli bir fonksiyondur eğer $c = a_0 < a_1 < \dots < a_j = b, k = 1, 2, \dots, j$ ise $f_k : [a_{k-1}, a_k] \rightarrow \mathbb{R}$ parçalı sürekli bir fonksiyondur ve her $z \in (a_{k-1}, a_k)$ için $g(z) = f_k(z)$ özelliğine sahiptir.

1.1.2.1. Kesirli Türev ve İntegraller

Tanım 1.13 $g_1(x) \in C[0, \infty)$ olduğunda $g(x) = x^p g_1(x)$ olacak şekilde $p > \alpha$ koşulunu sağlayan bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı varsa C_{α} uzayında $x > 0$ için $g(x)$ fonksiyonu bir gerçek fonksiyondur denir.

Tanım 1.14 $m \in N \cup \{0\}$ için $g^m \in C_{\alpha}$ ise $x > 0$ için $g(x)$ fonksiyonu C_{α}^m uzayındadır.

1.1.2.2. Riemann-Liouville ve Caputo Türevleri

Tanım 1.15 $g(x, t)$ fonksiyonu her $(x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ sonlu aralığında sürekli ve $Re(\nu) > 0$, $Re(\mu) > 0$ olmak üzere μ . ve ν . mertebeden Riemann-Liouville (R-L) kesirli integralleri sırasıyla,

$${}_t I^\mu g(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t (t - \lambda)^{\mu-1} g(x, \lambda) d\lambda, \quad (1.24)$$

$${}_x I^\nu g(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x - \theta)^{\nu-1} g(\theta, t) d\theta, \quad (1.25)$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999).

Tanım 1.16 $(x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ aralığında sürekli ve integrallenebilir bir $g(x, t)$ fonksiyonu için, $n - 1 \leq \mu < n$, $m - 1 \leq \nu < m$, $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere x 'e göre μ . ve t 'ye göre ν . mertebeden Riemann kesirli türevleri sırasıyla,

$${}_R D_t^\mu g(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \mu)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t (t - \lambda)^{n-\mu-1} g(x, \lambda) d\lambda, \quad (1.26)$$

$${}_R D_x^\nu g(x, t) = \frac{1}{\Gamma(m - \nu)} \left(\frac{d}{dx} \right)^m \int_0^x (x - \theta)^{m-\nu-1} g(\theta, t) d\theta. \quad (1.27)$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999).

Aşağıdakiler, kısmi kesirli integrallerin ve R-L türevlerinin bazı temel özellikleridir;

1. ${}_x I^\mu (x^p) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\mu+p+1)} x^{\mu+p},$
2. ${}_x I^\mu (c) = \frac{c}{\Gamma(\mu+1)} x^\mu {}_x I^\mu (c) = \frac{c}{\Gamma(\mu+1)} x^\mu,$
3. ${}_R D_x^p {}_x I^\mu (f(x)) = {}_R D_x^{p-\mu} (f(x)), p \geq \mu \geq 0,$
4. ${}_x I^\mu {}_R D_x^p (f(x)) = {}_R D_x^{p-\mu} (f(x)) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{{}_R D_x^{p-\mu} (f(x))|_{x=0} x^{\mu-j-1}}{\Gamma(\mu-m)},$
 $m-1 < \mu < m,$
5. ${}_R D_x^p {}_R D_x^\mu (f(x)) = {}_R D_x^{p+\mu} (f(x)) = {}_R D_x^\mu {}_R D_x^p (f(x)) \Leftrightarrow f^{(r)}(x) = 0,$
 $r = 0, 1, \dots, \max\{n, m\}, m-1 < \mu < m, n-1 < p < n,$
6. ${}_R D_x^p (x^\mu) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-p+1)} x^{\mu-p},$
7. ${}_R D_x^p (c) = \frac{c}{\Gamma(-p+1)} x^{-p}.$

Tanım 1.17 $n - 1 \leq \mu < n$, $m - 1 \leq \nu < m$, $n, m \in \mathbb{N}$, $g(x, t) \in C^m[0, \infty) \times [0, \infty)$ olmak üzere, g fonksiyonunun x 'e göre μ . ve t 'ye göre ν . mertebeden Caputo kesirli türevleri sırasıyla,

$$D_t^\mu g(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \mu)} \int_0^t (t - \lambda)^{n - \mu - 1} g^{(n)}(x, \lambda) d\lambda, \quad (1.28)$$

$$D_x^\nu g(x, t) = \frac{1}{\Gamma(m - \nu)} \int_0^x (x - \theta)^{m - \nu - 1} g^{(m)}(\theta, t) d\theta, \quad (1.29)$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999).

Aşağıdakiler, kısmi kesirli integrallerin ve Caputo türevlerinin bazı temel özellikleridir;

1. ${}_t I^\mu {}_t I^\nu g(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \int_0^t (t - \lambda)^{\mu - 1} (x - \theta)^{\nu - 1} g(\theta, \lambda) d\lambda d\theta,$
2. $D_t^\mu D_x^\nu g(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \mu)\Gamma(m - \nu)} \int_0^t (t - \lambda)^{n - \mu - 1} (x - \theta)^{m - \nu - 1} g^{(n+m)}(\theta, \lambda) d\lambda d\theta,$
3. ${}_t I^\mu D_t^\mu g(x, t) = g(x, t) - \sum_{i=0}^m \frac{g^{(i)}(x, 0)}{i!} t^i,$
4. $D_t^\mu {}_t I^\mu g(x, t) = g(x, t),$
5. $I_t^\alpha t^{\gamma - 1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + \alpha)} (t)^{\gamma + \alpha - 1}, \quad \alpha > 0, \quad \gamma > 0, \quad t > 0,$
6. $D_t^\alpha t^{\beta - 1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (t)^{\beta - \alpha - 1}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad t > 0.$

1.1.3. Uyumlu Kesirli Türevler

Riemann-Liouville (R-L) ve Caputo en yaygın kullanılan kesirli türev tanımlarıdır ve literatürde bu kesirli türev tanımlarının kullanıldığı birçok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalar sonucunda, yaygın olarak kullanılan bu iki Kesirli türev tanımının sahip oldukları bazı eksiklikler belirlenmiştir. Bu eksikliklerin bazıları aşağıda verilmiştir (Khalil et al., 2014; Atangana, 2015).

1. R-L'de bir sabitin türevi sıfıra eşit değildir.
2. R-L'de başlangıç koşulları R-L anlamında verilmelidir.
3. Caputo türevinin türevlenebilir olması için fonksiyonun klasik anlamda türevlenebilir olması gerekmektedir.
4. Hem R-L hem de Caputo türev tanımlarında zincir kuralı sağlanmamaktadır.

5. Tüm kesirli türevler genel olarak $D^b D^a = D^{b+a}$ eşitliğini karşılamamaktadır.
6. Hem R-L hem de Caputo kesirli türevlerinde, tam sayı sırasına göre türevler, klasik anlamdaki türevler ile çakışmamaktadır.

Bu önemli özelliklerin eksik olması, gerçek dünya problemleri ve mühendislikteki uygulamalarda bazı problemlere yol açmaktadır. Bu eksiklikleri ortadan kaldırmak için Khalil ve ark. (2014) (Khalil et al., 2014)'te, fonksiyonun türevini bilinen limit tanımı ile genişletmiştir ve türevlerin temel klasik özelliklerini karşılayan uyumlu kesirli türevi önermişlerdir. Bu bölümde, uyumlu kesirli türev ve uyumlu kesirli integral hakkında bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 1.18 $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ρ . mertebeden uyumlu kesirli turevi

$$\frac{d^\rho \phi(x)}{dx^\rho} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \varepsilon x^{1-\rho}) - \varphi(x)}{\varepsilon}, \quad x > 0, \quad 0 < \rho \leq 1,$$

şeklinde tanımlanır (Abdeljawad, 2015).

Teorem 1.1 (Atangana et al., 2015) $\rho \in (0, 1]$ olmak üzere, $f = f(x)$ ve $h = h(x)$ fonksiyonları bir $x > 0$ noktasında ρ -mertebeden diferensiyellenebilir ve $t > 0$ olsun. Bu durumda,

- i) $\frac{d^\rho}{dx^\rho} (mf(x) + kh(x)) = m \frac{d^\rho}{dx^\rho} f + k \frac{d^\rho}{dx^\rho} h, \quad \forall m, k \in \mathbb{R},$
- ii) $\frac{d^\rho f(x)}{dx^\rho} = x^{1-\rho} \frac{d}{d}(f(x)), \quad f \text{ diferansiyellenebilir},$
- iii) $\frac{d^\rho x^k}{dx^\rho} = \rho x^{k-\rho}, \quad k \in \mathbb{R},$
- iv) $\frac{d^\rho}{dx^\rho} (f(x)h(x)) = h \frac{d^\rho}{dx^\rho} f + f \frac{d^\rho}{dx^\rho} h,$
- v) $\frac{d^\rho}{dx^\rho} \left(\frac{f(x)}{h(x)} \right) = \frac{h \frac{d^\rho}{dx^\rho} f - f \frac{d^\rho}{dx^\rho} h}{h^2}.$

Not: Foksiyon bir noktada ρ -türevlenebilir olabilir ancak türevlenemez. Örneğin, $f(x) = 2\sqrt{x}$ olsun. Ancak, $\frac{d^{0.5} f(0^+)}{dx^{0.5}} = 1$, her $x > 0$ için elde edilebilir ancak $\frac{df(0)}{dx}$ elde edilemez.

Tanım 1.19 $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$ m değişkenleri bir fonksiyon ve $\rho \in (0, 1]$ olmak üzere, φ 'nin u_j 'ye göre uyumlu kesirli kısmi turevi

$$\frac{d^\rho}{dx^\rho} \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\varphi(u_1, u_2, \dots, u_j^{1-\rho} + \theta u_2, \dots, u_n) - \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\theta},$$

şeklinde tanımlanır (Atangana et al., 2015).

Örnek 1.1 Belirli fonksiyonların uyumlu kesirli türevi

$\forall a, b, c, d, r, s, \lambda, \omega \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}\frac{d^\rho}{dx^\rho} \left(\left(\frac{(x-a)^\rho}{\rho} \right) \left(\frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} \right) \right) &= \left(\frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} \right), \\ \frac{d^\beta}{d\tau^\beta} \left(\left(\frac{(x-a)^\rho}{\rho} \right) \left(\frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} \right) \right) &= \left(\frac{(x-a)^\rho}{\rho} \right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^\rho}{dx^\rho} \left(\left(\frac{(x-a)^\rho}{\rho} \right)^r \left(\frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} \right)^s \right) &= r \left(\frac{(x-a)^\rho}{\rho} \right)^{r-\rho} \left(\frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} \right), \\ \frac{d^\beta}{d\tau^\beta} \left(\left(\frac{(x-a)^\rho}{\rho} \right)^r \left(\frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} \right)^s \right) &= s \left(\frac{(x-a)^\rho}{\rho} \right)^r \left(\frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} \right)^{s-\beta}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^\rho}{dx^\rho} \left(e^{c \left(\frac{(x-a)^\rho}{\rho} \right) + d \left(\frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} \right)} \right) &= c e^{c \left(\frac{(x-a)^\rho}{\rho} \right) + d \left(\frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} \right)}, \\ \frac{d^\beta}{d\tau^\beta} \left(e^{c \left(\frac{(x-a)^\rho}{\rho} \right) + d \left(\frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} \right)} \right) &= d e^{c \left(\frac{(x-a)^\rho}{\rho} \right) + d \left(\frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} \right)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^\rho}{dx^\rho} \left(\sin \left(c \frac{(x-a)^\rho}{\rho} + d \right) \sin \left(\lambda \frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} + \omega \right) \right) &= c \cos \left(c \frac{(x-a)^\rho}{\rho} + d \right) \sin \left(\lambda \frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} + \omega \right), \\ \frac{d^\beta}{d\tau^\beta} \left(\sin \left(c \frac{(x-a)^\rho}{\rho} + d \right) \sin \left(\lambda \frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} + \omega \right) \right) &= \lambda \sin \left(c \frac{(x-a)^\rho}{\rho} + d \right) \cos \left(\lambda \frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} + \omega \right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^\rho}{dx^\rho} \left(\cos \left(c \frac{(x-a)^\rho}{\rho} + d \right) \cos \left(\lambda \frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} + \omega \right) \right) &= -c \sin \left(c \frac{(x-a)^\rho}{\rho} + d \right) \sin \left(\lambda \frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} + \omega \right), \\ \frac{d^\beta}{d\tau^\beta} \left(\cos \left(c \frac{(x-a)^\rho}{\rho} + d \right) \cos \left(\lambda \frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} + \omega \right) \right) &= -\lambda \cos \left(c \frac{(x-a)^\rho}{\rho} + d \right) \sin \left(\lambda \frac{(\tau-b)^\beta}{\beta} + \omega \right).\end{aligned}$$

Tanım 1.20 $\frac{\partial^s \varphi}{\partial x^s}$, $s = 1, 2, \dots, m-1$, olsun. O halde ν . mertebeli $\varphi(x, \tau) : I \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun CFD'i

$$\frac{\partial^\nu \varphi(x, \tau)}{\partial x^\nu} = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\varphi_x^{(m-1)}(x + \vartheta x^{m-\nu}, \tau) - \varphi_x^{(m-1)}(x, \tau)}{\vartheta}, \quad \nu \in (m-1, m], \quad x, \tau \geq 0,$$

şeklinde tanımlanır (Khalil et al., 2014).

Tanım 1.21 $\frac{\partial^s \varphi}{\partial x^s}$, $s = 1, 2, \dots, m-1$, olsun. O halde β . mertebeli $\varphi(x, \tau) : I \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun uyumlu kesirli türevi (CFD)

$$\frac{\partial^\beta \varphi(x, \tau)}{\partial \tau^\beta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_\tau^{(m-1)}(x, \tau + \varepsilon \tau^{m-\beta}) - \varphi_\tau^{(m-1)}(x, \tau)}{\varepsilon}, \quad \beta \in (m-1, m], \quad x, \tau \geq 0,$$

şeklinde tanımlanır (Khalil et al., 2014).

Tanım 1.22 $\nu \in (m-1, m]$ ve $x > 0$ olmak üzere, φ fonksiyonu $x > 0$ noktasında m -mertebeden diferensiyellenebilir ise,

$$\frac{\partial^\nu \varphi(x, \tau)}{\partial x^\nu} = x^{m-\nu} \frac{\partial^m \varphi(x, \tau)}{\partial x^m},$$

dir (Khalil et al., 2014).

Teorem 1.2 $f = f(t)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında tanımlı olmak üzere, f differansiyellenebilir ve α -uyumlu türevli bir fonksiyondur. O halde, $h = h(t)$ f aralığında tanımlı ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, zincir kuralı

$$D_t^\alpha (f \circ h)(t) = t^{1-\alpha} h(t)^{1-\alpha} h'(t) D_t^\alpha (f(t))_{t=h(t)}, \quad (1.30)$$

şeklinde tanımlanır (Atangana et al., 2015).

1.1.4. Uyumlu Kesirli İntegraller

Tanım 1.23 $f(x)$ sürekli bir fonksiyon olsun. f 'nin uyumlu kesirli integrali

$$J_\rho^c (f(x)) = I_\rho^1 (x^{\rho-1} f(x)) = \int_a^x u^{\rho-1} f(u) du, \quad c > 0, \quad \rho \in (0, 1), \quad (1.31)$$

olarak tanımlanır (Khalil et al., 2014).

Örnek 1.2

$$\begin{aligned} J_{0.5}^0 (\sqrt{x} \sin x) &= \int_0^x \sin u du = 1 - \cos x, \\ J_{0.5}^0 (\sqrt{x} \cos x) &= \int_0^x \cos u du = \cos x, \\ J_{0.5}^0 (\cos 2\sqrt{x}) &= \int_0^x \frac{\cos(2\sqrt{u})}{\sqrt{u}} du = \sin(2\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Teorem 1.3 $f(x)$, J_ρ tanım bölgesi herhangi bir sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\frac{d^\rho (J_\rho^c (f(x)))}{dx^\rho} = f(x), \quad t \geq c,$$

dir (Khalil et al., 2014).

Teorem 1.4 $[c, d]$ 'da $f(x)$ fonksiyonu diferensiyellenebilir ve $\rho \in (0, 1]$ olsun. O halde,

$$J_\rho^c \left(\frac{d^\rho}{dx^\rho} f(x) \right) = f(x) - f(c), \quad t \geq c,$$

dir (Abdeljawad, 2015).

Tanım 1.24 $\rho \in (m, m + 1]$, $m \geq 1$ için, $f(x)$ sürekli fonksiyonunun uyumlu kesirli integrali,

$$J_\rho^c(f(x)) = I_\rho^{m+1}((x-c)^{\rho-m-1} f(x)) = \frac{1}{m!} \int_a^x (x-u)^m (u-c)^{\rho-m-1} f(u) du \quad (1.32)$$

dir (Abdeljawad, 2015).

Teorem 1.5 $\rho \in (m, m + 1]$, $m \geq 1$ olmak üzere ve $f : (0, \infty] \rightarrow R$ fonksiyonu $(m + 1)$. mertebeden diferensiyellenebilir olsun. O halde,

$$J_\rho^c \left(\frac{d^\rho}{dx^\rho} f(x) \right) = f(x) - \sum_{j=0}^m \frac{f^j(c) (x-c)^j}{j!}, \quad x > c,$$

dir (Abdeljawad, 2015).

1.2. Adomian Ayrıştırma Yöntemi

George Adomian, Adomian ayrıştırma yöntemini ilk olarak 1980'de önermiştir. Uygulamalı alanlarda ve mühendislikte kullanılan birçok doğrusal olmayan problemi (Hosseini and Nasabzadeh, 2006; Evans and Raslan, 2005; Wazwaz, 2007; Babolian and Biazar, 2002) çözmek için kullanılmıştır. Bu yöntemin temel düşüncesi, diferansiyel denklemleri sonsuz bir seri cinsinden ifade ederek çözmektir. Ayrıca, bu yöntemde doğrusal ve doğrusal olmayan terimler ele alınan problemi çözerken ayrılmaktadır. Doğrusal olmayan kısımlar, Adomian polinomları cinsinden ifade edilebilmektedir. İlk yaklaşım çözümü, başlangıç koşulundan ve bağımsız değişkenlerin terimlerinden elde edilebilmektedir ve tekrarlama ilişkisi sayesinde serinin diğer çözümlerine ulaşılmaktadır.

Lineer olmayan $N(u)$ terminin Adomian polinomu,

$$A_m = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} \left[N \left(\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m u_m \right) \right]_{\lambda=0}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

ile ifade edilmektedir. Bu tanımdan yola çıkarak, ilk terimleri aşağıdaki gibi elde edilmektedir,

$$A_0 = N(u_0),$$

$$A_1 = u_1 N'(u_0),$$

$$A_2 = u_2 N'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 N''(u_0)$$

$$A_3 = u_3 N'(u_0) + u_1 u_2 N''(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} N'''(u_0)$$

$$\vdots$$


2. SHEHU VE ABOODH DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde tek katlı Shehu dönüşümü (HT), iki katlı Shehu dönüşümüne (DHT) genelleştirilmiştir. Ayrıca, iki katlı Shehu dönüşümü ile ilgili bazı temel özelliklere ve teoremlere yer verilmiştir. Önerilen dönüşümün etkinliği, doğruluğu ve uygulanabilirliğini göstermek için bu yeni dönüşüm, bazı integral denklemlerine, tam sayı mertebeli ve kesirli mertebeli türeve sahip kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmıştır.

2.1. Tek Katlı Shehu Dönüşümü

Bu bölümde, tek katlı Shehu dönüşümü hakkında bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1 Üstel mertebeli $g(x)$ fonksiyonunun Shehu dönüşümü,

$$\Xi = \left\{ g(x) : \exists K, \lambda_1, \lambda_2 > 0, |g(x)| < K \exp\left(\frac{|x|}{\lambda_j^2}\right), j = 1, 2 \text{ ve } x \in \mathbb{R}_+ \right\}, \quad (2.1)$$

fonksiyonlar kümesi üzerinde

$$G(p, u) = H(g(x) : p, u) = \int_0^\infty e^{-\frac{px}{u}} g(x) dx, \quad p \in, \quad u > 0, \quad (2.2)$$

integrali ile tanımlanır (Maitama and Zhao, 2019).

Tanım 2.2 Reel değerli bir $g(x, t)$ fonksiyonunun tek katlı Shehu dönüşümü (HT), sırasıyla x ve t değişkenlerine göre,

$$H_x(g(x, t) : p, u) = \int_0^\infty e^{-\frac{px}{u}} g(x, t) dx, \quad (2.3)$$

$$H_t(g(x, t) : q, v) = \int_0^\infty e^{-\frac{qt}{v}} g(x, t) dt, \quad (2.4)$$

formları ile tanımlanır (Alfaqeh and Misirli, 2020).

Tanım 2.3 $g(t) = H^{-1}[H(g(t))]$ 'nin ters Shehu dönüşümü

$$g(t) = H^{-1}[H(g(t))] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{1}{u} e^{\left(\frac{px}{u}\right)} G(p, u) dp, \quad (2.5)$$

kompleks integral formülü ile tanımlanır (Maitama and Zhao, 2019).

Teorem 2.1 Eğer $g(t)$ fonksiyonunun n . türevi $g^{(n)}(t)$ ise, o halde Shehu dönüşümü,

$$H \left(\frac{\partial^n g}{\partial t^n} \right) = \left(\frac{p}{u} \right)^n G(p, u) - \left(\frac{p}{u} \right)^{n-1} H(g(0)) - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{p}{u} \right)^{n-1-j} \left(\frac{\partial^j}{\partial t^j} g(0) \right), \quad (2.6)$$

ile tanımlanır (Maitama and Zhao, 2019).

Lemma 2.1 $\mu > 0$ ve $g(x, t)$ üstel mertebeli olsun. O halde, ${}_t I^\mu g(x, t)$ 'nin tek katlı Shehu dönüşümü,

$$H_t({}_t I^\mu g(x, t)) = \left(\frac{q}{v} \right)^{-\mu} H_t(g(x, t)), \quad (2.7)$$

ile verilir (Belgacem et al., 2019)

Lemma 2.2 $\mu > 0$, $m - 1 < \mu < m$, ($m \in \mathbb{N}$) olsun, öyle ki $g \in C^n(0, \infty)$ ve üstel mertebelidir. O halde, Caputo kesirli türev $D_t^\mu g(x, t)$ 'nin, tek katlı Shehu dönüşümü,

$$H_t(D_t^\mu g(x, t)) = \left(\frac{q}{v} \right)^\mu H_t(g(x, t)) - \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{q}{v} \right)^{\mu-1-j} \left(\frac{\partial^j}{\partial t^j} g(x, 0) \right), \quad (2.8)$$

ile verilmiştir (Belgacem et al., 2019).

Teorem 2.2 $x^{\beta-1} E_{\nu, \beta}(cx^\nu)$ 'in tek Shehu dönüşümü,

$$H_x(x^{\beta-1} E_{\nu, \beta}(cx^\nu)) = \frac{\left(\frac{p}{u} \right)^{\nu-\beta}}{\left(\frac{p}{u} \right)^\nu - c}, \quad |c| < \left| \left(\frac{p}{u} \right)^\nu \right|, \quad (2.9)$$

formunda verilmiştir (Belgacem et al., 2019).

Ayrıca, (Aggarwal et al., 2019; Aggarwal and GP, 2019; Bokhari, 2019; Qureshi and Kumar, 2019) 2019 'ın çalışmalarında Shehu dönüşümü ve özellikleri ayrıntılı olarak yer almaktadır.

2.2. İki Katlı Shehu Dönüşümleri

Bu bölümde, DHT tanımına ve DHT'nin tersinin tanımlarına yer verilmiştir.

Tanım 2.4 $g(x, t)$ fonksiyonunun DHT değeri, integralin varlığını sağlayan

$$\Omega = \left\{ g(x, t) : \exists K, \lambda_1, \lambda_2 > 0, |g(x, t)| < K \exp \left(\frac{|x+t|}{\lambda_j^2} \right), j = 1, 2 \text{ ve } (x, t) \in \mathbb{R}_+^2 \right\}, \quad (2.10)$$

fonksiyon kümesi üzerinde,

$$H_{xt}^2(g(x, t)) = G[(p, q), (u, v)] = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} g(x, t) dx dt, \quad (2.11)$$

iki katlı integrali ile tanımlanır (Alfaqeh and Misirli, 2020).

Tanım 2.5 $g(x, t) = H_{xt}^{-2}[H_{xt}^2(g(x, t))]$ 'nin iki katlı Shehu Dönüşümünün tersi

$$g(x, t) = H_{xt}^{-2}[H_{xt}^2(g(x, t))] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{1}{u} e^{\left(\frac{px}{u}\right)} dp \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{v} e^{\left(\frac{qt}{v}\right)} H_{xt}^2(g(x, t)) dq, \quad (2.12)$$

kompleks iki katlı integral formülü ile tanımlanır (Alfaqeh and Misirli, 2020).

2.2.1. İki Katlı Shehu Dönüşümlerinin Varlığı ve Tekliği

Teorem 2.3 $g(x, t)$, sonlu $(0, X)$ ve $(0, T)$ aralıkları üzerinde sürekli ve üstel mertebeli bir fonksiyon olsun. Bazı $a, b \in \mathbb{R}$ değerleri için

$$\sup_{x, t > 0} \frac{|g(x, t)|}{e^{(ax+bt)}} < \infty,$$

olduğuna göre $g(x, t)$ fonksiyonunun DHT değeri vardır (Alfaqeh and Misirli, 2020).

İspat DHT'nin tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned} |H_{xt}^2(g(x, t))| &= \left| \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} g(x, t) dx dt \right| \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} |g(x, t)| dx dt \\ &\leq K \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} - ax\right) - \left(\frac{qt}{v} - bt\right)} dx dt \\ &= K \int_0^\infty e^{-\left(\frac{p}{u} - a\right)x} dx \int_0^\infty e^{-\left(\frac{q}{v} - b\right)t} dt \\ &= \frac{Kuv}{(p - au)(q - bv)}, \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.4 $h(x, t)$ ve $l(x, t)$ sürekli fonksiyonlardır ve iki katlı Shehu dönüşümleri sırası ile $H_{xt}^2(h(x, t))$ ve $H_{xt}^2(l(x, t))$ şeklinde olsun. Eğer $H_{xt}^2(h(x, t)) = H_{xt}^2(l(x, t))$ ise o halde $h(x, t) = l(x, t)$ 'dir (Alfaqeh and Misirli, 2020).

İspat α ve γ 'nın yeterince büyük olduğunu kabul edelim, o halde

$$g(x, t) = H_{xt}^{-2} [H_{xt}^2 (g(x, t))] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{1}{u} e^{\left(\frac{px}{u}\right)} dp \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{v} e^{\left(\frac{qt}{v}\right)} H_{xt}^2 (g(x, t)) dq,$$

olarak yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} h(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{1}{u} e^{\left(\frac{px}{u}\right)} dp \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{v} e^{\left(\frac{qt}{v}\right)} H_{xt}^2 (h(x, t)) dq \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{1}{u} e^{\left(\frac{px}{u}\right)} dp \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{v} e^{\left(\frac{qt}{v}\right)} H_{xt}^2 (l(x, t)) dq \\ &= l(x, t), \end{aligned}$$

elde edilir ve teorem ispatı tamamlanmış olur.

2.2.2. Bazı Fonksiyonların İki Katlı Shehu Dönüşümü

1. Eğer $g(x, t) = 1$ ise, o halde,

$$H_{xt}^2 (g(x, t)) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} dx dt = \frac{uv}{pq}.$$

2. Eğer $g(x, t) = e^{(ax+bt)}$ ise, o halde,

$$\begin{aligned} H_{xt}^2 (g(x, t)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} e^{(ax+bt)} dx dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{(p-au)x}{u} + \frac{(q-bv)t}{v}\right)} dx dt \\ &= \frac{uv}{(p-au)(q-bv)}. \end{aligned}$$

3. Eğer $g(x, t) = e^{i(ax+bt)}$ ise, o halde,

$$\begin{aligned} H_{xt}^2 (g(x, t)) &= \frac{uv}{(p-ai)(q-bi)} \\ &= \frac{uv(pq+abuv) + (bpv+aqv)uvi}{(p^2+a^2u^2)(q^2+b^2v^2)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} H_{xt}^2 (\cos(ax+bt)) &= \frac{uv(pq+abuv)}{(p^2+a^2u^2)}, \\ H_{xt}^2 (\sin(ax+bt)) &= \frac{uv(bpv+aqv)}{(q^2+b^2v^2)}. \end{aligned}$$

yazılabilir.

4. Eğer $g(x, t) = \cosh(ax + bt)$ ise, o halde,

$$\begin{aligned} H_{xt}^2(g(x, t)) &= \frac{1}{2} [H_{xt}^2(e^{(ax+bt)}) + H_{xt}^2(e^{-(ax+bt)})] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{uv}{(p-au)(q-bv)} + \frac{uv}{(p+au)(q+bv)} \right]. \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$H_{xt}^2(\sinh(ax + bt)) = \frac{1}{2} \left[\frac{uv}{(p-au)(q-bv)} - \frac{uv}{(p+au)(q+bv)} \right].$$

5. Eğer $g(x, t) = x^n t^m$, $n, m = 0, 1, 2, \dots$ ise, o halde,

$$\begin{aligned} H_{xt}^2(g(x, t)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} x^n t^m dx dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u}\right)} x^n dx \int_0^\infty e^{-\left(\frac{qt}{v}\right)} t^m dt, \\ &= n!m! \left(\frac{u}{p}\right)^{n+1} \left(\frac{v}{q}\right)^{m+1}. \end{aligned}$$

6. Eğer $g(x, t) = x^\alpha t^\gamma$, $\alpha \geq -1, \gamma \geq -1$ ise, o halde,

$$\begin{aligned} H_{xt}^2(g(x, t)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} x^\alpha t^\gamma dx dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u}\right)} x^\alpha dx \int_0^\infty e^{-\left(\frac{qt}{v}\right)} t^\gamma dt, \end{aligned}$$

$y = \left(\frac{px}{u}\right)$ ve $z = \left(\frac{qt}{v}\right)$ olsun. Ayrıca, burada $\Gamma(\cdot)$ Euler gama fonksiyonu olmak üzere,

$$\begin{aligned} H_{xt}^2(g(x, t)) &= \left(\frac{u}{p}\right)^{\alpha+1} \int_0^\infty e^{-y} y^\alpha dy \left(\frac{v}{q}\right)^{\gamma+1} \int_0^\infty e^{-z} z^\gamma dz \\ &= \Gamma(\alpha + 1) \left(\frac{u}{p}\right)^{\alpha+1} \Gamma(\gamma + 1) \left(\frac{v}{q}\right)^{\gamma+1}, \end{aligned}$$

elde edilir.

2.2.3. İki Katlı Shehu Dönüşümünün Özellikleri

1. **(Lineerlik)** $H_{xt}^2(\cdot)$ iki katlı Shehu dönüşümü bir lineer operatördür, yani

$$H_{xt}^2[(ag + bh)(x, t)] = aH_{xt}^2[g(x, t)] + bH_{xt}^2[h(x, t)],$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned}
H_{xt}^2 [(ag + bh)(x, t)] &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} (ag + bh) dx dt \\
&= a \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} g(x, t) dx dt \\
&\quad + b \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} h(x, t) dx dt \\
&= aH_{xt}^2 [g(x, t)] + bH_{xt}^2 [h(x, t)].
\end{aligned}$$

2. Skaler özelliğinin değişimi

Eğer $H_{xt}^2 (g(x, t)) = G((p, q), (u, v))$ ise, $H_{xt}^2 (g(ax, bt)) = \frac{1}{ab} G\left(\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}\right), (u, v)\right)$ dir.

İspat DHT'nin tanımı kullanılarak,

$$H_{xt}^2 (g(ax, bt)) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} g(ax, bt) dx dt, \quad (2.14)$$

bulunur. (2.14) denkleminde $y = ax$ ve $z = bt$ yazılarak

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{ab} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{py}{ua} + \frac{qz}{vb}\right)} g(y, z) dy dz \\
&= \frac{1}{ab} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{(\frac{p}{a})y}{u} + \frac{(\frac{q}{b})z}{v}\right)} g(y, z) dy dz \\
&= \frac{1}{ab} G\left(\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}\right), (u, v)\right),
\end{aligned}$$

elde edilir.

3. Öteleme özelliği

Eğer $H_{xt}^2 (g(x, t)) = G((p, q), (u, v))$ ise,

$$H_{xt}^2 (e^{-(ax+bt)} g(x, t)) = G((p + au, q + bv), (u, v)),$$

dir.

İspat DHT'nin tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
H_{xt}^2 (e^{-(ax+bt)} g(x, t)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} e^{-(ax+bt)} g(x, t) dx dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{(p+au)x}{u} + \frac{(q+bv)t}{v}\right)} g(x, t) dx dt \\
&= G((p + au, q + bv), (u, v)),
\end{aligned}$$

bulunur.

4. **Teorem 2.5** $H(x, t)$,

$$H(x - a, t - b) = \begin{cases} 1 & x > a, t > b \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ile tanımlı Heaviside birim fonksiyonu olmak üzere; eğer $H_{xt}^2(g(x, t)) = G((p, q), (u, v))$ ise,

$$H_{xt}^2[g(x - a, t - b) H(x - a, t - b)] = e^{-a\frac{p}{u} - b\frac{q}{v}} G((p, q), (u, v)),$$

dir.

İspat DHT'nin tanımından

$$\begin{aligned} & [g(x - a, t - b) H(x - a, t - b)] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} g(x - a, t - b) H(x - a, t - b) dx dt \\ &= \int_a^\infty \int_b^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} g(x - a, t - b) dx dt \end{aligned}$$

dir. $x - a = y$ ve $t - b = z$ yazılarak,

$$\begin{aligned} &= \int_a^\infty \int_b^\infty e^{-\left(\frac{p(y+a)}{u} + \frac{q(z+b)}{v}\right)} g(y, z) dy dz \\ &= e^{-\left(\frac{ap}{u} + \frac{bq}{v}\right)} \int_a^\infty \int_b^\infty e^{-\left(\frac{py}{u} + \frac{qz}{v}\right)} g(y, z) dy dz \\ &= e^{-\left(\frac{ap}{u} + \frac{bq}{v}\right)} H_{xt}^2(g(x, t)), \end{aligned}$$

elde edilir.

5. x 'e göre birinci ve ikinci kısmi türevlerin DHT'ı

$$\begin{aligned} H_{xt}^2\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) &= \left(\frac{p}{u}\right) G^2((p, q), (u, v)) - H_t(g(0, t)), \\ H_{xt}^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) &= \left(\frac{p}{u}\right)^2 G^2((p, q), (u, v)) - \left(\frac{p}{u}\right) H_t(g(0, t)) - H_t\left(\frac{\partial}{\partial x} g(0, t)\right), \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde t 'ye göre,

$$\begin{aligned} H_{xt}^2\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) &= \left(\frac{q}{v}\right) G((p, q), (u, v)) - H_x(g(x, 0)), \\ H_{xt}^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right) &= \left(\frac{q}{v}\right)^2 G((p, q), (u, v)) - \left(\frac{q}{v}\right) H_x(g(x, 0)) - H_x\left(\frac{\partial}{\partial t} g(x, 0)\right), \end{aligned}$$

dir. Ayrıca iki değişkenli fonksiyonun karma çift mertebeden kısmi türevleri için DHT'i

$$H_{xt}^2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial t} \right) = \left(\frac{pq}{uv} \right) G((p, q), (u, v)) - \left(\frac{q}{v} \right) H_t(g(0, t)) - \left(\frac{p}{u} \right) H_x(g(x, 0)) + g(0, 0),$$

ile verilir.

6. Teorem 2.6 $g(x, t)$ fonsiyonunun $n, m \in \mathbb{N}$ kez kısmi türevlerinin iki katlı Shehu dönüşümleri,

$$\begin{aligned} H_{xt}^2 \left(\frac{\partial^n g}{\partial x^n} \right) &= \left(\frac{p}{u} \right)^n G((p, q), (u, v)) - \left(\frac{p}{u} \right)^{n-1} H_t(g(0, t)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{p}{u} \right)^{n-1-j} H_t \left(\frac{\partial^j}{\partial x^j} g(0, t) \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} H_{xt}^2 \left(\frac{\partial^m g}{\partial t^m} \right) &= \left(\frac{q}{v} \right)^m G((p, q), (u, v)) - \left(\frac{q}{v} \right)^{m-1} H_x(g(x, 0)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{q}{v} \right)^{m-1-j} H_x \left(\frac{\partial^j}{\partial t^j} g(x, 0) \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

ile verilir.

İspat Tümevarım ispatı açıktır..

7. Teorem 2.7 $\frac{\partial^n g}{\partial x^n}, \frac{\partial^m g}{\partial t^m}$, nin iki katlı Shehu dönüşümü (2.15) denklemleri ile verilirse $n, m=1, 2, 3, \dots$ olmak üzere,

$$x^m \frac{\partial^n g(x, t)}{\partial x^n} \text{ ve } t^m \frac{\partial^m g(x, t)}{\partial t^m}$$

DHT'leri

$$H_{xt}^2 \left(x^n \frac{\partial^n g(x, t)}{\partial x^n} \right) = (-1)^n u^n \frac{\partial^n}{\partial p^n} (H_{xt}^2(g(x, t))), \quad (2.17)$$

$$H_{xt}^2 \left(t^m \frac{\partial^m g(x, t)}{\partial t^m} \right) = (-1)^m v^m \frac{\partial^m}{\partial q^m} (H_{xt}^2(g(x, t))), \quad (2.18)$$

ile verilir.

İspat DHT'nin tanımı kullanılarak,

$$H_{xt}^2(g(x, t)) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} g(x, t) dx dt, \quad (2.19)$$

elde edilir. (2.19) denkleminin her iki tarafının p 'ye göre n . kısmi türevi alınarak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^n}{\partial p^n} (H_{xt}^2(g(x, t))) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} \right] g(x, t) dx dt \\
&= (-1)^n \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{x}{u}\right)^n e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} g(x, t) dx dt \\
&= (-1)^n \frac{1}{u^n} \int_0^\infty \int_0^\infty x^n e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} g(x, t) dx dt \\
&= (-1)^n \frac{1}{u^n} (H_{xt}^2(x^n g(x, t))),
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade sadeleştirildiğinde,

$$(-1)^n u^n \frac{\partial^n}{\partial p^n} (H_{xt}^2(g(x, t))) = H_{xt}^2(x^n g(x, t)),$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.18) denklemi de ispatlanabilir.

8. Teorem 2.8 (İki katlı Shehu-İki katlı Laplace dualitesi) L_{xt}^2 $g(x, t)$ fonksiyonunun (DLT)'ü olmak üzere, bir $g(x, t)$ fonksiyonunun DHT'ü varsa,

$$H_{xt}^2(g(x, t)(p, q), (u, v)) = L_{xt}^2\left(g(x, t), \left(\frac{p}{u}, \frac{q}{v}\right)\right),$$

dir.

İspat Teoremin ispatı DHT'nin tanımından açıktır. Yani,

$$\begin{aligned}
H_{xt}^2(g(x, t)(p, q), (u, v)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{px}{u} + \frac{qt}{v}\right)} g(x, t) dx dt \\
&= L_{xt}^2\left(g(x, t), \left(\frac{p}{u}, \frac{q}{v}\right)\right).
\end{aligned}$$

9. Teorem 2.9 (İki katlı Shehu-İki katlı Sumudu dualitesi) S_{xt}^2 $g(x, t)$ fonksiyonunun (DST)'ü olmak üzere, bir $g(x, t)$ fonksiyonunun DHT'ü varsa,

$$H_{xt}^2(g(x, t)(p, q), (u, v)) = \frac{uv}{pq} S_{xt}^2\left(g(x, t), \left(\frac{u}{p}, \frac{v}{q}\right)\right),$$

dir.

İspat DHT formülünde $\phi = \frac{px}{u}$, $\varphi = \frac{qt}{v}$ alınarak,

$$\begin{aligned}
H_{xt}^2(g(x, t)(p, q), (u, v)) &= \frac{uv}{pq} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(y+z)} g\left(\frac{uy}{p}, \frac{vz}{q}\right) dy dz \\
&= \frac{uv}{pq} S_{xt}^2\left(g(x, t), \left(\frac{u}{p}, \frac{v}{q}\right)\right),
\end{aligned}$$

elde edilir.

10. **Teorem 2.10** $g(x, t)$ ve $h(x, t)$ sırasıyla $H_{xt}^2(g(x, t))$ ve $H_{xt}^2(h(x, t))$ iki katlı Shehu dönüşümlerine sahip üstel mertebeli fonksiyonlar olsun. $g(x, t)$ ve $h(x, t)$ 'nin

$$[g * h](x, t) = \int_0^x \int_0^t g(x - \kappa, t - \lambda) h(\kappa, \lambda) d\kappa d\lambda$$

konvolüsyonunun iki katlı Shehu dönüşümü

$$H_{xt}^2([g * h](x, t)) = H_{xt}^2(g(x, t)) H_{xt}^2(h(x, t)),$$

ile verilir.

İspat Teorem (2.9) kullanılarak,

$$\begin{aligned} H_{xt}^2([g * h](x, t)) &= \frac{uv}{pq} S_{xt}^2([g * h](x, t)) \\ &= \left(\frac{uv}{pq}\right)^2 S_{xt}^2(g(x, t)) S_{xt}^2(h(x, t)) \\ &= \left(\frac{uv}{pq}\right) S_{xt}^2(g(x, t)) \left(\frac{uv}{pq}\right) S_{xt}^2(h(x, t)) \\ &= H_{xt}^2(g(x, t)) H_{xt}^2(h(x, t)), \end{aligned}$$

elde edilir.

2.2.4. İki katlı Shehu Yönteminin İntegral ve Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Bu bölümde, DHT yönteminin uygulanabilirliğini göstermek için bazı uygulamalarına yer verilmiştir.

Örnek 2.1

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) + 1 - e^x - e^t - e^{x+t} = \int_0^x \int_0^t g(\kappa, \lambda) d\kappa d\lambda, \quad (2.20)$$

Volterra Integro kısmi denklemini

$$g(x, 0) = e^x, \quad g(0, t) = e^t, \quad (2.21)$$

başlangıç şartları ile ele alalım. (2.20) denkleminin her iki tarafına DHT uygulandığında,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p}{u}\right) G^2((p, q), (u, v)) - H_t(g(0, t)) + \left(\frac{q}{v}\right) G^2((p, q), (u, v)) - H_x(g(x, 0)) \\ & + \frac{uv}{pq} - \frac{uv}{(p-u)q} - \frac{uv}{(q-v)p} - \frac{uv}{(p-u)(q-v)} = H_{xt}^2([g * * 1](x, t)), \end{aligned} \quad (2.22)$$

elde edilir. (2.21) denkleminde ifade edilen başlangıç koşullarına HT uygulandığında,

$$H_x(g(x, 0)) = \frac{u}{(p-u)}, \quad H_t(g(0, t)) = \frac{v}{(q-v)}, \quad (2.23)$$

ulaşılır. (2.23) denkleminde ifade edilen değerler 2.23 denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p}{u}\right) G^2((p, q), (u, v)) - \frac{u}{(p-u)} + \left(\frac{q}{v}\right) G^2((p, q), (u, v)) - \frac{v}{(q-v)} \\ & + \frac{uv}{pq} - \frac{uv}{(p-u)q} - \frac{uv}{(q-v)p} - \frac{uv}{(p-u)(q-v)} = \left(\frac{uv}{pq}\right) G^2((p, q), (u, v)), \end{aligned} \quad (2.24)$$

ulaşılır. Bu ifade sadeleştirildiğinde,

$$G^2((p, q), (u, v)) = \frac{uv}{(p-u)(q-v)}, \quad (2.25)$$

formuna ulaşılır. (2.25) denkleminde ters DHT uygulandığında,

$$g(x, t) = H_{xt}^{-2} \left[\frac{uv}{(p-u)(q-v)} \right] = e^{x+t}, \quad (2.26)$$

ifadesi elde edilir. (2.20) denkleminde elde ettiğimiz çözümler, (Idrees et al., 2018)'de elde edilen çözümler ile benzerdir.

Örnek 2.2

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, t) + g(x, t) + \int_0^x \int_0^t e^{x-\kappa+t-\lambda} g(\kappa, \lambda) d\kappa d\lambda = xte^{x+t} + e^{x+t}, \quad (2.27)$$

kısmi çift integro-diferansiyel denklemini

$$g(x, 0) = e^x, \quad \frac{\partial}{\partial x} g(x, 0) = e^x, \quad g(0, t) = e^t, \quad \frac{\partial}{\partial t} g(0, t) = e^t, \quad (2.28)$$

başlangıç koşulları ile ele alalım. (2.27) denkleminin her iki tarafına DHT uygulandığında,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q}{v}\right)^2 G^2((p, q), (u, v)) - \left(\frac{q}{v}\right) H_x(g(x, 0)) - H_x\left(\frac{\partial}{\partial t} g(x, 0)\right) - \left(\frac{p}{u}\right)^2 G^2((p, q), (u, v)) \\ & - \left(\frac{p}{u}\right) H_t(g(0, t)) - H_t\left(\frac{\partial}{\partial x} g(0, t)\right) + G^2((p, q), (u, v)) + H_{xt}^2([e^{x+t} * * g](x, t)) \\ & = \frac{u^2 v^2}{(p-u)^2 (q-v)^2} + \frac{uv}{(p-u)(q-v)}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

elde edilir. (2.28) denkleminde ifade edilen başlangıç koşullarına HT uygulandığında,

$$\begin{aligned} H_x(g(x, 0)) &= \frac{u}{(p-u)}, H_x\left(\frac{\partial}{\partial x}g(x, 0)\right) = \frac{u}{(p-u)}, \\ H_t(g(0, t)) &= \frac{v}{(q-v)}, H_t\left(\frac{\partial}{\partial t}g(0, t)\right) = \frac{v}{(q-v)}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

ulaşılır. (2.30) denkleminde ifade edilen değerler (2.29) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{q}{v}\right)^2 - \left(\frac{p}{u}\right)^2 + 1 + \frac{uv}{(p-u)(q-v)} \right] G^2((p, q), (u, v)) &= \frac{qu}{(p-u)v} + \frac{u}{(p-u)} \\ &+ \frac{pv}{(q-v)u} + \frac{v}{(q-v)} + \frac{u^2v^2}{(p-u)^2(q-v)^2} + \frac{uv}{(p-u)(q-v)}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

elde edilir. Bu ifade sadeleştirildiğinde,

$$G^2((p, q), (u, v)) = \frac{uv}{(p-u)(q-v)}, \quad (2.32)$$

formuna ulaşılır. (2.31) denklemin ters DHT uygulandığında,

$$g(x, t) = H_{xt}^{-2} \left[\frac{uv}{(p-u)(q-v)} \right] = e^{x+t}, \quad (2.33)$$

ifadesi elde edilir. (2.27) denkleminde elde ettiğimiz çözümler, (Ahmed et al., 2020)'de elde edilen çözümler ile benzerdir.

