



T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü



İNTEGRALLERİN AĞIRLIKLIL ORTALAMA TOPLANABİLME METOTLARI İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Doktora Tezi

Fırat ÖZSARAÇ

Matematik Anabilim Dalı

İzmir
2021

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

**İNTEGRALLERİN AĞIRLIKLIL
ORTALAMA TOPLANABİLME METOTLARI İÇİN
TAUBER TİPİ TEOREMLER**

Fırat ÖZSARAÇ

Danışman : Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Doktora Programı

İzmir
2021

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum “İntegrallerin ağırlıklı ortalama toplanabilme metotları için Tauber tipi teoremler” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

05 / 08 / 2021

Fırat ÖZSARAÇ

ÖZET

İNTEGRALLERİN AĞIRLIKLIL ORTALAMA TOPLANABİLME METOTLARI İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

ÖZSARAÇ, Fırat

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

Ağustos 2021, 51 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde giriş kısmı bulunmaktadır. Kısaca toplanabilme metotları ve Tauber teorisinin tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde öncelikle bazı toplanabilme metotları tanıtılmış ve daha sonra tezin anlaşılabilirliğini artırabilmek amacı ile gerekli olan ve tez boyunca kullanılacak bazı temel kavramlara, tanımlara ve teoremlere değinilmiştir. Ayrıca son kısımda klasik Tauber teorisi özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde k . mertebeden ağırlıklı ortalaması yakınsak olan düzenli değişimli bir fonksiyonun Tauber koşulları yardımıyla $(k - 1)$. mertebeden ağırlıklı ortalamasının yakınsak olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde ilk olarak ağırlıklı ortalama ve m . mertebeden ağırlıklı ortalama tanımları verilmiştir. Daha sonra reel değerli fonksiyonlar için (N, p, m) integrallenebilme ve tek taraflı sınırlılığın, $(N, p, m - 1)$ integrallenebilme için bir gerek şart olduğu ispatlanmıştır.

Anahtar sözcükler: İntegraller için ağırlıklı ortalama toplanabilme metotları, Tauber tipi teoremler, yavaş azalan ve yavaş salınımlı fonksiyonlar, düzenli değişimlilik, tek taraflı ve çift taraflı Tauber tipi koşullar.

ABSTRACT**TAUBERIAN THEOREMS FOR WEIGHTED MEAN METHODS
OF SUMMABILITY FOR INTEGRALS**

ÖZSARAÇ, Fırat

Ph.D. in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

August 2021, 51 pages

This thesis consists of four parts.

In the first chapter, there is the introduction part. Summability methods and historical development of Tauber theory are briefly mentioned.

In the second chapter, firstly, some summability methods are introduced and then some basic concepts, definitions and theorems that are necessary to increase the intelligibility of the thesis and will be used throughout the thesis are mentioned. Also, in the last part, the classical Tauber theory is summarized.

In the third chapter, it is shown that a regularly varying function whose its weighted mean of order of k is convergent, also converges the weighted mean of order of $(k - 1)$ of with the help of Tauber conditions.

In the fourth chapter, firstly the definitions of weighted mean and weighted mean of order m are given. Then it has been proved that for real-valued functions, (N, p, m) integrability and one-sided boundedness are necessary conditions for $(N, p, m - 1)$ integrability.

Keywords: Weighted mean summability methods for integrals, Tauberian theorems, slowly decreasing and slowly oscillating functions, regularly varying, one-sided and two-sided Tauberian conditions.

ÖNSÖZ

Tez çalışması olarak yürütülen bu konu çok eski ve köklü bir tarihe sahiptir. Bununla birlikte günümüzde halen çalışılmaktadır ve etkisini sürdürmektedir. Benzer konularda dünyaca ünlü matematikçilerin ve lisansüstü öğrencilerinden oluşan çalışma gruplarının yapmış oldukları çalışmalar, “integrallerin ağırlıklı ortalama toplanabilme metotları” konusunda daha farklı yapılabilecek çalışmalar olduğu konusunda beni teşvik etmiştir. Yüksek lisans eğitiminden sonra doktora eğitime başlamış olmam, bu süreçte edindiğim bilgi ve birikimler ve danışmanımın da desteğiyle; doktora tez çalışmamın bu konu üzerine olmasına karar verilmiştir. Daha sonrasında ise bahsi geçen konuya ilişkin daha önce üretilmiş olan çalışmalar büyük bir titizlikle ve emekle incelenmiştir. Bunlara dair bilgiler tezin ilgili bölümlerinde bahsedilmiştir. Bunların yanında literatüre katkı sağlamak adına danışmanımla birlikte elde etmiş olduğumuz çalışmalar da mevcuttur ve bunlar tezin ana bölümlerini oluşturmaktadır. İlerleyen zamanlarda konuya ilgi duyan kişilere rehber niteliğinde olması amacıyla oluşturulan bu tez, dünyaca ünlü matematikçilerin ve danışmanım ile elde etmiş olduğumuz sonuçların bir bütünüdür.

İZMİR

05/08/2021

Fırat Öz Saraç

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇ KAPAK.....	(ii)
KABUL ONAY SAYFASI.....	(iii)
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI.....	(v)
ÖZET.....	(vii)
ABSTRACT.....	(ix)
ÖNSÖZ	(xi)
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	(xiii)
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	(xvi)
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1 Cesàro Toplanabilme Metodu.....	5
2.2 Tanımlar, Gösterimler ve Ön Bilgiler.....	7
2.3 Klasik Tauber Teorisindeki Temel Teoremler.....	10
3. AĞIRLIKLİ ORTALAMA TOPLANABİLİR İNTEGRALLERİN YİNELEMELERİ İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER.....	15
3.1 Bu Bölüme İlişkin Ön Bilgiler.....	15

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
3.2 Ön Hazırlıklar.....	16
3.3 Temel Sonuçlar.....	17
3.4 Yardımcı Sonuçlar.....	20
3.5 Temel Sonuçların İspatları.....	24
4. İNTEGRALLERİN AĞIRLIKLI ORTALAMA TOPLANABİLME METODU İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER.....	30
4.1 Bu Bölüme İlişkin Ön Bilgiler.....	30
4.2 Temel Sonuçlar.....	32
4.3 Temel Sonuçların İspatları.....	35
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	45
TEŞEKKÜR.....	49
ÖZGEÇMİŞ.....	50

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$s(t)$	Tek değişkenli fonksiyon
$\int_0^\infty$	Genelleştirilmiş integral
$\sigma(t)$	Bir $s(t)$ fonksiyonunun Cesàro ortalaması
$\sup$	Üst sınırların en küçüğü
$\inf$	Alt sınırların en büyüğü
$\limsup s(t)$	$s(t)$ fonksiyonunun üst limiti
$\liminf s(t)$	$s(t)$ fonksiyonunun alt limiti
$[n]$	n sayısının tam değeri
$v_n^{(0)}(\Delta s)$	Bir $s(t)$ fonksiyonu ile Cesàro ortalaması arasındaki fark
$\sigma_n^{(m)}(s)$	Bir $s(t)$ fonksiyonunun m defa aritmetik ortalaması
$v_n^{(m)}(\Delta s)$	$v_n^{(0)}(\Delta s)$ fonksiyonunun m defa aritmetik ortalaması
$s(t) = o(1)$	$n \rightarrow \infty$ iken $s(t)$ fonksiyonunun sıfıra yakınsak olması
$s(t) = O(1)$	Yeterince büyük t değerleri için $s(t)$ fonksiyonunun sınırlı olması
$s(t) \geq -R$	$R \geq 0$ olmak üzere, yeterince büyük t değerleri için s fonksiyonunun tek taraflı sınırlı olması

1 GİRİŞ

XVIII. yüzyıldan beri pek çok çalışmayla gelişmekte ve genişlemekte olan toplanabilme teorisi, Newton ve Leibniz gibi önder matematikçilerin çalışmalarıyla başlayıp, günümüze kadar gelişerek devam eden matematik analizin çok geniş bir alanıdır. Ayrıca, sayılar teorisi ve uygulamalı matematik dalları ile de yakın ilişkileri vardır. Toplanabilme metotları ıraksak olan dizi veya serilere bir limit değeri karşılık getirmek ve yakınsak olanların ise yakınsama hızını artırmak amacıyla tanımlanmışlardır. Bir diğer ifadeyle; toplanabilme metotlarının esas hedefi, belirli koşullar altında ıraksak olan serilerin ya da dizilerin yapıları hakkında bazı bilgilere ulaşılmasını sağlamaktır. Bu bağlamda birçok toplanabilme metodu tanımlanmıştır ve aralarındaki ilişkiler irdelenmiştir. Bu toplanabilme metotlarına örnek olarak Cesàro, Abel, Hölder, Nörlund ve ağırlıklı ortalama metodu verilebilir. Toplanabilme metotları (dönüşümleri) iki grupta sınıflandırılabilir:

- (i) Diziden diziye dönüşümler
- (ii) Diziden fonksiyona dönüşümler.

Diziden diziye olan dönüşümlerde sonsuz matrisler kullanılır. (s_n) bir dizi ve $(c_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ sonsuz bir matris olmak üzere (s_n) 'nin C -dönüşüm dizisi $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilsin. Yani, $t_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} s_k$ olsun. Eğer; (t_n) sonlu bir ε değerine yakınsıyorsa, (s_n) dizisi ε değerine C toplanabilirdir, denir ve kısaca $s_n \rightarrow \varepsilon(C)$ yazılır. Eğer C metodu yakınsak bir diziyi yakınsak bir diziye dönüştürüyor ve limit değerini de koruyorsa, C regüler bir toplanabilme metodudur, denir. Yani,

$$s_n \rightarrow \varepsilon \Rightarrow t_n \rightarrow \varepsilon(C).$$

Bir diğer deyişle; yakınsak olan bir seri ya da dizi, yakınsadığı noktaya bir toplanabilme metodu vasıtasıyla da toplanabiliyorsa, o metoda regüler denir ve dolayısıyla yakınsak olan bir seri (dizi) yakınsadığı noktaya regüler bir metot tarafından toplanabilir. Örneğin; yakınsak bir serinin (dizinin) Abel toplanabilme metoduna göre aynı değere toplanabilir olduğu bir diğer deyişle Abel metodunun regüler olduğu bilinmektedir.

Fakat bu ifadenin zıttı her zaman doğru olmayabilir. Yani Abel toplanabilme metoduna göre toplanabilir olan bir seri yakınsak olmayabilir. Örneğin; $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ serisi ıraksak bir seridir, ancak bu serinin Abel toplanabilme metoduna göre ortalamasının $\frac{1}{2}$ değerine toplanabilir olduğu görülmektedir.

Bu ifadenin karşıtının doğruluğunun sağlanabilmesi, bazı uygun şartlar altında mümkündür. Bu türdeki ilk çalışmayı Alfred Tauber 1897 yılında yapmıştır. Tauber (1897)' in yapmış olduğu bu çalışma, yeni bir araştırma alanını meydana çıkarmıştır. Tauber (1897), Abel toplanabilme metodu ile toplanabilen bir dizinin yakınsak olabilmesi için gerekli olan koşulları göstermiştir. Bu alanda ilk çalışmayı A. Tauber yaptığından dolayı, bir toplanabilme metodundan yakınsaklığın tekrardan elde edilmesini sağlayan koşullara Tauber tipi koşul ve bu türdeki teoremlere de Tauber tipi teorem adı verilmektedir.

Literatürdeki klasik çalışmalardaki gaye, Tauber (1897)' in verdiği koşulları zayıflatmak veya toplanabilme metodunu güçlendirmek olmuştur. Bu konudaki yapılan başlıca çalışmalara Hardy (1910), Littlewood (1910), Landau (1910), Hardy ve Littlewood (1914), Schmidt (1925) ve Szász (1935) örnek verilebilir. Bu çalışmalarda, Cesáro ve Abel toplanabilme metotları için teoremler ispatlanmıştır.

Reel ve kompleks sayı dizilerinin ağırlıklı ortalama toplanabilme metodu için Tauber tipi teoremler, Hardy (1949), Móricz ve Rhoades (1995), Tietz (1990), Çanak ve Totur (2011-2012) gibi birçok yazar tarafından elde edilmiştir. Hardy (1949) çift taraflı sınırlı bir klasik Tauber tipi teorem ispatlamıştır ve Móricz ve Rhoades (1995), dizilerin $(\bar{N}, p)$ toplanabilmesi için tek-taraflı sınırlı bir Tauber tipi teorem elde etmiştir. Çanak ve Totur (2011-2012) ise bu metot için bazı genel tek-taraflı Tauber tipi koşulları ortaya koymuşlardır.

