

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

Tuba TAŞ ADIYAMAN

**SERBEST METABELYEN LEİBNİZ CEBİRLERİNİN
OTOMORFİZMLERİ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA-2021

Sevgili eşim Erol ADIYAMAN'a, Oğlum Yiğit Deniz'e ve Sevgili Aileme



ÖZ

DOKTORA TEZİ

**SERBEST METABELYEN LEİBNİZ CEBİRLERİNİN
OTOMORFİZMLERİ**

Tuba TAŞ ADIYAMAN

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

Danışman : Doc.Dr. Zeynep ÖZKURT
Yıl: 2021, Sayfa: 79
Jüri : Doc.Dr. Zeynep ÖZKURT
: Prof. Dr. Zerrin Gül ESMERLİGİL
: Doç.Dr. Şehmus FINDIK
: Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL
: Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU

Bu çalışmada serbest metabelyen Leibniz cebirleri abelyen Leibniz cebirlerinin bir wreath çarpımı olarak ifade edilmiştir. Karakteristiği 0 olan K cismi üzerindeki sonlu ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin IA -otomorfizmleri için bir matris formu elde edilmiştir. Sonra n ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin tüm otomorfizmler grubu için bir üreteç kümesi tanımlanmıştır. Ayrıca elde edilen sonuçlar ile ilgili olarak çeşitli uygulamalar yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: Serbest Metabelyen Leibniz Cebirleri, Otomorfizm, Wreath Çarpım

ABSTRACT

PhD THESIS

AUTOMORPHISMS OF FREE METABELIAN LEIBNIZ ALGEBRAS

Tuba TAŞ ADIYAMAN

**ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Zeynep ÖZKURT
Year: 2021, Pages: 79
Jury : Assoc. Prof. Dr. Zeynep ÖZKURT
: Prof. Dr. Zerrin GÜL ESMERLİGİL
: Assoc. Prof. Dr. Şehmus FINDIK
: Asst. Prof. Dr. Cennet ESKAL
: Asst. Prof. Dr. Nil MANSUROĞLU

In this work, we represent free metabelian Leibniz algebras as the wreath product of abelian Leibniz algebras. We obtained an explicit matrix form for the IA-automorphisms of free metabelian Leibniz algebras of finite rank over a field K of characteristic zero. Then we describe a set of generators for the group of all automorphisms of the free metabelian Leibniz algebras of rank n . Also, the various applications of obtained results were performed in this study.

Keywords: Free Metabelian Leibniz Algebra, Automorphism, Wreath Product

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Leibniz cebirleri ilk olarak Loday tarafından 1993'te Lie cebirlerinin non-antisimetrik versiyonu olarak tanımlanmıştır. Buna göre L , bir K cismi üzerinde $[\cdot, \cdot] : L \times L \longrightarrow L$ braket çarpımı ile birleşmeli olmayan bir K -cebir olsun. Eğer her $x, y, z \in L$ için

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

sağlanıyorsa L bir sağ Leibniz cebiri olarak adlandırılmıştır. Eğer her $x \in L$ için $[x, x] = 0$ koşulu sağlanıyorsa Leibniz özdeşliği Jacobi özdeşliğine indirgenebilir (Loday ve Pirashvili, 1993). Dolayısıyla her Lie cebiri bir Leibniz cebiridir. Fakat bir Leibniz cebirinin bir Lie cebiri olabilmesi için antikomutatif özelliğe sahip olması gerekmektedir.

Drensky ve Cattaneo 2002'de serbest metabelyen Leibniz cebirini tanımlamışlar ve bu cebirin bazı temel özelliklerini ifade etmişlerdir. Ayrıca Smel'kin 1973'te Lie cebirlerinin wreath çarpımını ve bu çarpımın grup teorisindeki bazı uygulamalarını vermiştir. Bahturin ise 1992'de bazı Lie cebirlerinin abelyen genişlemelerinin otomorfizmlerini ve derivasyonlarını ifade etmiştir. Bu çalışmada Smel'kin ve Bahturin'in söz konusu araştırmalarından yola çıkılarak serbest metabelyen Lie cebirlerinin otomorfizmlerinin bazı sonuçları serbest metabelyen Leibniz cebirlerine genişletilmiştir.

Çalışmamızda ilk olarak, karakteristiği 0 olan K cismi üzerindeki Leibniz cebirlerinin ve serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin bazı temel özellikleri verilmiştir. Buna ek olarak, serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin otomorfizm grubunun yapısını belirlemek amaçlanmıştır. Bu çalışma temel olarak yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezin konusu ile ilgili giriş yapılmıştır. Ayrıca tezin konusu hakkında daha önce yapılan temel çalışmalar kısaca anlatılarak tezde cevap aranan problemlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde wreath çarpım tanımlanmıştır. Bu çalışmada kullanılacak olan wreath çarpım ile ilgili bazı lemma ve önermeler ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde iki ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin bazı özellikleri verilmiştir. Teorem 4.3 ve Teorem 4.8’de, iki ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin $IAut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun yapısı tanımlanmıştır. Teorem 4.9’da ise iki ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin $Aut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun yapısı ifade edilmiştir.

Beşinci bölümde üç ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin bazı özellikleri verilmiştir. Teorem 5.1 ve Teorem 5.5’de üç ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin $IAut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun yapısı tanımlanmıştır. Teorem 5.6’da ise üç ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin $Aut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun yapısı ifade edilmiştir.

Altıncı bölümde n ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin bazı özellikleri verilmiştir. Teorem 6.1 ve Teorem 6.2’de, n ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin $IAut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun yapısı tanımlanmıştır. Teorem 6.3’de ise n ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin $Aut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun yapısı ifade edilmiştir.

Yedinci bölümde ise tame ve non-tame (wild) otomorfizmlere değinilmiştir.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın hazırlanmasında bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösteren, kıymetli vaktini ayırarak araştırma sürecinde bana her zaman destek ve yardımcı olan, pozitif enerjisini her zaman hissettiren saygıdeğer hocam Doç. Dr. Zeynep ÖZKURT'a sonsuz şükranlarımı sunarım.

Gösterdikleri iyi niyet ve yardımlardan dolayı tez izleme jüri üyesi hocalarım sayın Prof. Dr. Zerrin ESMERLİĞİL ve Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL'e teşekkürlerimi sunarım. Tüm matematik bölümüne ve bu süreçte bana çalışma ortamı ve fiziki olanak sağlayan sayın hocam Prof.Dr.Gonca AYIK'a teşekkürü bir borç bilirim. Araştırmamda teknik bilgi ve becerileri ile bana yardımcı olan saygıdeğer arkadaşım Mehmet ONAT'a çok teşekkür ederim. Arkadaşlıklarından ve iyi niyetlerinden dolayı Ebru YİĞİT'e, Leyla BUGAY'a ve Melek YAĞCI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca gölgesinde dinlendiğim ulu çınarım canım babama bana kendi ayaklarım üzerinde durmayı öğrettiği ve beni özgür kıldığı için sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım. Hayatta bana mücadele etmeyi öğreten, bilime ilgi uy-mama sebep olan ve her zaman benim yanımda olan canım anneme sonsuz sevgi ve şükranlarımı sunarım. Tüm hayatım boyunca varlığını derinden hissettiğim, hayatımın her aşamasında benim yanımda olan, bana hayatı kolaylaştıran çok kıymetli ablam Seher TAŞ'a ve her zaman beni destekleyen sevgili abilerime sonsuz teşekkür ve sevgi-lerimi sunarım. Çok kıymetli arkadaşım, can dostum Necla ERKISA'ya teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım. Ayrıca ikinci ailem olarak gördüğüm Adıyaman ailesinin tüm üyelerine sevgi ve şükranlarımı sunarım.

Hiçbir zaman desteğini benden esirgemeyen, her zaman yanımda olan, varlığıyla hayatıma anlam ve değer katan, çok kıymetli ve değerli eşim Erol ADIYA-MAN'a sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım. Son olarak varlığıyla hayatıma renk katan canım oğlum Yiğit Deniz'e ve kızım Daisy'e sonsuz sevgilerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER	SAYFA
ÖZ	I
ABSTRACT	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR	V
İÇİNDEKİLER	VI
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL TANIM ve TEOREMLER	3
3 WREATH ÇARPIM	15
4 İKİ RANKLI SERBEST METABELYEN LEİBNİZ CEBİRLERİNİN OTO- MORFİZMLERİ	21
5 ÜÇ RANKLI SERBEST METABELYEN LEİBNİZ CEBİRLERİNİN OTO- MORFİZMLERİ	39
6 n RANKLI SERBEST METABELYEN LEİBNİZ CEBİRLERİNİN OTO- MORFİZMLERİ	57
7 TAME VE WİLD OTOMORFİZMLER	71
8 SONUÇ VE ÖNERİLER	75
KAYNAKLAR	77
ÖZGEÇMİŞ	79

1. GİRİŞ

Modern cebirin en ilginç problemlerinden biri serbest cebirlerin otomorfizm grubunun tanımlanmasıdır. Makar-Limanov 1973'te ve Czerniakiewicz 1971'de iki üreteçli serbest birleşmeli cebirlerin tüm otomorfizmlerinin tame olduğunu göstermişlerdir. 1964'te Cohn herhangi bir cisim üzerindeki sonlu üretilmiş serbest Lie cebirlerinin otomorfizmlerinin tame olduğunu ispatlamıştır. 1973'te Smel'kin iki ranklı serbest metabelyen Lie cebirlerinin lineer olmayan tüm otomorfizmlerinin wild olduğunu göstermiştir. Bahturin ve Nabiev tarafından 1992'de serbest cebirlerin otomorfizm gruplarının yapısını ifade eden bazı sonuçlar verilmiştir.

Leibniz cebirleri ilk olarak 1993'de Loday tarafından Lie cebirlerinin non-antisimetrik versiyonu olarak tanımlanmıştır. 2001'de Abdykhalikov iki ranklı serbest Leibniz cebirlerinin tame otomorfizmlerinin bir karakterizasyonunu vermiştir. Papistas ve Drensky 2005'te $m \geq 2$ ranklı sonlu üretilmiş serbest nilpotent Leibniz cebirlerinin otomorfizm gruplarının tame otomorfizm ve formu bilinen bir non-tame otomorfizm tarafından üretildiğini göstermişlerdir. Drensky ve Cattoneo tarafından 2002'de serbest metabelyen Leibniz cebirleri ve bu cebirlerin bazı özellikleri tanımlanmıştır.

Smel'kin 1973'te Lie cebirlerinin wreath çarpımını ve bu çarpımın grup teorisindeki bazı uygulamalarını vermiştir. Bahturin ise 1992'de bazı Lie cebirlerinin abelyen genişlemelerinin otomorfizmlerini ve derivasyonlarını ifade etmiştir.

Bu çalışmada Smel'kin'in 1973'te ve Bahturin'in 1992'de serbest metabelyen Lie cebirlerinin otomorfizmleri üzerine elde ettikleri bazı sonuçlar, serbest metabelyen Leibniz cebirlerine genişletilmiştir. Lie cebirlerinin wreath çarpımından yola çıkılarak abelyen Leibniz cebirlerinin wreath çarpımı tanımlanmış ve serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin yapısının anlaşılmasında wreath çarpımdan faydalanılmıştır. Bu yaklaşımdan yola çıkılarak ilk olarak aşağıdaki problemin cevabı aranmıştır. İki

ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin $IAut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun yapısı nasıldır? İki ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin tüm otomorfizmler grubunun üreteç kümesi nasıl tanımlanır?

Daha sonra aynı problemler üç ranklı ve n ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirleri için düşünülmüştür. Tezde temel olarak söz konusu problemlerin cevabı aranacaktır.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Tanım 2.1 K bir cisim ve V , K cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun.

$[\cdot, \cdot] : V \times V \longrightarrow V$ braket çarpım olmak üzere her $\alpha, \beta \in F$ ve $a, b, c \in V$ için

i) $[a, \alpha b + \beta c] = \alpha [a, b] + \beta [a, c]$ ve $[\alpha a + \beta b, c] = \alpha [a, c] + \beta [b, c]$ bilineerlik

ii) $[a, a] = 0$ antikomutatiflik

iii) $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$ Jacobi özdeşliği

sağlanıyorsa V 'ye bir Lie cebiri denir.

Örnek 2.2 $V = R^3$ ve $[\cdot, \cdot] : V \times V \longrightarrow V$ braket çarpım olmak üzere her $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3) \in V$ için

$$[v, w] = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan çarpma ile V bir Lie cebiridir.

Tanım 2.3 K bir cisim ve L , K üzerinde vektör uzayı olsun. L üzerinde tanımlanan braket çarpımı denilen $[\cdot, \cdot] : L \times L \longrightarrow L$ bilineer dönüşümü eğer her $x, y, z \in L$ için

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

Leibniz özdeşliğini sağlıyorsa L bir sağ Leibniz cebiri ve eğer her $x, y, z \in L$ için

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$

Leibniz özdeşliğini sağlıyorsa L bir sol Leibniz cebiridir denir.

Bu çalışmadaki Leibniz cebirleri sağ Leibniz cebirleri olarak düşünülecektir.

Not 2.4 Bir sol Leibniz cebiri sağ Leibniz cebiri olmak zorunda değildir.

Örnek 2.5 K bir cisim ve L, K üzerinde $\{x, y\}$ bazı ile bir vektör uzayı olsun. L üzerinde $[\cdot, \cdot]$ işlemi her $x, y \in L$ için aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$[x, x] = 0, [x, y] = 0, [y, x] = x, [y, y] = x$$

L bir sol Leibniz cebiridir fakat sağ Leibniz cebiri değildir (Demir ve ark., 2013). Kabul edelim ki L bir sağ Leibniz cebiri olsun. O halde $[y, [y, x]] = [[y, y], x] - [[x, y], y]$ eşitliği sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned} [y, [y, x]] &= [[y, y], x] - [[x, y], y] \\ [y, x] &= [x, x] - [0, y] \\ x &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Açıkça görülüyor ki L bir sağ Leibniz cebiri değildir.

Örnek 2.6 K bir cisim ve L, K üzerinde bir birleşmeli cebir olsun. $P \in \text{End}(L)$ ve $P^2 = P$ olmak üzere P dönüşümü

$$\begin{aligned} P(aP(b)) &= P(a).P(b) \\ P(P(a)b) &= P(a).P(b) \end{aligned}$$

koşullarını sağlasın. L 'nin bir bilinear dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] &: L \times L \longrightarrow L \\ [a, b] &= aP(b) - P(b)a \end{aligned}$$

L 'nin bu dönüşüm ile bir Leibniz cebiri olduğunu ve özel olarak P birim dönüşüm alınırsa L 'nin aynı zamanda bir Lie cebiri olduğunu gösterelim. Her $a, b, c \in L$ ve

$\alpha, \beta \in K$ için

$$\begin{aligned}
 [a, \alpha b + \beta c] &= aP(\alpha b + \beta c) - P(\alpha b + \beta c)a \\
 &= a(\alpha P(b) + \beta P(c)) - (\alpha P(b) + \beta P(c))a \\
 &= a\alpha P(b) + a\beta P(c) - \alpha P(b)a - \beta P(c)a \\
 &= a\alpha P(b) - \alpha P(b)a + a\beta P(c) - \beta P(c)a \\
 &= \alpha(aP(b) - P(b)a) + \beta(aP(c) - P(c)a) \\
 &= \alpha[a, b] + \beta[a, c]
 \end{aligned}$$

olup bilineerlik özelliği sağlanır. Her $a, b, c \in L$ için $[a, [b, c]]$ braketini alalım.

$$\begin{aligned}
 [a, [b, c]] &= a(P[b, c]) - (P[b, c])a \\
 &= a(P(b)P^2(c) - P^2(c)P(b)) - (P(b)P^2(c) - P^2(c)P(b))a \\
 &= a(P(b)P(c) - P(c)P(b) - (P(b)P(c) - P(c)P(b)))a \\
 &= a(P(b)P(c)) - a(P(c)P(b)) - (P(b)P(c))a + (P(c)P(b))a \\
 &= a(P(b)P(c)) - (P(b)P(c))a - (a(P(c)P(b)) - (P(c)P(b))a) \\
 &= (aP(b))P(c) - P(b)(P(c)a) - (aP(c))P(b) - P(c)(P(b)a) \\
 &= (aP(b))P(c) - (P(b)a)P(c) - (aP(c))P(b) - (P(c)a)P(b) \\
 &= ((aP(b)) - (P(b)a))P(c) - ((aP(c)) - (P(c)a))P(b) \\
 &= [[a, b], c] - [[a, c], b]
 \end{aligned}$$

Açıkça görülüyor ki $[a, [b, c]] = [[a, b], c] - [[a, c], b]$ Leibniz özdeşliği elde edilmiştir. Dolayısıyla L söz konusu dönüşüm ile bir Leibniz cebiridir. Özel olarak P birim dönüşüm alınırsa

$$\begin{aligned}
 [,] &: L \times L \longrightarrow L \\
 [a, b] &= aP(b) - P(b)a = ab - ba
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu dönüşüm ile L 'nin bir Lie cebiri olduğunu gösterelim. L 'nin Lie cebiri olabilmesi için öncelikle bilineerlik özelliğini sağlanması gerekir. Bilineerlik özelliğinin sağlandığını yukarıda göstermiştik. Ayrıca her $a \in L$ için $[a, a] = 0$ olup antikomutatif özelliğın sağlandığı aşıkardır. Son olarak Jacobi özdeşliğinin sağlandığını göstermeliyiz. Her $a, b, c \in L$ için

$$\begin{aligned}
[a, [b, c]] &= [a, bc - cb] \\
&= a(bc - cb) - (bc - cb)a \\
&= abc - acb - bca + cba \\
&= abc - acb - bca + cba - cab + cab + bac - bac \\
&= -bca + bac + cab - acb - cab + cba + abc - bac \\
&= -b(ca - ac) + (ca - ac)b - c(ab - ba) + (ab - ba)c \\
&= -[b, [c, a]] - [c, [a, b]]
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$ olup Jacobi özdeşliği sağlanır. Böylece L bir Lie cebiridir.

Örnek 2.7 Her Lie cebiri bir Leibniz cebiridir.

Not 2.8 L bir Leibniz cebiri olsun. Eğer her $x \in L$ için $[x, x] = 0$ koşulu sağlanıyorsa Leibniz özdeşliği Jacobi özdeşliğine indirgenebilir.

L Leibniz cebiri antikomutatif özelliğe sahip ise her $a, b \in L$ için $[a + b, a + b] = 0$ dır.

$$[a, a] + [a, b] + [b, a] + [b, b] = 0$$

olup antikomutatif özellikten dolayı $[a, b] + [b, a] = 0$ dır. Dolayısıyla $[a, b] = -[b, a]$ eşitliği elde edilir. Leibniz özdeşliğinden

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

olduğunu biliyoruz. Antikomutatiflikten dolayı yukarıdaki eşitlikte $[x, [y, z]]$ yerine $-[[y, z], x]$ yazabiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] &= [[x, y], z] - [[x, z], y] \\ -[[y, z], x] &= [[x, y], z] - [[x, z], y] \\ 0 &= [[y, z], x] + [[x, y], z] - [[x, z], y]. \end{aligned}$$

Benzer şekilde antikomutatif özellikten $-[x, z]$ yerine $[z, x]$ yazabiliriz. Böylece

$$[[y, z], x] + [[x, y], z] + [[z, x], y] = 0$$

elde edilir. Elde ettiğimiz $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$ eşitliği Jacobi özdeşliği'dir. Dolayısıyla Leibniz özdeşliği antikomutatif özelliğe sahip olma durumunda Jacobi özdeşliğine indirgenebilmektedir. Açıkça görülüyor ki Lie cebirleri Leibniz cebirlerinin özel bir durumudur.

Tanım 2.9 L, K cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve N, L 'nin bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in N$ ve her $a, b \in K$ için

$$\begin{aligned} i) \quad & ax + by \in N \\ ii) \quad & [x, y] \in N \end{aligned}$$

koşulları sağlanıyorsa N 'ye L 'nin bir alt Leibniz cebiri denir.

Tanım 2.10 L, K cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve N, L 'nin bir alt Leibniz cebiri olsun. Her $x \in N$ ve $y \in L$ için $[x, y] \in N$ ve $[y, x] \in N$ ise N 'ye L nin iki taraflı ideali kısaca ideali denir.

Teorem 2.11 L bir Leibniz cebiri olsun. $I = \langle [x, x] : x \in L \rangle$ olarak tanımlanan alt cebir L 'nin bir idealidir.

İspat: Her $a = [x, x] \in I$ ve $y \in L$ için $[y, a] = [y, [x, x]]$ olmak üzere Leibniz özdeşliğinden

$$[y, [x, x]] = [[y, x], x] - [[y, x], x] = 0 \in I$$

elde edilir. Dolayısıyla I , L 'nin bir sol idealidir. Benzer şekilde her $a = [x, x] \in I$ ve $y \in L$ için $[a, y] = [[x, x], y]$ olmak üzere Leibniz özdeşliğinden

$$[[x, x], y] = [x, [x, y]] + [[x, y], x]$$

elde edilir.

$$[x + [x, y], x + [x, y]] = [x, x] + [x, [x, y]] + [[x, y], x] + [[x, y], [x, y]]$$

eşitliğinden $[x, [x, y]] + [[x, y], x] \in I$ olur. Dolayısıyla I , L 'nin bir sağ idealidir. O halde I , L 'nin bir idealidir.

Teorem 2.12 Leibniz cebirlerinde iki idealin toplamı ve iki idealin kesişimi yine bir idealdir. Fakat iki idealin braket çarpımı ideal olmak zorunda değildir.

İspat: I ve J , bir L Leibniz cebirinin iki ideali olsun. Öncelikle $I + J$ 'nin alt cebir olduğunu göstereyim. $a_1, a_2 \in I$ ve $b_1, b_2 \in J$ olmak üzere $a_1 + b_1, a_2 + b_2 \in I + J$ alalım.

$$(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)$$

I ve J altcebir olduğu için $(a_1 - a_2) \in I$, $(b_1 - b_2) \in J$ dir. Buna göre $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) \in I + J$ ve $[a_1 + b_1, a_2 + b_2] = [a_1, a_2] + [b_1, a_2] + [a_1, b_2] + [a_1, a_2] \in I + J$ dir. Ayrıca I ve J ideal olduğu için $[I, L], [L, I] \in I$ ve $[J, L], [L, J] \in J$ dir. Buna göre

$$[I + J, L] = [I, L] + [J, L] \in I + J$$

ve

$$[L, I + J] = [L, I] + [L, J] \in I + J$$

olduğundan $I + J$, L 'nin bir idealidir. $I \cap J$ 'nin, L 'nin bir ideali olduğu benzer şekilde gösterilir. İki idealin braket çarpımının ideal olmak zorunda olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.13 $A, \{x, a, b, c, d\}$ tarafından üretilen bir Leibniz cebiri olsun. A Leibniz cebirinin elemanlarının braket çarpımları $[a, b] = c$, $[b, a] = d$, $[x, a] = a = -[a, x]$, $[x, c] = c$, $[x, d] = d$, $[c, x] = d$, $[d, x] = -d$ ve geriye kalan braketler 0 olacak şekilde tanımlansın. $I, \{a, c, d\}$ tarafından ve $J, \{b, c, d\}$ tarafından üretilsin. I ve J, A 'nın ideal-leri olmasına rağmen $[I, J], \{c\}$ tarafından üretilmekte olup bir ideal değildir (Demir ve ark., 2013).

Tanım 2.14 L_1 ve L_2 , K cismi üzerinde Leibniz cebiri olsun. $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ lineer dönüşüm olmak üzere her $x, y \in L_1$ için

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

braket çarpımı korunuyorsa φ 'ye Leibniz cebir homomorfizmi denir. φ , örten ise epimorfizm olarak adlandırılır. φ , 1-1 ve örten ise izomorfizm olarak adlandırılır. Eğer $L_1 = L_2$ ise φ , bir otomorfizmdir.

