



**T.C.  
AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İZOTROPİK UZAYDA EĞRİLERİN KONUM VEKTÖRLERİ VE  
KARAKTERİZASYONLARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GÜLNUR ÖZYURT**

**AĞUSTOS**

**AĞUSTOS 2021**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GÜLNUR ÖZYURT**

**İZOTROPİK UZAYDA EĞRİLERİN KONUM VEKTÖRLERİ VE  
KARAKTERİZASYONLARI**

**Gölnur ÖZYURT**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Danışman**

**Doç. Dr. Tevfik ŞAHİN**

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AĞUSTOS 2021**

## ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Gölnur ÖZYURT

20/08/2021

# İZOTROPİK UZAYDA EĞRİLERİN KONUM VEKTÖRLERİ VE KARAKTERİZASYONLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Gölnur ÖZYURT

AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2021

## ÖZET

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde eğrinin konum vektörünü, eğrilik ve burulma fonksiyonları cinsinden ifade etme problemi Öklid uzayında incelenmiştir. Bu problem Öklid uzayında genel eğriler için çözülememiş ancak bazı özel eğriler için çözülmüştür. İkinci bölümde ise Öklid uzayı ve izotropik uzay ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde izotropik uzayda bir eğrinin konum vektörü eğrilik ve burulma cinsinden ifade edilmiştir. Son olarak izotropik uzayda bazı özel eğrilerin konum vektörleri ve grafikleri verilmiştir.

|                   |                                           |
|-------------------|-------------------------------------------|
| Sayfa Adedi       | : 49                                      |
| Anahtar Kelimeler | : izotropik uzay, konum vektörleri, Helis |
| Danışman          | : Doç. Dr. Tefik ŞAHİN                    |

POSITION VECTORS AND CHARACTERIZATIONS OF CURVES IN THE  
ISOTROPIC SPACE

(M. Sc. Thesis)

Gülnur ÖZYURT

AMASYA UNIVERSITY  
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2021

ABSTRACT

This thesis consists of three parts. In the first chapter, the problem of expressing the position vector of the curve in terms of curvature and torsion functions is investigated in Euclidean space. This problem is not solved for general curves in Euclidean space, but it is solved for some special curves. In the second part, basic definitions and theorems about Euclidean space and isotropic space are given. In the third chapter, the position vector of a curve in isotropic space is expressed in terms of curvature and torsion. Finally, position vectors and graphs of some special curves in isotropic space are given.

Page Number : 49  
Key Words : isotropic Space, position vectors, Helix  
Supervisor : Associate Professor Tevfik ŞAHİN

## ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince bilgisini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen saygı değer hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. Tevfik ŞAHİN' e, önerileriyle tezimize katkı sunan Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN ve Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR hocalarımıza çok teşekkür ederim. Son olarak, tez dönemi boyunca 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında bana burs veren TÜBİTAK'a (Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu) ve benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen annem ve babama en içten dileklerimle teşekkür ederim.



## İÇİNDEKİLER

|                                                             | Sayfa |
|-------------------------------------------------------------|-------|
| ÖZET .....                                                  | iv    |
| ABSTRACT.....                                               | v     |
| ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR.....                                     | vi    |
| İÇİNDEKİLER .....                                           | vii   |
| ÇİZELGELER DİZİNİ .....                                     | viii  |
| ŞEKİLLER DİZİNİ .....                                       | ix    |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....                        | x     |
| 1. GİRİŞ.....                                               | 1     |
| 2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ.....                | 6     |
| 2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar .....                   | 6     |
| 2.2. Öklid Uzayında Eğriler .....                           | 9     |
| 2.3. $E^3$ de Birim Hızlı Eğrilerde Frenet Formülleri ..... | 14    |
| 2.4. $E^3$ de Keyfi Hızlı Eğrilerde Frenet Formülleri ..... | 17    |
| 2.5. İzotropik Uzayda Temel Kavramlar.....                  | 22    |
| 3. BULGULAR VE TARTIŞMA .....                               | 28    |
| 3.1. İzotropik Uzayda Eğrilerin Konum Vektörleri .....      | 28    |
| 4. SONUÇ .....                                              | 46    |
| KAYNAKLAR.....                                              | 47    |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                               | 49    |



## ÇİZELGELER DİZİNİ

| Çizelge                                                                                 | Sayfa |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Çizelge 2.1. Öklid uzayında bazı eğrilerin eğrilik fonksiyonlarına göre durumları ..... | 22    |
| Çizelge 3.1. İzotropik uzayda bazı eğrilerin eğrilik fonksiyonlarına göre durumları.... | 33    |



## ŞEKİLLER DİZİNİ

| Şekil                                                            | Sayfa |
|------------------------------------------------------------------|-------|
| Şekil 3.1. $\kappa = 1$ ve $\tau = 1$ olan eğrinin grafiği.....  | 37    |
| Şekil 3.2. $\kappa = s$ ve $\tau = s$ olan eğrinin grafiği ..... | 40    |
| Şekil 3.3. $\kappa = 1$ ve $\tau = s$ olan eğrinin grafiği.....  | 43    |



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| Simgeler    | Açıklama                         |
|-------------|----------------------------------|
| $\alpha(x)$ | Eğrinin konum vektörü            |
| $\kappa(x)$ | Eğrinin eğrilik fonksiyonu       |
| $\tau(x)$   | Eğrinin burulma fonksiyonu       |
| $T(x)$      | Eğrinin birim teğet vektör alanı |
| $N(x)$      | Eğrinin normal vektör alanı      |
| $B(x)$      | Eğrinin binormal vektör alanı    |
| $V$         | Vektör uzayı                     |
| $I^3$       | 3- boyutlu izotropik uzay        |
| $E^3$       | 3- boyutlu Öklid uzayı           |
| $P(R^3)$    | 3- boyutlu Projektif uzay        |
| $v_p$       | Tanjant vektör                   |
| $T_p(E^3)$  | Tanjant uzay                     |

| Kısaltmalar | Açıklama               |
|-------------|------------------------|
| $C_\kappa$  | $\cos(\int \kappa ds)$ |
| $S_\kappa$  | $\sin(\int \kappa ds)$ |

## 1. GİRİŞ

Eğrilerin temel teoremi, eğrilerin eğrilik fonksiyonları tarafından belirlendiğini söyler. Böylece eğrilik fonksiyonları bize eğriler hakkında önemli bilgiler sağlar. Örneğin dairesel helis eğrileri, eğriliklerin sabit olmasıyla karakterize edilen eğrilerdir. Doğrular ve çemberler sırasıyla eğriliği sıfır ve eğriliği sabit olan düzlemsel eğrilerdir. Ayrıca bu eğriler dejenere helislerdir. Helislerin mühendislik, biyoloji, kimya vb. birçok bilim dalında uygulamaları bulunmaktadır.

Genel olarak uzayda verilen bir eğrinin eğriliklerini bulma problemi çözülebilir bir problemdir. Fakat eğriliği ve burulması cinsinden konum vektörü her zaman ifade edilemeyebilir. Örneğin (Ali, 2012b) de belirtildiği gibi, bir uzay eğrisinin konum vektörünün Frenet çatısına göre belirlenmesi problemi Öklid uzayında hala açık bir problemdir. Öncelikle bu kısımda bu problemi Öklid uzayında ifade edeceğiz. Daha sonra bu problemi izotropik uzayda Frenet çatısına göre incelediğimizde, problemin izotropik uzayda çözülebilir olduğu sonucunu çıkaracağız.

$\alpha(s)$ , Öklid uzayında keyfi bir eğri olsun. Öklid uzayında Frenet denklemleri;

$$T' = \kappa N \quad (1.1)$$

$$N' = \tau B - \kappa T \quad (1.2)$$

$$B' = -\tau N \quad (1.3)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada ( )' sembolü s parametresine göre türev belirtmektedir. (1.2) denklemi düzenlenirse;

$$\kappa T = \tau B - N' \quad (1.4)$$

elde edilir.  $\kappa$  eğriliğinin sıfırdan farklı olduğu kabul edilerek (1.4) denklemindeki eşitlik  $\kappa'$  ya bölünürse;

$$T = \frac{\tau}{\kappa} B - \frac{N'}{\kappa} \quad (1.5)$$

elde edilir. (1.5) denkleminde türev alınır;sa;

$$T' = \left(\frac{\tau}{\kappa} B\right)' - \left(\frac{1}{\kappa} N'\right)' \quad (1.6)$$

denklemini bulunur. Bu denklemde (1.1) kullanılırsa;

$$\kappa N = \left(\frac{\tau}{\kappa} B\right)' - \left(\frac{1}{\kappa} N'\right)' \quad (1.7)$$

elde edilir. Ayrıca son denklemde  $\theta = \int \kappa ds$  equiform parametre değişimi yapılır;sa;

$$\left(\frac{\kappa^2(\theta) + \tau^2(\theta)}{\kappa^2(\theta)}\right) N(\theta) + \ddot{N}(\theta) = \left(\frac{\tau(\theta)}{\kappa(\theta)}\right) B(\theta) \quad (1.8)$$

diferansiyel denklemini elde edilir. Aynı şekilde

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Frenet formüllerinde  $\theta = \int \kappa ds$  equiform parametre değişimi yapılır;sa;

$$\begin{bmatrix} T(\theta) \\ N(\theta) \\ B(\theta) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & f(\theta) \\ 0 & -f(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(\theta) \\ N(\theta) \\ B(\theta) \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

matris formundaki Frenet formüllerine dönüşür. Burada ( )' sembolü  $\theta$  parametresine göre türevi belirtir ve  $f(\theta) = \frac{\tau(\theta)}{\kappa(\theta)}$  şeklindedir. Daha sonra (1.8) denkleminde  $f(\theta) = \frac{\tau(\theta)}{\kappa(\theta)}$  dönüşümü yapılır ve denklem düzenlenirse;

$$\frac{1}{f(\theta)} [(1 + f^2(\theta))N(\theta) + \ddot{N}(\theta)] = B(\theta) \quad (1.11)$$

elde edilir. (1.11) denkleminde türev alınırsa,

$$\left( \frac{1}{f(\dot{\theta})} [(1 + f^2(\theta))N(\theta) + N(\ddot{\theta})] \right)' = B(\dot{\theta}) \quad (1.12)$$

denklemini bulunur. (1.10) denkleminde  $B(\dot{\theta}) = -f(\theta)N(\theta)$  olduğunu biliyoruz. Bu eşitlik (1.12) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\left( \frac{1}{f(\dot{\theta})} [(1 + f^2(\theta))N(\theta) + N(\ddot{\theta})] \right)' = -f(\theta)N(\theta) \quad (1.13)$$

elde edilir. Bu denklemde de gerekli düzenlemeler yapılsa;

$$\frac{1}{f(\theta)} \left[ \left( \frac{1}{f(\dot{\theta})} [(1 + f^2(\theta))N(\theta) + N(\ddot{\theta})] \right)' \right] + N(\theta) = 0 \quad (1.14)$$

denklemini bulunur. Bu diferansiyel denklemin genel çözümü kolayca elde edilemeyeceğinden Öklid uzayında genel konum vektörünü  $\kappa$  eğriligi ve  $\tau$  burulmasıyla ifade edemeyeceğiz. Genel olarak bu problemi çözmek zordur. Ancak düzlem eğrileri, helis ve silindirik helis gibi bazı özel eğriler için çözülmüştür (Ali, 2010; Ali, 2012b; Izumiya and Takeuchi, 2004; Ali, 2011).