Görüldüğü üzere Tauber teorisinin ortaya çıkışı ve devamında yapılan çalışmalar her ne kadar seriler için verilen toplanabilme metotlarını baz alsa da teori, integraller için verilen toplanabilme metotları için de uygulanmıştır. Örneğin; α pozitif bir reel sayı olmak üzere $f, [\alpha, \infty)$ aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. $s(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$ olmak üzere $\int_{\alpha}^{\infty} f(t)dt$ integrali yakınsak ise, o zaman s regüler bir toplanabilme metoduna göre aynı değere

toplanabilirdir, denir. Ancak bu ifadenin zıttı genelde doğru değildir. Bu tez kapsamında integrallerin ağırlıklı ortalama toplanabilme metotları için Tauber tipi teoremler ele alınacaktır.

İntegraller için Cesàro toplanabilme metodu ile ilgili yapılan çalışmalara Hardy (1949) ve Laforgia (2009), son yıllarda yapılan çalışmalara ise Çanak ve Totur (2011a, 2011c, 2012a) ve Totur ve Çanak (2012a, 2013a, 2013b) örnek olarak gösterilebilir. Son dönemdeki çalışmalarda ise Cesàro metoduna göre toplanabilir olan integrallerin yakınsaklıkları, Dik (2001) tarafından verilen genel kontrol modülo kavramının integraller için tanıtılması ve genel kontrol modülünün üzerine bazı ek şartlar konulmasıyla elde edilmiştir ve böylelikle daha da güçlü teoremlere ulaşılmıştır.

Daha kapsamlı sonuçlara ulaşmak için uygulanan bir diğer yöntem de toplanabilme metodunu güçlendirmek olmuştur. Çeşitli araştırmacılar tarafından integraller için verilen bazı toplanabilme metotları için “bir metoda göre toplanabilir olan bir integralin başka bir metoda göre toplanabilirliği nasıl elde edilir?” sorusuna cevap aranarak kendi aralarındaki ilişkileri irdelenmiş ve daha da güçlü metotlar tespit edilmiştir.

Son yıllarda, integrallerin toplanabilme metodları üzerine bir ilgi vardır. Çanak ve Totur (2011-2012) integrallerin Cesàro toplanabilme metodu için çeşitli klasik Tauber tipi koşullar elde etmişlerdir. Aynı zamanda bu yazarlar, reel ve kompleks sayı dizileri için Dik (2001) tarafından tanımlanan genel kontrol modüloyu kullanarak bazı yeni Tauber tipi teoremleri ispatlamışlardır ve Hardy-Littlewood tarzı Tauber tipi teoremi genelleştirmişlerdir. Ayrıca Fekete ve Móricz (2005), integrallerin ağırlıklı ortalama metodu için tek-terafı ve çift-terafı Tauber koşulları oluşturmuşlardır. Daha sonra, Totur ve Okur (2015) ağırlıklı diziye uygulanan belirli koşullar altında integrallerin $(\bar{N}, p)$ toplanabilmesi için Landau-tarzı ve Schmidt-tarzı Tauber tipi teoremlerin alternatif ispatlarını vermişlerdir.

Bu çalışmanın ilk bölümünde toplanabilme teorisinin XVIII. yüzyıldan günümüze kadar devam ederek gelen gelişim süreci hakkında bazı bilgilere

değinilmiştir. Devamında ise tezi oluşturan bölümlerin içerikleri hakkında açıklamalara yer verilmiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde öncelikle bazı toplanabilme metotları tanıtılmış ve daha sonra tezin anlaşılabilirliğini artırabilmek amacı ile gerekli olan ve tez boyunca kullanılacak olan bazı temel kavramlara, tanımlara ve teoremlere değinilmiştir. Ayrıca son kısımda klasik Tauber teorisi özetlenmiştir.

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde bir indise göre düzenli değişimli olma tanımı hatırlatılmıştır. Devamında ise k . mertebeden ağırlıklı ortalaması yakınsak olan düzenli değişimli bir fonksiyonun Tauber koşulları yardımıyla $(k - 1)$. mertebeden ağırlıklı ortalamasının yakınsak olduğu gösterilip, benzer şekilde devam edildiğinde fonksiyonun adi yakınsaklığının elde edileceği sonucuna varılmıştır.

Bu çalışmanın dördüncü bölümünde ise ilk olarak ağırlıklı ortalama ve m . mertebeden ağırlıklı ortalama tanımları verilmiştir. $s(x) := \int_0^x f(t)dt$ ile ağırlıklı ortalaması arasındaki fark iki farklı durumda ifade edilmiştir. Bu eşitlik, ağırlıklı ortalama toplanabilme metodu için ağırlıklı Kronecker eşitliği olarak bilinmektedir. Daha sonra bir fonksiyonun α indisine göre düzenli değişimli olması tanımlanmıştır ve reel değerli fonksiyonlar için (N, p, m) integrallenebilme ve tek taraflı sınırlılığın, $(N, p, m - 1)$ integrallenebilme için bir gerek şart olduğu ispatlanmıştır. Verilen ispattaki işlemlerin benzer şekilde devam edildiğinde yakınsaklığın elde edildiği belirtilmiştir. Son olarak ilgili bölümde tanıtılacak olan, bir fonksiyonun düzenli değişimli olma durumunun özel bir hali olan bir sınıfa ait olması için gerekli şart verilmiştir. Bu şarta denk olan diğer tanımlar da lemma olarak ifade edilip, bu lemma vasıtasıyla bu kez bu özel sınıfa aitlik ve yavaş azalanlık şartı kullanılarak yeni teorem ve sonuçlar elde edilmiştir. En son aşamada ise yukarıda bahsedilen teorem ve sonuçlar kompleks değerli fonksiyonlar için de verilmiştir.

Yüzyılı aşkın bir süredir toplanabilme teorisinde yapılmış olan çalışmalar halen günümüzde de nice araştırmacının dikkatini çekmeye devam etmektedir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

İraksak fonksiyonlara değer atayabilmek ya da yakınsak olanların yakınsama hızını artırabilmek için elde edilmiş olan kurallara toplanabilme metodu denilmektedir. Bu bölümde öncelikle bazı toplanabilme metotları tanıtılacak ve daha sonra tezin anlaşılabilirliğini artırabilmek amacı ile gerekli olan bazı temel kavramlara, tanımlara ve teoremlere değinilecektir. Ayrıca son bölümde klasik Tauber teorisi özetlenecektir.

2.1 Cesàro Toplanabilme Metodu

Tanım 2.1.1 (Móricz and Németh, 2000) $f: R_+ \rightarrow \mathbb{C}$, $0 < t < \infty$ için $(0, t)$ sonlu aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilen kompleks değerli bir fonksiyon ve $s(t) = \int_0^t f(x)dx$ olsun. s integralinin Cesàro ortalaması, bir diğer ifadeyle $(C, 1)$ ortalaması $t > 0$ olmak üzere

$$\sigma(t) = \frac{1}{t} \int_0^t s(u)du$$

dur ve sonlu bir l sayısı için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = l$$

limiti var ise, o halde $\int_0^\infty f(x)dx$ integrali l (sonlu) sayısına Cesàro toplanabilir, denir. Kısaca $s(t) \rightarrow l$ $(C, 1)$ ile gösterilir.

Eğer f fonksiyonu R_+ üzerinde sabit işaretli ise, o halde $\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(t)$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} s(t)$ ifadeleri birbirine denktir. Bu sonuç, Fubini teoreminden basitçe elde edilebilir:

$$\sigma(t) = \frac{1}{t} \int_0^t du \int_0^u f(x)dx = \int_0^t \left(1 - \frac{x}{t}\right) f(x)dx.$$

Ayrıca, $\int_0^\infty f(x)dx$ integralinin $(C, 1)$ toplanabilirliği, $x_0 > 0$ sabit olmak üzere, herhangi bir $(0, x_0)$ sonlu aralığında $f(x)$ fonksiyonunun aldığı değere bağlı değildir.

Örnek 2.1.1 (Totur and Okur, 2018) $\int_1^\infty (\sin(q-1) + q \cos(q-1))dq$ integrali Cesàro integrallenebilir değildir. Gerçekten de, verilen integral için

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_1^t f(v)dv = \int_1^t (\sin(v-1) + v \cos(v-1))dv \\ &= \int_1^t \sin(v-1)dv + \int_1^t v \cos(v-1)dv \\ &= t \sin(t-1) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q-1} \int_1^q s(t)dt &= \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q-1} \int_1^q t \sin(t-1)dt \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} \left(\frac{-q \cos(q-1)}{q-1} + \frac{\sin(q-1)}{q-1} + \frac{1}{q-1} \right) \end{aligned}$$

limiti var olmadığı için, verilen bu integralin Cesàro integrallenebilir olmadığı elde edilir.

Örnek 2.1.2 (Okur and Totur, 2019) $\int_1^\infty (\cos(w-1) - w \sin(w-1))dw$ integrali Cesàro integrallenebilir değildir.

Gerçekten de, verilen integral için

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_1^t f(v)dv = \int_1^t (\cos(v-1) - v \sin(v-1))dv \\ &= \int_1^t \cos(v-1)dv - \int_1^t v \sin(v-1)dv \\ &= t \cos(t-1) - 1 \end{aligned}$$

olur. s fonksiyonunun Cesàro ortalaması alındığında

$$\begin{aligned} \sigma(w) &= \frac{1}{w-1} \int_1^w s(t)dt = \frac{1}{w-1} \int_1^w (t \cos(t-1) - 1)dt \\ &= \frac{w \sin(w-1) + \cos(w-1) - w}{w-1} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylelikle $\lim_{w \rightarrow \infty} \sigma(w)$ limiti var olmadığı için verilen bu integralin Cesàro integrallenebilir olmadığı elde edilir.

Örnek 2.1.3 (Okur and Totur, 2019) $\int_1^\infty (2 \cos y + \log y (\cos y - y \sin y)) dy$ integrali yakınsak değildir.

Gerçekten de, verilen integral için

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_1^t f(v) dv = \int_1^t (2 \cos v + \log v (\cos v - v \sin v)) dv \\ &= 2 \int_1^t \cos v dv + \int_1^t \log v \cos v dv - \int_1^t v \sin v \log v dv \\ &= t \log t \cos t + \sin t - \sin 1 \end{aligned}$$

olur. Böylelikle $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \log x \cos x + \sin x - \sin 1)$ limitinin olmadığı görülür. Dolayısıyla verilen bu integral yakınsak değildir.

Sonuç olarak, Cesàro integrallenebilme metodu ile yakınsaklık arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$s(x) \rightarrow s \Rightarrow s(x) \rightarrow s(C, 1)$$

2.2 Tanımlar, Gösterimler ve Ön Bilgiler

Tez boyunca kullanılacak olan bazı gösterimler aşağıda listelenmiştir. $s(t)$ bir reel değerli fonksiyon olmak üzere,

- $s(t) = o(1)$, yeterince büyük t değerleri için $s(t)$ fonksiyonunun sıfıra yakınsadığını,
- $s(t) = O(1)$, yeterince büyük t değerleri için $s(t)$ fonksiyonunun sınırlı olduğunu,
- $s(t) \geq -H, H \geq 0$ olmak üzere yeterince büyük t değerleri için $s(t)$ fonksiyonunun tek taraflı sınırlı olduğunu göstermektedir.

Tanım 2.2.1 (Móricz and Németh, 2000) R_+ üzerinde tanımlı reel değerli bir $s(t)$ fonksiyonu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+0} \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{t \leq x \leq \lambda t} [s(x) - s(t)] \geq 0 \quad (2.1)$$

koşulunu sağlıyor ise, o halde $s(t)$ fonksiyonuna yavaş azalandır, denir.

(2.1) koşuluna denk olarak, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $t_0 \geq 0$ ve bir $\lambda > 1$ vardır ki $t_0 < t < x < \lambda t$ olmak üzere

$$s(x) - s(t) \geq -\varepsilon$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Móricz ve Németh (2000), $s(t)$ reel değerli fonksiyonu için (2.1) koşulunun

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+0} \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\lambda t \leq x \leq t} [s(t) - s(x)] \geq 0$$

şeklinde de ifade edilebileceğini ispatlamıştır.