Örnek 2.3 (Alfaqeh and Misirli, 2020)

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} g(x, t) + g(x, t) = \frac{-1}{4} x^2 t^2 + xt + 1 + \int_0^x \int_0^t g(\kappa, \lambda) d\kappa d\lambda, \quad (2.34)$$

kısmi integro-diferansiyel denklemini

$$g(x, 0) = 0, \quad g(0, t) = 0, \quad (2.35)$$

başlangıç koşulları ile ele alalım. (2.34) denkleminin her iki tarafına DHT uygulandığında,

$$\begin{aligned} \left(\frac{pq}{uv}\right) G((p, q), (u, v)) - \left(\frac{q}{v}\right) H_t(g(0, t)) - \left(\frac{p}{u}\right) H_x(g(x, 0)) + g(0, 0) + \\ G^2((p, q), (u, v)) = -\frac{u^3v^3}{p^3q^3} + \frac{u^2v^2}{p^2q^2} + \frac{uv}{pq} + H_{xt}^2([1 * *g](x, t)), \end{aligned} \quad (2.36)$$

elde edilir. (2.35) denkleminde ifade edilen başlangıç koşullarına HT uygulandığında,

$$H_t(g(0, t)) = 0, \quad H_x(g(x, 0)) = 0, \quad (2.37)$$

ulaşılır. (2.37) denkleminde ifade edilen değerler (2.36) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\left[\frac{pq}{uv} + 1 - \frac{uv}{pq} \right] G^2((p, q), (u, v)) = -\frac{u^3 v^3}{p^3 q^3} + \frac{u^2 v^2}{p^2 q^2} + \frac{uv}{pq}, \quad (2.38)$$

ulaşılır. Bu ifade sadeleştirildiğinde,

$$G^2((p, q), (u, v)) = \frac{u^2 v^2}{p^2 q^2}, \quad (2.39)$$

formuna ulaşılır. (2.39) denkleminde ters DHT uygulandığında,

$$g(x, t) = H_{xt}^{-2} \left[\frac{u^2 v^2}{p^2 q^2} \right] = xt, \quad (2.40)$$

elde edilir.

Örnek 2.4

$$\frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} - g + x^2 + t = 1, \quad (2.41)$$

kısmi diferansiyel telgraf denklemini

$$\begin{aligned} g(x, 0) &= x^2, \quad \frac{\partial}{\partial t} g(x, 0) = 1, \\ g(0, t) &= t, \quad \frac{\partial}{\partial x} g(0, t) = 0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

başlangıç koşulları ile ele alalım. (2.41) denkleminin her iki tarafına DHT uygulandığında,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{p}{u}\right)^2 G^2((p, q), (u, v)) - \left(\frac{p}{u}\right) H_t(g(0, t)) - H_t\left(\frac{\partial}{\partial x} g(0, t)\right) - \left(\frac{q}{v}\right)^2 G^2((p, q), (u, v)) \\ &+ \left(\frac{q}{v}\right) H_x(g(x, 0)) + H_x\left(\frac{\partial}{\partial t} g(x, 0)\right) - \left(\frac{q}{v}\right) G^2((p, q), (u, v)) + H_x(g(x, 0)) \\ &- G^2((p, q), (u, v)) + \frac{u^3 v}{p^3 q} + \frac{uv^2}{pq^2} = \frac{u}{p}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

elde edilir. (2.42) denkleminde ifade edilen başlangıç koşullarına HT uygulandığında,

$$H_x(g(x, 0)) = \frac{u^3}{p^3}, \quad H_x\left(\frac{\partial}{\partial t} g(x, 0)\right) = \frac{u}{p}, \quad H_t(g(0, t)) = \frac{v^2}{q^2}, \quad H_t\left(\frac{\partial}{\partial x} g(0, t)\right) = 0, \quad (2.44)$$

ulaşılır. (2.44) denkleminde ifade edilen değerler (2.43) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\left[\left(\frac{p}{u}\right)^2 - \left(\frac{q}{v}\right)^2 - \left(\frac{q}{v}\right) - 1 \right] G^2((p, q), (u, v)) = \frac{pv^2}{uq^2} - \frac{qu^3}{vp^3} - \frac{u}{p} - \frac{u^3}{p^3} - \frac{u^3 v}{p^3 q} - \frac{uv^2}{pq^2} + \frac{u}{p}, \quad (2.45)$$

ulaşılır. Bu ifade sadeleştirildiğinde,

$$G^2((p, q), (u, v)) = \frac{uv^2}{pq^2} + 2\frac{u^3 v^3}{p^3 q^3}, \quad (2.46)$$

olarak yazılabilir. (2.46) denklemin ters DHT uygulandığında ise,

$$g(x, t) = H_{xt}^{-2} \left[\frac{uv^2}{pq^2} + 2\frac{u^3 v^3}{p^3 q^3} \right] = t + x^2, \quad (2.47)$$

denklemi elde edilir. (2.41) denkleminde elde ettiğimiz çözümler, (Alawad et al., 2013)'de elde edilen çözümler ile benzerdir.

Örnek 2.5

$$\frac{\partial^4 g}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = t^2 + xt, \quad (2.48)$$

kısmi diferansiyel Euler -Bernoulli denklemini

$$\begin{aligned} g(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} g(x, 0) = \frac{1}{120} x^5, \\ g(0, t) &= \frac{1}{12} t^4, \quad \frac{\partial^i}{\partial x^i} g(0, t) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.49)$$

başlangıç koşulları ile ele alalım. (2.48) denkleminin her iki tarafına DHT uygulandığında,

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{u}\right)^4 G^2((p, q), (u, v)) - \left(\frac{p}{u}\right)^3 H_t(g(0, t)) - \left(\frac{p}{u}\right)^2 H_t\left(\frac{\partial}{\partial x} g(0, t)\right) H_t(g(0, t)) \\ - \left(\frac{p}{u}\right) H_t\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(0, t)\right) - H_t\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} g(0, t)\right) + \left(\frac{q}{v}\right)^2 G^2((p, q), (u, v)) \\ - \left(\frac{q}{v}\right) H_x(g(x, 0)) - H_x\left(\frac{\partial}{\partial t} g(x, 0)\right) = \frac{2uv^2}{pq^2} + \frac{uv}{pq}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

elde edilir. (2.49) denkleminde ifade edilen başlangıç koşullarına HT uygulandığında,

$$\begin{aligned} H_x(g(x, 0)) &= 0, \quad H_t\left(\frac{\partial}{\partial t} g(x, 0)\right) = \left(\frac{u}{p}\right)^6, \\ H_t(g(0, t)) &= \left(\frac{v}{q}\right)^5, \quad H_t\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} g(0, t)\right) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.51)$$

ulaşılır. (2.51) denkleminde ifade edilen değerler (2.50) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\left[\left(\frac{p}{u}\right)^4 + \left(\frac{q}{v}\right)^2\right] G^2((p, q), (u, v)) = \left(\frac{p}{u}\right)^3 \left(\frac{v}{q}\right)^5 + \left(\frac{u}{p}\right)^6 + \frac{2uv^2}{pq^2} + \frac{uv}{pq}, \quad (2.52)$$

ulaşılır. Bu ifade sadeleştirildiğinde,

$$G^2((p, q), (u, v)) = \left(\frac{2uv^4}{pq^4} + \frac{v^2 u^6}{q^2 p^6}\right), \quad (2.53)$$

olarak yazılabilir. (2.53) denkleminin ters CDLT uygulandığında,

$$g(x, t) = H_{xt}^{-2} \left[\frac{2uv^4}{pq^4} + \frac{v^2u^6}{q^2p^6} \right] = \frac{2t^4}{4!} + \frac{tx^5}{5!}, \quad (2.54)$$

elde edilir. (2.48) denkleminde elde ettiğimiz çözümler, (Dhunde and Waghmare, 2017)'de elde edilen çözümler ile benzerdir.

2.2.5. Kesirli Türev ve İntegral Operatörlerinin İki Katlı Shehu Dönüşümü

Bu bölümde, iki katlı Shehu dönüşümünün kesirli türev ve integral tanımları verilmiştir.

Teorem 2.11 $\mu > 0$ olmak üzere $g(x, t)$ fonksiyonu parçalı sürekli ve üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. Bu durumda, ${}_tI^\mu g(x, t)$ kesirli integralinin t 'ye göre iki katlı Shehu dönüşümü

$$H_x H_t ({}_tI^\mu g(x, t)) = \left(\frac{q}{v}\right)^{-\mu} H_x H_t (g(x, t)), \quad (2.55)$$

şeklinde tanımlanır.

İspat t 'ye göre konvolüsyonu iki katlı Shehu dönüşümü kullanılarak,

$$\begin{aligned} H_x H_t ({}_tI^\mu g(x, t)) &= H_x H_t \left(\frac{1}{\Gamma(\mu)} t^{\mu-1} * g(x, t) \right) \\ &= H_x \left(\frac{1}{\Gamma(\mu)} H_t (t^{\mu-1}) H_t (g(x, t)) \right) \\ &= \left(\frac{q}{v}\right)^{-\mu} H_x H_t (g(x, t)), \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Teorem 2.12 $\nu > 0$ olmak üzere $g(x, t)$ fonksiyonu parçalı sürekli ve üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. Bu durumda, ${}_xI^\nu g(x, t)$ kesirli integralinin t 'ye göre iki katlı Shehu dönüşümü

$$H_x H_t ({}_xI^\nu g(x, t)) = \left(\frac{p}{u}\right)^{-\nu} H_x H_t (g(x, t)), \quad (2.56)$$

şeklinde tanımlanır.

İspat x 'e göre konvolüsyon, iki katlı Shehu dönüşümü kullanılarak,

$$\begin{aligned} H_x H_t ({}_xI^\nu g(x, t)) &= H_x H_t \left(\frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} * g(x, t) \right) \\ &= H_t \left(\frac{1}{\Gamma(\nu)} H_x (x^{\nu-1}) H_x (g(x, t)) \right) \\ &= \left(\frac{p}{u}\right)^{-\nu} H_x H_t (g(x, t)), \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Teorem 2.13 $\nu, \mu > 0$ olmak üzere $g(x, t)$ fonksiyonu parçalı sürekli ve üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. Bu durumda, ${}_t I_x^\mu {}_t I^\nu g(x, t)$ kesirli integralinin iki katlı Shehu dönüşümü

$$H_x H_t ({}_t I_x^\mu {}_t I^\nu g(x, t)) = \left(\frac{q}{v}\right)^{-\mu} \left(\frac{p}{u}\right)^{-\nu} H_x H_t (g(x, t)), \quad (2.57)$$

şeklinde tanımlanır.

İspat Çift konvolüsyonu iki katlı Shehu dönüşümü kullanılarak,

$$\begin{aligned} H_x H_t ({}_t I_x^\mu {}_t I^\nu g(x, t)) &= H_x H_t \left(\frac{1}{\Gamma(\nu) \Gamma(\mu)} x^{\nu-1} t^{\mu-1} * * g(x, t) \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu) \Gamma(\mu)} H_x H_t (x^{\nu-1} t^{\mu-1}) H_x H_t (g(x, t)) \\ &= \left(\frac{q}{v}\right)^{-\mu} \left(\frac{p}{u}\right)^{-\nu} H_x H_t (g(x, t)), \end{aligned}$$

elde edilebilir.

Teorem 2.14 $\mu, \nu > 0$, $m-1 < \mu < m$, $n-1 < \nu < n$ ($m, n \in \mathbb{N}$), olmak üzere $g \in C^k[(0, \infty) \times (0, \infty)]$, $k = \max\{m, n\}$ parçalı sürekli ve üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. Bu halde,

1. Caputo kesirli türevlerinin t 'ye göre iki katlı Shehu dönüşümü

$$H_x H_t (D_t^\mu g(x, t)) = \left(\frac{q}{v}\right)^\mu H_x H_t (g(x, t)) - \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{q}{v}\right)^{\mu-1-j} H_x \left(\frac{\partial^j}{\partial t^j} g(x, 0) \right). \quad (2.58)$$

2. Caputo kesirli türevlerinin x 'e göre iki katlı Shehu dönüşümü

$$H_x H_t (D_x^\nu g(x, t)) = \left(\frac{p}{u}\right)^\nu H_x H_t (g(x, t)) - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{p}{u}\right)^{\nu-1-i} H_t \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} g(0, t) \right). \quad (2.59)$$

3. Caputo kesirli türevlerinin x ve t 'ye göre iki katlı Shehu dönüşümü

$$\begin{aligned} H_x H_t (D_x^\nu D_t^\mu g(x, t)) &= \left(\frac{p}{u}\right)^\nu \left(\frac{q}{v}\right)^\mu H_x H_t (g(x, t)) \\ &\quad - \left(\frac{q}{v}\right)^\mu \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{p}{u}\right)^{\nu-1-i} H_t \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} g(0, t) \right) \\ &\quad - \left(\frac{p}{u}\right)^\nu \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{q}{v}\right)^{\mu-1-j} H_x \left(\frac{\partial^j}{\partial t^j} g(x, 0) \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{q}{v}\right)^{\mu-1-j} \left(\frac{p}{u}\right)^{\nu-1-i} \left(\frac{\partial^{j+i}}{\partial t^j \partial x^i} g(0, 0) \right), \end{aligned} \quad (2.60)$$

olarak yazılabilir.

İspat (1) $g(x, t)$ fonksiyonu için t 'ye göre Caputo kesirli türevi

$$D_t^\mu g(x, t) = \frac{1}{\Gamma(m - \mu)} t^{m-\mu-1} * \frac{\partial^m g(x, t)}{\partial t^m}, \quad (2.61)$$

konvolüsyon ile yazılabilir. (2.61) denkleminin her iki tarafına DHT uygulandığında,

$$\begin{aligned} H_x H_t (D_t^\mu g(x, t)) &= H_x H_t \left(\frac{1}{\Gamma(m - \mu)} t^{m-\mu-1} * \frac{\partial^m g(x, t)}{\partial t^m} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m - \mu)} H_x H_t (t^{m-\mu-1}) H_x H_t \left(\frac{\partial^m g(x, t)}{\partial t^m} \right) \\ &= \left(\frac{q}{v} \right)^{\mu-m} \left[\left(\frac{q}{v} \right)^m H_x H_t (g(x, t)) - \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{q}{v} \right)^{m-1-j} H_x \left(\frac{\partial^j}{\partial t^j} g(x, 0) \right) \right] \\ &= \left(\frac{q}{v} \right)^\mu H_x H_t (g(x, t)) - \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{q}{v} \right)^{\mu-1-j} H_x \left(\frac{\partial^j}{\partial t^j} g(x, 0) \right), \end{aligned}$$

elde edilir.

İspat (2) $g(x, t)$ fonksiyonu için x 'e göre Caputo kesirli türevi

$$D_x^\nu g(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \nu)} x^{n-\nu-1} * \frac{\partial^n g(x, t)}{\partial x^n}, \quad (2.62)$$

konvolüsyon ile yazılabilir. (2.62) denkleminin her iki tarafına DHT uygulandığında,

$$\begin{aligned} H_x H_t (D_x^\nu g(x, t)) &= H_x H_t \left(\frac{1}{\Gamma(n - \nu)} x^{n-\nu-1} * \frac{\partial^n g(x, t)}{\partial x^n} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \nu)} H_x H_t (x^{n-\nu-1}) H_x H_t \left(\frac{\partial^n g(x, t)}{\partial x^n} \right) \\ &= \left(\frac{p}{u} \right)^{\nu-n} \left[\left(\frac{p}{u} \right)^n H_x H_t (g(x, t)) - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{p}{u} \right)^{n-1-j} H_t \left(\frac{\partial^j}{\partial x^j} g(0, t) \right) \right] \\ &= \left(\frac{p}{u} \right)^\nu H_x H_t (g(x, t)) - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{p}{u} \right)^{\nu-1-i} H_t \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} g(0, t) \right), \end{aligned}$$

elde edilir.

İspat (3) $g(x, t)$ fonksiyonu için x ve t 'ye göre Caputo kesirli türevi

$$D_x^\nu D_t^\mu g(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \nu) \Gamma(m - \mu)} x^{n-\nu-1} t^{m-\mu-1} * \frac{\partial^{n+m} g(x, t)}{\partial x^n \partial t^m}, \quad (2.63)$$

konvolüsyonu ile yazılabilir. (2.63) denkleminin her iki tarafına DHT uygulandığında ise

$$\begin{aligned}
& H_x H_t (D_x^\nu D_t^\mu g(x, t)) \\
&= H_x H_t \left(\frac{1}{\Gamma(n-\nu) \Gamma(m-\mu)} x^{n-\nu-1} t^{m-\mu-1} * \frac{\partial^{n+m} g(x, t)}{\partial x^n \partial t^m} \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} H_x H_t (t^{m-\mu-1}) \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} H_x H_t (x^{n-\nu-1}) H_x H_t \left(\frac{\partial^{n+m} g(x, t)}{\partial x^n \partial t^m} \right),
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$= \left(\frac{p}{u} \right)^{\nu-n} \left(\frac{q}{v} \right)^{\mu-m} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{p}{u} \right)^n \left(\frac{q}{v} \right)^m H_x H_t (g(x, t)) - \left(\frac{q}{v} \right)^m \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{p}{u} \right)^{n-1-j} H_t \left(\frac{\partial^j}{\partial x^j} g(0, t) \right) \\ & - \left(\frac{p}{u} \right)^n \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{q}{v} \right)^{m-1-j} H_x \left(\frac{\partial^j}{\partial t^j} g(x, 0) \right) \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{q}{v} \right)^{m-1-j} \left(\frac{p}{u} \right)^{n-1-i} \left(\frac{\partial^{j+i}}{\partial t^j \partial x^i} g(0, 0) \right) \end{aligned} \right],$$

olarak yazılabilir. Bu ifade sadeleştirildiğinde ise,

$$\begin{aligned}
H_x H_t (D_x^\nu D_t^\mu g(x, t)) &= \left(\frac{p}{u} \right)^\nu \left(\frac{q}{v} \right)^\mu H_x H_t (g(x, t)) - \left(\frac{q}{v} \right)^\mu \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{p}{u} \right)^{\nu-1-i} H_t \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} g(0, t) \right) \\
&- \left(\frac{p}{u} \right)^\nu \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{q}{v} \right)^{\mu-1-j} H_x \left(\frac{\partial^j}{\partial t^j} g(x, 0) \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{q}{v} \right)^{\mu-1-j} \left(\frac{p}{u} \right)^{\nu-1-i} \left(\frac{\partial^{j+i}}{\partial t^j \partial x^i} g(0, 0) \right),
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.2.6. İki Katlı Shehu Dönüşümünün Bazı Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Bu bölümde, DHT yaklaşımının temel düşüncesi gösterilmektedir. Bu nedenle, ilk olarak,

$$D_t^\mu g(x, t) + D_x^\nu g(x, t) + \sum_{j=0}^m A_j \frac{\partial^j g}{\partial t^j} + \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial^i g}{\partial x^i} = f(x, t), \quad m-1 < \beta \leq m, n-1 \leq \nu \leq n, \quad (2.64)$$

başlangıç koşullarına sahip,

$$D_t^j g(x, 0) = \phi_j(x), \quad D_x^i g(0, t) = \varphi_i(t), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1, i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.65)$$

şeklinde tanımlanan, genel yapıdaki lineer homojen olmayan kesirli denklemini ele alınsın.

(2.64) denkleminin her iki tarafına DHT uygulandığında,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q}{v}\right)^\mu H_x H_t(g(x, t)) - \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{q}{v}\right)^{\mu-1-j} H_x \left(\frac{\partial^j g(x, 0)}{\partial t^j}\right) + \left(\frac{p}{u}\right)^\nu H_x H_t(g(x, t)) \\ & - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{p}{u}\right)^{\nu-1-i} H_t \left(\frac{\partial^i g(0, t)}{\partial x^i}\right) \\ & + \sum_{j=0}^m A_j \left[\left(\frac{q}{v}\right)^j H_x H_t(g(x, t)) - \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{q}{v}\right)^{k-1-j} H_x \left(\frac{\partial^k g(x, 0)}{\partial t^k}\right) \right] \\ & + \sum_{i=0}^n B_i \left[\left(\frac{p}{u}\right)^i H_x H_t(g(x, t)) - \sum_{s=0}^{i-1} \left(\frac{p}{u}\right)^{i-1-s} H_t \left(\frac{\partial^s g(0, t)}{\partial x^s}\right) \right] = H_x H_t(f(x, t)), \quad (2.66) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.65) denklemlerinde ifade edilen başlangıç koşullarına HT uygulandığında,

$$H_x(D_t^j g(x, 0)) = \bar{\phi}_j, H_t(D_x^i g(0, t)) = \bar{\varphi}_i, \quad (2.67)$$

elde edilir. (2.67) denklemi (2.66) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q}{v}\right)^\mu H_x H_t(g(x, t)) - \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{q}{v}\right)^{\mu-1-j} \bar{\phi}_j + \left(\frac{p}{u}\right)^\nu H_x H_t(g(x, t)) \\ & - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{p}{u}\right)^{\nu-1-i} \bar{\varphi}_i + \sum_{j=0}^m A_j \left[\left(\frac{q}{v}\right)^j H_x H_t(g(x, t)) - \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{q}{v}\right)^{k-1-j} \bar{\phi}_k \right] \\ & + \sum_{i=0}^n B_i \left[\left(\frac{p}{u}\right)^i H_x H_t(g(x, t)) - \sum_{s=0}^{i-1} \left(\frac{p}{u}\right)^{i-1-s} \bar{\varphi}_s \right] = H_x H_t(f(x, t)), \quad (2.68) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade sadeleştirildiğinde,

$$\begin{aligned} & H_x H_t(g(x, t)) = \\ & \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{q}{v}\right)^{\mu-1-j} \bar{\phi}_j + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{p}{u}\right)^{\nu-1-i} \bar{\varphi}_i - \sum_{j=0}^m A_j \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{q}{v}\right)^{k-1-j} \bar{\phi}_k - \sum_{i=0}^n B_i \sum_{s=0}^{i-1} \left(\frac{p}{u}\right)^{i-1-s} \bar{\varphi}_s}{\left[\left(\frac{q}{v}\right)^\mu + \left(\frac{p}{u}\right)^\nu + \sum_{j=0}^m A_j \left(\frac{q}{v}\right)^j + \sum_{i=0}^n B_i \left(\frac{p}{u}\right)^i \right]}, \quad (2.69) \end{aligned}$$

formuna ulaşılır. (2.69) denkleminde ters DHT uygulandığında ise,

$$\begin{aligned} & g(x, t) = H_x^{-1} H_t^{-1} \\ & \left[\frac{\sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{q}{v}\right)^{\mu-1-j} \bar{\phi}_j + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{p}{u}\right)^{\nu-1-i} \bar{\varphi}_i - \sum_{j=0}^m A_j \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{q}{v}\right)^{k-1-j} \bar{\phi}_k - \sum_{i=0}^n B_i \sum_{s=0}^{i-1} \left(\frac{p}{u}\right)^{i-1-s} \bar{\varphi}_s}{\left[\left(\frac{q}{v}\right)^\mu + \left(\frac{p}{u}\right)^\nu + \sum_{j=0}^m A_j \left(\frac{q}{v}\right)^j + \sum_{i=0}^n B_i \left(\frac{p}{u}\right)^i \right]} \right], \quad (2.70) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu denklem ise, doğrusal homojen olmayan kesirli türe ve sahip (2.64) denkleminin, (2.65)'deki başlangıç-sınır değerlerine göre tam çözümünü verir.

2.2.6.1. Nümerik Örnekler

Örnek 2.6

$$D_t^\beta g(x, t) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad x, t > 0, \quad (2.71)$$

zaman kesirli ısı kısmi diferansiyel denklemini

$$g(0, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} g(0, t) = \pi E_\beta(-t^\beta), \quad g(x, 0) = \sin(\pi x), \quad (2.72)$$

başlangıç koşulları ile ele alalım. (2.71) denkleminin her iki tarafına DHT uygulandığında,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q}{v}\right)^\beta \bar{G}((p, q), (u, v)) - \left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-1} H_x(g(x, 0)) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left[\left(\frac{p}{u}\right)^2 \bar{G}((p, q), (u, v)) - \left(\frac{p}{u}\right) H_t(g(0, t)) - H_t\left(\frac{\partial}{\partial x} g(0, t)\right) \right], \end{aligned} \quad (2.73)$$

elde edilir. (2.72) denklemlerinde ifade edilen başlangıç koşullarına HT uygulandığında,

$$H_t(g(0, t)) = 0, \quad H_t\left(\frac{\partial}{\partial x} g(0, t)\right) = \pi \frac{\left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-1}}{\left(\frac{q}{v}\right)^\beta + 1}, \quad H_x(g(x, 0)) = \frac{\pi}{\pi^2 + \left(\frac{p}{u}\right)^2}, \quad (2.74)$$

elde edilir. (2.74) denklemindeki değerler (2.73) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\left(\frac{q}{v}\right)^\beta \bar{G}((p, q), (u, v)) - \left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-1} \frac{\pi}{\pi^2 + \left(\frac{p}{u}\right)^2} = \frac{1}{\pi^2} \left[\left(\frac{p}{u}\right)^2 \bar{G}((p, q), (u, v)) - \pi \frac{\left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-1}}{\left(\frac{q}{v}\right)^\beta + 1} \right], \quad (2.75)$$

ulaşılır. Bu ifade sadeleştirildiğinde ise,

$$\bar{G}((p, q), (u, v)) = \pi \frac{\left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-1}}{\left(\left(\frac{q}{v}\right)^\beta + 1\right) \left(\pi^2 + \left(\frac{p}{u}\right)^2\right)}, \quad (2.76)$$

formuna ulaşılır. (2.76) denklemin ters DHT uygulandığında,

$$g(x, t) = H_{xt}^{-2} \left[\frac{\left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-1}}{\left(\left(\frac{q}{v}\right)^\beta + 1\right) \left(\pi^2 + \left(\frac{p}{u}\right)^2\right)} \right] = E_\beta(-t^\beta) \sin(\pi x), \quad (2.77)$$

denklemini elde edilir. (2.71) denkleminde elde ettiğimiz çözümler, (Anwar et al., 2013)'de elde edilen çözümler ile benzerdir.

Örnek 2.7

$$D_t^\beta g(x, t) + D_t^\delta g(x, t) - \frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} + g(x, t) = 0, 1 < \beta \leq 2, \frac{1}{2} < \delta \leq 1, \quad (2.78)$$

homojen zaman kesirli kısmi diferansiyel telgraf denklemini

$$\begin{aligned} g(x, 0) &= 0, g_t(x, 0) = e^x, \\ g(0, t) &= tE_{\beta-\delta, 2}(-t^{\beta-\delta}), g_x(0, t) = tE_{\beta-\delta, 2}(-t^{\beta-\delta}), \end{aligned} \quad (2.79)$$

başlangıç koşulları ile ele alalım. (2.78) denkleminin her iki tarafına DHT uygulandığında,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{q}{v}\right)^\beta \bar{G}((p, q), (u, v)) - \left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-1} H_x(g(x, 0)) - \left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-2} H_x(g_x(x, 0)) \\ &+ \left(\frac{q}{v}\right)^\delta \bar{G}((p, q), (u, v)) - \left(\frac{q}{v}\right)^{\delta-1} H_x(g(x, 0)) - \left(\frac{p}{u}\right)^2 \bar{G}((p, q), (u, v)) \\ &+ \left(\frac{p}{u}\right) H_t(g(0, t)) + H_t\left(\frac{\partial}{\partial x} g(0, t)\right) + \bar{G}((p, q), (u, v)) = 0, \end{aligned} \quad (2.80)$$

elde edilir. (2.79) denklemlerinde ifade edilen başlangıç koşullarına HT uygulandığında,

$$H_x(g(x, 0)) = 0, H_x(g_t(x, 0)) = \frac{1}{\left(\frac{p}{u}\right) - 1}, H_t(g(0, t)) = H_t(g_x(0, t)) = \frac{\left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-\delta-2}}{\left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-\delta} + 1}, \quad (2.81)$$

ulaşılır. (2.81) denklemindeki değerler (2.80) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\left[\left(\frac{q}{v}\right)^\beta + \left(\frac{q}{v}\right)^\delta - \left(\frac{p}{u}\right)^2 + 1\right] \bar{G}((p, q), (u, v)) = \frac{\left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-2}}{\left(\frac{p}{u}\right) - 1} - \frac{\left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-\delta-2}}{\left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-\delta} + 1} - \frac{\left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-\delta-2} \left(\frac{p}{u}\right)}{\left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-\delta} + 1}, \quad (2.82)$$

ulaşılır. Bu ifade düzenlendiğinde,

$$\bar{G}((p, q), (u, v)) = \frac{\left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-\delta-2}}{\left(\left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-\delta} + 1\right)} \frac{1}{\left(\left(\frac{p}{u}\right) - 1\right)}, \quad (2.83)$$

şeklinde yazılabilir. (2.83) denklemin ters DHT uygulandığında ise,

$$g(x, t) = H_{xt}^{-2} \left[\frac{\left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-\delta-2}}{\left(\left(\frac{q}{v}\right)^{\beta-\delta} + 1\right)} \frac{1}{\left(\left(\frac{p}{u}\right) - 1\right)} \right] = te^x E_{\beta-\delta, 2}(-t^{\beta-\delta}), \quad (2.84)$$

denklemini elde edilebilir. (2.78) denkleminde elde ettiğimiz çözümler, (Joice Nirmala and Balachandran, 2014)'de elde edilen çözümler ile benzerdir.

2.3. Tek Katlı Aboodh Dönüşümü

Bu bölümde, Aboodh dönüşümü ayrıştırma yöntemini kesirli Black-Scholes denkleminin çözümü için uygulanmıştır. Bu yöntem, Aboodh dönüşümü ile Adomian ayrıştırma yöntemi arasında bir birleşimdir. Bu yöntem, sabit ve değişken katsayılı Black-Scholes denklemini çözmek için kullanılmaktadır.

Tanım 2.6 B bir fonksiyonlar kümesi ve

$$B = \{ f(t) : \exists M, k_1, k_2 > 0, |f(t)| e^{vt} < M \} \quad (2.85)$$

olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonunun tek katlı Aboodh dönüşümü,

$$A[f(t)] = \frac{1}{v} \int_0^\infty f(t) e^{-vt} dt, \quad t \geq 0, \quad k_1 \leq v \leq k_2 \quad (2.86)$$

şeklindedir.

Tanım 2.7 Tek katlı Aboodh dönüşümünün tersi,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} v e^{vt} K(v) dv, \quad (2.87)$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 2.3 Aboodh dönüşümü tanımı kullanılarak kolay hesaplamalar ile aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir;

1. $A[1] = \frac{1}{v^2},$
2. $A[t^\mu] = \frac{\Gamma(\mu+1)}{v^{\mu+2}}, \quad 0 \leq \mu$
3. $A[e^{-at}] = \frac{1}{v^2+av},$
4. $A[\sin(at)] = \frac{a}{v(v^2+a^2)},$
5. $A[t^\mu] = \frac{\Gamma(\mu+1)}{v^{\mu+2}}, \quad 0 \leq \mu,$
6. $A[u'(t)] = vA(u(t)) - \frac{u(0)}{v},$
7. $A(t^{r-1} E_{s,r}(ct^s)) = \frac{v^{s-r-1}}{v^s-c}, \quad |c| < |v^s|.$
8. $A[u''(t)] = v^2 A(u(t)) - \frac{u'(0)}{v} - u(0),$

$$9. A[u^{(n)}(t)] = v^n \left[A(u(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(0)}{v^{2+k}} \right].$$

Lemma 2.4 *Bazı kısmi türevlerin tek katlı Aboodh dönüşümleri;*

1. $A\left[\frac{\partial f(x,y,t)}{\partial t}\right] = vA(f(x,y,t)) - \frac{f(x,y,0)}{v},$
2. $A\left[\frac{\partial^2 f(x,y,t)}{\partial t^2}\right] = v^2A(f(x,y,t)) - \frac{1}{v}\frac{\partial f(x,y,0)}{\partial t} - f(x,y,0),$
3. $A\left[\frac{\partial^n f(x,y,t)}{\partial x^n}\right] = \frac{\partial^n}{\partial x^n}A(f(x,y,t)),$
4. $A[{}_RD_t^\alpha f(x,y,t)] = v^\alpha \left[A(f(x,y,t)) - \sum_{k=1}^n \frac{{}_RD^{\alpha-k}f(x,y,0)}{v^{k+2}} \right], \quad -1 < n-1 \leq \alpha < n,$
5. $A[D_t^\alpha f(x,y,t)] = v^\alpha \left[A(f(x,y,t)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{\alpha-k}f(x,y,0)}{v^{k+2}} \right], \quad n-1 < \alpha < n,$

şeklindedir.

2.3.1. Aboodh Ayırıştırma Yöntemi

Bu bölümde, Aboodh ayırıştırma yönteminin temel adımlarına yer verilmiştir. Bu nedenle ilk olarak,

$$D_0^k u(x, y, 0) = f_k, k = 0, \dots, n-1, \quad (2.88)$$

başlangıç koşullarına sahip,

$$D_t^\alpha u(x, y, t) = L(u(x, y, t)) + N(u(x, y, t)) + g(x, y, t) \quad (2.89)$$

şeklinde tanımlanan, genel doğrusal olmayan kesirli kısmi diferansiyel denklemi ele alınsın. Burada, $D_t^\alpha u(x, y, t)$ Caputo kesirli operatör, g bilinen fonksiyon, L doğrusal diferansiyel operatörü ifade eder ve N doğrusal olmayan diferansiyel operatördür.

(2.89) denkleminin her iki tarafına AT uygulandığında,

$$A[D_t^\alpha u(x, y, t)] = A[L(u(x, y, t))] + A[N(u(x, y, t))] + A[g(x, y, t)], \quad (2.90)$$

elde edilir. Aboodh dönüşümünün özelliklerine ve başlangıç koşullarına bağlı olarak,

$$A[u(x, y, t)] = v^{-\alpha} A[L(u(x, y, t))] + v^{-\alpha} A[N(u(x, y, t))] + \sum_{k=0}^{m-1} v^{-k-2} u^{(k)}(x, y, 0) + v^{-\alpha} A[(g(x, y, t))], \quad (2.91)$$

formuna ulaşılır. (2.101) denkleminin ters Aboodh dönüşümü uygulandığında,

$$u(x, y, t) = G(x, y, t) + A^{-1}[v^{-\alpha} A[L(u(x, y, t))] + v^{-\alpha} A[N(u(x, y, t))]], \quad (2.92)$$

ifadesi elde edilir. Burada $G(x, y, t)$ homojen olmayan terimden ve başlangıç koşullarından kaynaklanan şartları temsil eder. Burada Adomian çözümü ise,

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y, t), \quad (2.93)$$

şeklindedir ve

$$A_m = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} \left[N \left(\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m u_m(x, y, t) \right) \right]_{\lambda=0}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

olmak üzere, lineer olmayan terimler Adomian polinom serileri ile,

$$Nu(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(u_0, u_1, u_2, \dots), \quad (2.94)$$

şeklinde lineerleştirilir. (2.93) ve (2.94) denklemleri, (2.92) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y, t) &= G(x, y, t) \\ &+ A^{-1} \left[v^{-\alpha} A \left[L \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y, t) \right) \right] + v^{-\alpha} A \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, u_2, \dots) \right] \right], \end{aligned} \quad (2.95)$$

olarak elde edilir. bu denklem (2.95), Aboodh dönüşümü ile Adomian dönüşüm yönteminin birleşimidir.

(2.95) denkleminin her iki tarafı orantılandığında,

$$\begin{aligned} u_0 &= G(x, y, t) \\ u_1 &= A^{-1} [v^{-\alpha} A[L(u_0(x, y, t))] + v^{-\alpha} A[A_0]], \\ u_2 &= A^{-1} [v^{-\alpha} A[L(u_1(x, y, t))] + v^{-\alpha} A[A_1]], \\ u_{n+1} &= A^{-1} [v^{-\alpha} A[L(u_n(x, y, t))] + v^{-\alpha} A[A_n]], \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (2.96)$$

elde edilir.

2.3.1.1. Aboodh Ayırıştırma Yönteminin Uygulamaları

Bu bölümde, bir ve iki varlığın (assets) kesirli Black-Scholes opsiyon fiyatlandırma modellerini çözmek için Aboodh ayırıştırma yöntemi (ATDM) ele alınmıştır.

Örnek 2.8 (*Elbeleze et al., 2013*)

$$D_t^\alpha u(x, t) = D_x^2 u(x, t) + (k - 1) D_x u(x, t) - ku(x, t), \quad (2.97)$$

$$u(x, 0) = \max \{e^x - 1, 0\},$$

başlangıç koşuluna sahip lineer kesirli türevelere sahip Black-Scholes denklemini ele alalım. (2.97) denkleminde AT uyguladığımızda,

$$A(D_t^\alpha u) = A(D_x^2 u + (k - 1) D_x u - ku), \quad (2.98)$$

ifadesi elde edilir. (2.98) denklemi, AT'nin türev alma özelliklerine göre düzenlendiğinde,

$$v^\alpha [A[u(x, t)] - \frac{1}{v^2} u(x, 0)] = A(D_x^2 u + (k - 1) D_x u - ku), \quad (2.99)$$

bulunur. (2.99) denklemi sadeleştirildiğinde,

$$A[u(x, t)] = \frac{1}{v^2} u(x, 0) + v^{-\alpha} A[D_x^2 u + (k - 1) D_x u - ku], \quad (2.100)$$

formuna ulaşılır. (2.100) denkleminde ters AT uygulandığında,

$$u(x, t) = \max \{e^x - 1, 0\} + A^{-1}(v^{-\alpha} A[D_x^2 u + (k - 1) D_x u - ku]), \quad (2.101)$$

elde edilir. Burada, Adomian çözüm

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t), \quad (2.102)$$

şeklinde lineerleştirilir. (2.102) denklemi (2.100) denkleminde yerlerine yazıldığında,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \max \{e^x - 1, 0\} + A^{-1} (v^{-\alpha} A [D_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n + (k-1) D_x \sum_{n=0}^{\infty} u_n - k \sum_{n=0}^{\infty} u_n]), \quad (2.103)$$

ifadesi elde edilir. (2.103) denkleminin her iki tarafı oranlandırıldığında,

$$\begin{cases} u_0 = \max \{e^x - 1, 0\} \\ u_{n+1}(x, t) = A^{-1} [v^{-\alpha} (AD_x^2 u_n + (k-1) D_x u_n - k u_n)], \end{cases} \quad (2.104)$$

elde edilir ve çözümün kalan terimleri ise,

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= A^{-1} [v^{-\alpha} A (D_x^2 u_0 + (k-1) D_x u_0 - k u_0)] \\ &= A^{-1} [v^{-\alpha} A (D_x^2 \max \{e^x - 1, 0\} + (k-1) D_x \max \{e^x - 1, 0\} - k \max \{e^x - 1, 0\})] \\ &= A^{-1} [v^{-\alpha} (\frac{1}{v^2} \max \{e^x, 0\} + \frac{1}{v^2} (k-1) \max \{e^x, 0\} - \frac{1}{v^2} k (\max \{e^x - 1, 0\}))] \\ &= A^{-1} \left[\frac{k}{v^{2+\alpha}} \max \{e^x, 0\} - \frac{k}{v^{2+\alpha}} (\max \{e^x - 1, 0\}) \right] \\ &= \max \{e^x, 0\} \frac{kt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \max \{e^x - 1, 0\} \frac{kt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &= \frac{kt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} [\max \{e^x, 0\} - \max \{e^x - 1, 0\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) &= A^{-1} [v^{-\alpha} A(D_x^2 u_1 + (k-1) D_x u_1 - k u_1)] \\
&= -A^{-1} [v^{-\alpha} (\frac{k^2}{v^2} \max\{e^x, 0\} - \frac{k^2}{v^2} (\max\{e^x - 1, 0\}))] \\
&= -A^{-1} \left[\frac{k^2}{v^{2+2\alpha}} \max\{e^x, 0\} - \frac{k^2}{v^{2+2\alpha}} (\max\{e^x - 1, 0\}) \right] \\
&= -\max\{e^x, 0\} \frac{k^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \max\{e^x - 1, 0\} \frac{k^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\
&= \frac{-k^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} [\max\{e^x, 0\} - \max\{e^x - 1, 0\}]
\end{aligned}$$

ile hesaplanır. Benzer şekilde,

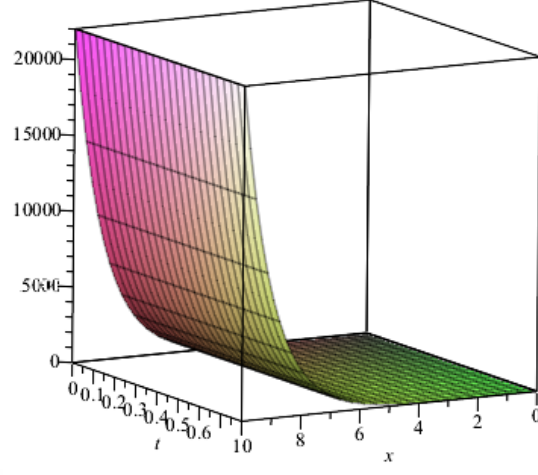
$$u_n = \frac{(-1)^{n+1} k^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \{\max\{e^x, 0\} - \max\{e^x - 1, 0\}\}, \quad (2.105)$$

elde edilir. Bu nedenle, denkleminin çözümü

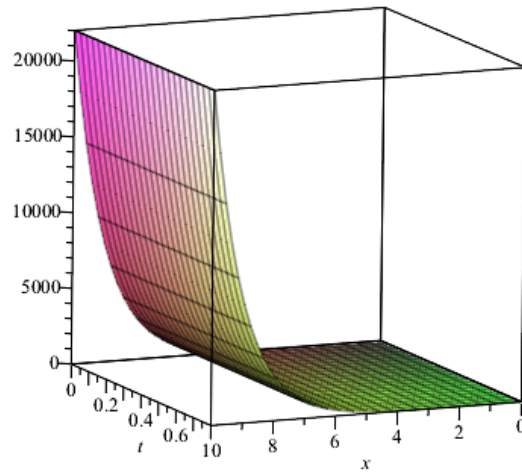
$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \\
&= \max\{e^x - 1, 0\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} k^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} [\max\{e^x, 0\} - \max\{e^x - 1, 0\}]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Şekil 2.1 ve 2.2, Örnek 2.8'deki problemin (2.89) çözümünü ve $u(x, t)$ 'nin x ve t ye göre davranışını göstermektedir. Burada $\alpha = 1$ ve k sabittir.



Şekil 2.1. Denklem (2.97)'deki $u(x, t)$ 'nin $k = 3$ ve $\alpha = 1$ için yüzey grafiği.



Şekil 2.2. Denklem (2.97)'deki $u(x, t)$ 'nin $k = 3$, $\alpha = 1$ ve $n = 70$ için yaklaşık çözüm grafiği.

Örnek 2.9 (*Elbeleze et al., 2013*)

$$D_t^\alpha u(x, t) + 0.08(2 + \sin(x))^2 x^2 D_x^2 u(x, t) + 0.06x D_x u(x, t) - 0.06u(x, t) = 0 \quad (2.106)$$

$$u(x, 0) = \max\{x - 25e^{-0.06}, 0\}$$

başlangıç koşuluna sahip lineer kesirli türeve sahip Black-Scholes denklemini ele alalım. Aynı adımlar uygulanarak

$$\begin{cases} u_0 = \max\{x - 25e^{-0.06}, 0\} \\ u_{n+1}(x, t) = -A^{-1} [v^{-\alpha} A(0.08(2 + \sin(x))^2 x^2 D_x^2 u_n + 0.06x D_x u_n - 0.06u_n)] \end{cases},$$

indirgeme formülü oluşturulur ve çözümün kalan terimleri,

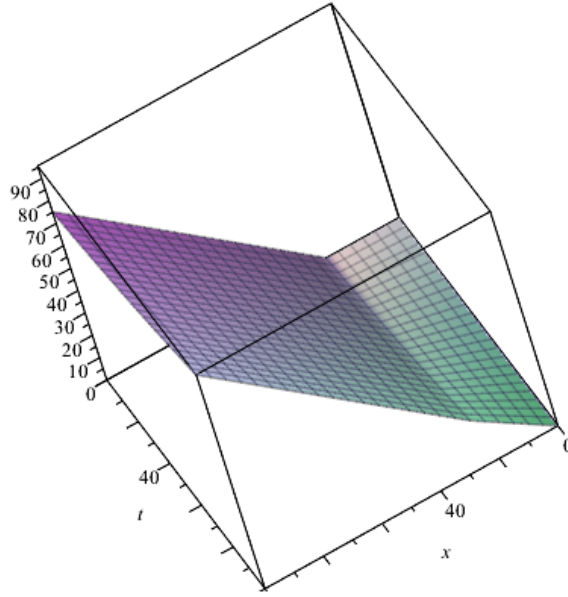
$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{0.06t^\alpha}{\Gamma(2\alpha + 1)} [x - \max\{x - 25e^{-0.06}, 0\}], \\ u_2 &= -\frac{(0.06)^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} [x - \max\{x - 25e^{-0.06}, 0\}], \\ u_n &= -\frac{(0.06)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} [x - \max\{x - 25e^{-0.06}, 0\}], \end{aligned}$$

ile hesaplanır. Böylece, denklem (2.106)'in ATDM ile analitik çözümü,

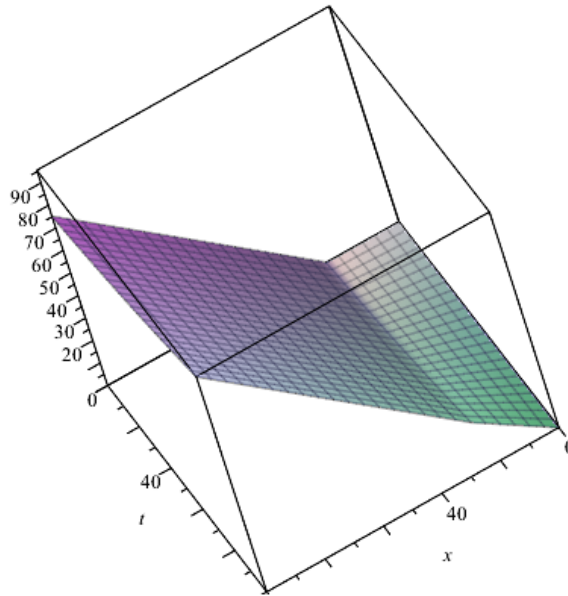
$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \max\{x - 25e^{-0.06}, 0\} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0.06t)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} [x - \max\{x - 25e^{-0.06}, 0\}], \end{aligned}$$

şeklinde elde edilebilir.

Şekil 2.3 ve 2.4, Örnek 2.9'deki problemin (2.106) çözümünü ve $u(x, t)$ 'nin x ve t 'ye göre davranışını göstermektedir. Burada $\alpha = 1$ ve k sabittir.



Şekil 2.3. Denklem (2.106)'deki $u(x, t)$ 'nin $k = 3$ ve $\alpha = 1$ için yüzey grafiği.



Şekil 2.4. Denklem (2.106)'deki $u(x, t)$ 'nin $k = 3$, $\alpha = 1$ ve $n = 70$ için yaklaşık çözüm grafiği.