#### Örnek

$\psi(s)$ , Öklid uzayında Frenet çatısına göre genel helisin konum vektörü olmak üzere:

$$\psi(s) = \left[ (s + c_3) - \frac{\kappa(s)v(s)}{\tau(s)} \right] T(s) - \frac{1}{\tau(s)} v(s)' N(s) + v(s) B(s) \quad (1.15)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned} v(s) = & \cos \left[ \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa} \int \kappa \, ds \right] \left( c_1 - \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \int (s + c_3) \kappa \sin \left[ \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa} \int \kappa \, ds \right] ds \right) \\ & + \sin \left[ \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa} \int \kappa \, ds \right] \left( -\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \int (s + c_3) \kappa \cos \left[ \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa} \int \kappa \, ds \right] ds \right) \end{aligned}$$

$c_1, c_2$  ve  $c_3$  keyfi sabitlerdir (Ali, 2011).

### Örnek

$\psi(s)$ , Öklid uzayında Frenet çatısına göre dairesel helisin konum vektörü olmak üzere;

$$\psi(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) + \nu(s)B(s)$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned}\lambda(s) &= \frac{\tau^2(s + c_3)}{\kappa^2 + \tau^2} - \frac{\kappa}{\tau} \left( c_1 \cos \left[ s\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \right] + c_2 \sin \left[ s\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \right] \right) \\ \mu(s) &= -\frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} + \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\tau} \left( c_1 \sin \left[ s\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \right] + c_2 \cos \left[ s\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \right] \right) \\ \nu(s) &= \frac{\kappa\tau(s + c_3)}{\kappa^2 + \tau^2} + c_1 \cos \left[ s\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \right] + c_2 \sin \left[ s\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \right]\end{aligned}$$

$c_1, c_2$  ve  $c_3$  keyfi sabitlerdir (Ali, 2011). Öte yandan Galileo uzayında yukarıda belirtilen problem genel eğriler için çözülmüştür (Ali, 2012a; Şahin and Dirişen 2017).

Bu çalışmanın temel amacı yukarıdaki problemi Frenet çatısına göre 3-boyutlu izotropik uzaydaki eğriler için çözmektir. Öncelikle izotropik uzayda Frenet çatısını kullanarak eğriliklerle ifade edilen genel konum vektörünü belirleyeceğiz. Daha sonra bu konum vektörünü bazı özel eğriler için elde edeceğiz. Ayrıca bazı eğrilerin grafiklerini vereceğiz.

#### 1.1. Teorem (Eğrilerin Temel Teoremi, Varlık Kısımı)

Varsayalım ki  $\kappa > 0$  olmak üzere  $\kappa: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $\tau: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda eğriliği ve burulması  $\kappa$  ve  $\tau$  olan birim hızlı  $\beta: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi vardır.  $a < s_0 < b$  için  $\beta(s_0)$  değeri keyfi olarak belirlenebilir (Gray, Salamon ve Abbena, 2006).

#### 1.2. Teorem (Eğrilerin Temel Teoremi, Teklik Kısımı)

$\alpha$  ve  $\gamma$  aynı  $(a, b)$  aralığında tanımlanan  $\mathbb{R}^3$  de birim hızlı eğriler olsun. Aynı zamanda  $\alpha$  ve  $\gamma$  eğrilerinin aynı burulma ve aynı pozitif eğrilığe sahip olduklarını varsayalım. O halde

$\alpha$  eğrisini bir F katı hareketiyle birlikte  $\gamma$  eğrisine eşleyebiliriz (Gray, Salamon ve Abbena, 2006).





## 2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ

Bu çalışmada Frenet çatısına göre izotropik uzayda eğrilerin, eğrilik fonksiyonlarıyla belirlenen genel konum vektörleri incelenmiştir. Bu çalışmaya benzer çalışmalar ve izotropik uzayda yapılan diğer çalışmalar aşağıda kısaca tanıtılmıştır.

Ali, (2012a) makalesinde Frenet çatısına göre 3- boyutlu Galileo uzayında eğrilerin konum vektörleri incelenmiştir. Eğrilerin konum vektörü eğrilik ve burulma cinsinden ifade edilmiştir. Son olarak 3- boyutlu Galileo uzayında bazı özel eğrilerin örnekleri verilmiştir.

Şahin ve Dirişen (2017) yılında yaptıkları çalışmada Darboux çatısına göre 3- boyutlu Galileo uzayında eğrilerin konum vektörlerini eğrilik ve burulma cinsinden ifade etmişlerdir. Daha sonra bazı özel eğrilerin konum vektörleri için incelemeler yapılmış ve bunların grafikleri verilmiştir.

Bu çalışmalara ek olarak Sachs (1990) yılında yazdığı kitabı İzotropik uzayla ilgili kapsamlı bilgiler içermektedir.

Chen, Decu ve Verstraelen (2014) ve Aydın ve Ergut (2016b) makalelerinde İzotropik uzayda ekonomi ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

### 2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Bu kısımda, Öklid uzayındaki temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

#### 2.1.1. Tanım

Sıralı reel sayı üçlülerinden oluşan kümeye 3-boyutlu Öklid uzayı denir ve  $\mathbb{E}^3$  ile gösterilir (O'Neill, 2006).

$$\mathbb{E}^3 = \{(p_1, p_2, p_3) : p_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}$$

### 2.1.2. Tanım

$B \subseteq \mathbb{E}^3$  açık bir alt küme olmak üzere  $B$ 'nin her bir  $p$  noktasında  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun  $k$ . basamaktan tüm kısmi türevleri var ve sürekli ise bu fonksiyona  $p$  noktasında  $k$ . basamaktan diferansiyellenebilir veya  $C^k$ -sınıfındandır denir (O'Neill, 2006).

### 2.1.3. Tanım

$\mathbb{E}^3$  de bir  $v_p$  tanjant vektörü bir  $p$  başlangıç noktası ve bir  $v$  vektör kısmı olmak üzere iki kısımdan oluşur. Kısaca bir  $v_p$  tanjant vektörü  $p$  noktasından başlayıp  $p + v$  noktasında biten bir vektördür (O'Neill, 2006).

### 2.1.4. Tanım

Başlangıç noktası  $p \in \mathbb{E}^3$  olan tüm tanjant vektörlerin kümesi  $T_p(\mathbb{E}^3)$  ile gösterilir.  $T_p(\mathbb{E}^3)$  kümesi vektörlerde bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir ( $\mathbb{R}$  üzerinde) vektör uzayıdır (O'Neill, 2006).

### 2.1.5. Tanım

$\mathbb{E}^3$  ün her bir  $p$  noktasını bir  $v_p$  tanjant vektörüne karşılık getiren  $V$  fonksiyonuna  $\mathbb{E}^3$  de bir vektör alanı denir (O'Neill, 2006).

### 2.1.6. Tanım

$\mathbb{E}^3$  de  $U_1, U_2, U_3$  vektör alanları  $p \in \mathbb{E}^3$  için sırasıyla

$$U_1(p) = (1, 0, 0)_p$$

$$U_2(p) = (0, 1, 0)_p$$

$$U_3(p) = (0, 0, 1)_p$$

olarak tanımlansınlar. Bu vektör alanlarına  $\mathbb{E}^3$  ün doğal çatı alanı denir (O'Neill, 2006).

### 2.1.1. Teorem

$V, \mathbb{E}^3$  Öklid uzayı üzerinde tanımlı bir vektör alanı ise

$$V = \sum_{i=0}^3 v_i U_i$$

olacak şekilde  $\mathbb{E}^3$  de tek türlü olarak belirlenmiş  $v_1, v_2, v_3$  reel değerli fonksiyonları vardır.  $v_p, w_p \in T_p(\mathbb{E}^3)$  için  $v_p = (v_1, v_2, v_3)_p$  ve  $w_p = (w_1, w_2, w_3)_p$  olsun. Bu vektörlerin nokta çarpımları

$$v_p \cdot w_p = v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

olarak tanımlanır. Ayrıca  $v_p$  ve  $w_p$  vektörleri arasındaki açı  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  olmak üzere

$$v_p \cdot w_p = \|v_p\| \|w_p\| \cos \theta$$

dır. Buradan sıfırdan farklı iki vektör arasındaki açı

$$\cos \theta = \frac{v_p \cdot w_p}{\|v_p\| \|w_p\|}$$

olarak verilir. Buradan hareketle

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow v_p \perp w_p$$

elde edilir (O'Neill, 2006).

### 2.1.7. Tanım

$e_1, e_2, e_3 \in T_p(\mathbb{E}^3)$  tanjant vektörleri için

$$e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = 1$$

$$e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0$$

ise bu vektörlere  $p \in \mathbb{E}^3$  de bir çatı denir (O'Neill, 2006).

### 2.1.8. Tanım

$v_p, w_p \in T_p(\mathbb{E}^3)$  vektörleri,  $v_p = (v_1, v_2, v_3)_p$  ve  $w_p = (w_1, w_2, w_3)_p$  olsun.

$$v_p \times w_p = \begin{vmatrix} U_1(p) & U_2(p) & U_3(p) \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

vektörüne  $v_p$  ve  $w_p$  vektörlerinin vektörel çarpımı denir.  $v_p \times w_p$  vektörü hem  $v_p$ 'ye hem de  $w_p$ 'ye dik bir vektördür. Ayrıca  $v_p$  ve  $w_p$  vektörleri arasındaki açı  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  olmak üzere  $\|v_p \times w_p\| = \|v_p\| \|w_p\| \sin \theta$  dır (O'Neill, 2006).

## 2.2. Öklid Uzayında Eğriler

### 2.2.1. Tanım

$I \subseteq \mathbb{R}$  bir açık aralık olsun.  $I \subseteq \mathbb{R}$  açık aralığından  $\mathbb{E}^3$ 'e giden diferansiyellenebilir bir  $\alpha$  fonksiyonuna  $\mathbb{E}^3$  de bir eğri denir.

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

$\alpha$ 'nın diferansiyellenebilir olması için  $\alpha_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$  fonksiyonları diferansiyellenebilir olmalıdır (O'Neill, 2006).

#### Örnek

$I \subseteq \mathbb{R}$  bir açık aralık olsun.  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  p noktasından geçen doğrultmanı  $v$  olan doğru denklemini

$$t \rightarrow \alpha(t) = p + tv$$

şeklindedir. Burada  $p = (p_1, p_2, p_3)$  ve  $v = (v_1, v_2, v_3)$  alınırsa,  
 $\alpha(t) = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, p_3 + tv_3)$  olarak yazılabilir (O'Neill, 2006).

*Örnek*

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  olarak tanımlı ve  $b \neq 0$  olmak üzere

$$t \rightarrow \alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

dairesel helis eğrisinin konum vektörüdür (O'Neill, 2006).

### 2.2.2. Tanım

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$   $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$  bir eğri olsun.

$$\alpha'(t) = \left( \frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t) \right)$$

vektörüne  $\alpha$ 'nın  $\alpha(t)$  noktasındaki hız vektörü denir.