Sonuç 2.2.1 (Hardy, 1956) Sonlu bir değere $(C, 1)$ toplanabilir olan bir integral yavaş azalan olması halinde aynı değere yakınsar.

Özel olarak, hemen hemen her $x > x_0$ için

$$xf(x) \geq -H \tag{2.2}$$

olacak şekilde bir $H > 0$ sabiti ve bir $x_0 \geq 0$ var ise, (2.1) koşulu sağlanır.

Gerçekten; herhangi $x_0 < t < x < \infty$ için

$$\begin{aligned} s(x) - s(t) &= \int_t^x f(u) du \geq -H \int_t^x \frac{du}{u} \\ &= -H \log \frac{x}{t} \geq -H \log \lambda \end{aligned}$$

olur.

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{t \leq x \leq \lambda t} [s(x) - s(t)] \geq -H \log \lambda, \quad \lambda > 1$$

olduğu görülür. $\lambda \rightarrow 1 + 0$ için (2.1) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 2.2.2 (Móricz and Németh, 2000) Sonlu bir değere $(C, 1)$ toplanabilir olan reel değerli bir fonksiyon yavaş azalan olması durumunda bu fonksiyon aynı değere yakınsar. Yani; reel değerli bir fonksiyonun yavaş azalanlığı, Cesàro toplanabilme metodu için bir Tauber tipi koşuldur.

Tanım 2.2.2 (Móricz ve Németh, 2000) R_+ üzerinde tanımlı reel değerli bir $s(t)$ fonksiyonu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{t \leq x \leq \lambda t} [s(x) - s(t)] \leq 0 \quad (2.3)$$

koşulunu sağlıyor ise, o halde $s(t)$ fonksiyonuna yavaş artandır, denir.

(2.3) koşulu denk olarak, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $t_0 \geq 0$ ve bir $\lambda > 1$ vardır ki $t_0 < t < x < \lambda t$ olmak üzere

$$s(x) - s(t) \leq \varepsilon$$

şeklinde de ifade edilebilir.

$s(t)$ reel değerli fonksiyonu için (2.3) koşulu,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1-0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\lambda t \leq x \leq t} [s(t) - s(x)] \leq 0$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Özel olarak, (2.1) $\Rightarrow$ (2.2) gerektirmesine benzer şekilde, hemen hemen her $x > x_0$ için

$$x f(x) \leq H \quad (2.4)$$

olacak şekilde $H > 0$ sabiti ve $x_0 \geq 0$ ' ın varlığı, (2.3)' ün sağlanması için yeterli bir koşuldur.

Sonuç 2.2.1 ve Sonuç 2.2.2' nin simetrik benzerleri yavaş artanlık için de ifade edilebilir.

Tanım 2.2.3 (Móricz ve Németh, 2000) R_+ üzerinde tanımlı kompleks değerli bir $s(t)$ fonksiyonu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{t \leq x \leq \lambda t} |s(x) - s(t)| = 0 \quad (2.5)$$

koşulunu sağlıyor ise, o halde $s(t)$ fonksiyonuna yavaş salınımlıdır, denir.

(2.5) koşulu denk olarak, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $t_0 \geq 0$ ve bir $\lambda > 1$ vardır ki $t_0 < t < x \leq \lambda t$ olmak üzere

$$|s(x) - s(t)| \leq \varepsilon$$

şeklinde de ifade edilebilir.

$s(t)$ kompleks değerli fonksiyonu için (2.5) koşulu,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1-0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\lambda t \leq x \leq t} |s(t) - s(x)| = 0$$

koşuluna denktir.

Özel olarak, hemen hemen her $x > x_0$ için,

$$|xf(x)| \leq H \quad (2.6)$$

olacak şekilde bir $H > 0$ sabiti ve bir $x_0 \geq 0$ var ise, o halde (2.5) koşulu sağlanır.

Sonuç 2.2.3 (Móricz and Németh, 2000) Sonlu bir değere $(C, 1)$ toplanabilir olan kompleks değerli bir fonksiyon yavaş salınımlı olması durumunda bu fonksiyon aynı değere yakınsar.

2.3 Klasik Tauber Teorisindeki Temel Teoremler

Herhangi bir limitleme metoduyla toplanabilir fonksiyonların sınıfından yakınsaklığa geçiş fonksiyonun üzerine konulan uygun koşullar altında mümkündür. Buradaki hedef daha sonra, yakınsaklığı daha zayıf şartlar altında elde etmek ya da yakınsaklığın elde edildiği toplanabilme metodunu güçlendirmek olmuştur. Böylelikle daha genel teoremler elde edilmiştir.

Bu türde yapılan ilk çalışma Tauber (1897)' e aittir. Bu nedenle bir toplanabilme metodundan yakınsaklığın elde edilmesi için konulan koşullara Tauber tipi koşullar ve bu koşulları içeren teoremlere de Tauber tipi teoremler denilmektedir.

Öncelikle, verilecek olan teoremlerin ispatlarında rol oynayacak olan lemma ve bazı sonuçları verelim.

Lemma 2.3.1 (Móricz ve Németh, 2000) Eğer $\int_0^\infty f(x)dx$ integrali A sonlu sayısına $(C, 1)$ toplanabilir ise, o halde $\lambda \neq 1$ olmak üzere her $0 < \lambda < \infty$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x) dx = A \quad (2.7)$$

eşitliği elde edilir.

İspat $\lambda > 1$ durumunu inceleyelim. Tanımdan hareketle,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x) dx &= \frac{1}{\lambda t} \left(1 + \frac{1}{\lambda - 1}\right) \int_0^{\lambda t} s(x) dx - \frac{1}{(\lambda - 1)t} \int_0^t s(x) dx \\ &= \sigma(\lambda t) - \frac{1}{\lambda - 1} [\sigma(\lambda t) - \sigma(t)] \end{aligned}$$

olur. $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t)$ aracılığıyla, (2.7) kolayca elde edilir.

$0 < \lambda < 1$ durumunda ise, bu kez

$$\begin{aligned} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^t s(x) dx &= \frac{1}{(1 - \lambda)t} \int_0^t s(x) dx + \frac{1}{\lambda t} \left(1 - \frac{1}{1 - \lambda}\right) \int_0^{\lambda t} s(x) dx \\ &= \frac{1}{1 - \lambda} [\sigma(t) - \sigma(\lambda t)] + \sigma(\lambda t) \end{aligned}$$

olur ve yine $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t)$ aracılığıyla, (2.7) elde edilir.

Şimdi bazı temel teoremler ve sonuçlar verilecektir. İlk olarak f fonksiyonun reel değerli olduğu durum dikkate alınarak aşağıdaki tek-terafli Tauber tipi teorem ifade edilecektir.

Teorem 2.3.1 (Móricz ve Németh, 2000) $f \in L^1_{loc}(R_+)$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $\int_0^\infty f(x) dx$ integrali A sonlu sayısına $(C, 1)$ toplanabilir olsun. O halde $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = A$ koşulunun sağlanması için gerek ve yeter koşul,

$$\sup_{\lambda > 1} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dx \geq 0 \quad (2.8)$$

ve

$$\sup_{0 < \lambda < 1} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^t [s(t) - s(x)] dx \geq 0 \quad (2.9)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

Ek olarak, aşağıdaki eşitsizlikler sırasıyla (2.8) ve (2.9) eşitsizliklerinden daha güçlü eşitsizliklerdir.

Her $\lambda > 1$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dx = 0 \quad (2.10)$$

ve her $0 < \lambda < 1$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^t [s(t) - s(x)] dx = 0. \quad (2.11)$$

İspat Öncelikle gerek koşulu ispatlayalım. $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = A$ olsun. Lemma 2.3.1' den,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x) dx - \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) \\ &= A - A = 0 \end{aligned}$$

olur. Bu ise, $\lambda > 1$ durumunda (2.10) ve $0 < \lambda < 1$ durumunda (2.11) koşulunu ispatlar.

Şimdi yeter koşulu gösterelim. $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = A$ olsun. (2.8) ve (2.9) koşullarının sağlandığını kabul edelim. $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = A$ olduğunu göstermeliyiz. Bu amaçla, keyfi bir $\varepsilon > 0$ verildiğini kabul edelim. (2.8) eşitsizliğinden

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1 t - t} \int_t^{\lambda_1 t} [s(x) - s(t)] dx \geq -\varepsilon \quad (2.12)$$

olacak şekilde bir $\lambda_1 > 1$ vardır ve (2.9) eşitsizliğinden de

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \lambda_2 t} \int_{\lambda_2 t}^t [s(t) - s(x)] dx \geq -\varepsilon \quad (2.13)$$

olacak şekilde bir $0 < \lambda_2 < 1$ vardır. Hipotez ve Lemma 2.3.1'den, her $\lambda > 1$ için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dx = A - \limsup_{t \rightarrow \infty} s(t)$$

ve her $0 < \lambda < 1$ için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^t [s(t) - s(x)] dx = \liminf_{t \rightarrow \infty} s(t) - A$$

elde edilir. Böylece

$$A - \varepsilon \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} s(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} s(t) \leq A + \varepsilon$$

olduğu bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfi küçük olduğundan, $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = A$ olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.3.1 (Móricz ve Németh, 2000) (2.8) ve (2.9) koşullarının simetrik benzerleri aşağıda verilmiştir:

$$\inf_{\lambda > 1} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dx \leq 0 \quad (2.14)$$

$$\inf_{0 < \lambda < 1} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^t [s(t) - s(x)] dx \leq 0. \quad (2.15)$$

Yani, Teorem 2.3.1' de (2.8) ve (2.9) koşulları yerine sırasıyla (2.14) ve (2.15) koşulları alınabilir.

Sonuç 2.3.2 (Móricz ve Németh, 2000) $f \in L^1_{loc}(R_+)$ reel değerli fonksiyonu için $\int_0^\infty f(x) dx$ integrali A sonlu sayısına $(C, 1)$ toplanabilir ve $s(t)$ integral fonksiyonu yavaş azalan ise, o halde $s(t)$ fonksiyonu A sonlu sayısına yakınsar.

Sonuç 2.3.3 (Móricz ve Németh, 2000) $f \in L^1_{loc}(R_+)$ reel değerli fonksiyonu için $\int_0^\infty f(x) dx$ integrali A sonlu sayısına $(C, 1)$ toplanabilir olsun. (2.2) koşulu sağlanır ise, o halde $t \rightarrow \infty$ iken $s(t)$ fonksiyonu A sonlu sayısına yakınsar.

Şimdi, f fonksiyonun kompleks değerli olduğu durumu göz önüne alalım ve aşağıdaki çift taraflı Tauber tipi teoremi ifade edelim.

Teorem 2.3.2 (Móricz ve Németh, 2000) $f \in L^1_{loc}(R_+)$ kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere $\int_0^\infty f(x)dx$ integrali A sonlu sayısına $(C, 1)$ toplanabilir olsun. O halde $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = A$ eşitliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul,

$$\inf_{0 < \lambda < \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dx \right| = 0$$

şartının sağlanmasıdır.

İspat Bu teoremin ispatı, Teorem 2.3.1' in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 2.3.4 (Móricz ve Németh, 2000) $f \in L^1_{loc}(R_+)$ kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere $\int_0^\infty f(x)dx$ integrali A sonlu sayısına $(C, 1)$ toplanabilir olsun. Eğer (2.5) koşulu sağlanır ise, o halde $t \rightarrow \infty$ iken $s(t)$ fonksiyonu A sonlu sayısına yakınsar.

$(C, 1)$ ve Abel toplanabilme metotları için klasik Tauber teorisiyle ilgili detaylı bir inceleme için Korevaar (2004)' in kitabına başvurulabilir. Ayrıca, yeni kontrol araçları kullanılarak son zamanlarda elde edilen sonuçlar için Çanak and Dik (2008), Çanak (2010), Totur and Çanak (2010) ve Çanak et al. (2010,2012) çalışmaları incelenebilir.

3 AĞIRLIKLIL ORTALAMA TOPLANABİLİR İNTEGRALLERİN YİNELEMELERİ İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Bu bölüm 5 ana başlıktan oluşmaktadır.

Bölüm 3.1' de, bu bölüme ilişkin daha önce yapılan çalışmalarla ilgili bilgiler verilecektir.

Bölüm 3.2' de, konuyla ilgili temel tanımlara yer verilmiştir.