L Leibniz cebirinin tüm otomorfizmler grubunu $Aut L$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.15 X boştan farklı bir küme olsun. L bir Leibniz cebiri ve $\eta : X \rightarrow L$ bir fonksiyon olsun. Eğer B Leibniz cebiri ve $\zeta : X \rightarrow B$ dönüşümü için $\zeta = f\eta$ olacak şekilde sadece bir $f : L \rightarrow B$ Leibniz homomorfizmi varsa (L, η) ikilisine X üzerinde bir serbest Leibniz cebiri denir.

X üzerinde bir serbest Leibniz cebirini inşa edelim:

$$X_1 = X, \quad X_n = \cup_{r=1}^{n-1} (X_r \times X_{n-r}) \quad \text{ve} \quad M(X) = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$$

olsun. $a \in X_r$, $b \in X_q$ ve $(a, b) \in X_r \times X_q$ olacak şekilde p ve q tamsayıları vardır. $X_r \times X_{n-r}$ den X_n 'e olan içine dönüşümler altında (a, b) nin görüntüsü $a.b$ olsun.

$$\begin{aligned} X_r \times X_{n-r} &\longrightarrow X_n \\ (a, b) &\longrightarrow a.b \end{aligned}$$

Böylece her $a, b \in M(X)$ için $a.b$ tanımlanabilir. $a \in X_r$ olacak şekilde r tamsayısına a 'nın uzunluğu denir. $l(a)$ ile gösterilir ve $l(a) = r$ dir. Uzunluğu 1 olan elemanlar X 'in elemanlarıdır. Uzunluğu 2'ye eşit ya da daha büyük olan elemanlar $c = (ab)$ şeklindeki elemanlardır. Ayrıca,

$$l(ab) = l(a) + l(b)$$

dir. $M(X)$ 'in elemanlarının bütün lineer toplamlarını alıp bir vektör uzayına genişletelim. Böylece K üzerinde birleşmeli olmayan bir serbest cebir inşa edelim. Bu cebire $L(X)$ diyelim. I , her $a, b, c \in L(X)$ için

$$[a, [b, c]] - [[a, b], c] + [[a, c], b]$$

elemanları tarafından üretilsin ve I , $L(X)$ in bir ideali olsun. $F(X) = L(X)/I$ cebiri serbest Leibniz cebiridir. Burada X kümesi $F(X)$ serbest Leibniz cebirinin üreteç kümesidir.

Tanım 2.16 L^l ve L^r , L Leibniz cebirinin serbest K -modül olarak iki kopyası olsun. $x \in L$ üzerindeki sol ve sağ universal operatörler olan l_x ve r_x ile sırasıyla L^l ve L^r 'nin elemanlarını gösterelim. Her $x, y \in L$ için

$$\begin{aligned} r_{[x,y]} &= r_x \cdot r_y - r_y \cdot r_x \\ l_{[x,y]} &= l_x \cdot r_y - r_y \cdot l_x \\ (r_x + l_x) \cdot l_y &= 0 \end{aligned}$$

özelliklerini sağlayan, birimli ve birleşmeli $T(L^l \oplus L^r)$ tensör K-cebirinin bir idealine I diyelim. $UL(L) = T(L^l \oplus L^r)/I$, L Leibniz cebirinin evrensel enveloping cebiridir (Loday ve Pirashvili, 1993).

Tanım 2.17 R bir halka, M bir toplamsal değişmeli grup olmak üzere her $r, r_1, r_2 \in R$ ve $m, m_1, m_2 \in M$ için

$$R \times M \longrightarrow M$$

$$(r, m) \longrightarrow r.m$$

$$i) \quad r(m_1 + m_2) = r.m_1 + r.m_2$$

$$ii) \quad (r_1 + r_2)m = r_1.m + r_2.m$$

$$iii) \quad (r_1.r_2)m = r_1.(r_2.m)$$

koşullarını sağlıyorsa M 'ye bir sol R -modül denir. Eğer her $r, r_1, r_2 \in R$ ve $m, m_1, m_2 \in M$ için

$$M \times R \longrightarrow M$$

$$(m, r) \longrightarrow m.r$$

$$i) \quad (m_1 + m_2).r = m_1.r + m_2.r$$

$$ii) \quad m(r_1 + r_2) = m.r_1 + m.r_2$$

$$iii) \quad m(r_1.r_2) = (m.r_1).r_2$$

koşullarını sağlıyorsa M 'ye bir sağ R -modül denir. Bir modül hem sol R -modül hem de sağ R -modül ise kısaca R -modül olarak adlandırılır.

Tanım 2.18 L bir serbest Leibniz cebiri olsun. $UL(L)$ ile L 'nin evrensel çarpımsal enveloping cebirini gösterelim. L cebiri her $a, b \in L$ için

$$a.r_b = [a, b]$$

$$a.l_b = [b, a]$$

işlemleri ile bir sağ $UL(L)$ -modüldür. Buna göre

$$.: L \times UL(L) \longrightarrow L$$

$$a.l_b = [b, a] \text{ ve } a.r_b = [a, b]$$

ile tanımlanan dönüşümde her $a, c \in L$ ve $l_b, l_d \in UL(L)$ için

$$i) \quad (a + c).l_b = [b, a + c] = [b, a] + [b, c] = a.l_b + c.l_b$$

$$ii) \quad a.(l_b + l_d) = [b + d, a] = [b, a] + [d, a] = a.l_b + a.l_d$$

$$iii) \quad a.l_{[b, c]} = [[b, c], a] = [[b, a], c] + [b, [c, a]] = [[b, a], c] - [b, [a, c]] = (a.l_b).r_c - (a.r_c).l_b$$

$$a.l_{[b, c]} = a.(l_b.r_c - r_c.l_b) = a.(l_b.r_c) - a.(r_c.l_b) = (a.l_b).r_c - (a.r_c).l_b$$

ve benzer şekilde her $a, c \in L$ ve $r_b, r_d \in UL(L)$ için

$$i) \quad (a + c).r_b = [a + c, b] = [a, b] + [c, b] = a.r_b + c.r_b$$

$$ii) \quad a.(r_b + r_d) = [a, b + d] = [a, b] + [a, d] = a.r_b + a.r_d$$

$$iii) \quad a.r_{[b, c]} = [a, [b, c]] = [[a, b], c] - [[a, c], b] = (a.r_b).r_c - (a.r_c).r_b$$

$$a.r_{[b, c]} = a.(r_b.r_c - r_c.r_b) = (a.r_b).r_c - (a.r_c).r_b$$

olduğundan L bir sağ $UL(L)$ -modüldür.

Not 2.19 K cismi üzerinde M, h ve q Leibniz cebirleri olsun. $0 \rightarrow M \rightarrow h \rightarrow q \rightarrow 0$ abelyen genişlemesi Leibniz cebirlerinin bir tam dizisi olup aynı zamanda K -modüllerin

bir dizisi olarak düşünüldüğünde parçalanabilir bir dizidir. Ayrıca $[M, M] = 0$ dır. Buna göre

$$[-, -] = g \times M \rightarrow M \text{ ve } [-, -] = M \times g \rightarrow M$$

etkileri her $m \in M$ ve $x, y \in g$ için aşağıdaki aksiyomları sağlasın.

$$[m, [x, y]] = [[m, x], y] - [[m, y], x]$$

$$[x, [m, y]] = [[x, m], y] - [[x, y], m]$$

$$[x, [y, m]] = [[x, y], m] - [[x, m], y]$$

Son iki ifade taraf tarafa toplanırsa $[x, [m, y]] + [x, [y, m]] = 0$ eşitliği elde edilir.

Tanım 2.20 L bir Leibniz cebiri olsun. L Leibniz cebirinin türetilmiş serisi

$$L^{(0)} = L, L^{(1)} = [L, L], \dots, L^{(k)} = [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}]$$

olarak tanımlanır. Eğer bazı $n \geq 0$ için $L^{(n)} = \{0\}$ oluyorsa L 'ye çözülebilir Leibniz cebiri denir. Özel olarak $L^{(2)} = 0$ ise L 'ye metabelyen Leibniz cebiri denir. Tüm 2-ranklı Leibniz cebirleri metabelyendir ve her $x_i \in L$ için $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = 0$ eşitliği sağlanır (Drensky ve Papistas, 2002).

Çalışmamızda F bir serbest Leibniz cebiri olmak üzere F/F'' ile bir serbest metabelyen Leibniz cebirini göstereceğiz.

Tanım 2.21 F/F'' serbest metabelyen Leibniz cebiri ve F'/F'' 'de, F/F'' 'nin türetilmiş alt cebiri olsun. $\text{Aut}(F/F'')$ 'nin modülo F'/F'' 'ne göre birim olan elemanına IA otomorfizm denir.

F/F'' serbest metabelyen Leibniz cebirinin IA otomorfizmler grubunu $\text{IAut}(F/F'')$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.22 $\alpha, F/F''$ cebirinin $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i \rightarrow y_i$ şeklinde tanımlanan bir otomorfizmi olsun. Eğer $v_i \in F''$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $\bar{\alpha} : x_i \rightarrow y_i + v_i$ olacak şekilde F 'nin bir $\bar{\alpha}$ otomorfizmi varsa α 'ya tame otomorfizm denir. Bu durumda " α, F 'nin bir otomorfizmine taşınabilir (tame)" denir. Eğer α , taşınabilir değilse taşınamaz (wild) otomorfizm olarak adlandırılır.



3. WREATH ÇARPIM

1964'te Smel'kin gruplar için verbal wreath çarpımın bir tanımını vermiştir. Ayrıca Smel'kin 1973'te wreath çarpımın grup teorisindeki bazı uygulamalarına yer vermiş ve bu çarpımın benzer bir formunu Lie cebirleri için ifade etmiştir. Smel'kin 1973'te özellikle birimli ve değişmeli halka üzerindeki Lie cebirlerinin varyetesinde bulunan A ve T gibi iki Lie cebirlerinin wreath çarpımını A tarafından üretilen bir B ideali ile T Lie cebirinin yarıdirekt çarpımı olarak tanımlamıştır. Aslında wreath çarpımın yapısını tanımlamak kolay değildir. Fakat Smel'kin katsayıların geldiği halkanın cisim olması durumunda değişmeli Lie cebirlerinin varyetesinde wreath çarpımı oldukça basit bir yolla ifade etmiştir. Bu durumda Smel'kin B 'yi, rankı A 'nın boyutu ile aynı olan serbest bir T -modül olarak düşünmüştür. Bu özel durum için W wreath çarpımını $AwrT$ olarak ifade etmiştir.

1985'te Sullivan, wreath çarpıma farklı bir bakış açısı ile yaklaşmış ve Smel'kin'den oldukça farklı bir wreath çarpım tanımı vermiştir. Ayrıca Sullivan grup teoriden esinlenerek üreteçleri ve bazı bağıntıları kullanarak wreath çarpımı önce gruplar için sonra Lie cebirleri için tanımlamıştır.

Biz çalışmanın bu bölümünde 1973'te Smel'kin ve 1985'te Sullivan tarafından tanımlanan Lie cebirlerinin wreath çarpımından esinlenerek Leibniz cebirlerinin wreath çarpımını ve üreteçlerini tanımladık. Ayrıca çalışmamızın ilerleyen bölümlerinde kullanacağımız bazı önemli lemma ve önermeleri wreath çarpımı kullanarak ifade ettik. Buna ek olarak W olarak adlandırdığımız abelyen Leibniz cebirlerinin wreath çarpımın bir Leibniz cebiri olduğunu fakat Lie cebiri olmadığını gösterdik.

Tanım 3.1 K değişmeli ve birimli bir halka olsun. A ve B , K üzerinde Leibniz cebiri olsunlar. A , K üzerindeki Leibniz cebirlerinin bir β varyetesi tarafından içerilsin. A ve B 'nin β -wreath çarpımı $Awr_\beta B$ ile gösterilir ve bir $\hat{W}$ cebiri olarak aşağıdaki gibi

tanımlanır:

- 1) $\hat{W}$, A ve B tarafından üretilir.
- 2) $\hat{W}$ 'daki A tarafından üretilen ideal β varyetesi tarafından kapsanır.
- 3) H , $\varphi(A)$ ve $\psi(B)$ tarafından üretilen bir cebir olmak üzere $\varphi : A \rightarrow H$, $\psi :$

$B \rightarrow H$ herhangi iki homomorfizm olsun öyleki H 'de $\varphi(A)$ tarafından gerilen ideal β 'nın içinde olsun. O halde bu homomorfizmler bir $\hat{W} \rightarrow H$ homomorfizmine genişletilebilir. A ve B 'nin wreath çarpımı $Awr_{\beta}B$ ile gösterilir.

$A \in \beta$ iken β -wreath çarpımının başka ve daha yapısal bir tanımını verebiliriz. Eğer $S = A * B$ bir serbest çarpım ise

$$Awr_{\beta}B \cong (A * B)/V(A^S)$$

dir. Burada $V(A^S)$ verbal alt cebir ve S 'de A tarafından üretilen idealdir. A ve B abelyen Leibniz cebiri iken $W = AwrB = (A * B)/V(A^S)$ yerine $W = B \oplus I_A$ formunda düşünebiliriz. Burada I_A , A abelyen Leibniz cebirinin bir idealidir.

F'/F'' abelyen Leibniz cebiri, serbest üreteç kümesi $\{a_i\}_{i \in I}$ olan bir serbest K -modül ve F/F' , K üzerinde Leibniz cebiri olsun. W , F'/F'' ve F/F' cebirlerinin wreath çarpımı olmak üzere kısaca $W = (F'/F'')wr(F/F')$ ile gösterelim. W , F/F' ve $I_{F'/F''}$ 'nin yarıdirek toplamıdır ve $W = (F/F') \oplus I_{F'/F''}$ formuna sahiptir. Burada $I_{F'/F''}$, bir serbest F/F' -modül olup serbest üreteç kümesi $\{a_i\}_{i \in I}$ dir ve rankı F'/F'' 'nin boyutuna eşittir. Ayrıca, F'/F'' aşağıdaki modül etkisi ile F/F' - modül ve $U(F/F')$ -modüldür. Her $u \in F'/F''$, $v \in F/F'$ ve $r_v, l_v \in U(F/F')$ için

$$u * r_v = [u, v]$$

$$u * l_v = [v, u]$$

dir. Bundan sonra $\bar{x}_i$ ile $x_i + F'' \in F/F''$ ve $\bar{x}_i$ ile $x_i + F' \in F/F'$ göstereceğiz.

Teorem 3.2 W wreath çarpımı bir sağ ve sol Leibniz cebiridir fakat bir Lie cebiri olmak zorunda değildir.

İspat: F'/F'' abelyen Leibniz cebiri, serbest üreteç kümesi $\{a_i\}_{i \in I}$ olan bir serbest K -modül ve F/F' , K üzerinde Leibniz cebiri olsun. Her $\bar{x}_i \in F/F'$ ve $a_i \in F'/F''$ olmak üzere $\bar{x}_1 + a_1, \bar{x}_2 + a_2, \bar{x}_3 + a_3 \in W = (F'/F'')wr(F/F')$ alalım.

$$\begin{aligned}
[\bar{x}_1 + a_1, \bar{x}_2 + a_2, \bar{x}_3 + a_3] &= [\bar{x}_1 + a_1, [\bar{x}_2, \bar{x}_3] + [\bar{x}_2, a_3] + [a_2, \bar{x}_3] + [a_2, a_3]] \\
&= [\bar{x}_1, [\bar{x}_2, \bar{x}_3] + [\bar{x}_2, a_3] + [a_2, \bar{x}_3] + [a_2, a_3]] \\
&+ [a_1, [\bar{x}_2, \bar{x}_3] + [\bar{x}_2, a_3] + [a_2, \bar{x}_3] + [a_2, a_3]] \\
&= [\bar{x}_1, [\bar{x}_2, \bar{x}_3]] + [\bar{x}_1, [\bar{x}_2, a_3]] + [\bar{x}_1, [a_2, \bar{x}_3]] + [\bar{x}_1, [a_2, a_3]] \\
&+ [a_1, [\bar{x}_2, \bar{x}_3]] + [a_1, [\bar{x}_2, a_3]] + [a_1, [a_2, \bar{x}_3]] + [a_1, [a_2, a_3]] \\
&= [[\bar{x}_1, \bar{x}_2], \bar{x}_3] - [[\bar{x}_1, \bar{x}_3], \bar{x}_2] + [[\bar{x}_1, \bar{x}_2], a_3] - [[\bar{x}_1, a_3], \bar{x}_2] \\
&+ [[\bar{x}_1, a_2], \bar{x}_3] - [[\bar{x}_1, \bar{x}_3], a_2] + [[\bar{x}_1, a_2], a_3] - [[\bar{x}_1, a_3], a_2] \\
&+ [[a_1, \bar{x}_2], \bar{x}_3] - [[a_1, \bar{x}_3], \bar{x}_2] + [[a_1, \bar{x}_2], a_3] - [[a_1, a_3], \bar{x}_2] \\
&+ [[a_1, a_2], \bar{x}_3] - [[a_1, \bar{x}_3], a_2] + [[a_1, a_2], a_3] - [[a_1, a_3], a_2] \\
&= [[\bar{x}_1, \bar{x}_2], \bar{x}_3] + [[\bar{x}_1, a_2], \bar{x}_3] + [[a_1, \bar{x}_2], \bar{x}_3] + [[a_1, a_2], \bar{x}_3] \\
&+ [[\bar{x}_1, \bar{x}_2], a_3] + [[\bar{x}_1, a_2], a_3] + [[a_1, \bar{x}_2], a_3] + [[a_1, a_2], a_3] \\
&- [[\bar{x}_1, \bar{x}_3], \bar{x}_2] - [[\bar{x}_1, a_3], \bar{x}_2] - [[a_1, \bar{x}_3], \bar{x}_2] - [[a_1, a_3], \bar{x}_2] \\
&- [[\bar{x}_1, \bar{x}_3], a_2] - [[\bar{x}_1, a_3], a_2] - [[a_1, \bar{x}_3], a_2] - [[a_1, a_3], a_2] \\
&= [[\bar{x}_1 + a_1, \bar{x}_2 + a_2], \bar{x}_3 + a_3] - [[\bar{x}_1 + a_1, \bar{x}_3 + a_3], \bar{x}_2 + a_2]
\end{aligned}$$

olacak şekilde Leibniz özdeşliği sağlanır. Dolayısıyla W wreath çarpımı bir sağ Leibniz cebiridir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
[[\bar{x}_1 + a_1, \bar{x}_2 + a_2], \bar{x}_3 + a_3] &= [[[\bar{x}_1, \bar{x}_2] + [\bar{x}_1, a_2] + [a_1, \bar{x}_2] + [a_1, a_2], \bar{x}_3 + a_3]] \\
&= [[[\bar{x}_1, \bar{x}_2] + [\bar{x}_1, a_2] + [a_1, \bar{x}_2] + [a_1, a_2], \bar{x}_3]] \\
&+ [[[\bar{x}_1, \bar{x}_2] + [\bar{x}_1, a_2] + [a_1, \bar{x}_2] + [a_1, a_2], a_3]]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\overline{x_1}, \overline{x_2}], \overline{x_3}] + [\overline{x_1}, a_2], \overline{x_3}] + [a_1, \overline{x_2}], \overline{x_3}] + [a_1, a_2], \overline{x_3}] \\
&+ [\overline{x_1}, \overline{x_2}], a_3] + [\overline{x_1}, a_2], a_3] + [a_1, \overline{x_2}], a_3] + [a_1, a_2], a_3] \\
&= [\overline{x_1}, [\overline{x_2}, \overline{x_3}]] - [\overline{x_2}, [\overline{x_1}, \overline{x_3}]] + [\overline{x_1}, [a_2, \overline{x_3}]] - [a_2, [\overline{x_1}, \overline{x_3}]] \\
&+ [a_1, [\overline{x_2}, \overline{x_3}]] - [\overline{x_2}, [a_1, \overline{x_3}]] + [a_1, [a_2, \overline{x_3}]] - [a_2, [a_1, \overline{x_3}]] \\
&+ [\overline{x_1}, [\overline{x_2}, a_3]] - [\overline{x_2}, [\overline{x_1}, a_3]] + [\overline{x_1}, [a_2, a_3]] - [a_2, [\overline{x_1}, a_3]] \\
&+ [a_1, [\overline{x_2}, a_3]] - [\overline{x_2}, [a_1, a_3]] + [a_1, [a_2, a_3]] - [a_2, [a_1, a_3]] \\
&= [\overline{x_1}, [\overline{x_2}, \overline{x_3}]] + [\overline{x_1}, [\overline{x_2}, a_3]] + [\overline{x_1}, [a_2, \overline{x_3}]] + [\overline{x_1}, [a_2, a_3]] \\
&+ [a_1, [\overline{x_2}, \overline{x_3}]] + [a_1, [\overline{x_2}, a_3]] + [a_1, [a_2, \overline{x_3}]] + [a_1, [a_2, a_3]] \\
&- [\overline{x_2}, [\overline{x_1}, \overline{x_3}]] - [\overline{x_2}, [\overline{x_1}, a_3]] - [\overline{x_2}, [a_1, \overline{x_3}]] - [\overline{x_2}, [a_1, a_3]] \\
&- [a_2, [\overline{x_1}, \overline{x_3}]] - [a_2, [\overline{x_1}, a_3]] - [a_2, [a_1, \overline{x_3}]] - [a_2, [a_1, a_3]] \\
&= [\overline{x_1} + a_1, [\overline{x_2} + a_2, \overline{x_3} + a_3]] - [\overline{x_2} + a_2, [\overline{x_1} + a_1, \overline{x_3} + a_3]]
\end{aligned}$$

olup W wreath çarpımı bir sol Leibniz cebiridir.

Kabul edelim ki W wreath çarpımı bir Lie cebiri olsun. W wreath çarpımı bir Lie cebiri ise antikomutatiflik özelliğini sağlamak zorundadır. Buna göre her $\overline{x_1} \in F/F'$ ve $a_1 \in F'/F''$ olmak üzere $\overline{x_1} + a_1 \in W = F'/F'' \wr F/F'$ için $[\overline{x_1} + a_1, \overline{x_1} + a_1] = 0$ dir.

$$\begin{aligned}
[\overline{x_1} + a_1, \overline{x_1} + a_1] &= [\overline{x_1}, \overline{x_1}] + [\overline{x_1}, a_1] + [a_1, \overline{x_1}] + [a_1, a_1] \\
0 &= [\overline{x_1}, \overline{x_1}] + [\overline{x_1}, a_1] + [a_1, \overline{x_1}] + [a_1, a_1]
\end{aligned}$$

olmak üzere F/F' cebirinde $[\overline{x_1}, \overline{x_1}] = 0$ ve F'/F'' cebirinde $[a_1, a_1] = 0$ dir. Buradan $0 = [\overline{x_1}, a_1] + [a_1, \overline{x_1}]$ elde edilir. Bu eşitlik her zaman sağlanmaz. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla W wreath çarpımı bir Lie cebiri olmak zorunda değildir.

Sıradaki Lemmanın benzeri Lie cebirlerinde de ifade edilmiştir (Smel'kin, 1973). İspatı Lie cebirlerindeki gibi yapılır.

Lemma 3.3 L bir Leibniz cebiri, S ise L Leibniz cebirinin abelyen ideali olsun. I bir

abelyen ideal, L/S bir alt cebir olmak üzere $H = L/S + I$ olacak şekilde yarı direk toplam vardır ve $\mu : L \rightarrow H$ bir monomorfizmdir öyleki $\mu(L) \cap L = \mu(S)$ dir.