Bu vektör, eğriye  $\alpha(t)$  noktasında teğet olan bir vektördür.

$$v(t) = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_2}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_3}{dt}(t)\right)^2}$$

şeklinde tanımlanan  $v(t)$  fonksiyonuna da  $\alpha$ 'nın  $t$ ' deki hızı denir (O'Neill, 2006).

### 2.2.3. Tanım

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  bir eğri ve  $J \subseteq I$  bir açık aralık olsun.  $h: J \subseteq I$  diferansiyellenebilir fonksiyonu için  $\beta(s) = \alpha(h(s)): J \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisine  $\alpha$ 'nın  $h$  ile yeniden parametrelenişi denir (O'Neill, 2006).

### 2.2.1. Yardımcı teorem

$\beta$  bir  $\alpha$  eğrisinin  $h$  ile yeniden parametrelenişi ise

$$\beta'(s) = \frac{d h(s)}{ds} \alpha'(h(s))$$

dir (O'Neill, 2006).

### 2.2.4. Tanım

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  bir eğri olsun.  $\forall t_1, t_2 \in I$  için  $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$  oluyorsa  $\alpha$  eğrisi birebirdir denir (O'Neill, 2006).

### 2.2.5. Tanım

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  bir eğri olsun.  $\forall t \in I$  için  $\alpha(t + p) = \alpha(t)$  olacak şekilde bir  $p > 0$  sayısı varsa  $\alpha$  eğrisine periyodiktir denir. Bu özelliği sağlayan  $p$  sayılarının en küçüğüne eğrinin periyodu denir (O'Neill, 2006).

### 2.2.6. Tanım

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  bir eğri olsun.  $\forall t \in I$   $\alpha'(t) \neq 0$  ise eğriye regüler eğri denir (O'Neill, 2006).

### 2.2.7. Tanım

Bir  $\alpha$  eğrisinin  $t = a$  dan  $t = b$ ' ye kadar olan yayın uzunluğu

$$l = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

ile hesaplanır.  $\alpha$  eğrisinin  $t = 0$  dan  $t'$  ye kadar olan yayının uzunluğu ise

$$s(t) = \int_0^t \| \alpha'(u) \| du$$

fonksiyonu ile verilir. Bu fonksiyona  $\alpha$ 'nın yay uzunluğu fonksiyonu denir (O'Neill, 2006).

### 2.2.1. Teorem

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  regüler bir eğri ise her zaman parametre değişimi ile birim hızlı bir  $\beta$  parametrik gösterimi elde edilebilir (O'Neill, 2006).

#### İspat

Yay uzunluğu tanımından integralin bir sınırı sabit tutulup diğeri değişken olarak alındığında yay uzunluğu fonksiyonu elde edilir.

$s(t) = \int_0^t \| \alpha'(u) \| du$  fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun  $t$ ' ye göre türevi  $\frac{ds}{dt} = \| \alpha'(t) \|$  biçimindedir.  $\alpha$  eğrisi regüler ve norm pozitif olduğundan  $\frac{ds}{dt} > 0$  olur. Ters fonksiyon teoreminden  $s$  fonksiyonunun  $t = t(s)$  şeklinde bir ters fonksiyonu vardır ve  $t = t(s)$  noktasındaki  $\frac{dt}{ds}$  türevi ile  $s = s(t)$  noktasındaki  $\frac{ds}{dt}$  türevi arasındaki ilişki

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

olur.  $\beta(s) = \alpha(t(s))$  parametre değişimi ile  $\beta$  eğrisinin birim hızlı olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \alpha'(t(s)) \frac{dt}{ds} \\ \| \beta'(s) \| &= \| \alpha'(t(s)) \frac{dt}{ds} \| \\ &= \| \alpha'(t(s)) \| \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \\ &= 1 \end{aligned}$$

### 2.2.8. Tanım

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  bir eğri olsun.  $\alpha$ 'nın her  $\alpha(t)$  noktasına bir  $Y(t)$  vektörünü karşılık getiren  $Y$  fonksiyonuna  $\alpha$  üzerinde bir vektör alanı denir.

Örneğin,  $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t))$  eğri üzerinde bir vektör alanıdır.

$$\begin{aligned} Y(t) &= (y_1(t), y_2(t), y_3(t))_{\alpha(t)} \\ &= \sum y_i(t) U_i(\alpha(t)) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Özel olarak  $\alpha''(t) = (\alpha''_1(t), \alpha''_2(t), \alpha''_3(t))_{\alpha(t)}$   $\alpha$ 'nın ivme vektör alanı denir (O'Neill, 2006).

### 2.2.2. Yardımcı teorem

$Y$  ve  $Z$  bir  $\alpha$  eğrisi üzerinde iki vektör alanı,  $f$   $\alpha$  eğrisi üzerinde tanımlı, reel değerli, diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise  $a, b \in \mathbb{R}$  olmak üzere

- 1)  $(aY + bZ) = aY' + bZ'$
- 2)  $(fY)' = f'Y + fY'$
- 3)  $(Y \cdot Z)' = Y' \cdot Z + Y \cdot Z'$
- 4)  $(Y \times Z) = Y' \times Z + Y \times Z'$

biçiminde verilir (O'Neill, 2006).

### 2.2.3. Yardımcı teorem

Eğer  $Y$  vektör alanının büyüklüğü sabit ise ( $\|Y\| = \text{sabit}$ )  $Y$ 'nin türevi kendisine ortogonaldır (O'Neill, 2006).

### 2.2.9. Tanım

Eğer bir  $\alpha$  eğrisinin üzerindeki bir  $Y$  vektör alanının vektör kısmı aynı



$c = (c_1, c_2, c_3)$  sabiti ise  $Y$ 'ye paralel vektör alanı denir (O'Neill, 2006).

$$Y(t) = (c_1, c_2, c_3)_{\alpha(t)} = \sum c_i U_i$$

### 2.3. $E^3$ de Birim Hızlı Eğrilerde Frenet Formülleri

#### 2.3.1. Tanım

$\beta: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ ,  $s \in I$  birim hızlı bir eğri olsun. Dolayısıyla  $\|\beta'(s)\| = 1$  dir.  $T(s) = \beta'(s)$  hız vektörü  $\beta(s)$  noktasında eğrinin teğet vektörü olduğundan ve bir birim vektör olduğundan  $\beta'(s)$  vektörü birim teğet vektördür.  $T(s) = \beta'(s)$  vektör alanına eğri boyunca birim teğet vektör alanı denir.  $T'(s) = \beta''(s)$  vektör alanına ise eğrinin normal vektör alanı denir.

$$T \cdot T = 1 \Rightarrow T' \cdot T + T \cdot T' = 0 \Rightarrow T \cdot T' = 0$$

Yani normal vektör alanı teğet vektör alanına diktir (O'Neill, 2006).

#### 2.3.2. Tanım

$\forall s \in I$  için  $\kappa(s) = \|T'(s)\|$  reel değerli fonksiyonuna  $\beta$ 'nin eğrilik fonksiyonu denir.  $\kappa$  eğrinin teğetinden ne kadar saptığını gösterir.

$\kappa > 0$  olması durumunda

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

vektör alanına  $\beta$ 'nin birim normal vektör alanı denir.  $B(s) = T(s) \times N(s)$  vektör alanına da  $\beta$ 'nin binormal vektör alanı denir.

$T$  ve  $N$  birim vektör alanları olduğundan  $B$  de birim vektör alanıdır. Çünkü;

$$\begin{aligned} \|B\| &= \|T \times N\| = \|T\| \|N\| \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ \Rightarrow \|B\| &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir (O'Neill, 2006).

### 2.3.1. Yardımcı teorem

$\beta, \mathbb{E}^3$  de  $\kappa > 0$  olan birim hızlı bir eğri olsun.  $\beta$  üzerindeki  $T, N, B$  vektör alanları her noktada birbirine dik birim vektör alanlarıdır (O'Neill, 2006).

### 2.3.3. Tanım

$\{T, N, B\}$  kümesine  $\beta$  eğrisi boyunca Frenet çatı alanı denir (O'Neill, 2006).

### 2.3.2. Yardımcı teorem

$T', N', B'$  vektör alanları da  $T, N, B$ 'nin bir lineer toplamı olarak yazılabilir (O'Neill, 2006).

*İspat*

Bir  $\beta$  eğrisi için  $T = \beta'$  olduğundan;  $T' = \beta'' = \kappa N$  bulunur. Ayrıca

$B \cdot T = 0 \Rightarrow B' \cdot T + B \cdot T' = 0$  olduğundan

$$\begin{aligned} \Rightarrow B' \cdot T &= -B \cdot T' \\ &= -B \cdot \kappa N \\ &= -\kappa B \cdot N = 0 \quad (\|T'\| = \kappa) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} B \cdot B &= 1 \Rightarrow B' \cdot B + B' \cdot B = 0 \\ \Rightarrow B \cdot B' &= 0 \end{aligned}$$

$B'$  vektör alanının ortonormal açılımını yazarsak;

$$\begin{aligned} B' &= (B' \cdot T) T + (B' \cdot N) N + (B' \cdot B) B \\ \Rightarrow B' &= (B' \cdot N) N \end{aligned}$$

elde edilir.  $B' \cdot N = -\tau$  olarak tanımlansın.

$$\Rightarrow B' = -\tau N$$

olur (O'Neill, 2006).

#### 2.3.4. Tanım

$\tau = -B' \cdot N$  fonksiyonuna  $\beta$  eğrisinin burulma fonksiyonu denir (O'Neill, 2006).

#### 2.3.1. Teorem

$\beta: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğriliği  $\kappa > 0$  ve burulması  $\tau$  olan birim hızlı bir eğri olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

dir. Bu formüllere Frenet formülleri denir. Bu formüller matris formunda:

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

şeklindedir (O'Neill, 2006).

*İspat*

$N = \frac{T'}{\|T'\|} = \frac{T'}{\kappa}$  olduğundan  $T' = \kappa N$  elde edilir.  $B' = -\tau N$  olduğunu daha önce kabul etmiştik.  $N'$  nin ortonormal açılımını yazalım.

$$N' = (N' \cdot T)T + (N' \cdot N)N + (N' \cdot B)B$$

$N \cdot T = 0$  olduğundan  $N' \cdot T + N \cdot T' = 0$  dir.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow N' \cdot T &= -N \cdot T' = -N \cdot \kappa N \\
&= -\kappa N \cdot N \\
&= -\kappa \\
N \cdot N &= 1 \Rightarrow N' \cdot N + N \cdot N' = 0
\end{aligned}$$

Buradan  $N \cdot N' = 0$  bulnür.

$$\begin{aligned}
N \cdot B &= 0 \Rightarrow N' \cdot B + N \cdot B' = 0 \Rightarrow N' \cdot B = -N \cdot B' \\
&= -N \cdot (-\tau N) \\
&= \tau N \cdot N = \tau
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde bunları  $N'$  nün ortonormal açılımında yerine yazarsak;

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

elde edilir (O'Neill, 2006).

## 2.4. $E^3$ de Keyfi Hızlı Eğrilerde Frenet Formülleri

### 2.4.1. Teorem

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3, \kappa > 0$  eğrilikli regüler bir eğri olsun. Bu durumda ;

$$\begin{aligned}
T' &= \kappa v N \\
N' &= -\kappa v T + \tau v B \\
B' &= -\tau v N
\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada  $v = \|\alpha'\|$ ,  $\alpha'$  nın hız fonksiyonudur (O'Neill, 2006).