Bölüm 3.3' de, öncelikle $\alpha > 0$ indisine göre düzenli değişimlilik kavramı tanıtılmıştır, sonrasında ise yavaş azalanlık ve yavaş salınımlılık kavramları hatırlatılarak tek-taraflı ve çift-taraflı Tauber tipi teoremler verilmiştir.

Bölüm 3.4' de, bu bölümde elde edilen temel sonuçların ispatlarında yararlanılacak olan yardımcı lemmalara değinilmiştir.

Bölüm 3.5' de ise Bölüm 3.3' de verilen sonuçların ispatları verilmiştir.

3.1 Bu Bölüme İlişkin Ön Bilgiler

Reel ve kompleks sayı dizilerinin ağırlıklı ortalama toplanabilme metodu için Tauber tipi teoremler, Hardy (1949), Móricz and Rhoades (1995), Tietz (1990), Çanak and Totur (2011-2012) gibi birçok yazar tarafından elde edilmiştir. Hardy (1949) çift taraflı sınırlı bir klasik Tauber tipi teoremi ispatlamıştır ve Móricz and Rhoades (1995), dizilerin $(\bar{N}, p)$ toplanabilmesi için tek-taraflı sınırlı bir Tauber tipi teoremi elde etmiştir. Çanak and Totur (2011-2012) ise bu metot için bazı genel tek-taraflı Tauber tipi koşulları ortaya koymuşlardır.

Son yıllarda, integrallerin toplanabilme metotları üzerine bir ilgi vardır. Çanak and Totur (2011-2012) integrallerin Cesàro toplanabilme metodu için çeşitli klasik Tauber tipi koşullar elde etmişlerdir. Aynı zamanda bu yazarlar, reel ve kompleks sayı dizileri için Dik (2001) tarafından tanımlanan genel kontrol modülüoyu kullanarak bazı yeni Tauber tipi teoremleri ispatlamışlardır ve Hardy-Littlewood tarzı Tauber tipi teoremi genelleştirmişlerdir. Ayrıca Fekete ve Móricz

(2005), integrallerin ağırlıklı ortalama metodu için tek-tarafli ve çift-tarafli Tauber tipi koşulları oluşturmışlardır. Daha sonra, Totur and Okur (2015) ağırlıklı diziye uygulanan belirli koşullar altında integrallerin $(\bar{N}, p)$ toplanabilmesi için Landau-tipi ve Schmidt-tipi Tauber teoremlerinin alternatif ispatlarını vermişlerdir. İntegrallerin (C, α) ve logaritmik toplanabilme metotları için bazı Tauber tipi koşullar için, Totur and Çanak (2012) ile Okur and Totur (2016)' a bakılabilir.

Bu bölümde, integrallerin ağırlıklı ortalama metotlarının yinelemeleri için bazı Tauber tipi teoremler ispatlanacaktır. Ayrıca verilecek sonuçlar, integrallerin Cesàro ve logaritmik toplanabilme metotları için verilen bazı klasik Tauber tipi teoremleri genişletecek ve genelleştirecektir.

3.2 Ön Hazırlıklar

p fonksiyonu $1 < x < \infty$ için her sonlu $(1, x)$ aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir olan $A := [1, \infty)$ kümesi üzerinde pozitif bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bunu $p \in L_{loc}^1(A)$ olarak ifade edebiliriz. Sembol olarak; her bir $x > 1$ için,

$$P(x) = \int_1^x p(t)dt \neq 0,$$

$P(1) = 0$ ve $x \rightarrow \infty$ iken $P(x) \rightarrow \infty$ olacak şekilde $p \in L_{loc}^1(A)$ olsun. Reel ya da kompleks-değerli bir $f \in L_{loc}^1(A)$ fonksiyonu için,

$$s(x) := \int_1^x f(t)dt$$

olarak kabul edelim ve $P(x) > 0$ olması koşuluyla

$$\sigma_p^{(0)}(x) := s(x),$$

$$\sigma_p^{(k)}(x) := \frac{1}{P(x)} \int_1^x \sigma_p^{(k-1)}(t) p(t) dt \quad (x > 1, k = 1, 2, \dots)$$

olarak ifade edelim. $\sigma_p^{(k)}(x)$ 'in $p = p(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre $\sigma_p^{(k-1)}(x)$ ' in ağırlıklı ortalaması olduğunu hatırlayalım.

Eğer $\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_p^{(k)}(x) = L$ ise, o halde $\int_1^\infty f(x)dx$ integrali, $p(x)$ fonksiyonu tarafından belirlenen ağırlıklı ortalama metodunun k . yinelenmesi aracılığıyla L ' ye toplanabilir, veya kısaca sonlu bir L sayısına $(\bar{N}, p, k)$ integrallenebilir, denir ve $s(x) \rightarrow L(\bar{N}, p, k)$ şeklinde yazılır. $k = 0$ için $(\bar{N}, p, k)$ toplanabilmenin alışılmış yakınsaklığa indirgendiği açıktır ve $(\bar{N}, p, 1)$ toplanabilme ile $(\bar{N}, p)$ metodu ifade edilmektedir. Eğer $p(x) = 1$ ise, o halde $(\bar{N}, p, k)$ metodu, k . mertebeden Hölder metodu ya da (H, k) metodu olur. Eğer $p(x) = \frac{1}{x+1}$ ise, o halde $(\bar{N}, p, k)$ metodu, k . mertebeden logaritmik ortalamalar metoduna ya da (l, k) metoduna dönüşür.

$x \rightarrow \infty$ iken $P(x) \rightarrow \infty$ koşulunun gerekli ve yeterli bir koşul olduğu bilinmektedir ki her yakınsak $\int_1^\infty f(x)dx$ integrali aynı limite $(\bar{N}, p, k)$ toplanabilir. Yani; k negatif olmayan bir tamsayı iken $(\bar{N}, p, k)$ toplanabilme metodu regülerdir. Daha iyi ifadeyle,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} s(x) = L \quad (3.1)$$

limitinin varlığı,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_p^{(k)}(x) = L \quad (3.2)$$

limitinin varlığını gerektirir. Fakat bu ifadenin tersi genelde doğru değildir.

3.3 Temel Sonuçlar

Bu bölümün temel sonuçları, aşağıdaki şekilde ilk kez Karamata (1933) tarafından ifade edilen, $\alpha > 0$ indisine göre düzenli değişimlilik kavramını içermektedir.

$$\text{Eğer } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(x)} = \lambda^\alpha, \quad \lambda > 0 \quad (3.3)$$

ise, o halde P fonksiyonu $\alpha > 0$ indisine göre düzenli değişimli olarak adlandırılır.

Eğer bir P fonksiyonu $\alpha > 0$ indisine göre düzenli değişimli ise, o halde aşağıdaki denk koşullar açıkça sağlanmaktadır (Chen and Hsu, 2000):

Her $0 < \lambda < 1$ için

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(x)} < 1 \quad (3.4)$$

ve

her $\lambda > 1$ için

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{P(\lambda x)} < 1 \quad (3.5)$$

' dir.

Öncelikle, $(\bar{N}, p, k)$, $k \geq 1$ toplanabilme metotları için reel-değerli fonksiyonları dikkate alalım ve aşağıdaki tek-terafı Tauber tipi teoremleri ifade edelim.

Teorem 3.3.1 (Özsaraç and Çanak, 2019) P fonksiyonunun $\alpha > 0$ indisine göre düzenli değişimli olduğunu kabul edelim. Eğer; reel-değerli bir $f \in L_{loc}^1(A)$ fonksiyonu, öyle ki $s(x)$ integral fonksiyonu, L' ye $(\bar{N}, p)$ integrallenebilir ve yavaş azalan ise, o halde (3.1) sağlanır.

Teorem 3.3.2 (Özsaraç and Çanak, 2019) P fonksiyonunun $\alpha > 0$ indisine göre düzenli değişimli olduğunu ve $\frac{t p(t)}{P(t)} = O(1)$, $t \rightarrow \infty$ olduğunu kabul edelim. Eğer; reel değerli bir $f \in L_{loc}^1(A)$ fonksiyonu, öyle ki $s(x)$ integral fonksiyonu, L' ye $(\bar{N}, p, k)$, $k \geq 2$ integrallenebilir ve yavaş azalan ise, o halde (3.1) sağlanır.

Eğer

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \liminf_{x \rightarrow \infty} \min_{x \leq t \leq \lambda x} (s(t) - s(x)) \geq 0 \quad (3.6)$$

ise, A üzerinde tanımlı reel-değerli bir $s(x)$ fonksiyonunun yavaş azalan olduğu söylenir. Denk olarak, (3.6) koşulu her $\varepsilon > 0$ için, $x_1 \leq x \leq t \leq \lambda_1 x$ iken

$$s(t) - s(x) \geq -\varepsilon \quad (3.7)$$

olacak şekilde $\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon) > 1$ ve $x_1 = x_1(\varepsilon) > 0$ vardır, anlamına gelmektedir. (3.6) koşulunun, denk olarak aşağıdaki gibi de tekrar formüle edilebileceği kolayca kontrol edilebilir:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \liminf_{x \rightarrow \infty} \min_{\lambda x \leq t \leq x} (s(x) - s(t)) \geq 0. \quad (3.8)$$

Reel sayı dizileri için yavaş azalanlık kavramı ilk kez Schmidt (1925) tarafından ifade edilmiştir.

Şimdi ise $(\bar{N}, p, k)$, $k \geq 1$ toplanabilme metotları için kompleks-değerli fonksiyonları dikkate alalım ve aşağıdaki çift-tarafli Tauber tipi teoremleri ifade edelim.

Teorem 3.3.3 (Özsaraç and Çanak, 2019) P fonksiyonunun $\alpha > 0$ indisine göre düzenli değişimli olduğunu kabul edelim. Eğer; kompleks-değerli bir $f \in L_{loc}^1(A)$ fonksiyonu, öyle ki $s(x)$ integral fonksiyonu, L' ye $(\bar{N}, p)$ integrallenebilir ve yavaş salınımlı ise, o halde (3.1) sağlanır.

Teorem 3.3.4 (Özsaraç and Çanak, 2019) P fonksiyonunun $\alpha > 0$ indisine göre düzenli değişimli olduğunu ve $\frac{t p(t)}{P(t)} = O(1)$, $\rightarrow \infty$ olduğunu kabul edelim. Eğer; kompleks-değerli bir $f \in L_{loc}^1(A)$ fonksiyonu, öyle ki $s(x)$ integral fonksiyonu, L' ye $(\bar{N}, p, k)$, $k \geq 2$ integrallenebilir ve yavaş salınımlı ise, o halde (3.1) sağlanır.

Eğer

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \limsup_{x \rightarrow \infty} \max_{x \leq t \leq \lambda x} |s(t) - s(x)| = 0 \quad (3.9)$$

ise, A üzerinde tanımlı kompleks değerli bir $s(x)$ fonksiyonunun yavaş salınımlı olduğu söylenir. Denk olarak, (3.9) koşulu her $\varepsilon > 0$ için, $x_1 \leq x \leq t \leq \lambda_1 x$ iken

$$|s(t) - s(x)| \leq \varepsilon \quad (3.10)$$

olacak şekilde $\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon) > 1$ ve $x_1 = x_1(\varepsilon) > 0$ vardır, anlamına gelmektedir. (3.9) koşulunun, denk olarak aşağıdaki şekilde tekrar formüle edilebileceği kolayca kontrol edilebilir:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \limsup_{x \rightarrow \infty} \max_{\lambda x \leq t \leq x} |s(x) - s(t)| = 0.$$

Kompleks sayı dizileri için yavaş salınımlılık kavramı ilk kez Hardy (1949) tarafından ifade edilmiştir.