Örnek 2.10

$$D_t^\alpha u(x, y, t) = \frac{1}{2}\delta_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\delta_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho\delta_1\delta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \quad (2.107)$$

lineer homojen iki varlığın kesirli mertebeli Black-Scholes diferansiyel denklemini

$$u_0 = u(x, y, 0) = \max \{b_1 e^x + b_2 e^y - k, 0\}, \quad (2.108)$$

başlangıç koşulu ile ele alalım. Benzer adımlar uygulanarak,

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= u(x, y, 0) \\ u_{n+1}(x, y, t) &= A^{-1} \left[v^{-\alpha} A \left(\frac{1}{2}\delta_1^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\delta_2^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + \rho\delta_1\delta_2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial y} \right) \right], n \geq 0, \end{aligned} \quad (2.109)$$

indirgeme formülü oluşturulur ve çözümün kalan terimleri,

$$\begin{aligned} u_0 &= u(x, y, 0) = \max \{b_1 e^x + b_2 e^y - k, 0\} \\ u_1(x, y, t) &= A^{-1} \left[v^{-\alpha} A \left(\frac{1}{2}\delta_1^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\delta_2^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \rho\delta_1\delta_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} \right) \right] \\ &= A^{-1} \left[v^{-\alpha} \left(\frac{1}{2}\delta_1^2 \max \{b_1 e^x, 0\} + \frac{1}{2}\delta_2^2 \max \{b_1 e^y, 0\} \right) \frac{1}{v^{\alpha+2}} \right] \\ &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{1}{2}\delta_1^2 \max \{b_1 e^x, 0\} + \frac{1}{2}\delta_2^2 \max \{b_1 e^y, 0\} \right) \\ u_n(x, y, t) &= \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \left(\frac{1}{2^n}\delta_1^{2n} \max \{b_1 e^x, 0\} + \frac{1}{2^n}\delta_2^{2n} \max \{b_1 e^y, 0\} \right), \end{aligned}$$

ile hesaplanır. Böylece, (2.107) denkleminin ATDM ile analitik çözümü,

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \max \{b_1 e^x + b_2 e^y - k, 0\} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \left(\frac{1}{2^n}\delta_1^{2n} \max \{b_1 e^x, 0\} + \frac{1}{2^n}\delta_2^{2n} \max \{b_1 e^y, 0\} \right) \end{aligned} \quad (2.110)$$

şeklinde elde edilir.

$$u(x, y, 0) = \{b_1 e^x + b_2 e^y - k, 0\} + e^{x+y} t^\alpha \quad (2.111)$$

olarak seçilirse

(2.107) denklemin çözümü,

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \max \{b_1 e^x + b_2 e^y - k, 0\} \\ & + e^{x+y} t^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \left(\frac{1}{2^n} \delta_1^{2n} \max \{b_1 e^x, 0\} + \frac{1}{2^n} \delta_2^{2n} \max \{b_2 e^y, 0\} \right) \\ & + e^{x+y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{(n+1)\alpha} \Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(1 + \alpha + n\alpha)} \left(\frac{\delta_1^2}{2} + \frac{\delta_2^2}{2} + \rho \delta_1 \delta_2 \right)^n \\ & - e^{x+y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n\alpha} \Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(1 + n\alpha)} \left(\frac{\delta_1^2}{2} + \frac{\delta_2^2}{2} + \rho \delta_1 \delta_2 \right)^{n-1} \end{aligned} \quad (2.112)$$

olarak elde edilir.

2.4. Üç Katlı Aboodh Dönüşümü

Bu bölümde, üç katlı Aboodh dönüşümünün (TAT) ve ters üç katlı Aboodh dönüşümünün tanımları verilmiştir. Yapılmış dönüşümün bazı özellikleri, teoremleri ve ispatları ele alınmıştır. Ayrıca, bu dönüşüm, üç değişkenli kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için uygulanmıştır.

Tanım 2.8 $f(x, y, t)$ fonksiyonu $[0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty)$ üzerinde parçalı sürekli ve üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $\sup_{x, y, t > 0} \frac{|f(x, y, t)|}{e^{(ax+by+ct)}} < \infty$ eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $f(x, y, t)$ üç katlı Aboodh dönüşümü,

$$K(p, q, r) = A_{xyt}(f(x, y, t)) = \frac{1}{pqr} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(px+qy+rt)} f(x, y, t) dx dy dt \quad (2.113)$$

şeklinde tanımlanır (Alfaqeh and Öziş, 2019).

Tanım 2.9 $f(x, y, t)$ 'nin (2.113) ile verilen üç katlı Aboodh dönüşümü var olmak üzere, üç katlı ters Aboodh dönüşümü

$$f(x, y, t) = A_{xyt}^{-1}(K(p, q, r)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} p e^{px} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} q e^{qy} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} r e^{rt} K(p, q, r) dr \right] dq \right] dp, \quad (2.114)$$

şeklinde tanımlanır (Alfaqeh and Öziş, 2019).

2.4.1. Bazı Temel Fonksiyonların Üç Katlı Aboodh Dönüşümü

1. $A_{xyt}(1) = \frac{1}{p^2 q^2 r^2},$
2. $A_{xyt}(e^{ax+by+ct}) = \frac{1}{p(p-a)q(q-b)r(r-c)},$
3. $A_{xyt}(\sqrt{xyt}) = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{8p^3 q^3 r^3},$
4. $A_{xyt}(\cos(x+y+t)) = \frac{p+q+r-pqr}{(p+p^3)(q+q^3)(r+r^3)},$
5. $A_{xyt}(\sin(x+y+t)) = \frac{pq+pr+qr-1}{(p+p^3)(q+q^3)(r+r^3)},$
6. $A_{xyt}(\cos(ax)\cos(by)\cos(ct)) = \frac{1}{(p^2-a^2)(q^2-b^2)(r^2-c^2)},$
7. $A_{xyt}(\sin(ax)\sin(by)\sin(ct)) = \frac{abc}{p(p^2-a^2)q(q^2-b^2)r(r^2-c^2)},$
8. $A_{xyt}(x^m y^n t^v) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)\Gamma(v+1)}{p^{m+2}q^{n+2}r^{v+2}}.$

2.4.2. Üç Katlı Aboodh Dönüşümünün Bazı Özellikleri

Bu bölümde, üç katlı Aboodh dönüşümünün bazı temel özellikleri verilmiştir.

1. Doğrusallık:

$A_{xyt}(\cdot)$ üç katlı Aboodh dönüşümü bir lineer operatördür, yani

$$A_{xyt}[(af + bg)(x, y, t)](p, q, r) = aA_{xyt}[f(x, y, t)](p, q, r) + bA_{xyt}[g(x, y, t)](p, q, r)$$

İspat

$$\begin{aligned} A_{xyt}[(af + bg)] &= \frac{1}{pqr} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(px+qy+rt)} (af + bg)(x, y, t) dx dy dt \\ &= a \frac{1}{pqr} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(px+qy+rt)} f(x, y, t) dx dy dt \\ &\quad + b \frac{1}{pqr} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(px+qy+rt)} g(x, y, t) dx dy dt \\ &= aA_{xyt}(f) + bA_{xyt}(g) \end{aligned}$$

elde edilir.

2. Skaler Özelliğinin Değişimi

Eğer $A_{xyt} [f(x, y, t)] = K(p, q, r)$ ise $A_{xyt} [f(ax, by, ct)] = \frac{1}{a^2 b^2 c^2} K\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}, \frac{r}{c}\right)$ dir.

İspat

$$A_{xyt} [f(ax, by, ct)] = \frac{1}{pqr} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(px+qy+rt)} f(ax, by, ct) dx dy dt$$

$ax = u, by = v, ct = w$ yazılarak,

$$\begin{aligned} A_{xyt} [f(ax, by, ct)] &= \frac{1}{pqr} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(px+qy+rt)} f(ax, by, ct) dx dy dt \\ &= \frac{1}{abc} \frac{1}{pqr} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(p\frac{u}{a}+q\frac{v}{b}+r\frac{w}{c})} f(u, v, w) du dv dw \\ &= \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \frac{abc}{pqr} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(p\frac{u}{a}+q\frac{v}{b}+r\frac{w}{c})} f(u, v, w) du dv dw \\ &= \frac{1}{a^2 b^2 c^2} K\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}, \frac{r}{c}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

3. Ölçek Değişim Özelliği:

Eğer $A_{xyt} [f(x, y, t)] = K(p, q, r)$ ise $A_{xyt} [e^{-ax-by-ct} f(x, y, t)] = \frac{(p+a)(q+b)(r+c)}{pqr} K(p+a, q+b, r+c)$ dir.

İspat

$$\begin{aligned} A_{xyt} [e^{-ax-by-ct} f(x, y, t)] &= \frac{1}{pqr} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(px+qy+rt)} e^{-ax-by-ct} f(x, y, t) dx dy dt \\ &= \frac{1}{pqr} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(p+a)x-(q+b)y-(r+c)t} f(x, y, t) dx dy dt \\ &= \frac{(p+a)(q+b)(r+c)}{pqr(p+a)(q+b)(r+c)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(p+a)x-(q+b)y-(r+c)t} f(x, y, t) dx dy dt \\ &= \frac{(p+a)(q+b)(r+c)}{pqr} K(p+a, q+b, r+c) \end{aligned}$$

elde edilir.

4. Eğer $f(x, y, t) = g(x)h(y)z(t)$ ise $A_{xyt} [f(x, y, t)] = A_x [g(x)] A_y [h(y)] A_t [z(t)]$ dir.

İspat

$$\begin{aligned}
 A_x A_y A_t [f(x, y, t)] &= \frac{1}{pqr} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(px+qy+rt)} e^{-ax-by-ct} f(x, y, t) dx dy dt \\
 &= \frac{1}{pqr} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(px+qy+rt)} e^{-ax-by-ct} g(x)h(y)z(t) dx dy dt \\
 &= \left[\frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-px} g(x) dx \right] \left[\frac{1}{q} \int_0^\infty e^{-qy} h(y) dy \right] \left[\frac{1}{r} \int_0^\infty e^{-rt} z(t) dt \right] \\
 &= A_x [g(x)] A_y [h(y)] A_t [z(t)]
 \end{aligned}$$

elde edilir.

5. $H(x, y, t)$,

$$H(x-a, y-b, t-c) = \begin{cases} 1 & x > a, y > b, t > c \\ 0 & x < a, y < b, t < c \end{cases}$$

ile tanımlı Heaviside birim fonksiyonu olmak üzere,

eğer $K(p, q, r) = A_{xyt} [f(x, y, t)]$ ise

$$A_{xyt} [f(x-a, y-b, t-c) H(x-a, y-b, t-c)] = e^{-pa-qb-rc} K(p, q, r),$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned}
 &A_{xyt} [f(x-a, y-b, t-c) H(x-a, y-b, t-c)] \\
 &= \frac{1}{pqr} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(px+qy+rt)} [f(x-a, y-b, t-c) H(x-a, y-b, t-c)] dx dy dt \\
 &= \frac{1}{pqr} \int_a^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty e^{-px-qy-rt} f(x-a, y-b, t-c) dx dy dt
 \end{aligned}$$

$x-a = u_1$, $y-b = u_2$, $t-c = u_3$ yazılarak

$$\begin{aligned}
 &A_{xyt} [f(x-a, y-b, t-c) H(x-a, y-b, t-c)] \\
 &= \frac{1}{pqr} e^{-pa-qb-rc} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-pu_1-qu_2-ru_3} f(u_1, u_2, u_3) du_1 du_2 du_3 \\
 &= e^{-pa-qb-rc} K(p, q, r),
 \end{aligned}$$

elde edilir.

2.4.3. Bazı Kısmi Türevlerin Üç Katlı Aboodh Dönüşümü

1. Üç değişkenli bir fonksiyonun n . türevinin üç katlı Aboodh dönüşümü

$$A_{xyt} \left(\frac{\partial^n f(x, y, t)}{\partial x^n} \right) = p^n A_{xyt} (f(x, y, t)) - \sum_{m=0}^{n-1} p^{n-m-2} A_{yt} \left(\frac{\partial^m f(0, y, t)}{\partial^m} \right),$$

şeklindedir.

$$A_{xyt} \left(\frac{\partial^n f(x, y, t)}{\partial y^n} \right) = q^n A_{xyt} (f(x, y, t)) - \sum_{m=0}^{n-1} q^{n-m-2} A_{xt} \left(\frac{\partial^m f(x, 0, t)}{\partial^m} \right),$$

biçimindedir.

$$A_{xyt} \left(\frac{\partial^n f(x, y, t)}{\partial t^n} \right) = r^n A_{xyt} (f(x, y, t)) - \sum_{m=0}^{n-1} r^{n-m-2} A_{xy} \left(\frac{\partial^m f(x, y, 0)}{\partial^m} \right),$$

formundadır.

2. Bazı karışık türevlerin üç katlı Aboodh dönüşümü

$$\begin{aligned} A_{xyt} \left(\frac{\partial^3 f(x, y, z, t)}{\partial x \partial y \partial t} \right) &= pqr K(p, q, r) - \frac{pq}{r} K(p, q, 0) - \frac{pr}{q} K(p, 0, r) \\ &\quad - \frac{qr}{p} K(0, q, r) + \frac{p}{qr} K(p, 0, 0) + \frac{q}{pr} K(0, q, 0) \\ &\quad + \frac{r}{pq} K(0, 0, r) - \frac{1}{pqr} f(0, 0, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{xyt} \left(\frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial t \partial x^2} \right) &= rp^2 A_{xyt} (f(x, y, t)) - r A_{yt} (f(0, y, t)) \\ &\quad - \frac{r}{p} A_{yt} \left(\frac{\partial f(0, y, t)}{\partial x} \right) - \frac{p^2}{q} A_{xy} (f(x, y, 0)) + \frac{1}{pr} A_y \left(\frac{\partial f(0, y, 0)}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} A_y (f(0, y, 0)). \end{aligned}$$

3. Kısmi kesirli Caputo türevlerinin üç katlı Aboodh dönüşümü

$$A_{xyt} \left(\frac{\partial^\alpha f(x, y, t)}{\partial x^\alpha} \right) = p^\alpha A_{xyt} (f(x, y, t)) - \sum_{k=0}^{j-1} p^{\alpha-k-2} A_{yt} \left(\frac{\partial^k f(0, y, t)}{\partial x^k} \right),$$

$$A_{xyt} \left(\frac{\partial^\beta f(x, y, t)}{\partial y^\beta} \right) = q^\beta A_{xyt} (f(x, y, t)) - \sum_{k=0}^{n-1} q^{\beta-k-2} A_{xt} \left(\frac{\partial^k f(x, 0, t)}{\partial y^k} \right),$$

$$A_{xyt} \left(\frac{\partial^\gamma f(x, y, t)}{\partial t^\gamma} \right) = r^\gamma A_{xyt} (f(x, y, t)) - \sum_{k=0}^{m-1} r^{\gamma-k-2} A_{xy} \left(\frac{\partial^k f(x, y, 0)}{\partial t^k} \right).$$

2.4.4. Üç Katlı Aboodh Dönüşümünün Uygulamaları

Bu bölümde, üç katlı Aboodh dönüşümü, uygulanabilirliği ve etkinliğini göstermek için bazı farklı örneklere uygulanmıştır.

Örnek 2.11 (Alfaeieh and Özış, 2019)

$$D_t^\alpha f(x, y, t) = \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2.115)$$

kesirli kısmi diferansiyel denklemini

$$\begin{aligned} f(0, y, t) &= 0, \quad f_x(0, y, t) = \sin(y)E_\alpha(-t^\alpha), \\ f(x, y, 0) &= \sin(x)\sin(y), \end{aligned} \quad (2.116)$$

başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte ele alalım. (2.115) denkleminin her iki tarafına üç katlı Aboodh dönüşümü uygulandığında,

$$\begin{aligned} r^\alpha A_{xyt}(f(x, y, t)) - r^{\alpha-2} A_{xy}(f(x, y, 0)) \\ = p^2 A_{xyt}(f(x, y, t)) - A_{yt}(f(0, y, t)) - \frac{1}{p} A_{yt}\left(\frac{\partial f(0, y, t)}{\partial x}\right) \end{aligned} \quad (2.117)$$

elde edilir. (2.116) denklemlerinde ifade edilen başlangıç koşullarına Aboodh dönüşümü uygulandığında,

$$\begin{aligned} A_{xy}(f(x, y, 0)) &= A_{xy}(\sin x \sin y) = \frac{1}{p(p+1)} \frac{1}{q(q+1)}, \\ A_{yt}(f(0, y, t)) &= A_{yt}(0) = 0, \\ A_{yt}\left(\frac{\partial f(0, y, t)}{\partial x}\right) &= \frac{r^{\alpha-2}}{1+r^\alpha} \frac{1}{q(q+1)}, \end{aligned} \quad (2.118)$$

elde edilir. (2.118) denkleminde ifade edilen değerler, (2.117) denkleminde yerine yazıldığında,

$$(r^\alpha - p^2) A_{xyt}(f(x, y, t)) = \frac{r^{\alpha-2}}{pq(q^2+1)} \left[\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{r^\alpha+1} \right], \quad (2.119)$$

ulaşılır. Bu ifade düzelendiğinde,

$$A_{xyt}(f(x, y, t)) = \frac{r^{\alpha-2}}{r^\alpha+1} \frac{1}{p(p^2+1)} \frac{1}{q(q^2+1)}, \quad (2.120)$$

şeklinde yazılabilir. (2.120) denkleminin ters TAT uygulandığında ise,

$$f(x, y, t) = A_{xyt}^{-1}\left(\frac{r^{\alpha-2}}{r^\alpha+1} \frac{1}{p(p^2+1)} \frac{1}{q(q^2+1)}\right) = \sin(x)\sin(y)E_\alpha(-t^\alpha), \quad (2.121)$$

ifadesi elde edilir.

Örnek 2.12 (Alfaqeih and Öziş, 2019)

$$\frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial x \partial y \partial t} + f(x, y, t) = 3e^{-x-2y+t}, \quad (2.122)$$

homojen olmayan üçüncü mertebeden Mboctara kısmi diferansiyel denklemini

$$\begin{aligned} f(0, y, t) &= e^{-2y+t}, \\ f(x, 0, t) &= e^{-x+t}, \\ f(x, y, 0) &= e^{-x-2y}, \end{aligned} \quad (2.123)$$

başlangıç ve sınır koşulları ile ele alalım. (2.122) denkleminin her iki tarafına TAT uygulandığında,

$$(pqr + 1)K(p, q, r) = U(p, q, r) + \frac{1}{p(p+1)q(q+2)r(r-1)} \quad (2.124)$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} U(p, q, r) &= \frac{pq}{r}K(p, q, 0) + \frac{pr}{q}K(p, 0, r) + \frac{qr}{p}K(0, q, r) - \frac{p}{qr}K(p, 0, 0) - \frac{q}{pr}K(0, q, 0) \\ &\quad - \frac{r}{pq}K(0, 0, r) + \frac{1}{pqr}f(0, 0, 0) \\ &= \frac{pqr - 2}{p(p+1)q(q+2)r(r-1)} \end{aligned}$$

elde edilir. $U(p, q, r)$ 'nin değeri (2.124) denkleminde yerine yazıldığında,

$$K(p, q, r) = \frac{1}{p(p+1)q(q+2)r(r-1)}, \quad (2.125)$$

formuna ulaşılır. (2.125) denklemin ters TAT uygulandığında,

$$f(x, y, t) = e^{-x-2y+t}, \quad (2.126)$$

denklemini elde edilir.

Örnek 2.13 (Alfaqeih and Öziş, 2019)

$$\frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial y^2} - 5\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = 0, \quad (2.127)$$

difüzyon kısmi diferansiyel denklemini

$$\begin{aligned}
f(0, y, t) &= e^{2y+t}, \\
f(1, y, t) &= e^{1+2y+t}, \\
f(x, 0, t) &= e^{x+2y}, \\
f(x, 0.5, t) &= e^{x+1}, \\
f(x, y, 0) &= e^{x+2y},
\end{aligned} \tag{2.128}$$

başlangıç ve sınır koşulları ile ele alalım. (2.127) denkleminin her iki tarafına TAT uygulandığında,

$$(p^2 + q^2 - r) K(p, q, r) = U(p, q, r), \tag{2.129}$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
U(p, q, r) &= A_y A_t (f(0, y, t)) + \frac{1}{p} A_{yt} \left(\frac{\partial f(0, y, t)}{\partial x} \right) + A_{xt} (f(x, 0, t)) + \frac{1}{q} A_{yt} \left(\frac{\partial f(x, 0, t)}{\partial y} \right) \\
&\quad - \frac{1}{r} A_{xy} (f(x, y, 0)) \\
&= \frac{p^2 + q^2 - r}{p(p-1)q(q-2)r(r-1)},
\end{aligned}$$

elde edilir. $U(p, q, r)$ 'nin değeri (2.129) denkleminde yerine yazıldığında,

$$K(p, q, r) = \frac{1}{p(p-1)q(q-2)r(r-1)}, \tag{2.130}$$

formuna ulaşılır. (2.130) denkleminde ters TAT uygulandığında,

$$f(x, y, t) = e^{x+2y+t}, \tag{2.131}$$

ifadesi elde edilir.

3. UYUMLU (CONFORMABLE) LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde, matematiksel fizikteki birçok karmaşık olguyu ifade eden, uyumlu kesirli türeve sahip diferansiyel denklemler ve uyumlu kesirli türeve sahip kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin tam çözümlerini elde etmek için Uyumlu (conformable) iki katlı Laplace Dönüşüm Metodu (CDLTM) kullanılmaktadır.

3.1. Tek Uyumlu Laplace dönüşümleri

Tanım 3.1 $\varphi(\tau), \tau \geq \tau_0$ parçalı sürekli ve üstel mertebeden tek-değerli bir fonksiyon olsun. $\varphi(\tau)$ 'nin uyumlu Laplace Dönüşümü (CLT),

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_\beta(q) &= L_{\tau_0}^\beta(\varphi(\tau)) = \int_{\tau_0}^{\infty} e^{-q \frac{(\tau-\tau_0)^\beta}{\beta}} \varphi(\tau) d_\beta(\tau, \tau_0) \\ &= \int_{\tau_0}^{\infty} e^{-q \frac{(\tau-\tau_0)^\beta}{\beta}} \varphi(\tau) (\tau - \tau_0)^{\beta-1} d\tau, \forall q \in \mathbb{C},\end{aligned}\quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\tau_0 \in \mathbb{R}$ ve $\beta \in (0, 1]$ (Abdeljawad, 2015).

Teorem 3.1 $\varphi(\tau), \tau \geq 0$ reel değerli bir fonksiyonu olmak üzere, $\hat{\varphi}_\beta(q) = L^\beta(\varphi(\tau))$ CLT'nin var olduğu kabul edilsin. O halde, $\bar{\varphi}(q) = L(\varphi(\tau)) = \int_0^\infty e^{-q\tau} \varphi(\tau) d\tau$ klasik LT ifade etmek üzere

$$L(\varphi(\tau)) = L^\beta\left(\varphi\left((\beta\tau)^{\frac{1}{\beta}}\right)\right) \quad (3.2)$$

dir (Abdeljawad, 2015).

3.1.1. Uyumlu Laplace Dönüşümünün Bazı Özellikleri

Bu bölümde CLT'nin bazı temel özelliklerini sunulmaktadır (Abdeljawad, 2015; Özkan and Kurt, 2018a)

1. Doğrusallık Özeliği:

Eğer, $\hat{\varphi}_\beta(q) = L^\beta(\varphi(\tau))$ ve $\hat{\phi}_\beta(q) = L^\beta(\phi(\tau))$ ise

$$\begin{aligned} L^\beta(\varphi(\tau) + \phi(\tau)) &= L^\beta(\varphi(\tau)) + L^\beta(\phi(\tau)) \\ &= \hat{\varphi}_\beta(q) + \hat{\phi}_\beta(q), \end{aligned}$$

bağıntısı geçerlidir.

2. Birinci Öteleme Özeliği:

$\hat{\varphi}_\beta(q) = L^\beta(\varphi(\tau))$ ise

$$L^\beta\left(e^{\pm k \frac{\tau^\beta}{\beta}} \varphi(\tau)\right) = \hat{\varphi}_\beta(q \mp k), \quad k \in \mathbb{R},$$

dir.

3. Ölçek Değişim Özeliği:

$\hat{\varphi}_\beta(q) = L^\beta(\varphi(\tau))$ ise

$$L^\beta(\varphi(k\tau)) = \frac{1}{k^\beta} \bar{\varphi}_\beta\left(\frac{q}{k^\beta}\right), \quad k \in \mathbb{R},$$

ifadesi yazılabilir.

4. Görüntü Fonksiyonunu Türetme Özeliği:

$\hat{\varphi}_\beta(q) = L^\beta(\varphi(\tau))$ ise

$$L^\beta\left(\frac{\tau^{m\beta}}{\beta^m} \varphi(\tau)\right) = (-1)^m \frac{d^m \hat{\varphi}_\beta(q)}{dq^m}, \quad m \in \mathbb{N}$$

dir.

Teorem 3.2 $\tau \geq 0$ koşulu için $\varphi(\tau)$, $\frac{d^\beta \varphi(\tau)}{d\tau^\beta}$, $\frac{d^{2\beta} \varphi(\tau)}{d\tau^{2\beta}}$, $\dots$, $\frac{d^{(n-1)\beta} \varphi(\tau)}{d\tau^{(n-1)\beta}}$ sürekli ve $\tau > 0$ koşulu için $\frac{d^{n\beta} \varphi(\tau)}{d\tau^{n\beta}}$ üstel mertebeden ve parçalı sürekli ise

$$L^\beta\left(\frac{d^n \varphi(\tau)}{d\tau^n}\right) = q^n \hat{\varphi}_\beta(q) - \sum_{j=0}^{n-1} q^{n-1-j} \frac{d^{j\beta} \varphi(0)}{d\tau^{j\beta}}, \quad (3.3)$$

dir (Özkan and Kurt, 2018a).

Örnek 3.1 $k \in \mathbb{R}$ için bazı temel fonksiyonların CLT'i

$$1. \quad L^\beta(k) = \frac{k}{q},$$

2. $L^\beta \left(\left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^s \right) = \frac{\Gamma(s+1)}{q^{s+1}},$
3. $L^\beta \left(e^{\left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)} \right) = \frac{1}{q-1},$
4. $L^\beta \left(e^{\pm k \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^s \right) = \frac{\Gamma(s+1)}{(q \mp k)^{s+1}},$
5. $L^\beta \left(\sin \left(k \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right) = \frac{k}{(q^2 + k^2)},$
6. $L^\beta \left(\sinh \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right) = \frac{k}{(q^2 - k^2)}, q > |k|,$
7. $L^\beta \left(\cosh \left(k \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right) = \frac{q}{(q^2 - k^2)}, q > |k|.$

Teorem 3.3 $\beta \in (0, 1]$ ve $q > 0$ koşulları için $\hat{\varphi}_\beta(q) = L^\beta(\varphi(\tau))$ ve $\hat{\phi}_\beta(q) = L^\beta(\phi(\tau))$ ise

$$L^\beta(\varphi(\tau) * \phi(\tau)) = \hat{\varphi}_\beta(q) \hat{\phi}_\beta(q), \quad (3.4)$$

dir. Burada, $\varphi(\tau) * \phi(\tau)$, ifadesi φ ve ϕ fonksiyonlarının konvolüsyonunu ifade etmektedir (Özkan and Kurt, 2018a).

3.2. İki Katlı Uyumlu Laplace Dönüşümü

Tanım 3.2 $\varphi(x, \tau) : [x_0, \infty) \times [\tau_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ üstel mertebden ve parçalı sürekli reel bir fonksiyon, $x_0, \tau_0 \in \mathbb{R}$ ve $\nu, \beta \in (0, 1]$ olsun. CDLT'i $\hat{\varphi}(p, q)$ aşağıdaki şekilde integrali var olmak üzere

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(p, q) &= L_x^\nu L_\tau^\beta(\varphi(x, \tau)) = \int_{x_0}^{\infty} \int_{\tau_0}^{\infty} e^{-\left(p \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu} + q \frac{(\tau-\tau_0)^\beta}{\beta}\right)} \varphi(x, \tau) d_\nu(x, x_0) d_\beta(\tau, \tau_0) \\ &= \int_{x_0}^{\infty} \int_{\tau_0}^{\infty} e^{-\left(p \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu} + q \frac{(\tau-\tau_0)^\beta}{\beta}\right)} \varphi(x, \tau) (x-x_0)^{\nu-1} (\tau-\tau_0)^{\beta-1} dx d\tau, \end{aligned} \quad (3.5)$$

formu ile tanımlanır (Özkan and Kurt, 2018b)

Teorem 3.4 $\varphi(x, \tau) : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel bir fonksiyon olmak olmak üzere $\bar{\varphi}(p, q) = L_x^\nu L_\tau^\beta(\varphi(x, \tau))$ CDLT'nin var olduğu kabul edilsin. O halde, $\bar{\varphi}(p, q) = L_x L_\tau(\varphi(x, \tau)) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(px+q\tau)} \varphi(x, \tau) dx d\tau$ klasik (DLT)'i ifade etmek üzere,

$$L_x^\nu L_\tau^\beta(\varphi(x, \tau)) = L_x L_\tau \left(\varphi \left((\nu x)^{\frac{1}{\nu}}, (\beta \tau)^{\frac{1}{\beta}} \right) \right), \quad (3.6)$$

dir (Özkan and Kurt, 2018b).

3.2.1. İki Kath Uyumlu Laplace Dönüşümünün Bazı Özellikleri

CDLT'in bazı temel özellikleri aşağıda verilmektedir (Özkan and Kurt, 2018b).

1. Lineerlik Özeliği

Eğer k_1 ve k_2 keyfi sabitler olmak üzere, φ ve ϕ 'nin CDLT'leri var ise;

$$L_x^\nu L_\tau^\beta (\varphi(x, \tau) + \phi(x, \tau)) = L_x^\nu L_\tau^\beta (\varphi(x, \tau)) + L_x^\nu L_\tau^\beta (\phi(x, \tau)),$$

dir.

2. Birinci Öteleme Özeliği

$\hat{\varphi}(p, q) = L_x^\nu L_\tau^\beta (\varphi(x, \tau))$ ise

$$L_x^\nu L_\tau^\beta \left(e^{\pm c(\frac{x^\nu}{\nu}) \pm d(\frac{\tau^\beta}{\beta})} \varphi(x, \tau) \right) = \hat{\varphi}(p \mp c, q \mp d), \quad c, d \in \mathbb{R},$$

dir.

3. Ölçek Değişim Özeliği

$\hat{\varphi}(p, q) = L_x^\nu L_\tau^\beta (\varphi(x, \tau))$ ise

$$L_x^\nu L_\tau^\beta (\varphi(cx, d\tau)) = \frac{1}{c^\nu d^\beta} \hat{\varphi}\left(\frac{p}{c^\nu}, \frac{q}{d^\beta}\right), \quad c, d \in \mathbb{R},$$

ifadesi yazılabilir.

4. Görüntü Fonksiyonunu Türetme Özeliği

$\bar{\varphi}(p, q) = L_x^\nu L_\tau^\beta (\varphi(x, \tau))$ ise

$$L_x^\nu L_\tau^\beta \left(\left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^n \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^m \varphi(x, \tau) \right) = (-1)^{n+m} \frac{\partial^{n+m} \hat{\varphi}(p, q)}{\partial p^n \partial q^m}, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

dir.

Teorem 3.5 $\nu, \beta \in (0, 1]$ ve $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\varphi(x, \tau) \in C^z(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$; $z = \max\{n, m\}$ olsun. Ayrıca, $\varphi(x, \tau), \frac{\partial^{j\beta} \varphi(x, \tau)}{\partial \tau^{j\beta}}$ ve $\frac{\partial^{i\nu} \varphi(x, \tau)}{\partial x^{i\nu}}$ $j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n$ fonksiyonlarının CDLT'leri var olsun. Bu durumda,

$$L_x^\nu L_\tau^\beta \left(\frac{\partial^{n\nu} \varphi(x, \tau)}{\partial x^{n\nu}} \right) = p^n \hat{\varphi}(p, q) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-1-i} L_\tau^\beta \left(\frac{\partial^{i\nu} \varphi(0, \tau)}{\partial x^{i\nu}} \right), \quad (3.7)$$

$$L_x^\nu L_\tau^\beta \left(\frac{\partial^{m\beta} \varphi(x, \tau)}{\partial \tau^{m\beta}} \right) = q^m \hat{\varphi}(p, q) - \sum_{i=0}^{m-1} q^{m-1-i} L_x^\nu \left(\frac{\partial^{i\beta} \varphi(x, 0)}{\partial \tau^{i\beta}} \right), \quad (3.8)$$

yazılabilir (Özkan and Kurt, 2018b).

Teorem 3.6 $\nu \in (0, 1], r \in \mathbb{R}$ ve c keyfi sabit olmak üzere,

$$L_x^\nu \left(\left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{r-1} E_{\nu, \beta} \left(c \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^\nu \right) \right) = \frac{p^{\nu-r}}{p^\nu - c}, \quad |c| < |p^\nu| \quad (3.9)$$

dir.

3.2.2. İki Kath Uyumlu Laplace Yönteminin Temel Fikri

Bu bölümde, CDLT yaklaşımının temel adımları gösterilmiştir. Bu nedenle, ilk olarak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{j\beta}}{\partial \tau^{j\beta}} \varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0 \right) &= \eta_j \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right), \\ \frac{\partial^{i\nu}}{\partial x^{i\nu}} \varphi \left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= \phi_i \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

başlangıç koşullarına sahip,

$$\sum_{j=0}^n A_j \frac{\partial^{j\beta}}{\partial \tau^{j\beta}} \varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) + \sum_{i=1}^m B_i \frac{\partial^{i\nu}}{\partial x^{i\nu}} \varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) = h \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right), \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanan, genel yapıdaki doğrusal (CFPDE) denklemini ele alalım. (3.11)

denkleminde $0 < \nu \leq 1, 0 < \beta \leq 1, (x, \tau) \in \mathbb{R}_+^2, \forall j, i, A_j$ ve B_i reel sabitler, h kaynak terimi olmak üzere $\frac{\partial^{j\beta}}{\partial \tau^{j\beta}}, \frac{\partial^{i\nu}}{\partial x^{i\nu}}$ operatörleri sırasıyla x 'e göre ν . ve τ 'ya göre β . mertebeden ardışık olarak i ve j kez CFD ifade etmektedir. (3.11) denkleminin her iki tarafına CDLT uygulandığında,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n A_j \left[q^j \hat{\varphi}(p, q) - \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k-1} L_x^\nu \left(\frac{\partial^{k\beta}}{\partial \tau^{k\beta}} \varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0 \right) \right) \right] + \\ \sum_{i=1}^m B_i \left[p^i \hat{\varphi}(p, q) - \sum_{s=0}^{m-1} p^{m-s-1} L_\tau^\beta \left(\frac{\partial^{s\nu}}{\partial x^{s\nu}} \varphi \left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right) \right] = \hat{h}(p, q), \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir. (3.10) denklemlerinde ifade edilen başlangıç koşullarına CLT uygulandığında,

$$\begin{aligned} L_x^\nu \left(\frac{\partial^{k\beta}}{\partial \tau^{k\beta}} \varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0 \right) \right) &= \hat{\eta}_j(p), \\ L_\tau^\beta \left(\frac{\partial^{s\nu}}{\partial x^{s\nu}} \varphi \left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right) &= \hat{\phi}_j(q), \end{aligned} \quad (3.13)$$

ulaşılır. (3.13) denkleminde ifade edilen değerler (3.12) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\sum_{j=0}^n A_j \left[q^j \hat{\varphi}(p, q) - \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k-1} \hat{\eta}_j(p) \right] + \sum_{i=1}^m B_i \left[p^i \hat{\varphi}(p, q) - \sum_{s=0}^{m-1} p^{m-s-1} \hat{\phi}_j(q) \right] = \hat{h}(p, q),$$

elde edilir. $\varphi(p, q)$ ifadesi çözüldüğünde,

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(p, q) \left[\sum_{j=0}^n q^j A_j + \sum_{i=1}^m p^i B_i \right] &= \hat{h}(p, q) + \sum_{j=0}^n \left(A_j \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k-1} \hat{\eta}_k(p) \right) \\ &+ \sum_{i=1}^m \left(B_i \sum_{s=0}^{m-1} p^{m-s-1} \hat{\phi}_j(q) \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

ulaşılır. Bu ifade düzenlendiğinde,

$$\hat{\varphi}(p, q) = \frac{\hat{h}(p, q) + \sum_{j=0}^n \left(A_j \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k-1} \hat{\eta}_j(p) \right) + \sum_{i=1}^m \left(B_i \sum_{s=0}^{m-1} p^{m-s-1} \hat{\phi}_i(q) \right)}{\left[\sum_{j=0}^n q^j A_j + \sum_{i=1}^m p^i B_i \right]}, \quad (3.15)$$

şekilde yazılabilir. (3.15) denkleminin ters CDLT uygulandığında,

$$\varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) = L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left[\frac{\hat{h}(p, q) + \sum_{j=0}^n \left(A_j \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k-1} \hat{\eta}_j(p) \right) + \sum_{i=1}^m \left(B_i \sum_{s=0}^{m-1} p^{m-s-1} \hat{\phi}_i(q) \right)}{\left[\sum_{j=0}^n q^j A_j + \sum_{i=1}^m p^i B_i \right]} \right], \quad (3.16)$$

ifadesi elde edilir. (3.16) denkleminin, doğrusal uyumlu kesirli türeve sahip (3.10) denkleminin, (3.11) denklemindeki başlangıç-sınır değerlerine göre tam çözümüdür.

3.2.3. İki Kath Uyumlu Laplace Dönüşümünün Bazı Uygulamaları

Örnek 3.2 Aşağıdaki lineer homojen olmayan uyumlu problemi göz önüne alalım.

$$\frac{\partial^\beta \varphi}{\partial \tau^\beta} - \frac{\partial^{2\nu} \varphi}{\partial x^{2\nu}} + \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} = 0, \quad 0 < \nu, \beta \leq 1 \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \varphi \left(\frac{x^\rho}{\rho}, 0 \right) &= e^{\frac{x^\nu}{\nu}} - \frac{x^\nu}{\nu}, \\ \varphi \left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= 1 + \frac{\tau^\beta}{\beta}, \\ \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} \left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

(3.17) denkleminin her iki tarafına CDLT uygulandığında,

$$q\hat{\varphi}(p, q) - \hat{\varphi}(p, 0) - p^2\hat{\varphi}(p, q) + p\hat{\varphi}(0, q) + \frac{\partial\hat{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} + p\hat{\varphi}(p, q) - \hat{\varphi}(0, q) = 0, \quad (3.19)$$

elde edilir. (3.18) denkleminde CLT uygulandığında, başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(p, 0) &= \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2}, \\ \hat{\varphi}(0, q) &= p\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}\right), \\ \frac{\partial\hat{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

olarak elde edilir. (3.20) denklemi ve (3.19) denkleminde yerine yazıldığında,

$$(q - p^2 + p)\hat{\varphi}(p, q) = \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2}\right) - p\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}\right) - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}\right), \quad (3.21)$$

ifadesine ulaşılır. (3.21) denklemi düzenlendiğinde,

$$\hat{\varphi}(p, q) = \frac{\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2}\right) - p\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}\right) - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}\right)}{(q - p^2 + p)}, \quad (3.22)$$

formuna ulaşılır. (3.22) denkleminde ters CDLT uygulandığında,

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left[\frac{1}{q(p-1)} - \frac{1}{qp^2} + \frac{1}{q^2p} \right] \\ &= e^{\frac{x^\nu}{\nu}} - \frac{x^\nu}{\nu} + \frac{\tau^\beta}{\beta}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir. $\nu, \beta = 1$ için tam çözümü,

$$\varphi(x, \tau) = e^x - x + \tau,$$

olarak elde edilir (Lesnic, 2006).

Örnek 3.3 Aşağıdaki lineer homojen olmayan uyumlu problemi ele alalım;

$$\frac{\partial^{2\beta}\varphi}{\partial \tau^\beta} - \frac{\partial^{2\nu}\varphi}{\partial x^{2\nu}} - 2\varphi = -2\sin\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)\sin\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right), \quad 0 < \nu, \beta \leq 1 \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0\right) &= 0, \\ \frac{\partial^\tau}{\partial \tau^\nu}\varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0\right) &= \sin\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right), \\ \varphi\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= 0, \\ \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\varphi\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= \sin\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

(3.25) denkleminde ifade edilen başlangıç koşullarına CLT uygulandığında,

$$\begin{aligned}
 \hat{\varphi}(p, 0) &= 0, \\
 \hat{\varphi}(0, q) &= 0, \\
 \frac{\partial^\nu \hat{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} &= \frac{1}{1 + q^2}, \\
 \frac{\partial^\beta \hat{\varphi}(p, 0)}{\partial \tau^\beta} &= \frac{1}{1 + p^2},
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

şeklinde yeni koşullar değerleri elde edilir. (3.16) denkleminde olduğu gibi (3.24) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned}
 \varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left[\frac{1}{(q^2 - p^2 - 2)} \left(\frac{1}{1 + p^2} - \frac{1}{1 + q^2} - \frac{2}{(1 + q^2)(1 + p^2)} \right) \right] \\
 &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left[\frac{1}{(1 + q^2)(1 + p^2)} \right] \\
 &= \sin\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) \sin\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right),
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

şeklinde elde edilir. $\nu, \beta = 1$ için tam çözümü,

$$\varphi(x, \tau) = \sin(x) \sin(\tau),$$

olarak elde edilir (Dhunde and Waghmare, 2017).

Örnek 3.4 Aşağıdaki lineer homojen olmayan uyumlu problemi ele alınsın;

$$\frac{\partial^\beta \varphi}{\partial \tau^\beta} + \frac{\partial^{3\nu} \varphi}{\partial x^{3\nu}} + \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} = 0, \quad 0 < \beta \leq 1 \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0\right) &= e^{-\frac{x^\nu}{\nu}}, \\
 \varphi\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= e^{2\frac{\tau^\beta}{\beta}}, \\
 \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu}\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= -e^{2\frac{\tau^\beta}{\beta}}, \\
 \frac{\partial^{2\nu} \varphi}{\partial x^{2\nu}}\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= e^{2\frac{\tau^\beta}{\beta}}.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

(3.29) denkleminde ifade edilen başlangıç koşullarına CLT uygulandığında,

$$\begin{aligned}
 \hat{\varphi}(p, 0) &= \frac{1}{1 + p}, \\
 \hat{\varphi}(0, q) &= \frac{1}{-2 + q}, \\
 \frac{\partial^\nu \hat{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} &= \frac{-1}{-2 + q}, \\
 \frac{\partial^{2\nu} \hat{\varphi}(0, q)}{\partial x^{2\nu}} &= \frac{1}{-2 + q},
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

$n = 1, m = 3, A_0 = 0, A_1 = 1, B_1 = 1, B_2 = 0, B_3 = 1, h(x, \tau) = 0$

değerleri ve (3.30) denklemindeki koşullar, (3.16) denkleminde yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left[\frac{1}{(q + p^3 + p)} \left(\frac{1}{1 + p} + \frac{p^2}{-2 + q} - \frac{p}{-2 + q} + \frac{1}{-2 + q} + \frac{1}{-2 + q} \right) \right] \\ &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left[\frac{1}{(-2 + q)(1 + p)} \right] \\ &= e^{2\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right) - \left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)},\end{aligned}\tag{3.31}$$

denklemini elde edilir. $\nu, \beta = 1$ için tam çözümü,

$$\varphi(x, \tau) = e^{2\tau - x},$$

olarak elde edilir (Dhunde and Waghmare, 2017).

Örnek 3.5 Aşağıdaki lineer homojen olmayan uyumlu problemi ele alalım;

$$\frac{\partial^{4\nu} \varphi}{\partial x^{4\nu}} + \frac{\partial^{2\beta} \varphi}{\partial \tau^{2\beta}} - \left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right) - \left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)^2 = 0.\tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0\right) &= 0, \\ \frac{\partial^\tau}{\partial \tau^\nu} \varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0\right) &= \frac{1}{120} \left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)^5, \\ \varphi\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= \frac{1}{12} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)^4, \\ \frac{\partial^{r\nu}}{\partial x^{r\nu}} \varphi\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= 0, \quad r = 1, 2, 3.\end{aligned}\tag{3.33}$$

(3.33) denkleminde ifade edilen başlangıç koşullarında CLT uygulandığında,

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(p, 0) &= 0, \\ \frac{\partial^\beta \hat{\varphi}(p, 0)}{\partial \tau^\beta} &= \frac{1}{p^6}, \\ \hat{\varphi}(0, q) &= \frac{2}{q^5}, \\ \frac{\partial^{r\nu}}{\partial x^{r\nu}} \hat{\varphi}(0, q) &= 0, \quad r = 1, 2, 3,\end{aligned}\tag{3.34}$$

elde edilir. $m = 4, n = 2, A_0 = A_1 = 0, B_1 = B_2 = B_3 = 0, B_4 = 1, \hat{h}(p, q) = \frac{1}{(pq)^2} + \frac{2}{q^3 p}$ değerleri ve (3.34) denklemindeki koşullar, (3.16) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left[\frac{1}{(p^4 + q^2)} \left(\frac{1}{p^6} + \frac{2p^2}{q^5} + \frac{1}{(pq)^2} + \frac{2}{q^3 p} \right) \right] \\
&= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left[\left(\frac{1}{p^6 q^2} + \frac{2}{q^5 p} \right) \right] \\
&= \frac{1}{120} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^5 \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^4,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

sonucuna ulaşılır. $\nu, \beta = 1$ için tam çözümü,

$$\varphi(x, \tau) = \frac{1}{120} \tau x^5 + \frac{1}{12} \tau^4,$$

olarak elde edilir (Dhunde and Waghmare, 2017).

Örnek 3.6 Aşağıdaki lineer homojen olmayan uyumlu problemi ele alalım.

$$\frac{\partial^{2\beta} \Phi}{\partial \tau^{2\beta}} - \frac{\partial^{2\nu} \Phi}{\partial x^{2\nu}} + \frac{\partial^\beta \Phi}{\partial \tau^\beta} + \Phi = 0, \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0\right) &= 0, \\
\frac{\partial^\beta \varphi}{\partial \tau^\beta}\left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0\right) &= \exp\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right), \\
\varphi\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= \left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right) E_{1,2}\left(\left(\frac{-\tau^\beta}{\beta}\right)\right), \\
\frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu}\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= \left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right) E_{1,2}\left(\left(\frac{-\tau^\beta}{\beta}\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.37}$$

(3.37) denkleminde ifade edilen başlangıç koşullarında CLT uygulandığında,

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(p, 0) &= 0, \\
\frac{\partial^\beta \hat{\varphi}(p, 0)}{\partial \tau^\beta} &= \frac{1}{p-1}, \\
\hat{\varphi}(0, q) &= \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \hat{\varphi}(0, q) = \frac{1}{q^2 + q},
\end{aligned} \tag{3.38}$$

elde edilir. $n = 2, m = 2, A_0 = A_1 = A_2 = 1, B_1 = 0, B_2 = -1, h = 0$, değerleri ve (3.38) denklemindeki koşullar, (3.16) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left[\frac{1}{(q^2 - p^2 + q + 1)} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{q^2 + q} - \frac{p}{q^2 + q} \right) \right] \\
&= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left[\frac{1}{(p-1)(q^2 + q)} \right] \\
&= \left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right) e^{\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)} E_{1,2}\left(-\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.39}$$

sonucuna ulaşılır. $\nu, \beta = 1$ için tam çözümü,

$$\varphi(x, \tau) = \tau e^x E_{1,2}(-\tau),$$

olarak elde edilir (Joice Nirmala and Balachandran, 2014).