*İspat*

$\bar{\alpha}$ ,  $\alpha'$  nın birim hızlı parametrelenişi olsun. O halde  $\alpha = \bar{\alpha}(s)$  dir. s,  $\alpha'$  nın yay uzunluğu fonksiyonu olmak üzere  $T = \bar{T}(s)$  dir. Zincir kuralı uygulanırsa;

$$T' = \overline{T}'(s) \frac{ds}{dt}$$

elde edilir.  $\overline{T}'(s) = \overline{\kappa}(s)\overline{N}(s)$  olduğundan

$$\begin{aligned} T' &= \overline{\kappa}(s)\overline{N}(s) \frac{ds}{dt} \\ &= \kappa N \frac{ds}{dt} \\ &= \kappa v N \end{aligned}$$

bulunur. Diğerleri de benzer şekilde gösterilir.

#### 2.4.1. Yardımcı teorem

$\alpha, v$  hız fonksiyonlu bir regüler eğri ise  $\alpha$ 'nın hız ve ivme vektörleri ;

$$\begin{aligned} \alpha' &= vT \\ \alpha'' &= \frac{dv}{dt}T + \kappa v^2 N \end{aligned}$$

biçimindedir (O'Neill, 2006).

*İspat*

$\overline{\alpha}$ ,  $\alpha$ 'nın birim hızlı parametrelenişi ise

$$\alpha = \alpha(s)$$

olup,

$$\Rightarrow \alpha' = \overline{\alpha}'(s) = \overline{T}(s) \frac{ds}{dt} = v\overline{T}(s) = vT$$

elde edilir. Bir kez daha türev alınırsa,

$$\Rightarrow \alpha'' = \frac{dv}{dt}T + vT'$$

$$= \frac{dv}{dt}T + \kappa v^2 N$$

bulunur.

### 2.4.2. Teorem

$\alpha, \mathbb{E}^3$  de regüler bir eğri olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} T' &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \\ N &= B \times T \\ B &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \\ \kappa &= \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \\ \tau &= \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır (O'Neill, 2006).

*İspat*

$\alpha' = vt$  ve  $v = \|\alpha'\|$  olduğundan  $T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$  elde edilir.

$$\begin{aligned} \alpha' \times \alpha'' &= (vT) \times \left( \frac{dv}{dt}T + \kappa v^2 N \right) \\ &= v \frac{dv}{dt} (T \times T) + \kappa v^3 (T \times N) \\ &= \kappa v^3 B \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\alpha' \times \alpha''\| = \|\kappa v^3 B\| = \kappa v^3 \|B\| = \kappa v^3$$

$\kappa v^3 B$  eşitliğinden  $B$ 'yi çekersek, binormal vektör alanı;

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\kappa v^3} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

olarak elde edilir. Ayrıca  $\kappa$  eğriliği

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{v^3} = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

olarak bulunur.  $\alpha'$ 'nin ikinci türevi;

$$\alpha'' = \frac{dv}{dt}T + \kappa v^2 N$$

biçimindedir.  $\alpha'$ 'nin üçüncü türevi;

$$\begin{aligned} \alpha''' &= \left( \frac{dv}{dt}T + \kappa v^2 N \right)' = \kappa v^2 N' + 2\kappa v v' N + \kappa v^2 N' \\ &= \kappa v^3 \tau B + \dots \end{aligned}$$

biçimindedir. O halde

$$(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' = \kappa^2 v^6 \tau$$

bulunur. Buradan  $\tau$  burulma fonksiyonu çekilirse;

$$\tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{\kappa^2 v^6} = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

elde edilir.

#### 2.4.1. Tanım

$\mathbb{E}^3$  de regüler bir  $\alpha$  eğrisinin teğet vektör alanı  $T$ , eğrinin her noktasında bir  $u$  birim vektörü ile sabit bir  $\theta$  açısı yapıyorsa,  $\alpha$  eğrisine silindirik helis denir. Bu durumda  $T$  ile  $u$  arasındaki açı eğri boyunca sabittir. Eğrinin  $T$  teğet vektör alanı ile  $u$  sabit birim vektörü arasındaki açı  $\theta$  ise  $T \cdot u = \cos \theta$  dır (O'Neill, 2006).

### 2.4.3. Teorem

$\kappa > 0$  eğrilikli regüler bir  $\alpha$  eğrisi silindirik helistir ancak ve ancak  $\frac{\tau}{\kappa}$  sabittir (O'Neill, 2006).

*İspat*

“ $\Rightarrow$ ”  $\alpha$  bir silindirik helistir olsun.  $\alpha$  yı birim hızlı olarak alalım. Buradan eğrinin  $T$  teğet vektör alanı ile bir  $u$  sabit birim vektörü sabit açı yapar. Bu  $\theta$  açısı ise  $T \cdot u = \cos \theta$  dır. Türev alınırsa,

$$(T \cdot u)' = T' \cdot u = \kappa N \cdot u = 0$$

olduğundan  $N$  ile  $u$  vektörleri birbirine diktir. O halde  $u$  vektörü  $T$  ile  $B$  nin belirlediği düzlemdir.  $u = \cos \theta T + \sin \theta B$  dir. Türev alınırsa

$$\cos \theta T' + \sin \theta B' = \cos \theta \kappa N - \sin \theta \tau N = 0$$

elde edilir. O halde  $\cos \theta \kappa - \sin \theta \tau = 0$  olup  $\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta = \text{sabit}$  bulunur.

“ $\Leftarrow$ ”  $\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$  olsun. O halde  $\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta$  olacak şekilde  $\theta \in \mathbb{R}$  vardır. Buradan  $\tau \sin \theta = \kappa \cos \theta$  olur.  $u = \cos \theta T + \sin \theta B$  vektörünü göz önüne alalım. Türev alırsak;

$$u' = \cos \theta T' + \sin \theta B' = \cos \theta \kappa N - \sin \theta \tau N = (\cos \theta \kappa - \sin \theta \tau) N = 0$$

elde edilir. O halde  $u$  vektörü sabittir. Ayrıca  $u$  birim vektördür ve  $T \cdot u = \cos \theta$  olduğundan, eğrinin birim teğet vektör alanı  $T$  ile sabit açı yapar. Dolayısıyla eğri bir silindirik helistir (O'Neill, 2006).



Çizelge 2.1. Bazı eğrilerin eğrilik ve burulma fonksiyonlarına göre durumları verilmiştir (Şahin and Dirişen, 2017).

| $\kappa$ eğriliği ve $\tau$ burulması                              | $\alpha$ eğrisi       |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| $\kappa = 0$                                                       | Doğru                 |
| $\tau = 0$                                                         | Düzlemsel eğri        |
| $\kappa \equiv \text{sabit} > 0$ ve $\tau = 0$                     | Çember                |
| $\kappa \equiv \text{sabit} > 0$ ve $\tau \equiv \text{sabit} > 0$ | Dairesel helis        |
| $\frac{\tau}{\kappa} \equiv \text{sabit} \neq 0$                   | Silindirik helis      |
| $\kappa \equiv \text{sabit}$ ve $\tau \neq \text{sabit}$           | Salkowski eğrisi      |
| $\kappa \neq \text{sabit}$ ve $\tau \equiv \text{sabit}$           | Anti-Salkowski eğrisi |

## 2.5. İzotropik Uzayda Temel Kavramlar

### 2.5.1. Tanım

İzotropik geometri aşağıdaki 6-parametrelili afin  $G_6$  grubu altında korunan özellikleri inceleyen geometridir.

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) &\rightarrow (x', y', z') \\
 x' &= a + x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\
 y' &= b + x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \\
 z' &= c + c_1 x + c_2 y + z
 \end{aligned}
 \tag{2.5.1}$$

Burada  $a, b, c, c_1, c_2, \theta$  reel sayılardır. Bu afin dönüşümler izotropik kongrüans dönüşümleri (izotropik hareketler) olarak adlandırılır. İzotropik dönüşümlerin  $xy$  – düzlemine izdüşümü Öklid hareketlerini verir.  $P(x, y, z) \rightarrow P'(x, y, 0)$  dönüşümü üstten görünüm (izdüşüm) olarak adlandırılır. Dolayısıyla, izotropik bir hareket,  $xy$  düzleminde bir Öklid hareketi ve  $z$  doğrultusunda bir afin kayma (öteleme) dönüşümünden oluşur (Sachs, 1990).

### 2.5.2. Tanım

$p = (p_1, p_2, p_3)$  ve  $q = (q_1, q_2, q_3)$   $I^3$  3-boyutlu izotropik uzayda iki nokta olsun. Bu iki noktanın skaler çarpımı

$$\langle , \rangle_i = \begin{cases} p_3 q_3, & p_i = 0 \text{ ve } q_i = 0 \ i = 1, 2 \\ p_1 q_1 + p_2 q_2, & p_i \neq 0 \text{ veya } q_i \neq 0 \ i = 1, 2 \end{cases} \quad (2.5.2)$$

şeklinde tanımlanır (Potman, Grohs and Mitra 2009; Erjavec, Divjak and Horvat 2011; Sachs, 1990).

### 2.5.3. Tanım

$p = (p_1, p_2, p_3)$  ve  $q = (q_1, q_2, q_3)$   $I^3$  3-boyutlu izotropik uzayda iki nokta olsun. Bu iki nokta paraleldir ancak ve ancak  $p_1 = q_1$  ve  $p_2 = q_2$  dir (Sachs, 1990).

### 2.5.4. Tanım

$p = (p_1, p_2, p_3)$  ve  $q = (q_1, q_2, q_3)$   $I^3$  3-boyutlu izotropik uzayda paralel olmayan iki nokta olsun. Bu iki nokta arasındaki uzaklık

$$\| p - q \|_i = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (q_i - p_i)^2} \quad (2.5.3)$$

ile tanımlıdır (Sachs, 1990).

### 2.5.5. Tanım

$p = (p_1, p_2, p_3)$  ve  $q = (q_1, q_2, q_3)$   $I^3$  3-boyutlu izotropik uzayda paralel iki nokta olsun. Bu iki nokta arasındaki uzaklık

$$\| p - q \|_i = q_3 - p_3 \quad (2.5.4)$$

ile tanımlıdır (Sachs, 1990).

### 2.5.6. Tanım

$I^3$  3-boyutlu izotropik uzayda bir eğri,  $I \subseteq \mathbb{R}$  bir açık aralık ve  $A_3$  reel 3- boyutlu bir afin uzayı olmak üzere  $\{0; x, y, z\}$  koordinat sistemi ile birlikte

$$\begin{aligned} \varphi: I &\rightarrow A_3 \\ t &\rightarrow \varphi(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}, t \in I \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

vektör değerli fonksiyonu ile tanımlanabilir. Burada  $\varphi(t) \in A_3, t \in I$  parametresine karşılık gelen eğri üzerinde bir noktadır. Bu eğri tanımından hareketle  $\varphi$  eğrisinin diferansiyellenebilir olması için  $x(t), y(t), z(t)$  fonksiyonlarının diferansiyellenebilir olması gerekir (Sachs, 1990).