3.4 Yardımcı Sonuçlar

Temel sonuçları ispatlamak için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç vardır:

Lemma 3.4.1 (Móricz, 2004) Aşağıdaki özdeşlikler sağlanır:

(i) $\lambda > 1$ ve yeterince büyük x için,

$$s(x) - \sigma_p^{(1)}(x) = \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} (\sigma_p^{(1)}(\lambda x) - \sigma_p^{(1)}(x)) \\ - \frac{1}{P(\lambda x) - P(x)} \int_x^{\lambda x} (s(x) - s(t))p(t)dt.$$

(ii) $0 < \lambda < 1$ ve yeterince büyük x için,

$$s(x) - \sigma_p^{(1)}(x) = \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} (\sigma_p^{(1)}(x) - \sigma_p^{(1)}(\lambda x)) \\ + \frac{1}{P(x) - P(\lambda x)} \int_{\lambda x}^x (s(x) - s(t))p(t)dt.$$

Lemma 3.4.2 (3.6) nolu yavaş azalanlık koşulu,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \liminf_{x \rightarrow \infty} \max_{\lambda x \leq t \leq x} (s(x) - s(t)) \geq 0 \text{ koşuluna denktir.}$$

İspat $\lambda > 1$ için

$$f(\lambda) = \liminf_{x \rightarrow \infty} \min_{x \leq t \leq \lambda x} (s(t) - s(x))$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $0 < \lambda < 1$ için $f(\lambda)$ ' nın aşağıdaki uzantısını dikkate alalım:

$$f(\lambda) = \liminf_{x \rightarrow \infty} \min_{\lambda x \leq t \leq x} (s(x) - s(t)).$$

Verilen keyfi bir $\lambda > 1$ için,

$$f(\lambda) = \lim_{p \rightarrow \infty} \min_{x_p \leq t \leq \lambda x_p} (s(t) - s(x_p))$$

olacak şekilde artan bir $(x_p: p = 1, 2 \dots)$ dizisi vardır.

$$s(t_p) - s(x_p) = \min_{x_p \leq t \leq \lambda x_p} (s(t) - s(x_p)), \quad x_p \leq t_p \leq \lambda x_p, \quad p = 1, 2 \dots$$

olacak şekilde bir $(t_p: p = 1, 2 \dots)$ dizisi seçelim.

$$x_p \leq t_p \leq \lambda x_p \text{ ya da denk olarak}$$

$$\frac{1}{\lambda} t_p \leq x_p \leq t_p, \quad t_p \rightarrow \infty, \quad p \rightarrow \infty$$

ve

$$\min_{\frac{1}{\lambda} t_p \leq x \leq t_p} (s(t_p) - s(x)) \leq s(t_p) - s(x_p)$$

olduğu için,

$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \min_{\frac{1}{\lambda} t_p \leq x \leq t_p} (s(t_p) - s(x)) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} (s(t_p) - s(x_p)) = f(\lambda), \quad \lambda > 1$$

elde edilir.

$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq f(\lambda), \quad 0 \leq \lambda < 1 \quad \text{ters eşitsizliği de benzer bir yolla elde edilebilir.}$$

Böylece, her $0 < \lambda < \infty, \lambda \neq 1$ için

$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = f(\lambda) \tag{3.11}$$

olduğu sonucuna varılır. (3.6) ve (3.8)' in denkliği, (3.11)' in aşikar bir sonucudur.

Lemma 3.4.3 (3.9) nolu yavaş azalanlık koşulu,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \limsup_{x \rightarrow \infty} \max_{\lambda x \leq t \leq x} |s(x) - s(t)| = 0 \tag{3.12}$$

koşuluna denktir.

İspat İspatı, Lemma 3.4.2' nin ispatına benzer bir şekilde yapılabilir.

Lemma 3.4.4 (Móricz, 2004) Eğer; $t_0 \leq t \leq x \leq \lambda t$ için $s(x) - s(t) \geq -1$ olacak şekilde pozitif bir t_0 tam sayısı ve reel bir $\lambda > 1$ sayısı var ise, o halde her

$0 \leq t \leq \frac{x}{\lambda}$ için $s(x) - s(t) \geq -B \log\left(\frac{x}{t}\right)$ olacak şekilde pozitif bir B sabiti vardır.

Lemma 3.4.5 (Móricz, 2004) Eğer; $t_0 \leq t \leq x \leq \lambda t$ için $|s(x) - s(t)| \leq 1$ olacak şekilde pozitif bir t_0 tamsayısı ve reel bir $\lambda > 1$ sayısı var ise, o halde her $0 \leq t \leq \frac{x}{\lambda}$ için $|s(x) - s(t)| \leq B \log\left(\frac{x}{t}\right)$ olacak şekilde bir B sabiti vardır.

Lemma 3.4.4 ve Lemma 3.4.5, Móricz (2004) tarafından reel ve kompleks sayı dizileri için verilmiştir.

Lemma 3.4.6 Eğer; $t_0 \leq t \leq x \leq \lambda t$ için $s(x) - s(t) \geq -1$ olacak şekilde pozitif bir t_0 tam sayısı ve reel bir $\lambda > 1$ sayısı var ve $\frac{t p(t)}{P(t)} = O(1), t \rightarrow \infty$ ise, o halde $\frac{1}{P(x)} \int_1^x (s(x) - s(t)) p(t) dt$ fonksiyonu alttan sınırlıdır.

İspat Lemma 3.4.4 aracılığıyla, $0 \leq t \leq \frac{x}{\lambda}$ için

$$s(x) - s(t) \geq -B \log\left(\frac{x}{t}\right) \quad (3.13)$$

olacak şekilde pozitif bir B sabiti vardır. Hipotez ve (3.13) aracılığıyla, $x \geq \lambda t_0$ için

$$\begin{aligned} \int_1^x (s(x) - s(t)) p(t) dt &= \left(\int_1^{\left[\frac{x}{\lambda}\right]} + \int_{\left[\frac{x}{\lambda}\right]}^x \right) (s(x) - s(t)) p(t) dt \\ &\geq (-B) \int_1^{\left[\frac{x}{\lambda}\right]} \log\left(\frac{x}{1}\right) p(t) dt - \int_{\left[\frac{x}{\lambda}\right]}^x p(t) dt \\ &\geq (-B) \int_1^x \left(\log x - \log t p(t) dt - \left(P(x) - P\left(\left[\frac{x}{\lambda}\right]\right) \right) \right) \\ &\geq (-B) \left(\log x \int_1^x p(t) dt - \log x P(x) + \int_1^x \frac{P(t)}{t} dt \right) - P(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-B) \int_1^x \frac{P(t)}{t} dt - P(x) \\
&\geq (-B')P(x) - P(x) \\
&= - (B' + 1)P(x)
\end{aligned}$$

elde edilir, burada $[\cdot]$ simgesi, (bir reel sayının) tam kısmı anlamına gelmektedir. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 3.4.7 Eğer; $t_0 \leq t \leq x \leq \lambda t$ için $|s(x) - s(t)| \leq 1$ olacak şekilde pozitif bir t_0 sayısının ve reel bir $\lambda > 1$ sayısı var ve $\frac{t p(t)}{P(t)} = 0(1), t \rightarrow \infty$ ise, o halde $\frac{1}{P(x)} \int_1^x |s(x) - s(t)| p(t) dt$ fonksiyonu sınırlıdır.

İspat Lemma 3.4.5 aracılığıyla, $0 \leq t \leq \frac{x}{\lambda}$ için

$$|s(x) - s(t)| \leq B \log \left(\frac{x}{t} \right) \quad (3.14)$$

olacak şekilde bir B sabiti vardır. Hipotez ve (3.14) aracılığıyla, $x \geq \lambda t_0$ için

$$\begin{aligned}
\int_1^x |s(x) - s(t)| p(t) dt &= \left(\int_1^{\left[\frac{x}{\lambda}\right]} + \int_{\left[\frac{x}{\lambda}\right]}^x \right) |s(x) - s(t)| p(t) dt \\
&\leq B \int_1^{\left[\frac{x}{\lambda}\right]} \log \frac{x}{t} p(t) dt + \int_{\left[\frac{x}{\lambda}\right]}^x p(t) dt \\
&\leq B \int_1^x (\log x - \log t) p(t) dt + \left(P(x) - P\left(\left[\frac{x}{\lambda}\right]\right) \right) \\
&\leq B \left(\log x \int_1^x p(t) dt - \log x P(x) + \int_1^x \frac{P(t)}{t} dt \right) + P(x) \\
&= B \int_1^x \frac{P(t)}{t} dt + P(x) \\
&\leq B' P(x) + P(x)
\end{aligned}$$

$$= (B' + 1)P(x)$$

elde edilir, burada $[\cdot]$ simgesi, (bir reel sayının) tam kısmı anlamına gelmektedir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.4.1 Eğer; Lemma 3.4.6' da (veya Lemma 3.4.7' de) $p(x) = 1$ ve $p(x) = \frac{1}{x}$ seçilirse, o halde bu lemmalar, sırasıyla Cesàro ve logaritmik toplanabilme metotları için geçerli olur.

3.5 Temel Sonuçların İspatları

Teorem 3.3.1' in İspatı $s(x)$ ' in yavaş azalan ve L' ye $(\bar{N}, p)$ integrallenebilir olduğunu kabul edelim. Lemma 3.4.1 (i) aracılığıyla, $\lambda > 1$ için

$$s(x) - \sigma_p^{(1)}(x) \leq \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left(\sigma_p^{(1)}(\lambda x) - \sigma_p^{(1)}(x) \right) - \min_{x \leq t \leq \lambda x} (s(t) - s(x)) \quad (3.15)$$

elde edilir. P fonksiyonu α indisine göre düzenli değişimli olduğu için, her $\lambda > 1$ ve yeterince büyük x için

$$\frac{\lambda^\alpha}{2(\lambda^\alpha - 1)} \leq \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \leq \frac{3\lambda^\alpha}{2(\lambda^\alpha - 1)} \quad (3.16)$$

olduğu açıktır. (3.16) ve $s(x)$ ' in L' ye $(\bar{N}, p)$ integrallenebilmesi aracılığıyla, her $\lambda > 1$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left(\sigma_p^{(1)}(\lambda x) - \sigma_p^{(1)}(x) \right) = 0 \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.15)' in her iki tarafının limit supremumu alınarak

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left(s(x) - \sigma_p^{(1)}(x) \right) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left(\sigma_p^{(1)}(\lambda x) - \sigma_p^{(1)}(x) \right) - \limsup_{x \rightarrow \infty} \min_{x \leq t \leq \lambda x} (s(t) - s(x)) \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.18)' de, (3.17)' yi göz önüne alarak

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left(s(x) - \sigma_p^{(1)}(x) \right) \leq -\liminf_{x \rightarrow \infty} \min_{x \leq t \leq \lambda x} (s(t) - s(x)) \quad (3.19)$$

elde edilir. (3.19)' da $\lambda \rightarrow 1^+$ alınarak

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} (s(x) - \sigma_p^1(x)) \leq \lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \liminf_{x \rightarrow \infty} \min_{x \leq t \leq \lambda x} (s(t) - s(x)) \quad (3.20)$$

elde edilir. $s(x)$ fonksiyonu yavaş azalan olduğu için, (3.20)' den,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} (s(x) - \sigma_p^{(1)}(x)) \leq 0 \quad (3.21)$$

olur. Benzer bir yolla, Lemma 3.4.1 (ii)' den,

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} (s(x) - \sigma_p^{(1)}(x)) \geq 0 \quad (3.22)$$

olduğuna ulaşılır. (3.21) ve (3.22)' yi birleştirerek $\lim_{x \rightarrow \infty} s(x) = L$ olduğu elde edilir.

Teorem 3.3.2' nin İspatı Öncelikle, eğer $s(x)$ fonksiyonu yavaş azalan ise, $\sigma_p^{(1)}(x)$ fonksiyonunun da yavaş azalan olduğunu ispatlayalım. Bu amaçla, $\varepsilon > 0$ olduğunu kabul edelim. $s(x)$ fonksiyonunun yavaş azalanlığı aracılığıyla,

$$s(t) - s(x) \geq -\varepsilon, \quad x_0 \leq x \leq t \leq \lambda_0 t \quad (3.23)$$

sağlanacak şekilde $x_0 = x_0(\varepsilon)$ ve $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon) > 1$ vardır.