Örnek 3.7

$$\frac{\partial^{2\nu}\varphi}{\partial x^{2\nu}} - \frac{\partial^{2\beta}\varphi}{\partial \tau^{2\beta}} = \sin\left(\frac{\pi x^\nu}{\nu}\right), \quad 0 < \frac{x^\nu}{\nu} < 1, \quad \frac{\tau^\beta}{\beta} > 0. \quad (3.40)$$

uyumlu kesirli mertebeden lineer homojen olmayan sınır değeri problemini

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0^+\right) &= 0, \\ \frac{\partial^\beta \varphi}{\partial \tau^\beta}\left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0^+\right) &= 0, \\ \varphi\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= 0, \\ \varphi\left(1, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

başlangıç-sınır şartları ile ele alalım. (3.40) denkleminin her iki tarafına CLT uygulandığında,

$$p^2 \hat{\varphi}(p, q) - p \hat{\varphi}(0, q) - \frac{\partial^\nu \hat{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} - q^2 \hat{\varphi}(p, q) + q \hat{\varphi}(p, 0) + \frac{\partial^\beta \hat{\varphi}(p, 0)}{\partial \tau^\beta} = \frac{\pi}{q(\pi^2 + p^2)}, \quad (3.42)$$

elde edilir. (3.41) denkleminde ifade edilen başlangıç koşullarına CLT uygulandığında

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(p, 0) &= 0, \\ \bar{\Phi}(0, q) &= 0, \\ \frac{\partial^\beta \bar{\Phi}(p, 0)}{\partial \tau^\beta} &= 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

elde edilir. (3.43) denklemindeki değerler, (3.42) denkleminde yerine yazıldığında,

$$p^2 \hat{\varphi}(p, q) - \frac{\partial^\nu \hat{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} - q^2 \hat{\varphi}(p, q) = \frac{\pi}{q(\pi^2 + p^2)}, \quad (3.44)$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(p, q) &= \frac{1}{(p^2 - q^2)} \frac{\partial^\nu \hat{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} + \frac{1}{(p^2 - q^2)} \frac{\pi}{q(\pi^2 + p^2)} \\ &= \frac{1}{(p^2 - q^2)} \left[\frac{\partial^\nu \hat{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} + \frac{\pi}{q(\pi^2 + q^2)} \right] - \frac{1}{(\pi^2 + q^2)} \frac{\pi}{q(\pi^2 + p^2)} \\ &= \frac{1}{2q} \left[\frac{1}{(p - q)} + \frac{1}{(p + q)} \right] \left[\frac{\partial^\nu \hat{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} + \frac{\pi}{q(\pi^2 + q^2)} \right] - \frac{1}{(\pi^2 + q^2)} \frac{\pi}{q(\pi^2 + p^2)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

(3.45) denklemindeki ifadeye ulaşılır. x 'e göre ters CLT uygulandığında,

$$\hat{\varphi}(x, q) = \frac{1}{2q} \left[e^{q \frac{x^\nu}{\nu}} + e^{-q \frac{x^\nu}{\nu}} \right] \left[\frac{\partial^\nu \hat{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} + \frac{\pi}{q(\pi^2 + q^2)} \right] - \frac{1}{q(\pi^2 + q^2)} \sin\left(\frac{\pi x^\nu}{\nu}\right), \quad (3.46)$$

elde edilir. $\frac{x^\nu}{\nu} \rightarrow 1$ iken, $\hat{\varphi}(x, q) \rightarrow 0$ ve $\frac{\partial^\nu \hat{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} = \frac{-\pi}{q(\pi^2 + q^2)}$ sonucunda,

$$\hat{\varphi}(x, q) = -\frac{1}{q(\pi^2 + q^2)} \sin\left(\frac{\pi x^\nu}{\nu}\right), \quad (3.47)$$

ifadesi elde edilir. τ 'e göre ters CLT uygulandığında,

$$\varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) = \frac{1}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi x^\nu}{\nu}\right) \left[\cos\left(\frac{\pi \tau^\beta}{\beta}\right) - 1 \right], \quad (3.48)$$

sonucuna ulaşılır. $\nu, \beta = 1$ için tam çözümü,

$$\varphi(x, \tau) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x) [\cos(\pi \tau) - 1],$$

olarak elde edilir (Dhunde and Waghmare, 2013).

3.2.4. Uyumlu İki Katlı Laplace Ayırıştırma Yöntemi

Bu bölümde, CDLDM'nin amacı;

h_1, h_2 kaynak fonksiyonlar, $R_1(\cdot)$, $R_2(\cdot)$ lineer operatörler ve $\chi_1(v, w)$, $\chi_2(v, w)$ lineer olmayan operatörler olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\beta v}{\partial \tau^\beta} + \frac{\partial^\rho v}{\partial x^\rho} + R_1(v, w) + \chi_1(v, w) &= h_1\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right), \\ \frac{\partial^\beta w}{\partial \tau^\beta} + \frac{\partial^\rho w}{\partial x^\rho} + R_2(v, w) + \chi_2(v, w) &= h_2\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

başlangıç koşulları ile verilen,

$$\begin{aligned} v\left(\frac{x^\rho}{\rho}, 0\right) &= f\left(\frac{x^\rho}{\rho}\right), \\ w\left(\frac{x^\rho}{\rho}, 0\right) &= g\left(\frac{x^\rho}{\rho}\right), \end{aligned} \quad (3.50)$$

genel formunda tanımlanan lineer olmayan uyumlu kesirli türeve sahip kısmi differansiyel denklem sistemi ele alınarak ifade edilmiştir.

(3.49) denkleminin CDLT'i uygulandığında,

$$\begin{aligned} V(p, q) &= \frac{F(p)}{p} + \frac{H_1(p, q)}{q} - \frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(\frac{\partial^\rho v}{\partial x^\rho} + R_1(v, w) + \chi_1(v, w) \right), \\ W(p, q) &= \frac{G(p)}{p} + \frac{H_2(p, q)}{q} - \frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(\frac{\partial^\rho w}{\partial x^\rho} + R_2(v, w) + \chi_2(v, w) \right), \end{aligned} \quad (3.51)$$

olarak yazılabilir. Burada, $F(p), G(p)$ fonksiyonlarının CLT'leri sırası olarak $f\left(\frac{x^\rho}{\rho}\right)$ ve $g\left(\frac{x^\rho}{\rho}\right)$ ile göstermektedir. Ayrıca, $h_1\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right)$ ve $h_2\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right)$ ifadeleri $H_1(p, q)$ ve $H_2(p, q)$ fonksiyonlarının CDLT'lerini ifade etmektedir. (3.51) denkleminin her iki tarafına ters CDLT uygulandığında,

$$\begin{aligned}
v\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= f\left(\frac{x^\rho}{\rho}\right) + L_x^{-1}L_\tau^{-1}\left(\frac{H_1(p, q)}{q}\right) - L_x^{-1}L_\tau^{-1}\left(\frac{1}{q}L_x^\rho L_\tau^\beta\left(\frac{\partial^\rho v}{\partial x^\rho} + R_1(v, w) + \chi_1(v, w)\right)\right), \\
w\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= g\left(\frac{x^\rho}{\rho}\right) + L_x^{-1}L_\tau^{-1}\left(\frac{H_2(p, q)}{q}\right) - L_x^{-1}L_\tau^{-1}\left(\frac{1}{q}L_x^\rho L_\tau^\beta\left(\frac{\partial^\rho w}{\partial x^\rho} + R_2(v, w) + \chi_2(v, w)\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.52}$$

elde edilir. Burada, Adomian çözüm;

$$\begin{aligned}
v\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right), \\
w\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right),
\end{aligned} \tag{3.53}$$

şeklinde ve

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\varepsilon^m} \left[N\left(\sum_{i=0}^m \varepsilon^i v^i\right) \right]_{\varepsilon=0} \\
B_n &= \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\varepsilon^m} \left[N\left(\sum_{i=0}^m \varepsilon^i w^i\right) \right]_{\varepsilon=0}, \quad m = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

eşitlikleri olmak üzere, lineer olmayan terim Adomian polinom serileri ile

$$\begin{aligned}
\chi_1(v, w) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right), \\
\chi_2(v, w) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right),
\end{aligned} \tag{3.54}$$

formunda lineerleştirilir. (3.53) ve (3.54) denklemleri (3.52) denkleminde yerlerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} v_n &= f\left(\frac{x^\rho}{\rho}\right) + L_x^{-1}L_\tau^{-1}\left(\frac{H_1(p, q)}{q}\right) \\
&\quad - L_x^{-1}L_\tau^{-1}\left(\frac{1}{q}L_x^\rho L_\tau^\beta\left(\frac{\partial^\rho}{\partial x^\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) + R_1\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n, \sum_{n=0}^{\infty} w_n\right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)\right), \\
\sum_{n=0}^{\infty} w_n &= g\left(\frac{x^\rho}{\rho}\right) + L_x^{-1}L_\tau^{-1}\left(\frac{H_2(p, q)}{q}\right) \\
&\quad - L_x^{-1}L_\tau^{-1}\left(\frac{1}{q}L_x^\rho L_\tau^\beta\left(\frac{\partial^\rho}{\partial x^\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n\right) + R_2\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n, \sum_{n=0}^{\infty} w_n\right) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.55}$$

ifadesi elde edilir. (3.55) denkleminin her iki tarafı oranlandığında,

$$\begin{aligned}
v_0 &= f\left(\frac{x^\rho}{\rho}\right) + L_x^{-1}L_\tau^{-1}\left(\frac{H_1(p, q)}{q}\right), \\
w_0 &= g\left(\frac{x^\rho}{\rho}\right) + L_x^{-1}L_\tau^{-1}\left(\frac{H_2(p, q)}{q}\right),
\end{aligned} \tag{3.56}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned} v_n &= -L_x^{-1}L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(\frac{\partial^\rho}{\partial x^\rho} (v_{n-1}) + R_1(v_{n-1}, w_{n-1}) + A_{n-1} \right) \right), \\ w_n &= -L_x^{-1}L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(\frac{\partial^\rho}{\partial x^\rho} (w_{n-1}) + R_2(v_{n-1}, w_{n-1}) + B_{n-1} \right) \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.57)$$

sonucuna ulaşılır.

3.2.4.1. Uyumlu İki Katlı Laplace Ayırıştırma Yönteminin Bazı Uygulamaları

Örnek 3.8 (Alfaqeh and Kayijuka, 2020)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\beta v}{\partial \tau^\beta} + v + w \frac{\partial^\rho v}{\partial x^\rho} &= 1, \\ \frac{\partial^\beta w}{\partial \tau^\beta} - w + v \frac{\partial^\rho w}{\partial x^\rho} &= 1, \quad 0 < \rho, \beta \leq 1 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Lineer olmayan ve homojen olmayan uyumlu kesirli diferansiyel denklem sistemini,

$$\begin{aligned} v \left(\frac{x^\rho}{\rho}, 0 \right) &= e^{\frac{x^\rho}{\rho}}, \\ w \left(\frac{x^\rho}{\rho}, 0 \right) &= e^{-\frac{x^\rho}{\rho}}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

başlangıç şartları ile ele alalım. Aynı adımlar uygulanarak,

$$\begin{aligned} v_0 \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= e^{\frac{x^\rho}{\rho}} + L_x^{-1}L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{pq^2} \right) = e^{\frac{x^\rho}{\rho}} + \frac{\tau^\beta}{\beta}, \\ w_0 \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= e^{-\frac{x^\rho}{\rho}} + L_x^{-1}L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{pq^2} \right) = e^{-\frac{x^\rho}{\rho}} + \frac{\tau^\beta}{\beta}, \\ v_n \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= -L_x^{-1}L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta (v_{n-1} + A_{n-1}) \right), \\ w_n \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= L_x^{-1}L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta (w_{n-1} + B_{n-1}) \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

indirgeme formülü oluşturulur. Burada,

$$\begin{aligned} w \frac{\partial^\rho v}{\partial x^\rho} &= \sum_{i=0}^{\infty} A_i, \\ v \frac{\partial^\rho w}{\partial x^\rho} &= \sum_{i=0}^{\infty} B_i, \end{aligned}$$

şeklindedir ve çözümün kalan terimleri,

$$\begin{aligned}
 v_1 &= -L_x^{-1}L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta (v_0 + A_0) \right) \\
 &= -L_x^{-1}L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(v_0 + w_0 \frac{\partial^\rho}{\partial x^\rho} v_0 \right) \right) \\
 &= -L_x^{-1}L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} \left(\frac{1}{(p-1)q} + \frac{1}{pq^2} + \frac{1}{pq} + \frac{1}{(p-1)q^2} \right) \right) \\
 &= - \left[\left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) e^{\frac{x^\rho}{\rho}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 + \frac{\tau^\beta}{\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 e^{\frac{x^\rho}{\rho}} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_1 &= L_x^{-1}L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta (w_0 + B_0) \right) \\
 &= L_x^{-1}L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(e^{-\frac{x^\rho}{\rho}} + \frac{\tau^\beta}{\beta} + v_0 \frac{d^\rho}{dx^\rho} w_0 \right) \right) \\
 &= L_x^{-1}L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{(p+1)q^2} + \frac{1}{pq^3} - \frac{1}{pq^2} - \frac{1}{(p+1)q^2} \right) \\
 &= \left[\left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) e^{-\frac{x^\rho}{\rho}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 - \frac{\tau^\beta}{\beta} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 e^{-\frac{x^\rho}{\rho}} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_2 &= \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 + \frac{1}{2} e^{\frac{x^\rho}{\rho}} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(1 + 2e^{\frac{x^\rho}{\rho}} + 2e^{\frac{x^\rho}{\rho}} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3 \\
 &\quad + \frac{1}{12} e^{\frac{x^\rho}{\rho}} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^4 - \frac{1}{6} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3 e^{\frac{x^\rho}{\rho}} + \frac{1}{6} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^5,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_2 &= -\frac{2 + e^{-\frac{x^\rho}{\rho}}}{2} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 + \frac{1 + e^{-\frac{x^\rho}{\rho}}}{2} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(2 + e^{-\frac{x^\rho}{\rho}} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3 \\
 &\quad + \frac{1}{12} e^{-\frac{x^\rho}{\rho}} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^4 + \frac{1}{6} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3 e^{-\frac{x^\rho}{\rho}} + \frac{1}{6} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^5,
 \end{aligned}$$

ile hesaplanır. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
 v \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= v_0 \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) + v_1 \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) + v_2 \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) + \dots \\
 &= e^{\frac{x^\rho}{\rho}} + \frac{\tau^\beta}{\beta} + - \left[\left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) e^{\frac{x^\rho}{\rho}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 + \frac{\tau^\beta}{\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 e^{\frac{x^\rho}{\rho}} \right] + \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} e^{\frac{x^\rho}{\rho}} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(1 + 2e^{\frac{x^\rho}{\rho}} + 2e^{\frac{x^\rho}{\rho}} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3 + \frac{1}{12} e^{\frac{x^\rho}{\rho}} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^4 \\
 &\quad - \frac{1}{6} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3 e^{\frac{x^\rho}{\rho}} + \frac{1}{6} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^5 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= w_0\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) + w_1\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) + w_2\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) + \dots \\
&= e^{-\frac{x^\rho}{\rho}} + \frac{\tau^\beta}{\beta} + \left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right) e^{-\frac{x^\rho}{\rho}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)^2 - \frac{\tau^\beta}{\beta} - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)^2 e^{-\frac{x^\rho}{\rho}} - \frac{2 + e^{-\frac{x^\rho}{\rho}}}{2}\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)^2 \\
&+ \frac{1 + e^{-\frac{x^\rho}{\rho}}}{2}\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(2 + e^{-\frac{x^\rho}{\rho}}\right)\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)^3 + \frac{1}{12}e^{-\frac{x^\rho}{\rho}}\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)^3 e^{-\frac{x^\rho}{\rho}} \\
&+ \frac{1}{6}\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)^5 + \dots
\end{aligned}$$

$\rho, \beta = 1$ için seri çözümleri,

$$\begin{aligned}
v(x, \tau) &= \left(1 - \tau + \frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^3}{3!} + \dots\right) e^x = e^{x-\tau}, \\
w(x, \tau) &= \left(1 + \tau + \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^3}{3!} + \dots\right) e^{-x} = e^{\tau-x},
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.9 (Alfaqeih and Kayijuka, 2020)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\beta v}{\partial \tau^\beta} + \frac{\partial^{3\rho} v}{\partial x^{3\rho}} + 6v \frac{\partial^\rho v}{\partial x^\rho} - 6w \frac{\partial^\rho w}{\partial x^\rho} &= 0, \\
\frac{\partial^\beta w}{\partial \tau^\beta} + \frac{\partial^{3\rho} w}{\partial x^{3\rho}} + 3v \frac{\partial^\rho w}{\partial x^\rho} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.60}$$

lineer olmayan ve homojen olmayan uyumlu kesirli türeve sahip diferansiyel denklem sistemini

$$\begin{aligned}
v\left(\frac{x^\rho}{\rho}, 0\right) &= a^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho}\right), \\
w\left(\frac{x^\rho}{\rho}, 0\right) &= \sqrt{0.5} a^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho}\right),
\end{aligned} \tag{3.61}$$

başlangıç koşulları ile ele alalım. benzer adımlar uygulandığında,

$$\begin{aligned}
v_0 &= a^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho}\right), \\
w_0 &= \sqrt{0.5} a^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho}\right), \\
v_m &= -L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(\frac{d^{3\rho} v_{m-1}}{dx^{3\rho}} + A_{m-1} - B_{m-1} \right) \right), \\
w_m &= -L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(\frac{d^{3\rho} w_{m-1}}{dx^{3\rho}} + C_{m-1} \right) \right), \quad m = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

indirgeme formülü oluşturulur. Buradan,

$$\begin{aligned}
v_1 &= -L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(\frac{\partial^{3\rho} v_0}{\partial x^{3\rho}} + 6v_0 \frac{\partial^\rho v_0}{\partial x^\rho} - 6w_0 \frac{\partial^\rho w_0}{\partial x^\rho} \right) \right), \\
&= a^2 \tanh\left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho}\right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_1 &= -L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(\frac{\partial^{3\rho} w_0}{\partial x^{3\rho}} + 3v_0 \frac{\partial^\rho w_0}{\partial x^\rho} \right) \right) \\
&= \frac{a^2}{\sqrt{2}} \tanh \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right), \\
v_2 \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(\frac{\partial^{3\rho} v_1}{\partial x^{3\rho}} - 6v_0 \frac{\partial^\rho v_1}{\partial x^\rho} - 6v_1 \frac{\partial^\rho v_0}{\partial x^\rho} + 6w_0 \frac{\partial^\rho w_1}{\partial x^\rho} + 6w_1 \frac{\partial^\rho w_0}{\partial x^\rho} \right) \right) \\
&= \frac{a^8}{4} [-3 + 2\cosh^2 \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho} \right) \operatorname{sech}^4 \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2], \\
w_2 \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(\frac{\partial^{3\rho} v_1}{\partial x^{3\rho}} - 6v_0 \frac{\partial^\rho v_1}{\partial x^\rho} - 3v_1 \frac{\partial^\rho v_0}{\partial x^\rho} \right) \right) \\
&= \frac{a^5 \sqrt{2}}{8} [-3 + 2\cosh^2 \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho} \right) \operatorname{sech}^4 \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2],
\end{aligned}$$

denklemin sisteminin çözümleri elde edilir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
v \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= a^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho} \right) + a^2 \tanh \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \\
&\quad + \frac{a^8}{4} [-3 + 2\cosh^2 \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho} \right) \operatorname{sech}^4 \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2] + \dots \\
w \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= \sqrt{0.5} a^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho} \right) + \frac{a^2}{\sqrt{2}} \tanh \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \\
&\quad + \frac{a^5 \sqrt{2}}{8} [-3 + 2\cosh^2 \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho} \right) \operatorname{sech}^4 \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \frac{x^\rho}{\rho} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2] + \dots
\end{aligned}$$

(3.60) denkleminin tam çözümünü;

$$\begin{aligned}
v(x, t) &= a^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{k}{2} + a \frac{x}{2} - \frac{a^3}{2} t \right), \\
w(x, t) &= \sqrt{0.5} a^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{k}{2} + a \frac{x}{2} - \frac{a^3}{2} t \right),
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.10 (Alfafeih and Kayijuka, 2020)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\beta v}{\partial \tau^\beta} + \frac{\partial^\rho w}{\partial x^\rho} + 0.5 \frac{\partial^\rho v^2}{\partial x^\rho} &= 0, \\
\frac{\partial^\beta w}{\partial \tau^\beta} + \frac{\partial^{3\rho} v}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho v}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^\rho (vw)}{\partial x^\rho} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.62}$$

lineer olmayan ve homojen olmayan uyumlu kesirli türeve sahip diferansiyel denklem sistemini,

$$\begin{aligned}
v \left(\frac{x^\rho}{\rho}, 0 \right) &= \tanh \left(0.5 \left(c + \frac{x^\rho}{\rho} \right) \right) + 1, \\
w \left(\frac{x^\rho}{\rho}, 0 \right) &= 0.5 \operatorname{sech}^2 \left(0.5 \left(c + \frac{x^\rho}{\rho} \right) \right) - 1,
\end{aligned} \tag{3.63}$$

başlangıç koşulları ile ele alalım. Aynı adımlar uygulanarak,

$$\begin{aligned}
v_0 &= \tanh \left(0.5 \left(c + \frac{x^\rho}{\rho} \right) \right) + 1, \\
w_0 &= \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(0.5 \left(c + \frac{x^\rho}{\rho} \right) \right) - 1, \\
v_n &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(-\frac{\partial^\rho w_{n-1}}{\partial x^\rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial^\rho v_{n-1}^2}{\partial x^\rho} \right) \right), \\
w_n &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(-\frac{\partial^{3\rho} v_{n-1}}{\partial x^{3\rho}} - \frac{\partial^\rho v_{n-1}}{\partial x^\rho} - A_{n-1} \right) \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümleri elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
v_1 &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\alpha L_t^\beta \left(-\frac{d^\alpha w_0}{dx^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{d^\alpha v_0^2}{dx^\alpha} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sec h^2 \left(0.5 \left(c + \frac{x^\rho}{\rho} \right) \right) \left(\frac{t^\beta}{\beta} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_1 &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(-\frac{\partial^{3\rho} v_0}{\partial x^{3\rho}} - \frac{\partial^\rho v_0}{\partial x^\rho} - A_0 \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sinh \left(0.5 \left(c + \frac{x^\rho}{\rho} \right) \right) \sec h^3 \left(0.5 \left(c + \frac{x^\rho}{\rho} \right) \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2 &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(-\frac{\partial^\rho w_1}{\partial x^\rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial^\rho v_1^2}{\partial x^\rho} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{8} \sec h^2 \left(0.5 \left(c + \frac{x^\rho}{\rho} \right) \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 + \frac{3}{8} \sinh^2 \left(0.5 \left(c + \frac{x^\rho}{\rho} \right) \right) \sec h^4 \left(0.5 \left(c + \frac{x^\rho}{\rho} \right) \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{12} \sinh \left(0.5 \left(c + \frac{x^\rho}{\rho} \right) \right) \sec h^5 \left(0.5 \left(c + \frac{x^\rho}{\rho} \right) \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2 &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(-\frac{\partial^{3\rho} v_1}{\partial x^{3\rho}} - \frac{\partial^\rho v_1}{\partial x^\rho} - \frac{\partial^\rho (v_0 w_1)}{\partial x^\rho} - \frac{\partial^\rho (v_1 w_0)}{\partial x^\rho} \right) \right) \\
&= \frac{1}{8} \left[-3 + 2 \cosh^2 \left(0.5 \left(c + \frac{x^\rho}{\rho} \right) \right) \right] \sec h^4 \left(0.5 \left(c + \frac{x^\rho}{\rho} \right) \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2,
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
v\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= v_0\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) + v_1\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) + v_2\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) + \dots \\
&= \tanh\left(0.5\left(c + \frac{x^\rho}{\rho}\right)\right) + 1 - \frac{1}{2}\sec h^2\left(0.5\left(c + \frac{x^\rho}{\rho}\right)\right)\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right) \\
&\quad - \frac{1}{8}\sec h^2\left(0.5\left(c + \frac{x^\rho}{\rho}\right)\right)\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)^2 \\
&\quad + \frac{3}{8}\sin h^2\left(0.5\left(c + \frac{x^\rho}{\rho}\right)\right)\sec h^4\left(0.5\left(c + \frac{x^\rho}{\rho}\right)\right)\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{12}\sin h\left(0.5\left(c + \frac{x^\rho}{\rho}\right)\right)\sec h^5\left(0.5\left(c + \frac{x^\rho}{\rho}\right)\right)\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)^3 + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= w_0\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) + w_1\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) + w_2\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) + \dots \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\left(0.5\left(c + \frac{x^\rho}{\rho}\right)\right) - 1 + \frac{1}{2}\sinh\left(0.5\left(c + \frac{x^\rho}{\rho}\right)\right) \\
&\quad \sec h^3\left(0.5\left(c + \frac{x^\rho}{\rho}\right)\right)\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right) \\
&\quad + \frac{1}{8}\left[-3 + 2\cosh^2\left(0.5\left(c + \frac{x^\rho}{\rho}\right)\right)\right]\sec h^4\left(0.5\left(c + \frac{x^\rho}{\rho}\right)\right)\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)^2 + \dots
\end{aligned}$$

$\rho, \beta = 1$ için tam çözümü,

$$\begin{aligned}
v(x, \tau) &= \tanh\left(\frac{c}{2} + \frac{1}{2}(x - \tau)\right), \\
w(x, \tau) &= -1 + \frac{1}{2}\sec h^2\left(\frac{c}{2} + \frac{1}{2}(x - \tau)\right),
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.11 (Alfaqeih and Kayijuka, 2020)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\beta u}{\partial \tau^\beta} + \frac{\partial^\rho v}{\partial x^\rho} \frac{\partial^\gamma w}{\partial y^\gamma} - \frac{\partial^\gamma v}{\partial y^\gamma} \frac{\partial^\rho w}{\partial x^\rho} + u &= 0, \\
\frac{\partial^\beta v}{\partial \tau^\beta} - v &= 0, \\
\frac{\partial^\beta w}{\partial \tau^\beta} + \frac{\partial^\rho v}{\partial x^\rho} \frac{\partial^\rho w}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^\gamma u}{\partial y^\gamma} \frac{\partial^\gamma w}{\partial y^\gamma} - w &= 0, \quad 0 < \rho, \beta, \gamma \leq 1.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

lineer olmayan ve homojen olmayan uyumlu kesirli türe ve sahip diferansiyel denklem sistemini,

$$\begin{aligned}
u\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, 0\right) &= \frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma}, \\
v\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, 0\right) &= \frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} + 1, \\
w\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, 0\right) &= -\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma},
\end{aligned} \tag{3.65}$$

başlangıç koşulları ile ele alalım. Aynı adımlar uygulandığında,

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma}, \\
 v_0 &= \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{y^\gamma}{\gamma} + 1, \\
 w_0 &= -\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma}, \\
 u_j &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta (-u_{j-1} - A_{j-1} + B_{j-1}) \right) \\
 v_j &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta (v_{j-1}) \right) \\
 w_j &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta (w_{j-1} - C_{j-1} - D_{j-1}) \right), \quad j = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

indirgeme formülü oluşturulur. Burada,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^\rho v}{\partial x^\rho} \frac{\partial^\gamma w}{\partial y^\gamma} &= \sum_{j=0}^{\infty} A_j, \quad \frac{\partial^\gamma v}{\partial y^\gamma} \frac{\partial^\rho w}{\partial x^\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j, \\
 \frac{\partial^\rho v}{\partial x^\rho} \frac{\partial^\rho w}{\partial x^\rho} &= \sum_{j=0}^{\infty} C_j, \quad \frac{\partial^\gamma u}{\partial y^\gamma} \frac{\partial^\gamma w}{\partial y^\gamma} = \sum_{j=0}^{\infty} D_j,
 \end{aligned}$$

şeklinde ve çözümün kalan terimleri

$$\begin{aligned}
 u_1 \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(-u_0 - \frac{\partial^\rho v_0}{\partial x^\rho} \frac{\partial^\gamma w_0}{\partial y^\gamma} + \frac{\partial^\gamma v_0}{\partial y^\gamma} \frac{\partial^\rho w_0}{\partial x^\rho} \right) \right) \\
 &= - \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_1 &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta (v_0) \right) \\
 &= \left(\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{y^\gamma}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_1 &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(w_0 - \frac{\partial^\rho u_0}{\partial x^\rho} \frac{\partial^\rho w_0}{\partial x^\rho} - \frac{\partial^\gamma u_0}{\partial y^\gamma} \frac{\partial^\gamma w_0}{\partial y^\gamma} \right) \right) \\
 &= \left(-\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2 &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(-u_1 - \frac{\partial^\rho v_0}{\partial x^\rho} \frac{\partial^\gamma w_1}{\partial y^\gamma} - \frac{\partial^\rho v_1}{\partial x^\rho} \frac{\partial^\gamma w_0}{\partial y^\gamma} + \frac{\partial^\gamma v_0}{\partial y^\gamma} \frac{\partial^\rho w_1}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^\gamma v_1}{\partial y^\gamma} \frac{\partial^\rho w_0}{\partial x^\rho} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2 &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta (v_1) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{y^\gamma}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2 &= L_x^{-1} L_\tau^{-1} \left(\frac{1}{q} L_x^\rho L_\tau^\beta \left(w_0 - \frac{\partial^\rho u_0}{\partial x^\rho} \frac{\partial^\rho w_1}{\partial x^\rho} - \frac{\partial^\rho u_1}{\partial x^\rho} \frac{\partial^\rho w_0}{\partial x^\rho} - \frac{\partial^\gamma u_0}{\partial y^\gamma} \frac{\partial^\gamma w_1}{\partial y^\gamma} - \frac{\partial^\gamma u_1}{\partial y^\gamma} \frac{\partial^\gamma w_0}{\partial y^\gamma} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2,
\end{aligned}$$

$$u_3 = -\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3,$$

$$v_3 = \frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{y^\gamma}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3,$$

$$w_3 = \frac{1}{6} \left(-\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3,$$

şeklinde ve denklem sisteminin çözümleri elde edilir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
u \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= \frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} - \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3 + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= 1 + \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{y^\gamma}{\gamma} + \left(\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{y^\gamma}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{y^\gamma}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{y^\gamma}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3 + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= -\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} + \left(-\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{6} \left(-\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3 + \dots
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. $\rho = \gamma = \beta = 1$, değerleri için ise,

$$u(x, y, \tau) = e^{-\tau}(x + y),$$

$$v(x, y, \tau) = e^\tau(x - y + 1),$$

$$w(x, y, \tau) = e^\tau(y - x),$$

çözümlerine ulaşılır.

3.3. Yeni Uyumlu Laplace Dönüşümü

Bu bölümde, belirli türdeki tekillikleri olan uyumlu kesirli diferansiyel denklemlerini çözmek için kullanılan uyumlu Laplace dönüşümünün bir modifiyesi olan yeni bir integral operatörü tanıtılmış, bu dönüşüm ile ilgili bazı özellikler ve teoremler verilmiştir. Önerilen yöntemin geçerliliğini ve uygulanabilirliğini göstermek için ise uyumlu kesirli Lane-Emden tipi denklemlerin doğrusal, doğrusal olmayan ve başlangıç değer problemlerini çözmek için yeni dönüşüm, Adomian ayrıştırma yöntemi ile birlikte uygulanmıştır.

Tanım 3.3 $y(x) : [x_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon, $\nu \in (0, 1]$ ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. y 'nin m . yeni uyumlu Laplace dönüşümü (NCLT) aşağıdaki integral var olmak üzere,

$$\begin{aligned} S_m^{x_0}(y(x)) &= \tilde{Y}_m(p) = \int_{x_0}^{\infty} e^{-p \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu}} y(x) (x-x_0)^{m\nu} d_\nu(x, x_0) \\ &= \int_{x_0}^{\infty} e^{-p \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu}} y(x) (x-x_0)^{(m+1)\nu-1} dx, \end{aligned} \quad (3.66)$$

şeklindedir. Burada $p \in \mathbb{C}$ ve $x_0 \in \mathbb{R}$.

Teorem 3.7 $y(x) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ parçalı sürekli ve üstel bir fonksiyon olsun. $K, B \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x > 0$ için $\left| x^{m\nu} e^{-B \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)} y(x) \right| < K$ olsun. Bu durumda NCLT herhangi $p > B$ değeri için vardır.

İspat NCLT'nin tanımından

$$\begin{aligned} |\mathbb{S}_m(y(x))| &= \left| \int_0^\infty e^{-p \frac{x^\nu}{\nu}} y(x) x^{(m+1)\nu-1} dx \right| \\ &= \int_0^\infty e^{-p \frac{x^\nu}{\nu}} |y(x) x^{m\nu}| x^{\nu-1} dx \\ &\leq \int_0^\infty e^{-p \frac{x^\nu}{\nu}} K e^{B \frac{x^\nu}{\nu}} x^{\nu-1} dx \\ &= K \int_0^\infty e^{-(p-B) \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)} x^{\nu-1} dx \\ &= \frac{K}{p-B}, \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.8 $y(x) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel bir fonksiyon olmak üzere $\mathbb{S}_m(y(x)) = \tilde{Y}_m(p)$ NCLT'nin var olduğu kabul edilsin. O halde, $L^\nu(y(x)) = \hat{y}(p)$, CLT'i ifade etmek üzere,

1. $\mathbb{S}_m \left(\frac{1}{x^{m\nu}} y(x) \right) = L^\nu (y(x)) ,$
2. $\mathbb{S}_0 (y(x)) = L^\nu (y(x)) ,$
3. $\mathbb{S}_m (y(x)) = (-1)^m \nu^m \frac{d^m (L^\nu (y(x)))}{dp^m} ,$

dir.

İspat (1) NCLT tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_m \left(\frac{1}{x^{m\nu}} y(x) \right) &= \int_0^\infty \frac{1}{x^{m\nu}} e^{-p \frac{x^\nu}{\nu}} y(x) x^{(m+1)\nu-1} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-p \frac{x^\nu}{\nu}} y(x) x^{\nu-1} dx, \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir ve

$$\mathbb{S}_m \left(\frac{1}{x^{m\nu}} y(x) \right) = L^\nu (y(x)) ,$$

ulaşılır.

(2) NCLT tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_0 (y(x)) &= \int_0^\infty e^{-p \frac{x^\nu}{\nu}} y(x) x^{(0+1)\nu-1} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-p \frac{x^\nu}{\nu}} y(x) x^{\nu-1} dx, \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir ve

$$\mathbb{S}_0 (y(x)) = L^\nu (y(x)) ,$$

olarak yazılabilir.

(3) Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} S_m (y(x)) &= \int_0^\infty e^{-p \frac{x^\nu}{\nu}} y(x) x^{(m+1)\nu-1} dx \\ &= \nu^m \int_0^\infty \left(\frac{x^{m\nu}}{\nu^m} \right) e^{-p \frac{x^\nu}{\nu}} y(x) x^{\nu-1} dx, \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\mathbb{S}_m (y(x)) = \nu^m (-1)^m \frac{d^m (L^\nu (y(x)))}{dp^m} ,$$

olarak yazılabilir.

3.3.1. Yeni Uyumlu Laplace Dönüşümünün Bazı Özellikleri

Teorem 3.9 y ve w NCLT'leri var olan iki fonksiyon olsun. Yani $\mathbb{S}_m(y(x)) = \tilde{Y}_m(p)$ ve $\mathbb{S}_m(w(x)) = \tilde{W}_m(p)$ olsun. Bu durumda,

1. Lineerlik Özelliği

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ keyfi sabitler olmak üzere,

$$\mathbb{S}_m(a_1 y(x) + a_2 w(x)) = a_1 \mathbb{S}_m(y(x)) + a_2 \mathbb{S}_m(w(x)),$$

dir.

2. Ölçek Değişim Özelliği

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbb{S}_m\left(y\left(a\frac{x^\nu}{\nu}\right)\right) = \frac{1}{a} Y_m\left(\frac{p}{a}\right),$$

dir.

3. Öteleme Özelliği

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbb{S}_m\left(e^{-a\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)} y\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)\right) = Y_m(p+a),$$

dir.

4. Görüntü türetme özelliği

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\mathbb{S}_m\left(x^{n\nu} y\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)\right) = (-1)^n \nu^n \frac{d^n(Y_m(p))}{dp^n},$$

dir.

İspat (1) NCLT'nin tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-p\frac{x^\nu}{\nu}} (a_1 y(x) + a_2 w(x)) x^{(m+1)\nu-1} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-p\frac{x^\nu}{\nu}} a_1 y(x) x^{(m+1)\nu-1} dx + \int_0^\infty e^{-p\frac{x^\nu}{\nu}} a_2 w(x) x^{(m+1)\nu-1} dx \\ &= a_1 \int_0^\infty e^{-p\frac{x^\nu}{\nu}} y(x) x^{(m+1)\nu-1} dx + a_2 \int_0^\infty e^{-p\frac{x^\nu}{\nu}} w(x) x^{(m+1)\nu-1} dx \\ &= a_1 \mathbb{S}_m(y(x)) + a_2 \mathbb{S}_m(w(x)), \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır ve

$$\mathbb{S}_m(a_1 y(x) + a_2 w(x)) = a_1 \mathbb{S}_m(y(x)) + a_2 \mathbb{S}_m(w(x)),$$

elde edilir.

(2) NCLT tanımı ve Teorem (3.8) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_m(y(ax)) &= \int_0^\infty e^{-p \frac{x^\nu}{\nu}} y(ax) x^{(m+1)\nu-1} dx \\ &= (-1)^m \nu^m \frac{d^m (L^\nu(y(ax)))}{dp^m} \\ &= (-1)^m \nu^m \frac{d^m \left(\frac{1}{a^\nu} \hat{y} \left(\frac{p}{a^\nu} \right) \right)}{dp^m} \\ &= \frac{1}{a^\nu} (-1)^m \nu^m \frac{d^m \left(\hat{y} \left(\frac{p}{a^\nu} \right) \right)}{dp^m} \\ &= \frac{1}{a^\nu} \tilde{Y}_m \left(\frac{p}{a^\nu} \right), \end{aligned}$$

elde edilir.

(3) NCLT tanımı ve Teorem (3.8) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_m \left(e^{\pm a \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)} y(x) \right) &= \int_0^\infty e^{-(p \pm a) \frac{x^\nu}{\nu}} y(x) x^{(m+1)\nu-1} dx \\ &= (-1)^m \nu^m \frac{d^m \left(L^\nu \left(e^{\pm a \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)} y(x) \right) \right)}{dp^m} \\ &= (-1)^m \nu^m \frac{d^m (\hat{y}(p \mp a))}{dp^m} \\ &= \tilde{Y}_m(p \mp a), \end{aligned}$$

elde edilir.

(4) Benzer şekilde ve Teorem (3.8) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_m(x^{n\nu} y(x)) &= \int_0^\infty x^{n\nu} e^{-p \frac{x^\nu}{\nu}} y(x) x^{(m+1)\nu-1} dx \\ &= (-1)^m \nu^m \frac{d^m (L^\nu(x^{n\nu} y(x)))}{dp^m} \\ &= (-1)^m \nu^m \frac{d^m \left((-1)^n \nu^n \frac{d^n (L^\nu(y(x)))}{dp^n} \right)}{dp^m} \\ &= (-1)^n \nu^n \frac{d^n \left((-1)^m \nu^m \frac{d^m (L^\nu(y(x)))}{dp^m} \right)}{dp^n} \\ &= (-1)^n \nu^n \frac{d^n (\tilde{Y}_m(p))}{dp^n}, \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.10 $y(x) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel bir fonksiyon ve $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\mathbb{S}_m(y(x)) = \tilde{Y}_m(p)$ NCLT'nin var olduğu kabul edilsin. O halde, $L^\nu(y(x)) = \hat{y}(p)$ CLT'i ifade etmek üzere,

$$\mathbb{S}_m\left(\frac{d^{m\nu}}{dx^{m\nu}}y(x)\right) = (-1)^m \nu^m \sum_{k=0}^m C_k^m \frac{d^k(p^m)}{dp^k} \frac{d^{m-k}(\hat{Y}(p))}{dp^{m-k}},$$

dir.

İspat NCLT tanımı, Teorem (3.8) ve Leibniz formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_m\left(\frac{d^{m\nu}}{dx^{m\nu}}y(x)\right) &= \int_0^\infty e^{-p\frac{x^\nu}{\nu}} \frac{d^{m\nu}}{dx^{m\nu}}y(x) x^{(m+1)\nu-1} dx \\ &= (-1)^m \nu^m \frac{d^m\left(L^\nu\left(\frac{d^{m\nu}}{dx^{m\nu}}y(x)\right)\right)}{dp^m} \\ &= (-1)^m \nu^m \frac{d^m\left(p^n \hat{y}(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} \frac{d^{i\nu}y(0)}{dx^{i\nu}}\right)}{dp^m} \\ &= (-1)^m \nu^m \sum_{k=0}^m C_k^m \frac{d^k(p^n)}{dp^k} \frac{d^{m-k}(\hat{y}(p))}{dp^{m-k}} - \frac{(-1)^m \nu^m d^m\left(\sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} \frac{d^{i\nu}y(0)}{dx^{i\nu}}\right)}{dp^m}, \end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_1\left(\frac{d^\nu}{dx^\nu}y\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)\right) &= -\nu p \frac{d(\bar{Y}(p))}{dp} - \nu \bar{Y}(p), \\ \mathbb{S}_1\left(\frac{d^{2\nu}}{dx^{2\nu}}y\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)\right) &= -\nu p^2 \frac{d(\bar{Y}(p))}{dp} - 2\nu p \bar{Y}(p) + \nu y(0), \\ \mathbb{S}_2\left(\frac{d^{2\nu}}{dx^{2\nu}}y\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)\right) &= \nu^2 p^2 \frac{d^2(\bar{Y}(p))}{dp^2} + 4\nu^2 p \frac{d(\bar{Y}(p))}{dp} + 2\nu^2 \bar{Y}(p), \end{aligned}$$

formları elde edilir.

3.3.2. Yeni Uyumlu Laplace Dönüşümünün Analizi

NCLT metodunun mantığını daha iyi anlaşılması için en genel uyumlu lineer olmayan ve homojen olmayan kısmi tekil kesirli Lane-Emden tipi denklemini başlangıç koşulları ile ele alalım,

$$\frac{d^{2\nu}y}{dx^{2\nu}} + \frac{2\nu}{x^\nu} \frac{d^\nu y}{dx^\nu} + R(y) + N(y) = h\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right), \quad (3.67)$$

$$y(0) = C, \quad \frac{\partial^\nu(y(0))}{\partial x^\nu} = D. \quad (3.68)$$

Burada, $0 < \nu \leq 1$ $x > 0$. R olmak üzere, $\frac{d^{2\nu}y}{dx^{2\nu}}$ operatörü y 'nin ν . mertebeden iki kez ardışık CFD'ni ifade etmektedir. Ayrıca, C ve D sabit sayılar ve burada h bilinen bir fonksiyondur.

(3.67) denkleminde, NCLT operatörü S_1 uygulandığında,

$$-\nu p^2 \frac{d(\bar{Y}(p))}{dp} - 2\nu p \bar{Y}(p) + \nu y(0) + 2\nu L^\nu \left(\frac{\partial^\nu y}{\partial x^\nu} \right) + S_1(R(y)) + S_1(N(y)) = S_1 \left(h \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) \right), \quad (3.69)$$

ifadesi elde edilir. (3.69) denklemi, CLT'nin türev alma özelliklerine göre düzenlendiğinde,

$$-\nu p^2 \frac{d(\bar{Y}(p))}{dp} - \nu y(0) + S_1(R(y)) + S_1(N(y)) = S_1 \left(h \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) \right), \quad (3.70)$$

bulunur ve

$$\bar{Y}(p) = \int \left[\frac{1}{\nu p^2} S_1(R(y)) + \frac{1}{\nu p^2} S_1(N(y)) \right] dp + \int \left[-\frac{1}{\nu p^2} S_1 \left(h \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) \right) - \frac{1}{p^2} y(0) \right] dp, \quad (3.71)$$

elde edilir. (3.71) denkleminde ters CLT uygulandığında,

$$y \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) = L^{-1} \left[\int \left[\frac{1}{\nu p^2} S_1(R(y)) + \frac{1}{\nu p^2} S_1(N(y)) \right] dp + \int \left[-\frac{1}{\nu p^2} y(0) - \frac{1}{\nu p^2} S_1 \left(h \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) \right) \right] dp \right], \quad (3.72)$$

formuna ulaşılır. Burada Adomian çözümü ise,

$$y \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right), \quad (3.73)$$

şeklindedir ve lineer olmayan terimler,

$$N(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (3.74)$$

olarak ifade edilir. (3.74) denklemindeki A_r ,

$$A_r = \frac{1}{r!} \frac{d^r}{d\lambda^r} \left[N \left(\sum_{j=0}^r \lambda^j y_j \right) \right]_{\lambda=0}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (3.75)$$

olarak tanımlanır. (3.74) ve (3.73) denklemleri, (3.72) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} y_n \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) &= L^{-1} \left[\int \left[\frac{1}{\nu p^2} S_1 \left(R \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) \right) \right) + \frac{1}{\nu p^2} S_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \right] dp \right] \\ &+ y(0) - L^{-1} \left[\int \left[\frac{1}{\nu p^2} S_1 \left(h \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) \right) \right] dp \right], \end{aligned} \quad (3.76)$$

formu elde edilir ve (3.76) denkleminin her iki tarafı orantılandığında,

$$\begin{aligned} y_0 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) &= y(0) - L^{-1} \left[\int \left[\frac{1}{\nu p^2} S_1 \left(h \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) \right) \right] dp \right], \\ y_{n+1} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) &= L^{-1} \left[\int \left[\frac{1}{\nu p^2} S_1 \left(R \left(y_n \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) \right) \right) + \frac{1}{\nu p^2} S_1(A_n) \right] dp \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.77)$$

iterasyonuna ulaşılır.

3.3.3. Nümerik Örnekler

Bu bölümde, NCLTM, CFD içeren geniş bir lineer, lineer olmayan ve tekil Lane-Emden tipi diferansiyel denklemler sistemi sınıfının çözümlerini elde etmek için uygulamalara yer verilmiştir.