### 2.5.7. Tanım

$\varphi(s)$ ,  $I^3$  izotropik uzayda bir eğri olsun. Eğer  $\varphi$  eğrisi, izotropik teğetlere sahip değilse yani  $\tilde{\varphi}(s) = (x(s), y(s))$  için  $\frac{d\tilde{\varphi}}{ds} \neq 0$  ise regüler eğri olarak adlandırılır (Sachs, 1990).

### 2.5.8. Tanım

$\varphi(t)$   $I^3$  izotropik uzayda regüler bir eğri olsun. Daha sonra  $[a, b]$  kapalı aralığında  $\varphi$  eğrisinin  $t = a$  dan  $t = b$  ' ye kadar olan izotropik yay uzunluğu

$$s := \int_{t=a}^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad (2.5.6)$$

ile hesaplanır (Sachs, 1990).

### 2.5.9. Tanım

$\varphi(s) = (x(s), y(s), z(s))$   $I^3$  izotropik uzayda bir eğri olsun. Eğer  $\forall s$  için

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$$

ise bu eğriye birim hızlı eğri adı verilir. Yani birim hızlı  $\varphi(s)$  eğrisi için  $\|\varphi'(s)\|_i = 1$  dir (Sachs, 1990).

### 2.5.10. Tanım

$I^3$  izotropik uzayında iki farklı doğru tipi vardır. Bunlardan  $z$  doğrultusuna paralel olanlara izotropik doğru adı verilir. Diğer doğrular non-izotropik doğru olarak adlandırılır (Sachs, 1990).

### 2.5.11. Tanım

$I^3$  izotropik uzayda izotropik doğruları içeren düzleme izotropik düzlem adı verilir. Diğer düzlemler de non-izotropik düzlem olarak adlandırılır (Sachs, 1990).

### 2.5.12. Tanım

$\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I^3$  yay uzunluğu tarafından parametrelendirilmiş  $\varphi(s) = (x(s), y(s), z(s))$  eğrisi ile  $\tilde{\varphi}(s) = (x(s), y(s))$  izdüşüm eğrisi kullanılarak eğrilik  $\kappa(s)$  ve burulma  $\tau(s)$  tanımlanır.

Bu durumda  $\varphi(s)$  eğrisinin  $\kappa(s)$  eğriliği ve  $\tau(s)$  burulması sırasıyla

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \det(\tilde{\varphi}'(s), \tilde{\varphi}''(s)) = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) \\ \tau(s) &= \frac{1}{\kappa^2(s)} \det(\varphi'(s), \varphi''(s), \varphi'''(s)) = \frac{\det(\varphi'(s), \varphi''(s), \varphi'''(s))}{[\det(\tilde{\varphi}'(s), \tilde{\varphi}''(s))]^2} \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

şeklinde tanımlanır (Potman, Grohs and Mitra 2009; Sachs, 1990).

### 2.5.13. Tanım

$I^3$  izotropik uzayda  $s \in I \subseteq \mathbb{R}$  ile parametrelendirilmiş birim hızlı

$$\begin{aligned} \varphi: I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow I^3 \\ s &\rightarrow \varphi(s) = (x(s), y(s), z(s)) \end{aligned}$$

eğrisi için

$$T(s) = (x'(s), y'(s), z'(s)) = \varphi'(s) \quad (2.5.8)$$

eşitliğiyle verilen  $T(s)$  vektörüne  $\varphi$  eğrisinin  $\varphi(s)$  noktasındaki birim teğet vektör alanı denir (Potman, Grohs and Mitra 2009; Erjavec, Divjak and Horvat 2011; Sachs, 1990).

#### 2.5.14. Tanım

$I^3$  izotropik uzayda,  $s \in I \subseteq \mathbb{R}$  ile parametrelendirilmiş birim hızlı

$$\begin{aligned} \varphi: I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow I^3 \\ s &\rightarrow \varphi(s) = (x(s), y(s), z(s)) \end{aligned}$$

eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} (x''(s), y''(s), z''(s)) \quad (2.5.9)$$

eşitliğiyle belirli  $N(s)$  vektörüne  $\varphi$  eğrisinin  $\varphi(s)$  noktasındaki asli normal vektör alanı ya da birim dik vektör alanı denir (Potman, Grohs and Mitra 2009; Erjavec, Divjak and Horvat 2011; Sachs, 1990).

#### 2.5.15. Tanım

$I^3$  izotropik uzayda,  $s \in I \subseteq \mathbb{R}$  ile parametrelendirilmiş birim hızlı

$$\begin{aligned} \varphi: I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow I^3 \\ s &\rightarrow \varphi(s) = (x(s), y(s), z(s)) \end{aligned}$$

eğrisi için

$$B = (0, 0, 1) \quad (2.5.10)$$

eşitliğiyle belirli  $B(s)$  vektörüne  $\varphi$  eğrisinin  $\varphi(s)$  noktasındaki binormal vektör alanı denir (Potman, Grohs and Mitra 2009; Erjavec, Divjak and Horvat 2011; Sachs, 1990).

### 2.5.16. Tanım

$I^3$  izotropik uzayda,  $s \in I \subseteq \mathbb{R}$  ile parametrelendirilmiş birim hızlı

$$\begin{aligned}\varphi: I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow I^3 \\ s &\rightarrow \varphi(s) = (x(s), y(s), z(s))\end{aligned}$$

şeklinde verilsin.

Bu eğrinin Frenet vektörleri

$$\begin{aligned}T(s) &= \gamma'(s) \\ N(s) &= \frac{1}{\kappa(s)}(x''(s), y''(s), z''(s)) \\ B &= (0, 0, 1)\end{aligned}\tag{2.5.11}$$

şeklindedir. Bu durumda Frenet formülleri de

$$\begin{aligned}T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= 0\end{aligned}\tag{2.5.12}$$

ile verilir (Sachs, 1990).

### 2.5.17. Tanım

$\kappa(s) \neq 0 \in C^1$  ve  $\tau(s) \in C^0$  bir  $I = (a, b)$  açık aralığında tanımlanan eğrilik fonksiyonları olsun. Bu durumda eğriliği ve burulması  $\kappa(s)$  ve  $\tau(s)$  olan regüler  $\varphi: (a, b) \rightarrow I^3$  eğrisi vardır. İzotropik hareketler dışında bu eğri tek türlü olarak belirlenir (Sachs, 1990).

### 3. BULGULAR VE TARTIŞMA

#### 3.1. İzotropik Uzayda Eğrilerin Konum Vektörleri

Bu bölümde İzotropik uzayda eğrilerin eğrilik fonksiyonlarıyla ifade edilen genel konum vektörünü ve özel eğrilerin genel konum vektörünü elde edeceğiz.

##### 3.1.1 Teorem

$\kappa \neq 0$  ve  $\tau$  fonksiyonları  $\mathbb{R}$  üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, izotropik uzay  $I_3$  de eğriliği ve burulması  $\kappa$  ve  $\tau$  olan  $s$  yay parametrelili birim hızlı bir  $\alpha(s)$  eğrisinin Frenet çatısına göre konum vektörünün doğal gösterim formu:

$$\begin{aligned} \alpha(s) = & \left( c_1 \int \left[ \int \kappa C_\kappa ds \right] ds + c_2 \int \left[ \int \kappa S_\kappa ds \right] ds, \right. \\ & c_3 \int \left[ \int \kappa C_\kappa ds \right] ds + c_4 \int \left[ \int \kappa S_\kappa ds \right] ds, \\ & - \int \left[ \int \left( \kappa C_\kappa \int S_\kappa \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right) ds \right] ds \\ & \left. + \int \left[ \int \left( \kappa S_\kappa \int C_\kappa \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right) ds \right] ds \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

şeklindedir. Burada  $( )'$  sembolü  $s$  parametresine göre türev belirtir ve

$C_\kappa = \cos[\int \kappa ds]$  ve  $S_\kappa = \sin[\int \kappa ds]$  olarak alınmıştır. Burada  $\int$  sembolü  $\int_0^a$  sembolü anlamına gelmektedir. Aksi belirtilmediği sürece  $\int$  sembolü  $\int_0^a$  belirli integralini gösterecektir. Verilen  $c_1, c_2, c_3$  ve  $c_4$  katsayıları  $\alpha(s)$  eğrisi regüler bir eğri olacak şekilde Sonuç 3.1.1 de verilmiştir.

##### İspat

$\alpha(s)$ , İzotropik uzay  $I_3$  de keyfi bir eğri olsun. Frenet denklemlerini kullanarak genel konum vektörünü elde edebiliriz. İzotropik uzayda Frenet formülleri

$$T' = \kappa N \quad (3.2)$$

$$N' = \tau B - \kappa T \quad (3.3)$$

$$B' = 0 \quad (3.4)$$

şeklindedir. (3.3) denklemi düzenlenirse

$$\kappa T = \tau B - N' \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.5) Eşitliğinde  $\kappa \neq 0$  olarak kabul edilir ve denklem  $\kappa$  ya bölünürse;

$$T = \frac{\tau}{\kappa} B - \frac{1}{\kappa} N' \quad (3.6)$$

olarak bulunur. Burada (3.6) eşitliğinin s yay parametresine göre türevi alınır;

$$T' = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' B - \left(\frac{1}{\kappa} N'\right)' \quad (3.7)$$

elde edilir. (3.2) eşitliği kullanılarak bu denklem yeniden düzenlenirse;

$$\kappa N = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' B - \left(\frac{1}{\kappa} N'\right)' \quad (3.8)$$

elde edilir. Bu denklem s parametrelili  $N$  ye bağlı bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemde  $t = \int \kappa ds$  equiform parametre değişimi yapılırsa;

$$\ddot{N} + N = \left(\frac{\dot{\tau}}{\kappa}\right) B \quad (3.9)$$

elde edilir. Burada ( )' sembolü t parametresine göre türevi belirtir. (3.4) eşitliğinde  $B = (0, 0, 1)$  olduğunu biliyoruz. Buna göre eşitlik düzenlenirse;

$$\ddot{N} + N = \left(0, 0, \left(\frac{\dot{\tau}}{\kappa}\right)\right) \quad (3.10)$$

bulunur.  $N = (N_1, N_2, N_3)$  vektörü (3.10) denkleminde yerine yazılırsa;



$$((\ddot{N}_1) + (N_1), (\ddot{N}_2) + (N_2), (\ddot{N}_3) + (N_3)) = \left(0, 0, \left(\frac{\dot{t}}{\kappa}\right)\right) \quad (3.11)$$

elde edilir. Bu denklemi çözebilmek için  $g(t) = \left(\frac{\dot{t}}{\kappa}\right)$  olmak üzere

$$(\ddot{N}_1) + (N_1) = 0 \quad (3.12)$$

$$(\ddot{N}_2) + (N_2) = 0 \quad (3.13)$$

$$(\ddot{N}_3) + (N_3) = g(t) \quad (3.14)$$

denklemlerini ayrı ayrı çözmemiz gerekir. İlk olarak

$$(\ddot{N}) + N = 0 \quad (3.15)$$

denklemi çözülürse;

$$N_1 = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$$

$$N_2 = c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t)$$

çözümlerini elde ederiz. Daha sonra (3.14) denklemi parametrelerin değişimi yöntemiyle çözülürse;

$$N_3 = -\cos(t) \left( \int \sin(t) g(t) dt \right) + \sin(t) \left( \int \cos(t) g(t) dt \right)$$

olarak bulunur. Bulmuş olduğumuz  $N_1, N_2$  ve  $N_3$  fonksiyonlarıyla birlikte  $N$ ;

$$N(t) = (c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t), c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t), -\cos(t) \left[ \int \sin(t) g(t) dt \right] + \sin(t) \left[ \int \cos(t) g(t) dt \right]) \quad (3.16)$$