İspat: L/S üzerinde S idealini bir modül olarak, L/S üzerinde injektif bir T modülüne gömebiliriz. L 'deki S kosetlerinin temsillerini ve S 'nin bir genişlemesi olarak L 'nin yapısını belirleyen L/S bölüm cebirini kullanabiliriz. Böylece L/S ile abelyan T cebirlerinin bir H genişlemesini inşa edebiliriz. Açıkça görülüyor ki $L \subseteq H$ dir. Diğer taraftan $H/T(\cong L/S)$ üzerinde bir modül olarak T ideali injektiftir. Böylece T 'nin bir H/T genişlemesi parçalanabilir.

Sonuç 3.4 $\bar{x}_i \longrightarrow \bar{\bar{x}}_i + a_i, i \in I$ dönüşümü $\mu : F/F'' \longrightarrow (F'/F'')_{wr}(F/F')$ monomorfizmine genişletilebilir.

İspat: $\bar{x}_i \longrightarrow \bar{\bar{x}}_i + a_i$ dönüşümü $\mu : F/F'' \rightarrow F/F' \oplus I_{F'/F''}$ homomorfizmine genişletilebilir. Lemma 3.3'den μ bir monomorfizmdir.

F/F'' formundaki cebirlerin otomorfizmlerini çalışmak için μ gömmesini kullanabiliriz. $I_{F'/F''}$ üreteç kümesi $\{a_i\}_{i \in I}$ olmak üzere F'/F'' cebirinin bir idealidir. Ayrıca abelyen Leibniz cebiridir ve serbest F/F' -modüldür. W 'nun otomorfizmler grubunu $AutW$ ile göstereceğiz. Burada $AutW$ 'yu $I_{F'/F''}$ ve F/F' invaryant bırakan otomorfizmlerden oluşan $\overline{AutW}$ altgrubuna kısıtlayacağız. Yani eğer $\alpha \in \overline{AutW}$, $\alpha : W \rightarrow W$ bir otomorfizm ve $\alpha(I_{F'/F''}) \subset I_{F'/F''}$, $\alpha(F/F') \subset F/F'$ dir. Ayrıca $\overline{AutW}$ ise elemanları F/F' üzerinde birim gibi davranan $IAutW$ normal altgrubuna ve elemanları her $a_i \in I_{F'/F''}$ 'nü invaryant bırakan bir P altgrubuna sahiptir. Böylece $\overline{AutW}$ 'nin P ile $IAutW$ 'nin yarıdirek çarpımı olduğu elde edilir.

Aşağıdaki önermede verilen gömme, Lie cebirlerinde Bahturin ve Nabiev tarafından 1992'de ispatlanan gömmenin bir benzeri olup ispatı Leibniz cebirlerinde de aynı şekilde yapılmaktadır.

Önerme 3.5 $\vartheta : \overline{Aut(F/F'')} \rightarrow \overline{Aut(F/F'')_{wr(F/F')}}$ olacak şekilde bir gömme vardır öyleki eğer $\alpha \in \overline{Aut(F/F'')}$, F'/F'' cebirinin elemanlarını invaryant bırakıyor ve $\tilde{\alpha} = \vartheta(\alpha)$ ise $\tilde{\alpha}\mu = \mu\alpha$ dir. Buradaki μ Sonuç 3.4'de bahsedilen gömmedir.

İspat: İlk olarak $w \in F$ olmak üzere $\bar{w}, \overline{\bar{w}}$ ile sırasıyla F/F'' and F/F' cebirlerindeki kanonik görüntülerini göstereceğiz (Bahturin ve Nabiev, 1992). $f \in I_{F'/F''}$ için $\mu(\bar{w}) = \bar{w} + f$ dir. $\alpha(F'/F'') \subset F'/F''$ olacak şekilde bir $\alpha : F/F'' \rightarrow F/F''$ otomorfizmi verilsin. $\overline{\alpha(x_i)} \in F/F'$, $p_i \in I_{F'/F''}$ olmak üzere $\mu\alpha(x_i + F'') = \mu(\alpha(x_i) + F'') = \mu(\overline{\alpha(x_i)}) = \overline{\alpha(x_i)} + p_i$ olarak tanımlayalım. Diğer taraftan $\tilde{\alpha}\mu(\bar{x}_i) = \tilde{\alpha}(\bar{x}_i + f) = \tilde{\alpha}(\bar{x}_i) + \tilde{\alpha}(f)$ ve $f \in I_{F'/F''}$ dir. $\tilde{\alpha}(\bar{x}_i) = \overline{\alpha(x_i)}$ ve $\tilde{\alpha}(f) = p_i$ yazarsak

$$\tilde{\alpha}(\mu(\bar{x}_i)) = \mu(\alpha(\bar{x}_i))$$

elde edilir. $\tilde{\alpha}$, F'/F'' invaryant bırakan α 'lar tarafından belirlendiğinden dolayı $\tilde{\alpha} \in \overline{Aut(F/F'')}$ dir. Wreath çarpım tanımından $\tilde{\alpha}$, W 'nun daha önce bahsedilen ve tanımlanan dönüşüme tek türlü genişletilebilir.

α^{-1} , α dönüşümünün tersi olsun. $\tilde{\alpha}\mu = \mu\alpha$ eşitliğinin her iki yanına α^{-1} uygularsak

$$\mu = \mu\alpha\alpha^{-1} = \tilde{\alpha}\mu\alpha^{-1} = \tilde{\alpha}\widetilde{\alpha^{-1}}\mu \text{ ve } \tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1} = \widetilde{1_{F/F''}}$$

elde edilir. $1_W = \widetilde{1_{F/F''}}$ olduğundan $\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1} = 1_W$ dir. Böylece $\tilde{\alpha}$, W 'nun bir otomorfizmidir.

4. İKİ RANKLI SERBEST METABELYEN LEİBNİZ CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİ

2-ranklı serbest metabelyen Lie cebirlerinin her otomorfizminin bir iç ve bir lineer otomorfizmin bileşkesi olduğu bilinmektedir. Çalışmanın bu bölümde üreteçleri $\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2$ olan iki ranklı F/F'' serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin otomorfizmlerinin yapısı incelenmiştir. 2-ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinde otomorfizmlerin iç, lineer ve belirli formdaki bazı otomorfizmlerin bileşkesi olarak yazılabileceği gösterilmiştir. Ayrıca Teorem 4.3 ve Teorem 4.8'te, $IAut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun yapısı tanımlanmıştır ve Teorem 4.9'de, $Aut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun yapısı ifade edilmiştir.

F serbest üreteçleri x_1, x_2 olan bir serbest Leibniz cebiri olsun. F 'nin $\{[a, a] : a \in F\}$ tarafından üretilen idealini $AnnF$ ile gösterelim. $a \in AnnF$ olması için gerek ve yeter koşul $r_a = 0$ dır (Loday ve Pirashvili, 1993). Ayrıca $F_{Lie} = F/AnnF$ iki ranklı serbest Lie cebiridir.

Önerme 4.1 F serbest üreteçleri x_1, x_2 olan bir serbest Leibniz cebiri olsun. Her $i_j = 1, 2$ ve $1 \leq j \leq k$ için

$$[\dots [[x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \dots, x_{i_k}]$$

monomialleri F 'nin bir lineer bazını oluşturur (Drensky ve Cattaneo, 2002).

Drensky ve Cattaneo iki ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin bir bazını belirlediler.

Önerme 4.2 $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ tarafından üretilen F/F'' serbest metabelyen Leibniz cebiri

$$\{\bar{x}_{i_1}, [\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}], [\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \bar{x}_{i_3}], \dots, \bar{x}_{i_k} \mid 1 \leq i_1, i_2 \leq 2, 1 \leq i_3 \leq \dots \leq i_k \leq 2, k = 3, 4, \dots\}$$

bazına sahiptir (Drensky ve Cattaneo, 2002).

Şimdi IA-otomorfizmlerine karşılık gelen matrislerin formunu belirleyelim.

$1 \leq i \leq 2$ ve $1 \leq j \leq 4$ olmak üzere bileşenleri $U(F/F')$ den gelen 4×2 tipinde bir Q_2 matrisini her $q_{ij} \in U(F/F')$ için

$$Q_2 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \\ q_{13} & q_{23} \\ q_{14} & q_{24} \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

ile gösterelim. Ayrıca 2×4 tipinde sabit bir A_2 matrisini

$$A_2 = \begin{bmatrix} \overline{l_{x_1}} + \overline{r_{x_1}} & \overline{r_{x_2}} & \overline{l_{x_2}} & 0 \\ 0 & \overline{l_{x_1}} & \overline{r_{x_1}} & \overline{r_{x_2}} + \overline{l_{x_2}} \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

ve E_2 ile 2×2 birim matrisi gösterelim.

Teorem 4.3 F/F'' iki ranklı serbest metabelyen Leibniz cebiri ve G ise $E_2 + A_2 Q_2$ formundaki tüm tersinir matrislerin bir grubu olsun. Buna göre $IAut(F/F'') \cong G$ dir.

İspat: $\Rightarrow IAut(F/F'')$ elemanları modulo F'/F'' üzerinde birim gibi davranır. F'/F'' 'nın bir F/F' -modül olmasını ve K üzerinde $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ tarafından bir Leibniz cebiri olarak üretilmesini kullanarak $IAut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun matris formunu bulacağız. F'/F'' cebiri $\overline{r_1} = [\overline{x_1}, \overline{x_1}]$, $\overline{r_2} = [\overline{x_1}, \overline{x_2}]$, $\overline{r_3} = [\overline{x_2}, \overline{x_1}]$, $\overline{r_4} = [\overline{x_2}, \overline{x_2}]$ tarafından üretilen bir idealdir ve F'/F'' bir F/F' -modüldür. $i = 1, 2$ ve $j = 1, 2, 3, 4$ için $q_{ij} \in U(F/F')$ ve $\alpha \in IAut(F/F'')$ olmak üzere

$$\alpha(\overline{x_i}) = \overline{x_i} + \sum_{j=1}^4 \overline{r_j} * q_{ij}$$

dir. Buna göre

$$\alpha(\overline{x_1}) = \overline{x_1} + \overline{r_1} * q_{11} + \overline{r_2} * q_{12} + \overline{r_3} * q_{13} + \overline{r_4} * q_{14} \quad (1)$$

$$\alpha(\overline{x_2}) = \overline{x_1} + \overline{r_1} * q_{21} + \overline{r_2} * q_{22} + \overline{r_3} * q_{23} + \overline{r_4} * q_{24} \quad (2)$$

(1) ve (2)'deki eşitliğin her iki tarafına μ uygulayalım.

$$\begin{aligned} \mu\alpha(\overline{x_1}) &= \mu(\overline{x_1} + \overline{r_1} * q_{11} + \overline{r_2} * q_{12} + \overline{r_3} * q_{13} + \overline{r_4} * q_{14}) \\ &= \mu(\overline{x_1} + [\overline{x_1}, \overline{x_1}] * q_{11} + [\overline{x_1}, \overline{x_2}] * q_{12} + [\overline{x_2}, \overline{x_1}] * q_{13} + [\overline{x_2}, \overline{x_2}] * q_{14}) \\ &= \overline{x_1} + a_1 + [\overline{x_1} + a_1, \overline{x_1} + a_1] * q_{11} + [\overline{x_1} + a_1, \overline{x_2} + a_2] * q_{12} \\ &\quad + [\overline{x_2} + a_2, \overline{x_1} + a_1] * q_{13} + [\overline{x_2} + a_2, \overline{x_2} + a_2] * q_{14} \\ &= \overline{x_1} + a_1 + ([\overline{x_1}, a_1] + [a_1, \overline{x_1}]) * q_{11} + ([\overline{x_1}, a_2] + [a_1, \overline{x_2}]) * q_{12} \\ &\quad + ([\overline{x_2}, a_1] + [a_2, \overline{x_1}]) * q_{13} + ([\overline{x_2}, a_2] + [a_2, \overline{x_2}]) * q_{14} \\ &= \overline{x_1} + a_1 + a_1 * (l_{\overline{x_1}} q_{11} + r_{\overline{x_1}} q_{11} + r_{\overline{x_2}} q_{12} + l_{\overline{x_2}} q_{13}) \\ &\quad + a_2 * (l_{\overline{x_1}} q_{12} + r_{\overline{x_1}} q_{13} + r_{\overline{x_2}} q_{14} + l_{\overline{x_2}} q_{14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu\alpha(\overline{x_2}) &= \mu(\overline{x_2} + \overline{r_1} * q_{21} + \overline{r_2} * q_{22} + \overline{r_3} * q_{23} + \overline{r_4} * q_{24}) \\ &= \mu(\overline{x_2} + [\overline{x_1}, \overline{x_1}] * q_{21} + [\overline{x_1}, \overline{x_2}] * q_{22} + [\overline{x_2}, \overline{x_1}] * q_{23} + [\overline{x_2}, \overline{x_2}] * q_{24}) \\ &= \overline{x_2} + a_2 + [\overline{x_1} + a_1, \overline{x_1} + a_1] * q_{21} + [\overline{x_1} + a_1, \overline{x_2} + a_2] * q_{22} \\ &\quad + [\overline{x_2} + a_2, \overline{x_1} + a_1] * q_{23} + [\overline{x_2} + a_2, \overline{x_2} + a_2] * q_{24} \\ &= \overline{x_2} + a_2 + ([\overline{x_1}, a_1] + [a_1, \overline{x_1}]) * q_{21} + ([\overline{x_1}, a_2] + [a_1, \overline{x_2}]) * q_{22} \\ &\quad + ([\overline{x_2}, a_1] + [a_2, \overline{x_1}]) * q_{23} + ([\overline{x_2}, a_2] + [a_2, \overline{x_2}]) * q_{24} \\ &= \overline{x_2} + a_2 + a_1 * (l_{\overline{x_1}} q_{21} + r_{\overline{x_1}} q_{21} + r_{\overline{x_2}} q_{22} + l_{\overline{x_2}} q_{23}) \\ &\quad + a_2 * (l_{\overline{x_1}} q_{22} + r_{\overline{x_1}} q_{23} + r_{\overline{x_2}} q_{24} + l_{\overline{x_2}} q_{24}). \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikleri aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz.

$$\begin{aligned}\mu\alpha(\overline{x_1}) &= \overline{x_1} + a_1 + a_1 * (l_{\overline{x_1}}q_{11} + r_{\overline{x_1}}q_{11} + r_{\overline{x_2}}q_{12} + l_{\overline{x_2}}q_{13}) \\ &\quad + a_2 * (l_{\overline{x_1}}q_{12} + r_{\overline{x_1}}q_{13} + r_{\overline{x_2}}q_{14} + l_{\overline{x_2}}q_{14}) \\ \mu\alpha(\overline{x_2}) &= \overline{x_2} + a_2 + a_1 * (l_{\overline{x_1}}q_{21} + r_{\overline{x_1}}q_{21} + r_{\overline{x_2}}q_{22} + l_{\overline{x_2}}q_{23}) \\ &\quad + a_2 * (l_{\overline{x_1}}q_{22} + r_{\overline{x_1}}q_{23} + r_{\overline{x_2}}q_{24} + l_{\overline{x_2}}q_{24}).\end{aligned}$$

Önerme 3.5'deki $\mu\alpha = \tilde{\alpha}\mu$ eşitliğinden ve $\overline{AutW}$ 'nin tanımından $I_{F'/F''}$ 'ne kısıtlanan $\tilde{\alpha}$ 'ya karşılık gelen M matrisi elde edilir.

$$M = \begin{bmatrix} 1 + l_{\overline{x_1}}q_{11} + r_{\overline{x_1}}q_{11} + r_{\overline{x_2}}q_{12} + l_{\overline{x_2}}q_{13} & l_{\overline{x_1}}q_{12} + r_{\overline{x_1}}q_{13} + r_{\overline{x_2}}q_{14} + l_{\overline{x_2}}q_{14} \\ l_{\overline{x_1}}q_{21} + r_{\overline{x_1}}q_{21} + r_{\overline{x_2}}q_{22} + l_{\overline{x_2}}q_{23} & 1 + l_{\overline{x_1}}q_{22} + r_{\overline{x_1}}q_{23} + r_{\overline{x_2}}q_{24} + l_{\overline{x_2}}q_{24} \end{bmatrix}$$

dir. $\tilde{\alpha}$ bir otomorfizm olduğundan $\tilde{\alpha}$ 'ya karşılık gelen bu matris tersinirdir ve M matrisinin transpozunu

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 + l_{\overline{x_1}}q_{11} + r_{\overline{x_1}}q_{11} + r_{\overline{x_2}}q_{12} + l_{\overline{x_2}}q_{13} & l_{\overline{x_1}}q_{21} + r_{\overline{x_1}}q_{21} + r_{\overline{x_2}}q_{22} + l_{\overline{x_2}}q_{23} \\ l_{\overline{x_1}}q_{12} + r_{\overline{x_1}}q_{13} + r_{\overline{x_2}}q_{14} + l_{\overline{x_2}}q_{14} & 1 + l_{\overline{x_1}}q_{22} + r_{\overline{x_1}}q_{23} + r_{\overline{x_2}}q_{24} + l_{\overline{x_2}}q_{24} \end{bmatrix}$$

$$\text{dir. } E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} l_{\overline{x_1}} + r_{\overline{x_1}} & r_{\overline{x_2}} & l_{\overline{x_2}} & 0 \\ 0 & l_{\overline{x_1}} & r_{\overline{x_1}} & r_{\overline{x_2}} + l_{\overline{x_2}} \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \\ q_{13} & q_{23} \\ q_{14} & q_{24} \end{bmatrix} \text{ ol-}$$

mak üzere M_T matrisini, $E_2 + A_2Q_2$ formunda düzenleyebiliriz. Böylece

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{\overline{x_1}} + r_{\overline{x_1}} & r_{\overline{x_2}} & l_{\overline{x_2}} & 0 \\ 0 & l_{\overline{x_1}} & r_{\overline{x_1}} & r_{\overline{x_2}} + l_{\overline{x_2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \\ q_{13} & q_{23} \\ q_{14} & q_{24} \end{bmatrix} \quad (3)$$

elde edilir. O halde $IAut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun bir elemanına karşılık gelen matris $E_2 + A_2Q_2$ formundadır.

$\Leftarrow$: Tersine

$$Q_2 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \\ q_{13} & q_{23} \\ q_{14} & q_{24} \end{bmatrix}$$

formunda olmak üzere (3)'deki forma sahip $C = E_2 + A_2 Q_2$ matrisini tanımlayalım. C matrisinin transpozunu C^T ile gösterelim. Buna göre W 'nun bir $\tilde{\alpha}$ otomorfizmi vardır öyleki her $\tilde{\alpha}'$ 'yi, $I_{F'/F''}$ 'e kısıtlarsak C^T bu otomorfizmi belirler. Böylece

$$\tilde{\alpha}(\bar{x}_i) = \bar{x}_i,$$

$$\tilde{\alpha}(a_i) = a_i + \sum_j \sum_k a_k \cdot a_{kj} q_{ij}$$

$\tilde{\alpha}\mu = \mu\alpha$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}\mu(\bar{x}_i) &= \tilde{\alpha}(\bar{x}_i + a_i) = \bar{x}_i + a_i + \sum_j \sum_k a_k \cdot a_{kj} q_{ij} \\ &= \mu(\bar{x}_i + \sum_j \bar{r}_j \cdot q_{ij}) \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan F/F'' serbest metabelyen Leibniz cebirinin modulo F'/F'' göre birim gibi davranan bir α otomorfizmi vardır. Bu otomorfizm

$$\alpha(\bar{x}_i) = \bar{x}_i + \sum_j \bar{r}_j \cdot q_{ij}$$

formundadır. O halde $C = E_2 + A_2 Q_2$ formundaki bir C matrisine karşılık gelen otomorfizm $IAut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun elemanıdır. Sonuç olarak, $IAut(F/F'')$ otomorfizmler grubu $C = E_2 + A_2 Q_2$ formundaki tüm tersinir matrisler grubuna izomorftur. M matrisinin transpozunun aşağıdaki forma sahip olduğunu biliyoruz.

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 + l_{\bar{x}_1} q_{11} + r_{\bar{x}_1} q_{11} + r_{\bar{x}_2} q_{12} + l_{\bar{x}_2} q_{13} & l_{\bar{x}_1} q_{21} + r_{\bar{x}_1} q_{21} + r_{\bar{x}_2} q_{22} + l_{\bar{x}_2} q_{23} \\ l_{\bar{x}_1} q_{12} + r_{\bar{x}_1} q_{13} + r_{\bar{x}_2} q_{14} + l_{\bar{x}_2} q_{14} & 1 + l_{\bar{x}_1} q_{22} + r_{\bar{x}_1} q_{23} + r_{\bar{x}_2} q_{24} + l_{\bar{x}_2} q_{24} \end{bmatrix}$$

dir.

Aşağıda Teorem 4.3'ün bazı uygulamalarına yer verilmiştir.

Sonuç 4.4 Eğer $q_{i2} = l_{\overline{x_i}}.p$, $p \in U(F/F')$ ve $q_{11} = q_{13} = q_{14} = q_{21} = q_{22} = q_{23} = q_{24} = 0$ ise M^T matrisi, $v \in F'/F''$ olmak üzere $e^{ad(v)}$ otomorfizmine karşılık gelen matristir.

İspat: Eğer $q_{i2} = l_{\overline{x_i}}.p$, $p \in U(F/F')$ ve $q_{11} = q_{13} = q_{14} = q_{21} = q_{22} = q_{23} = q_{24} = 0$ ise

$$M = \begin{bmatrix} 1 + r_{\overline{x_2}} l_{\overline{x_1}} p & l_{\overline{x_1}} l_{\overline{x_1}} p \\ r_{\overline{x_2}} l_{\overline{x_2}} p & 1 + l_{\overline{x_1}} l_{\overline{x_2}} p \end{bmatrix}$$

Her $x, y \in F/F''$ için $(r_x + l_x)l_y = 0$ bağıntısından $r_x l_y = -l_x l_y$ ve Leibniz özdeşliğinden

$$\begin{aligned} \det M &= 1 + l_{\overline{x_1}} l_{\overline{x_2}} p + r_{\overline{x_2}} l_{\overline{x_1}} p + r_{\overline{x_2}} l_{\overline{x_1}} p l_{\overline{x_1}} l_{\overline{x_2}} p - r_{\overline{x_2}} l_{\overline{x_2}} p l_{\overline{x_1}} l_{\overline{x_1}} p \\ &= 1 + l_{\overline{x_1}} l_{\overline{x_2}} p - l_{\overline{x_2}} l_{\overline{x_1}} p - l_{\overline{x_2}} l_{\overline{x_1}} l_{\overline{x_1}} l_{\overline{x_2}} p p + l_{\overline{x_2}} l_{\overline{x_2}} l_{\overline{x_1}} l_{\overline{x_1}} p p \\ &= 1 - l_{\overline{x_2}} l_{\overline{x_1}} p + l_{\overline{x_1}} l_{\overline{x_2}} p - l_{\overline{x_1}} l_{\overline{x_1}} l_{\overline{x_2}} l_{\overline{x_2}} p p + l_{\overline{x_1}} l_{\overline{x_1}} l_{\overline{x_2}} l_{\overline{x_2}} p p \\ &= 1 - l_{\overline{x_2}} l_{\overline{x_1}} p + l_{\overline{x_1}} l_{\overline{x_2}} p \\ &= 1 + l_{\overline{x_1}} r_{\overline{x_2}} p + l_{\overline{x_1}} l_{\overline{x_2}} p \\ &= 1 + l_{\overline{x_1}} (r_{\overline{x_2}} + l_{\overline{x_2}}) p \end{aligned}$$

$(1 + l_{\overline{x_1}} (r_{\overline{x_2}} + l_{\overline{x_2}}) p) (1 - l_{\overline{x_1}} (r_{\overline{x_2}} + l_{\overline{x_2}}) p) = 1$ olduğundan $1 + l_{\overline{x_1}} (r_{\overline{x_2}} + l_{\overline{x_2}}) p$ tersinir elemandır. Böylece M tersinir matristir ve $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14} \in U(F/F')$ için $v = [\overline{x_1}, \overline{x_1}] * p_{11} + [\overline{x_1}, \overline{x_2}] * p_{12} + [\overline{x_2}, \overline{x_1}] * p_{13} + [\overline{x_2}, \overline{x_2}] * p_{14}$ olmak üzere $e^{ad(v)}$ otomorfizmine karşılık gelir. Öyleki,

$$\begin{aligned} e^{ad(v)}(\overline{x_1}) &= \overline{x_1} + [\overline{x_1}, [\overline{x_1}, \overline{x_1}] * p_{11} + [\overline{x_1}, \overline{x_2}] * p_{12} + [\overline{x_2}, \overline{x_1}] * p_{13} + [\overline{x_2}, \overline{x_2}] * p_{14}] \\ e^{ad(v)}(\overline{x_2}) &= \overline{x_2} + [\overline{x_2}, [\overline{x_1}, \overline{x_1}] * p_{11} + [\overline{x_1}, \overline{x_2}] * p_{12} + [\overline{x_2}, \overline{x_1}] * p_{13} + [\overline{x_2}, \overline{x_2}] * p_{14}] \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $[\bar{x}_i, [\bar{x}_1, \bar{x}_1] + [\bar{x}_1, \bar{x}_2]] = 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$e^{ad(v)}(\bar{x}_1) = \bar{x}_1 + [\bar{x}_1, [\bar{x}_1, \bar{x}_2]] * (p_{12} - p_{13})$$

$$e^{ad(v)}(\bar{x}_2) = \bar{x}_2 + [\bar{x}_2, [\bar{x}_1, \bar{x}_2]] * (p_{12} - p_{13})$$

dir. $(p_{12} - p_{13}) = p$ dersek

$$e^{ad(v)}(\bar{x}_1) = \bar{x}_1 + [\bar{x}_1, [\bar{x}_1, \bar{x}_2]] * p$$

$$e^{ad(v)}(\bar{x}_2) = \bar{x}_2 + [\bar{x}_2, [\bar{x}_1, \bar{x}_2]] * p$$

elde edilir.