Örnek 3.12

$$\frac{d^{2\nu}y}{dx^{2\nu}} + \frac{2\nu}{x^\nu} \frac{d^\nu y}{dx^\nu} - \left(4 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + 6 \right) y = 0, \quad (3.78)$$

tekil uyumlu kesirli homojen Lane-Emden tipi denklemini $0 < \nu \leq 1$, $x > 0$ olmak üzere,

$$y(0) = 1, \quad \frac{\partial^\nu (y(0))}{\partial x^\nu} = 0, \quad (3.79)$$

başlangıç koşulları ile ele alalım. Aynı adımlar uygulandığında,

$$\begin{aligned} y_0 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) &= y(0) = 1, \\ y_{n+1} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) &= L^{-1} \left[\int \left[\frac{-1}{\nu p^2} S_1 \left(\left(4 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + 6 \right) y_n \right) \right] dp \right], n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.80)$$

indirgeme formülü oluşturulur ve çözümün kalan terimleri,

$$\begin{aligned} y_1 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) &= L^{-1} \left[\int \left[\frac{-1}{\nu p^2} S_1 \left(\left(4 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + 6 \right) y_0 \right) \right] dp \right] \\ &= L^{-1} \left[\int \left[\frac{-1}{\nu p^2} \left(\frac{24\nu}{p^4} + \frac{6\nu}{p^2} \right) \right] dp \right] = \frac{1}{5} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 + \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$y_2(x) = \frac{3}{10} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 + \frac{13}{105} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 + \frac{1}{90} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8, \quad (3.82)$$

$$y_3(x) = \frac{3}{70} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 + \frac{17}{630} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8 + \frac{59}{11550} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{10} + \frac{1}{3510} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{12}, \quad (3.83)$$

ile hesaplanır.

$$y(x) = y_0 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + y_1 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + y_2 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + \dots \quad (3.84)$$

olduğu için

$$y(x) = 1 + \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 + \frac{1}{3!} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 + \frac{1}{4!} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8 + \dots \quad (3.85)$$

formuna ulaşılır ve çözümün kapalı formu,

$$y(x) = e^{\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)^2}, \quad (3.86)$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.13

$$\frac{d^{2\nu}y}{dx^{2\nu}} + \frac{2\nu}{x^\nu} \frac{d^\nu y}{dx^\nu} + 8e^y + 4e^{\frac{y}{2}} = 0, \quad (3.87)$$

tekil uyumlu kesirli homojen lineer olmayan Lane-Emden tipi denklemini $0 < \nu \leq 1$ $x > 0$ olmak üzere,

$$y(0) = 0, \quad \frac{\partial^\nu (y(0))}{\partial x^\nu} = 0, \quad (3.88)$$

başlangıç koşulları ile ele alalım. Benzer adımlar uygulandığında

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y(0) = 0, \\ y_{n+1}(x) &= L^{-1} \left[\int \left[\frac{1}{\nu p^2} S_1(A_n) \right] dp \right], n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.89)$$

indirgeme formülü oluşturulur.

$$\begin{aligned} A_0 &= 4e^{\frac{y_0}{2}} + 8e^{y_0}, \\ A_1 &= y_1 \left(2e^{\frac{y_0}{2}} + 8e^{y_0} \right), \\ A_2 &= y_2 \left(2e^{\frac{y_0}{2}} + 8e^{y_0} \right) + y_1^2 \left(0.5e^{\frac{y_0}{2}} + 4e^{y_0} \right), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.90)$$

Adomian polinomları kullanılarak,

$$y_0(x) = 0, \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= L^{-1} \left[\int \left[\frac{1}{\nu p^2} S_1(A_0) \right] dp \right] \\ &= L^{-1} \left[\int \left[\frac{1}{\nu p^2} \frac{12\nu}{p^2} \right] dp \right] \\ &= -2 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.92)$$

şeklinde elde edilir ve çözümün kalan terimleri,

$$y_2(x) = \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4, \quad (3.93)$$

$$y_3(x) = \frac{-2}{3} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6, \quad (3.94)$$

$\vdots$

$$y(x) = y_0 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + y_1 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + y_2 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + \dots \quad (3.95)$$

olduğu için

$$y(x) = -2 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 + \frac{-2}{3} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 + \dots, \quad (3.96)$$

formuna ulaşılır ve çözümün kapalı formu,

$$y(x) = -2 \ln \left(1 + \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 \right), \quad (3.97)$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.14

$$\frac{d^{2\nu} y}{dx^{2\nu}} + \frac{2\nu}{x^\nu} \frac{d^\nu y}{dx^\nu} - 6y = 4y \ln(y), \quad (3.98)$$

tekil uyumlu kesirli homojen olmayan lineer olmayan Lane-Emden tipi denklemini $0 < \nu \leq 1$, $x, y > 0$ olmak üzere,

$$y(0) = 1, \quad \frac{\partial^\nu (y(0))}{\partial x^\nu} = 0, \quad (3.99)$$

başlangıç koşulları ile ele alalım. Benzer adımlar uygulandığında

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y(0) = 1, \\ y_{n+1}(x) &= L^{-1} \left[\int \left[\frac{-1}{\nu p^2} (S_1(A_n) + S_1(y_n)) \right] dp \right], n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.100)$$

indirgeme formülü oluşturulur.

$$\begin{aligned} A_0 &= 4y_0 \ln(y_0), \\ A_1 &= (1 + \ln(y_0)) y_1, \\ A_2 &= (1 + \ln(y_0)) y_1 + 0.5 \frac{y_1^2}{y_0}, \\ A_3 &= (1 + \ln(y_0)) y_3 + \frac{y_1 y_2}{y_0} - \frac{1}{6} \frac{y_1^3}{y_0^2}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.101)$$

Adomian polinomları kullanılarak,

$$y_0(x) = 1, \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= L^{-1} \left[\int \left[\frac{-1}{\nu p^2} (S_1(A_0) + S_1(y_0)) \right] dp \right] \\
&= L^{-1} \left[\int \left[\frac{-1}{\nu p^2} \frac{\nu}{p^2} \right] dp \right] \\
&= \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2,
\end{aligned} \tag{3.103}$$

terimleri elde edilir ve çözümün kalan terimleri

$$y_2(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4, \tag{3.104}$$

$$y_3(x) = \frac{1}{6} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6, \tag{3.105}$$

$$y_4(x) = \frac{1}{24} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8, \tag{3.106}$$

ile hesaplanır.

$$y(x) = y_0 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + y_1 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + y_2 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + \dots$$

olduğu için

$$y(x) = 1 + \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 + \frac{1}{3!} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 + \frac{1}{4!} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8 \dots,$$

formuna ulaşılır ve çözümün kapalı formu,

$$y(x) = e^{\left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2}, \tag{3.107}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.15

$$\begin{aligned}
\frac{d^{2\nu} y}{dx^{2\nu}} + \frac{2\nu}{x^\nu} \frac{d^\nu y}{dx^\nu} - y - w - \left(4 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + 4 \right) w &= 0, \\
\frac{d^{2\nu} w}{dx^{2\nu}} + \frac{2\nu}{x^\nu} \frac{d^\nu w}{dx^\nu} + y + w - \left(4 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + 8 \right) y &= 0,
\end{aligned} \tag{3.108}$$

tekil uyumlu kesirli homojen lineer Lane-Emden tipi denklem sistemini $0 < \nu \leq 1$, $x > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
y(0) &= 1, \quad \frac{\partial^\nu (y(0))}{\partial x^\nu} = 0, \\
w(0) &= 1, \quad \frac{\partial^\nu (w(0))}{\partial x^\nu} = 0,
\end{aligned} \tag{3.109}$$

başlangıç koşulları ile ele alalım. NCLTM ile ilgili işlemleri takip ederek,

$$y_0(x) = y(0) = 1,$$

$$y_{n+1}(x) = L^{-1} \left[\int \left[\frac{-1}{\nu p^2} \left(S_1 \left(y_n + w_n + \left(4 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + 4 \right) w_n \right) \right) \right] dp \right], n = 0, 1, 2, \dots$$

$$w_0(x) = y(0) = 1,$$

$$w_{n+1}(x) = L^{-1} \left[\int \left[\frac{1}{\nu p^2} \left(S_1 \left(y_n + w_n - \left(4 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + 8 \right) y_n \right) \right) \right] dp \right], n = 0, 1, 2, \dots$$

indirgeme formülleri oluşturulur ve çözümün kalan terimleri,

$$y_1 = \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4,$$

$$w_1 = \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4,$$

$$y_2 = \frac{3}{10} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 + \frac{26}{210} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 + \frac{1}{90} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8,$$

$$w_2 = \frac{3}{10} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 + \frac{26}{210} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 + \frac{1}{90} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8,$$

$$y_3 = \frac{9}{210} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 + \frac{28}{2520} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8 + \frac{59}{11550} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{10} + \frac{2}{7020} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{12},$$

$$w_3 = \frac{9}{210} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 + \frac{28}{2520} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8 + \frac{59}{11550} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{10} + \frac{2}{7020} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{12},$$

ile hesaplanır.

$$y(x) = y_0 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + y_1 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + y_2 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + \dots$$

$$w(x) = w_0 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + w_1 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + w_2 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + \dots \quad (3.110)$$

olduğu için

$$y(x) = 1 + \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 + \frac{3}{10} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 + \frac{26}{210} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 + \frac{1}{90} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8 \\ + \frac{9}{210} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 + \frac{28}{2520} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8 + \frac{59}{11550} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{10} + \frac{2}{7020} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{12} + \dots$$

$$w(x) = 1 + \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 + \frac{3}{10} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 + \frac{26}{210} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 + \frac{1}{90} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8 \\ + \frac{9}{210} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 + \frac{28}{2520} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8 + \frac{59}{11550} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{10} + \frac{2}{7020} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{12} + \dots$$

formuna ulaşılır ve çözümün kapalı formu,

$$y(x) = e^{\left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2},$$

$$w(x) = e^{\left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2}, \quad (3.111)$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.16

$$\begin{aligned}\frac{d^{2\nu}y}{dx^{2\nu}} + \frac{2\nu}{x^\nu} \frac{d^\nu y}{dx^\nu} + w^2 - y^2 + 6w &= 6 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + 6, \\ \frac{d^{2\nu}y}{dx^{2\nu}} + \frac{2\nu}{x^\nu} \frac{d^\nu y}{dx^\nu} + y^2 - w^2 - 6w &= -6 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + 6,\end{aligned}\quad (3.112)$$

tekil uyumlu kesirli homojen olmayan lineer olmayan Lane-Emden tipi denklem sistemini $0 < \nu \leq 1$
 $x > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}y(0) &= 1, \\ \frac{\partial^\nu (y(0))}{\partial x^\nu} &= 0, \\ w(0) &= -1, \\ \frac{\partial^\nu (w(0))}{\partial x^\nu} &= 0,\end{aligned}\quad (3.113)$$

başlangıç koşulları ile ele alalım. NCLTM ile ilgili işlemleri uygulanarak,

$$\begin{aligned}y_0(x) &= 1 - L^{-1} \left[\int \left[\frac{1}{\nu p^2} \left(S_1 \left(6 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + 6 \right) \right) \right] dp \right] = 1 + \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + \frac{3}{10} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4, \\ y_{n+1}(x) &= L^{-1} \left[\int \left[\frac{-1}{\nu p^2} (S_1 (A_n - B_n + 6w_n)) \right] dp \right], n = 0, 1, 2, \dots \\ w_0(x) &= -1 - L^{-1} \left[\int \left[\frac{1}{\nu p^2} \left(S_1 \left(-6 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + 6 \right) \right) \right] dp \right] = -1 + \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 - \frac{3}{10} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4, \\ w_{n+1}(x) &= L^{-1} \left[\int \left[\frac{-1}{\nu p^2} (S_1 (B_n - A_n - 6w_n)) \right] dp \right], n = 0, 1, 2,\end{aligned}\quad (3.114)$$

indirgeme formülleri oluşturulur.

$$\begin{aligned}A_0 &= w_0^2, \\ A_1 &= 2w_0w_1, \\ A_2 &= 2w_0w_2 + w_1^2, \\ &\vdots \\ B_0 &= y_0^2, \\ B_1 &= 2y_0y_1, \\ B_2 &= 2y_0y_2 + y_1^2, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Adomian polinomları kullanılarak,

$$y_0(x) = 0, \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= L^{-1} \left[\int \left[\frac{1}{\nu p^2} S_1(A_0) \right] dp \right] \\
&= L^{-1} \left[\int \left[\frac{1}{\nu p^2} \frac{12\nu}{p^2} \right] dp \right] \\
&= -2 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2,
\end{aligned} \tag{3.116}$$

terimleri elde edilir ve çözümün kalan terimleri,

$$\begin{aligned}
y_1 &= \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 - \frac{1}{10} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 + \frac{3}{70} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 + \frac{1}{60} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8, \\
w_1 &= - \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 - \frac{3}{70} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 - \frac{1}{60} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8, \\
y_2 &= \frac{3}{10} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 + \frac{17}{210} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 - \frac{1}{504} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8 + \frac{19}{7700} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{10} + \frac{1}{2340} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{12}, \\
w_2 &= \frac{-3}{10} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 - \frac{17}{210} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 + \frac{1}{504} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8 - \frac{19}{7700} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{10} - \frac{1}{2340} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{12},
\end{aligned}$$

ile hesaplanır.

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_0 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + y_1 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + y_2 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + \dots \\
w(x) &= w_0 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + w_1 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + w_2 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + \dots
\end{aligned} \tag{3.117}$$

olduğu için,

$$\begin{aligned}
y(x) &= 1 + \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 - \frac{1}{10} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 + \frac{3}{70} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 + \frac{1}{60} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8 + \frac{3}{10} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 + \frac{17}{210} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 \\
&\quad - \frac{1}{504} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8 + \frac{19}{7700} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{10} + \frac{1}{2340} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{12} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(x) &= -1 - \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 - \frac{3}{70} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 - \frac{1}{60} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8 + \frac{-3}{10} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^4 - \frac{17}{210} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^6 \\
&\quad + \frac{1}{504} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^8 - \frac{19}{7700} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{10} - \frac{1}{2340} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^{12} + \dots
\end{aligned}$$

formuna ulaşılır ve çözümün kapalı formu,

$$\begin{aligned}
y(x) &= \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + e^{\left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2}, \\
w(x) &= \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 - e^{\left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2},
\end{aligned} \tag{3.118}$$

olarak elde edilir.

4. UYUMLU SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ

4.1. Tek Kath Uyumlu Sumudu Dönüşümü

Tanım 4.1 Ω_μ bir fonksiyonlar kümesi ve

$$\Omega_\mu = \left\{ \phi(t) : \exists K, \lambda_1, \lambda_2 > 0, |\phi(t)| < K \exp\left(\frac{\left(\frac{t^\mu}{\mu}\right)}{\lambda_j}\right), j = 1, 2 \text{ ve } t^\mu \in (-1)^j \times \mathbb{R}_+ \right\}$$

olmak üzere, $\phi(t)$ fonksiyonunun uyumlu Sumudu dönüşümü (CST);

$$\begin{aligned} S_t^\mu(\phi(t) : u) &= \int_0^\infty \phi(ut) e^{-\frac{t^\mu}{\mu}} d_\mu t, \\ &= \int_0^\infty \phi(ut) e^{-\frac{t^\mu}{\mu}} t^{\mu-1} dt, 0 < \mu \leq 1, \end{aligned} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır (Al-Zhour et al., 2019).

Tanım 4.2 $0 < \mu \leq 1$ ve $\phi : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ parçalı sürekli ve üstel mertebeli bir fonksiyon olmak üzere, Bu durumda ϕ fonksiyonunun uyumlu Sumudu dönüşümü,

$$S_t^\mu(\phi(x, t) : u) = \int_0^\infty \phi(x, ut) e^{-\frac{t^\mu}{\mu}} t^{\mu-1} dt, \quad (4.2)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 4.1 $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel bir fonksiyon olmak üzere, $S_t^\mu(\phi(t) : u) = \bar{\phi}_\mu(u)$ CST'nin var olduğu kabul edilsin. O halde, $S(\phi(x) : u) = \int_0^\infty \phi(x, ut) e^{-t} dt$ klasik ST ifade etmek üzere,

$$S_t^\mu\left(\phi\left(\frac{t^\mu}{\mu}\right) : u\right) = S(\phi(t) : u),$$

veya,

$$S_t^\mu(\phi(t) : u) = S\left(\phi\left((\mu t)^{\frac{1}{\mu}}\right) : u\right),$$

dir (Al-Zhour et al., 2019).

Teorem 4.2 $\phi(t) \in \Omega_\mu$ olmak üzere, $\phi(t)$ fonksiyonunun uyumlu Sumudu dönüşümü CST $\bar{\phi}_\mu(u)$, uyumlu Laplace dönüşümü $CLT^\mu \bar{\phi}_\mu(u)$ olmak üzere,

$$\bar{\phi}_\mu(u) = \frac{1}{u} \phi_\mu\left(\frac{1}{u}\right),$$

eşitliği vardır (Al-Zhour et al., 2019).

Örnek 4.1 $\varpi, n \in \mathbb{R}$ ve $\mu \in (0, 1]$ olmak üzere, bazı temel fonksiyonların uyumlu Sumudu dönüşümleri CST

1. $S_t^\mu(\varpi) = \varpi$
2. $S_t^\mu\left(\left(\frac{t^\mu}{\mu}\right)^n\right) = \Gamma(s+1)u^n.$
3. $S_t^\mu\left(e^{\frac{\varpi t^\mu}{\mu}}\right) = \frac{1}{(1-\varpi u)}, \varpi u > 1.$
4. $S_t^\mu\left(\sin\left(\frac{\varpi t^\mu}{\mu}\right)\right) = \frac{\varpi}{(1+\varpi^2 u^2)}, |\varpi| u > 1.$
5. $S_t^\mu\left(\cos\left(\frac{\varpi t^\mu}{\mu}\right)\right) = \frac{1}{(1+\varpi^2 u^2)}, |\varpi| u > 1.$

şeklindedir.

Teorem 4.3 $\phi(t), \frac{\partial^\mu \phi(t)}{\partial t^\mu}, \frac{\partial^{2\mu} \phi(t)}{\partial t^{2\mu}}, \dots, \frac{\partial^{(m-1)\mu} \phi(t)}{\partial t^{(m-1)\mu}} \in \Omega_\mu$ olmak üzere, CST vardır ve

$$S_t^\mu\left(\frac{\partial^{m\mu} \phi(t)}{\partial t^{m\mu}}\right) = \bar{\phi}_{m\mu}(u) = \frac{S_t^\mu(\phi(t)) - \phi(0)}{u^m} - \sum_{i=1}^{m-1} u^{i-m} \left(\frac{\partial^{i\mu} \phi(0)}{\partial t^{i\mu}}\right). \quad (4.3)$$

İspat $\frac{\partial^{m\mu} \phi(t)}{\partial t^{m\mu}}$ fonksiyonun CLT yazıldığında,

$$L_t^\mu\left(\frac{\partial^{m\mu} \phi(t)}{\partial t^{m\mu}}\right) = \bar{\phi}_{m\mu}\left(\frac{1}{u}\right) = p^m L_t^\mu(\phi(t)) - \sum_{i=1}^{m-1} p^{m-i-1} \left(\frac{\partial^{i\mu} \phi(0)}{\partial t^{i\mu}}\right),$$

elde edilir. Teorem 4.2 kullanarak

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{m\mu}(u) &= \frac{1}{u} \bar{\phi}_{m\mu}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\left(\frac{1}{u}\right)^{m\mu} \phi_\mu\left(\frac{1}{u}\right) - \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{1}{u}\right)^{m-i-1} \left(\frac{\partial^{i\mu} \phi(0)}{\partial t^{i\mu}}\right)}{u} \\ &= \frac{1}{u^m} \frac{\bar{\phi}_\mu\left(\frac{1}{u}\right)}{u} - \sum_{i=0}^{m-1} (u)^{i-m} \left(\frac{\partial^{i\mu} \phi(0)}{\partial t^{i\mu}}\right) \\ &= \frac{1}{u^m} \bar{\phi}_\mu(u) - \sum_{i=0}^{m-1} (u)^{i-m} \left(\frac{\partial^{i\mu} \phi(0)}{\partial t^{i\mu}}\right), \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 4.4 $\phi(x, t)$ parçalı sürekli, üstel mertebeli ve iki değişkenli bir fonksiyon olmak üzere, ve CST $\bar{\phi}(x, u)$ olmak üzere uyumlu kısmi türevlerinin CST'leri,

$$\begin{aligned} S_t^\mu\left(\frac{\partial^{m\mu} \phi(x, t)}{\partial t^{m\mu}}\right) &= \frac{S_t^\mu(\phi(x, t)) - \phi(x, 0)}{u^m} - \sum_{i=1}^{m-1} u^{i-m} \left(\frac{\partial^{i\mu} \phi(x, 0)}{\partial t^{i\mu}}\right), \\ S_t^\mu\left(\frac{\partial^{m\mu} \phi(x, t)}{\partial x^{m\mu}}\right) &= \frac{d^{m\mu} \bar{\phi}(x, u)}{dx^{m\mu}}, \end{aligned}$$

şeklindedir.

4.1.1. Uyumlu Sumudu Dönüşümünün Bazı Özellikleri

Teorem 4.5 $\phi(t)$ ve $\varphi(t)$ uyumlu Sumudu dönüşümü mevcut olan ve $S_t^\mu(\phi(t)) = \bar{\phi}_\mu(u)$, $S_t^\mu(\varphi(t)) = \bar{\varphi}_\mu(u)$ eşitliğini sağlayan iki fonksiyon olsun. O halde,

1. Lineerlik Özelliği

$\rho_1, \rho_2 \in R$ olmak üzere

$$S_t^\mu(\rho_1\phi(t) + \rho_2\varphi(t)) = \rho_1 S_t^\mu(\phi(t)) + \rho_2 S_t^\mu(\varphi(t)),$$

dir.

2. Ölçek Değişim Özelliği

$\rho_1 \in R$ olmak üzere

$$S_t^\mu\left(\phi\left(\rho_1 \frac{t^\mu}{\mu}\right)\right) = \bar{\phi}_\mu(\rho_1 u),$$

dir.

3. Öteleme Özelliği

$\rho_1 \in R$ olmak üzere

$$S_t^\mu\left(e^{\rho_1\left(\frac{t^\mu}{\mu}\right)}\phi\left(\frac{t^\mu}{\mu}\right)\right) = \frac{1}{1 - \rho_1 u} \bar{\phi}_\mu\left(\frac{u}{1 - \rho_1 u}\right),$$

dir.

4. Konvolüsyon Özelliği

$\phi(t) * \varphi(t)$, ifadesi ϕ ve φ fonksiyonlarının Konvolüsyonlarını ifade etmek üzere

$$S_t^\mu(\phi(t) * \varphi(t)) = u \bar{\phi}_\mu(u) \bar{\varphi}_\mu(u),$$

dir (Al-Zhour et al., 2019).

4.2. Uyumlu Sumudu Ayırıştırma Yöntemi

Bu bölümde, FW, GO, ZK ve FN gibi doğa bilimleri ve mühendislikte büyük öneme sahip olan bu denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için uyumlu Sumudu ayırıştırma yöntemi adı verilen yeni bir analitik yöntem tanıtılmıştır. Denklemlerin sahip olduğu kesirli türev ifadeleri, uyumlu türev tanımı kullanılarak ele alınmıştır. Ayrıca, önerilen yöntemin yakınsama ve hata analizleri Banach'ın "sabit nokta teorisi" ile araştırılmıştır.

4.2.1. Uyumlu Kesirli Mertebeli Diferensiyel Fornberg-Whitham

Denklemleri

Uyumlu kesirli türeve sahip Fornberg-Whitham denklemi,

$$\frac{\partial^\beta \varphi}{\partial \tau^\beta} - \frac{\partial^{2\nu}}{\partial x^{2\nu}} \left(\frac{\partial^\beta \varphi}{\partial \tau^\beta} \right) + \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} = \varphi \frac{\partial^{3\nu} \varphi}{\partial x^{3\nu}} - \varphi \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} + 3 \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} \frac{\partial^{2\nu} \varphi}{\partial x^{2\nu}}, 0 < \nu, \beta \leq 1, \quad (4.4)$$

şeklindedir. Burada, x uzaysal koordinat, τ zaman parametresi ve $\varphi(x, \tau)$ akışkan hızını ifade etmektedir. β ve ν ($0 < \nu, \beta \leq 1$) değişkenleri uyumlu kesirli türevin mertebesini tanımlayan değişkenlerdir. Ayrıca, k keyfi bir sabit olmak üzere, FW denklemi,

$$\varphi(x, 0) = k e^{0.5 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)}, \quad (4.5)$$

başlangıç koşuluna sahiptir. Bu model, bir dalganın kırılmasının niteliksel davranışlarını araştırmaktadır (Yang, 2020; Fornberg and Whitham, 1978).

(4.4) denklemi dalga kırılmasının niteliksel davranışlarını inceler. Gezen dalga çözümünün uç sınırlayıcı (peaked bounded) formunu en yüksek dalga boyuna sahip olan bir dalga olarak kabul eder. $\nu = \beta = 1$ için (4.4) denkleminin gerçek çözümü (Singh et al., 2013)

$$\varphi(x, \tau) = k e^{\left(\frac{-2}{3} \tau + \frac{1}{2} x \right)}, \quad (4.6)$$

dir.

4.2.1.1. Uyumlu Sumudu Ayırıştırma Yöntemi ile Uyumlu Kesirli FW

Denkleminin Çözümü

Bu bölümde, CSDM, uyumlu kesirli türeve sahip FW denkleminin çözümleri araştırılmıştır. (4.4) denkleminde, CST S_τ^β , uyguladığında,

$$S_\tau^\beta \left[\frac{\partial^\beta \varphi}{\partial \tau^\beta} \right] = S_\tau^\beta \left[\frac{\partial^{2\nu}}{\partial x^{2\nu}} \left(\frac{\partial^\beta \varphi}{\partial \tau^\beta} \right) - \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} + \varphi \frac{\partial^{3\nu} \varphi}{\partial x^{3\nu}} - \varphi \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} + 3 \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} \frac{\partial^{2\nu} \varphi}{\partial x^{2\nu}} \right], \quad (4.7)$$

ifadesi elde edilir. (4.7) denklemi, CST'nin türev alma özelliklerine göre düzenlendiğinde,

$$S_\tau^\beta (\varphi(x, \tau)) = \varphi(x, 0) + u S_\tau^\beta \left[\frac{\partial^{2\nu}}{\partial x^{2\nu}} \left(\frac{\partial^\beta \varphi}{\partial \tau^\beta} \right) - \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} + \varphi \frac{\partial^{3\nu} \varphi}{\partial x^{3\nu}} - \varphi \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} + 3 \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} \frac{\partial^{2\nu} \varphi}{\partial x^{2\nu}} \right], \quad (4.8)$$

bulunur.

(4.8) denkleminde ters CST kullanılarak,

$$\varphi(x, \tau) = \varphi(x, 0) + S_\tau^{-1} \left(u S_\tau^\beta \left[\frac{\partial^{2\nu}}{\partial x^{2\nu}} \left(\frac{\partial^\beta \varphi}{\partial \tau^\beta} \right) - \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} + \varphi \frac{\partial^{3\nu} \varphi}{\partial x^{3\nu}} - \varphi \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} + 3 \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} \frac{\partial^{2\nu} \varphi}{\partial x^{2\nu}} \right] \right), \quad (4.9)$$

formuna ulaşılır.

Burada Adomian çözüm ise

$$\varphi(x, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x, \tau), \quad (4.10)$$

şeklindedir ve lineer olmayan terimler,

$$\begin{aligned} N_1(\varphi) &= \varphi \frac{\partial^{3\nu} \varphi}{\partial x^{3\nu}} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i, \\ N_2(\varphi) &= \varphi \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i, \\ N_3(\varphi) &= \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} \frac{\partial^{2\nu} \varphi}{\partial x^{2\nu}} = \sum_{i=0}^{\infty} C_i, \end{aligned} \quad (4.11)$$

olarak ifade edilir. (4.11) denklemindeki, A_i , B_i ve C_i ,

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dq^i} \left[N_1 \left(\sum_{j=0}^{\infty} q^j \varphi_j \right) \right]_{q=0}, \\ B_i &= \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dq^i} \left[N_2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} q^j \varphi_j \right) \right]_{q=0}, \\ C_i &= \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dq^i} \left[N_3 \left(\sum_{j=0}^{\infty} q^j \varphi_j \right) \right]_{q=0}, \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. (4.10) ve (4.11) denklemleri, (4.9) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i = \varphi(x, 0) + S_\tau^{-1} \left(u S_\tau^\beta \left[\frac{\partial^{2\nu} \partial^\beta}{\partial x^{2\nu} \partial \tau^\beta} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \right) - \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \right) + \sum_{i=0}^{\infty} A_i - \sum_{i=0}^{\infty} B_i + 3 \sum_{i=0}^{\infty} C_i \right] \right) \quad (4.12)$$

denklemini elde edilir ve (4.12) denkleminin her iki tarafı orantılandırıldığında,

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, \tau) &= \varphi(x, 0), \\ \varphi_n(x, \tau) &= S_\tau^{-1} \left(u S_\tau^\beta \left[\frac{\partial^{2\nu} \partial^\beta}{\partial x^{2\nu} \partial \tau^\beta} (\varphi_{n-1}) - \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} (\varphi_{n-1}) + A_{n-1} - B_{n-1} + 3C_{n-1} \right] \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (4.13)$$

iterasyonuna ulaşılır. Böylece,

$$\varphi_0(x, \tau) = e^{0.5 \left(\frac{x^\nu}{v} \right)},$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \tau) &= S_\tau^{-1} \left(u S_\tau^\beta \left[\frac{\partial^{2\nu} \partial^\beta}{\partial x^{2\nu} \partial \tau^\beta} (\varphi_0) - \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} (\varphi_0) + A_0 - B_0 + 3C_0 \right] \right), \\ &= S_\tau^{-1} \left(u S_\tau^\beta \left[\frac{\partial^{2\nu} \partial^\beta}{\partial x^{2\nu} \partial \tau^\beta} (\varphi_0) - \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} (\varphi_0) + \varphi_0 \frac{\partial^{3\nu} \varphi_0}{\partial x^{3\nu}} - \varphi_0 \frac{\partial^\nu \varphi_0}{\partial x^\nu} + 3 \frac{\partial^\nu \varphi_0}{\partial x^\nu} \frac{\partial^{2\nu} \varphi_0}{\partial x^{2\nu}} \right] \right) \\ &= S_\tau^{-1} \left(u S_\tau^\beta \left[\frac{-1}{2} e^{0.5 \left(\frac{x^\nu}{v} \right)} \right] \right) = \frac{-1}{2} e^{0.5 \left(\frac{x^\nu}{v} \right)} S_\tau^{-1}(u) \\ &= \frac{-1}{2} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) e^{0.5 \left(\frac{x^\nu}{v} \right)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x, \tau) &= S_\tau^{-1} \left(u S_\tau^\beta \left[\frac{\partial^{2\nu} \partial^\beta}{\partial x^{2\nu} \partial \tau^\beta} (\varphi_1) - \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} (\varphi_1) + \varphi_1 \varphi_0 \frac{\partial^{4\nu} \varphi_0}{\partial x^{4\nu}} + \varphi_1 \frac{\partial^\nu \varphi_0}{\partial x^\nu} \frac{\partial^{3\nu} \varphi_0}{\partial x^{3\nu}} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \varphi_1 \varphi_0 \frac{\partial^{2\nu} \varphi_0}{\partial x^{2\nu}} - \varphi_1 \left(\frac{\partial^\nu \varphi_0}{\partial x^\nu} \right)^2 + 3 \varphi_1 \frac{\partial^\nu \varphi_0}{\partial x^\nu} \frac{\partial^{3\nu} \varphi_0}{\partial x^{3\nu}} + 3 \varphi_1 \left(\frac{\partial^{2\nu} \varphi_0}{\partial x^{2\nu}} \right)^2 \right] \right) \\
&= S_\tau^{-1} \left(u S_\tau^\beta \left[\frac{-1}{8} e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} + \frac{1}{4} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} \right] \right) \\
&= \frac{-1}{8} e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} S_\tau^{-1}(u) + \frac{1}{4} e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} S_\tau^{-1}(u^2) \\
&= \frac{-1}{8} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} + \frac{1}{8} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_3(x, \tau) &= S_\tau^{-1} \left(u S_\tau^\beta \left[\frac{\partial^{2\nu} \partial^\beta}{\partial x^{2\nu} \partial \tau^\beta} (\varphi_2) - \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} (\varphi_2) + A_2 - B_2 + 3C_2 \right] \right) \\
&= \frac{-1}{32} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} + \frac{1}{16} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} - \frac{1}{48} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3 e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_4(x, \tau) &= S_\tau^{-1} \left(u S_\tau^\beta \left[\frac{\partial^{2\nu} \partial^\beta}{\partial x^{2\nu} \partial \tau^\beta} (\varphi_3) - \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} (\varphi_3) + A_3 - B_3 + 3C_3 \right] \right) \\
&= \frac{-1}{128} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} + \frac{1}{32} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} - \frac{1}{64} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3 e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} \\
&\quad + \frac{1}{384} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^4 e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)},
\end{aligned}$$

elde edilir. İterasyonun sonucunda, FW denkleminin yaklaşık çözümü,

$$\begin{aligned}
\varphi(x, \tau) &= \varphi_0(x, \tau) + \varphi_1(x, \tau) + \varphi_2(x, \tau) + \varphi_3(x, \tau) + \varphi_4(x, \tau) + \dots \\
&= e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} + \frac{-1}{2} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} + \frac{-1}{8} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} \\
&\quad + \frac{1}{8} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} + \frac{-1}{32} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} + \frac{1}{16} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} - \frac{1}{48} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3 e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} \\
&\quad + \frac{-1}{128} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} + \frac{1}{32} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} - \frac{1}{64} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3 e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} \\
&\quad + \frac{1}{384} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^4 e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} + \dots
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu denklem düzenlendiğinde, FW denkleminin yaklaşık çözümü

$$\varphi_{CSDM}(x, \tau) = e^{0.5\left(\frac{x^\nu}{v}\right)} \left[1 + \frac{-85}{128} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) + \frac{7}{32} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 + \frac{-7}{192} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^3 + \frac{1}{384} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^4 + \dots \right], \quad (4.14)$$

olarak elde edilir.

4.2.1.2. Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde, CSDM'nin kullanışlılığı ve etkinliğini göstermek için denklemin tam çözümü ve yaklaşık çözümleri karşılaştırılmıştır. Tablo 4.1'de $\nu = \beta = 1$ ve Tablo 4.2'de $\nu = 1, \beta = 0.75$ değerleri

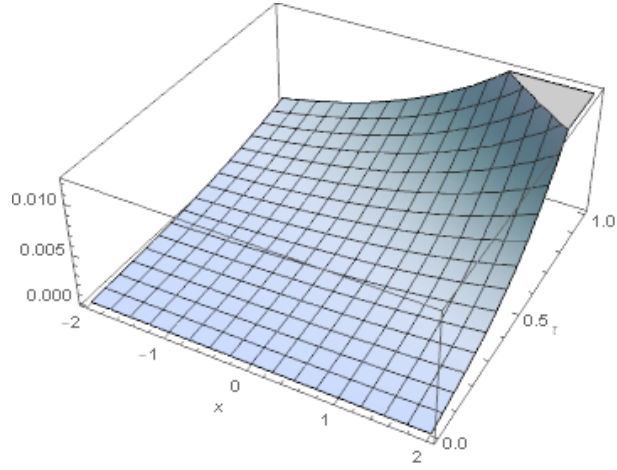
için denklemin tam çözüm değerlerine, yaklaşık çözüm değerlerine ve mutlak hataya yer verilmiştir. Şekil 4.1'da $\nu = 1$, $\beta = 1$ ve Şekil 4.2'de $\nu = 1$, $\beta = 0.75$ için mutlak hatanın üç katlı grafiklerine yer verilmiştir. Şekil 4.3'da, $-2 \leq x \leq 2$, $0 \leq \tau \leq 2$, için tam çözümün üç katlı grafiği, Şekil 4.4'de $-2 \leq x \leq 2$, $0 \leq \tau \leq 2$, $\nu = 1$, $\beta = 1$ için yaklaşık çözümün üç katlı grafiğine yer verilmiştir. Şekil 4.5'da $\nu = 1$, $\beta = 0.75$ ve Şekil 4.6'de $\nu = 0.1$, $\beta = 0.98$ değerleri için yaklaşık çözümün üç katlı grafiğine yer verilmiştir ve x ve τ değerleri için φ_{CSDM} değerinin arttığı görülmektedir. Şekil 4.7'de ν, β, τ değerleri ve $x = 0.75$ için denklemin tam ve yaklaşık çözümlerinin iki katlı grafiklerine yer verilmiştir. Şekil 4.7'de ν ve β değerleri, 1'e yaklaştıkça yaklaşık çözümlerin tam çözüm ile aynı davranış şekline sahip olduğu açıkça görülmektedir. Elde edilen sonuçlar ve grafikler, φ_{CSDM} 'in denklemin çözümlerine ulaşmak için hassas ve etkin bir yöntem olduğunu göstermektedir.

Çizelge 4.1. $\nu = \beta = 1$ için uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi CSDM çözümünün gerçek çözümle karşılaştırılması.

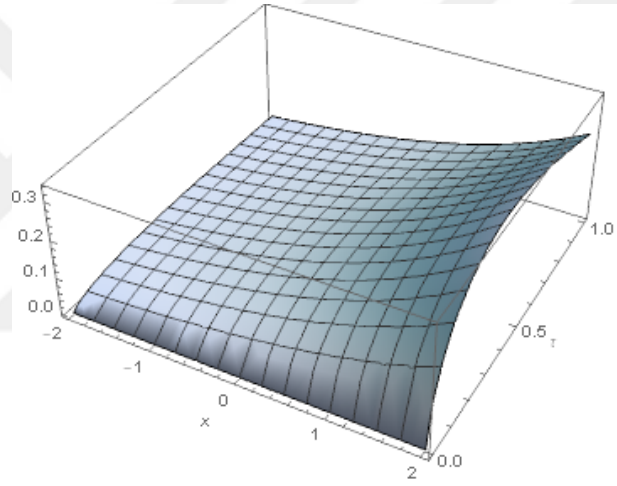
x	τ	φ_{tam}	φ_{CSDM}	Mutlak Hata
-2	0.2	0.321958	0.322134	0.000176
-1	0.4	0.464559	0.465275	0.000716
0	0.6	0.670320	0.672775	0.002455
1	0.8	0.967216	0.974642	0.007426
2	1	1.39561	1.415770	0.020160

Çizelge 4.2. $\nu = 1$, $\beta = 0.75$ için uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi CSDM çözümünün gerçek çözümle karşılaştırılması.

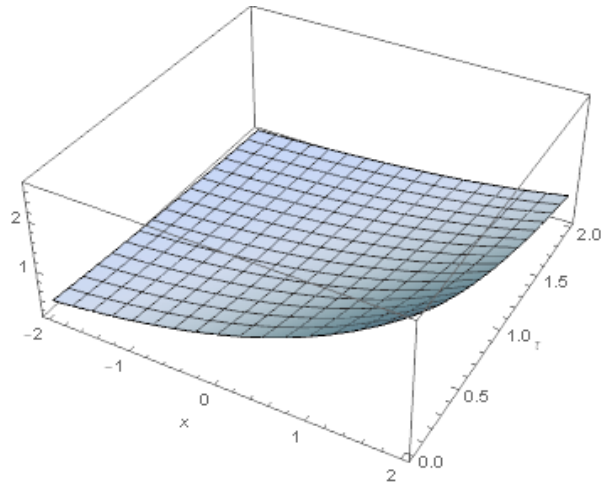
x	τ	φ_{tam}	φ_{CSDM}	Mutlak Hata
-2	0.2	0.321958	0.282434	0.039524
-1	0.4	0.464559	0.389739	0.07482
0	0.6	0.670320	0.551519	0.118801
1	0.8	0.967216	0.793367	0.173849
2	1	1.395610	1.156040	0.239570



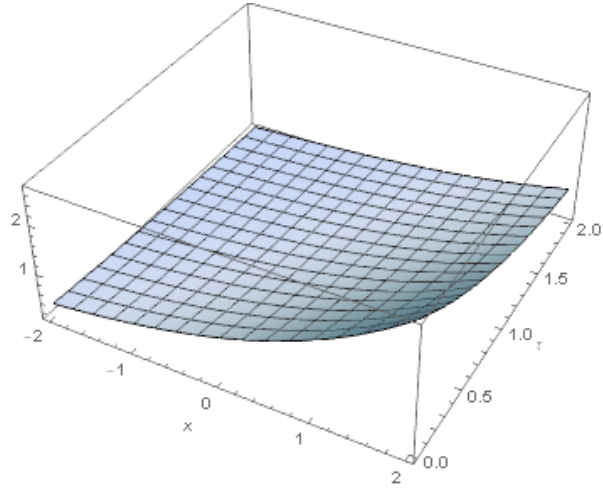
Şekil 4.1. $\nu = 1$ ve $\beta = 1$ değerleri için (4.4) denkleminde ait uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi CSDM mutlak üç katlı hata grafiği.



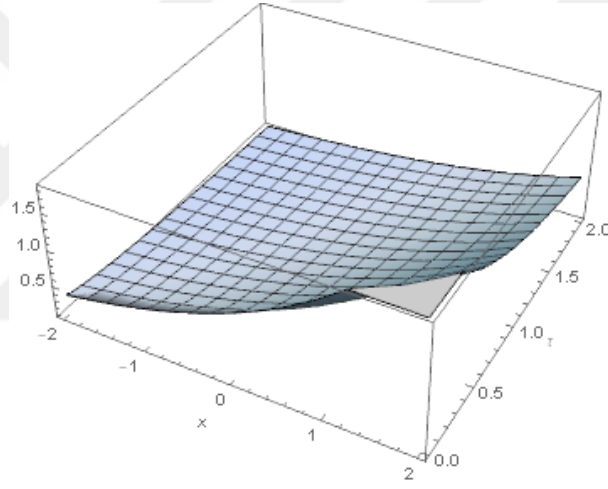
Şekil 4.2. $\nu = 1$ ve $\beta = 0.75$ değerleri için (4.4) denkleminde ait uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi CSDM mutlak üç katlı hata grafiği.



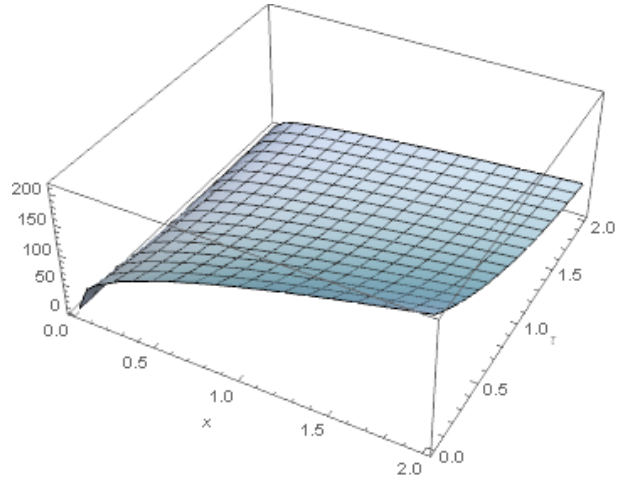
Şekil 4.3. $\mu = \beta = 1$ değerleri için (4.4) denkleminde ait gerçek çözümün üç katlı grafiği.



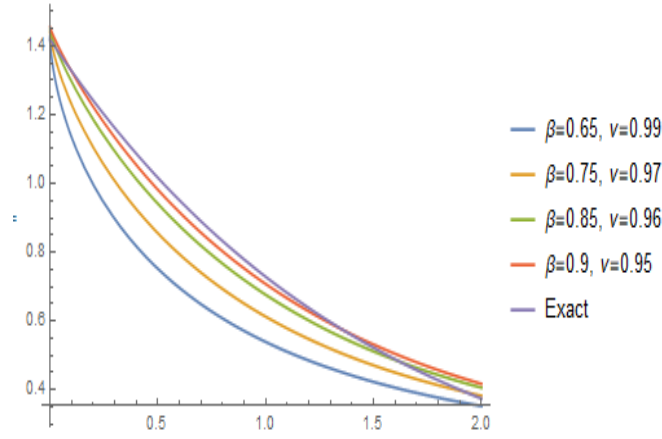
Şekil 4.4. $\mu = \beta = 1$ değerleri için (4.4) denkleminde ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.



Şekil 4.5. $\nu = 1$, $\beta = 0.75$ değerleri için (4.4) denkleminde ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.



Şekil 4.6. $\nu = 0.1$, $\beta = 0.98$ değerleri için (4.4) denkleminde ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.



Şekil 4.7. $x = 0.75$, ν ve β farklı değerleri için (4.4) denkleminde ait gerçek çözümü yaklaşık çözümü ile iki katlı grafiği.

4.2.2. Uyumlu Gardner-Ostrovsky (GO) Denklemi

Uyumlu kesirli türeve sahip lineer olmayan Gardner-Ostrovsky (GO) denklemi,

$$\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial^\beta \phi}{\partial \tau^\beta} + \delta \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} + \lambda \phi \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} + \varpi \phi^2 \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} + \mu \frac{\partial^{3\nu} \phi}{\partial x^{3\nu}} \right) = \gamma \phi, \quad (4.15)$$

şeklindedir. (GO) denklemi,

$$\phi(x, 0) = k \sec h^2 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right), \quad (4.16)$$

başlangıç koşuluna sahiptir. (4.15) denkleminde, $\phi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right)$ eşit yoğunluğa sahip yüzeyde kalan konumundan kaynaklanan bir yörüngedir. Burada, γ küçük ölçekli dağılım katsayısını tanımlayan bir parametredir. λ ve ϖ katsayıları, ikinci ve üçüncü dereceden lineer olmayan terimleri ifade eder. δ dispersiyonsuz doğrusal dalgaların hızını ve μ büyük ölçekli dispersiyonu göstermektedir. GO denkleminde, β ve ν ($0 < \nu, \beta \leq 1$) değişkenleri, uyumlu kesirli türevin mertebelerini tanımlayan değişkenlerdir ve k keyfi bir sabittir. (4.15) denklemi, GO denkleminin uyumlu kesirli türeve sahip lineer olmayan modeli olarak bilinmektedir (Holloway et al., 1999). Bu modeller, iç yerçekimi dalgalarını gözlemleyebileceğimiz okyanus dalgalarının incelenmesinde kullanılmaktadır. GO modeli, KDV denkleminin değiştirilmiş bir formudur ve dünyanın dönüşünden etkilenen büyük genlikteki uzun iç okyanus dalgalarının tanımlanması için türetilmiş bir denklemdir. (GO), rotasyon olmadığında Gardner modeline indirgenir ve bu model sığ su dalgası olgusunu incelemek için kullanılır. Bu tür zayıf dalgalar, zayıf rotasyondan etkilenmeden, dış faaliyetlerden etkilenen sığ kıyı bölgelerinde gözlenir. Bu faaliyetlere; açık denizlerde petrolün araması için kullanılan mühendislik inşaatları, insanların etkinlikleri, deniz altı depolama faaliyetleri gibi durumlar örnek olarak verilebilir (Ostrovsky, 1978; Ostrovsky and Stepanyants, 2005, 1990).

4.2.2.1. Uyumlu Sumudu Ayrıştırma Yöntemi ile Uyumlu Kesirli Gardner-Ostrovsky Denkleminin Çözümü

Bu bölümde, CSDM, uyumlu kesirli türeve sahip GO denkleminin uygulanmaktadır.