şeklindedir.  $t = \int \kappa ds$  ve  $g(t) = \left(\frac{\dot{t}}{\kappa}\right)$  (3.16) denkleminde yerine yazılırsa;

$$N = \left( c_1 \cos \left( \int \kappa ds \right) + c_2 \sin \left( \int \kappa ds \right), \right. \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
& c_3 \cos \left( \int \kappa ds \right) + c_4 \sin \left( \int \kappa ds \right), \\
& - \cos \left( \int \kappa ds \right) \left[ \int \sin \left( \int \kappa ds \right) \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right] \\
& + \sin \left( \int \kappa ds \right) \left[ \int \cos \left( \int \kappa ds \right) \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.17) denklemi  $\kappa$  ile çarpılır ve (3.2) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
T' &= \left( \kappa c_1 \cos \left( \int \kappa ds \right) + \kappa c_2 \sin \left( \int \kappa ds \right), \right. \\
& \quad \kappa c_3 \cos \left( \int \kappa ds \right) + \kappa c_4 \sin \left( \int \kappa ds \right), \\
& \quad - \kappa \cos \left( \int \kappa ds \right) \left[ \int \sin \left( \int \kappa ds \right) \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right] \\
& \quad \left. + \kappa \sin \left( \int \kappa ds \right) \left[ \int \cos \left( \int \kappa ds \right) \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right] \right)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

olarak bulunur. (3.18) denklemi tekrardan düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
T' &= (\kappa c_1 C_\kappa + \kappa c_2 S_\kappa, \kappa c_3 C_\kappa + \kappa c_4 S_\kappa \\
& \quad - \kappa C_\kappa \left[ \int S_\kappa \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right] + \kappa S_\kappa \left[ \int C_\kappa \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right])
\end{aligned} \tag{3.19}$$

elde edilir. Burada  $C_\kappa = \cos(\int \kappa ds)$  ve  $S_\kappa = \sin(\int \kappa ds)$  olarak alındı. (3.19) eşitliğinden integral alınır;

$$\begin{aligned}
T &= \left( \int \kappa C_\kappa ds, \int \kappa S_\kappa ds, - \int \kappa C_\kappa \left[ \int S_\kappa \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right] ds \right. \\
& \quad \left. + \int \kappa S_\kappa \left[ \int C_\kappa \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right] ds \right) + d
\end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir. Burada  $d$  sabit bir vektördür ve  $d = (0, 0, 0)$  alınabilir.

$$T = \left( c_1 \int \kappa C_\kappa ds + c_2 \int \kappa S_\kappa ds, c_3 \int \kappa C_\kappa ds + c_4 \int \kappa S_\kappa ds \right) \tag{3.21}$$

$$- \int \kappa C_\kappa \left[ \int S_\kappa \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right] ds + \int \kappa S_\kappa \left[ \int C_\kappa \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right] ds$$

(3.21) eşitliğinden tekrar integral alınacak olursa konum vektörü bulunur.

$$\begin{aligned} \alpha(s) = & \left( c_1 \int \left[ \int \kappa C_\kappa ds \right] ds + c_2 \int \left[ \int \kappa S_\kappa ds \right] ds, \right. \\ & c_3 \int \left[ \int \kappa C_\kappa ds \right] ds + c_4 \int \left[ \int \kappa S_\kappa ds \right] ds, \\ & - \int \left[ \int \left( \kappa C_\kappa \int S_\kappa \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right) ds \right] ds \\ & \left. + \int \left[ \int \left( \kappa S_\kappa \int C_\kappa \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right) ds \right] ds \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Bu işlemler sonucunda (3.1) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

### 3.1.1. Sonuç

$\kappa \neq 0$  ve  $\tau$  fonksiyonları  $\mathbb{R}$  üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, izotropik uzay  $I_3$  de eğriliği ve burulması  $\kappa$  ve  $\tau$  olan  $s$  yay parametrelili birim hızlı regüler bir  $\alpha(s)$  eğrisinin Frenet çatısına göre konum vektörünün doğal gösterim formu:

$$\begin{aligned} \alpha(s) = & \left( \int \left[ \int \kappa C_\kappa ds \right] ds, \int \left[ \int \kappa S_\kappa ds \right] ds, \right. \\ & - \int \left[ \int \left( \kappa C_\kappa \int S_\kappa \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right) ds \right] ds \\ & \left. + \int \left[ \int \left( \kappa S_\kappa \int C_\kappa \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right) ds \right] ds \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

şeklinde dir. (3.1) denkleminde  $c_1 = c_4 = 1$  ve  $c_2 = c_3 = 0$  olarak alınmıştır.

Çizelge 3.1. İzotropik uzayda bazı eğrilerin eğrilik ve burulma fonksiyonlarına göre durumları verilmiştir.

| $\alpha(s)$ eğrisi için özel durumlar                              |                   |                       |
|--------------------------------------------------------------------|-------------------|-----------------------|
| $\kappa$ eğriliği ve $\tau$ burulması                              |                   | $\alpha$ eğrisi       |
| $\kappa = 0$                                                       | $\Leftrightarrow$ | Doğru                 |
| $\tau = 0$                                                         | $\Leftrightarrow$ | Düzlemsel eğri        |
| $\kappa \equiv \text{sabit} > 0$ ve $\tau \equiv \text{sabit} > 0$ | $\Leftrightarrow$ | Dairesel helis        |
| $\frac{\tau}{\kappa} \equiv \text{sabit} \neq 0$                   | $\Leftrightarrow$ | Silindirik helis      |
| $\kappa \equiv \text{sabit}$ ve $\tau \not\equiv \text{sabit}$     | $\Leftrightarrow$ | Salkowski eğrisi      |
| $\kappa \not\equiv \text{sabit}$ ve $\tau \equiv \text{sabit}$     | $\Leftrightarrow$ | Anti-Salkowski eğrisi |

### 3.1.2. Sonuç

İzotropik uzay  $I_3$  de doğrunun konum vektörü;

$$\alpha(s) = (d_1s + d_2, d_3s + d_4, d_5s + d_6) \quad (3.24)$$

şeklindedir. Burada  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$  ve  $d_6$  keyfi sabitlerdir.

*İspat*

(3.2) denkleminde iki kere integral alınırsa;

$$\alpha = \left( \int \int \kappa N_1, \iint \kappa N_2, \iint \kappa N_3 \right) \quad (3.25)$$

elde edilir. Bu denklemde  $\kappa = 0$  alınırsa;

$$\alpha(s) = (d_1s + d_2, d_3s + d_4, d_5s + d_6) \quad (3.26)$$

bulunur. Burada  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$  ve  $d_6$  keyfi sabitlerdir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

### 3.1.3. Sonuç

İzotropik uzay  $I_3$  de düzlemsel bir eğrinin konum vektörü;

$$\begin{aligned} \alpha(s) = & \left( \int \left[ \int \kappa \cos \left( \int \kappa ds \right) ds \right] ds, \int \left[ \int \kappa \sin \left( \int \kappa ds \right) ds \right] ds \right. \\ & \left. - \int \left[ \int \kappa \cos \left( \int \kappa ds \right) d_1 ds \right] ds + \int \left[ \int \kappa \sin \left( \int \kappa ds \right) d_2 ds \right] ds \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

şeklindedir. Burada  $d_1$  ve  $d_2$  keyfi sabitlerdir.

*İspat*

(3.23) denkleminde  $\tau = 0$  alınırsa ispat tamamlanmış olur.

### 3.1.4. Sonuç

İzotropik uzay  $I_3$  de dairesel bir helisin konum vektörü;

$$\begin{aligned} \alpha(s) = & \left( -\frac{1}{\kappa} \cos(\kappa s + d_1) + d_2 s + d_3, -\frac{1}{\kappa} \sin(\kappa s + d_4) + d_5 s + d_6, \right. \\ & \left. \frac{d_7}{\kappa} \cos(\kappa s + d_8) - \frac{d_9}{\kappa} \sin(\kappa s + d_{10}) + d_{11} + d_{12} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

şeklindedir. Burada  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}$  ve  $d_{12}$  keyfi sabitlerdir.

*İspat*

Öncelikle konum vektörünün birinci bileşenini  $\kappa \equiv \text{sabit}$  olarak elde edelim.

$$\alpha_1(s) = \int \kappa \left[ \int \underbrace{\cos \left( \int \kappa ds \right)}_{\text{sabit}} ds \right] ds \quad (3.29)$$

Burada önce gösterilen kısımdan başlarsak;

$$\cos \left( \int \kappa ds \right) = \cos(\kappa s + d_1) \quad (3.30)$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra  $\kappa s + d_1 = u$  değişken değişimini kullanarak integral alırsak;

$$\int \cos(\kappa s + d_1) ds = \frac{1}{\kappa} \sin(\kappa s + d_1) + d_2 \quad (3.31)$$

eşitliği bulunur. (3.30) denklemini  $\kappa$  ile çarpılırsa;

$$\sin(\kappa s + d_1) + d_2 \quad (3.32)$$

bulunur. Aynı şekilde (3.31) denkleminde de  $\kappa s + d_1 = u$  değişken değişimini kullanarak integral alırsak;

$$\int \sin(\kappa s + d_1) ds + \int d_2 ds = -\frac{1}{\kappa} \cos(\kappa s + d_1) + d_2 s + d_3 \quad (3.33)$$

bulunur. Bu şekilde dairesel helisin konum vektörünün birinci bileşeni:

$$\alpha_1(s) = -\frac{1}{\kappa} \cos(\kappa s + d_1) + d_2 s + d_3 \quad (3.34)$$

olarak elde edildi. Benzer şekilde dairesel helisin konum vektörünün ikinci bileşenini bulmak için,

$$\alpha_2(s) = \int \kappa \left[ \int \underbrace{\sin(\kappa ds)}_{\kappa ds} ds \right] ds \quad (3.35)$$

denkleminde gösterilen kısımdan başlarsak;

$$\sin\left(\int \kappa ds\right) = \sin(\kappa s + d_4) \quad (3.36)$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra  $\kappa s + d_4 = u$  değişken değişimini kullanarak integral alırsak;

$$\int \sin(\kappa s + d_4) ds = -\frac{1}{\kappa} \cos(\kappa s + d_4) + d_5 \quad (3.37)$$

eşitliği bulunur. (3.36) denklemini  $\kappa$  ile çarpılırsa;

$$\cos(\kappa s + d_4) + d_5 \quad (3.38)$$

bulunur. Aynı şekilde (3.37) denkleminde de  $\kappa s + d_4 = u$  değişken değişimini kullanarak integral alırsak;

$$\int \cos(\kappa s + d_4) ds + \int d_5 ds = -\frac{1}{\kappa} \sin(\kappa s + d_4) + d_5 s + d_6 \quad (3.39)$$

bulunur. Bu şekilde dairesel helisin konum vektörünün ikinci bileşeni:

$$\alpha_2(s) = -\frac{1}{\kappa} \sin(\kappa s + d_4) + d_5 s + d_6 \quad (3.40)$$

olarak elde edildi. Son olarak konum vektörünün üçüncü bileşenini bulmak için

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & - \int \left[ \int \left( \kappa \cos \left( \int \kappa ds \right) \int \sin \left( \int \kappa ds \right) \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right) ds \right] ds \\ & + \int \left[ \int \left( \kappa \sin \left( \int \kappa ds \right) \int \cos \left( \int \kappa ds \right) \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right) ds \right] ds \end{aligned} \quad (3.41)$$

denkleminde  $\tau \equiv \text{sabit}$  ve  $\kappa \equiv \text{sabit}$  olduğundan  $\left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' = 0$  olacaktır. Öncelikle (3.40)

denkleminde  $\left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' = 0$  olduğu yazılırsa;

$$\alpha_3 = - \int \left[ \int \kappa \cos \left( \int \kappa ds \right) d_7 ds \right] ds + \int \left[ \int \kappa \sin \left( \int \kappa ds \right) d_8 ds \right] ds \quad (3.42)$$

elde edilir.  $\tau \equiv \text{sabit}$  ve  $\kappa \equiv \text{sabit}$  olduğu hesaba katıldığında;

$$\alpha_3 = \frac{d_7}{\kappa} \cos(\kappa s + d_8) - \frac{d_9}{\kappa} \sin(\kappa s + d_{10}) + d_{11} s + d_{12} \quad (3.43)$$

denklemini elde edilir. Hesaplanan üç bileşenle birlikte dairesel helisin konum vektörü

$$\alpha(s) = \left( -\frac{1}{\kappa} \cos(\kappa s + d_1) + d_2 s + d_3, -\frac{1}{\kappa} \sin(\kappa s + d_4) + d_5 s + d_6, \right. \\ \left. \frac{d_7}{\kappa} \cos(\kappa s + d_8) - \frac{d_9}{\kappa} \sin(\kappa s + d_{10}) + d_{11} + d_{12} \right)$$

olarak elde edildi. Böylece ispat tamamlanmış olur.

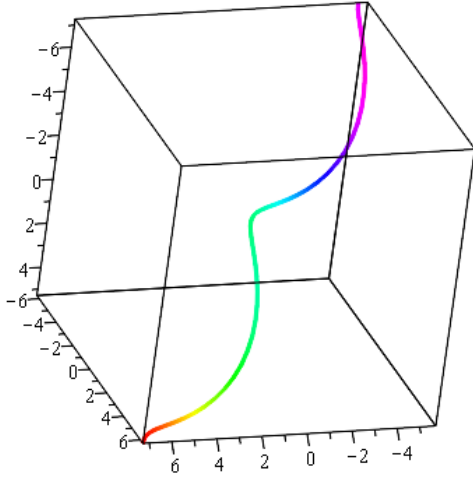
*Örnek*

(3.23) dekleminde  $\kappa = 1$  ve  $\tau = 1$  alınırsa;

$$\alpha(s) = (-\cos(s) + s, -\sin(s) + s, \cos(s) - \sin(s) + s)$$

İzotropik uzayda  $\kappa = 1$  ve  $\tau = 1$  olan dairesel helisin konum vektörüdür. (3.27) denkleminde

$d_1 = d_3 = d_4 = d_6 = d_8 = d_{10} = d_{12} = 0$  ve  $d_2 = d_5 = d_7 = d_9 = d_{11} = 1$  yazılmasıyla elde edilir.



Şekil 3.1.  $\kappa = 1$  ve  $\tau = 1$  olan eğrinin grafiği

### 3.1.5. Sonuç

İzotropik uzay  $I_3$  de genel helisin konum vektörü;

$$\alpha(s) = \left( -\frac{1}{\kappa} \cos \left( \int \kappa ds \right) + d_1 s + d_2, -\frac{1}{\kappa} \sin \left( \int \kappa ds \right) + d_3 s + d_4, \right. \quad (3.44)$$



$$\frac{d_5}{\kappa} \cos \left( \int \kappa ds \right) + d_6 s + d_7 - \frac{d_8}{\kappa} \sin \left( \int \kappa ds \right)$$

şeklindedir. Burada  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7$  ve  $d_8$  keyfi sabitlerdir.

*İspat*

(3.23) denkleminin birinci bileşeni

$$\alpha_1 = \int \left( \int \kappa \cos \left( \int \kappa ds \right) ds \right) ds \quad (3.45)$$

dir. Öncelikle burada  $\int \kappa ds = u$  değişken değişimi yapılırsa;

$$\alpha_1 = \int \left( \sin \left( \int \kappa ds \right) + d_1 \right) ds \quad (3.46)$$

bulunur. Daha sonra tekrar  $\int \kappa ds = u$  değişken değişimi yapılırsa;

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\kappa} \cos \left( \int \kappa ds \right) + d_1 s + d_2 \quad (3.47)$$

genel helisin birinci bileşeni elde edilir. Benzer şekilde genel helisin ikinci bileşeni için (3.23) denkleminin ikinci bileşeni

$$\alpha_2 = \int \left( \int \kappa \sin \left( \int \kappa ds \right) ds \right) ds \quad (3.48)$$

biçimindedir. Öncelikle burada  $\int \kappa ds = u$  değişken değişimi yapılırsa;

$$\alpha_2 = \int \left( -\cos \left( \int \kappa ds \right) + d_3 \right) ds \quad (3.49)$$

bulunur. Daha sonra tekrar  $\int \kappa ds = u$  değişken değişimi yapılırsa;

$$\alpha_2 = -\frac{1}{\kappa} \sin \left( \int \kappa ds \right) + d_3 s + d_4 \quad (3.50)$$

genel helisin ikinci bileşeni elde edilir. Son olarak konum vektörünün üçüncü bileşenini bulmak için (3.23) denkleminin üçüncü bileşeninde  $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)$  sabit olduğun kabul edildiğiden  $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$  yazarız.

$$\alpha_3(s) = -d_5 \int \left( \kappa \cos \left( \int \kappa ds \right) \right) ds + d_6 \int \left( \kappa \sin \left( \int \kappa ds \right) \right) ds \quad (3.51)$$

Bu denklemde  $\int \kappa ds = u$  değişken değişimi ile integral alınır;

$$\alpha_3(s) = \frac{d_5}{\kappa} \cos \left( \int \kappa ds \right) + d_6 s + d_7 - \frac{d_8}{\kappa} \sin \left( \int \kappa ds \right) \quad (3.52)$$

denklemini elde edilir. Hesaplanan üç bileşenle birlikte genel helisin konum vektörü elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

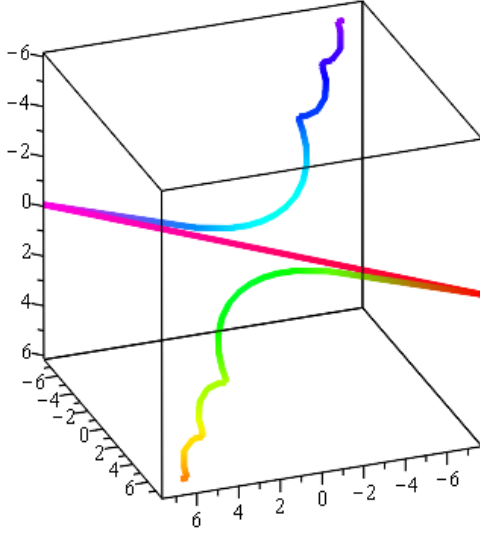
#### Örnek

(3.23) denkleminde  $\kappa \equiv s$  ve  $\tau \equiv s$  alınır;

$$\alpha(s) = \left( -\frac{1}{s} \cos \left( \frac{s^2}{2} \right) + s, -\frac{1}{s} \sin \left( \frac{s^2}{2} \right) + s, \frac{1}{s} \cos \left( \frac{s^2}{2} \right) - \frac{1}{s} \sin \left( \frac{s^2}{2} \right) + s \right) \quad (3.53)$$

İzotropik uzayda  $\kappa \equiv s$  ve  $\tau \equiv s$  olan genel helisin konum vektörüdür. Burada

$d_1 = d_3 = d_5 = d_6 = d_8 = 1$  ve  $d_2 = d_4 = d_7 = 0$  dır.



Şekil 3.2.  $\kappa = s$  ve  $\tau = s$  olan eğrinin grafiği

### 3.1.6. Sonuç

İzotropik uzay  $I_3$  de salkowski eğrisinin konum vektörü;

$$\begin{aligned} \alpha(s) = & \left( -\frac{1}{\kappa} \cos(\kappa s + d_1) + d_2 s + d_3, -\frac{1}{\kappa} \sin(\kappa s + d_4) + d_5 + d_6, \right. \\ & - \int \left[ \int \cos(\kappa s + d_7) \left[ \int \sin(\kappa s + d_8) \tau' ds \right] ds \right] ds \\ & \left. + \int \left[ \int \sin(\kappa s + d_9) \left[ \int \cos(\kappa s + d_{10}) \tau' ds \right] ds \right] ds \right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

biçimindedir. Burada  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9$  ve  $d_{10}$  keyfi sabitlerdir.

*İspat*

Öncelikle konum vektörünün birinci bileşenini  $\kappa \equiv \text{sabit}$  olarak elde edelim.

$$\alpha_1(s) = \int \kappa \left[ \int \underbrace{\cos \left( \int \kappa ds \right)}_{\text{}} ds \right] ds \quad (3.55)$$

Burada önce gösterilen kısımdan başlarsak;

$$\cos\left(\int \kappa ds\right) = \cos(\kappa s + d_1) \quad (3.56)$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra  $\kappa s + d_1 = u$  değişken değişimini kullanarak integral alırsak;

$$\int \cos(\kappa s + d_1) ds = \frac{1}{\kappa} \sin(\kappa s + d_1) + d_2 \quad (3.57)$$

eşitliği bulunur. (3.56) denklemini  $\kappa$  ile çarpılırsa;

$$\sin(\kappa s + d_1) + d_2 \quad (3.58)$$

bulunur. Aynı şekilde (3.57) denkleminde de  $\kappa s + d_1 = u$  değişken değişimini kullanarak integral alırsak;

$$\int \sin(\kappa s + d_1) ds + \int d_2 ds = -\frac{1}{\kappa} \cos(\kappa s + d_1) + d_2 s + d_3 \quad (3.59)$$

bulunur. Bu şekilde salkowski eğrisinin konum vektörünün birinci bileşeni:

$$\alpha_1(s) = -\frac{1}{\kappa} \cos(\kappa s + d_1) + d_2 s + d_3 \quad (3.60)$$

olarak elde edildi. Benzer şekilde salkowski eğrisinin konum vektörünün ikinci bileşenini bulmak için,

$$\alpha_2(s) = \int \kappa \left[ \int \underbrace{\sin\left(\int \kappa ds\right)}_{\text{denklemin 3.56}} ds \right] ds \quad (3.61)$$

denkleminde gösterilen kısımdan başlarsak;

$$\sin\left(\int \kappa ds\right) = \sin(\kappa s + d_4) \quad (3.62)$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra  $\kappa s + d_4 = u$  değişken değişimini kullanarak integral alırsak;

$$\int \sin(\kappa s + d_4) ds = -\frac{1}{\kappa} \cos(\kappa s + d_4) + d_5 \quad (3.63)$$

eşitliği bulunur. (3.62) denklemi  $\kappa$  ile çarpılırsa;

$$\cos(\kappa s + d_4) + d_5 \quad (3.64)$$

bulunur. Aynı şekilde (3.63) denkleminde de  $\kappa s + d_4 = u$  değişken değişimini kullanarak integral alırsak;

$$\int \cos(\kappa s + d_4) ds + \int d_5 ds = -\frac{1}{\kappa} \sin(\kappa s + d_4) + d_5 s + d_6 \quad (3.65)$$

bulunur. Bu şekilde salkowski eğrisinin konum vektörünün ikinci bileşeni:

$$\alpha_2(s) = -\frac{1}{\kappa} \sin(\kappa s + d_4) + d_5 s + d_6 \quad (3.66)$$

olarak elde edildi. Son olarak konum vektörünün üçüncü bileşenini bulmak için

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & - \int \left[ \int \left( \kappa \cos \left( \int \kappa ds \right) \int \sin \left( \int \kappa ds \right) \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right) ds \right] ds \\ & + \int \left[ \int \left( \kappa \sin \left( \int \kappa ds \right) \int \cos \left( \int \kappa ds \right) \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' ds \right) ds \right] ds \end{aligned} \quad (3.67)$$

denkleminde  $\kappa \equiv \text{sabit}$  ve  $\tau \neq \text{sabit}$  olduğu dikkate alınır,