$P(x_0) \leq P(x) \leq P(t) \leq \lambda_0 P(x)$ olsun. O halde, ağırlıklı ortalama tanımı aracılığıyla,

$$\begin{aligned} \sigma_p^{(1)}(t) - \sigma_p^{(1)}(x) &= \frac{1}{P(t)} \int_1^t s(u)p(u)du - \frac{1}{P(x)} \int_1^x s(u)p(u)du \\ &= \frac{1}{P(t)} \left[\left(\int_1^x + \int_x^t \right) s(u)p(u)du \right] \\ &\quad - \frac{1}{P(x)} \int_1^x s(u)p(u)du \\ &= -\frac{P(t) - P(x)}{P(t)P(x)} \int_1^x s(u)p(u)du + \frac{1}{P(t)} \int_x^t s(u)p(u)du \\ &= \frac{P(t) - P(x)}{P(t)P(x)} \int_1^x [s(x) - s(u)] du \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{P(t)} \int_x^t [s(u) - s(x)] p(u) du$$

olduğu elde edilir. Lemma 3.4.6 aracılığıyla,

$$\frac{1}{P(x)} \int_1^x [s(x) - s(t)] p(t) dt \geq -B$$

olacak şekilde pozitif bir B sabiti vardır. Bu eşitsizlik ve (3.23) aracılığıyla,

$$\begin{aligned} \sigma_p^{(1)}(t) - \sigma_p^{(1)}(x) &\geq \frac{P(t) - P(x)}{P(t)P(x)} (-B) + \frac{1}{P(t)} (-\varepsilon) \int_x^t p(u) du \\ &= -\left(1 - \frac{P(x)}{P(t)}\right) (B + \varepsilon) \end{aligned}$$

olur. $P(x) \leq P(t) \leq \lambda_0 P(x)$ ve $\lambda_0 > 1$ olduğu için,

$$1 - \frac{P(x)}{P(t)} \leq 1 - \frac{1}{\lambda_0} < \lambda_0 - 1$$

eşitsizliğinden dolayı, $1 < \lambda_0 \leq 1 + \frac{\varepsilon}{B+\varepsilon}$ olmak koşuluyla,

$$\sigma_p^{(1)}(t) - \sigma_p^{(1)}(x) \geq -(\lambda_0 - 1)(B + \varepsilon) \geq -\varepsilon, \quad P(x_0) \leq P(x) \leq P(t) \leq \lambda_0 P(x)$$

elde edilir. Bu ise, $\sigma_p^1(x)$ ağırlıklı ortalama fonksiyonunun da yavaş azalan olduğunu ispatlar. Bu gerçek aracılığıyla; eğer $s(x)$ fonksiyonu yavaş azalan ise, o halde $k = 1, 2 \dots$ için $\sigma_p^{(k)}(x)$ fonksiyonunun da yavaş azalan olduğu açıktır. Hipotezden dolayı $s(x)$ fonksiyonu L' ye $(\bar{N}, p, k)$ integrallenebilir olduğu için, Teorem 3.3.1 aracılığıyla $s(x)$ fonksiyonu L' ye $(\bar{N}, p, k - 1)$ integrallenebilirdir. Bu şekilde devam ederek, Teorem 3.3.1 aracılığıyla, (3.1) ifadesi elde edilir.

Teorem 3.3.3' ün İspatı $s(x)$ ' in yavaş salınımlı ve L' ye $(\bar{N}, p)$ integrallenebilir olduğunu kabul edelim. Lemma 3.4.1 (i) aracılığıyla, $\lambda > 1$ için

$$\begin{aligned} |s(x) - \sigma_p^{(1)}(x)| &\leq \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} |\sigma_p^{(1)}(\lambda x) - \sigma_p^{(1)}(x)| \\ &\quad + \max_{x \leq t \leq \lambda x} |s(t) - s(x)| \end{aligned} \quad (3.24)$$

elde edilir. P fonksiyonu α indisine göre düzenli değişimli olduğu için, her $\lambda > 1$ ve yeterince büyük x için

$$\frac{\lambda^\alpha}{2(\lambda^\alpha - 1)} \leq \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \leq \frac{3\lambda^\alpha}{2(\lambda^\alpha - 1)} \quad (3.25)$$

olduğu açıktır. (3.25) ve $s(x)$ ' in L ' ye $(\bar{N}, p)$ integrallenebilmesi aracılığıyla, her $\lambda > 1$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left| \sigma_p^{(1)}(\lambda x) - \sigma_p^{(1)}(x) \right| = 0 \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.24)' ün her iki tarafının limit supremumu alınarak

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow \infty} |s(x) - \sigma_p^{(1)}(x)| &\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} |\sigma_p^{(1)}(\lambda x) - \sigma_p^{(1)}(x)| \\ &\quad + \limsup_{x \rightarrow \infty} \max_{x \leq t \leq \lambda x} |s(t) - s(x)| \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.27)' de, (3.26) göz önüne alınarak

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} |s(x) - \sigma_p^{(1)}(x)| \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \max_{x \leq t \leq \lambda x} |s(t) - s(x)| \quad (3.28)$$

elde edilir. (3.28)' de $\lambda > 1^+$ alınarak

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} |s(x) - \sigma_p^{(1)}(x)| \leq \lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \limsup_{x \rightarrow \infty} \max_{x \leq t \leq \lambda x} |s(t) - s(x)| \quad (3.29)$$

elde edilir. $s(x)$ fonksiyonu yavaş salınımlı olduğu için, (3.29)' dan,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} |s(x) - \sigma_p^{(1)}(x)| = 0 \quad (3.30)$$

olur. Bu ise, $\lim_{x \rightarrow \infty} s(x) = L$ olmasını gerektirir.

Teorem 3.3.4' ün İspatı Öncelikle, eğer $s(x)$ fonksiyonu yavaş salınımlı ise, $\sigma_p^{(1)}(x)$ fonksiyonunun da yavaş salınımlı olduğunu ispatlayalım. Bu amaçla, $\varepsilon > 0$ olduğunu kabul edelim. $s(x)$ fonksiyonunun yavaş salınımlılığı aracılığıyla,

$$|s(t) - s(x)| \leq \varepsilon, \quad x_0 \leq x \leq t \leq \lambda_0 t \quad (3.31)$$

sağlanacak şekilde $x_0 = x_0(\varepsilon)$ ve $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon) > 1$ vardır.

$P(x_0) \leq P(x) \leq P(t) \leq \lambda_0 P(x)$ olsun. O halde, ağırlıklı ortalama tanımı aracılığıyla,

$$\begin{aligned}
|\sigma_p^1(t) - \sigma_p^1(x)| &= \left| \frac{1}{P(t)} \int_1^t s(u) du - \frac{1}{P(x)} \int_1^x s(u) p(u) du \right| \\
&= \left| \frac{1}{P(t)} \left[\left(\int_1^x + \int_x^t \right) s(u) p(u) du \right] - \frac{1}{P(x)} \int_1^x s(u) p(u) du \right| \\
&= \left| -\frac{P(t) - P(x)}{P(t)P(x)} \int_1^x s(u) p(u) du + \frac{1}{P(t)} \int_x^t s(u) p(u) du \right| \\
&= \left| \frac{P(t) - P(x)}{P(t)P(x)} \int_1^x [s(x) - s(u)] p(u) du \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{P(t)} \int_x^t [s(u) - s(x)] p(u) du \right| \\
&\leq \frac{P(t) - P(x)}{P(t)P(x)} \int_1^x |s(x) - s(u)| p(u) du \\
&\quad + \frac{1}{P(t)} \int_x^t |s(u) - s(x)| p(u) du
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Lemma 3.4.7 aracılığıyla,

$$\frac{1}{P(x)} \int_1^x |s(x) - s(t)| p(t) dt \leq B$$

olacak şekilde bir B sabiti vardır. Bu eşitsizlik ve (3.31) aracılığıyla,

$$\begin{aligned}
|\sigma_p^{(1)}(t) - \sigma_p^{(1)}(x)| &\leq \frac{P(t) - P(x)}{P(t)P(x)} B + \frac{1}{P(t)} \varepsilon \int_x^t p(u) du \\
&= \left(1 - \frac{P(x)}{P(t)} \right) (B + \varepsilon)
\end{aligned}$$

olur. $P(x) \leq P(t) \leq \lambda_0 P(x)$ ve $\lambda_0 > 1$ olduğu için,

$$1 - \frac{P(x)}{P(t)} \leq 1 - \frac{1}{\lambda_0} < \lambda_0 - 1$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikten dolayı, $1 < \lambda_0 \leq 1 + \frac{\varepsilon}{B+\varepsilon}$ olmak koşuluyla,

$$\left| \sigma_p^{(1)}(t) - \sigma_p^{(1)}(x) \right| \leq (\lambda_0 - 1)(B + \varepsilon) < \varepsilon, P(x_0) \leq P(x) \leq P(t) \leq \lambda_0 P(x)$$

olduğu elde edilir. Bu ise, $\sigma_p^{(1)}(x)$ ağırlıklı ortalama fonksiyonunun da yavaş salınımlı olduğunu ispatlar. Bu gerçek aracılığıyla; eğer $s(x)$ fonksiyonu yavaş salınımlı ise, o halde $k = 1, 2, \dots$ için $\sigma_p^{(k)}(x)$ fonksiyonun da yavaş salınımlı olduğu açıktır. Hipotezden dolayı $s(x)$ fonksiyonu L' ye $(\bar{N}, p, k)$ integrallenebilir olduğu için, Teorem 3.3.3 aracılığıyla $s(x)$ fonksiyonu L' ye $(\bar{N}, p, k - 1)$ integrallenebilirdir. Bu şekilde devam ederek, Teorem 3.3.3 aracılığıyla, (3.1) ifadesi elde edilir.

4 İNTEGRALLERİN AĞIRLIKLIL ORTALAMA TOPLANABİLME METODU İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Bu bölüm 4 ana başlıktan oluşmaktadır.

Bölüm 4.1' de, öncelikle konuyla ilgili temel tanımlar, sonrasında ise bu bölüme ilişkin daha önce yapılan çalışmalarla ilgili bilgiler verilecektir.

Bölüm 4.2' de, gerekli tanımlar ve notasyonlar verilerek reel ve kompleks değerli fonksiyonlar için Tauber tipi teoremler verilmiştir.

Bölüm 4.3' de, bu bölümde elde edilen temel sonuçların ispatlarında yararlanılacak olan bir ifadenin iki farklı gösterimine değinilmiştir.

Bölüm 4.4' de ise Bölüm 4.2' de verilen sonuçların ispatları verilmiştir.

4.1 Bu Bölüme İlişkin Ön Bilgiler

p fonksiyonu, $0 < x < \infty$ için her sonlu $(0, x)$ aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir olan $R_+ := [0, \infty)$ kümesi üzerinde pozitif bir ağırlık fonksiyonu olsun. Sembol olarak, her bir $x > 0$ için

$$P(x) := \int_0^x p(t)dt \neq 0, P(0) = 0$$

ve $x \rightarrow \infty$ iken $P(x) \rightarrow \infty$ olacak şekilde $p \in L^1_{loc}(R_+)$ olsun. Verilen bir reel ya da kompleks-değerli bir $f \in L^1_{loc}(R_+)$ fonksiyonu için, $P(x) > 0$ olması koşuluyla,

$$s(x) := \int_0^x f(t)dt, \sigma_p^{(0)}(x) := s(x) \text{ ve}$$

$$\sigma_p^{(m)}(x) := \frac{1}{P(x)} \int_0^x \sigma_p^{(m-1)}(t)p(t)dt \quad (x > 0, m = 1, 2, \dots)$$

olarak tanımlayalım.

Her bir $m \geq 0$ tamsayısı için,

$$v_p^{(m)}(x) = \begin{cases} \frac{P(x)}{p(x)} f(x), & m = 0 \\ \frac{1}{P(x)} \int_0^x f(t)P(t)dt, & m = 1 \\ \frac{1}{P(x)} \int_0^x v_p^{(m-1)}(t)p(t)dt, & m \geq 2 \end{cases}$$

aracılığıyla, $v_p^{(m)}(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) = v_p^{(m)}(x) \quad (4.1)$$

özdeşliği, ağırlıklı ortalama toplanabilme metodu için ağırlıklı Kronecker özdeşliği olarak bilinir.

Her bir $m \geq 0$ tamsayısı için

$$\frac{P(x)}{p(x)} \frac{d}{dx} \sigma_p^{(m)}(x) = v_p^{(m)}(x)$$

olduğu (4.1)' den açıktır. Burada, her bir $m \geq 1$ tamsayısı için $v_p^{(m)}(x)$ ' e, $\sigma_p^{(m-1)}(x)$ ' in üretici denmektedir.

Eğer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_p^{(m)}(x) = L \quad (4.2)$$

ise, o halde $\int_0^\infty f(x)dx$ integrali, $p(x)$ fonksiyonu tarafından belirlenen ağırlıklı ortalama metodunun m . yinelenmesi aracılığıyla L 'ye toplanabilirdir, veya kısaca sonlu bir L sayısına $(\bar{N}, p, m)$ integrallenebilirdir, denir. Bu durumda, $s(x) \rightarrow L(\bar{N}, p, m)$ şeklinde yazılır.