(4.15) denklemini yeniden düzenlendiğinde,

$$\frac{\partial^\beta \phi}{\partial \tau^\beta} + \delta \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} + \lambda \phi \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} + \varpi \phi^2 \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} + \mu \frac{\partial^{3\nu} \phi}{\partial x^{3\nu}} = \int \gamma \phi d_\nu x, \quad (4.17)$$

ifadesi elde edilir. (4.17) denkleminin, CST uygulandığında,

$$S_\tau^\beta \left[\frac{\partial^\beta \phi}{\partial \tau^\beta} \right] = S_\tau^\beta \left[\int \gamma \phi d_\nu x - \delta \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} - \lambda \phi \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} - \varpi \phi^2 \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} - \mu \frac{\partial^{3\nu} \phi}{\partial x^{3\nu}} \right], \quad (4.18)$$

bulunur ve CST'nin türev alma özelliklerine göre bu ifade düzenlendiğinde,

$$S_\tau^\beta (\phi(x, \tau)) = \phi(x, 0) + u S_\tau^\beta \left[\int \gamma \phi d_\nu x - \delta \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} - \lambda \phi \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} - \varpi \phi^2 \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} - \mu \frac{\partial^{3\nu} \phi}{\partial x^{3\nu}} \right], \quad (4.19)$$

elde edilir. (4.19) Denkleminde ters CST kullanılarak,

$$\phi(x, \tau) = \phi(x, 0) + S_\tau^{-1} \left[u S_\tau^\beta \left[\int \gamma \phi d_\nu x - \delta \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} - \lambda \phi \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} - \varpi \phi^2 \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} - \mu \frac{\partial^{3\nu} \phi}{\partial x^{3\nu}} \right] \right], \quad (4.20)$$

formuna ulaşılır. Burada Adomian çözümü ise,

$$\phi(x, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(x, \tau), \quad (4.21)$$

dir ve

$$\begin{aligned} N_1(\phi) &= \phi \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i, \\ N_2(\phi) &= \phi^2 \frac{\partial^\nu \phi}{\partial x^\nu} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i, \end{aligned} \quad (4.22)$$

şeklindedir ve lineer olmayan terimler Adomian polinom serileri kullanılarak,

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dq^i} \left[N_1 \left(\sum_{j=0}^{\infty} q^j \phi_j \right) \right]_{q=0} \\ B_i &= \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dq^i} \left[N_2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} q^j \phi_j \right) \right]_{q=0}, \end{aligned}$$

şeklinde lineerleştirilir. (4.21) ve (4.22) denklemleri, (4.20) denkleminde yerine yazılarak her iki tarafı oranlanırsa,

$$\begin{aligned}
\phi_0(x, \tau) &= \phi(x, 0) = k \sec h^2 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right), \\
\phi_n(x, \tau) &= S_\tau^{-1} \left(u S_\tau^\beta \left[\gamma \int \phi_i d_\nu x - \delta \frac{\partial^\nu \varphi_n}{\partial x^\nu} - \lambda A_{n-1} - \varpi B_{n-1} - \mu \frac{\partial^{3\nu} \phi_n}{\partial x^{3\nu}} \right] \right), n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{4.23}$$

formu elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\phi_1(x, \tau) &= S_\tau^{-1} \left(u S_\tau^\beta \left[\gamma \int \phi_0 d_\nu x - \delta \frac{\partial^\nu \phi_0}{\partial x^\nu} - \lambda A_0 - \varpi B_0 - \mu \frac{\partial^{3\nu} \phi_0}{\partial x^{3\nu}} \right] \right) \\
&= S_\tau^{-1} \left(u S_\tau^\beta \left[\gamma \int \phi_0 d_\nu x - \delta \frac{\partial^\nu \phi_0}{\partial x^\nu} - \lambda \phi_0 \frac{\partial^\nu \phi_0}{\partial x^\nu} - \varpi \phi_0^2 \frac{\partial^\nu \phi_0}{\partial x^\nu} - \mu \frac{\partial^{3\nu} \phi_0}{\partial x^{3\nu}} \right] \right) \\
&= k \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \tanh \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) \\
&\quad \left(\gamma + 2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) \left(\delta + k^2 \varpi \operatorname{sech}^4 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) (k\lambda - 12\mu) + 4\mu \right) \right), \\
\phi_2(x, \tau) &= S_\tau^{-1} \left(u S_\tau^\beta \left[\gamma \int \phi_1 d_\nu x - \delta \frac{\partial^\nu \phi_1}{\partial x^\nu} - \lambda A_1 - \varpi B_1 - \mu \frac{\partial^{3\nu} \phi_1}{\partial x^{3\nu}} \right] \right) \\
&= S_\tau^{-1} \left(u S_\tau^\beta \left[\gamma \int \phi_0 d_\nu x - \delta \frac{\partial^\nu \phi_0}{\partial x^\nu} - \lambda \left(\phi_0 \frac{\partial^\nu \phi_0}{\partial x^\nu} + \phi_1 \frac{\partial^\nu \phi_0}{\partial x^\nu} \right) - \varpi \left(2\phi_0 \phi_1 \frac{\partial^\nu \phi_0}{\partial x^\nu} + \phi_0^2 \frac{\partial^\nu \phi_1}{\partial x^\nu} \right) - \mu \frac{\partial^{3\nu} \phi_0}{\partial x^{3\nu}} \right] \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\gamma^2 k \log \left(\cosh \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) \right) + \frac{1}{6} k \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 \\
&\quad \left(\zeta_1 - \zeta_2 \operatorname{sech}^{10} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + \zeta_3 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + \zeta_4 \operatorname{sech}^4 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + \zeta_5 \operatorname{sech}^6 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + \zeta_6 \operatorname{sech}^8 \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) - \zeta_7 \right) + \dots
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= 24(\delta + 4\mu)^2, \zeta_3 = 3(24\mu(\gamma - 168\mu) - 12\delta^2 + 8\gamma k^2 \varpi + \lambda k(320\mu - 7\gamma) + 32\delta(k\lambda - 15\mu)), \\
\zeta_4 &= 8(2k^2 \varpi(9(\delta + 20\mu) - 2\gamma) + 3(k\lambda - 12\mu)(-5\delta + 3k\lambda - 140\mu)), \\
\zeta_5 &= 12(2k^2 \varpi(-7\delta + 8k\lambda - 412\mu) - 7(k\lambda - 30\mu)(k\lambda - 12\mu)), \\
\zeta_6 &= 24k^2 \varpi(5k^2 \varpi - 9\lambda k + 306\mu), \\
\zeta_7 &= 12\gamma(\delta - k\lambda + 4\mu), \zeta_2 = 132k^4 \varpi^2
\end{aligned}$$

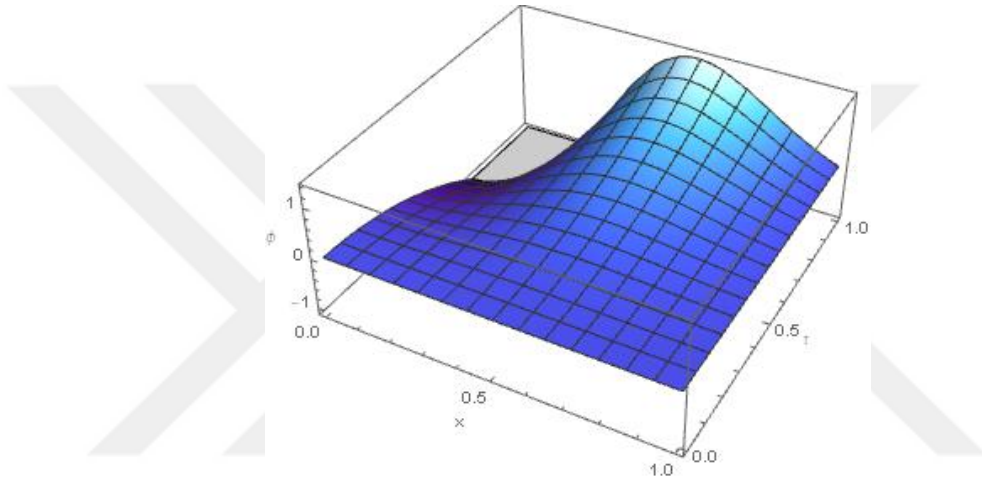
ve ayrıca

$$\phi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) = \phi_0 \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) + \phi_1 \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) + \phi_2 \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) + \dots$$

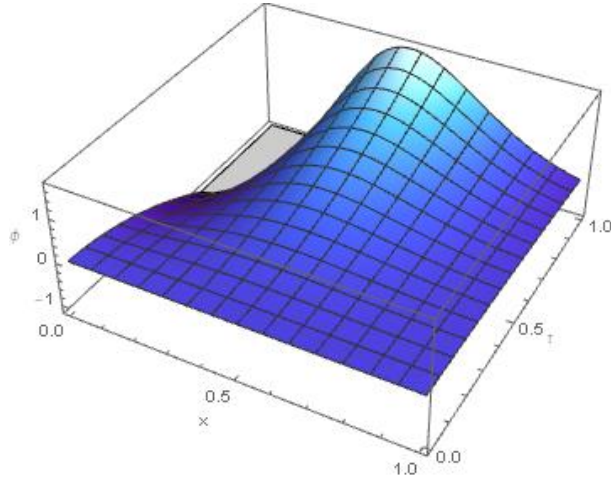
olduğundan,

$$\begin{aligned}
\phi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= k \operatorname{sech}^2\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) + k\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right) \tanh\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) \\
&\left(\gamma + 2\operatorname{sech}^2\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)\left(\delta + k^2 \varpi \operatorname{sech}^4\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) + \operatorname{sech}^2\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)(k\lambda - 12\mu) + 4\mu\right)\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\gamma^2 k \log\left(\cosh\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)\right) + \frac{1}{6}k\operatorname{sech}^2\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)\right)\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)^2 \\
&\left(\zeta_1 - \zeta_2 \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) + \zeta_3 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) + \zeta_4 \operatorname{sech}^4\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) + \zeta_5 \operatorname{sech}^6\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) + \zeta_6 \operatorname{sech}^8\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) - \zeta_7\right) \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{4.24}$$

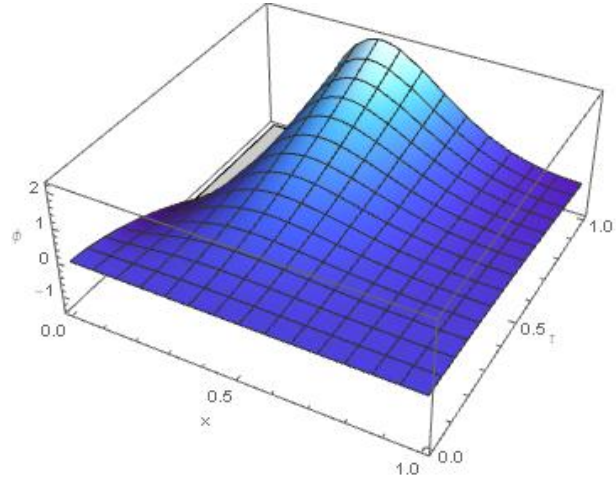
elde edilir.



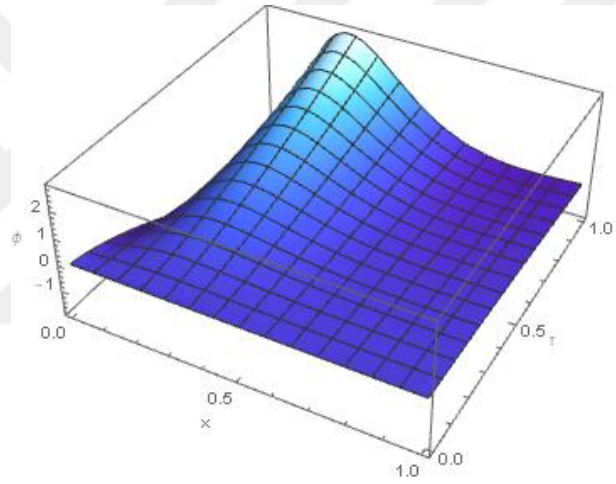
Şekil 4.8. $\nu = \beta = 1$ için (4.15) denkleminde ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.



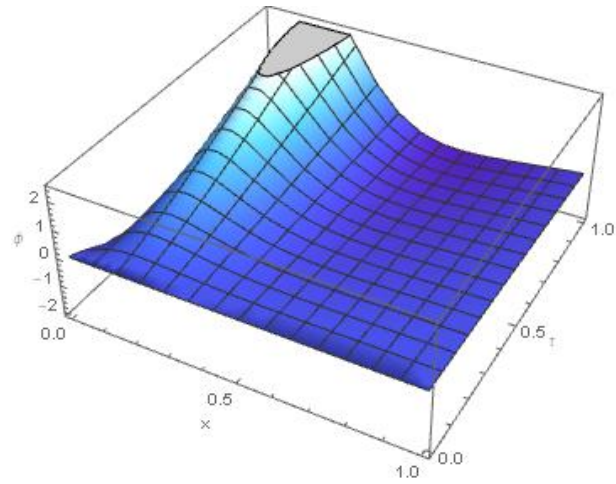
Şekil 4.9. $\nu = \beta = 0.90$ için (4.15) denkleminde ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.



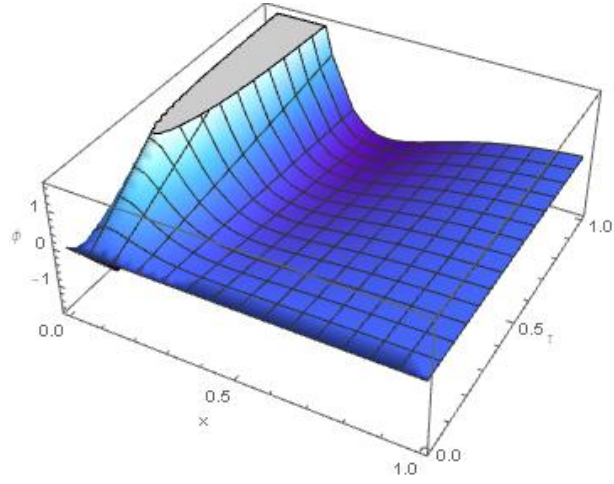
Şekil 4.10. $\nu = \beta = 0.80$ için (4.15) denkleminde ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.



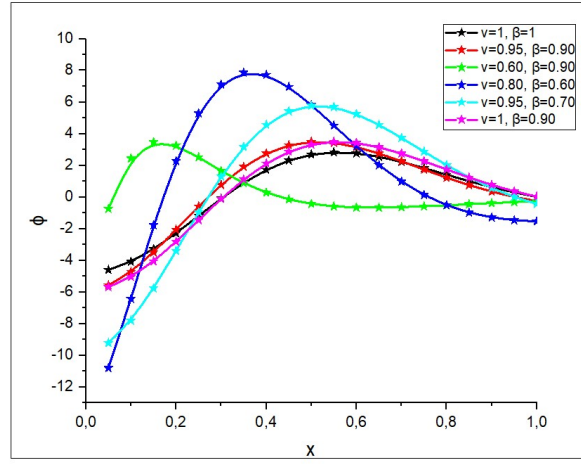
Şekil 4.11. $\nu = \beta = 0.70$ için (4.15) denkleminde ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.



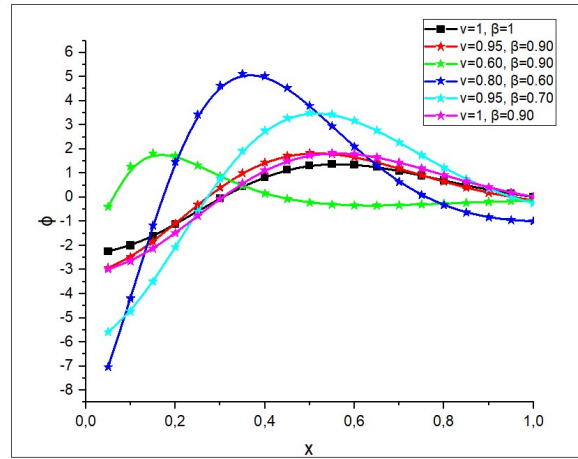
Şekil 4.12. $\nu = \beta = 0.60$ için (4.15) denkleminde ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.



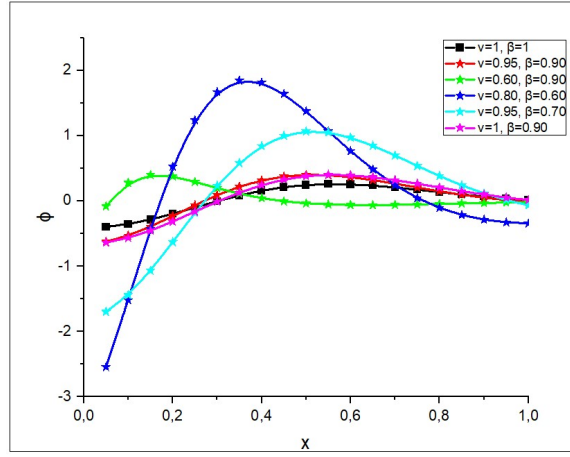
Şekil 4.13. $\nu = \beta = 0.50$ için (4.15) denkleminde ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.



Şekil 4.14. $\tau = 1$ için (4.15) denkleminde ait yaklaşık çözümün iki katlı grafiği.



Şekil 4.15. $\tau = 0.7$ için (4.15) denkleminde ait yaklaşık çözümün iki katlı grafiği.



Şekil 4.16. $\tau = 0.3$ için (4.15) denkleminin yaklaşık çözümünün iki katlı grafiği.

4.2.3. Uyumlu Zakharov-Kuznetsov (ZK) Denklemi

Uyumlu kesirli türeve sahip ZK denklemi,

$$\frac{\partial^\beta w}{\partial t^\beta} + a \frac{\partial^3 \rho w^p}{\partial x^3 \rho} + b \frac{\partial^\rho w^q}{\partial x^\rho} + c \frac{\partial^{\rho+2\gamma} w^r}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} = 0, \quad (4.25)$$

şeklinde. Burada ρ, γ ve β değişkenleri uyumlu kesirli türevin mertebesini tanımlayan değişkenlerdir. Ayrıca, a, b, c keyfi sabitler ve p, q, r değişkenleri tam sayı olmak üzere, ZK denklemi

$$w(x, y, 0) = f(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma), \quad (4.26)$$

başlangıç koşuluna sahiptir. Bu model, düşük basınçlı bir manyetik plazmadaki üç katlı iyon-ses solitonlarını tanımlamak için manyetik alandaki soğuk iyonları ve sıcak izotermal elektronları içeren bir plazmada, zayıf ve doğrusal olmayan iyon akustik dalgalarının davranışlarını açıklamaktadır (Munro and Parkes, 1999; Zakharov and Kuznetsov, 1974). Ayrıca, ZK denklemi elipsoidal ve düzlem tipi solitonları kabul etmektedir (Mace and Hellberg, 2001). Bununla birlikte, tamsayı olmayan kuvvete ve doğrusal olmayan terimlere sahip yeni ZK denklemleri, elektronların davranışı izotermal olmadığında soğuk iyon plazmasındaki iyon-akustik dalgaları tanımlamaktadır (Schamel, 1973; Kumar et al., 2014).

4.2.3.1. Uyumlu Sumudu Ayrıştırma Yöntemi ile Uyumlu Kesirli ZK Denkleminin Çözümü

Bu bölümde, uyumlu kesirli türeve sahip ZK denkleminin genel formunu $CFZK(p, q, r)$ çözmek için CSDM uygulanmıştır.

(4.25) denkleminde CST S_t^β uygulandığında ,

$$S_t^\beta \left[\frac{\partial^\beta w}{\partial t^\beta} + a \frac{\partial^{3\rho} w^p}{\partial x^{3\rho}} + b \frac{\partial^\rho w^q}{\partial x^\rho} + c \frac{\partial^{\rho+2\gamma} w^r}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] = S_t^\beta [0], \quad (4.27)$$

ifadesi elde edilir. (4.27) denklemi, CST'nin türev alma özelliklerine göre düzenlendiğinde,

$$S_t^\beta \left(w \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) \right) = w \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, 0 \right) - u S_t^\beta \left[a \frac{\partial^{3\rho} w^p}{\partial x^{3\rho}} + b \frac{\partial^\rho w^q}{\partial x^\rho} + c \frac{\partial^{\rho+2\gamma} w^r}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right], \quad (4.28)$$

bulunur. (4.28) denkleminde ters CST kullanılarak,

$$w \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) = w \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, 0 \right) - S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[a \frac{\partial^{3\rho} w^p}{\partial x^{3\rho}} + b \frac{\partial^\rho w^q}{\partial x^\rho} + c \frac{\partial^{\rho+2\gamma} w^r}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right), \quad (4.29)$$

formuna ulaşılır.

Burada Adomian çözümü ise,

$$w \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right), \quad (4.30)$$

şeklindedir ve

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{1}{j!} \left[\frac{d^j}{d\varphi^j} \left[N_1 \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi^j w_j) \right] \right]_{\varphi=0}, \\ B_j &= \frac{1}{j!} \left[\frac{d^j}{d\varphi^j} \left[N_2 \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi^j w_j) \right] \right]_{\varphi=0}, \\ C_j &= \frac{1}{j!} \left[\frac{d^j}{d\varphi^j} \left[N_3 \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi^j w_j) \right] \right]_{\varphi=0}, \end{aligned}$$

olmak üzere, lineer olmayan terimler Adomian polinom serileri ile

$$N_1(w) = a \frac{\partial^{3\rho} w^p}{\partial x^{3\rho}} = \sum_{j=0}^{\infty} A_j, N_2(w) = b \frac{\partial^\rho w^q}{\partial x^\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j, N_3(w) = \frac{\partial^{\rho+2\gamma} w^r}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} = \sum_{j=0}^{\infty} C_j,$$

şeklinde lineerleştirilir. (4.30) ve (4.31) denklemleri, (4.29) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} w_j \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) &= f \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \\ &- S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} A_j(w) \right) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} B_j(w) \right) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j(w) \right) \right] \right), \end{aligned} \quad (4.31)$$

formu elde edilir ve (4.31) denkleminin her iki tarafı orantılandığında,

$$\begin{aligned} w_0 \quad & \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) = f \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right), \\ w_{k+1} \quad & \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) = -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [A_k + B_k + C_k] \right), k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.32)$$

elde edilir.

4.2.3.2. Yakınsaklık Analizi

Bu bölümde, çözümün varlığı ve tekliği için gerekli yeterli koşullar araştırılmıştır ve CSDM yönteminin hata analizi gösterilmiştir.

Teorem 4.6 $\eta = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \left(\frac{t^\beta}{\beta} \right)$, olmak üzere $0 < \eta < 1$ için (4.25) denklemi tek çözüme sahiptir.

İspat $\mathfrak{S} = (C[0, T], \|\cdot\|)$ tüm sürekli fonksiyonların Banach uzayı olsun,

$$w_{k+1} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) = f \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) - S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [N_1(w_k) + N_2(w_k) + N_3(w_k)] \right), k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.33)$$

olmak üzere,

$G : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$, şeklinde bir dönüşüm olsun. Burada

$$\begin{aligned} N_1 \left(w_k \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) \right) &= a \frac{\partial^{3\rho} w^p}{\partial x^{3\rho}}, \\ N_2 \left(w_k \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) \right) &= b \frac{\partial^\rho w^q}{\partial x^\rho}, \\ N_3 \left(w_k \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) \right) &= c \frac{\partial^{\rho+2\gamma} w^r}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}}. \end{aligned}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ve ε_3 Lipschitz sabiti, w ve $\tilde{w}$ farklı fonksiyonlar olmak üzere N_1, N_2 ve N_3 'ün $\|N_1 w - N_1 \tilde{w}\| < \varepsilon_1 \|w - \tilde{w}\|$, $\|N_2 w - N_2 \tilde{w}\| < \varepsilon_2 \|w - \tilde{w}\|$, ve $\|N_3 w - N_3 \tilde{w}\| < \varepsilon_3 \|w - \tilde{w}\|$, ile Lipschitzian'dir.

$$\begin{aligned} \|Gw - G\tilde{w}\| &= \left\| S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [N_1(w) + N_2(w) + N_3(w)] \right) - S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [N_1(\tilde{w}) + N_2(\tilde{w}) + N_3(\tilde{w})] \right) \right\| \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} \left\| S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [N_1(w(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta)) - N_1(\tilde{w}(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta))] \right) \right. \\ &\quad \left. + S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [N_2(w(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta)) - N_2(\tilde{w}(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta))] \right) \right. \\ &\quad \left. + S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [N_3(w(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta)) - N_3(\tilde{w}(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta))] \right) \right\| \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} \left[\begin{aligned} &\varepsilon_1 S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [|w(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta) - \tilde{w}(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta)|] \right) \\ &+ \varepsilon_2 S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [|w(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta) - \tilde{w}(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta)|] \right) \\ &+ \varepsilon_3 S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [|w(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta) - \tilde{w}(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta)|] \right) \end{aligned} \right] \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \left[S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [|w(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta) - \tilde{w}(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta)|] \right) \right] \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \left[S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [|w(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta) - \tilde{w}(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta)|] \right) \right] \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \left[S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [|w(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta) - \tilde{w}(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta)|] \right) \right] \\ &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \left(\frac{t^\beta}{\beta} \right) \|w(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta) - \tilde{w}(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta)\|, \end{aligned}$$

$0 < \eta < 1$ için G dönüşümü bir daralmadır (contraction). Bu yüzden, daralma için Banach sabit nokta teoremine göre (El-Kalla, 2008), (4.25) denklemi tek bir çözüme sahiptir.

Sonraki teoremden, çözümün yakınsaklığını tartışacağız.

Teorem 4.7 (4.25) denkleminin çözümü yakınsaktır.

İspat $F_n = \sum_{j=0}^n w_j (\rho^{-1}x^\rho, \gamma^{-1}y^\gamma, \beta^{-1}t^\beta)$, n^{th} kısmi toplamı olsun. Adomian polinomlarının yeni bir formülü kullanılarak,

$$N_1(F_n) = \sum_{j=0}^n \hat{A}_j, N_2(F_n) = \sum_{j=0}^n \hat{B}_j, N_3(F_n) = \sum_{j=0}^n \hat{C}_j,$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned} \|F_n - F_m\| &= \max_{t \in [0, T]} |F_n - F_m| \\ &= \max_{t \in [0, T]} \left| \sum_{j=m+1}^n \hat{w}_j \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, \frac{t^\beta}{\beta} \right) \right| \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} \left| \begin{aligned} &S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[N_1 \left(\sum_{j=m+1}^n \hat{A}_j \right) \right] \right) \\ &+ S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[N_2 \left(\sum_{j=m+1}^n \hat{B}_j \right) \right] \right) \\ &+ S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[N_3 \left(\sum_{j=m+1}^n \hat{C}_j \right) \right] \right) \end{aligned} \right| \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} \left| \begin{aligned} &S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[\sum_{j=m+1}^n N_1(F_{n-1}) - N_1(F_{m-1}) \right] \right) \\ &+ S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[\sum_{j=m+1}^n N_2(F_{n-1}) - N_2(F_{m-1}) \right] \right) \\ &+ S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[\sum_{j=m+1}^n N_3(F_{n-1}) - N_3(F_{m-1}) \right] \right) \end{aligned} \right| \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} \left| \begin{aligned} &S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [N_1(F_{n-1}) - N_1(F_{m-1})] \right) \\ &+ S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [N_2(F_{n-1}) - N_2(F_{m-1})] \right) \\ &+ S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [N_3(F_{n-1}) - N_3(F_{m-1})] \right) \end{aligned} \right| \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \left[S_t^{-1} \left(u S_t^\beta [\|F_{n-1} - F_{m-1}\|] \right) \right] \\ &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \left(\frac{t^\beta}{\beta} \right) \|F_{n-1} - F_{m-1}\|, \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. $n = m + 1$, olmak üzere,

$\|F_{m+1} - F_m\| \leq \eta^m \|F_1 - F_0\|$ elde edilir. Daha sonra üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$\|F_{m+1} - F_m\| \leq (\eta^{m-1} - 1) \|w_1\| \text{ ifadesi bulunur. Burada } 0 < \eta < 1, 0 < 1 - \eta < 1$$

olduğundan dolayı $\|F_{m+1} - F_m\| \leq \frac{\eta^m}{1-\eta} \max_{t \in [0, T]} \|w_1\|, \|F_1\|$ elde edilir.

$\|F_1\|$ sonlu ise, $m \rightarrow \infty$ iken. $\|F_{m+1} - F_m\| \rightarrow 0$ olur. Bu nedenle $\{F_m\}$, $\mathfrak{S}$ Banach uzayında bir Cauchy dizisi olur. Böylece $\sum_{j=0}^{\infty} w_j (\rho^{-1}x^\rho, \gamma^{-1}y^\gamma, \beta^{-1}t^\beta)$ serisinin çözümü yakınsaktır.

Sonraki teoremden hata tahmini verilecektir.

Teorem 4.8 (4.32) denkleminin (4.25) max mutlak kesme hatası,

$$\begin{aligned} & \left\| w(\rho^{-1}x^\rho, \gamma^{-1}y^\gamma, \beta^{-1}t^\beta) - \sum_{j=1}^m w_j(\rho^{-1}x^\rho, \gamma^{-1}y^\gamma, \beta^{-1}t^\beta) \right\| \\ & \leq \frac{\eta^m}{1 - \eta} \max_{t \in [0, T]} \|w_1(\rho^{-1}x^\rho, \gamma^{-1}y^\gamma, \beta^{-1}t^\beta)\|, \end{aligned} \quad (4.34)$$

ile elde edilir.

İspat Teorem 4.10'den

$$\|F_n - F_m\| \leq \frac{\eta^m}{1 - \eta} \max_{t \in [0, T]} \|w_1\|,$$

formu elde edilir.

$n \rightarrow \infty$ iken, $F_n \rightarrow w(\rho^{-1}x^\rho, \gamma^{-1}y^\gamma, \beta^{-1}t^\beta)$ böylece,

$$\begin{aligned} \left\| w - \sum_{j=1}^m w_j \right\| &= \max_{t \in [0, T]} \left| w(\rho^{-1}x^\rho, \gamma^{-1}y^\gamma, \beta^{-1}t^\beta) - \sum_{j=1}^m w_j(\rho^{-1}x^\rho, \gamma^{-1}y^\gamma, \beta^{-1}t^\beta) \right| \\ &\leq \frac{\eta^m}{1 - \eta} \max_{t \in [0, T]} \|w_1(\rho^{-1}x^\rho, \gamma^{-1}y^\gamma, \beta^{-1}t^\beta)\|, \end{aligned}$$

ifadesi teoremi ile ispat tamamlanmış olur.

4.2.3.3. Nümerik Örnekler

Örnek 4.2

$$w(\rho^{-1}x^\rho, \gamma^{-1}y^\gamma, 0) = \frac{-4}{3} \varpi \cosh^2(\rho^{-1}x^\rho, \gamma^{-1}y^\gamma), \quad (4.35)$$

başlangıç koşulu ile verilen

$$\frac{\partial^\beta w}{\partial t^\beta} + \frac{1}{8} \frac{\partial^{3\alpha} w^2}{\partial x^{3\alpha}} + \frac{\partial^\alpha w^2}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{8} \frac{\partial^{\alpha+2\gamma} w^2}{\partial x^\alpha \partial y^{2\gamma}} = 0, \quad (4.36)$$

şeklinde tanımlanan lineer olmayan uyumlu kesirli türeve sahip ZK denklemi CFZK (2, 2, 2) koşulu ile ele alınmıştır.

Benzer adımlar uygulanarak,

$$w_0 \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) = -\frac{4}{3} \varpi \cosh^2 \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right),$$

$$w_{n+1} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) = -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[\frac{1}{8} \frac{\partial^{3\rho} (A_n)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (A_n)}{\partial x^\rho} + \frac{1}{8} \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (A_n)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right), \quad (4.37)$$

indirgeme formülü oluşturulur.

Böylece, $\sum_{i=0}^{\infty} A_n = w^2$ formunda tanımlanır ve ilk üç terim için bu ifade,

$$\begin{aligned} A_0 &= w_0^2, \\ A_1 &= 2w_0 w_1, \\ A_2 &= 2w_0 w_2 + w_1^2 \\ A_3 &= 2w_0 w_3 + 2w_1 w_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Çözümün kalan terimleri ise,

$$\begin{aligned} w_0 \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) &= -\frac{4}{3} \varpi \cosh^2 \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right), \\ w_1 \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) &= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[\frac{1}{8} \frac{\partial^{3\rho} (A_0)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (A_0)}{\partial x^\rho} + \frac{1}{8} \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (A_0)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right) \\ &= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[\frac{1}{8} \frac{\partial^{3\rho} (w_0^2)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (w_0^2)}{\partial x^\rho} + \frac{1}{8} \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (w_0^2)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right) \\ &= -\frac{16}{9} \varpi^2 \beta^{-1} t^\beta \sinh \left(2 \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right) \left(5 \cosh \left(2 \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right) + 2 \right), \\ w_2 &= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[\frac{1}{8} \frac{\partial^{3\rho} (A_1)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (A_1)}{\partial x^\rho} + \frac{1}{8} \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (A_1)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right) \\ &= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[\frac{1}{8} \frac{\partial^{3\rho} (2w_0 w_1)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (2w_0 w_1)}{\partial x^\rho} + \frac{1}{8} \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (2w_0 w_1)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right) \\ &= -\frac{32}{27} \varpi^3 \left(\beta^{-1} t^\beta \right)^2 \left(\begin{aligned} &13 \cosh \left(2 \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right) + 70 \cosh \left(4 \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right) \\ &+ 75 \cosh \left(6 \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right) \end{aligned} \right), \\ w_3 &= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[\frac{1}{8} \frac{\partial^{3\rho} (A_2)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (A_2)}{\partial x^\rho} + \frac{1}{8} \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (A_2)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right) \\ &= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[\frac{1}{8} \frac{\partial^{3\rho} (2w_0 w_2 + w_1^2)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (2w_0 w_2 + w_1^2)}{\partial x^\rho} + \frac{1}{8} \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (2w_0 w_2 + w_1^2)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right) \\ &= -\frac{4096}{243} \varpi^4 \left(\beta^{-1} t^\beta \right)^3 \sinh \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \cosh \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \\ &\quad \left(\begin{aligned} &-423 + 8,265 \cosh^2 \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \\ &-28,500 \cosh^4 \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \\ &+ 23,800 \cosh^6 \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \end{aligned} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_4 &= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[\frac{1}{8} \frac{\partial^{3\rho} (A_3)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (A_3)}{\partial x^\rho} + \frac{1}{8} \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (A_3)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right) \\
&= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[\frac{1}{8} \frac{\partial^{3\rho} (2w_0 w_3 + 2w_1 w_2)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (2w_0 w_3 + 2w_1 w_2)}{\partial x^\rho} + \frac{1}{8} \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (2w_0 w_3 + 2w_1 w_2)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right) \\
&= -\frac{256}{729} \varpi^5 \left(\beta^{-1} t^\beta \right)^4 \begin{pmatrix} 894 \cosh(2(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma)) \\ +56,640 \cosh(4(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma)) \\ +356,175 \cosh(6(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma)) \\ +715,700 \cosh(8(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma)) \\ +459,875 \cosh(10(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma)) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ile hesaplanır.

$$w\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, \frac{t^\beta}{\beta}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, \frac{t^\beta}{\beta}\right) = w_0 + w_1 + w_2 + \dots \quad (4.38)$$

olduğu için,

$$\begin{aligned}
w\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, \frac{t^\beta}{\beta}\right) &= -\frac{4}{3} \varpi \cosh^2\left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma}\right) + \frac{-16}{9} \varpi^2 \left(\frac{t^\beta}{\beta}\right) \sinh\left(2\left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma}\right)\right) \left(5 \cosh\left(2\left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma}\right)\right) + 2\right) \\
&- \frac{32}{27} \varpi^3 \left(\frac{t^\beta}{\beta}\right)^2 \left(13 \cosh\left(2\left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma}\right)\right) + 70 \cosh\left(4\left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma}\right)\right) + 75 \cosh\left(6\left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma}\right)\right)\right) \\
&- \frac{4096}{243} \varpi^4 \left(\frac{t^\beta}{\beta}\right)^3 \sinh\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}\right) \cosh\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}\right) \left(\frac{-423 + 8,265 \cosh^2\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}\right) - 28,500 \cosh^4\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}\right)}{+23,800 \cosh^6\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}\right)}\right) \\
&- \frac{256}{729} \varpi^5 \left(\frac{t^\beta}{\beta}\right)^4 \begin{pmatrix} 894 \cosh\left(2\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}\right)\right) + 56,640 \cosh\left(4\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}\right)\right) + 356,175 \cosh\left(6\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}\right)\right) \\ +715,700 \cosh\left(8\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}\right)\right) + 459,875 \cosh\left(10\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}\right)\right) \end{pmatrix} + \dots
\end{aligned}$$

formuna ulaşılır ve çözümüün kapalı formu,

$$w\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, \frac{t^\beta}{\beta}\right) = -\frac{4}{3} \varpi \cosh^2\left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} - \varpi \frac{t^\beta}{\beta}\right), \quad (4.39)$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.3

$$w\left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, 0\right) = \frac{3}{2} \varpi \sinh\left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma}\right)\right] \quad (4.40)$$

başlangıç koşulu ile verilen

$$\frac{\partial^\beta w}{\partial t^\beta} + 2 \frac{\partial^{3\alpha} w^3}{\partial x^{3\alpha}} + \frac{\partial^\alpha w^3}{\partial x^\alpha} + 2 \frac{\partial^{\alpha+2\gamma} w^3}{\partial x^\alpha \partial y^{2\gamma}} = 0, \quad (4.41)$$

şeklinde tanımlanan lineer olmayan uyumlu kesirli türeve sahip ZK denklemi CFZK (3, 3, 3) koşulu ile ele alınmaktadır.

Benzer adımlar uygulanarak,

$$\begin{aligned}
w_0 \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) &= \frac{3}{2} \varpi \sinh \left[\frac{1}{6} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right], \\
w_{n+1} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) &= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[2 \frac{\partial^{3\rho} (A_n)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (A_n)}{\partial x^\rho} + 2 \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (A_n)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right), n \geq 0
\end{aligned} \tag{4.42}$$

indirgeme formülü oluşturulur.

Böylece, $\sum_{i=0}^{\infty} A_n = w^3$ formunda tanımlanır ve ilk üç terim için bu ifade,

$$\begin{aligned}
A_0 &= w_0^3, \\
A_1 &= 3w_0^2 w_1, \\
A_2 &= 2w_0^2 w_2 + 3w_0^2 w_1^2 \\
A_3 &= 3w_0 w_3 + 6w_0 w_1 w_2 + w_1^3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Çözümün kalan terimleri,

$$\begin{aligned}
w_0 \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma, \beta^{-1} t^\beta \right) &= \frac{3}{2} \varpi \sinh \left[\frac{1}{6} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right], \\
w_1 &= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[2 \frac{\partial^{3\rho} (A_0)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (A_0)}{\partial x^\rho} + 2 \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (A_0)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right) \\
&= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[2 \frac{\partial^{3\rho} (w_0^3)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (w_0^3)}{\partial x^\rho} + 2 \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (w_0^3)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right) \\
&= \frac{-3}{8} \varpi^3 \beta^{-1} t^\beta \cosh \left[\frac{1}{6} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right] \left(9 \cosh^2 \left[\frac{1}{6} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right] - 8 \right), \\
w_2 &= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[2 \frac{\partial^{3\rho} (A_1)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (A_1)}{\partial x^\rho} + 2 \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (A_1)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right) \\
&= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[2 \frac{\partial^{3\rho} (3w_0^2 w_1)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (3w_0^2 w_1)}{\partial x^\rho} + 2 \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (3w_0^2 w_1)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right) \\
&= -\frac{3}{64} \varpi^5 \sinh \left[\frac{1}{6} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right] \left(\beta^{-1} t^\beta \right)^2 \begin{pmatrix} -91 + 729 \cosh^2 \left[\frac{1}{6} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right] \\ -765 \cosh^4 \left[\frac{1}{6} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right] \end{pmatrix}, \\
w_3 &= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[2 \frac{\partial^{3\rho} (A_2)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (A_2)}{\partial x^\rho} + 2 \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (A_2)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right) \\
&= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[2 \frac{\partial^{3\rho} (2w_0^2 w_2 + 3w_0^2 w_1^2)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (2w_0^2 w_2 + 3w_0^2 w_1^2)}{\partial x^\rho} + 2 \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (2w_0^2 w_2 + 3w_0^2 w_1^2)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right) \\
&= \frac{1}{256} \varpi^7 \cosh \left[\frac{1}{6} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right] \left(\beta^{-1} t^\beta \right)^3 \begin{pmatrix} 39,851 - 224,468 \cosh^2 \left[\frac{1}{6} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right] \\ +382,293 \cosh^4 \left[\frac{1}{6} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right] \\ -188,181 \cosh^6 \left[\frac{1}{6} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right] \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_4 &= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[2 \frac{\partial^{3\rho} (A_3)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (A_3)}{\partial x^\rho} + 2 \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (A_3)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}} \right] \right) \\
&= -S_t^{-1} \left(u S_t^\beta \left[\frac{2 \frac{\partial^{3\rho} (3w_0w_3+6w_0w_1w_2+w_1^3)}{\partial x^{3\rho}} + \frac{\partial^\rho (3w_0w_3+6w_0w_1w_2+w_1^3)}{\partial x^\rho}}{+2 \frac{\partial^{\rho+2\gamma} (3w_0w_3+6w_0w_1w_2+w_1^3)}{\partial x^\rho \partial y^{2\gamma}}} \right] \right) \\
&= \frac{1}{4096} \varpi^9 \sinh \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \right] \left(\beta^{-1} t^\beta \right)^4 \begin{pmatrix} 1, 179, 946 - 30, 715, 929 \cosh^2 \left[\frac{1}{6} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right] \\ +135, 212, 355 \cosh^4 \left[\frac{1}{6} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right] \\ -198, 626, 022 \cosh^6 \left[\frac{1}{6} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right] \\ +939, 534, 345 \cosh^8 \left[\frac{1}{6} \left(\rho^{-1} x^\rho, \gamma^{-1} y^\gamma \right) \right] \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ile hesaplanır.

$$w \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, \frac{t^\beta}{\beta} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, \frac{t^\beta}{\beta} \right) = w_0 + w_1 + w_2 + \dots \quad (4.43)$$

olduğu için

$$\begin{aligned}
w \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, \frac{t^\beta}{\beta} \right) &= \sum_{j=0}^{\infty} w_j \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, \frac{t^\beta}{\beta} \right) = w_0 + w_1 + w_2 + \dots \\
&= \frac{3}{2} \varpi \sinh \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \right] + \frac{-3}{8} \varpi^3 \left(\frac{t^\beta}{\beta} \right) \cosh \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \right] \left(9 \cosh^2 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \right] - 8 \right) + \\
&- \frac{3}{64} \varpi^5 \sinh \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \right] \left(\frac{t^\beta}{\beta} \right)^2 \left(-91 + 729 \cosh^2 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \right] - 765 \cosh^4 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \right] \right) \\
&+ \frac{1}{256} \varpi^7 \cosh \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \right] \left(\frac{t^\beta}{\beta} \right)^3 \\
&\left(39, 851 - 224, 468 \cosh^2 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \right] + 382, 293 \cosh^4 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \right] - 188, 181 \cosh^6 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \right] \right) \\
&+ \frac{1}{4096} \varpi^9 \sinh \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \right] \left(\frac{t^\beta}{\beta} \right)^4 \begin{pmatrix} 1, 179, 946 - 30, 715, 929 \cosh^2 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \right] \\ +135, 212, 355 \cosh^4 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \right] \\ -198, 626, 022 \cosh^6 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \right] \\ +939, 534, 345 \cosh^8 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} \right) \right] \end{pmatrix} + \dots
\end{aligned}$$

formuna ulaşılır ve çözümüün kapalı formu,

$$w \left(\frac{x^\rho}{\rho}, \frac{y^\gamma}{\gamma}, \frac{t^\beta}{\beta} \right) = \frac{3}{2} \varpi \sinh \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{y^\gamma}{\gamma} - \frac{\varpi t^\beta}{\beta} \right) \right], \quad (4.44)$$

olarak elde edilir.

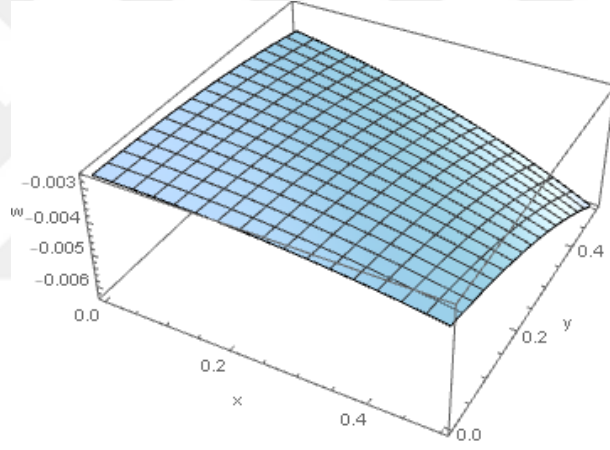
4.2.3.4. Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde, CSDM yönteminin etkinliğini göstermek için $\rho = \gamma = \beta$ ve ρ, γ, β 'nın farklı değerlerine göre denklemin tam ve yaklaşık çözümleri karşılaştırılmıştır. Şekiller (4.17- 4.19) Örnek (4.2)'deki, $CZK(2, 2, 2)$ denklemine göre $\rho = \gamma = \beta = 1$, $\varpi = 0.002$ ve $t = 1$ değerleri için

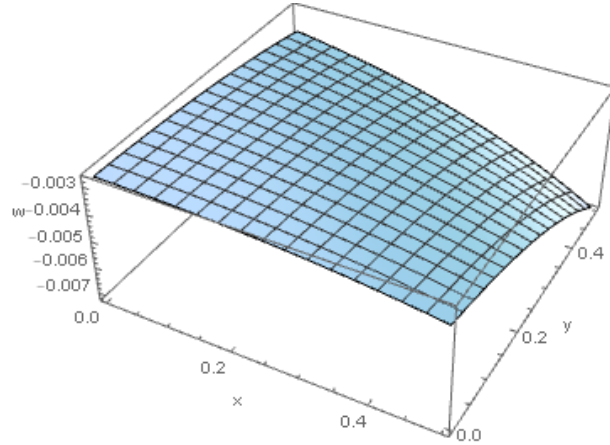
tam çözümü, yaklaşık çözümü ve mutlak hatasının üç katlı grafiği çizdirilmiştir. Şekiller (4.17- 4.19), örnek (4.2)'deki denklemin tam ve yaklaşık çözümü arasındaki uyumu doğrulamaktadır. Şekiller (4.20-4.22) $CZK(2, 2, 2)$ denkleminin $x = t = 0.5$, ve $0 < y \leq 1$ için tam ve yaklaşık çözümlerinin davranışlarını göstermektedir. Şekil 4.20, CSDM yöntemi ile elde edilen tam ve yaklaşık çözümün $\rho = \gamma = 0.99$ ve β 'nin farklı kesirli değerlerine göre davranışını göstermektedir. Ayrıca bu grafikte, β değeri azaldığında $w(x, y, t)$ çözüm değerinin yavaşça azaldığı açıkça gözlenmektedir. Şekil 4.21, CSDM yöntemi ile elde edilen tam ve yaklaşık çözümün $\rho = \gamma = \beta$ 'e göre değerini göstermektedir. Burada, ρ, γ, β kesirli değerlerinin hepsi arttığında, $w(x, y, t)$ çözümünün değerinin hızlıca arttığı gözlenmektedir. Benzer şekilde, Şekil 4.22'de $\rho = \beta = 0.98$ ve γ 'nın farklı kesirli değerlerine göre tam ve yaklaşık çözümün davranışlarını incelemek için grafiklerine yer verilmiştir. Bu grafikte, γ arttığında ve y değeri azaldığında $w(x, y, t)$ değeri yavaşça arttığı ancak γ ve y arttığında $w(x, y, t)$ 'ninde hızla arttığı gözlenmiştir. Şekiller (4.23- 4.25)'de Örnek (4.40)'deki $CZK(3, 3, 3)$ 'ün tam çözümü, yaklaşık çözümü ve mutlak hatasının $\rho = \gamma = \beta = 1$, $\varpi = 0.002$ ve $t = 1$ değerleri için üç katlı grafiklerine sırasıyla yer verilmiştir. Şekiller (4.23- 4.25)'den $CZK(3, 3, 3)$ 'ün tam ve yaklaşık çözümlerinin uyumluluğundan önerilen yöntemin etkinliği açıkça gözlemlenmektedir. Şekiller (4.26-4.28), $CZK(3, 3, 3)$ 'ün $x = t = 0.5$ ve $0 < y \leq 1$ değerleri için tam ve yaklaşık çözümün karşılaştırmaktadır. Şekil 4.26, $\rho = \gamma = 0.99$ ve β farklı kesirli türev değerlerine göre tam ve yaklaşık çözümün davranışlarını göstermektedir ve ρ, γ, β farklı kesirli değerleri arttığında, $w(x, y, t)$ çözümünün düzenli olarak azaldığı açıkça gözlenmektedir. Şekil 4.27 $\rho = \gamma = \beta$ değeri için tam ve yaklaşık çözümün davranışlarını göstermektedir ve ρ, γ, β kesirli değerleri arttığında $w(x, y, t)$ çözümünün değerinin aniden azaldığı görülmektedir. Şekil 4.28'den $\rho = \beta = 0.98$ ve γ 'nın farklı değerleri için yaklaşık çözümün davranışını göstermektedir. Burada yaklaşık çözümlerin neredeyse benzer olduğunu ve γ arttığında $w(x, y, t)$ 'nin yavaşça arttığı görülmektedir. Tablo 4.3 ve Tablo 4.4'de, Örnek (4.2) ve Örnek (4.3) in çözümleri sırasıyla $x, y = 0.1, 0.5, 1$, $\varpi = 0.002$ ve $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ farklı değerleri seçilerek araştırılmıştır. Burada, t değeri x, y farklı değerlerine göre arttığında, mutlak hatanın da arttığı açıkça görülmektedir.

Çizelge 4.3. $\rho = \gamma = \beta = 1$ olduğunda $CZK(2, 2, 2)$ için yaklaşık çözümün ile tam çözüm karşılaştırılması.