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & - \int \left[ \int \cos(\kappa s + d_7) \left[ \int \sin(\kappa s + d_8) \tau' ds \right] ds \right] ds \\ & + \int \left[ \int \sin(\kappa s + d_9) \left[ \int \cos(\kappa s + d_{10}) \tau' ds \right] ds \right] ds \end{aligned} \quad (3.68)$$

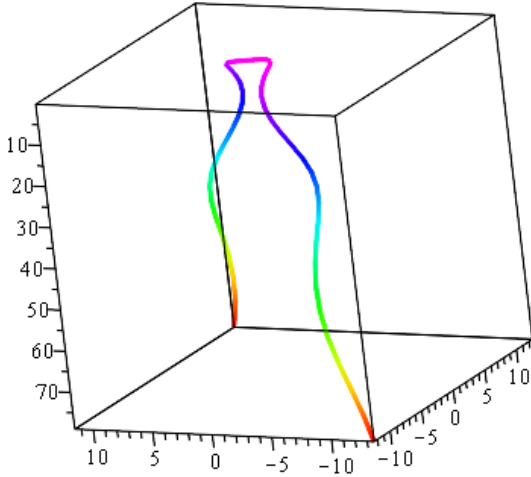
denklemini elde edilir. Hesaplanan üç bileşenle birlikte salkowski eğrisinin konum vektörü elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

### Örnek

(3.53) denkleminde  $\kappa \equiv 1$  ve  $\tau \equiv s$  alınır;

$$\alpha(s) = \left( -\cos(s) + s, -\sin(s) + s, \left(\frac{s^2}{2}\right) \right)$$

İzotropik uzayda  $\kappa \equiv 1$  ve  $\tau \equiv s$  olan salkowski eğrisinin konum vektörüdür. Burada  $d_2 = d_5 = 1$  ve  $d_1 = d_3 = d_4 = d_6 = d_7 = d_8 = d_9 = d_{10} = 0$  dır.



Şekil 3.3.  $\kappa = 1$  ve  $\tau = s$  olan eğrinin grafiği

### 3.1.7. Sonuç

İzotropik uzay  $I_3$  de anti-salkowski eğrisinin konum vektörü,

$$\begin{aligned} \alpha(s) = & \left( -\frac{1}{\kappa} \cos \left( \int \kappa ds \right) + d_1 s + d_2, -\frac{1}{\kappa} \sin \left( \int \kappa ds \right) + d_3 s + d_4, \right. \\ & -\tau \int \left[ \kappa \cos \left( \int \kappa ds \right) \left( \int \sin \left( \int \kappa ds \right) \left( \frac{1}{\kappa} \right)' ds \right) ds \right] ds \\ & \left. + \tau \int \left[ \kappa \sin \left( \int \kappa ds \right) \left( \int \cos \left( \int \kappa ds \right) \left( \frac{1}{\kappa} \right)' ds \right) ds \right] ds \right) \end{aligned} \quad (3.69)$$

biçimindedir. Burada  $d_1, d_2, d_3$  ve  $d_4$  keyfi sabitlerdir.

*İspat*

(3.23) denkleminin birinci bileşeni

$$\alpha_1 = \int \left( \int \kappa \cos \left( \int \kappa ds \right) ds \right) ds \quad (3.70)$$

dir. Öncelikle burada  $\int \kappa ds = u$  değişken değişimi yapılırsa;

$$\alpha_1 = \int \left( \sin \left( \int \kappa ds \right) + d_1 \right) ds \quad (3.71)$$

bulunur. Daha sonra tekrar  $\int \kappa ds = u$  değişken değişimi yapılırsa;

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\kappa} \cos \left( \int \kappa ds \right) + d_1 s + d_2 \quad (3.72)$$

Anti-salkowski eğrisinin birinci bileşeni elde edilir. Benzer şekilde genel helisin ikinci bileşeni için (3.23) denkleminin ikinci bileşeni

$$\alpha_2 = \int \left( \int \kappa \sin \left( \int \kappa ds \right) ds \right) ds \quad (3.73)$$

biçimindedir. Öncelikle burada  $\int \kappa ds = u$  değişken değişimi yapılırsa;

$$\alpha_2 = \int \left( -\cos \left( \int \kappa ds \right) + d_3 \right) ds \quad (3.74)$$

bulunur. Daha sonra tekrar  $\int \kappa ds = u$  değişken değişimi yapılırsa;

$$\alpha_2 = -\frac{1}{\kappa} \sin \left( \int \kappa ds \right) + d_3 s + d_4 \quad (3.75)$$

anti-salkowski eğrisinin ikinci bileşeni elde edilir. Son olarak anti-salkowski eğrisinin üçüncü bileşenini bulmak için (3.23) denkleminde  $\kappa \neq \text{sabit}$  ve  $\tau \equiv \text{sabit}$  olarak alınır:

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & -\tau \int \left[ \kappa \cos \left( \int \kappa ds \right) \left( \int \sin \left( \int \kappa ds \right) \left( \frac{1}{\kappa} \right)' ds \right) ds \right] ds \\ & + \tau \int \left[ \kappa \sin \left( \int \kappa ds \right) \left( \int \cos \left( \int \kappa ds \right) \left( \frac{1}{\kappa} \right)' ds \right) ds \right] ds \end{aligned} \quad (3.76)$$

elde edilir. Hesaplanan üç bileşenle birlikte anti-salkowski eğrisinin konum vektörü elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.





#### 4. SONUÇ

Bu çalışmada 3-boyutlu izotropik uzayda verilen birim hızlı bir eğrinin Frenet çatısına göre konum vektörü, eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları açısından ifade edilmiştir. Bu durum eğrilerin temel teoreminin bir sonucu olarak izotropik uzayda eğriliği ve burulması verilen bir eğriyi karakterize edebilmemize olanak sağlar. Daha sonra bu eğrilerin özel durumları olan doğru, düzlemsel eğri, dairesel helis, genel helis, Salkowski ve anti-Salkowski eğrileri için konum vektörleri belirlenmiştir. Ayrıca bu eğrilere örnekler verilmiştir. Son olarak ise dairesel helis, genel helis ve Salkowski eğrileri için verilen örneklerin grafikleri çizilmiştir.

## KAYNAKLAR

- Ali, A. T. (2010). Position Vectors of Spacelike General Helices in Minkowski 3-space. *Nonlinear Analysis*, 73(4), 1118-1126.
- Ali, A. T. (2011). Position Vectors of General Helices in Euclidean 3-space. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 3(2), 198-205.
- Ali, A. T. (2012a). Position Vectors of Curves in the Galilean Space  $G_3$ . *Mathematical Vesnik*, 64(3), 200-210.
- Ali, A. T. (2012b). Position vectors of slant helices in Euclidean 3-space. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 20(1), 1-6.
- Aydın, M. E. (2016a). Classification Results on Surface in The Isotropic 3-Space. *Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering*, 16, 239-246.
- Aydın, M. E. and Ergut M. (2016b). Isotropic Geometry of Graph Surfaces Associated with Product Production Functions in Economics. *Tamkang Journal of Mathematics*, 47(4), 433- 443.
- Chen, B. Y., Decu, S. and Verstraelen, L. (2014). Notes on Isotropic Geometry of Production Models. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 38(1), 23-33.
- Erjavec, Z., Divjak, B. and Horvat, D. (2011). The General Solutions of Frenet's System in the Equiform Geometry of the Galilean, Pseudo-Galilean, Simple Isotropic and Double Isotropic Space. *International Mathematical Forum*, 6(17), 837-856.
- Gray, A., Salamon, S. and Abbena, E. (2006). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*(Third edition). Costa Rica: Chapman and Hall, 136-137.
- Izumiya, S. and Takeuchi N. (2004). New Special Curves and Developable Surfaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 28(2), 153-163.
- Monterde, J. (2009). Salkowski Curves Revisited: A Family of Curves with Constant Curvature and Non-constant Torsion. *Computer Aided Geometric Design*, 26(3), 271-278.
- O'Neill, B. (2006). *Elementary Differential Geometry*(Revised Second Edition). United States: Academic Press, 1-128.
- Potman, H., Grohs, P. and Mitra, N. J. (2009). Laguerre Minimal Surfaces, Isotropic Geometry and Linear Elasticity. *Advances in Computational Mathematics*, 31(4), 391-419.
- Sachs, H. (1990). *Isotrope Geometrie des Raumes*(First edition). Germany: Vieweg Verlag, 1-280.

- Sipus, M. Z., Croatia, Z. and Divjak, B. (1998). Curves in n-dimensional k-isotropic space. *Glasnik Matematicki*, 33(53), 267-286.
- Sipus, M. Z. (2014). Translation Surfaces of Constant Curvatures in A Simply Isotropic Space. *Period Math Hung*, 68(2), 160-176.
- Silva, L. C. B. (2020). Rotation Minimizing Frames and Spherical Curves in Simply Isotropic and Pseudo-isotropic 3- spaces. *Tamkang Journal of Mathematics*, 51(1), 31-52.
- Strubecker, K. (1942). Differentialgeometrie des isotropen Raumes. III. Flächentheorie. *Mathematische Zeitschrift*, 48(1), 369-427.
- Şahin, T. And Dirişen, B.C. (2019). Position Vectors of with Respect to Darboux Frame in the Galilean Space  $G^3$ . *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(2), 2079-2093.

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Gülnur ÖZYURT  
Uyruğu : Türkiye Cumhuriyeti  
Medeni hali : Bekar

| Eğitim Derecesi | Okul/Program        | Mezuniyet Yılı |
|-----------------|---------------------|----------------|
| Lisans          | Amasya Üniversitesi | 2019           |
| Yüksek Lisans   | Amasya Üniversitesi | 2021           |

### Yabancı Dili

İngilizce