Sonuç 4.5 Eğer $q_{14} = r_{\bar{x}_1}$, $q_{11} = q_{13} = l_{\bar{x}_1}$ ve $q_{21} = q_{22} = q_{23} = q_{24} = l_{\bar{x}_i}$ ise M matrisine karşılık gelen bir

$$\zeta_1 : \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 + [[\bar{x}_2, \bar{x}_2], \bar{x}_1]$$

$$\bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2$$

otomorfizmi vardır.

İspat: Eğer $q_{14} = r_{\bar{x}_1}$, $q_{11} = q_{13} = l_{\bar{x}_1}$ ve $q_{21} = q_{22} = q_{23} = q_{24} = l_{\bar{x}_i}$ ise M matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 1 + l_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_2}l_{\bar{x}_1} + l_{\bar{x}_2}l_{\bar{x}_1} & l_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_2}r_{\bar{x}_1} + l_{\bar{x}_2}r_{\bar{x}_1} \\ l_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_i} + r_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_i} + r_{\bar{x}_2}l_{\bar{x}_i} + l_{\bar{x}_2}l_{\bar{x}_i} & 1 + l_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_i} + r_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_i} + r_{\bar{x}_2}l_{\bar{x}_i} + l_{\bar{x}_2}r_{\bar{x}_i} \end{bmatrix}$$

olup

$$M = \begin{bmatrix} 1 & (r_{\bar{x}_2} + l_{\bar{x}_2})r_{\bar{x}_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. $\det M = 1$ olduğundan M^T matrisine karşılık gelen bir ζ_1 otomorfizmi vardır ve aşağıdaki forma sahiptir.

$$\zeta_1 : \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 + [[\bar{x}_2, \bar{x}_2], \bar{x}_1]$$

$$\bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2$$

Sonuç 4.6 Eğer $q_{11} = q_{12} = q_{13} = q_{14} = l_{\bar{x}_1}$ ve $q_{21} = r_{\bar{x}_2}$, $q_{22} = q_{23} = q_{24} = l_{\bar{x}_2}$ ise M matrisine karşılık gelen bir

$$\begin{aligned}\zeta_2 : \bar{x}_1 &\rightarrow \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 &\rightarrow \bar{x}_2 + [[\bar{x}_1, \bar{x}_1], \bar{x}_2]\end{aligned}$$

otomorfizmi vardır.

İspat: Eğer $q_{11} = q_{12} = q_{13} = q_{14} = l_{\bar{x}_1}$ ve $q_{21} = r_{\bar{x}_2}$, $q_{22} = q_{23} = q_{24} = l_{\bar{x}_2}$ ise

$$M = \begin{bmatrix} 1 + l_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_2}l_{\bar{x}_1} + l_{\bar{x}_2}l_{\bar{x}_1} & l_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_2}r_{\bar{x}_1} + l_{\bar{x}_2}r_{\bar{x}_1} \\ l_{\bar{x}_1}r_{\bar{x}_2} + r_{\bar{x}_1}r_{\bar{x}_2} + r_{\bar{x}_2}l_{\bar{x}_2} + l_{\bar{x}_2}l_{\bar{x}_2} & 1 + l_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_2} + r_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_2} + r_{\bar{x}_2}l_{\bar{x}_2} + l_{\bar{x}_2}l_{\bar{x}_2} \end{bmatrix}$$

olup

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (l_{\bar{x}_2} + r_{\bar{x}_2})r_{\bar{x}_2} & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. $\det M = 1$ olduğundan M matrisine karşılık gelen bir ζ_2 otomorfizm vardır ve aşağıdaki forma sahiptir.

$$\begin{aligned}\zeta_2 : \bar{x}_1 &\rightarrow \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 &\rightarrow \bar{x}_2 + [[\bar{x}_1, \bar{x}_1], \bar{x}_2]\end{aligned}$$

Sonuç 4.7 Eğer $q_{21} = q_{14} = 1$, $q_{11} = q_{12} = q_{13} = q_{22} = q_{23} = l_{\bar{x}_i}$ ve $q_{21} = r_{\bar{x}_1}$ ise M matrisine karşılık gelen bir

$$\begin{aligned}\zeta_3 : \bar{x}_1 &\rightarrow \bar{x}_1 + [\bar{x}_2, \bar{x}_2] \\ \bar{x}_2 &\rightarrow \bar{x}_2 + [\bar{x}_1, \bar{x}_1] + [[\bar{x}_2, \bar{x}_2], \bar{x}_1]\end{aligned}$$

otomorfizmi vardır. Öyleki $\zeta_3 = \zeta' \circ \zeta''$ ve

$$\zeta' : \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 + [\bar{x}_2, \bar{x}_2]$$

$$\bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2$$

$$\zeta'' : \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1$$

$$\bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2 + [\bar{x}_1, \bar{x}_1]$$

otomorfizmlerdir.

İspat: Eğer $q_{21} = q_{14} = 1$, $q_{11} = q_{12} = q_{13} = q_{22} = q_{23} = l_{\bar{x}_i}$ ve $q_{21} = r_{\bar{x}_1}$ ise

$$M = \begin{bmatrix} 1 + l_{\bar{x}_1}r_{\bar{x}_2} + r_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_2} + r_{\bar{x}_2}l_{\bar{x}_1} + l_{\bar{x}_2}l_{\bar{x}_1} & l_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_i} + r_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_i} + r_{\bar{x}_2} + l_{\bar{x}_2} \\ l_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_2}l_{\bar{x}_i} + l_{\bar{x}_2}l_{\bar{x}_i} & 1 + l_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_i} + r_{\bar{x}_1}l_{\bar{x}_i} + r_{\bar{x}_2}r_{\bar{x}_1} + l_{\bar{x}_2}r_{\bar{x}_1} \end{bmatrix}$$

M matrisine karşılık gelen bir ζ_3 dönüşümü

$$\zeta_3 : \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 + [\bar{x}_2, \bar{x}_2]$$

$$\bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2 + [\bar{x}_1, \bar{x}_1] + [[\bar{x}_2, \bar{x}_2], \bar{x}_1]$$

formuna sahiptir. Öyleki $\zeta_3 = \zeta' \circ \zeta''$ ve

$$\zeta' : \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 + [\bar{x}_2, \bar{x}_2]$$

$$\bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2$$

$$\zeta'' : \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1$$

$$\bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2 + [\bar{x}_1, \bar{x}_1]$$

dir. ζ' ve ζ'' dönüşümlerine karşılık gelen matrisler tersinirdir. Böylece ζ' ve ζ'' otomorfizmdir. Otomorfizmlerin bileşkeleri de otomorfizm olacağından $\zeta_3 = \zeta' \circ \zeta''$ bir otomorfizmdir.

Teorem 4.8 F/F'' , $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ tarafından üretilen iki ranklı serbest metabelyen Leibniz cebiri olsun. $IAut(F/F'')$, iç otomorfizmler ile aşağıda verilen α, γ, β otomorfizmleri tarafından üretilir.

$$\alpha : \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 - [\bar{x}_1, z]$$

$$\bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2 + [z, \bar{x}_2]$$

burada $z \in F'/F''$ ve $z \in \bar{x}_1 U(F/F')$,

$$\gamma : \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 + u$$

$$\bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2$$

$u \in Ann(F/F'')$ olup sadece $\bar{x}_2$ tarafından üretilir,

$$\beta : \bar{x}_i \rightarrow \bar{x}_i + [z, \bar{x}_i]$$

burada $z, [\bar{x}_1, \bar{x}_2] - [\bar{x}_2, \bar{x}_1]$ formundaki elemanlar tarafından üretilir.

İspat: Sonuç 3.4'den $\mu : F/F'' \rightarrow (F'/F'')_{wr}(F/F')$ bir monomorfizmdir ve F/F'' serbest metabelyen Leibniz cebiri $(F'/F'')_{wr}(F/F')$ içine gömülebilir. Böylece abelyen Leibniz cebirleri üzerindeki wreath çarpım tanımından

$$W = F/F' \oplus I_{F'/F''}$$

yazabiliriz. F/F' ve F'/F'' serbest abelyen Leibniz cebirleridir. Serbest abelyen Leibniz cebirleri antikomutatif özelliğe sahip olduğundan aynı zamanda serbest abelyen Lie cebirleridirler. Bu yüzden işlem adımları Smel'kin'in 1973'teki yöntemi ile benzer şekilde yapılabilir.

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ serbest üreteçleri tarafından üretilen F/F'' serbest metabelyen Leibniz cebirinin otomorfizmi $\varphi : F/F'' \rightarrow F/F''$ olsun ve F'/F'' 'de birim gibi davransın. $h \in F/F''$ ve $x \in F'/F''$ olmak üzere

$$\varphi[h, x] = [\varphi(h), x] = [h, x] \text{ ve } \varphi[x, h] = [x, \varphi(h)] = [x, h]$$

dır. Böylece $[\varphi(h) - h, x] = 0$ ve $[x, \varphi(h) - h] = 0$ dır. Buradan $\varphi(h) - h \in F'/F''$ dir. $(F/F'')/(F'/F'')$ üzerinde $\varphi(h) - h = 0$ ve F/F' üzerinde φ birim gibi davranır. Sonuç 3.4'ten F/F'' serbest metabelyen Leibniz cebiri $(F'/F'')_{wr}(F/F')$ wreath çarpım içine gömülebilir. Böylece F/F'' serbest metabelyen Leibniz cebirinin serbest üreteçlerini $(F'/F'')_{wr}(F/F')$ wreath çarpımından gelen $g_i = \bar{x}_i + a_i$ elemanları olarak düşünebiliriz. Her $u_i \in F'/F''$ ve $\varphi(g_i) = g_i + u_i$ olmak üzere

$$\varphi[g_i, g_j] = [g_i, g_j]$$

eşitliğini elde edilir.

i) $\varphi[g_i, g_j] = [\varphi(g_i), \varphi(g_j)] = [g_i + u_i, g_j + u_j] = [g_i, g_j] + [u_i, g_j] + [g_i, u_j] + [u_i, u_j]$ dir. Burada $[u_i, u_j]$ elemanları, F/F'' cebirinde sıfırdır. Dolayısıyla $\varphi[g_i, g_j] = [g_i, g_j]$ eşitliğinden $[u_i, g_j] + [g_i, u_j] = 0$ dır. Bu eşitlikteki g_i yerine $\bar{x}_i + a_i$ yazarsak

$$[u_i, \bar{x}_j] + [u_i, a_j] + [\bar{x}_i, u_j] + [a_i, u_j] = 0$$

elde edilir. F/F'' cebirinde $[a_i, u_j]$ ve $[u_i, a_j]$ elemanları 0 olup

$$[u_i, \bar{x}_j] + [\bar{x}_i, u_j] = 0$$

elde edilir.

ii) Her $i, j, k \in \{1, 2\}$ için $\varphi[g_k, [g_i, g_j]] = [g_k, [g_i, g_j]]$ eşitliğinden (i)'deki gibi düzeltmeler yapılırsa $[\bar{x}_k, u_i], \bar{x}_j] = [\bar{x}_k, \bar{u}_j], x_i]$ eşitliği elde edilir.

DURUM 1: $z \in F'/F'', l_{\bar{x}_j} \in U(F/F')$ olmak üzere $u_j = z.l_{\bar{x}_j}$ alalım. $[u_i, \bar{x}_j] + [\bar{x}_i, u_j] = 0$ eşitliğinde $u_j = z.l_{\bar{x}_j}$ yerine yazarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} [u_i, \bar{x}_j] &= -[\bar{x}_i, u_j] \\ &= -[\bar{x}_i, z.l_{\bar{x}_j}] \\ &= -[\bar{x}_i, [\bar{x}_j, z]] \\ &= [\bar{x}_i, [z, \bar{x}_j]] \end{aligned}$$

Leibniz özdeşliğinden $[\overline{x_i}, [z, \overline{x_j}]] = [[\overline{x_i}, z], \overline{x_j}] - [[\overline{x_i}, \overline{x_j}], z] = [[\overline{x_i}, z], \overline{x_j}]$ olduğunu biliyoruz. Böylece $[u_i, \overline{x_j}] = [[\overline{x_i}, z], \overline{x_j}]$ ve

$$u_i = [\overline{x_i}, z] = z.l_{\overline{x_i}} \text{ veya } u_i = [g_i, z]$$

dir. Her $i \in I$ ve $u_i = z.l_{\overline{x_i}}$ için

$$\phi(g_i) = g_i + [g_i, z]$$

dir. z elemanı F'/F'' cebirinde olduğundan ϕ bir iç otomorfizmdir.

DURUM 2: $z \in F'/F''$, $r_{\overline{x_j}} \in U(F/F')$ olmak üzere $u_j = z.r_{\overline{x_j}}$ alalım.

a) $[u_i, \overline{x_j}] + [\overline{x_i}, u_j] = 0$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} [u_i, \overline{x_j}] &= -[\overline{x_i}, u_j] \\ &= -[\overline{x_i}, z.r_{\overline{x_j}}] \\ &= -[\overline{x_i}, [z, \overline{x_j}]] \\ &= -[[\overline{x_i}, z], \overline{x_j}] + [[\overline{x_i}, \overline{x_j}], z] \\ &= -[[\overline{x_i}, z], \overline{x_j}] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $u_i = -[\overline{x_i}, z]$ veya $u_i = -[g_i, z]$ olduğu aşıkardır. O halde

$$\phi : g_i \rightarrow g_i - [g_i, z]$$

$$g_j \rightarrow g_j + [z, g_j]$$

formundadır. Eğer $z \in \text{Ann}(F/F'')$ ise $[g_i, z] = 0$ olur. Eğer ϕ bir otomorfizm ise $\{g_i - [g_i, z], g_j + [z, g_j]\}$ kümesinin bir üreteç kümesi olduğunu biliyoruz.

$$F/F'' = g_i U(F/F') \oplus g_j U(F/F')$$

$$F/F'' = g_i U(F/F') \oplus (g_j + [z, g_j]) U(F/F')$$

Buradan $[z, g_j] \in g_i U(F/F')$ olduğu görülür. Sonuç olarak $z \in \text{Ann}(F/F'') \cap g_i U(F/F')$ olmak üzere otomorfizmlerin yapısını aşağıdaki formda ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned}\varphi : g_i &\rightarrow g_i \\ g_j &\rightarrow g_j + [z, g_j]\end{aligned}$$

Şimdi $z \notin \text{Ann}(F/F'')$ alalım. φ bir otomorfizm ise $\{g_i - [g_i, z], g_j + [z, g_j]\}$ kümesinin bir üreteç kümesidir ve

$$\begin{aligned}F/F'' &= g_i U(F/F') \oplus g_j U(F/F') \\ F/F'' &= (g_i - [g_i, z]) U(F/F') \oplus (g_j + [z, g_j]) U(F/F')\end{aligned}$$

$[z, g_j] \in g_i U(F/F')$ ve $z \in g_i U(F/F')$ olduğu görülür. Sonuç olarak $z \in F'/F'' \cap g_i U(F/F')$ olmak üzere otomorfizmlerin yapısını aşağıdaki formda ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned}\varphi : g_i &\rightarrow g_i - [g_i, z] \\ g_j &\rightarrow g_j + [z, g_j]\end{aligned}$$

b) $[[\bar{x}_k, u_i], \bar{x}_j] = [[\bar{x}_k, u_j], \bar{x}_i]$ eşitliğinden $[[\bar{x}_k, u_1], \bar{x}_j] = [[\bar{x}_k, u_j], \bar{x}_1]$ dir ve her $j, k = 2$ için

$$\begin{aligned}[[\bar{x}_k, u_j], \bar{x}_1] &= [[\bar{x}_k, u_1], \bar{x}_j] \\ &= [[\bar{x}_k, [z, \bar{x}_1]], \bar{x}_j] \\ &= [[[\bar{x}_k, z], \bar{x}_1], \bar{x}_j] \\ &= [[[\bar{x}_k, z], \bar{x}_j], \bar{x}_1] \\ &= [[\bar{x}_k, [z, \bar{x}_j]], \bar{x}_1]\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $j, k = 2$ olup $u_j = [z, \bar{x}_j]$ veya $u_j = [z, \bar{g}_j]$ dir. Eğer $z \in F'/F''$, $r_{\bar{x}_1} \in U(F/F')$ için $u_1 = z.r_{\bar{x}_1}$ ise her $j \in \{1, 2\}$ için $\varphi(g_j) = g_j + [z, g_j]$ dir. Eğer φ bir

otomorfizm ise $\{g_1 + [z, g_1], g_2 + [z, g_2]\}$ kümesinin bir üreteç kümesi olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} F/F'' &= g_1 U(F/F') \oplus g_2 U(F/F') \\ &= (g_1 + [z, g_1]) U(F/F') \oplus (g_2 + [z, g_2]) U(F/F') \end{aligned}$$

elde edilir. Her $x, y \in \{g_1, g_2\}$ için Teorem 4.3'den z 'nin $[x, y] - [y, x]$ ve $x \neq y$ formundaki elemanlar tarafından üretildiğini biliyoruz. $n = 2$ için $z, [g_1, g_2] - [g_2, g_1]$ olmak üzere otomorfizmler

$$\varphi : g_j \rightarrow g_j + [z, g_j]$$

formuna sahiptir.

DURUM 3 : u_j elemanı sadece $\bar{x}_i$ tarafından üretilsin. Her $u_j \in \text{Ann}(F/F'')$ için $[\bar{x}_i, u_j] = 0$ olduğunu biliyoruz. Leibniz özdeşliğinden $[u_i, \bar{x}_j] = 0$ ve $u_i = 0$ dır. Böylece homomorfizmleri aşağıdaki formda ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} \varphi : g_i &\rightarrow g_i \\ g_j &\rightarrow g_j + u_j, \end{aligned}$$

burada $u_j \in \text{Ann}(F/F'')$ sadece $\bar{x}_i$ tarafından üretilmektedir. Ayrıca φ 'nin ters homomorfizmini

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : g_i &\rightarrow g_i \\ g_j &\rightarrow g_j + u_j. \end{aligned}$$

olarak tanımlayabiliriz. $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1$ ve $\varphi \circ \varphi^{-1} = 1$ olduğundan φ bir otomorfizmdir.

DURUM 4 : u_j sadece $\bar{x}_j$ tarafından üretilsin. Her $u_j \in \text{Ann}(F/F'')$ için

$$[u_i, \bar{x}_j] = -[\bar{x}_i, u_j] = 0$$

elde ederiz. $u_i = 0$ olup aşağıdaki homomorfizmi elde ederiz.

$$\begin{aligned}\varphi : g_i &\rightarrow g_i \\ g_j &\rightarrow g_j + u_j,\end{aligned}$$

burada $u_j \in \text{Ann}(F/F'')$ elemanları sadece $\bar{x}_j$ tarafından üretilmektedir. $u_j \notin \bar{x}_i U(F/F')$ olduğundan ve Teorem 4.3'ten bu homomorfizme karşılık gelen matrisin tersinir olmadığı elde ederiz. Dolayısıyla φ bir otomorfizm değildir.

Artık Teorem 4.3 ve Teorem 4.8'i kullanarak ana teoremimizi verebiliriz.

Teorem 4.9 F/F'' , $\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2$ tarafından üretilen serbest metabelyen Leibniz cebiri olsun. F/F'' 'nin otomorfizmler grubu, $GL(2, K)$ genel lineer grubu, $v \in F'/F''$ olmak üzere e^{adv} formundaki otomorfizmler ve aşağıda tanımlanan otomorfizmler tarafından belirlenir.

$$\begin{aligned}\tau : \bar{x}_1 &\rightarrow \bar{x}_1 - [\bar{x}_1, z] \\ \bar{x}_2 &\rightarrow \bar{x}_2 + [z, \bar{x}_2]\end{aligned}$$

burada $z \in F'/F'' \cap \bar{x}_1 U(F/F')$ dir,

$$\begin{aligned}\gamma : \bar{x}_1 &\rightarrow \bar{x}_1 + u \\ \bar{x}_2 &\rightarrow \bar{x}_2\end{aligned}$$

burada u elemanları sadece $\bar{x}_2$ 'ler tarafından üretilmek üzere $u \in \text{Ann}(F/F'')$ dür,

$$\beta : \bar{x}_i \rightarrow \bar{x}_i + [z, \bar{x}_i]$$

burada $z, [\bar{x}_1, \bar{x}_2] - [\bar{x}_2, \bar{x}_1]$ formundaki elemanlar tarafından üretilir.

İspat: K üzerindeki genel lineer grup $GL(2, K)$ olmak üzere $g = (g_{ij}) \in GL(2, K)$ alalım. Her $j = 1, 2$ için

$$g : x_j \rightarrow \sum g_{ij} \cdot x_i$$

dönüşümü F/F'' 'nin bir cebir otomorfizmine tek türlü genişletilebilir ve $GL(2, K)$, $U(F/F')$ üzerine bir cebir otomorfizmler grubu olarak etki eder. $g \in GL(2, K)$ ve $f \in U(F/F')$ olmak üzere $g \cdot f$ etkisi

$$g \cdot x_j = \sum g_{ij} \cdot x_i$$

dir. Böylece, $GL(2, K)$ genel lineer grubunu $Aut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun bir alt grubu olarak düşünebiliriz. $IAut(F/F'')$, $Aut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun bir normal alt grubu ve

$$GL(2, K) \cap IAut(F/F'') = \{1\}$$

olduğundan $Aut(F/F'')$ otomorfizmler grubu, $IAut(F/F'')$ normal alt grubu ile $GL(2, K)$ genel lineer grubun yarı direkt çarpımıdır. O halde, $\phi \in IAut(F/F'')$ ve $g \in GL(2, K)$ olmak üzere F/F'' cebirinin her α otomorfizmi $\phi \circ g$ formunda tek türlü yazılır. Teorem 4.3'ten $IAut(F/F'')$, G ye izomorfiktir. Bu izomorfizmi

$$\eta : IAut(F/F'') \longrightarrow G$$

olarak gösterebiliriz. Her $b \in GL(2, K)$, $IAut(F/F'')$ 'nin bir ϕ otomorfizmine karşılık gelen matris

$$E_2 + (\phi_{ij}) = E_2 + A_2 Q_2$$

ve η^{-1} ise η dönüşümünün tersini ifade etmek üzere $GL(2, K)$ genel lineer grubunun $IAut(F/F'')$ üzerindeki etkisini

$$b \circ \phi \circ b^{-1} = \eta^{-1} (E + b(b \cdot (\phi_{ij}))b^{-1})$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Buradan $IAut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun bir $GL(2, K)$ -modül olduğu elde edilir. Teorem 4.8 ile ispat tamamlanır.