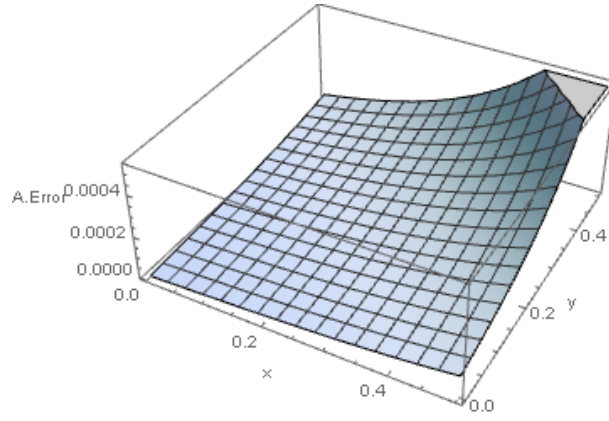
x	y	t	Tam Çözüm	Yaklaşık çözüm w_4	Mutlak Hata
0.1	0.1	0.1	-0.00277433	-0.00277918	0.000004858
		0.2	-0.00277411	-0.00278147	0.00000735961
		0.3	-0.00277389	-0.0027838	0.00000991182
		0.4	-0.00277367	-0.00278619	0.0000125164
0.5	0.5	0.1	-0.00634573	-0.00646423	0.000118507
		0.2	-0.00634379	-0.00652813	0.000184331
		0.3	-0.00634186	-0.0065976	0.000255737
		0.4	-0.00633993	-0.00667377	0.000333836
1	1	0.1	-0.0377152	-0.0493615	0.0116463
		0.2	-0.0377007	-0.0677036	0.0300029
		0.3	-0.0376861	-0.105509	0.067823
		0.4	-0.0376716	-0.174978	0.137306



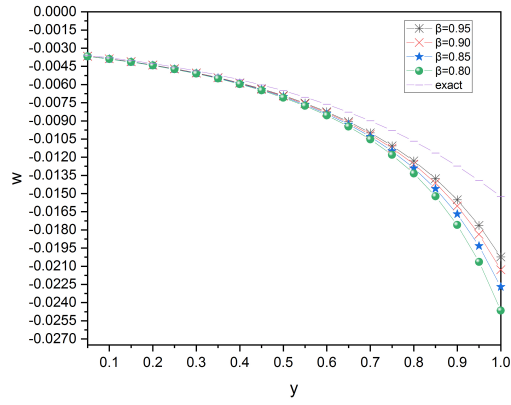
Şekil 4.17. $\rho = \gamma = \beta = 1$ için (4.36) denklemine ait çözümün üç katlı grafiği.



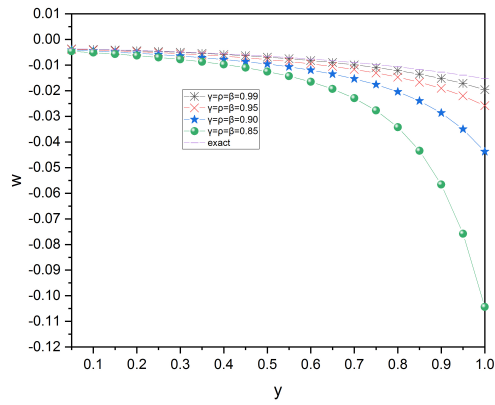
Şekil 4.18. $\rho = \gamma = \beta = 1$ için (4.36) denklemine ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.



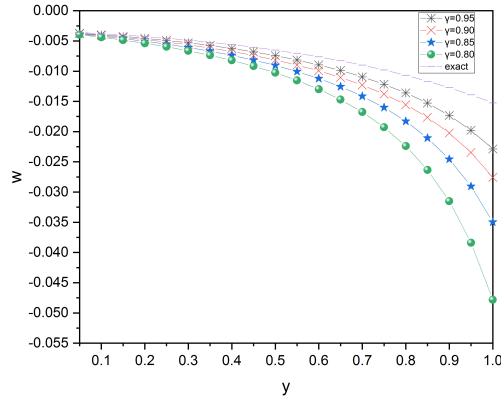
Şekil 4.19. $\rho = \gamma = \beta = 1$ için (4.36) denkleminde ait uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi CSDM mutlak üç katlı hata grafiği.



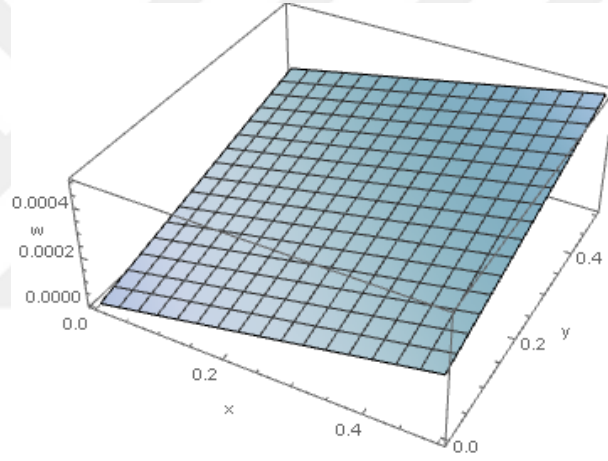
Şekil 4.20. $\rho = \gamma = 0.99$ ve β farklı değerleri için (4.40) denkleminde ait iki katlı grafikleri.



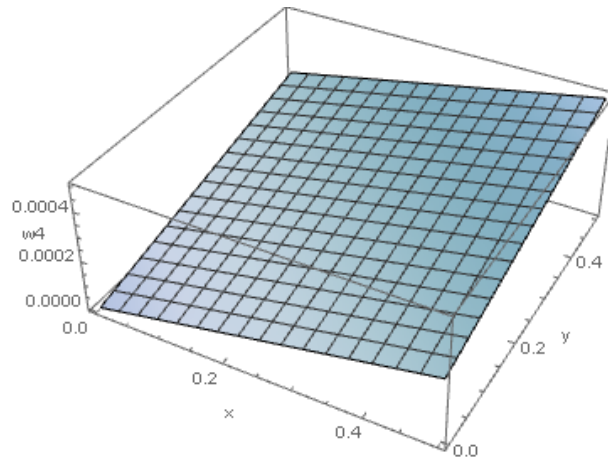
Şekil 4.21. $\rho = \gamma = \beta$ için (4.36) denkleminde ait iki katlı grafikleri



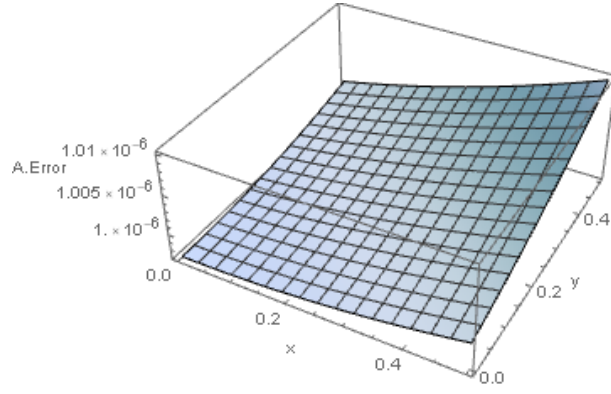
Şekil 4.22. $\rho = \beta = 0.98$, ve γ farklı değerleri için (4.36) denkleminde ait iki katlı grafikleri.



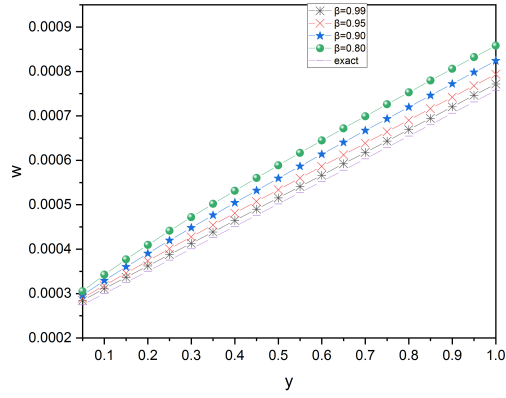
Şekil 4.23. $\rho = \gamma = \beta = 1$ için (4.41) denkleminde ait çözümün üç katlı grafiği.



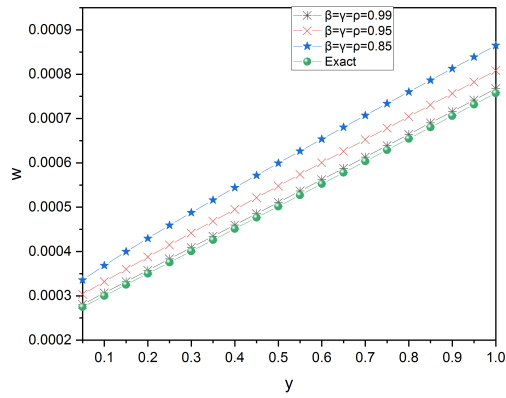
Şekil 4.24. $\rho = \gamma = \beta = 1$ için (4.41) denkleminde ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.



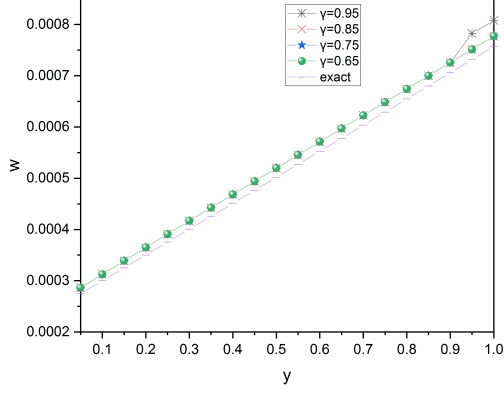
Şekil 4.25. $\rho = \gamma = \beta = 1$ için (4.41) denkleminde ait uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi CSDM mutlak üç katlı hata grafiği.



Şekil 4.26. $\rho = \gamma = 0.99$ ve β farklı değerleri için (4.41) denkleminde ait iki katlı grafikleri.



Şekil 4.27. $\rho = \gamma = \beta$ için (4.41) denkleminde ait iki katlı grafikleri.



Şekil 4.28. $\rho = \beta = 0.98$ ve γ farklı değerleri için (4.41) denkleminde ait iki katlı grafikleri.

Çizelge 4.4. $\varpi = 0.002$, $\rho = \gamma = \beta = 1$ olduğunda $CZK(3, 3, 3)$ için yaklaşık çözüm ile tam çözüm arasındaki karşılaştırması.

x	y	t	Tam Çözüm	Yaklaşık çözüm w_4	Mutlak Hata
0.1	0.1	0.1	0.0000998184	0.000100018	0.000000199505
		0.2	0.0000997184	0.000100018	0.000000299257
		0.3	0.0000996183	0.000100017	0.000000399009
		0.4	0.0000995182	0.000100017	0.000000498761
0.5	0.5	0.1	0.000502317	0.000502115	0.000000202021
		0.2	0.000502317	0.000502014	0.000000303031
		0.3	0.000502317	0.000501912	0.00000040404
		0.4	0.000502316	0.000502316	0.000000505049
1	1	0.1	0.00101841	0.00101862	0.000000209921
		0.2	0.0010183	0.00101862	0.00000031488
		0.3	0.0010182	0.00101862	0.000000419838
		0.4	0.00101809	0.00101862	0.000000524794

4.2.4. Uyumlu Fitzhugh-Nagumo (FN) Denklemi

Bu bölümde, CSDM uyumlu kesirli türeve sahip FN denkleminde uygulandığında,

$$\phi(x, 0) = \psi\left(\frac{x^\lambda}{\lambda}\right), \quad (4.45)$$

başlangıç koşulu ile

$$\frac{\partial^\mu \phi}{\partial t^\mu} - \frac{\partial^{2\lambda} \phi}{\partial x^{2\lambda}} = (1 + \delta) \phi^2 - \phi^3 - \delta \phi, \quad (4.46)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\phi = \phi\left(\frac{x^\lambda}{\lambda} \cdot \frac{t^\mu}{\mu}\right)$, ve λ, μ , $(0 < \lambda, \mu \leq 1)$ uyumlu kesirli türevi ifade eden parametreler ve δ keyfi sabittir. $\delta = -1$ değeri için (4.46) denklemi Newell-Whitehead (NW) kısmı diferansiyel denkleminde dönüşmektedir. (4.46) denklemi ilk olarak sinir sistemi iletimini modellemek için Hodgkin ve Huxley tarafından önerilmiştir. Ayrıca FN termodinamik, devre teorisi, biyoloji ve popülasyon genetiği alanında termal enerjinin iletimini açıklayan önemli bir lineer olmayan denklemdir (FitzHugh, 1961; Nagumo et al., 1962; Shih et al., 2005; Hariharan and Rajaraman, 2013; Hariharan, 2019).

4.2.4.1. Uyumlu Sumudu Ayrıştırma Yöntemi ile Uyumlu Kesirli FN Denkleminin Çözümü

Bu bölümde, CSDM'nin amacı $N(\cdot)$ lineer olmayan operator ve $\frac{\partial^\mu \phi}{\partial t^\mu}$ uyumlu kesirli türev olmak üzere

$$\phi(x, 0) = \psi\left(\frac{x^\lambda}{\lambda}\right), \quad (4.47)$$

başlangıç koşulu ile verilen

$$\frac{\partial^\mu \phi}{\partial t^\mu} = \frac{\partial^{2\lambda} \phi}{\partial x^{2\lambda}} - \delta \phi + N(\phi), \quad (4.48)$$

formundaki genel lineer olmayan uyumlu kesirli türeve sahip diferansiyel denklemler göz önüne alınarak gösterilmiştir.

(4.48) denkleminde, CST S_t^μ uyguladığımızda,

$$S_t^\mu \left[\frac{\partial^\mu \phi}{\partial t^\mu} \right] = S_t^\mu \left[\frac{\partial^{2\lambda} \phi}{\partial x^{2\lambda}} - \delta \phi + N(\phi) \right], \quad (4.49)$$

ifadesi elde edilir. (4.49) denklemi, CST'nin türev alma özelliklerine göre düzenlendiğinde,

$$S_t^\mu \left(\phi \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) = \phi \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, 0 \right) + u S_t^\mu \left[\frac{\partial^{2\lambda} \phi}{\partial x^{2\lambda}} - \delta \phi + N(\phi) \right], \quad (4.50)$$

bulunur. (4.50) denkleminde ters CST kullanılarak,

$$\phi \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) = \phi \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, 0 \right) + S_t^{-1} \left(u S_t^\mu \left[\frac{\partial^{2\lambda} \phi}{\partial x^{2\lambda}} - \delta \phi + N(\phi) \right] \right), \quad (4.51)$$

formuna ulaşılır. Burada Adomian çözümü ise,

$$\phi \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right), \quad (4.52)$$

şeklindedir ve

$$A_j(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n) = \frac{1}{j!} \left[\frac{d^j}{d\omega^j} \left[N \sum_{j=0}^{\infty} (\omega^j \phi_j) \right] \right]_{\omega=0},$$

olmak üzere, lineer olmayan terimler Adomian polinom serileri ile,

$$N(\phi) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j, \quad (4.53)$$

şeklinde lineerleştirilir. (4.52) ve (4.53) denklemleri, (4.51) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) = \psi \left(\frac{x^\lambda}{\lambda} \right) + S_t^{-1} \left(u S_t^\mu \left[\frac{\partial^{2\lambda} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right)}{\partial x^{2\lambda}} - \delta \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) + \sum_{j=0}^{\infty} A_j \right] \right), \quad (4.54)$$

formu elde edilir ve (4.54) denkleminin her iki tarafı karşılaştırıldığında,

$$\begin{aligned} \phi_0 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) &= \psi \left(\frac{x^\lambda}{\lambda} \right), \\ \phi_{k+1} \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) &= S_t^{-1} \left(u S_t^\mu \left[\frac{\partial^{2\lambda} \left(\phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right)}{\partial x^{2\lambda}} - \delta \phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) + A_j \right] \right), k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.55)$$

elde edilir.

4.2.4.2. Yakınsaklık Analizi

Bu bölümde, çözümün varlığı ve tekliği için gerekli yeter koşul araştırılmıştır ve CSDM metodunun hata analizi gösterilmiştir.

Teorem 4.9 $\vartheta = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{t^\mu}{\mu} \right)$ olmak üzere, $0 < \vartheta < 1$ için (4.46) denklemi tek çözüme sahiptir.

İspat $\mathfrak{S} = (C[0, T], \|\cdot\|)$ tüm sürekli fonksiyonların Banach uzayı olsun,

$$\phi_{k+1} \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) = \psi \left(\frac{x^\lambda}{\lambda} \right) + S_t^{-1} \left(u S_t^\mu \left[R \left(\phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) + N \left(\phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) \right] \right), k = 0, 1, 2, \dots,$$

olmak üzere,

$G : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$, şeklinde bir dönüşüm olsun. Burada, $R \left(\phi \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) = \left(\frac{\partial^{2\lambda}}{\partial x^{2\lambda}} - \delta \right) \left(\phi \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right)$, ε_1 ve ε_2 Lipschitz sabiti, ϕ ve $\tilde{\phi}$ farklı fonksiyonlar olmak üzere N_1, N_2 ve N_3 'ün $\|R\phi - R\tilde{\phi}\| < \varepsilon_1 \|\phi - \tilde{\phi}\|$, ve $\|N\phi - N\tilde{\phi}\| < \varepsilon_2 \|\phi - \tilde{\phi}\|$, ile Lipschitzian'dir.

$$\begin{aligned} \|G\phi - G\tilde{\phi}\| &= \left| S_t^{-1} \left(u S_t^\mu \left[R \left(\phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) + N \left(\phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) \right] \right) - S_t^{-1} \left(u S_t^\mu \left[R \left(\tilde{\phi}_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) + N \left(\tilde{\phi}_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) \right] \right) \right| \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} \left| S_t^{-1} \left(u S_t^\mu \left[R \left(\phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) - R \left(\tilde{\phi}_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) \right] + S_t^{-1} \left(u S_t^\mu \left[N \left(\phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) - N \left(\tilde{\phi}_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) \right] \right) \right| \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} \left[\varepsilon_1 S_t^{-1} \left(u S_t^\mu \left[\left| \left(\phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) - \tilde{\phi}_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right| \right] \right) + \varepsilon_2 S_t^{-1} \left(u S_t^\mu \left[\left| \left(\phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) - \tilde{\phi}_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right| \right] \right) \right] \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left[S_t^{-1} \left(u S_t^\mu \left[\left| \left(\phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) - \tilde{\phi}_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right| \right] \right) \right] \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left[S_t^{-1} \left(u S_t^\mu \left[\left| w \left(\phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) - \tilde{\phi}_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right| \right] \right) \right] \\ &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{t^\beta}{\beta} \right) \left\| \left(\phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right) - \tilde{\phi}_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right\|, \end{aligned}$$

$0 < \vartheta < 1$ için G dönüşümü bir daralmadır (contraction). Bu yüzden, daralma için Banach sabit nokta teoremine göre, (4.46) denklemi tek bir çözüme sahiptir.

Teorem 4.10 Denklem (4.46)'in çözümünü yakınsaktır.

Teorem 4.11 (4.55) denkleminin (4.46) max mutlak kesme hatası

$$\left\| \phi \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) - \sum_{j=1}^m \phi_j \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right\| \leq \frac{\vartheta^m}{1 - \vartheta} \max_{t \in [0, T]} \left\| \phi_1 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right\|, \quad (4.56)$$

ile elde edilir.

4.2.4.3. Nümerik Örnekler

Örnek 4.4 (Alfafeih and Mısırlı, 2021)

$$\frac{\partial^\mu \phi}{\partial t^\mu} - \frac{\partial^{2\lambda} \phi}{\partial x^{2\lambda}} = -\phi^3 + \phi, \quad (4.57)$$

$$\phi(x, 0) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\sqrt{2} \frac{x^\lambda}{4\lambda} \right) \right), \quad (4.58)$$

başlangıç koşuluna sahip lineer olmayan uyumlu kesirli türeve sahip FN denklemini ele alalım.

Bu problemin tam çözümü,

$$\phi \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{\sqrt{2}\mu x^\lambda + 3\lambda t^\mu}{4\lambda\mu} \right) \right),$$

şeklindedir. Lineer olmayan $-\phi^3$ terimi için Adomian polinomları aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} A_0 &= -\phi_0^3, \\ A_1 &= -3\phi_0^2\phi_1, \\ A_2 &= -3(\phi_0^2\phi_2 + \phi_0\phi_1^2) \\ A_3 &= -(3\phi_0^2\phi_3 + 6\phi_0\phi_1\phi_2 + \phi_1^3) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.59)$$

(4.59) denklemi, (4.55) denkleminde yerine konularak aşağıdaki çözümüün kalan terimleri elde edilir,

$$\begin{aligned} \phi_0 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) &= \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\sqrt{2} \frac{x^\lambda}{4\lambda} \right) \right), \\ \phi_1 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) &= S_t^{-1} \left(uS_t^\mu \left[\frac{\partial^{2\lambda} \left(\phi_0 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right)}{\partial x^{2\lambda}} + \phi_0 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) + A_0 \right] \right) \\ &= S_t^{-1} \left(uS_t^\mu \left[\frac{\partial^{2\lambda} \left(\phi_0 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right)}{\partial x^{2\lambda}} + \phi_0 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) - \phi_0^3 \right] \right) \\ &= \frac{3}{8} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x^\lambda}{\lambda} \right) \left(\frac{t^\mu}{\mu} \right), \\ \phi_2 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) &= S_t^{-1} \left(uS_t^\mu \left[\frac{\partial^{2\lambda} \left(\phi_1 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right)}{\partial x^{2\lambda}} + \phi_1 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) + A_1 \right] \right) \\ &= S_t^{-1} \left(uS_t^\mu \left[\frac{\partial^{2\lambda} \left(\phi_1 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) \right)}{\partial x^{2\lambda}} + \phi_1 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) - 3\phi_0^2\phi_1 \right] \right) \\ &= -\frac{9}{4} \sinh^4 \left(\frac{x^\lambda}{2\lambda\sqrt{2}} \right) \operatorname{csch}^3 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda\sqrt{2}} \right) \left(\frac{t^\mu}{\mu} \right)^2. \end{aligned}$$

Benzer adımlar uygulanarak,

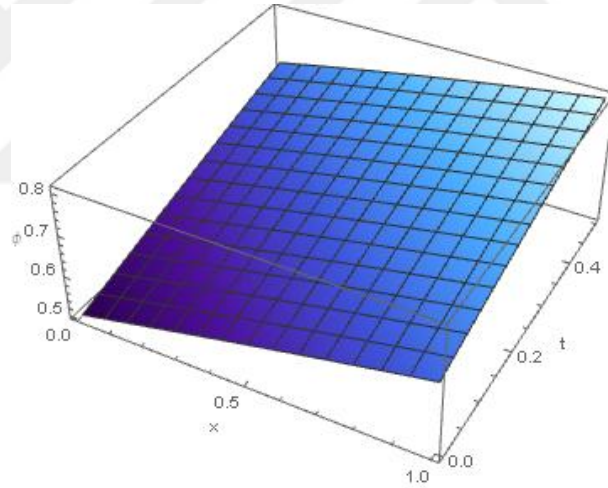
$$\phi_3 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) = \frac{9}{128} \left(\frac{t^\mu}{\mu} \right)^3 \left(\cosh \left(\frac{x^\lambda}{\lambda\sqrt{2}} \right) - 2 \right) \operatorname{sech}^4 \left(\frac{x^\lambda}{2\sqrt{2}\lambda} \right),$$

$$\phi_4 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) = -\frac{27}{4096} \left(\frac{t^\mu}{\mu} \right)^4 \operatorname{sech}^6 \left(\frac{x^\lambda}{2\lambda\sqrt{2}} \right) \left(3 \sinh \left(\sqrt{2} \frac{x^\lambda}{\lambda} \right) - 18 \sinh \left(\frac{x^\lambda}{\sqrt{2}\lambda} \right) + 12 \cosh \left(\frac{x^\lambda}{\sqrt{2}\lambda} \right) - 16 \right),$$

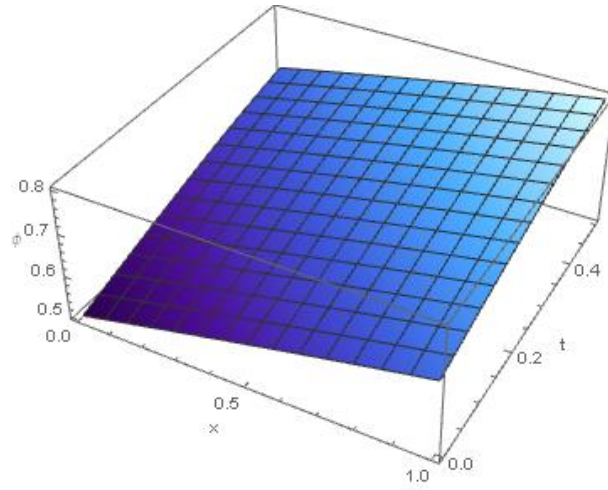
formları elde edilir. Böylece, (4.57) denkleminin CSDM ile analitik çözümü seri formunda

$$\begin{aligned} \phi \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) &= \phi_0 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) + \phi_1 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) + \phi_2 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu} \right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\sqrt{2} \frac{x^\lambda}{4\lambda} \right) \right) + \frac{3}{8} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x^\lambda}{\lambda} \right) \left(\frac{t^\mu}{\mu} \right) \\ &\quad - \frac{9}{4} \sinh^4 \left(\frac{x^\lambda}{2\lambda\sqrt{2}} \right) \operatorname{csch}^3 \left(\frac{x^\lambda}{\lambda\sqrt{2}} \right) \left(\frac{t^\mu}{\mu} \right)^2 \\ &\quad + \frac{9}{128} \left(\frac{t^\mu}{\mu} \right)^3 \left(\cosh \left(\frac{x^\lambda}{\lambda\sqrt{2}} \right) - 2 \right) \operatorname{sech}^4 \left(\frac{x^\lambda}{2\sqrt{2}\lambda} \right) \\ &\quad - \frac{27}{4096} \operatorname{sech}^6 \left(\frac{x^\lambda}{2\lambda\sqrt{2}} \right) \left(3 \sinh \left(\sqrt{2} \frac{x^\lambda}{\lambda} \right) - 18 \sinh \left(\frac{x^\lambda}{\sqrt{2}\lambda} \right) \right. \\ &\quad \left. + 12 \cosh \left(\frac{x^\lambda}{\sqrt{2}\lambda} \right) - 16 \left(\frac{t^\mu}{\mu} \right)^4 + \dots \right) \end{aligned}$$

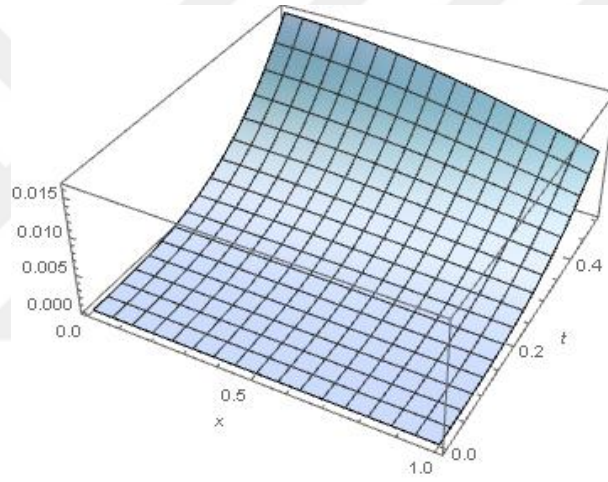
şeklinde elde edilir.



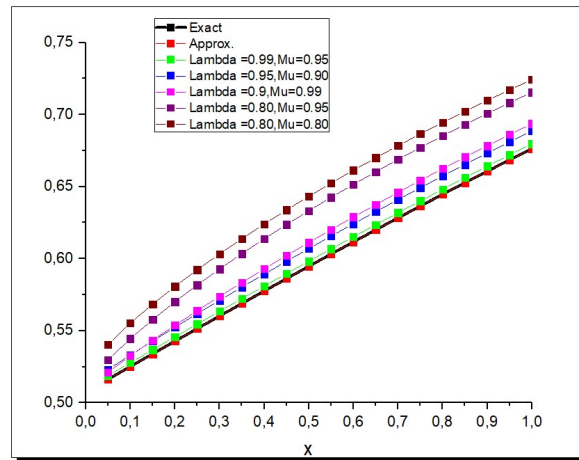
Şekil 4.29. $\mu = \lambda = 1$, $0 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 0.5$ değerleri için (4.57) denklemine ait gerçek çözümün üç katlı grafiği.



Şekil 4.30. $\mu = \lambda = 1$, $0 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 0.5$ değerleri için (4.57) denkleminde ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.



Şekil 4.31. $\mu = \lambda = 1$, $0 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 0.5$ değerleri için (4.57) denkleminde ait uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi CSDM mutlak üç katlı hata grafiği.



Şekil 4.32. $t = 0.02$, μ ve λ farklı değerleri için (4.57) denkleminde ait gerçek çözümü yaklaşık çözümü ile iki katlı grafiği.

Çizelge 4.5. $\mu = \lambda = 1$ için (4.57) denklemine ait mutlak hata tablosu.

t	x	Tam Çözüm	CSDM Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0.02	0.05	0.516333	0.516332	0.00000111929
	0.10	0.525156	0.525155	0.00000111497
	0.15	0.533964	0.533963	0.00000110789
	0.20	0.542751	0.54275	0.00000109809
	0.25	0.551511	0.55151	0.00000108563
0.07	0.05	0.535031	0.534984	0.0000475469
	0.10	0.543815	0.543768	0.0000473493
	0.15	0.552571	0.552524	0.0000470361
	0.20	0.561295	0.561249	0.0000466091
	0.25	0.569982	0.569936	0.0000460706
	0.30	0.578625	0.57858	0.0000454232

Örnek 4.5 (Alfaqeih and Mısırlı, 2021)

$$\frac{\partial^\mu \phi}{\partial t^\mu} - \frac{\partial^{2\lambda} \phi}{\partial x^{2\lambda}} = \frac{7}{4}\phi^2 - \phi^3 - \frac{3}{4}\phi, \quad (4.60)$$

$$\phi(x, 0) = \frac{1}{e^{-\frac{x^\lambda}{\sqrt{2\lambda}}} + 1}, \quad (4.61)$$

başlangıç koşuluna sahip lineer olmayan uyumlu kesirli türeve sahip FN denklemini ele alalım. Bu problemin tam çözümü

$$\phi\left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu}\right) = \frac{1}{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x^\lambda}{\lambda} + \frac{t^\mu}{2\mu}\right)} + 1}, \quad (4.62)$$

şeklindeir. Lineer olmayan $\left(\frac{7}{4}\phi^2 - \phi^3\right)$ terimi için Adomian polinomları aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{7}{4}\phi_0^2 - \phi_0^3, \\ A_1 &= \frac{7}{2}\phi_0\phi_1 - 3\phi_0^2\phi_1, \\ A_2 &= \frac{7}{4}(2\phi_0\phi_2 + \phi_1^2) - (2\phi_0^2\phi_2 + 3\phi_0^2\phi_1^2), \\ A_3 &= \frac{7}{4}(2\phi_0\phi_3 + 2\phi_1\phi_2) - (3\phi_0\phi_3 + 6\phi_0\phi_1\phi_2 + \phi_1^3), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.63)$$

Benzer adımlar uygulanarak,

$$\begin{aligned} \phi_0\left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu}\right) &= \frac{1}{e^{-\frac{x^\lambda}{\sqrt{2\lambda}}} + 1}, \\ \phi_{k+1}\left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu}\right) &= S_t^{-1} \left(u S_t^\mu \left[\frac{\partial^{2\lambda} \left(\phi_j\left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu}\right) \right)}{\partial x^{2\lambda}} - \frac{3}{4}\phi_j\left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu}\right) + A_j \right] \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

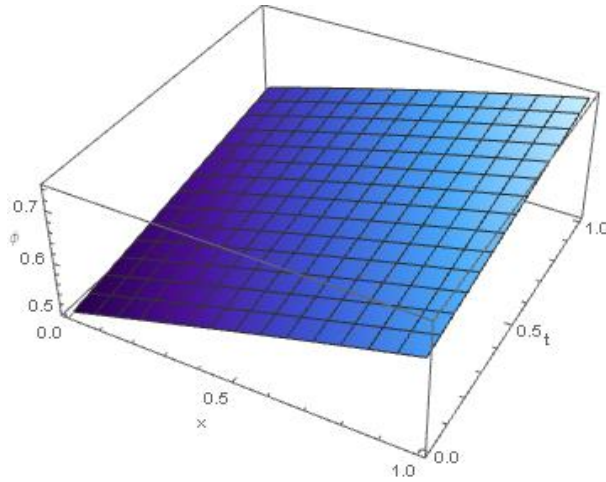
indirgeme formülü oluşturulur ve çözümün kalan terimleri,

$$\begin{aligned}\phi_1\left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu}\right) &= \frac{1}{-8 \cosh\left(\frac{x^\lambda}{\sqrt{2}\lambda}\right) - 8} \left(\frac{t^\mu}{\mu}\right), \\ \phi_2\left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu}\right) &= -\frac{1}{16} \sinh^4\left(\frac{x^\lambda}{2\sqrt{2}\lambda}\right) \operatorname{csch}^3\left(\frac{x^\lambda}{\sqrt{2}\lambda}\right) \left(\frac{t^\mu}{\mu}\right)^2, \\ \phi_3\left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu}\right) &= -\frac{1}{3072} \left(\cosh\left(\frac{x^\lambda}{\sqrt{2}\lambda}\right) - 2\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x^\lambda}{2\sqrt{2}\lambda}\right) \left(\frac{t^\mu}{\mu}\right)^3, \\ \phi_4\left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu}\right) &= -\frac{1}{98304} \left(\sinh\left(\frac{3x^\lambda}{2\sqrt{2}\lambda}\right) - 11 \sinh\left(\frac{x^\lambda}{2\sqrt{2}\lambda}\right)\right) \operatorname{sech}^5\left(\frac{x^\lambda}{2\sqrt{2}\lambda}\right) \left(\frac{t^\mu}{\mu}\right)^4,\end{aligned}$$

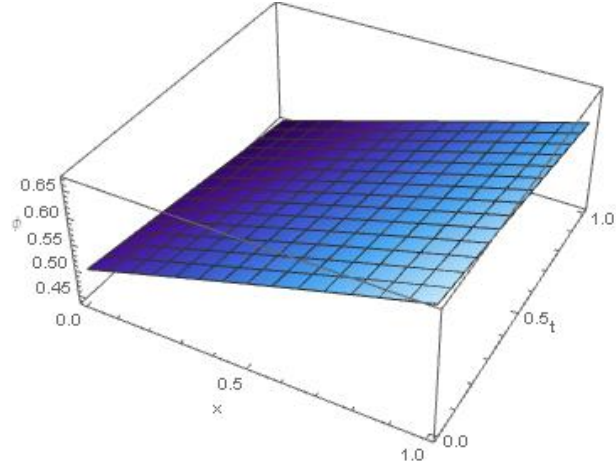
ile hesaplanır. Böylece, (4.60) dekleminin CSDM ile analitik çözümü,

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{x^\lambda}{\lambda}, \frac{t^\mu}{\mu}\right) &= \frac{1}{e^{-\frac{x^\lambda}{\sqrt{2}\lambda}} + 1} + \frac{1}{-8 \cosh\left(\frac{x^\lambda}{\sqrt{2}\lambda}\right) - 8} \left(\frac{t^\mu}{\mu}\right) - \frac{1}{16} \sinh^4\left(\frac{x^\lambda}{2\sqrt{2}\lambda}\right) \operatorname{csch}^3\left(\frac{x^\lambda}{\sqrt{2}\lambda}\right) \left(\frac{t^\mu}{\mu}\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{3072} \left(\cosh\left(\frac{x^\lambda}{\sqrt{2}\lambda}\right) - 2\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x^\lambda}{2\sqrt{2}\lambda}\right) \left(\frac{t^\mu}{\mu}\right)^3 \\ &\quad - \frac{1}{98304} \left(\sinh\left(\frac{3x^\lambda}{2\sqrt{2}\lambda}\right) - 11 \sinh\left(\frac{x^\lambda}{2\sqrt{2}\lambda}\right)\right) \operatorname{sech}^5\left(\frac{x^\lambda}{2\sqrt{2}\lambda}\right) \left(\frac{t^\mu}{\mu}\right)^4 \\ &\quad + \dots\end{aligned}$$

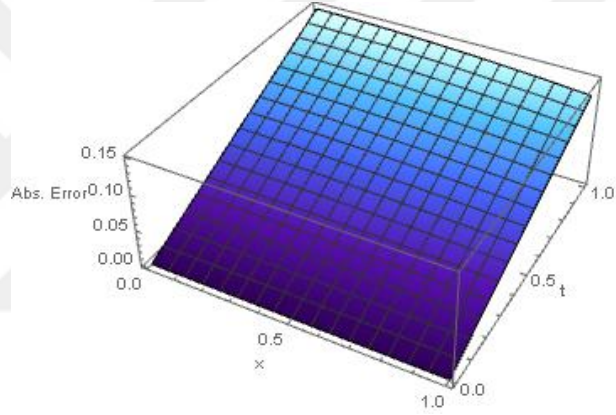
şeklinde elde edilir.



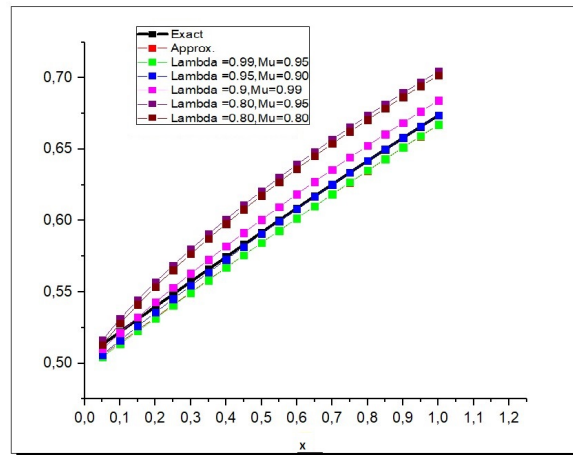
Şekil 4.33. $\mu = \lambda = 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 0.5$ değerleri için (4.60) denkleminin ait gerçek çözümün üç katlı grafiği.



Şekil 4.34. $\mu = \lambda = 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 0.5$ değerleri için (4.60) denkleminde ait yaklaşık çözümün üç katlı grafiği.



Şekil 4.35. $\mu = \lambda = 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 0.5$ değerleri için (4.60) denkleminde ait uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi CSDM mutlak üç katlı hata grafiği.



Şekil 4.36. $t = 0.02$, çeşitli kesirli μ ve λ değerleri için (4.60) denkleminde ait gerçek çözümü yaklaşık çözümü ile iki katlı grafiği.

Çizelge 4.6. $\mu = \lambda = 1$ için (4.60) denkleminde ait mutlak hata tablosu.

t	x	Tam Çözüm	CSDM Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0.01	0.05	0.513255	0.505714	0.00748392
	0.10	0.522083	0.514549	0.0075053
	0.15	0.530897	0.523374	0.00752205
	0.20	0.539691	0.532186	0.00753415
	0.25	0.548461	0.540977	0.00754156
0.05	0.05		0.00748392	0.513255
	0.10	0.522083	0.514549	0.0075053
	0.15	0.530897	0.523374	0.00752205
	0.20	0.539691	0.532186	0.00753415
	0.25	0.548461	0.540977	0.00754156

4.3. İki Katlı Uyumlu Sumudu Dönüşümü

Bu bölümde, uyumlu iki katlı Sumudu dönüşümünün (CDST) tanımı verilmiştir. Öncelikle CDST bazı belirli fonksiyonlara uygulanmıştır. Ayrıca, CDST ile ilgili bazı teoremler, özellikler verilmiş ve ispatlanmıştır. Önerilen dönüşümün uygulanabilirliği ve etkinliğini göstermek için CFD içeren geniş bir sınıf olan (FPDE)'nin tam çözümünü elde etmek için CDST uygulanmıştır.

Tanım 4.3 $\varphi : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu küme altında

$$\Omega = \left\{ \varphi(x, \tau) : \exists \lambda_1, \lambda_2 > 0, |\varphi(x, \tau)| < K \exp \left(\frac{\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) + \left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)}{\lambda_j^2} \right), j = 1, 2 \text{ ve } (x^\nu, \tau^\beta) \in R_+^2 \right\},$$

iki katlı uyumlu Sumudu dönüşümü,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(p, q) &= S_x^\nu S_\tau^\beta (\varphi(x, \tau) : (p, q)) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{x^\nu}{\nu} + \frac{\tau^\beta}{\beta}\right)} \varphi(px, q\tau) d_\nu x d_\beta \tau \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{x^\nu}{\nu} + \frac{\tau^\beta}{\beta}\right)} \varphi(px, q\tau) x^{\nu-1} \tau^{\beta-1} dx d\tau, \end{aligned} \quad (4.64)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\nu, \beta \in (0, 1]$ ve $p, q \in \mathbb{C}$ (Alfaqei et al., 2021).

Tanım 4.4 $\varphi : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun, x ve τ değişkenlerine göre tek katlı uyumlu Sumudu dönüşümleri sırası ile

$$\bar{\varphi}(p) = S_x^\nu (\varphi(x, \tau) : p) = \int_0^\infty e^{-\frac{x^\nu}{\nu}} \varphi(px, \tau) x^{\nu-1} dx, \quad (4.65)$$

$$\bar{\varphi}(q) = S_\tau^\beta (\varphi(x, \tau) : q) = \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^\beta}{\beta}} \varphi(x, q\tau) \tau^{\beta-1} d\tau, \quad (4.66)$$

şeklinde tanımlanır (Alfaqei et al., 2021).

Teorem 4.12 (Alfaqeih et al., 2021) $\varphi : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir reel fonksiyon olmak üzere, $\bar{\varphi}(p, q) = S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right)$ iki katlı uyumlu Sumudu dönüşümünün var olduğu kabul edilsin. O halde $S_x S_\tau (\varphi(x, \tau)) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-\tau} \varphi(px, q\tau) dx d\tau$ klasik iki katlı dönüşümünün ifade etmek üzere

$$S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right) = S_x S_\tau (\varphi(x, \tau)), \quad (4.67)$$

dir.

İspat CDST tanımı kullanılarak, $w = \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)$ ve $y = \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)$ dönüşümleri uygulandığında, Teorem (4.12)'in ispatı açıkça görülebilir.

Örnek 4.6 Bazı temel fonksiyonların iki katlı uyumlu Sumudu dönüşümleri

1. c bir sabit olmak üzere

$$S_x^\nu S_\tau^\beta (c) = S_x S_\tau (c) = c,$$

dir.

2. r, s keyfi sabitler olmak üzere

$$S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^r \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^s \right) = S_x S_\tau [(x^r \tau^s)] = \Gamma(r+1) \Gamma(s+1) p^r q^s,$$

dir.

3. a, b keyfi sabitler olmak üzere

$$S_x^\nu S_\tau^\beta \left(e^{a \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) + b \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)} \right) = S_x S_\tau (e^{ax+b\tau}) = \frac{1}{(1-ap)(1-bq)},$$

dir.

4. a, b keyfi sabitler olmak üzere

$$S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\sin \left(a \frac{x^\nu}{\nu} \right) \sin \left(b \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right) = \frac{abpq}{(1+(a^2 p^2))(1+(b^2 q^2))},$$

dir.

5. a, b keyfi sabitler olmak üzere

$$S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\cos \left(a \frac{x^\nu}{\nu} \right) \cos \left(b \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right) = \frac{1}{(1+(a^2 p^2))(1+(b^2 q^2))},$$

dir.

4.3.1. İki Kath Uyumlu Sumudu Dönüşümün Bazı Özellikleri

Teorem 4.13 (Alfaqeh et al., 2021) $a, b, r, s \in \mathbb{R}, p, q > 0$ olmak üzere, $\bar{\varphi}(p, q) = S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right)$ ve $\bar{\phi}(p, q) = S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right)$ olsun. O halde,

1. Ölçek Değişim Özelliği

$$S_x^\nu S_\tau^\beta (\varphi(cx, d\tau)) = \bar{\varphi}(cp, dq),$$

2. Lineerlik Özelliği

$$S_x^\nu S_\tau^\beta (c\varphi(x, \tau) + d\phi(x, \tau)) = c\bar{\varphi}(p, q) + d\bar{\phi}(p, q),$$

$$3. S_x^\nu S_\tau^\beta (f(x)) = \bar{f}(p) \text{ ve } S_x^\nu S_\tau^\beta (g(\tau)) = \bar{g}(q),$$

$$4. S_x^\nu S_\tau^\beta (f(x)g(\tau)) = \bar{f}(p)\bar{g}(q),$$

$$5. S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\int_0^{\frac{x^\nu}{\nu}} \int_0^{\frac{\tau^\beta}{\beta}} \varphi(\kappa, \lambda) d_\nu \kappa d_\beta \lambda \right) = pq\bar{\varphi}(p, q),$$

$$6. S_x^\nu S_\tau^\beta \left(e^{\pm a \frac{x^\nu}{\nu} \pm b \frac{\tau^\beta}{\beta}} \varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right) = \frac{1}{(1 \mp ap)(1 \mp bq)} \bar{\varphi} \left(\frac{p}{1 \mp ap}, \frac{q}{1 \mp bq} \right).$$

İspat CDST tanımı kullanılarak, Teorem (4.13)'in ispatı açıktır.

Lemma 4.1 (Alfaqeh et al., 2021) $0 < \nu, \beta \leq 1$, için $\frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu}, \frac{\partial^\beta \varphi}{\partial \tau^\beta}$ ve $\frac{\partial^{\nu+\beta} \varphi}{\partial x^\nu \partial \tau^\beta}$ (ν, β . ve $\nu + \beta$. mertebeden kesirli kısmi turevlerin CDST'ler sırası ile

$$i. S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} \right) = p^{-1} [\bar{\varphi}(p, q) - \bar{\varphi}(0, q)].$$

$$ii. S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\frac{\partial^\beta \varphi}{\partial \tau^\beta} \right) = q^{-1} [\bar{\varphi}(p, q) - \bar{\varphi}(p, 0)].$$

$$iii. S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\frac{\partial^{\nu+\beta} \varphi}{\partial x^\nu \partial \tau^\beta} \right) = p^{-1} q^{-1} [\bar{\varphi}(p, q) - \bar{\varphi}(p, 0) - \bar{\varphi}(0, q) + \varphi(0, 0)].$$

$$iv. S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} \right) = p \frac{\partial^\nu \bar{\varphi}(p, q)}{\partial x^\nu}.$$

$$v. S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \frac{\partial^\beta \varphi}{\partial \tau^\beta} \right) = q \frac{\partial^\beta \bar{\varphi}(p, q)}{\partial \tau^\beta}.$$

biçiminde yazılabilir.

İspat (i) Uyumlu Sumudu dönüşümü tanımına ve uyumlu tanımına göre kısmi integral alınırsa,

$$\begin{aligned} S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} \right) &= \frac{1}{pq} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{x^\nu}{p\nu} + \frac{\tau^\beta}{q\beta}\right)} \frac{\partial^\nu \varphi(x, \tau)}{\partial x^\nu} x^{\nu-1} \tau^{\beta-1} dx d\tau \\ &= \frac{1}{pq} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{x^\nu}{p\nu} + \frac{\tau^\beta}{q\beta}\right)} (x)^{1-\nu} \frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial x} x^{\nu-1} \tau^{\beta-1} dx d\tau, \end{aligned} \quad (4.68)$$

elde edilir. Bu denklem düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} \right) &= \frac{1}{pq} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{x^\nu}{p^\nu} + \frac{\tau^\beta}{q^\beta}\right)} \frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial x} \tau^{\beta-1} dx d\tau \\ &= -\frac{1}{pq} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\tau^\beta}{q^\beta}\right)} \tau^{\beta-1} \varphi(0, \tau) + \frac{1}{pq} \frac{1}{p} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{x^\nu}{p^\nu} + \frac{\tau^\beta}{q^\beta}\right)} \varphi(x, \tau) x^{\nu-1} \tau^{\beta-1} dx d\tau \\ &= p^{-1} [\bar{\varphi}(p, q) - \bar{\varphi}(0, q)], \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

(ii), (iii)'nin ispatı (i) şikkının ispatına benzerdir.

Teorem 4.14 $n, m \in \mathbb{N}$ ve $0 < \nu, \beta \leq 1$ olmak üzere $\frac{\partial^{n\nu} \varphi}{\partial x^{n\nu}}, \frac{\partial^{m\beta} \varphi}{\partial \tau^{m\beta}}$, (ν . ve β . mertebeden, n ve m kez uyumlu anlamında kesirli mertebeden turevleri) (CDSTs) sırası ile

$$S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\frac{\partial^{n\nu} \varphi}{\partial x^{n\nu}} \right) = p^{-n} \left[\bar{\varphi}(p, q) - \sum_{i=0}^{n-1} p^i S_\tau^\beta \left(\frac{\partial^{i\nu} \varphi}{\partial x^{i\nu}} \varphi(0, \tau) \right) \right], \quad (4.69)$$

$$S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\frac{\partial^{m\beta} \varphi}{\partial \tau^{m\beta}} \right) = q^{-m} \left[\bar{\varphi}(p, q) - \sum_{k=0}^{m-1} q^k S_x^\nu \left(\frac{\partial^{k\beta} \varphi}{\partial \tau^{k\beta}} \varphi(x, 0) \right) \right], \quad (4.70)$$

şeklinde (Alfaqueih et al., 2021).