$m = 0$ için $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilmenin alışılmış yakınsaklığa indirgeniği açıktır ve $(\bar{N}, p, 1)$ toplanabilme ile $(\bar{N}, p)$ metodu ifade edilmektedir. Eğer R_+ üzerinde $p(x) = 1$ ise, o halde $(\bar{N}, p, m)$ metodu, m . mertebeden Hölder metodu olur ve $(\bar{N}, p, 1)$ metodu, Cesàro toplanabilme metodudur.

$x \rightarrow \infty$ iken $P(x) \rightarrow \infty$ koşulu gerekli ve yeterli bir koşuldur, ki bu durumda

$$\int_0^{\infty} s(x) dx = L \quad (4.3)$$

integralinin varlığı, (4.2)' yi gerektirir. Yani; m negatif olmayan bir tamsayı iken $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilme metodu regülerdir. Bununla birlikte, bu ifadenin tersi genelde doğru değildir. (4.2) ile birlikte $s(x)$ üzerine konulacak bazı uygun koşullar altında, (4.3)' ün varlığı elde edilebilir.

Móricz (2004) ve Fekete and Móricz (2005), integrallerin ağırlıklı ortalama $(\bar{N}, p)$ metodu için tek-tarafli ve çift-tarafli Tauber tipi koşulları elde etmişlerdir. Bu çalışmalar sonrasında Totur and Okur (2015), $v_p^{(0)}(x)$ ' in tek-tarafli sınırlılığının, integrallerin ağırlıklı ortalama toplanabilme metodu için bir Tauber tipi koşul olduğunu ispatlamışlardır. $v_p^{(0)}(x) \geq -C$ koşulunun $s(x)$ ' in yavaş azalanlığını gerektirdiği gerçeğinden hareketle, Totur and Okur (2015) ilk sonucu genelleştirmişlerdir ve $s(x)$ ' in yavaş azalanlığının da $(\bar{N}, p)$ metodu için bir Tauber tipi koşul olduğunu ispatlamışlardır.

Bu bölümde, sırasıyla, reel ya da kompleks-değerli fonksiyonların ağırlıklı ortalamalarının m . yinlemeleri aracılığıyla toplanabilir integraller için üreteç ve onların genellemeleri açısından tek-tarafli ve çift-tarafli Tauber tipi koşullar elde edilmiştir. Ayrıca; verilecek sonuçlar Cesàro $(C, 1)$ toplanabilme ve ağırlıklı ortalama $(\bar{N}, p)$ toplanabilme metodu için verilen bazı klasik tipli Tauber tipi teoremleri genişletecek ve genelleştirecektir.

4.2 Temel Sonuçlar

Bu bölümün temel sonuçları için aşağıdaki tanımlara ve kavramlara ihtiyaç vardır:

Tanım 4.2.1 (Karamata, 1933) Eğer $\lambda > 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(x)} = \lambda^\alpha \quad (4.4)$$

ise, o halde P pozitif fonksiyonu $\alpha > 0$ indisine göre düzenli değişimli olarak adlandırılır.

Eğer bir P pozitif fonksiyonu $\alpha > 0$ indisine göre düzenli değişimli ise, o halde aşağıdaki denk koşullar açıkça sağlanmaktadır (Chen and Hsu, 2000):

Her $\lambda > 1$ için

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{P(\lambda x)} < 1 \quad (4.5)$$

ve her $0 < \lambda < 1$ için

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(x)} < 1 \quad (4.6)$$

' dir.

Öncelikle, reel-değerli fonksiyonları dikkate alalım ve aşağıdaki Tauber tipi teoremleri ifade edelim.

Teorem 4.2.1 (Özsaraç and Çanak, 2020) (4.4) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Eğer, reel-değerli bir $f \in L^1_{loc}(R_+)$ fonksiyonu, öyle ki $s(x)$ integral fonksiyonu, L' ye $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilir ve $v_p^{(m-1)}(x)$ fonksiyonu tek-tarafli sınırlı ise, o halde $s(x)$ fonksiyonu L' ye $(\bar{N}, p, m - 1)$ toplanabilirdir.

Sonuç 4.2.1 (Totur and Okur, 2015) (4.4) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Eğer; reel-değerli bir $f \in L^1_{loc}(R_+)$ fonksiyonu, öyle ki $s(x)$ integral fonksiyonu, L' ye $(\bar{N}, p, 1)$ toplanabilir ve $v_p(x)$ fonksiyonu tek-tarafli sınırlı ise, o halde $s(x)$ fonksiyonu L' ye yakınsar.

Teorem 4.2.2 (Özsaraç and Çanak, 2020) (4.5) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Eğer; reel-değerli bir $f \in L^1_{loc}(R_+)$ fonksiyonu, öyle ki $s(x)$ integral fonksiyonu, L' ye $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilir ve $\sigma_p^{(m-1)}(x)$ fonksiyonu yavaş azalan ise, o halde $s(x)$ fonksiyonu L' ye $(\bar{N}, p, m - 1)$ toplanabilirdir.

Sonuç 4.2.2 (Totur and Okur, 2015) (4.5) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Eğer; reel-değerli bir $f \in L^1_{loc}(R_+)$ fonksiyonu, öyle ki $s(x)$ integral fonksiyonu, L' ye $(\bar{N}, p, 1)$ toplanabilir ve yavaş azalan ise, o halde $s(x)$ fonksiyonu L' ye yakınsar.

Eğer

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \liminf_{x \rightarrow \infty} \min_{x \leq t \leq \lambda x} (s(t) - s(x)) \geq 0 \quad (4.7)$$

ise, R_+ üzerinde tanımlı reel-değerli bir $s(x)$ fonksiyonunun yavaş azalan olduğu söylenir. (4.7) koşulu, denk olarak aşağıdaki gibi tekrar formüle edilebilir:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \liminf_{x \rightarrow \infty} \min_{\lambda x \leq t \leq x} (s(x) - s(t)) \geq 0. \quad (4.8)$$

Şimdi ise, kompleks-değerli fonksiyonları dikkate alalım ve aşağıdaki Tauber tipi teoremleri ifade edelim.

Teorem 4.2.3 (Özsaraç and Çanak, 2020) (4.4) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Eğer; kompleks-değerli bir $f \in L^1_{loc}(R_+)$ fonksiyonu, öyle ki $s(x)$ integral fonksiyonu, L' ye $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilir ve $v_p^{(m-1)}(x)$ fonksiyonu sınırlı ise, o halde $s(x)$ fonksiyonu L' ye $(\bar{N}, p, m - 1)$ toplanabilirdir.

Sonuç 4.2.3 (Özsaraç and Çanak, 2020) (4.4) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Eğer; kompleks-değerli bir $f \in L^1_{loc}(R_+)$ fonksiyonu, öyle ki $s(x)$ integral fonksiyonu, L' ye $(\bar{N}, p, 1)$ toplanabilir ve $v_p(x)$ fonksiyonu sınırlı ise, o halde $s(x)$ fonksiyonu L' ye yakınsar.

Teorem 4.2.4 (Özsaraç and Çanak, 2020) (4.5) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Eğer; kompleks-değerli bir $f \in L^1_{loc}(R_+)$ fonksiyonu, öyle ki $s(x)$ integral fonksiyonu, L' ye $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilir ve $\sigma_p^{(m-1)}(x)$ fonksiyonu yavaş salınımlı ise, o halde $s(x)$ fonksiyonu L' ye $(\bar{N}, p, m - 1)$ toplanabilirdir.

Sonuç 4.2.3 (Özsaraç and Çanak, 2020) (4.5) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Eğer; kompleks-değerli bir $f \in L^1_{loc}(R_+)$ fonksiyonu, öyle ki $s(x)$ integral

fonksiyonu, L' ye $(\bar{N}, p, 1)$ toplanabilir ve yavaş salınımlı ise, o halde $s(x)$ fonksiyonu L' ye yakınsar.

Eğer

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \limsup_{x \rightarrow \infty} \max_{x \leq t \leq \lambda x} |s(t) - s(x)| = 0 \quad (4.9)$$

ise, R_+ üzerinde tanımlı kompleks-değerli bir $s(x)$ fonksiyonunun yavaş salınımlı olduğu söylenir. (4.9) koşulu, denk olarak aşağıdaki gibi tekrar formüle edilebilir:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \limsup_{x \rightarrow \infty} \max_{\lambda x \leq t \leq x} |s(x) - s(t)| = 0. \quad (4.10)$$

4.3 Temel Sonuçların İspatları

Teorem 4.2.1' in İspatı $s(x)$ fonksiyonunun L' ye $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilir ve $v_p^{(m-1)}(x)$ fonksiyonunun da tek-terafli sınırlı olduğunu kabul edelim.

Lemma 3.4.1 (i) aracılığıyla, $\lambda > 1$ için

$$\begin{aligned} \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) &= \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left(\sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \\ &\quad - \frac{1}{P(\lambda x) - P(x)} \int_x^{\lambda x} \left(\sigma_p^{(m-1)}(t) - \sigma_p^{(m-1)}(x) \right) p(t) dt \\ &= \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left(\sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \\ &\quad - \frac{1}{P(\lambda x) - P(x)} \int_x^{\lambda x} \left(\int_x^t \frac{d}{dz} \sigma_p^{(m-1)}(z) dz \right) p(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir. $v_p^{(m-1)}(x)$ fonksiyonu tek-terafli sınırlı olduğu için,

$$\begin{aligned} \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) &\leq \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left(\sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \\ &\quad + \frac{C}{P(\lambda x) - P(x)} \int_x^{\lambda x} \left(\int_x^t \frac{p(z)}{P(z)} dz \right) p(t) dt \\ &= \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left(\sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C}{P(\lambda x) - P(x)} \int_x^{\lambda x} p(t) \log \frac{P(t)}{P(x)} dt \\
& = \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left(\sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \\
& + C \cdot \log \frac{P(\lambda x)}{P(x)}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

olur. P fonksiyonu α indisine göre düzenli değişimli olduğu için, her $\lambda > 1$ ve yeterince büyük x için

$$\frac{\lambda^\alpha}{2(\lambda^\alpha - 1)} \leq \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \leq \frac{3\lambda^\alpha}{2(\lambda^\alpha - 1)} \tag{4.12}$$

olduğu açıktır. (4.12) ve $s(x)$ ' in $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilmesi aracılığıyla, her $\lambda > 1$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left(\sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) = 0 \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.11)' da (4.13)' ü göz önüne alarak

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \left(C \cdot \log \frac{P(\lambda x)}{P(x)} \right) = C \log \lambda^\alpha$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $\lambda \rightarrow 1^+$ alınarak

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \leq 0 \tag{4.14}$$

olduğuna ulaşılır.

Benzer bir yolla, *Lemma 3.4.1 (ii)*' den $0 < \lambda < 1$ için

$$\begin{aligned}
\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) & = \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left(\sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right) \\
& + \frac{1}{P(x) - P(\lambda x)} \int_{\lambda x}^x \left(\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m-1)}(t) \right) p(t) dt \\
& = \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left(\sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right) \\
& + \frac{1}{P(x) - P(\lambda x)} \int_{\lambda x}^x \left(\int_t^x \frac{d}{dz} \sigma_p^{(m-1)}(z) dz \right) p(t) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. $v_p^{(m-1)}(x)$ fonksiyonu tek-tarafli sınırlı olduğu için,

$$\begin{aligned}
\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) &\geq \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left(\sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right) \\
&\quad - \frac{C}{P(x) - P(\lambda x)} \int_{\lambda x}^x \left(\int_t^x \frac{p(z)}{P(z)} dz \right) p(t) dt \\
&= \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left(\sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right) \\
&\quad - \frac{C}{P(x) - P(\lambda x)} \int_{\lambda x}^x p(t) \log \frac{P(x)}{P(t)} dt \\
&= \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left(\sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right) \\
&\quad - C \cdot \log \frac{P(x)}{P(\lambda x)}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

olur. P fonksiyonu α indisine göre düzenli değişimli olduğu için, her $0 < \lambda < 1$ ve yeterince büyük x için

$$\frac{\lambda^\alpha}{2(1 - \lambda^\alpha)} \leq \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \leq \frac{3\lambda^\alpha}{2(1 - \lambda^\alpha)} \tag{4.16}$$

olduğu açıktır. (4.16) ve $s(x)$ ' in $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilmesi aracılığıyla, her $0 < \lambda < 1$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left(\sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right) = 0 \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.15)' de, (4.17)' yi göz önüne alarak

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} C \log \frac{P(x)}{P(\lambda x)} = C \log \lambda^\alpha$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $\lambda \rightarrow 1^-$ alınarak

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \geq 0 \tag{4.18}$$

olduğuna ulaşılır. (4.14) ve (4.18)' i birleştirerek, $s(x)$ ' in L' ye $(\bar{N}, p, m - 1)$ toplanabilir olduğu elde edilir.