Aşağıda 2 ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin bazı otomorfizm örnekleri verilmiştir.

Örnek 4.10 F/F'' üreteçleri $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ olan bir serbest metabelyen Leibniz cebiri olmak üzere

i)

$$\omega : \overline{x_1} \rightarrow \overline{x_1}$$

$$\overline{x_2} \rightarrow \overline{x_2} + [[\overline{x_1}, \overline{x_1}], \overline{x_2}]$$

olmak üzere $\omega \in \text{Aut}(F/F'')$ dür.

ii)

$$\mu : \overline{x_1} \rightarrow \overline{x_1} + [\overline{x_2}, \overline{x_2}]$$

$$\overline{x_2} \rightarrow \overline{x_2}$$

olmak üzere $\mu \in \text{Aut}(F/F'')$ dür.

iii)

$$\varepsilon : \overline{x_1} \rightarrow \overline{x_1} + [[\overline{x_1}, \overline{x_2}] - [\overline{x_2}, \overline{x_1}], \overline{x_1}]$$

$$\overline{x_2} \rightarrow \overline{x_2} + [[\overline{x_1}, \overline{x_2}] - [\overline{x_2}, \overline{x_1}], \overline{x_2}]$$

olmak üzere $\varepsilon \in \text{Aut}(F/F'')$ dür.



5. ÜÇ RANKLI SERBEST METABELYEN LEİBNİZ CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİ

Bu bölümde üreteçleri $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ ve $\bar{x}_3$ olan üç ranklı F/F'' serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin otomorfizmlerinin yapısı incelenmiştir. Teorem 5.1 ve Teorem 5.2'de, $IAut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun yapısı tanımlanmıştır. Teorem 5.3'te, $Aut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun yapısı ifade edilmiştir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} l_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_1} & +r_{\bar{x}_2} & r_{\bar{x}_3} & 0 & 0 & 0 & l_{\bar{x}_3} & 0 & 0 \\ 0 & l_{\bar{x}_1} & 0 & +r_{\bar{x}_1} & l_{\bar{x}_2} + r_{\bar{x}_2} & r_{\bar{x}_3} & 0 & l_{\bar{x}_3} & 0 \\ 0 & 0 & l_{\bar{x}_1} & 0 & 0 & l_{\bar{x}_2} & r_{\bar{x}_1} & r_{\bar{x}_2} & l_{\bar{x}_3} + r_{\bar{x}_3} \end{bmatrix}$$

A_3 yukarıdaki forma sahip 3×9 tipinde bir sabit matris ve E_3 , 3×3 tipinde birim matris, Q_3 bileşenleri $U(F/F'')$ 'den gelen herhangi bir matris olsun.

Teorem 5.1 F/F'' , üç ranklı serbest metabelyen Leibniz cebiri ve $E_3 + A_3 Q_3$ formundaki tüm tersinir matrislerin grubu G olmak üzere $IAut(F/F'') \cong G$ dir.

İspat: $\implies F/F''$, K üzerinde $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ tarafından üretilen bir serbest metabelyen Leibniz cebiri ve $IAut(F/F'')$ 'nin elemanları, F/F'' 'nin modulo F'/F'' 'ne göre birim gibi davranan otomorfizmleridir. F'/F'' , F/F'' 'nin bir ideali olup $\bar{r}_1 = [\bar{x}_1, \bar{x}_1], \bar{r}_2 = [\bar{x}_1, \bar{x}_2], \bar{r}_3 = [\bar{x}_2, \bar{x}_1], \bar{r}_4 = [\bar{x}_2, \bar{x}_2], \bar{r}_5 = [\bar{x}_1, \bar{x}_3], \bar{r}_6 = [\bar{x}_3, \bar{x}_1], \bar{r}_7 = [\bar{x}_2, \bar{x}_3], \bar{r}_8 = [\bar{x}_3, \bar{x}_2], \bar{r}_9 = [\bar{x}_3, \bar{x}_3]$ serbest üreteçlerinin kümesi tarafından üretilir. Buna göre $IAut(F/F'')$ 'nin elemanlarının matris formunu bulacağız. O halde $\alpha \in IAut(F/F'')$ alalım. $i = 1, 2, 3$ ve $q_{ij} \in U(F/F')$ için

$$\alpha(\bar{x}_i) = \bar{x}_i + \sum_{j=1}^9 \bar{r}_j * q_{ij}$$

formunda yazabiliriz. Buna göre

$$\alpha(\bar{x}_1) = \bar{x}_1 + \bar{r}_1 * q_{11} + \bar{r}_2 * q_{12} + \bar{r}_3 * q_{13} + \bar{r}_4 * q_{14} + \bar{r}_5 * q_{15} + \bar{r}_6 * q_{16} + \bar{r}_7 * q_{17} + \bar{r}_8 * q_{18} + \bar{r}_9 * q_{19} \dots \dots \dots (4)$$

$$\alpha(\bar{x}_2) = \bar{x}_2 + \bar{r}_1 * q_{21} + \bar{r}_2 * q_{22} + \bar{r}_3 * q_{23} + \bar{r}_4 * q_{24} + \bar{r}_5 * q_{25} + \bar{r}_6 * q_{26} + \bar{r}_7 * q_{27} + \bar{r}_8 * q_{28} + \bar{r}_9 * q_{29} \dots \dots \dots (5)$$

$$\alpha(\bar{x}_3) = \bar{x}_3 + \bar{r}_1 * q_{31} + \bar{r}_2 * q_{32} + \bar{r}_3 * q_{33} + \bar{r}_4 * q_{34} + \bar{r}_5 * q_{35} + \bar{r}_6 * q_{36} + \bar{r}_7 * q_{37} + \bar{r}_8 * q_{38} + \bar{r}_9 * q_{39} \dots \dots \dots (6)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerin her iki tarafına μ uygulayalım.

$$\mu\alpha(\bar{x}_1) = \mu(\bar{x}_1 + \bar{r}_1 * q_{11} + \bar{r}_2 * q_{12} + \bar{r}_3 * q_{13} + \bar{r}_4 * q_{14} + \bar{r}_5 * q_{15} + \bar{r}_6 * q_{16} + \bar{r}_7 * q_{17} + \bar{r}_8 * q_{18} + \bar{r}_9 * q_{19})$$

$$\begin{aligned} \mu\alpha(\bar{x}_1) &= \bar{\bar{x}}_1 + a_1 \\ &+ [\bar{\bar{x}}_1 + a_1, \bar{\bar{x}}_1 + a_1] * q_{11} + [\bar{\bar{x}}_1 + a_1, \bar{\bar{x}}_2 + a_2] * q_{12} \\ &+ [\bar{\bar{x}}_2 + a_2, \bar{\bar{x}}_1 + a_1] * q_{13} + [\bar{\bar{x}}_2 + a_2, \bar{\bar{x}}_2 + a_2] * q_{14} \\ &+ [\bar{\bar{x}}_1 + a_1, \bar{\bar{x}}_3 + a_3] * q_{15} + [\bar{\bar{x}}_3 + a_3, \bar{\bar{x}}_1 + a_1] * q_{16} \\ &+ [\bar{\bar{x}}_2 + a_2, \bar{\bar{x}}_3 + a_3] * q_{17} + [\bar{\bar{x}}_3 + a_3, \bar{\bar{x}}_2 + a_2] * q_{18} \\ &+ [\bar{\bar{x}}_3 + a_3, \bar{\bar{x}}_3 + a_3] * q_{19} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu\alpha(\bar{x}_1) &= \bar{\bar{x}}_1 + a_1 \\ &+ ([\bar{\bar{x}}_1, a_1] + [a_1, \bar{\bar{x}}_1]) * q_{11} + ([\bar{\bar{x}}_1, a_2] + [a_1, \bar{\bar{x}}_2]) * q_{12} \\ &+ ([\bar{\bar{x}}_2, a_1] + [a_2, \bar{\bar{x}}_1]) * q_{13} + ([\bar{\bar{x}}_2, a_2] + [a_2, \bar{\bar{x}}_2]) * q_{14} \\ &+ ([\bar{\bar{x}}_1, a_3] + [a_1, \bar{\bar{x}}_3]) * q_{15} + ([\bar{\bar{x}}_3, a_1] + [a_3, \bar{\bar{x}}_1]) * q_{16} \\ &+ ([\bar{\bar{x}}_2, a_3] + [a_2, \bar{\bar{x}}_3]) * q_{17} + ([\bar{\bar{x}}_3, a_2] + [a_3, \bar{\bar{x}}_2]) * q_{18} \\ &+ ([\bar{\bar{x}}_3, a_3] + [a_3, \bar{\bar{x}}_3]) * q_{19} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu\alpha(\bar{x}_1) &= \bar{\bar{x}}_1 + a_1 \\ &+ a_1 * (l_{\bar{\bar{x}}_1} q_{11} + r_{\bar{\bar{x}}_1} q_{11} + r_{\bar{\bar{x}}_2} q_{12} + l_{\bar{\bar{x}}_2} q_{13} + r_{\bar{\bar{x}}_3} q_{15} + l_{\bar{\bar{x}}_3} q_{16}) \\ &+ a_2 * (l_{\bar{\bar{x}}_1} q_{12} + r_{\bar{\bar{x}}_1} q_{13} + l_{\bar{\bar{x}}_2} q_{14} + r_{\bar{\bar{x}}_2} q_{14} + r_{\bar{\bar{x}}_3} q_{17} + l_{\bar{\bar{x}}_3} q_{18}) \\ &+ a_3 * (l_{\bar{\bar{x}}_1} q_{15} + r_{\bar{\bar{x}}_1} q_{16} + l_{\bar{\bar{x}}_2} q_{17} + r_{\bar{\bar{x}}_2} q_{18} + l_{\bar{\bar{x}}_3} q_{19} + r_{\bar{\bar{x}}_3} q_{19}) \end{aligned}$$

$$\mu\alpha(\bar{x}_2) = \mu(\bar{x}_2 + \bar{r}_1 * q_{21} + \bar{r}_2 * q_{22} + \bar{r}_3 * q_{23} + \bar{r}_4 * q_{24} + \bar{r}_5 * q_{25} + \bar{r}_6 * q_{26} + \bar{r}_7 * q_{27} + \bar{r}_8 * q_{28} + \bar{r}_9 * q_{29})$$

$$\begin{aligned}\mu\alpha(\bar{x}_2) &= \bar{x}_2 + a_2 \\ &+ [\bar{x}_1 + a_1, \bar{x}_1 + a_1] * q_{21} + [\bar{x}_1 + a_1, \bar{x}_2 + a_2] * q_{22} \\ &+ [\bar{x}_2 + a_2, \bar{x}_1 + a_1] * q_{23} + [\bar{x}_2 + a_2, \bar{x}_2 + a_2] * q_{24} \\ &+ [\bar{x}_1 + a_1, \bar{x}_3 + a_3] * q_{25} + [\bar{x}_3 + a_3, \bar{x}_1 + a_1] * q_{26} \\ &+ [\bar{x}_2 + a_2, \bar{x}_3 + a_3] * q_{27} + [\bar{x}_3 + a_3, \bar{x}_2 + a_2] * q_{28} \\ &+ [\bar{x}_3 + a_3, \bar{x}_3 + a_3] * q_{29}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu\alpha(\bar{x}_2) &= \bar{x}_2 + a_2 \\ &+ ([\bar{x}_1, a_1] + [a_1, \bar{x}_1]) * q_{21} + ([\bar{x}_1, a_2] + [a_1, \bar{x}_2]) * q_{22} \\ &+ ([\bar{x}_2, a_1] + [a_2, \bar{x}_1]) * q_{23} + ([\bar{x}_2, a_2] + [a_2, \bar{x}_2]) * q_{24} \\ &+ ([\bar{x}_1, a_3] + [a_1, \bar{x}_3]) * q_{25} + ([\bar{x}_3, a_1] + [a_3, \bar{x}_1]) * q_{26} \\ &+ ([\bar{x}_2, a_3] + [a_2, \bar{x}_3]) * q_{27} + ([\bar{x}_3, a_2] + [a_3, \bar{x}_2]) * q_{28} \\ &+ ([\bar{x}_3, a_3] + [a_3, \bar{x}_3]) * q_{29}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu\alpha(\bar{x}_2) &= \bar{x}_2 + a_2 \\ &+ a_1 * (l_{\bar{x}_1} q_{21} + r_{\bar{x}_1} q_{21} + r_{\bar{x}_2} q_{22} + l_{\bar{x}_2} q_{23} + r_{\bar{x}_3} q_{25} + l_{\bar{x}_3} q_{26}) \\ &+ a_2 * (l_{\bar{x}_1} q_{22} + r_{\bar{x}_1} q_{23} + l_{\bar{x}_2} q_{24} + r_{\bar{x}_2} q_{24} + r_{\bar{x}_3} q_{27} + l_{\bar{x}_3} q_{28}) \\ &+ a_3 * (l_{\bar{x}_1} q_{25} + r_{\bar{x}_1} q_{26} + l_{\bar{x}_2} q_{27} + r_{\bar{x}_2} q_{28} + l_{\bar{x}_3} q_{29} + r_{\bar{x}_3} q_{29})\end{aligned}$$

$$\mu\alpha(\bar{x}_3) = \mu(\bar{x}_3 + \bar{r}_1 * q_{31} + \bar{r}_2 * q_{32} + \bar{r}_3 * q_{33} + \bar{r}_4 * q_{34} + \bar{r}_5 * q_{35} + \bar{r}_6 * q_{36} + \bar{r}_7 * q_{37} + \bar{r}_8 * q_{38} + \bar{r}_9 * q_{39})$$

$$\begin{aligned}
 \mu\alpha(\bar{x}_3) &= \bar{x}_3 + a_3 \\
 &+ [\bar{x}_1 + a_1, \bar{x}_1 + a_1] * q_{31} + [\bar{x}_1 + a_1, \bar{x}_2 + a_2] * q_{32} \\
 &+ [\bar{x}_2 + a_2, \bar{x}_1 + a_1] * q_{33} + [\bar{x}_2 + a_2, \bar{x}_2 + a_2] * q_{34} \\
 &+ [\bar{x}_1 + a_1, \bar{x}_3 + a_3] * q_{35} + [\bar{x}_3 + a_3, \bar{x}_1 + a_1] * q_{36} \\
 &+ [\bar{x}_2 + a_2, \bar{x}_3 + a_3] * q_{37} + [\bar{x}_3 + a_3, \bar{x}_2 + a_2] * q_{38} \\
 &+ [\bar{x}_3 + a_3, \bar{x}_3 + a_3] * q_{39}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu\alpha(\bar{x}_3) &= \bar{x}_3 + a_3 \\
 &+ ([\bar{x}_1, a_1] + [a_1, \bar{x}_1]) * q_{31} + ([\bar{x}_1, a_2] + [a_1, \bar{x}_2]) * q_{32} \\
 &+ ([\bar{x}_2, a_1] + [a_2, \bar{x}_1]) * q_{33} + ([\bar{x}_2, a_2] + [a_2, \bar{x}_2]) * q_{34} \\
 &+ ([\bar{x}_1, a_3] + [a_1, \bar{x}_3]) * q_{35} + ([\bar{x}_3, a_1] + [a_3, \bar{x}_1]) * q_{36} \\
 &+ ([\bar{x}_2, a_3] + [a_2, \bar{x}_3]) * q_{37} + ([\bar{x}_3, a_2] + [a_3, \bar{x}_2]) * q_{38} \\
 &+ ([\bar{x}_3, a_3] + [a_3, \bar{x}_3]) * q_{39}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu\alpha(\bar{x}_3) &= \bar{x}_3 + a_3 \\
 &+ a_1 * (l_{\bar{x}_1} q_{31} + r_{\bar{x}_1} q_{31} + r_{\bar{x}_2} q_{32} + l_{\bar{x}_2} q_{33} + r_{\bar{x}_3} q_{35} + l_{\bar{x}_3} q_{36}) \\
 &+ a_2 * (l_{\bar{x}_1} q_{32} + r_{\bar{x}_1} q_{33} + l_{\bar{x}_2} q_{34} + r_{\bar{x}_2} q_{34} + r_{\bar{x}_3} q_{37} + l_{\bar{x}_3} q_{38}) \\
 &+ a_3 * (l_{\bar{x}_1} q_{35} + r_{\bar{x}_1} q_{36} + l_{\bar{x}_2} q_{37} + r_{\bar{x}_2} q_{38} + l_{\bar{x}_3} q_{39} + r_{\bar{x}_3} q_{39})
 \end{aligned}$$

Böylece aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \mu\alpha(\bar{x}_1) &= \bar{x}_1 + a_1 \\
 &+ a_1 * (l_{\bar{x}_1} q_{11} + r_{\bar{x}_1} q_{11} + r_{\bar{x}_2} q_{12} + l_{\bar{x}_2} q_{13} + r_{\bar{x}_3} q_{15} + l_{\bar{x}_3} q_{16}) \\
 &+ a_2 * (l_{\bar{x}_1} q_{12} + r_{\bar{x}_1} q_{13} + l_{\bar{x}_2} q_{14} + r_{\bar{x}_2} q_{14} + r_{\bar{x}_3} q_{17} + l_{\bar{x}_3} q_{18}) \\
 &+ a_3 * (l_{\bar{x}_1} q_{15} + r_{\bar{x}_1} q_{16} + l_{\bar{x}_2} q_{17} + r_{\bar{x}_2} q_{18} + l_{\bar{x}_3} q_{19} + r_{\bar{x}_3} q_{19}) \\
 \mu\alpha(\bar{x}_2) &= \bar{x}_2 + a_2 \\
 &+ a_1 * (l_{\bar{x}_1} q_{21} + r_{\bar{x}_1} q_{21} + r_{\bar{x}_2} q_{22} + l_{\bar{x}_2} q_{23} + r_{\bar{x}_3} q_{25} + l_{\bar{x}_3} q_{26}) \\
 &+ a_2 * (l_{\bar{x}_1} q_{22} + r_{\bar{x}_1} q_{23} + l_{\bar{x}_2} q_{24} + r_{\bar{x}_2} q_{24} + r_{\bar{x}_3} q_{27} + l_{\bar{x}_3} q_{28}) \\
 &+ a_3 * (l_{\bar{x}_1} q_{25} + r_{\bar{x}_1} q_{26} + l_{\bar{x}_2} q_{27} + r_{\bar{x}_2} q_{28} + l_{\bar{x}_3} q_{29} + r_{\bar{x}_3} q_{29}) \\
 \mu\alpha(\bar{x}_3) &= \bar{x}_3 + a_3 \\
 &+ a_1 * (l_{\bar{x}_1} q_{31} + r_{\bar{x}_1} q_{31} + r_{\bar{x}_2} q_{32} + l_{\bar{x}_2} q_{33} + r_{\bar{x}_3} q_{35} + l_{\bar{x}_3} q_{36}) \\
 &+ a_2 * (l_{\bar{x}_1} q_{32} + r_{\bar{x}_1} q_{33} + l_{\bar{x}_2} q_{34} + r_{\bar{x}_2} q_{34} + r_{\bar{x}_3} q_{37} + l_{\bar{x}_3} q_{38}) \\
 &+ a_3 * (l_{\bar{x}_1} q_{35} + r_{\bar{x}_1} q_{36} + l_{\bar{x}_2} q_{37} + r_{\bar{x}_2} q_{38} + l_{\bar{x}_3} q_{39} + r_{\bar{x}_3} q_{39})
 \end{aligned}$$

Önerme 3.5'teki $\mu\alpha = \tilde{\alpha}\mu$ eşitliğinden ve $\overline{Aut\bar{W}}$ 'nin tanımından $\tilde{\alpha}$ 'yı, $I_{F'/F''}$ 'ye kısıtlayarak karşılık gelen aşağıdaki matris formunu elde ederiz.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= (l_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_1})q_{11} + r_{\bar{x}_2}q_{12} + l_{\bar{x}_2}q_{13} + r_{\bar{x}_3}q_{15} + l_{\bar{x}_3}q_{16} \\
 B_{12} &= l_{\bar{x}_1}q_{12} + r_{\bar{x}_1}q_{13} + (l_{\bar{x}_2} + r_{\bar{x}_2})q_{14} + r_{\bar{x}_3}q_{17} + l_{\bar{x}_3}q_{18} \\
 B_{13} &= l_{\bar{x}_1}q_{15} + r_{\bar{x}_1}q_{16} + l_{\bar{x}_1}q_{17} + r_{\bar{x}_2}q_{18} + (l_{\bar{x}_3} + r_{\bar{x}_3})q_{19} \\
 B_{21} &= (l_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_1})q_{21} + r_{\bar{x}_2}q_{22} + l_{\bar{x}_2}q_{23} + r_{\bar{x}_3}q_{25} + l_{\bar{x}_3}q_{26} \\
 B_{22} &= l_{\bar{x}_1}q_{22} + r_{\bar{x}_1}q_{23} + (l_{\bar{x}_2} + r_{\bar{x}_2})q_{24} + r_{\bar{x}_3}q_{27} + l_{\bar{x}_3}q_{28} \\
 B_{23} &= l_{\bar{x}_1}q_{25} + r_{\bar{x}_1}q_{26} + l_{\bar{x}_2}q_{27} + r_{\bar{x}_2}q_{28} + (l_{\bar{x}_3} + r_{\bar{x}_3})q_{29} \\
 B_{31} &= (l_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_1})q_{31} + r_{\bar{x}_2}q_{32} + l_{\bar{x}_2}q_{33} + r_{\bar{x}_3}q_{35} + l_{\bar{x}_3}q_{36} \\
 B_{32} &= l_{\bar{x}_1}q_{32} + r_{\bar{x}_1}q_{33} + (l_{\bar{x}_2} + r_{\bar{x}_2})q_{34} + r_{\bar{x}_3}q_{37} + l_{\bar{x}_3}q_{38} \\
 B_{33} &= l_{\bar{x}_1}q_{33} + r_{\bar{x}_1}q_{36} + l_{\bar{x}_2}q_{37} + r_{\bar{x}_2}q_{38} + (l_{\bar{x}_3} + r_{\bar{x}_3})q_{39}
 \end{aligned}$$

M^T , M 'nin transpozu olmak üzere $\tilde{\alpha}$ otomorfizm olduğundan M^T , tersinirdir. $M^T = E_3 + A_3Q_3$ formundadır. Burada

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} l_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_1} & r_{\bar{x}_2} & r_{\bar{x}_3} & 0 & 0 & 0 & l_{\bar{x}_3} & 0 & 0 \\ 0 & l_{\bar{x}_1} & 0 & r_{\bar{x}_1} & l_{\bar{x}_2} + r_{\bar{x}_2} & r_{\bar{x}_3} & 0 & l_{\bar{x}_3} & 0 \\ 0 & 0 & l_{\bar{x}_1} & 0 & 0 & l_{\bar{x}_2} & r_{\bar{x}_1} & r_{\bar{x}_2} & l_{\bar{x}_3} + r_{\bar{x}_3} \end{bmatrix}_{3 \times 9}$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} \\ q_{15} & q_{25} & q_{35} \\ q_{15} & q_{25} & q_{35} \\ q_{16} & q_{26} & q_{36} \\ q_{17} & q_{27} & q_{37} \\ q_{18} & q_{28} & q_{38} \\ q_{19} & q_{29} & q_{39} \end{bmatrix}_{9 \times 3}$$

$\Leftarrow$: $C = E_3 + A_3 Q_3$ tersinir olsun ve C^T ile C matrisinin transpozunu gösterelim. W 'nin bir $\tilde{\alpha}$ otomorfizmini alalım. Eğer $\tilde{\alpha}'$ 'yi, $I_{F'/F''}$ 'ye kısıtlarsak C^T bu otomorfizmi belirler. Buradan

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(\bar{x}_i) &= \bar{x}_i \\ \tilde{\alpha}(a_i) &= a_i + \sum \sum a_k \cdot a_{kj} \cdot q_{ij} \end{aligned}$$

elde edilir. $\tilde{\alpha}\mu = \mu\alpha$ eşitliğinden

$$\tilde{\alpha}\mu(\bar{x}_i) = \tilde{\alpha}(\bar{x}_i + a_i) = \bar{x}_i + a_i + \sum \sum a_k \cdot a_{kj} \cdot q_{ij} = \mu(\bar{x}_i + \sum_{j=1}^9 \bar{r}_j \cdot q_{ij})$$

elde edilir. Böylece F/F'' 'nin modulo F'/F'' 'ne göre birim olan bir α otomorfizmi vardır ve α otomorfizmi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\alpha(x_i) = \bar{x}_i + \sum \bar{r}_j \cdot q_{ij}$$

C matrisi α tarafından tek türlü tanımlanır. Böylece $IAut F/F''$ otomorfizm grubu, $C = E_3 + A_3 Q_3$ formundaki tüm tersinir matrislerin grubuna izomorftur.