İspat Teoremin ispatı matematiksel tümevarım ile kolaylıkla yapılabilir.

Lemma 4.2 (Alfaqueih et al., 2021) (iki katlı uyumlu Laplace dönüşümünü - iki katlı uyumlu Sumudu dönüşümünün dualitesi). $S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right), (p, q) \right)$ olduğu kabul edilsin.

O halde $L_x^\nu L_\tau^\beta \left(\varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(p \frac{x^\nu}{\nu} + q \frac{\tau^\beta}{\beta}\right)} \varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) x^{\nu-1} \tau^{\beta-1} dx d\tau$ iki katlı uyumlu Laplace dönüşümünü ifade etmek üzere

$$S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right), (p, q) \right) = \frac{1}{pq} L_x^\nu L_\tau^\beta \left(\varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right), \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \right), \quad (4.71)$$

dir.

İspat CDST tanımını kullanarak ispat kolayca gösterilir.

Teorem 4.15 (Konvolüsyon Teoremi) $p > 0$ ve $q > 0$ için $\bar{\varphi}(p, q) = S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right)$ ve $\bar{\phi}(p, q) = S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\phi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right)$ iki katlı uyumlu Sumudu dönüşümleri mevcut olsun. Bu durumda

$$[\varphi * \phi] \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) = \int_0^{\frac{x^\nu}{\nu}} \int_0^{\frac{\tau^\beta}{\beta}} \varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu} - \frac{\kappa^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} - \frac{\lambda^\beta}{\beta} \right) \phi \left(\frac{\kappa^\nu}{\nu}, \frac{\lambda^\beta}{\beta} \right) d_\nu \kappa d_\beta \lambda \quad (4.72)$$

ifadesi φ ve ϕ fonksiyonlarının iki katlı uyumlu konvolüsyonlarını ifade etmek üzere

$$S_x^\nu S_\tau^\beta \left([\varphi * \phi] \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right) = pq \bar{\varphi}(p, q) \bar{\phi}(p, q) \quad (4.73)$$

dir.

İspat Lemma (4.2) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
 S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\left([\varphi * * \phi] \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right) \right) &= \frac{1}{pq} L_x^\nu L_\tau^\beta \left(\left([\varphi * * \phi] \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right), \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{pq} L_x^\nu L_\tau^\beta \left(\varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right), \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \right) L_x^\nu L_\tau^\beta \left(\phi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right), \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \right) \\
 &= pq S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right) S_x^\nu S_\tau^\beta \left(\phi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \right),
 \end{aligned}$$

eşitliği gerçekleşmektedir.

4.3.2. İki Katlı Uyumlu Sumudu Dönüşümünün Bazı Uygulamaları

Bu bölümde iki katlı Sumudu dönüşümü, lineer uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemler ve uyumlu integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için uygulanmıştır.

Örnek 4.7

$$\frac{\partial^{2\nu} \varphi}{\partial x^{2\nu}} - \frac{\partial^{2\beta} \varphi}{\partial \tau^{2\beta}} - \frac{\partial^\beta \varphi}{\partial \tau^\beta} - \varphi + \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 + \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) - 1 = 0, \quad (4.74)$$

uyumlu kesirli türevli lineer homojen olmayan kısmi türe ve sahip Telegraph denklemini

$$\begin{aligned}
 \varphi \left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0 \right) &= \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2, \quad \frac{\partial^\tau \varphi}{\partial \tau^\nu} \left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0 \right) = 1, \\
 \varphi \left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) &= \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right), \quad \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} \left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta} \right) = 0,
 \end{aligned} \quad (4.75)$$

başlangıç-sınır koşulları ile ele alalım. (4.74) denkleminin her iki tarafına soldan CDST uygulandığında,

$$\begin{aligned}
 p^{-2} \bar{\varphi}(p, q) - p^{-2} \bar{\varphi}(0, q) - p^{-1} \frac{\partial^\nu \bar{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} - q^{-2} \bar{\varphi}(p, q) + q^{-2} \bar{\varphi}(p, 0) \\
 + q^{-1} \frac{\partial^\beta \bar{\varphi}(p, 0)}{\partial \tau^\beta} - q^{-1} \bar{\varphi}(p, q) + q^{-1} \bar{\varphi}(p, 0) - \bar{\varphi}(p, q) + 2p^2 + q - 1 = 0,
 \end{aligned} \quad (4.76)$$

elde edilir. (4.75) denklemindeki başlangıç-sınır şartları tek CST uygulandığında

$$\bar{\varphi}(0, q) = 2q^2, \quad \frac{\partial^\beta \bar{\varphi}(p, 0)}{\partial \tau^\beta} = 1, \quad \bar{\varphi}(0, q) = q \frac{\partial^\nu \bar{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} = 0, \quad \bar{\varphi}(p, 0) = 2p^2, \quad (4.77)$$

(4.77) denklemindeki değerler (4.76) denkleminde yerine yazıldığında,

$$(p^{-2} - q^{-2} - q^{-1} - 1) \bar{\varphi}(p, q) = (qp^{-2} - 2q^{-2}p^2 - q^{-1} - 2q^{-1}p^2 - 2p^2 - q + 1), \quad (4.78)$$

elde edilir. Bu denklem $\bar{\varphi}(p, q)$ için çözüldüğünde,

$$\bar{\varphi}(p, q) = (2p^2 + q), \quad (4.79)$$

bulunur. (4.79) denkleminin ters CDST uygulanırsa,

$$\varphi(x, \tau) = S_x^{-1} S_\tau^{-1} [(2p^2 + q)] = \left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right), \quad (4.80)$$

elde edilir.

Örnek 4.8

$$\frac{\partial^\beta \varphi}{\partial \tau^\beta} = \frac{\partial^{2\nu} \varphi}{\partial x^{2\nu}} + \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu}, \quad 0 < \nu, \beta \leq 1, \quad (4.81)$$

lineer homojen kesirli mertebeli Advection- Diffusion denklemini

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x^\rho}{\rho}, 0\right) &= e\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) - \left(\frac{x^\nu}{\nu}\right), \\ \varphi\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= 1 + \left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right), \quad \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu}\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) = 0, \end{aligned} \quad (4.82)$$

başlangıç-sınır koşulları ile ele alalım. (4.81) denkleminin CDST alındığında,

$$q^{-1} [\bar{\varphi}(p, q) - \bar{\varphi}(p, 0)] = p^{-2} \bar{\varphi}(p, q) - p^{-2} \bar{\varphi}(0, q) - p^{-1} \frac{\partial \bar{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} - p^{-1} [\bar{\varphi}(p, q) - \bar{\varphi}(0, q)], \quad (4.83)$$

eşitliğine ulaşılır. (4.82) denklemdeki başlangıç-sınır şartları tek CST uygulandığında

$$\bar{\varphi}(p, 0) = \frac{1}{1-p} - p, \quad \bar{\varphi}(0, q) = 1 + q, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} = 0, \quad (4.84)$$

elde edilir. (4.84) denklemdeki değerler (4.83) denkleminde yerine yerine yazıldığında,

$$(q^{-1} - p^{-2} + p^{-1}) \bar{\varphi}(p, q) = q^{-1} \left(\frac{1}{1-p} - p\right) - p^{-2} (1 + q) + p^{-1} (1 + q), \quad (4.85)$$

ulaşılır. Bu denklem $\bar{\varphi}(p, q)$ için çözülürse ve denkleme ters CDST uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \varphi(x, \tau) &= S_x^{-1} S_\tau^{-1} \left[\frac{q^{-1} \left(\frac{1}{1-p} - p\right) - p^{-2} (1 + q) + p^{-1} (1 + q)}{(q^{-1} - p^{-2} + p^{-1})} \right] \\ &= S_x^{-1} S_\tau^{-1} \left[\frac{1}{1-p} - p + q \right] \\ &= e\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) - \left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) + \left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right), \end{aligned} \quad (4.86)$$

elde edilir.

Örnek 4.9

$$\frac{\partial^{2\beta} \varphi}{\partial \tau^{2\beta}} - \frac{\partial^{2\nu} \varphi}{\partial x^{2\nu}} - 2\varphi = -2 \sin\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) \sin\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right), \quad 0 < \nu, \beta \leq 1 \quad (4.87)$$

uyumlu kesirli mertebeden lineer homojen olmayan kısmi turevli diferensiyel Klein-Gordon denklemini

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0\right) &= 0, \quad \frac{\partial^\tau}{\partial \tau^\nu} \varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0\right) = \sin\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right), \\ \varphi\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= 0, \quad \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \varphi\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) = \sin\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right),\end{aligned}\quad (4.88)$$

başlangıç-sınır koşulları ile ele alalım. (4.87) denkleminin CDST alındığında,

$$\begin{aligned}q^{-2}\bar{\varphi}(p, q) - q^{-2}\bar{\varphi}(p, 0) - q^{-1}\frac{\partial^\beta \bar{\varphi}(p, 0)}{\partial \tau^\beta} - p^{-2}\bar{\varphi}(p, q) \\ + p^{-2}\bar{\varphi}(0, q) + p^{-1}\frac{\partial^\nu \bar{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} - 2\bar{\varphi}(p, q) = -2\frac{p}{1+p^2}\frac{q}{1+q^2},\end{aligned}\quad (4.89)$$

eşitliğine ulaşılır. (4.88) denklemindeki başlangıç-sınır koşulları tek CST uygulandığında,

$$\bar{\varphi}(p, 0) = 0, \quad \bar{\varphi}(0, q) = 0, \quad \frac{\partial^\beta \bar{\varphi}(p, 0)}{\partial \tau^\beta} = \frac{p}{1+p^2}, \quad \frac{\partial^\nu \bar{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} = \frac{q}{1+q^2}, \quad (4.90)$$

elde edilir. (4.90) denklemindeki değerler (4.89) denkleminde yerine yazıldığında,

$$(q^{-2} - p^{-2} - 2)\bar{\varphi}(p, q) = q^{-1}\left(\frac{p}{1+p^2}\right) - p^{-1}\left(\frac{q}{1+q^2}\right) - 2\left(\frac{p}{1+p^2}\frac{q}{1+q^2}\right), \quad (4.91)$$

elde edilir. Bu denklem $\bar{\varphi}(p, q)$ için çözüldüğünde ve ters CDST uygulandığında,

$$\begin{aligned}\varphi(x, \tau) &= S_x^{-1} S_\tau^{-1} \left[\frac{1}{(q^{-2} - p^{-2} - 2)} \left(q^{-1}\left(\frac{p}{1+p^2}\right) - p^{-1}\left(\frac{q}{1+q^2}\right) - 2\left(\frac{p}{1+p^2}\frac{q}{1+q^2}\right) \right) \right] \\ &= S_x^{-1} S_\tau^{-1} \left[\frac{p}{1+p^2} \frac{q}{1+q^2} \right] \\ &= \sin\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) \sin\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right),\end{aligned}\quad (4.92)$$

elde edilir.

Örnek 4.10

$$\frac{\partial^\beta \varphi}{\partial \tau^\beta} + \frac{\partial^{3\nu} \varphi}{\partial x^{3\nu}} + \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial x^\nu} = 0, \quad 0 < \nu, \beta \leq 1 \quad (4.93)$$

lineer homojen kesirli mertebeli Korteweg-de Vries denklemini

$$\varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0\right) = e^{-\frac{x^\nu}{\nu}}, \quad \varphi\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) = e^{2\frac{\tau^\beta}{\beta}}, \quad \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \varphi\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) = -e^{2\frac{\tau^\beta}{\beta}}, \quad \frac{\partial^{2\nu}}{\partial x^{2\nu}} \varphi\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) = e^{2\frac{\tau^\beta}{\beta}}, \quad (4.94)$$

başlangıç-sınır koşulları ile ele alalım. (4.93) denkleminin CDST alındığında,

$$\begin{aligned}q^{-1}\bar{\varphi}(p, q) - q^{-1}\bar{\varphi}(p, 0) + p^{-3}\bar{\varphi}(p, q) - p^{-3}\bar{\varphi}(0, q) - \\ p^{-2}\frac{\partial^\nu \bar{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} - p^{-1}\frac{\partial^{2\nu} \bar{\varphi}(0, q)}{\partial x^{2\nu}} + p^{-\nu}\bar{\varphi}(p, q) - p^{-1}\bar{\varphi}(0, q) = 0,\end{aligned}\quad (4.95)$$

eşitliğine ulaşılır. (4.94) denklemindeki başlangıç-sınır koşulları tek CST uygulandığında,

$$\bar{\varphi}(p, 0) = \frac{1}{1+p}, \quad \bar{\varphi}(0, q) = \frac{1}{1+2q}, \quad \frac{\partial^\nu \bar{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} = \frac{-1}{1-2q}, \quad \frac{\partial^{2\nu} \bar{\varphi}(0, q)}{\partial x^{2\nu}} = \frac{1}{1-2q}, \quad (4.96)$$

elde edilir. (4.96) denklemindeki değerler (4.95) denkleminde yerine yazıldığında,

$$(q^{-1} + p^{-3} + p^{-1}) \bar{\varphi}(p, q) = \left(\frac{q^{-1}}{1+p^2} \right) + \left(\frac{p^{-3}}{1+2q} \right) - \left(\frac{p^{-2}}{1-2q} \right) + \left(\frac{p^{-1}}{1-2q} \right) + \left(\frac{p^{-1}}{1-2q} \right),$$

elde edilir. Bu denklem $\bar{\varphi}(p, q)$ için çözüldüğünde ve ters CDST uygulandığında,

$$\begin{aligned} \varphi(x, \tau) &= S_x^{-1} S_\tau^{-1} \left[\frac{1}{(q^{-1} + p^{-3} + p^{-1})} \left(\left(\frac{q^{-1}}{1+p^2} \right) + \left(\frac{p^{-3}}{1+2q} \right) - \left(\frac{p^{-2}}{1-2q} \right) + \left(\frac{p^{-1}}{1-2q} \right) + \left(\frac{p^{-1}}{1-2q} \right) \right) \right] \\ &= S_x^{-1} S_\tau^{-1} \left[\frac{1}{(1-2q)(1+p)} \right] \\ &= e^{2\left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right) - \left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)}, \end{aligned} \quad (4.97)$$

elde edilir.

Örnek 4.11

$$\frac{\partial^{4\nu} \varphi}{\partial x^{4\nu}} + \frac{\partial^{2\beta} \varphi}{\partial \tau^{2\beta}} = \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right) \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) + \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2, \quad (4.98)$$

lineer homojen olmayan kesirli mertebeli Euler-Bernoulli denklemini

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0\right) &= 0, \quad \frac{\partial^\tau \varphi\left(\frac{x^\nu}{\nu}, 0\right)}{\partial \tau^\nu} = \frac{1}{120} \left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)^5, \\ \varphi\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right) &= \frac{1}{12} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)^4, \quad \frac{\partial^{i\nu} \varphi\left(0, \frac{\tau^\beta}{\beta}\right)}{\partial x^{i\nu}} = 0, \quad \text{for } i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (4.99)$$

başlangıç-sınır koşulları ile ele alalım. (4.98) denkleminin CDST alındığında,

$$\begin{aligned} p^{-4} \bar{\varphi}(p, q) - p^{-4} \bar{\varphi}(0, q) - p^{-3} \frac{\partial^\nu \bar{\varphi}(0, q)}{\partial x^\nu} - p^{-2} \frac{\partial^{2\nu} \bar{\varphi}(0, q)}{\partial x^{2\nu}} \\ - p^{-1} \frac{\partial^{3\nu} \bar{\varphi}(0, q)}{\partial x^{3\nu}} + q^{-2} \bar{\varphi}(p, q) - q^{-2} \bar{\varphi}(p, 0) - q^{-1} \frac{\partial^\beta \bar{\varphi}(p, 0)}{\partial \tau^\beta} = pq + 2q^2, \end{aligned} \quad (4.100)$$

eşitliğine ulaşılır. (4.99) denklemindeki başlangıç-sınır koşulları tek CST uygulandığında,

$$\bar{\varphi}(p, 0) = 0, \quad \frac{\partial^\beta \bar{\varphi}(p, 0)}{\partial \tau^\beta} = p^5, \quad \bar{\varphi}(0, q) = 2q^4, \quad \frac{\partial^{i\nu} \bar{\varphi}(0, q)}{\partial x^{i\nu}} = 0, \quad \text{for } i = 1, 2, 3, \quad (4.101)$$

elde edilir. (4.101) denklemindeki değerler (4.100) denkleminde yerine yazıldığında,

$$(p^{-4} + q^{-2}) \bar{\varphi}(p, q) = (2p^{-4}q^4 + q^{-1}p^5 + pq + 2q^2), \quad (4.102)$$

elde edilir. Bu denklem $\bar{\varphi}(p, q)$ için çözüldüğünde ve ters CDST uygulandığında,

$$\begin{aligned}
\varphi(x, \tau) &= S_x^{-1} S_x^{-1} \left[\frac{(2p^{-4}q^4 + q^{-1}p^{5\nu} + pq + 2q^2)}{(p^{-4} + q^{-2})} \right] \\
&= S_x^{-1} S_x^{-1} [2q^4 + qp^5] \\
&= \frac{1}{12} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^4 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right) \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^5,
\end{aligned} \tag{4.103}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.12

$$\frac{\partial^{\nu+\beta} \varphi}{\partial x^\nu \partial \tau^\beta} + \varphi = \frac{-1}{4} \left(\frac{x^\nu}{\nu} \right)^2 \left(\frac{\tau^\beta}{\beta} \right)^2 + \frac{x^\nu}{\nu} \frac{\tau^\beta}{\beta} + 1 + \int_0^{\frac{x^\nu}{\nu}} \int_0^{\frac{\tau^\beta}{\beta}} \varphi(\kappa, \lambda) \kappa^{\nu-1} \lambda^{\beta-1} d\kappa d\lambda, \tag{4.104}$$

uyumlu kesirli mertebeli integro-deferansiyel denklemi

$$\varphi(x, 0) = 0, \quad \varphi(0, t) = 0, \tag{4.105}$$

başlangıç-sınır koşulları ile ele alalım. (4.104) denkleminin CDST alındığında,

$$p^{-1}q^{-1} [\bar{\varphi}(p, q) - \bar{\varphi}(p, 0) - \bar{\varphi}(0, q) + \varphi(0, 0)] + \bar{\varphi}(p, q) = p^2q^2 + pq + 1 + pq\bar{\varphi}(p, q), \tag{4.106}$$

eşitliğine ulaşılır. (4.105) denklemindeki başlangıç-sınır koşulları tek CST uygulandığında,

$$\bar{\varphi}(p, 0) = 0, \quad \bar{\varphi}(0, q) = 0, \tag{4.107}$$

elde edilir. (4.107) denklemindeki değerleri (4.106) denkleminde yerine yazıldığında,

$$p^{-1}q^{-1}\bar{\varphi}(p, q) + \bar{\varphi}(p, q) = p^2q^2 + pq + 1 + pq\bar{\varphi}(p, q), \tag{4.108}$$

elde edilir. Bu denklem $\bar{\varphi}(p, q)$ için çözüldüğünde,

$$\bar{\varphi}(p, q) = pq, \tag{4.109}$$

elde edilir ve ters CDST uygulandığında,

$$\varphi(x, \tau) = S_x^{-1} S_\tau^{-1} [pq] = \frac{x^\nu}{\nu} \frac{\tau^\beta}{\beta}, \tag{4.110}$$

elde edilir.

Örnek 4.13

$$\frac{\partial^\nu \varphi(x, \tau)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^\beta \varphi(x, \tau)}{\partial \tau^\beta} + 1 - e^{\frac{x^\nu}{\nu}} - e^{\frac{\tau^\beta}{\beta}} - e^{\frac{x^\nu}{\nu} + \frac{\tau^\beta}{\beta}} = \int_0^{\frac{x^\nu}{\nu}} \int_0^{\frac{\tau^\beta}{\beta}} \varphi(\kappa, \lambda) \kappa^{\nu-1} \lambda^{\beta-1} d\kappa d\lambda \tag{4.111}$$

uyumlu kesirli mertebeli integro-deferansiyel denklemi

$$\varphi(x, 0) = e^{\frac{x^\nu}{\nu}}, \varphi(0, \tau) = e^{\frac{\tau^\beta}{\beta}}, \quad (4.112)$$

başlangıç-sınır koşulları ile ele alalım. (4.111) denkleminin CDST alındığında,

$$\begin{aligned} p^{-1} [\bar{\varphi}(p, q) - \bar{\varphi}(0, q)] + q^{-1} [\bar{\varphi}(p, q) - \bar{\varphi}(p, 0)] \\ + 1 - \frac{1}{(1-p)} - \frac{1}{(1-q)} - \frac{1}{(1-p)(1-q)} = pq\bar{\varphi}(p, q), \end{aligned} \quad (4.113)$$

eşitliğine ulaşılır. (4.112) denklemindeki başlangıç-sınır koşulları tek CST uygulandığında,

$$\bar{\varphi}(p, 0) = \frac{1}{(1-p)}, \bar{\varphi}(0, q) = \frac{1}{(1-q)}, \quad (4.114)$$

elde edilir. (4.114) denklemindeki değerleri (4.113) denkleminde yerine yazıldığında,

$$(p^{-1} + q^{-1} - pq) \bar{\varphi}(p, q) = \frac{1}{q(1-p)} + \frac{1}{p(1-q)} - 1 + \frac{1}{(1-p)} + \frac{1}{(1-q)} + \frac{1}{(1-p)(1-q)}, \quad (4.115)$$

elde edilir. Bu denklem $\bar{\varphi}(p, q)$ için çözüldüğünde,

$$\bar{\varphi}(p, q) = \frac{1}{(1-p)(1-q)}, \quad (4.116)$$

olarak yazılabilir ve ters CDST uygulandığında,

$$\varphi(x, \tau) = S_x^{-1} S_\tau^{-1} \left[\frac{1}{(1-p)(1-q)} \right] = e^{\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right) + \left(\frac{\tau^\beta}{\beta}\right)}, \quad (4.117)$$

elde edilir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak (Maitama and Zhao, 2019)'nın çalışması iki katlı Shehu dönüşümüne DHT genişletilmiştir. İki katlı Shehu dönüşümünün varlığı-teklifi tartışılmış ve kanıtlanmıştır. Yeni iki katlı Shehu dönüşümü ile ilgili bazı temel özellikler ve teoremler sunulmuştur. Önerilen yöntemin, iki değişken içeren integral ve kısmi diferansiyel denklemlerde kullanımı için uygun bir yöntem olduğu analiz edilmiştir. Bu nedenle, önerilen yöntemin integraller ve kısmi diferansiyel denklemler için etkin, doğru ve güvenilir bir teknik olduğu uygulamalar ile gösterilmiştir. Uygulamalı matematik, uygulamalı fizik ve mühendislikte ortaya çıkan doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözmek için bu yeni dönüşümün literatürdeki başka yöntemler ile birleştirilebileceği gözlemlenmiştir. Ayrıca, Aboodh ayrıştırma yöntemi sabit ve sabit olmayan katsayılarla Black-Scholes kesirli diferansiyel denklemini çözmek için başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Bu dönüşüm, üç katlı Aboodh dönüşümüne genişletilmiştir. Bu dönüşüm ile ilgili olarak bazı teoremler ve özellikler tartışılmıştır. Bu farklı dönüşümün uygulanabilirliği ve etkinliğini göstermek için önerilen yeni dönüşüm bazı örneklerle uygulanmıştır.

Gerçek dünya problemlerinin farklı alanlarında ortaya çıkan uyumlu kesirli türevleri içeren kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini elde etmek için uyumlu iki katlı Laplace dönüşüm yöntemi, denklemlere başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar, bu yöntemin uygun, etkin, avantajlı, güvenilir ve verilen başlangıç-sınır koşullarına sahip uyumlu kesirli türeve sahip kısmi diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini elde etmek için yeterli olduğunu göstermektedir. Ayrıca, önerilen bu yöntem doğrusal olmayan uyumlu kısmi diferansiyel denklem sistemlerine uygulanmıştır ve bu yöntemin denklem sistemleri içinde etkin bir yöntem olduğu gözlemlenmiştir. Sonuç olarak, uyumlu iki katlı Laplace dönüşümü kapsamındaki hesaplamalar, diğer yöntemler ile karşılaştırıldığında kısa bir hesaplama boyutu olduğu açıkça görülmektedir. Bu yeni yaklaşım, uyumlu iki katlı Laplace dönüşümü ve Adomian ayrıştırma yönteminin bir birleşimidir. Sunulan teknikler ile elde edilen sonuçların, literatürdeki mevcut çözümler ile tam uyum içerisinde olduğu gözlemlenmiştir. Dahası, yeni bir uyumlu integral dönüşümü önerilmiştir ve bu dönüşüme “yeni uyumlu Laplace dönüşümü” adı verilmiştir. Önerilen bu dönüşüm ile ilgili bazı teoremler ve özellikler sunulmuştur. Ayrıca, tekil uyumlu kesirli Lane-Emden tipi denklemlerin başlangıç değer problemlerinin geniş bir sınıfını çözmek için de Adomian ayrıştırma yöntemi ile birleştirilmiştir. Bu yeni dönüşüm başarılı bir şekilde denklemlere uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde, yeni uyumlu Laplace dönüşümünün uygun, etkin, güvenilir ve ele alınan başlangıç koşullarına göre Lane-Emden

denklemlerinin kesin çözümlerini elde etmek için etkili bir dönüşüm olduğu sonucuna varılmıştır. Bu çalışmada ayrıca, uyumlu kesirli Fornberg-Whitham denklemi, Zakharov Kuznetsov, Gardner-Ostrovsky ve Fitzhugh-Nagumo modellerinin çözümlerini elde etmek için uyumlu Sumudu ayrıştırma yöntemi adı verilen yeni bir hesaplama yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem, uyumlu Sumudu dönüşüm yöntemine ve Adomian ayrıştırma yöntemine dayanmaktadır. Elde edilen çözümler ile tam çözümler arasındaki uyumu göstermek için sonuçlar literatürdeki tam çözümler ile karşılaştırılmıştır. Bunun yanı sıra, yakınsaklık analizi yapılmış ve hataları hesaplanmıştır. Tam çözümler ile yaklaşık çözümler arasındaki mutlak hata araştırılmış ve grafikleri çizdirilmiştir. Problemlerin çözüm grafikleri, önerilen yöntemin kesin çözümler ile iyi uyumunu göstermektedir. Ulaşılan sonuçlar, önerilen yaklaşımın doğrusal olmayan uyumlu kısmi diferansiyel denklemleri ve uyumlu kesirli diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için etkili, kolay ve anlaşılır bir yöntem olduğunu ortaya koymaktadır.

Son olarak, uyumlu iki katlı Sumudu dönüşümünün tanımını verilmiş olup, bu dönüşüm belirli bazı fonksiyonlara ilk kez uygulanmıştır. Buna ek olarak, bu dönüşüm ile ilgili bazı teoremler ve özellikler sunularak kanıtlanmıştır. Önerilen bu yeni dönüşümün uygulanabilirliği ve etkinliğini göstermek için kısmi türevli diferansiyel denklemlerin geniş bir sınıfına ve uyumlu kesirli türev içeren integral denklemlere uygulaması yapılmış ve tam çözümleri elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T.**, 2015, On conformable fractional calculus, *Journal of computational and Applied Mathematics*, 279, 57–66.
- Aboodh, K.S.**, 2013, The New Integral Transform Aboodh Transform, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 9(1), 35–43.
- Adomian, G.**, 1988, A review of the decomposition method in applied mathematics, *Journal of mathematical analysis and applications*, 135(2), 501–544.
- Aggarwal, S. and GP, S.**, 2019, Shehu Transform of Error Function (Probability Integral), *Int J Res Advent Technol*, 7, 54–60.
- Aggarwal, S., Gupta, A.R., and Sharma, S.D.**, 2019, A new application of Shehu transform for handling Volterra integral equations of first kind, *International Journal of Research in Advent Technology*, 7(4), 439–445.
- Ahmed, S.A., Elzaki, T.M., and Hassan, A.A.**, 2020, Solution of Integral Differential Equations by New Double Integral Transform (Laplace–Sumudu Transform), in *Abstract and Applied Analysis*, volume 2020, Hindawi.
- Al-Smadi, M.**, 2013, Solving initial value problems by residual power series method, *Theoretical Mathematics and Applications*, 3(1), 199–210.
- Al-Zhour, Z., Alrawajeh, F., Al-Mutairi, N., and Alkhasawneh, R.**, 2019, New results on the conformable fractional Sumudu transform: theories and applications, *International Journal of Analysis and Applications*, 17(6), 1019–1033.
- Alawad, F.A., Yousif, E.A., and Arbab, A.I.**, 2013, A new technique of Laplace variational iteration method for solving space-time fractional telegraph equations, *International Journal of Differential Equations*, 2013, 1–10.
- Alfaqeih, S. and Kayijuka, I.**, 2020, Solving system of conformable fractional differential equation by conformable double Laplace decomposition method, *J. Part. Differ. Equ*, 33, 275–290.
- Alfaqeih, S. and Öziş, T.**, 2019, Note on Triple Aboodh Transform and Its Application, *International Journal of Engineering and Information Systems*, 3(3), 41–50.

- Alfaqueih, S., Bakicierler, G., and Misirli, E.**, 2021, Conformable Double Sumudu Transform with Applications, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 7(2), 578–586.
- Alfaqueih, S. and Misirli, E.**, 2020, On double Shehu transform and its properties with applications, *International Journal of Analysis and Applications*, 18(3), 381–395.
- Alfaqueih, S. and Misirli, E.**, 2021, On Convergence Analysis and Analytical Solutions of the Conformable Fractional Fitzhugh–Nagumo Model Using the Conformable Sumudu Decomposition Method, *Symmetry*, 13(2), 243.
- Anwar, A., Jarad, F., Baleanu, D., and Ayaz, F.**, 2013, Fractional Caputo heat equation within the double Laplace transform.
- Arikoglu, A. and Ozkol, I.**, 2007, Solution of fractional differential equations by using differential transform method, *Chaos, Solitons & Fractals*, 34(5), 1473–1481.
- Atangana, A.**, 2015, *Derivative with a new parameter: Theory, methods and applications*, Academic Press.
- Atangana, A., Baleanu, D., and Alsaedi, A.**, 2015, New properties of conformable derivative, *Open Mathematics*, 13(1).
- Atangana, A. and Kilicman, A.**, 2013, A novel integral operator transform and its application to some FODE and FPDE with some kind of singularities, *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 1–7.
- Babolian, E. and Biazar, J.**, 2002, Solution of nonlinear equations by modified Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 132(1), 167–172.
- Baleanu, D., Asad, J.H., and Jajarmi, A.**, 2018a, New aspects of the motion of a particle in a circular cavity, *Proceedings Of The Romanian Academy , Series A*, 19(2), 361–367.
- Baleanu, D., Golmankhaneh, A.K., Golmankhaneh, A.K., and Baleanu, M.C.**, 2009, Fractional electromagnetic equations using fractional forms, *International Journal of Theoretical Physics*, 48(11), 3114–3123.
- Baleanu, D., Jajarmi, A., and Hajipour, M.**, 2018b, On the nonlinear dynamical systems within the generalized fractional derivatives with Mittag–Leffler kernel, *Nonlinear dynamics*, 94(1),

397–414.

- Barnes, B.**, 2016, Polynomial integral transform for solving differential equations, *European journal of pure and applied mathematics*, 9(2), 140–151.
- Belgacem, R., Baleanu, D., and Bokhari, A.**, 2019, Shehu Transform and Applications to Caputo-Fractional Differential Equations, *International Journal of Analysis and Applications*, 17(6), 917–927.
- Bhalekar, S. and Daftardar-Gejji, V.**, 2008, New iterative method: application to partial differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 203(2), 778–783.
- Bochner, S., Chandrasekharan, K., and Chandrasekharan, K.**, 1949, *Fourier transforms*, 19, Princeton University Press.
- Bokhari, A.**, 2019, Application of Shehu transform to Atangana-Baleanu derivatives, *J. Math. Computer Sci*, 20, 101–107.
- Bulut, H., Baskonus, H.M., and Pandir, Y.**, 2013, The modified trial equation method for fractional wave equation and time fractional generalized Burgers equation, in *Abstract and Applied Analysis*, volume 2013, Hindawi.
- Chen, C. and Hsiao, C.**, 1997, Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems, *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 144(1), 87–94.
- Debnath, L. and Bhatta, D.**, 2014, *Integral transforms and their applications*, CRC press.
- Dhunde, R.R. and Waghmare, G.**, 2013, Applications of Double Laplace Transform to Boundary Value Problems, *IOSR Journal of Mathematics*, 9.
- Dhunde, R.R. and Waghmare, G.**, 2017, Double Laplace transform method in mathematical physics, *International journal of theoretical and mathematical physics*, 7(1), 14–20.
- El-Kalla, I.**, 2008, Convergence of the Adomian method applied to a class of nonlinear integral equations, *Applied mathematics letters*, 21(4), 372–376.
- El-Tawil, M. and Huseen, S.**, 2012, The q-homotopy analysis method (q-HAM), *Int. J. Appl. Math. Mech*, 8(15), 51–75.

- Elbeleze, A.A., Kılıçman, A., and Taib, B.M.**, 2013, Homotopy perturbation method for fractional Black-Scholes European option pricing equations using Sumudu transform, *Mathematical problems in engineering*, 2013.
- Elzaki, T.M.**, 2011, The new integral transform ‘Elzaki transform’, *Global Journal of pure and applied mathematics*, 7(1), 57–64.
- Evans, D.J. and Raslan, K.**, 2005, The Adomian decomposition method for solving delay differential equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 82(1), 49–54.
- Filipinas, J.L.D.C. and Convicto, V.C.**, 2017, On another type of transform called Rangaig transform, *International Journal*, 5(1), 42–48.
- FitzHugh, R.**, 1961, Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane, *Biophysical journal*, 1(6), 445.
- Fornberg, B. and Whitham, G.B.**, 1978, A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 289(1361), 373–404.
- Hammad, M.A. and Khalil, R.**, 2014, Abel’s formula and wronskian for conformable fractional differential equations, *International Journal of Differential Equations and Applications*, 13(3).
- Hariharan, G.**, 2019, Two Reliable Wavelet Methods to Fitzhugh–Nagumo (FN) and Fractional FN Equations, in *Wavelet Solutions for Reaction–Diffusion Problems in Science and Engineering*, pages 135–146, Springer.
- Hariharan, G. and Rajaraman, R.**, 2013, Two reliable wavelet methods to Fitzhugh–Nagumo (FN) and fractional FN equations, *Journal of Mathematical Chemistry*, 51(9), 2432–2454.
- He, J.H.**, 1999, Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique: some examples, *International journal of non-linear mechanics*, 34(4), 699–708.
- He, J.H.**, 2003, Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique, *Applied Mathematics and computation*, 135(1), 73–79.
- Holloway, P.E., Pelinovsky, E., and Talipova, T.**, 1999, A generalized Korteweg-de Vries model of internal tide transformation in the coastal zone, *Journal of Geophysical Research: Oceans*,

104(C8), 18333–18350.

Hosseini, M.M. and Nasabzadeh, H., 2006, On the convergence of Adomian decomposition method, *Applied mathematics and computation*, 182(1), 536–543.

Idrees, M.I., Ahmed, Z., Awais, M., and Perveen, Z., 2018, On the convergence of double Elzaki transform, *International Journal of Advanced and Applied Sciences*, 5(6), 19–24.

Joice Nirmala, R. and Balachandran, K., 2014, Analysis of solutions of time fractional telegraph equation, *Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics*, 18(3), 209–224.

Keskin, Y. and Oturanc, G., 2009, Reduced differential transform method for partial differential equations, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10(6), 741–750.

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., and Sababheh, M., 2014, A new definition of fractional derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65–70.

Khan, Z.H. and Khan, W.A., 2008, N-transform properties and applications, *NUST journal of engineering sciences*, 1(1), 127–133.

Kilicman, A. and Gadain, H., 2009, An application of double Laplace transform and double Sumudu transform, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 30(3), 214–223.

Kilicman, A. and Omran, M., 2017, On double Natural transform and its applications, *J. Nonlinear Sci. Appl*, 10, 1744–1754.

Kumar, D., Singh, J., and Kumar, S., 2014, Numerical computation of nonlinear fractional Zakharov–Kuznetsov equation arising in ion-acoustic waves, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 22(3), 373–378.

Laskin, N., 2000, Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals, *Physics Letters A*, 268(4-6), 298–305.

Lesnic, D., 2006, The decomposition method for linear, one-dimensional, time-dependent partial differential equations, *International journal of mathematics and mathematical sciences*, 2006.

Mace, R. and Hellberg, M., 2001, The Korteweg–de Vries–Zakharov–Kuznetsov equation for

electron-acoustic waves, *Physics of Plasmas*, 8(6), 2649–2656.

Maitama, S. and Zhao, W., 2019, New integral transform: Shehu transform a generalization of Sumudu and Laplace transform for solving differential equations, *arXiv preprint arXiv:1904.11370*.

Miller, K.S. and Ross, B., 1993, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, Wiley.

Munro, S. and Parkes, E., 1999, The derivation of a modified Zakharov–Kuznetsov equation and the stability of its solutions, *Journal of Plasma Physics*, 62(3), 305–317.

Nagumo, J., Arimoto, S., and Yoshizawa, S., 1962, An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proceedings of the IRE*, 50(10), 2061–2070.

Ostrovsky, L., 1978, Nonlinear internal waves in a rotating ocean, *Oceanology*, 18, 119–125.

Ostrovsky, L. and Stepanyants, Y.A., 1990, Nonlinear surface and internal waves in rotating fluids, in *Nonlinear Waves 3*, pages 106–128, Springer.

Ostrovsky, L. and Stepanyants, Y.A., 2005, Internal solitons in laboratory experiments: Comparison with theoretical models, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 15(3), 037111.

Özkan, O. and Kurt, A., 2018a, The analytical solutions for conformable integral equations and integro-differential equations by conformable Laplace transform, *Optical and Quantum Electronics*, 50(2), 81.

Özkan, O. and Kurt, A., 2018b, On conformable double Laplace transform, *Optical and Quantum Electronics*, 50(2), 103.

Podlubny, I., 1999, Fractional-order systems and PI/sup/spl lambda//D/sup/spl mu//-controllers, *IEEE Transactions on automatic control*, 44(1), 208–214.

Qureshi, S. and Kumar, P., 2019, Using Shehu integral transform to solve fractional order Caputo type initial value problems, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 18(2), 75–83.

- Ramadan, M.A., Raslan, K.R., El-Danaf, T.S., and Hadhoud, A.R.**, 2016, On a new general integral transform: some properties and remarks, *J. Math. Comput. Sci.*, 6(1), 103–109.
- Ross, S.**, 1984, *Differential Equations*, John Wiley Sons Inc, Singapore.
- Schamel, H.**, 1973, A modified Korteweg-de Vries equation for ion acoustic waves due to resonant electrons, *Journal of Plasma Physics*, 9(3), 377–387.
- Shih, M., Momoniat, E., and Mahomed, F.**, 2005, Approximate conditional symmetries and approximate solutions of the perturbed Fitzhugh–Nagumo equation, *Journal of mathematical physics*, 46(2), 023503.
- Shijun, L.**, 1998, Homotopy analysis method: a new analytic method for nonlinear problems, *Applied Mathematics and Mechanics*, 19(10), 957–962.
- Singh, J., Kumar, D., and Kumar, S.**, 2013, New treatment of fractional Fornberg–Whitham equation via Laplace transform, *Ain Shams Engineering Journal*, 4(3), 557–562.
- Sitho, S., Ntouyas, S.K., Agarwal, P., and Tariboon, J.**, 2018, Noninstantaneous impulsive inequalities via conformable fractional calculus, *Journal of inequalities and applications*, 2018(1), 1–14.
- Srivastava, H., Minjie, L., and Raina, R.**, 2015, A new integral transform and its applications, *Acta Mathematica Scientia*, 35(6), 1386–1400.
- Tchuenche, J.M. and Mbare, N.S.**, 2007, An application of the double Sumudu transform, *Applied Mathematical Sciences*, 1(1-4), 31–39.
- Watugala, G.**, 1993, Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems, *Integrated Education*, 24(1), 35–43.
- Wazwaz, A.M.**, 2007, A comparison between the variational iteration method and Adomian decomposition method, *Journal of computational and applied Mathematics*, 207(1), 129–136.
- Widder, D.V.**, 2015, *Laplace transform (PMS-6)*, Princeton university press.
- Yang, S.**, 2020, Wave Breaking Phenomena for the Fornberg–Whitham Equation, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, pages 1–6.

- Zakharov, V.** and **Kuznetsov, E.**, 1974, On threedimensional solitons, *Zhurnal Eksp. Teoret. Fiz*, 66, 594–597.
- Zhao, D.** and **Luo, M.**, 2017, General conformable fractional derivative and its physical interpretation, *Calcolo*, 54(3), 903–917.
- Zhao, D., Pan, X.,** and **Luo, M.**, 2018, A new framework for multivariate general conformable fractional calculus and potential applications, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 510, 271–280.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Nithiarasu, P.,** and **Zhu, J.**, 1977, *The finite element method*, volume 3, McGraw-hill London.



TEŞEKKÜR

Bana verdiği tüm bağışları için Yüce Allah'a içtenlikle teşekkür ederim.

Danışmanım sayın Prof. Dr. Emine Mısırlı'ya her zaman bana yol gösterdiği, değerli bilgi birikimi ile yaptığım çalışmalarda bana ilham verdiği ve her ihtiyacım olduğunda desteklerini benden esirgemediği için sonsuz teşekkür ederim.

Tez izleme komite üyelerim Prof. Dr. İbrahim Çanak ve Doç. Dr. Yusuf Güreffe'ye doktora sürecim boyunca değerli zamanlarını bana ayırdıkları ve tez çalışmamdaki kıymetli katkılardan dolayı teşekkür ederim.

Bana doktoradaki akademik yaşamın temellerini öğreten önceki danışmanım Prof. Dr. Turgut Öziş'e çok teşekkür ederim.

Samimiyeti ile bu tez çalışmasını bitirmem için beni her zaman teşvik eden arkadaşım Gizel Bakıcıerler'i tanıdığım için çok şanslıyım ve destekleri için teşekkür ederim.

Annemin hayatımdaki büyük rolü ve benim için yaptığı sayısız fedakârlıkları ile birlikte kardeşlerimin destekleri için çok teşekkür ederim.

Eşim Ala Alfaqeih'e son beş yıldır gösterdiği sabır ve hoşgörü için en içten teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim. Ala, senin desteğin olmadan bu işi asla bitiremezdim. Benimle olduğun ve fedakârlıkların için sana minnettarım.

Bu zorlu süreçte okulda okurken iyi çocuklar olduğunuz ve annenizi üzmediğiniz için sevimli küçük kızım Aya ve oğlum Samir'e teşekkür ederim.

Son olarak, Yurtdışı Türkler ve Akraba Topluluklar Başkanlığı'na bana Türkiye'de doktora yapma fırsatı sundukları ve burs destekleri için teşekkürü borç bilirim.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Suliman S. S. Alfaqeih

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	Majed Abu Sharar	2005
Yüksek Lisans	Alquds Üniversitesi	2011
Doktora	Ege Üniversitesi	2021

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2011-2012	Alquds Open Üniversitesi	Öğretim Üyesi
2012-2016	King Saud Üniversitesi	Öğretim Üyesi

Burslar

Yurtdışı Türukler ve Akraba Topluluklar Başkanlığı (YTB) tarafından verilen Yurtiçi Doktora Bursu (2016-2021).

UZMANLIK ALANI

Kısmi diferansiyel denklemler, Analitik Yöntemler, İntegral Dönüşümleri, Kesirli Analiz.

YABANCI DİLLER

Türkçe, İngilizce

YAYINLAR

Alfaqeih, S., & Mısırlı, E. (2021). On Convergence Analysis and Analytical Solutions of the Conformable Fractional Fitzhugh–Nagumo Model Using the Conformable Sumudu Decomposition Method. Symmetry, 13(2), 243.

Alfaqeih, S., Mısırlı, E. (2021). Conformable double Laplace transform method for solving conformable fractional partial differential equations. Computational Methods for Differential Equations, 9(3), 908-918. doi: 10.22034/cmde.2020.38135.1678

Alfaqeih, S., Bakıcıerler, G., & Misirli, E. (2021). Conformable Double Sumudu Transform with Applications. Journal of Applied and Computational Mechanics, 7(2), 578-586.

Alfaqeih, S., & Misirli, E. (2020). On double Shehu transform and its properties with applications. International Journal of Analysis and Applications, 18(3), 381-395.

Alfaqeih, S., Bakıcıerler, G., & Misirli, E. Conformable fornberg-whitham equation and its solution byconformable sumudu decomposition method.TWMS Journal of Applied and Engineering Mathe-matics, (accepted).

Alfaqeih, S., & ÖZİS, T.(2019). Solution of Black-Scholes Fractional Partial Differential Equation with two Assets by Aboodh Decomposition Method. Progr. Fract. Differ. Appl. 6(4), 1-10.

Alfaqeih, S., & ÖZİS, T.(2019). Solving Fractional Black-Scholes Eruopean Option Pricing Equations by Aboodh Transform Decomposition Method. Palestine Journal of Mathematics, 9(2) , 915–924.

Alfaqeih, S. & ÖZIS, T. (2019). Note on Triple Aboodh Transform and Its Application. *International Journal of Engineering and Information Systems (IJEAIS)*, 3(3), 41-50.

Alfaqeih, S., & Kayijuka, I. (2020). Solving system of conformable fractional differential equations by conformable double Laplace decomposition method. *JOURNAL OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*, 33(3), 275-290.

Kayijuka, I., **Alfaqeih, S.**, & Öziş, T. (2020). Application of the Cauchy integral approach to Singular and Highly Oscillatory Integrals. *International Journal of Computer Mathematics*, 1-20.

Awadalla, M., Öziş, T., & **Alfaqeih, S.** (2019). On System of Nonlinear Fractional Differential Equations Involving Hadamard Fractional Derivative with Nonlocal Integral Boundary Conditions. *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 5(3), 225-232.

Bakıcıerler, G., **Alfaqeih, S.**, & Misirli, E. Application of the modified simple equation method for solving two nonlinear time-fractional long water wave equations. *Revista Mexicana de Física* (accepted)

Bakıcıerler, G., **Alfaqeih, S.** & Misirli, E., Analytic Solutions of a (2+1)-dimensional Nonlinear Heisenberg Ferromagnetic Spin Chain Equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* (accepted)

Alfaqeih, S., Bakıcıerler, G., & Misirli, E., Application of Conformable Double Sumudu Transform for Solving Conformable Integro-Differential Equations. 5th International Students Science Congress, İzmir, Turkey, May 21-22, 2021.

Alfaqeih, S., Bakıcıerler, G., & Misirli, E., A Novel Numerical Approach for The Analytical Solutions of Conformable Nonlinear Waves in a Rotating Ocean (Conformable Gardner–Ostrovsky Model). *FIRST ONLINE CONFERENCE ON MODERN FRACTIONAL CALCULUS AND ITS APPLICATIONS*, İstanbul, Turkey, December 4-6, 2020.

Bakıcıerler, G., **Alfaqeih, S.** & Misirli, E., Exact Traveling Wave Solutions of Two Fractional Systems in Fluid Dynamics via the Exponential Rational Function Method. 9th (Online) International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling. Istanbul-Turkey, June 11-13, 2021.

Bakıcıerler, G., **Alfaqeih, S.** & Misirli, E., New Exact Solutions of a Dynamical Model Arising in Electromagnetic Waves. *FIRST ONLINE CONFERENCE ON MODERN FRACTIONAL CALCULUS AND ITS APPLICATIONS*, İstanbul, Turkey, December 4-6, 2020.