Sonuç 5.2 $j = 1, 2, \dots, 9$ için $q_{15} = r_{\bar{x}_1}$ dışında diğer $q_{ij} = 0$ olmak üzere M^T matrisine karşılık gelen τ_1 otomorfizmi aşağıdaki formdadır.

$$\tau_1 : \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 + [[\bar{x}_2, \bar{x}_2], \bar{x}_1]$$

$$\bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2$$

$$\bar{x}_3 \rightarrow \bar{x}_3$$

İspat: Eğer $j = 1, 2, \dots, 9$ için $q_{15} = r_{\bar{x}_1}$ dışında diğer $q_{ij} = 0$ ise M^T matrisi aşağıdaki forma sahiptir.ve

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (l_{\bar{x}_2} + r_{\bar{x}_2})r_{\bar{x}_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & (l_{\bar{x}_2} + r_{\bar{x}_2})r_{\bar{x}_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. $\det M^T = 1$ olduğundan M^T matrisine karşılık gelen bir otomorfizm vardır ve

$$\zeta_1 : \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 + [[\bar{x}_2, \bar{x}_2], \bar{x}_1]$$

$$\bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2$$

$$\bar{x}_3 \rightarrow \bar{x}_3$$

dir.

Sonuç 5.3 $j = 1, 2, \dots, 9$ için $q_{31} = r_{\bar{x}_3}$ dışında diğer $q_{ij} = 0$ olmak üzere M^T matrisine karşılık gelen τ_2 otomorfizmi aşağıdaki formdadır.

$$\tau_2 : \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1$$

$$\bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2$$

$$\bar{x}_3 \rightarrow \bar{x}_3 + [[\bar{x}_1, \bar{x}_1], \bar{x}_3]$$

İspat: Eğer $j = 1, 2, \dots, 9$ için $q_{31} = r_{\bar{x}_3}$ dışında diğer $q_{ij} = 0$ ise M^T matrisi aşağıdaki gibidir.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (r_{\bar{x}_1} + l_{\bar{x}_1})r_{\bar{x}_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (r_{\bar{x}_1} + l_{\bar{x}_1})r_{\bar{x}_3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det M^T = 1$ olduğundan M^T matrisine karşılık gelen bir otomorfizm vardır ve

$$\begin{aligned} \zeta_1 : \bar{x}_1 &\rightarrow \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 &\rightarrow \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 &\rightarrow \bar{x}_3 + [[\bar{x}_1, \bar{x}_1], \bar{x}_3] \end{aligned}$$

Sonuç 5.4 $j = 1, 2, \dots, 9$ için $q_{21} = r_{\bar{x}_2}$ ve $q_{31} = r_{\bar{x}_3}$, diğer $q_{ij} = 0$ olmak üzere M^T matrisine karşılık gelen τ_3 otomorfizmi aşağıdaki formdadır.

$$\begin{aligned} \tau_3 : \bar{x}_1 &\rightarrow \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 &\rightarrow \bar{x}_2 + [[\bar{x}_1, \bar{x}_1], \bar{x}_2] \\ \bar{x}_3 &\rightarrow \bar{x}_3 + [[\bar{x}_1, \bar{x}_1], \bar{x}_3] \end{aligned}$$

İspat: Eğer $j = 1, 2, \dots, 9$ için $q_{21} = r_{\bar{x}_2}$ ve $q_{31} = r_{\bar{x}_3}$, diğer $q_{ij} = 0$ ise M^T matrisi aşağıdaki formdadır.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & (l_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_1})r_{\bar{x}_2} & (l_{\bar{x}_1} + r_{\bar{x}_1})r_{\bar{x}_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (l_{\overline{x_1}} + r_{\overline{x_1}})r_{\overline{x_2}} & 1 & 0 \\ (l_{\overline{x_1}} + r_{\overline{x_1}})r_{\overline{x_3}} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aşağıdaki teorem $IAut(F/F'')$ üreteçlerinin kümesini vermektedir.

Teorem 5.5 F/F'' , $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}\}$ tarafından üretilen serbest metabelyan Leibniz cebiri olsun. $IAut(F/F'')$, iç otomorfizmler ve aşağıdaki otomorfizmler tarafından üretilir.

$$\tau_2 : \overline{x_1} \rightarrow \overline{x_1} - [\overline{x_1}, z]$$

$$\overline{x_2} \rightarrow \overline{x_2} + [z, \overline{x_2}]$$

$$\overline{x_3} \rightarrow \overline{x_3} - [\overline{x_3}, z]$$

burada $z \in F'/F''$ ve $z \in \overline{x_1}U(F/F') \oplus \overline{x_3}U(F/F')$ dir,

$$\tau_1 : \overline{x_1} \rightarrow \overline{x_1} - [\overline{x_1}, z]$$

$$\overline{x_2} \rightarrow \overline{x_2} + [z, \overline{x_2}]$$

$$\overline{x_3} \rightarrow \overline{x_3} + [z, \overline{x_3}]$$

burada $x \neq y$ ve $x, y \in \{\overline{x_2}, \overline{x_3}\}$ olmak üzere $z, [x, y] - [y, x]$ formundaki elemanlar tarafından üretilir,

$$\tau_3 : \overline{x_1} \rightarrow \overline{x_1} + u$$

$$\overline{x_2} \rightarrow \overline{x_2}$$

$$\overline{x_3} \rightarrow \overline{x_3}$$

burada $i \neq 1$ ve $u \in Ann(F/F'')$, $\overline{x_i}$ 'ye bağlı $t \in \{2, 3\}$ dir,

$$\tau_4 : \overline{x_1} \rightarrow \overline{x_1} + v$$

$$\overline{x_2} \rightarrow \overline{x_2}$$

$$\overline{x_3} \rightarrow \overline{x_3}$$

$i \neq 1$, $v = v_1 * U(F/F')$, $v_1 = [\bar{x}_j, \bar{x}_k]$ ve $j \neq k \neq 1$ dir.

İspat: Üreteçleri $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ olan serbest metabelyan F/F'' Leibniz cebirinin bir otomorfizmi $\varphi : F/F'' \rightarrow F/F''$ olsun ve F'/F'' cebirinde birim gibi davransın. Her $h \in F/F''$ ve $x \in F'/F''$ için,

$$\varphi[h, x] = [\varphi(h), x] = [h, x]$$

dir. Böylece $[\varphi(h) - h, x] = 0$ dir. Buradan $\varphi(h) - h \in F'/F''$ dür. Ayrıca $(F/F'')/(F'/F'')$ üzerinde $\varphi(h) - h = 0$ dir. φ , F/F' cebiri üzerinde de birimdir. Sonuç 3.4'den $\mu : F/F'' \rightarrow (F'/F'')_{wr}(F/F')$ monomorfizm olduğundan F/F'' , $(F'/F'')_{wr}(F/F')$ içine gömülmektedir. Böylece F/F'' serbest metabelyan Leibniz cebirlerinin üreteçleri $(F'/F'')_{wr}(F/F')$ wreath çarpımının $i = 1, 2, 3$ için $g_i = \bar{\bar{x}}_i + a_i$ formundaki elemanlardır. Ayrıca her $u_i \in F'/F''$ için $\varphi(g_i) = g_i + u_i$ olup

$$\varphi[g_1, g_2] = [g_1, g_2]$$

dir.

$$\begin{aligned} \varphi[g_1, g_2] &= [\varphi(g_1), \varphi(g_2)] = [g_1 + u_1, g_2 + u_2] \\ &= [g_1, g_2] + [u_1, g_2] + [g_1, u_2] + [u_1, u_2] \end{aligned}$$

dir ve $[u_1, u_2]$ formundaki elemanlar F/F'' cebirinde sifra eşittir. $\varphi[g_1, g_2] = [g_1, g_2]$ eşitliğinden $[u_1, g_2] + [g_1, u_2] = 0$ elde edilir. Bu eşitlikte g_i yerine $\bar{\bar{x}}_i + a_i$ yazabiliriz. Böylece

$$[u_1, \bar{\bar{x}}_2] + [u_1, a_2] + [\bar{\bar{x}}_1, u_2] + [a_1, u_2] = 0$$

elde edilir. $[a_1, u_2]$ ve $[u_1, a_2]$ formundaki elemanlar F/F'' cebirinde sifra karşılık gelir. Dolayısıyla aşağıdaki eşitliğe ulaşırız.

$$[u_1, \bar{\bar{x}}_2] + [\bar{\bar{x}}_1, u_2] = 0$$

DURUM 1: Her $z \in F'/F'', l_{\bar{x}_2} \in U(F/F')$ için $u_2 = z.l_{\bar{x}_2}$ dir. Buradan $[u_1, \bar{x}_2] + [\bar{x}_1, u_2] = 0$ eşitliğinde $u_2 = z.l_{\bar{x}_2}$ yazalım.

$$\begin{aligned} [u_1, \bar{x}_2] &= -[\bar{x}_1, u_2] \\ &= -[\bar{x}_1, z.l_{\bar{x}_2}] \\ &= -[\bar{x}_1, [\bar{x}_2, z]] \\ &= [\bar{x}_1, [z, \bar{x}_2]] \end{aligned}$$

Leibniz özdeşliğinden $[\bar{x}_1, [z, \bar{x}_2]] = [[\bar{x}_1, z], \bar{x}_2] - [[\bar{x}_1, \bar{x}_2], z] = [[\bar{x}_1, z], \bar{x}_2]$ dir. Böylece $[u_1, \bar{x}_2] = [[\bar{x}_1, z], \bar{x}_2]$ ve

$$u_1 = [\bar{x}_1, z] = z.l_{\bar{x}_1} \text{ veya } u_1 = [g_1, z]$$

elde edilir. Açıkça görülüyor ki $u_1 = z.l_{\bar{x}_1}$ dir. Şimdi $\phi([g_1, g_3]) = [g_1, g_3]$ alalım ve benzer metodu kullanalım. Buradan $u_3 = z.l_{\bar{x}_3}$ elde ederiz. Ayrıca, F'/F'' 'nin diğer üreteçlerine ϕ uygularsak, her $i \in I$ için aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\phi(g_i) = g_i + [g_i, z]$$

$z \in F'/F''$ olduğundan ϕ bir iç otomorfizmdir.

DURUM 2: $z \in F'/F'', r_{\bar{x}_2} \in U(F/F')$ için $u_2 = z.r_{\bar{x}_2}$ olsun. $[u_1, \bar{x}_2] + [\bar{x}_1, u_2] = 0$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} [u_1, \bar{x}_2] &= -[\bar{x}_1, u_2] \\ &= -[\bar{x}_1, z.r_{\bar{x}_2}] \\ &= -[\bar{x}_1, [z, \bar{x}_2]] \\ &= -[[\bar{x}_1, z], \bar{x}_2] + [[\bar{x}_1, \bar{x}_2], z] \\ &= -[[\bar{x}_1, z], \bar{x}_2] \end{aligned}$$

elde edilir. $u_1 = -[\overline{x_1}, z]$ veya $u_1 = -[g_1, z]$ olduğu açıktır. Böylece

$$\begin{aligned}\varphi: g_1 &\rightarrow g_1 - [g_1, z] \\ g_2 &\rightarrow g_2 + [z, g_2]\end{aligned}$$

i) Eğer $\varphi([g_3, g_1]) = [g_3, g_1]$ alırsak $u_3 = -[\overline{x_3}, z]$ veya $u_3 = -[\overline{g_3}, z]$ elde ederiz.

$$\begin{aligned}\varphi: g_1 &\rightarrow g_1 - [g_1, z] \\ g_2 &\rightarrow g_2 + [z, g_2] \\ g_3 &\rightarrow g_3 - [g_3, z]\end{aligned}$$

Eğer φ bir otomorfizm ise $\{g_1 - [g_1, z], g_2 + [z, g_2], g_3 - [g_3, z]\}$ kümesinin bir üreteç kümesidir ve

$$\begin{aligned}F/F'' &= g_1 U(F/F') \oplus g_2 U(F/F') \oplus g_3 U(F/F') \\ &= (g_1 - [g_1, z]) U(F/F') \oplus (g_2 + [z, g_2]) U(F/F') \oplus (g_3 - [g_3, z]) U(F/F').\end{aligned}$$

olup $[z, g_2] \in g_1 U(F/F') \oplus g_3 U(F/F')$ dür ve Teorem 5.1'den $z \in g_1 U(F/F') \oplus g_3 U(F/F')$ elde edilir.

ii) Şimdi $\varphi([g_1, g_3]) = [g_1, g_3]$ alalım. Buradan $u_3 = [z, \overline{x_3}]$ veya $u_3 = [z, \overline{g_3}]$ dir. Eğer F'/F'' cebirinin diğer üreteçlerine φ uygularsak

$$\begin{aligned}\varphi: g_1 &\rightarrow g_1 - [g_1, z] \\ g_2 &\rightarrow g_2 + [z, g_2] \\ g_3 &\rightarrow g_3 + [z, g_3]\end{aligned}$$

elde ederiz. Eğer ϕ bir otomorfizm ise $\{g_1 - [g_1, z], g_2 + [z, g_2], g_3 + [z, g_3]\}$ kümesinin bir üreteç kümesi olduğunu da biliyoruz.

$$\begin{aligned} F/F'' &= g_1 U(F/F') \oplus g_2 U(F/F') \oplus g_3 U(F/F') \\ &= (g_1 - [g_1, z]) U(F/F') \oplus (g_2 + [z, g_2]) U(F/F') \oplus (g_3 + [z, g_3]) U(F/F') \end{aligned}$$

Teorem 5.1'den $z \in g_1 U(F/F')$, $x \neq y$ ve $x, y \in \{g_2, g_3\}$ olmak üzere $z, [x, y] - [y, x]$ formundaki elemanlar tarafından üretilir.

DURUM 3 : Her $u_1 \in \text{Ann}(F/F'')$ ve sadece g_t 'ye bağlı olmak üzere $t \neq 1$ için Leibniz özdeşliğinden $[\bar{x}_2, u_1] = 0$ olup $[u_2, \bar{x}_1] = 0$ dır. Buradan $u_2 = 0$ dır. $\phi([g_3, g_1]) = [g_3, g_1]$ alırsak Leibniz özdeşliğinden $[\bar{x}_3, u_1] = 0$ dır. Ayrıca $[u_3, \bar{x}_1] = 0$ olup $u_3 = 0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} \phi : g_1 &\rightarrow g_1 + u_1 \\ g_2 &\rightarrow g_2 \\ g_3 &\rightarrow g_3, \end{aligned}$$

burada $u_1 \in \text{Ann}(F/F'')$ olmak üzere u_1 sadece g_t 'ye bağlı ve $t \neq 1$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : g_1 &\rightarrow g_1 - u_1 \\ g_2 &\rightarrow g_2 \\ g_3 &\rightarrow g_3. \end{aligned}$$

$\phi^{-1} \circ \phi = 1$ ve $\phi \circ \phi^{-1} = 1$ olduğundan ϕ bir otomorfizmdir.

DURUM 4 : $u_2 = 0$ olsun. Buradan $u_1 = 0$ dır. u_3 elemanının formunu belirleyelim.

i) Eğer $u'_3 \in U(F/F')$ için $u_3 = [\bar{x}_1, \bar{x}_2].u'_3$ veya $u_3 = [\bar{x}_2, \bar{x}_1].u'_3$ ise Teorem

5.1'den ϕ bir otomorfizmdir ve

$$\begin{aligned}\phi : g_1 &\rightarrow g_1 \\ g_2 &\rightarrow g_2 \\ g_3 &\rightarrow g_3 + u_3\end{aligned}$$

formundadır. Burada $u'_3 \in U(F/F')$ için $u_3 = [g_1, g_2].u'_3$ veya $u_3 = [g_2, g_1].u'_3$ dir. Söz konusu otomorfizmler elementer otomorfizmlerdir.

ii) Eğer $u'_3 \in U(F/F')$ için u_3 elemanı $[\bar{x}_1, \bar{x}_3].u'_3$, $[\bar{x}_3, \bar{x}_1].u'_3$, $[\bar{x}_3, \bar{x}_2].u'_3$, $[\bar{x}_2, \bar{x}_3].u'_3$ veya $[\bar{x}_3, \bar{x}_3].u'_3$ formlarından birine sahip ise Teorem 5.1'den ϕ bir otomorfizm değildir.

iii) Eğer $u'_3 \in U(F/F')$ için $t \neq 3$ olmak üzere $u_3 = [\bar{x}_t, \bar{x}_t].u'_3$ ise Durum 3'teki ile benzer sonuç elde edilir.

Şimdi çalışmanın ana teoremini verebiliriz.

Teorem 5.6 F/F'' , üreteçleri $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ olan bir serbest metabelyen Leibniz cebiri olsun. F/F'' 'nin otomorfizm grubu, $GL(3, K)$ genel lineer grup, $v \in F'/F''$ olmak üzere e^{adv} ve aşağıdaki forma sahip olan $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ otomorfizmleri tarafından üretilir.

$$\begin{aligned}\tau_2 : \bar{x}_1 &\rightarrow \bar{x}_1 - [\bar{x}_1, z] \\ \bar{x}_2 &\rightarrow \bar{x}_2 + [z, \bar{x}_2] \\ \bar{x}_3 &\rightarrow \bar{x}_3 - [\bar{x}_3, z]\end{aligned}$$

burada $z \in F'/F''$ ve $z \in \bar{x}_1 U(F/F') \oplus \bar{x}_3 U(F/F')$,

$$\begin{aligned}\tau_1 : \bar{x}_1 &\rightarrow \bar{x}_1 - [\bar{x}_1, z] \\ \bar{x}_2 &\rightarrow \bar{x}_2 + [z, \bar{x}_2] \\ \bar{x}_3 &\rightarrow \bar{x}_3 + [z, \bar{x}_3]\end{aligned}$$

burada $z \in \overline{x_1}U(F/F')$, $x \neq y$ ve $x, y \in \{\overline{x_2}, \overline{x_3}\}$ olmak üzere $z, [x, y] - [y, x]$ formundaki elemanlar tarafından üretilir,

$$\tau_3 : \overline{x_1} \rightarrow \overline{x_1} + u$$

$$\overline{x_2} \rightarrow \overline{x_2}$$

$$\overline{x_3} \rightarrow \overline{x_3}$$

burada $i \neq 1$ ve $u \in \text{Ann}(F/F'')$, $\overline{x_i}$ 'ye bağlı $t \in \{2, 3\}$ dir,

$$\tau_4 : \overline{x_1} \rightarrow \overline{x_1} + v$$

$$\overline{x_2} \rightarrow \overline{x_2}$$

$$\overline{x_3} \rightarrow \overline{x_3}$$

$i \neq 1$, $v = v_1 * U(F/F')$, $v_1 = [\overline{x_j}, \overline{x_k}]$ ve $j \neq k \neq 1$ dir.

İspat: İspat, Teorem 4.9'un ispatına benzer şekilde yapılacaktır. Buna göre $GL(3, K)$ için K üzerindeki genel lineer grup ve her $g = (g_{ij}) \in GL(3, K)$ için

$$g : x_j \rightarrow \sum g_{ij} \cdot x_i, j = 1, 2, 3$$

dönüşümü F/F'' cebir otomorfizmine tek türlü genişletilir ve $GL(3, K)$, $U(F/F')$ üzerinde cebir otomorfizm grubu gibi davranır. Her $g \in GL(3, K)$, $f \in U(F/F')$ için etki $g \cdot f$ olarak yazılabilir ve

$$g \cdot x_j = \sum g_{ij} \cdot x_i$$

dir. Böylece $GL(3, K)$ 'yı $\text{Aut}(F/F'')$ altgrubu olarak düşünülebilir. $\text{IAut}(F/F'')$, $\text{Aut}(F/F'')$ 'nin normal altgrubu olduğundan ve

$$GL(3, K) \cap \text{IAut}(F/F'') = \{1\}$$

olmasından dolayı $\text{Aut}(F/F'')$, $\text{IAut}(F/F'')$ ve $GL(3, K)$ 'nin yarıdirekt çarpımı olduğunu söyleyebiliriz. Böylece her F/F'' 'nin her α otomorfizmi $\phi \in \text{IAut}(F/F'')$ ve

$g \in GL(3, K)$ olmak üzere $\phi \circ g$ formunda tek türlü yazılır. Teorem 5.1'den $IAut(F/F'')$, G grubuna izomorftur. Bu izomorfizmi

$$\eta : IAut(F/F'') \longrightarrow G$$

olarak ifade edebiliriz. $IAut(F/F'')$ üzerinde $GL(2, K)$ 'nin etkisi $b \in GL(3, K)$ olmak üzere

$$b \circ \phi \circ b^{-1} = \eta^{-1} (E + b(b \cdot (\phi_{ij}))b^{-1})$$

formunda olup burada $E_3 + (\phi_{ij}) = E_3 + A_3 Q_3$, $IAut(F/F'')$ 'nin ϕ otomorfizmine karşılık gelen matrisidir ve η^{-1} ise η dönüşümünün tersidir. Böylece $IAut(F/F'')$ bir $GL(3, K)$ -modüldür.

Aşağıda üç ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin otomorfizmleri ile ilgili bazı örnekler verilmiştir.

Örnek 5.7 F/F'' , üreteçleri $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ olan bir serbest metabelyen Leibniz cebiri olsun.

$$\begin{aligned} \zeta : \bar{x}_1 &\rightarrow 3\bar{x}_1 + \frac{7}{2}\bar{x}_3 + 3[\bar{x}_2, \bar{x}_2] \\ \bar{x}_2 &\rightarrow 2\bar{x}_1 - 2\bar{x}_3 + 2[\bar{x}_2, \bar{x}_2] \\ \bar{x}_3 &\rightarrow \bar{x}_2 + \bar{x}_3 \end{aligned}$$

burada $\phi \in IAut(F/F'')$, $g \in GL(2, K)$ olmak üzere $\zeta = \phi \circ g$ ve $\zeta \in Aut(F/F'')$,

$$\begin{aligned} \phi : \bar{x}_1 &\rightarrow \bar{x}_1 + [\bar{x}_2, \bar{x}_2] \\ \bar{x}_2 &\rightarrow \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 &\rightarrow \bar{x}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \bar{x}_1 &\rightarrow 3\bar{x}_1 + 2\bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 &\rightarrow 2\bar{x}_1 - 2\bar{x}_3 \\ \bar{x}_3 &\rightarrow \bar{x}_2 + \frac{7}{2}\bar{x}_3. \end{aligned}$$

Örnek 5.8 F/F'' , üreteçleri $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}$ olan bir serbest metabelyen Leibniz cebiri olsun.

$$\begin{aligned}\zeta : \overline{x_1} &\rightarrow \overline{x_1} + [\overline{x_2}, \overline{x_3}] \\ \overline{x_2} &\rightarrow 2\overline{x_1} + \overline{x_2} + 2[\overline{x_2}, \overline{x_3}] \\ \overline{x_3} &\rightarrow \overline{x_3}\end{aligned}$$

burada $\phi \in IAut(F/F'')$, $g \in GL(2, K)$ olmak üzere $\zeta = \phi \circ g$ ve $\zeta \in Aut(F/F'')$,

$$\begin{aligned}\phi : \overline{x_1} &\rightarrow \overline{x_1} + [\overline{x_2}, \overline{x_3}] \\ \overline{x_2} &\rightarrow \overline{x_2} \\ \overline{x_3} &\rightarrow \overline{x_3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g : \overline{x_1} &\rightarrow \overline{x_1} \\ \overline{x_2} &\rightarrow 2\overline{x_1} + \overline{x_2} \\ \overline{x_3} &\rightarrow \overline{x_3}.\end{aligned}$$

6. n RANKLI SERBEST METABELYEN LEİBNİZ CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİ

Bu bölümde üreteçleri $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ olan n ranklı F/F'' serbest metabelyen Leibniz cebirinin otomorfizmlerinin yapısı incelenmiştir. Teorem 6.1 ve Teorem 6.2'de, $IAut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun yapısı tanımlanmıştır. Teorem 6.3'te, $Aut(F/F'')$ otomorfizmler grubunun yapısı ifade edilmiştir.

E_n, nxn tipinde birim matris; $Q_n = (q_{ij})_{n^2 \times n}$ tipinde bir matris öyleki $q_{ij} \in U(F/F')$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n^2$ ve A_n, nxn^2 tipinde bir sabit matris; olmak üzere aşağıdaki gibi gösterilir.

$$B_n = \begin{bmatrix} \overline{r_{x_n}} & \overline{l_{x_n}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \overline{r_{x_n}} & \overline{l_{x_n}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{r_{x_n}} & \overline{l_{x_n}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(n-1) \times (2n-1)}$$

$$C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1 \times (n-1)^2}$$

ve

$$D_n = \begin{bmatrix} \overline{l_{x_1}} & \overline{r_{x_1}} & \overline{l_{x_2}} & \overline{r_{x_2}} & \dots & \overline{l_{x_{n-2}}} & \overline{r_{x_{n-2}}} & \overline{l_{x_{n-1}}} + \overline{r_{x_{n-1}}} \end{bmatrix}_{1 \times (2n-1)}.$$

ve

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix}_{nxn^2}$$

burada

$$A_2 = \begin{bmatrix} \overline{l_{x_1}} + \overline{r_{x_1}} & \overline{r_{x_2}} & \overline{l_{x_2}} & 0 \\ 0 & \overline{l_{x_1}} & \overline{r_{x_1}} & \overline{l_{x_2}} + \overline{r_{x_2}} \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

$IAut(F/F'')$ otomorfizmlerinin yapısı aşağıda tanımlanmıştır.

Teorem 6.1 F/F'' n -ranklı serbest metabelyen Leibniz cebiri ve $G, E_n + A_n Q_n$ formundaki tersinir matrislerin bir grubu olsun. Buna göre $IAut(F/F'') \cong G$.

İspat: $IAut(F/F'')$ elemanları modulo F'/F'' üzerinde birim gibi davranır. F'/F'' 'nün bir serbest F/F' -modül olmasını ve K üzerinde $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n$ tarafından üretilen bir Leibniz cebiri olarak üretilmesini kullanılarak $IAut(F/F'')$ matris formunu bulacağız. F'/F'' , $\bar{r}_1 = [\bar{x}_1, \bar{x}_1]$, $\bar{r}_2 = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$, $\bar{r}_3 = [\bar{x}_2, \bar{x}_1]$, $\bar{r}_4 = [\bar{x}_2, \bar{x}_2]$, $\bar{r}_5 = [\bar{x}_1, \bar{x}_3]$, $\bar{r}_6 = [\bar{x}_3, \bar{x}_1]$, $\bar{r}_7 = [\bar{x}_2, \bar{x}_3]$, $\bar{r}_8 = [\bar{x}_3, \bar{x}_2]$, $\bar{r}_9 = [\bar{x}_3, \bar{x}_3]$, $\dots, \bar{r}_{n^2} = [\bar{x}_n, \bar{x}_n]$ tarafından üretilen bir idealdir ve F'/F'' bir F/F' -modüldür. $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $q_{ij} \in U(F/F')$ ve $\alpha \in IAut(F/F'')$ olmak üzere

$$\alpha(\bar{x}_i) = \bar{x}_i + \sum_{j=1}^{n^2} \bar{r}_j * q_{ij}$$

$$\alpha(\bar{x}_1) = \bar{x}_1 + \bar{r}_1 * q_{11} + \bar{r}_2 * q_{12} + \bar{r}_3 * q_{13} + \bar{r}_4 * q_{14} + \dots + \bar{r}_{n^2} * q_{1n^2} \dots \dots \dots (7)$$

$$\alpha(\bar{x}_2) = \bar{x}_2 + \bar{r}_1 * q_{21} + \bar{r}_2 * q_{22} + \bar{r}_3 * q_{23} + \bar{r}_4 * q_{24} + \dots + \bar{r}_{n^2} * q_{2n^2} \dots \dots \dots (8)$$

⋮

$$\alpha(\bar{x}_n) = \bar{x}_n + \bar{r}_1 * q_{n1} + \bar{r}_2 * q_{n2} + \bar{r}_3 * q_{n3} + \bar{r}_4 * q_{n4} + \dots + \bar{r}_{n^2} * q_{nn^2} \dots \dots \dots (n+6)$$

Yukarıdaki eşitliklerin her iki tarafına μ uygulayalım.

$$\mu\alpha(\bar{x}_1) = \mu(\bar{x}_1 + \bar{r}_1 * q_{11} + \bar{r}_2 * q_{12} + \bar{r}_3 * q_{13} + \bar{r}_4 * q_{14} + \dots + \bar{r}_{n^2} * q_{1n^2})$$

$$\begin{aligned} \mu\alpha(\bar{x}_1) &= \bar{\bar{x}}_1 + a_1 \\ &+ [\bar{\bar{x}}_1 + a_1, \bar{\bar{x}}_1 + a_1] * q_{11} + [\bar{\bar{x}}_1 + a_1, \bar{\bar{x}}_2 + a_2] * q_{12} \\ &+ [\bar{\bar{x}}_2 + a_2, \bar{\bar{x}}_1 + a_1] * q_{13} + [\bar{\bar{x}}_2 + a_2, \bar{\bar{x}}_2 + a_2] * q_{14} \\ &+ \dots + [\bar{\bar{x}}_n + a_n, \bar{\bar{x}}_n + a_n] * q_{1n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu\alpha(\bar{x}_1) &= \bar{x}_1 + a_1 \\ &+ ([\bar{x}_1, a_1] + [a_1, \bar{x}_1]) * q_{11} + ([\bar{x}_1, a_2] + [a_1, \bar{x}_2]) * q_{12} \\ &+ ([\bar{x}_2, a_1] + [a_2, \bar{x}_1]) * q_{13} + ([\bar{x}_2, a_2] + [a_2, \bar{x}_2]) * q_{14} \\ &+ \dots + ([\bar{x}_n, a_n] + [a_n, \bar{x}_n]) * q_{1n^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu\alpha(\bar{x}_1) &= \bar{x}_1 + a_1 \\ &+ a_1 * (l_{\bar{x}_1} q_{11} + r_{\bar{x}_1} q_{11} + r_{\bar{x}_2} q_{12} + l_{\bar{x}_2} q_{13} + \dots + r_{\bar{x}_n} q_{1((n-1)^2+1)} + l_{\bar{x}_n} q_{1((n-1)^2+2)}) \\ &+ a_2 * (l_{\bar{x}_1} q_{12} + r_{\bar{x}_1} q_{13} + l_{\bar{x}_2} q_{14} + r_{\bar{x}_2} q_{14} + \dots + r_{\bar{x}_n} q_{1((n-1)^2+3)} + l_{\bar{x}_n} q_{1((n-1)^2+4)}) \\ &\vdots \\ &+ a_n * (r_{\bar{x}_1} q_{1((n-1)^2+1)} + l_{\bar{x}_1} q_{1((n-1)^2+2)} + r_{\bar{x}_2} q_{17} + l_{\bar{x}_2} q_{18} + \dots + (r_{\bar{x}_n} + l_{\bar{x}_n}) q_{1n^2}) \\ \mu\alpha(\bar{x}_2) &= \mu(\bar{x}_2 + \bar{r}_1 * q_{21} + \bar{r}_2 * q_{22} + \bar{r}_3 * q_{23} + \bar{r}_4 * q_{24} + \dots + \bar{r}_{n^2} * q_{2n^2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu\alpha(\bar{x}_2) &= \bar{x}_2 + a_2 \\ &+ a_1 * (l_{\bar{x}_1} q_{21} + r_{\bar{x}_1} q_{21} + r_{\bar{x}_2} q_{22} + l_{\bar{x}_2} q_{23} + \dots + r_{\bar{x}_n} q_{2((n-1)^2+1)} + l_{\bar{x}_n} q_{2((n-1)^2+2)}) \\ &+ a_2 * (l_{\bar{x}_1} q_{22} + r_{\bar{x}_1} q_{23} + l_{\bar{x}_2} q_{24} + r_{\bar{x}_2} q_{24} + \dots + r_{\bar{x}_n} q_{2((n-1)^2+3)} + l_{\bar{x}_n} q_{2((n-1)^2+4)}) \\ &\vdots \\ &+ a_n * (r_{\bar{x}_1} q_{2((n-1)^2+1)} + l_{\bar{x}_1} q_{2((n-1)^2+2)} + r_{\bar{x}_2} q_{27} + l_{\bar{x}_2} q_{28} + \dots + (r_{\bar{x}_n} + l_{\bar{x}_n}) q_{2n^2})\end{aligned}$$

.

.

.

$$\mu\alpha(\bar{x}_n) = \mu(\bar{x}_n + \bar{r}_1 * q_{n1} + \bar{r}_2 * q_{n2} + \bar{r}_3 * q_{n3} + \bar{r}_4 * q_{n4} + \dots + \bar{r}_{n^2} * q_{nn^2})$$

$$\begin{aligned}\mu\alpha(\bar{x}_n) &= \bar{x}_n + a_n \\ &+ [\bar{x}_1 + a_1, \bar{x}_1 + a_1] * q_{n1} + [\bar{x}_1 + a_1, \bar{x}_2 + a_2] * q_{n2} \\ &+ [\bar{x}_2 + a_2, \bar{x}_1 + a_1] * q_{n3} + [\bar{x}_2 + a_2, \bar{x}_2 + a_2] * q_{n4} \\ &+ \dots + [\bar{x}_n + a_n, \bar{x}_n + a_n] * q_{nn^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu\alpha(\bar{x}_n) &= \bar{x}_n + a_n \\ &+ ([\bar{x}_1, a_1] + [a_1, \bar{x}_1]) * q_{n1} + ([\bar{x}_1, a_2] + [a_1, \bar{x}_2]) * q_{n2} \\ &+ ([\bar{x}_2, a_1] + [a_2, \bar{x}_1]) * q_{n3} + ([\bar{x}_2, a_2] + [a_2, \bar{x}_2]) * q_{n4} \\ &+ \dots + ([\bar{x}_n, a_n] + [a_n, \bar{x}_n]) * q_{nn^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu\alpha(\bar{x}_n) &= \bar{x}_n + a_n \\ &+ a_1 * (l_{\bar{x}_1} q_{n1} + r_{\bar{x}_1} q_{n1} + r_{\bar{x}_2} q_{n2} + l_{\bar{x}_2} q_{n3} + \dots + r_{\bar{x}_n} q_{n((n-1)^2+1)} + l_{\bar{x}_n} q_{n((n-1)^2+2)}) \\ &+ a_2 * (l_{\bar{x}_1} q_{n2} + r_{\bar{x}_1} q_{n3} + l_{\bar{x}_2} q_{n4} + r_{\bar{x}_2} q_{n4} + \dots + r_{\bar{x}_n} q_{n((n-1)^2+3)} + l_{\bar{x}_n} q_{n((n-1)^2+4)}) \\ &\vdots \\ &+ a_n * (r_{\bar{x}_1} q_{n((n-1)^2+1)} + l_{\bar{x}_1} q_{n((n-1)^2+2)} + r_{\bar{x}_2} q_{n7} + l_{\bar{x}_2} q_{n8} + \dots + (r_{\bar{x}_n} + l_{\bar{x}_n}) q_{nn^2})\end{aligned}$$

Önerme 3.5'teki $\mu\alpha = \tilde{\alpha}\mu$ eşitliğinden ve $\overline{AutW}$ 'nin tanımından $\tilde{\alpha}$, $I_{F'/F''}$ 'ye kısıtlayarak $\tilde{\alpha}$ 'ye karşılık gelen M matrisini elde edebiliriz. M^T , M 'nin transpozunu olmak üzere $\tilde{\alpha}$ otomorfizm olduğundan M ve M^T tersinirdir. Burada

$$Q_n = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \dots q_{n2} \\ q_{13} & q_{23} & \dots q_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{1n^2} & q_{2n^2} & \dots q_{nn^2} \end{bmatrix}$$

olmak üzere karşılık gelen matrisin transpozunu $M^T = E_n + A_n Q_n$ formundadır.

$\Leftarrow$:

$C_n = E_n + A_n Q_n$ tersinir olsun ve C_n^T ile C_n matrisinin transpozunu gösterelim. W 'nin bir $\tilde{\alpha}$ otomorfizmini alalım. Eğer $\tilde{\alpha}$ 'yi, $I_{F'/F''}$ 'ye kısıtlarsak C_n^T bu otomorfizmi belirler.

Böylece

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(\bar{x}_i) &= \bar{x}_i \\ \tilde{\alpha}(a_i) &= a_i + \sum \sum a_k \cdot a_{kj} \cdot q_{ij}\end{aligned}$$

elde edilir. $\tilde{\alpha}\mu = \mu\alpha$ eşitliğinden

$$\tilde{\alpha}\mu(\bar{x}_i) = \tilde{\alpha}(\bar{x}_i + a_i) = \bar{x}_i + a_i + \sum \sum a_k \cdot a_{kj} \cdot q_{ij} = \mu(\bar{x}_i + \sum_{j=1}^n \bar{r}_j \cdot q_{ij})$$

elde edilir. Böylece F/F'' 'nin modulo F'/F'' göre birim olan bir α otomorfizmi vardır ve α otomorfizmi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\alpha(x_i) = \bar{x}_i + \sum \bar{r}_j \cdot q_{ij}$$

C_n matrisi α tarafından tek türlü belirlenir. $IAut F/F''$ otomorfizm grubu, $C_n = E_n + A_n Q_n$ formundaki tüm tersinir matrislerin grubuna izomorftur.

Aşağıdaki teorem $IAut(F/F'')$ üreteçlerinin bir kümesini vermektedir.

Teorem 6.2 F/F'' , $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ tarafından üretilen serbest metabelyen Leibniz cebiri olsun. $IAut(F/F'')$, iç otomorfizmler ve aşağıdaki φ, ϕ, τ ve Ψ otomorfizmleri tarafından üretilir.

$$\begin{aligned}\varphi : \bar{x}_1 &\rightarrow \bar{x}_1 + [z, \bar{x}_1] \\ \bar{x}_j &\rightarrow \bar{x}_j - [\bar{x}_j, z], j \neq 1\end{aligned}$$

burada $z \in F'/F''$ ve $z \in \overline{x_2}U(F/F') \oplus \dots \oplus \overline{x_i}U(F/F') \oplus \dots \oplus \overline{x_n}U(F/F')$,

$$\phi : \overline{x_j} \rightarrow \overline{x_j} + [z, \overline{x_j}]$$

burada $x \neq y$ ve $x, y \in \{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}\}$ olmak üzere $z, [x, y] - [y, x]$ formundaki elemanlar tarafından üretilir,

$$\tau : \overline{x_1} \rightarrow \overline{x_1} + u$$

$$\overline{x_i} \rightarrow \overline{x_i}$$

burada $i \neq 1$ ve $u \in \text{Ann}(F/F'')$, $\overline{x_t}$ bağlı olmak üzere $t \in \{2, 3, \dots, n\}$ dir,

$$\Psi : \overline{x_1} \rightarrow \overline{x_1} + v$$

$$\overline{x_i} \rightarrow \overline{x_i}$$

burada $i \neq 1$ ve $v = v_1 * U(F/F')$, $v_1 = [x_j, x_k]$, $j \neq k \neq 1$.

İspat: Sonuç 3.4'ten $\mu : F/F'' \rightarrow (F'/F'')_{wr}(F/F')$ monomorfizm olduğundan F/F'' , $(F'/F'')_{wr}(F/F')$ içine gömülmektedir. Leibniz cebirlerinin abelyen varyetesi üzerindeki wreath çarpım tanımından

$$W = (F/F') \oplus (I_{F'/F''})$$

yazabiliriz. F/F' ve F'/F'' serbest abelyen Leibniz cebirleridir. Serbest abelyen Leibniz cebirleri antikomutatif özelliği sağlar. Dolayısıyla serbest abelyen Lie cebiridirler ve yarıdirekt çarpımları Lie cebirindeki gibi tanımlanabilir. Bu yüzden işlem adımları Smel'kin'in 1973'teki çalışmasındaki ile benzer şekilde yapılabilir.

Karakteristiği 0 olan K cismi üzerinde $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}\}$ serbest üreteçleri tarafından üretilen F/F'' serbest metabelyen Leibniz cebirinin bir otomorfizmi $\phi : F/F'' \rightarrow F/F''$ olsun ve F'/F'' birim gibi davransın. $h \in F/F''$ ve $x \in F'/F''$ olmak üzere

$$\phi[h, x] = [\phi(h), x] = [h, x] \text{ ve } \phi[x, h] = [x, \phi(h)] = [x, h]$$

dır. Böylece $[\varphi(h) - h, x] = 0$ ve $[x, \varphi(h) - h] = 0$ dır. Buradan $\varphi(h) - h \in F'/F''$ dir. $(F/F'')/(F'/F'')$ üzerinde $\varphi(h) - h = 0$ ve F/F' üzerinde φ birim gibi davranır. Sonuç 3.5'ten F/F'' serbest metabelyen Leibniz cebiri $(F'/F'')wr(F/F')$ wreath çarpım içine gömülebilir. Böylece F/F'' serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin üreteçleri $(F'/F'')wr(F/F')$ wreath çarpımının $i, j = 1, 2, \dots, n$ için $g_i = \bar{x}_i + a_i$ formundaki elemanlarıdır. Ayrıca her $u_i \in F'/F''$ için $\varphi(g_i) = g_i + u_i$ olup $\varphi[g_i, g_j] = [g_i, g_j]$ dir.

$$\begin{aligned}\varphi[g_i, g_j] &= [\varphi(g_i), \varphi(g_j)] = [g_i + u_i, g_j + u_j] \\ &= [g_i, g_j] + [u_i, g_j] + [g_i, u_j] + [u_i, u_j],\end{aligned}$$

$[u_i, u_j]$ formundaki elemanlar F/F'' cebirinde sıfıra eşittir.

a) Her $i, j = 1, 2, \dots, n$ için $\varphi[g_i, g_j] = [g_i, g_j]$ eşitliğinden $[u_i, g_j] + [g_i, u_j] = 0$ elde edilir. Bu eşitlikte g_i yerine $\bar{x}_i + a_i$ yazabiliriz. Böylece

$$[u_i, \bar{x}_j] + [u_i, a_j] + [\bar{x}_i, u_j] + [a_i, u_j] = 0$$

elde edilir. $[a_j, u_i]$ ve $[u_j, a_i]$ formundaki elemanlar F/F'' cebirinde sıfıra karşılık gelir. Dolayısıyla her $i, j = 1, 2, \dots, n$ için aşağıdaki eşitliğe ulaşırız.

$$[u_i, \bar{x}_j] + [\bar{x}_i, u_j] = 0$$

b) Her $i, j, k \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ için $\varphi[g_k, [g_i, g_j]] = [g_k, [g_i, g_j]]$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}[g_k, [g_i, g_j]] &= [g_k + u_k, [g_i + u_i, g_j + u_j]] \\ [g_k, [g_i, g_j]] &= [g_k, [g_i, g_j]] + [g_k, [u_i, g_j]] + [g_i, u_j] + [u_i, u_j] \\ 0 &= [g_k, [u_i, g_j]] + [g_i, u_j] + [u_i, u_j]\end{aligned}$$

$[u_i, u_j]$ formundaki elemanlar F/F'' cebirinde sıfıra karşılık gelir. $[g_k, [u_i, g_j]] + [g_i, u_j] = 0$ elde edilir. Bu eşitlikte her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için g_i yerine $\bar{x}_i + a_i$ yazabiliriz. Böylece

$$[\bar{x}_k + a_k, [u_i, \bar{x}_j + a_j] + [\bar{x}_i + a_i, u_j]] = 0$$

elde edilir. Her $i, j = 1, 2, \dots, n$ için $[a_j, u_i]$, $[u_j, a_i]$, $[a_k, [u_i, \bar{x}_j]]$ ve $[a_k, [\bar{x}_i, u_j]]$ formundaki elemanlar F/F'' cebirinde sıfıra karşılık gelir. Leibniz özdeşliğinden

$$[[\bar{x}_k, \bar{x}_i], u_j] - [[\bar{x}_k, u_j], \bar{x}_i] + [[\bar{x}_k, u_i], \bar{x}_j] - [[\bar{x}_k, \bar{x}_j], u_i] = 0$$

metabelyen Leibniz özdeşliğinden $[[\bar{x}_k, u_j], \bar{x}_i] + [[\bar{x}_k, u_i], \bar{x}_j] = 0$ olmak üzere her $i, j = 1, 2, \dots, n$ için

$$[[\bar{x}_k, u_i], \bar{x}_j] = [[\bar{x}_k, u_j], \bar{x}_i]$$

elde edilir.

DURUM 1: Her $z \in F'/F''$, $l_{\bar{x}_1} \in U(F/F')$ ve $u_1 = z * l_{\bar{x}_1}$ için $j \in \{2, \dots, n\}$ olmak üzere $[u_i, \bar{x}_j] + [\bar{x}_i, u_j] = 0$ eşitliğinde $u_1 = z.l_{\bar{x}_1}$ yazalım.

$$\begin{aligned} [u_i, \bar{x}_1] &= -[\bar{x}_j, u_1] \\ &= -[\bar{x}_j, z * l_{\bar{x}_1}] \\ &= -[\bar{x}_j, [\bar{x}_1, z]] \\ &= [\bar{x}_j, [z, \bar{x}_1]] \end{aligned}$$

Leibniz özdeşliğinden $[\bar{x}_j, [z, \bar{x}_1]] = [[\bar{x}_j, z], \bar{x}_1] - [[\bar{x}_j, \bar{x}_1], z] = [[\bar{x}_j, z], \bar{x}_1]$ dir. Böylece $[u_j, \bar{x}_1] = [[\bar{x}_j, z], \bar{x}_1]$ ve

$$u_j = [\bar{x}_j, z] = z * l_{\bar{x}_j} \text{ veya } u_j = [g_j, z]$$

Açıkça görülüyor ki her $j \in \{2, \dots, n\}$ için $u_j = z * l_{\bar{x}_j}$ dir. Ayrıca F'/F'' diğer üreteçlerine ϕ uygularsak, her $j \in \{2, \dots, n\}$ için aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\phi(g_i) = g_i + [g_i, z]$$

$z \in F'/F''$ olduğundan ϕ bir iç otomorfizmdir.

DURUM 2: $z \in F'/F''$, $r_{\bar{x}_1} \in U(F/F')$ için $u_1 = z * r_{\bar{x}_1}$ olsun.

2a) $[u_j, \bar{x}_1] + [\bar{x}_j, u_1] = 0$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} [u_j, \bar{x}_1] &= -[\bar{x}_j, u_1] \\ &= -[\bar{x}_j, z, \bar{x}_1] \\ &= -[\bar{x}_j, [z, \bar{x}_1]] \\ &= -[[\bar{x}_j, z], \bar{x}_1] + [[\bar{x}_j, \bar{x}_1], z] \\ &= -[[\bar{x}_j, z], \bar{x}_1] \end{aligned}$$

elde edilir. Her $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $u_j = -[\bar{x}_j, z]$ veya $u_j = -[g_j, z]$ olduğu açıktır. Böylece

$$\begin{aligned} \varphi: g_1 &\rightarrow g_1 + [z, g_1] \\ g_j &\rightarrow g_j - [g_j, z] \end{aligned}$$

olup eğer φ bir otomorfizm ise $\{g_1 + [z, g_1], g_2 - [g_2, z], \dots, g_i - [g_i, z], \dots, g_n - [g_n, z]\}$ bir serbest üreteç kümesidir ve

$$\begin{aligned} F/F'' &= g_1 U(F/F') \oplus g_2 U(F/F') \oplus \dots \oplus g_i U(F/F') \oplus \dots \oplus g_n U(F/F') \\ &= (g_1 + [z, g_1]) U(F/F') \oplus \dots \oplus g_i - [g_i, z] \oplus \dots \oplus (g_n - [g_n, z]) U(F/F') \end{aligned}$$

olur. Buradan $[z, g_1] \in g_2 U(F/F') \oplus \dots \oplus g_i U(F/F') \oplus \dots \oplus g_n U(F/F')$ ve Teorem 6.1'den $z \in g_2 U(F/F') \oplus \dots \oplus g_i U(F/F') \oplus \dots \oplus g_n U(F/F')$ elde edilir.

2b) $[[\bar{x}_k, u_i], \bar{x}_j] = [[\bar{x}_k, u_j], \bar{x}_i]$ eşitliğinden $[[\bar{x}_k, u_1], \bar{x}_j] = [[\bar{x}_k, u_j], \bar{x}_1]$ dir ve her $j, k \in \{2, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} [[\bar{x}_k, u_j], \bar{x}_1] &= [[\bar{x}_k, u_1], \bar{x}_j] \\ &= [[\bar{x}_k, [z, \bar{x}_1]], \bar{x}_j] \\ &= [[[\bar{x}_k, z], \bar{x}_1], \bar{x}_j] \\ &= [[[\bar{x}_k, z], \bar{x}_j], \bar{x}_1] \\ &= [[\bar{x}_k, [z, \bar{x}_j]], \bar{x}_1] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $j, k \in I = \{2, 3, \dots, n\}$ $u_j = [z, \overline{x_j}]$ veya $u_j = [z, \overline{g_j}]$ dir. Eğer $z \in F'/F''$, $r_{\overline{x_1}} \in U(F/F')$ için $u_1 = z.r_{\overline{x_1}}$ ise her $j \in I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ için $\varphi(g_j) = g_j + [z, g_j]$ dir. Eğer φ bir otomorfizm ise $\{g_1 + [z, g_1], g_2 + [z, g_2], \dots, g_i + [z, g_i], \dots, g_n + [z, g_n]\}$ kümesinin bir üreteç kümesi olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} F/F'' &= g_1 U(F/F') \oplus g_2 U(F/F') \oplus \dots \oplus g_i U(F/F') \oplus \dots \oplus g_n U(F/F') \\ &= (g_1 + [z, g_1]) U(F/F') \oplus \dots \oplus (g_i + [z, g_i]) U(F/F') \oplus \dots \oplus (g_n + [z, g_n]) U(F/F') \end{aligned}$$

elde edilir. Her $x, y \in \{g_1, \dots, g_n\}$ için Teorem 6.1'den z 'nin $[x, y] - [y, x]$ formundaki elemanlar tarafından üretildiğini biliyoruz. Buna göre $x \neq y$ ve $x, y \in \{g_1, \dots, g_n\}$ için z , $[x, y] - [y, x]$ formundaki elemanlar tarafından üretilmek üzere otomorfizmler

$$\varphi : g_j \rightarrow g_j + [z, g_j]$$

formuna sahiptir.

DURUM 3 : $t \in I = \{2, 3, \dots, n\}$ için $u_1 \in \text{Ann}(F/F'')$ elemanı $\overline{x_t}$ 'lere bağlı olsun. Leibniz özdeşliğinden $[\overline{x_t}, u_1] = 0$ olup $[u_j, \overline{x_1}] = 0$ dir. Buradan her $j \in I = \{2, 3, \dots, n\}$ için $u_j = 0$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} \varphi : g_1 &\rightarrow g_1 + u_1 \\ g_j &\rightarrow g_j \end{aligned}$$

burada $u_1 \in \text{Ann}(F/F'')$ elemanı $\overline{g_t}$ 'lere bağlı olup $t \in \{2, 3, \dots, n\}$ dir. Ayrıca φ^{-1} aşağıdaki forma sahiptir.

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : g_1 &\rightarrow g_1 - u_1 \\ g_j &\rightarrow g_j. \end{aligned}$$

$\varphi^{-1} \circ \varphi = 1$ ve $\varphi \circ \varphi^{-1} = 1$ olduğundan φ bir otomorfizmdir.

Durum 3'te tanımlanan otomorfizmlerden farklı olarak bir de aşağıda tanımlanan formdaki otomorfizmler vardır.

$$\Phi : g_1 \rightarrow g_1 + v_1$$

$$g_j \rightarrow g_j,$$

burada $i \neq 1$, $v = v_1 * U(F/F')$, $v_1 = [\bar{x}_j, \bar{x}_k]$ ve $j \neq k \neq 1$ dir. Bu formdaki otomorfizmler elementer IA-otomorfizmlerdir.

Şimdi çalışmamızın ana teoremini verebiliriz.

Teorem 6.3 F/F'' üreteçleri $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ olan bir n -ranklı serbest metabelyen Leibniz cebiri olsun. F/F'' 'nün otomorfizm grubu $GL(n, K)$ genel lineer grup, $v \in F'/F''$ olmak üzere e^{adv} ve aşağıdaki forma sahip olan otomorfizmler tarafından üretilir.

$$\Phi : \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 + [z, \bar{x}_1]$$

$$\bar{x}_j \rightarrow \bar{x}_j - [\bar{x}_j, z]$$

burada $z \in F'/F''$ ve $z \in \bar{x}_2 U(F/F') \oplus \dots \oplus \bar{x}_i U(F/F') \oplus \dots \oplus \bar{x}_n U(F/F')$,

$$\Phi : \bar{x}_j \rightarrow \bar{x}_j + [z, \bar{x}_j]$$

burada $x \neq y$ ve $x, y \in \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ olmak üzere $z, [x, y] - [y, x]$ formundaki elemanlar tarafından üretilir,

$$\tau : \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 + u$$

$$\bar{x}_i \rightarrow \bar{x}_i$$

burada $i \neq 1$ ve $u \in Ann(F/F'')$, $\bar{x}_i$ bağlı olmak üzere $t \in \{2, 3, \dots, n\}$ dir,

$$\Psi : \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 + v$$

$$\bar{x}_i \rightarrow \bar{x}_i$$

burada $i \neq 1$ ve $v = v_1 * U(F/F')$, $v_1 = [x_j, x_k]$, $j \neq k \neq 1$.

İspat: İşlem adımları rank 2'deki gibidir. $GL(n, K)$ için K üzerindeki genel lineer grup ve her $g = (g_{ij}) \in GL(n, K)$ için

$$g : x_j \longrightarrow \sum g_{ij} \cdot x_i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

dönüşümü F/F'' cebir otomorfizmine tek türlü genişletilir ve $GL(n, K)$, $U(F/F')$ üzerinde cebir otomorfizm grubu gibi davranır. Her $g \in GL(n, K)$, $f \in U(F/F')$ için etki $g \cdot f$ olarak yazılabilir ve

$$g \cdot x_j = \sum g_{ij} \cdot x_i.$$

dir. Böylece $GL(n, K)$ 'yı $Aut(F/F'')$ altgrubu olarak düşünülebilir. $IAut(F/F'')$, $Aut(F/F'')$ 'nin normal altgrubu olduğundan ve

$$GL(n, K) \cap IAut(F/F'') = \{1\}$$

olmasından dolayı $Aut(F/F'')$, $IAut(F/F'')$ ve $GL(n, K)$ 'nin yarıdirekt çarpımı olduğunu söyleyebiliriz. Böylece $g \in GL(n, K)$ olmak üzere F/F'' 'nin her α otomorfizmi $\phi \in IAut(F/F'')$ için $\phi \circ g$ formunda tek türlü yazılır. Teorem 6.1'den $IAut(F/F'')$, G grubuna izomorftur. Bu izomorfizmi

$$\eta : IAut(F/F'') \longrightarrow G$$

olarak ifade edebiliriz. $IAut(F/F'')$ üzerinde $GL(n, K)$ 'nin etkisi $b \in GL(n, K)$ ve η^{-1} ise η dönüşümünün tersi olmak üzere

$$b \circ \phi \circ b^{-1} = \eta^{-1} (E + b(b \cdot (\phi_{ij}))b^{-1})$$

formundadır. Burada $E_n + (\phi_{ij}) = E_n + A_n Q_n$, $IAut(F/F'')$ 'nin ϕ otomorfizmine karşılık gelen matrisidir. Böylece $IAut(F/F'')$ bir $GL(n, K)$ -modüldür.

Aşağıda n ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin otomorfizmleri ile ilgili bazı örnekler verilmiştir.

Örnek 6.4 F/F'' üreteçleri $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ olan bir serbest metabelyen Leibniz cebiri olmak üzere

i)

$$\varphi : \overline{x_1} \rightarrow \overline{x_1} + [[\overline{x_4}, \overline{x_5}], \overline{x_1}]$$

$$\overline{x_i} \rightarrow \overline{x_i} - [\overline{x_i}, [\overline{x_4}, \overline{x_5}]]$$

burada $i \in \{\overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}\}$ ve φ bir otomorfizmdir.

ii)

$$\zeta : \overline{x_j} \rightarrow \overline{x_j} + [[\overline{x_1}, \overline{x_4}] - [\overline{x_4}, \overline{x_1}], \overline{x_j}]$$

burada $j \in \{\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}\}$ ve ζ bir otomorfizmdir.

iii)

$$\theta : \overline{x_2} \rightarrow \overline{x_2} + [\overline{x_1}, \overline{x_1}]$$

$$\overline{x_i} \rightarrow \overline{x_i}$$

burada $i \in \{\overline{x_1}, \overline{x_3}, \dots, \overline{x_n}\}$ ve θ bir otomorfizmdir.

iv)

$$\varpi : \overline{x_3} \rightarrow \overline{x_3} + [\overline{x_1}, \overline{x_5}]$$

$$\overline{x_i} \rightarrow \overline{x_i}$$

burada $i \in \{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}\} - \overline{x_3}$ ve ϖ bir otomorfizmdir.



7. TAME VE WILD OTOMORFİZMLER

K bir cisim ve $n \geq 2$ için $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ sonlu bir küme olsun. Bu bölümde X_n değişkenler kümesi üzerindeki polinom cebirini $P_n = K[X_n]$ ve serbest birleşmeli cebiri $A_n = K\langle X_n \rangle$ ile göstereceğiz.

Tanım 7.1 $\alpha, F/F''$ 'nin $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i \rightarrow y_i$ şeklinde tanımlanan bir otomorfizmi olsun. Eğer $v_i \in F''$ için $\bar{\alpha} : x_i \rightarrow y_i + v_i, i = 1, 2, \dots, n$ olacak şekilde F 'nin bir $\bar{\alpha}$ otomorfizmi varsa α 'ya tame otomorfizm denir. Bu durumda " α, F 'nin bir otomorfizmine taşınabilir (tame)" denir. Eğer α , taşınabilir değilse α 'ya taşınamaz (wild) otomorfizm denir.

Not 7.2 1) 1964'te Cohn n -ranklı serbest Lie cebirlerinin otomorfizmlerinin tame olduğunu ispatlamıştır.

2) Bir K cismi üzerindeki P_2 polinom cebirinin ve A_2 serbest birleşmeli cebirin otomorfizmlerinin tame olduğu bilinmektedir (Roman'kov, 2008).

3) 1972'de Nagata $P_3 = K[X_3]$ polinomlar cebirinde kendi adını taşıyan aşağıdaki meşhur otomorfizmi tanımlamıştır (Nagata, 1972).

$$\sigma = \left(x_1 + (x_1^2 - x_2x_3)x_3, x_2 + (x_1^2 - x_2x_3)x_1 + (x_1^2 - x_2x_3)^2x_3, x_3 \right)$$

Ayrıca karakteristiği 0 olan bir K cismi için σ otomorfizminin non-tame (wild) olduğunu ifade etmiştir. Bundan 30 yılı aşkın bir süre sonrasında Shestakov ve Umirbaev 2004'te, Poisson braketini kullanarak ve derece tahmini yaparak karakteristiği 0 olan herhangi bir K cismi için σ otomorfizminin non-tame (wild) olduğunu göstermiştir.

4) Serbest birleşmeli cebirlerde wild otomorfizmlerin varlığı Cohn'nun ortaya attığı problemlerden biridir. Buna göre $A_3 = K\langle X_3 \rangle$ serbest birleşmeli cebirinde

$$\sigma = (x_1 + (x_1x_3 - x_3x_2), x_2 + (x_1x_3 - x_3x_2)x_3, x_3)$$

Anick olarak adlandırılan otomorfizmin wild olduğunu göstermiştir. Umirbaev 2004'te karakteristiği 0 olan herhangi bir K cismi için σ otomorfizminin non-tame (wild) olduğunu ifade etmiştir.

Teorem 7.3 $n > 2$ ranklı F/F'' serbest metabelyen Leibniz cebirinin $i = 2, 3, \dots, n$ için

$$\begin{aligned}\varphi : \bar{x}_1 &\rightarrow \bar{x}_1 + [[\bar{x}_2, \bar{x}_2], \bar{x}_1] \\ \bar{x}_i &\rightarrow \bar{x}_i\end{aligned}$$

olarak tanımlanan otomorfizmi tame otomorfizmdir.

İspat: φ otomorfizmi

$$\begin{aligned}\phi : \bar{x}_3 &\rightarrow \bar{x}_3 + [\bar{x}_1, \bar{x}_2] \\ \bar{x}_i &\rightarrow \bar{x}_i, i \neq 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi : \bar{x}_1 &\rightarrow \bar{x}_1 + [\bar{x}_2, \bar{x}_3] + [\bar{x}_3, \bar{x}_2] \\ \bar{x}_i &\rightarrow \bar{x}_i, i = 2, 3, \dots, n\end{aligned}$$

olarak tanımlanan ϕ ve ψ tame otomorfizmlerinin bir bileşkesi olarak yazılabilir. Buna göre $\varphi = \phi \circ \psi \circ \phi^{-1} \circ \psi^{-1}$ dir. Fakat $n = 2$ için bu otomorfizm F_2 cebirinin Abdalkhalikov ve arkadaşları tarafından 2001'de bulunan bir wild otomorfizm tarafından üretilmektedir. Dolayısıyla φ otomorfizmi $n=2$ için F/F'' 'nin bir wild otomorfizmidir.

Teorem 7.4 Üç ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin

$$\begin{aligned}\gamma : \bar{x}_1 &\rightarrow \bar{x}_1 + [\bar{x}_3, [\bar{x}_1, \bar{x}_3]] - [\bar{x}_3, \bar{x}_2] \\ \bar{x}_2 &\rightarrow \bar{x}_2 + [[\bar{x}_1, \bar{x}_3]] - [\bar{x}_3, \bar{x}_2], \bar{x}_3 \\ \bar{x}_3 &\rightarrow \bar{x}_3\end{aligned}$$

otomorfizmi tame otomorfizmdir.

İspat: Bu otomorfizm 3-ranklı serbest birleşmeli cebirlerdeki Anick otomorfizminin bir benzeridir. 3-ranklı serbest birleşmeli cebirlerde bu otomorfizmin wild olduğu Umirbaev tarafından 2004'te ispatlandığını biliyoruz. Fakat 3 ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinde γ otomorfizmi

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 & : \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2 + \bar{x}_1, \\
 \alpha_2 & : \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 + [\bar{x}_3, [\bar{x}_2, \bar{x}_3]], \\
 \alpha_3 & : \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2 - \bar{x}_1, \\
 \alpha_4 & : \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2 + [\bar{x}_3, [\bar{x}_1, \bar{x}_3]] + [[\bar{x}_3, \bar{x}_1], \bar{x}_3], \\
 \alpha_5 & : \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2 - [[\bar{x}_3, \bar{x}_3], \bar{x}_2].
 \end{aligned}$$

tame otomorfizmlerinin $\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \alpha_3 \circ \alpha_4 \circ \alpha_5$ bileşkesine eşittir. Dolayısıyla 3 ranklı serbest metabelyen Leibniz cebirlerinde γ bir tame otomorfizmdir.



8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde temel olarak serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin otomorfizmlerinin yapısı incelenmiş ve aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 8.1 F/F'' üreteçleri $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ olan bir n -ranklı serbest metabelyen Leibniz cebiri olsun. F/F'' 'nin otomorfizm grubu $GL(n, K)$ genel lineer grup, $v \in F'/F''$ olmak üzere e^{adv} ve aşağıdaki forma sahip olan otomorfizmler tarafından üretilir.

$$\begin{aligned}\varphi : \overline{x_1} &\rightarrow \overline{x_1} + [z, \overline{x_1}] \\ \overline{x_j} &\rightarrow \overline{x_j} - [\overline{x_j}, z],\end{aligned}$$

burada $z \in F'/F''$ ve $z \in \overline{x_2}U(F/F') \oplus \dots \oplus \overline{x_i}U(F/F') \oplus \dots \oplus \overline{x_n}U(F/F')$

$$\phi : \overline{x_j} \rightarrow \overline{x_j} + [z, \overline{x_j}],$$

burada $x \neq y$ ve $x, y \in \{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}\}$ olmak üzere $z, [x, y] - [y, x]$ formundaki elemanlar tarafından üretilir,

$$\begin{aligned}\tau : \overline{x_1} &\rightarrow \overline{x_1} + u \\ \overline{x_i} &\rightarrow \overline{x_i},\end{aligned}$$

burada $i \neq 1$ ve $u \in \text{Ann}(F/F'')$, $\overline{x_i}$ bağlı olmak üzere $t \in \{2, 3, \dots, n\}$ dir,

$$\begin{aligned}\Psi : \overline{x_1} &\rightarrow \overline{x_1} + v \\ \overline{x_i} &\rightarrow \overline{x_i},\end{aligned}$$

burada $i \neq 1$ ve $v = v_1 * U(F/F')$, $v_1 = [x_j, x_k]$, $j \neq k \neq 1$.

Serbest metabelyen Leibniz cebirlerinin otomorfizmleri ile ilgili aşağıdaki soruya henüz cevap bulunamamıştır.

Problem 8.2 F/F'' üreteçleri $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ olan bir n -ranklı serbest metabelyen Leibniz cebiri ve $w \in F'/F''$ olmak üzere w 'nun orbiti

$$O(w) = \{y \in F/F'' : y = \phi(w), w \in \text{Aut } F/F''\}$$

ile gösterilir. Eğer $\psi \in \text{End}(F/F'')$ ve $\psi(O(w)) \subseteq O(w)$ ise ψ , F/F'' serbest metabelyen Leibniz cebirinin bir otomorfizmidir.

KAYNAKLAR

- Abdykhalikov, A.T., Mikhalev, A.A, 2001. Umirbaev, U.U. Automorphism of Two-Generated Free Leibniz Algebras. Commun Algebra. 29(7), 2953-2960.
- Bahturin, Y., Nabiyeu, S.,1992. Automorphisms and Derivations of Abelian Extensions of Some Lie Algebras. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.62,43-57.
- Cohn, P.M., 1964. Subalgebras of Free Associative Algebras. Proc.London Math. Soc. 14. 618-632.
- Czerniakiewicz, A.J., 1971. Automorphisms of Free Associative Algebra of Rank Two,I,II. Trans. Amer. Math. Soc.160, 393-401;1972,171,309-315.
- Demir, İ., Misra, K.C., Stitzinger,E. 2013. Some Structures of Leibniz Algebras. Contemporary Mathematics, Vol 623; New Orleans, LA, USA; 2012. pp. 41-54.
- Drensky, V., Cattaneo, G. M.P., 2002. Varieties of Metabelian Leibniz Algebras. Journal of Algebra and Its Appl.1(1),31-50.
- Drensky, V., Papistas, A.I., 2005. Automorphisms of Free Left Nilpotent Leibniz Algebras and Fixed Points. Commun. Algebra. 33,2957-2975.
- Loday, J.-L., Pirashvili, T., 1993. Universal Enveloping Algebras of Leibniz algebras and (co)Homology. Math. Ann. 296,139-158.
- Makar-Limanov, L., 1973. The automorphisms of the free algebra with two generators. Funktsional. Anal. i. Prilozhen. 4. no.3, 107-108; Englishtranslation: in Functional Anal. Appl.4(1970), 262-263.
- Nagata, M., 1972. On The Automorphism Group of $k[x,y]$, Lecture Notes in Mathematics, Kyoto University.
- Roman'kov, 2008. On The Automorphism Group of a Free Metabelian Lie Algebra. International Journal of Algebra and Computation. Vol.18, No. 2, 209-226

- Shestakov, I., P., Umirbaev, U., U., 2004. The Tame and Wild Automorphisms of Rings of Polynomial in Three Variables, J. Amer. Math. Soc. 17. 197-227.
- Smel'kin, A.L., 1964. Wreath Products and varieties of groups. Dokl. Akad.Nauk. SSSR 157.
- Smel'kin, A.L., 1973. Wreath products of Lie Algebras and Their Application in the Theory of Groups. Trans.Moskov.Math.Soc.,29.
- Sullivan, F., E., 1985. Wreath products of Lie Algebras. Journal of Pure and Applied Algebra 35, 95-104.
- Taş Adıyaman, T.; Özkurt, Z. Automorphisms of free metabelian Leibniz algebras of rank three. Turkish J. Math. 43 (2019), no. 5, 2262-2274.
- Umirbaev, U., U., 2004. The Tame and Wild Automorphisms of Polynomial algebras and associative algebras. Preprint of Max-Planck Institute for Mathematic, MPIM.

ÖZGEÇMİŞ

2002'de Kahramanmaraş Çukurova Elektrik Anadolu Lisesinden mezun oldu. 2007 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesinde Matematik Bölümünü bitirdi. 2008 yılında Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesinde Tezsiz yüksek Lisansını tamamladı. 2009'da Milli Eğitim Bakanlığına bağlı bir lisede öğretmen olarak göreve başladı. 2010 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesinde Matematik Bölümünde başladığı Tezli Yüksek lisans eğitimini 2013'te tamamladı. 2014'te aynı bölümde doktora eğitimine başladı ve 2021 yılında doktorayı bitirdi. Evli ve bir çocuk annesi.