Teorem 4.2.2' nin İspatı $s(x)$ fonksiyonunun L' ye $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilir ve $\sigma_p^{(m-1)}(x)$ fonksiyonunun da yavaş azalan olduğunu kabul edelim.

Lemma 3.4.1 (i) aracılığıyla, $\lambda > 1$ için

$$\begin{aligned}
\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) &= \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left(\sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \\
&\quad - \frac{1}{P(\lambda x) - P(x)} \int_x^{\lambda x} \left(\sigma_p^{(m-1)}(t) - \sigma_p^{(m-1)}(x) \right) p(t) dt \\
&\leq \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left(\sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \\
&\quad - \frac{1}{P(\lambda x) - P(x)} \int_x^{\lambda x} p(t) \min_{x \leq t \leq \lambda x} \left(\sigma_p^{(m-1)}(t) - \sigma_p^{(m-1)}(x) \right) dt \\
&= \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left(\sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \\
&\quad - \min_{x \leq t \leq \lambda x} \left(\sigma_p^{(m-1)}(t) - \sigma_p^{(m-1)}(x) \right) \tag{4.19}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.19)' un her iki tarafının limit supremumu alınarak

$$\begin{aligned}
\limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \\
\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left(\sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \\
- \liminf_{x \rightarrow \infty} \min_{x \leq t \leq \lambda x} \left(\sigma_p^{(m-1)}(t) - \sigma_p^{(m-1)}(x) \right) \tag{4.20}
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. (4.5) aracılığıyla,

$$0 \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} = 1 + \left(\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(x)} - 1 \right)^{-1} < \infty$$

olur. $s(x)$ fonksiyonu L' ye $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilir olduğu için, (4.20)' de sağ taraftaki ilk terim yok olur. Bundan dolayı,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \leq - \liminf_{x \rightarrow \infty} \min_{x \leq t \leq \lambda x} \left(\sigma_p^{(m-1)}(t) - \sigma_p^{(m-1)}(x) \right)$$

olur. $\lambda \rightarrow 1^+$ iken (4.20)' nin limitini alarak

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \leq 0 \quad (4.21)$$

olduğuna ulaşılır.

Benzer bir yolla, *Lemma 3.4.1 (ii)* aracılığıyla, $0 < \lambda < 1$ için

$$\begin{aligned} \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) &= \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left(\sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right) \\ &\quad + \frac{1}{P(x) - P(\lambda x)} \int_{\lambda x}^x \left(\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m-1)}(t) \right) p(t) dt \\ &\geq \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left(\sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right) \\ &\quad + \frac{1}{P(x) - P(\lambda x)} \int_{\lambda x}^x p(t) \min_{\lambda x \leq t \leq x} \left(\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m-1)}(t) \right) dt \\ &= \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left(\sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right) \\ &\quad + \min_{\lambda x \leq t \leq x} \left(\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m-1)}(t) \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

elde edilir. (4.22)'nin her iki tarafının limit infimumu alınarak

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow \infty} \left(\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) &\geq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left(\sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right) \\ &\quad + \liminf_{x \rightarrow \infty} \min_{\lambda x \leq t \leq x} \left(\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m-1)}(t) \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

bulunur. (4.5) aracılığıyla,

$$0 \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} = \left(\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{P(\lambda x)} - 1 \right)^{-1} < \infty$$

olur. $s(x)$ fonksiyonu L' ye $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilir olduğu için, (4.23)'de sağ taraftaki ilk terim yok olur. Bundan dolayı,

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \left(\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \geq \liminf_{x \rightarrow \infty} \min_{\lambda x \leq t \leq x} \left(\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m-1)}(t) \right)$$

elde edilir. $\lambda \rightarrow 1^-$ iken (4.23)'ün limitini alarak

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \left(\sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right) \geq 0 \quad (4.24)$$

olduğuna ulaşılır. (4.21) ve (4.24)' ü birleştirerek, $s(x)$ ' in L' ye $(\bar{N}, p, m - 1)$ toplanabilir olduğu elde edilir.

Teorem 4.2.3' ün İspatı $s(x)$ fonksiyonunun L' ye $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilir ve $v_p^{(m-1)}(x)$ fonksiyonunun da sınırlı olduğunu kabul edelim. *Lemma 3.4.1 (i)* aracılığıyla, $\lambda > 1$ için

$$\begin{aligned} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| &\leq \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left| \sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \\ &\quad + \frac{1}{P(\lambda x) - P(x)} \int_x^{\lambda x} \left| \sigma_p^{(m-1)}(t) - \sigma_p^{(m-1)}(x) \right| p(t) dt \\ &= \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left| \sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \\ &\quad + \frac{1}{P(\lambda x) - P(x)} \int_x^{\lambda x} \left| \int_x^t \frac{d}{dz} \sigma_p^{(m-1)}(z) dz \right| p(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir. $v_p^{(m-1)}(x)$ fonksiyonu sınırlı olduğu için,

$$\begin{aligned} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| &\leq \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left| \sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \\ &\quad + \frac{C}{P(\lambda x) - P(x)} \int_x^{\lambda x} \left| \int_x^t \frac{p(z)}{P(z)} dz \right| p(t) dt \\ &= \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left| \sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \\ &\quad + \frac{C}{P(\lambda x) - P(x)} \int_x^{\lambda x} p(t) \log \frac{P(t)}{P(x)} dt \\ &\leq \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left| \sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \\ &\quad + C \log \frac{P(\lambda x)}{P(x)} \end{aligned} \tag{4.25}$$

olur. P fonksiyonu α indisine göre düzenli değişimli olduğu için, her $\lambda > 1$ ve yeterince büyük x için

$$\frac{\lambda^\alpha}{2(\lambda^\alpha - 1)} \leq \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \leq \frac{3\lambda^\alpha}{2(\lambda^\alpha - 1)} \quad (4.26)$$

olduğu açıktır. (4.26) ve $s(x)$ ' in $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilmesi aracılığıyla her $\lambda > 1$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left| \sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| = 0$$

elde edilir. (4.25)' in her iki tarafının limit supremumu alınarak

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \left(C \log \frac{P(\lambda x)}{P(x)} \right) = C \cdot \log \lambda^\alpha$$

olur. Son eşitsizlikte $\lambda \rightarrow 1^+$ alınarak

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \leq 0 \quad (4.27)$$

olduğuna ulaşılır.

Benzer bir yolla *Lemma* 3.4.1 (ii)' den, $0 < \lambda < 1$ için

$$\begin{aligned} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| &\leq \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left| \sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right| \\ &\quad + \frac{1}{P(x) - P(\lambda x)} \int_{\lambda x}^x \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m-1)}(t) \right| p(t) dt \\ &= \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left| \sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right| \\ &\quad + \frac{1}{P(x) - P(\lambda x)} \int_{\lambda x}^x \left| \int_t^x \frac{d}{dz} \sigma_p^{(m-1)}(z) dz \right| p(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir. $v_p^{(m-1)}(x)$ fonksiyonu sınırlı olduğu için,

$$\begin{aligned} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| &\leq \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left| \sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right| \\ &\quad + \frac{C}{P(x) - P(\lambda x)} \int_{\lambda x}^x \left| \int_t^x \frac{p(z)}{P(z)} dz \right| p(t) dt \\ &= \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left| \sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C}{P(x) - P(\lambda x)} \int_{\lambda x}^x p(t) \log \frac{P(x)}{P(t)} dt \\
& \leq \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left| \sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right| \\
& \quad + C \log \frac{P(x)}{P(\lambda x)}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

olur. P fonksiyonu α indisine göre düzenli değişimli olduğu için, her $0 < \lambda < 1$ için yeterince büyük x için

$$\frac{\lambda^\alpha}{2(1 - \lambda^\alpha)} \leq \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \leq \frac{3\lambda^\alpha}{2(1 - \lambda^\alpha)} \tag{4.29}$$

olduğu açıktır. (4.29) ve $s(x)$ ' in $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilmesi aracılığıyla, her $0 < \lambda < 1$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left| \sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right| = 0$$

elde edilir. (4.28)' in her iki tarafının limit supremumu alınarak

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} C \log \frac{P(x)}{P(\lambda x)} = C \cdot \log \lambda^\alpha$$

olur. Son eşitsizlikte $\lambda \rightarrow 1^-$ alınarak

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \leq 0 \tag{4.30}$$

olduğuna ulaşılır. (4.27) veya (4.30)' dan, $s(x)$ ' in L' ye $(\bar{N}, p, m-1)$ toplanabilir olduğu sonucuna ulaşılır.

Teorem 4.2.4' ün İspatı $s(x)$ fonksiyonun L' ye $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilir ve $\sigma_p^{(m-1)}(x)$ fonksiyonunun da yavaş salınımlı olduğunu kabul edelim.

Lemma 3.4.1 (i) aracılığıyla $\lambda > 1$ için

$$\begin{aligned}
\left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| &= \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left| \sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \\
& \quad + \frac{1}{P(\lambda x) - P(x)} \int_x^{\lambda x} \left| \sigma_p^{(m-1)}(t) - \sigma_p^{(m-1)}(x) \right| p(t) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left| \sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \\
&+ \frac{1}{P(\lambda x) - P(x)} \int_x^{\lambda x} p(t) \max_{x \leq t \leq \lambda x} \left(\left| \sigma_p^{(m-1)}(t) - \sigma_p^{(m-1)}(x) \right| \right) dt \\
&\leq \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left| \sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \\
&+ \max_{x \leq t \leq \lambda x} \left(\left| \sigma_p^{(m-1)}(t) - \sigma_p^{(m-1)}(x) \right| \right) \quad (4.31)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.31)' in her iki tarafının limit supremumu alınarak

$$\begin{aligned}
\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| &\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} \left| \sigma_p^{(m)}(\lambda x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \\
&+ \limsup_{x \rightarrow \infty} \max_{x \leq t \leq \lambda x} \left| \sigma_p^{(m-1)}(t) - \sigma_p^{(m-1)}(x) \right| \quad (4.32)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. (4.5) aracılığıyla,

$$0 \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(\lambda x) - P(x)} = 1 + (\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(x)} - 1)^{-1} < \infty$$

olur. $s(x)$ fonksiyonu L' ye $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilir olduğu için, (4.33)' de sağ taraftaki ilk terim yok olur. Bundan dolayı,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \max_{x \leq t \leq \lambda x} \left| \sigma_p^{(m-1)}(t) - \sigma_p^{(m-1)}(x) \right|$$

olur. $\lambda \rightarrow 1^+$ iken (4.32)' nin limitini alarak

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \leq 0 \quad (4.33)$$

olduğuna ulaşılır.

Benzer bir yolla, *Lemma 3.4.1 (ii)* aracılığıyla, $0 < \lambda < 1$ için

$$\begin{aligned}
\left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| &= \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left| \sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right| \\
&+ \frac{1}{P(x) - P(\lambda x)} \int_{\lambda x}^x \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m-1)}(t) \right| p(t) dt \\
&\leq \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left| \sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{P(x) - P(\lambda x)} \int_{\lambda x}^x p(t) \max_{\lambda x \leq t \leq x} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m-1)}(t) \right| dt \\
& \leq \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left| \sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right| \\
& + \max_{\lambda x \leq t \leq x} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m-1)}(t) \right| \quad (4.34)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.34)' ün her iki tarafının limit supremumu alınarak

$$\begin{aligned}
\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| & \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} \left| \sigma_p^{(m)}(x) - \sigma_p^{(m)}(\lambda x) \right| \\
& + \limsup_{x \rightarrow \infty} \max_{\lambda x \leq t \leq x} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m-1)}(t) \right| \quad (4.35)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. (4.5) aracılığıyla,

$$0 \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\lambda x)}{P(x) - P(\lambda x)} = (\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{P(\lambda x)} - 1)^{-1} < \infty$$

olur. $s(x)$ fonksiyonu L' ye $(\bar{N}, p, m)$ toplanabilir olduğu için, (4.35)' de sağ taraftaki ilk terim yok olur. Bundan dolayı,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \max_{\lambda x \leq t \leq x} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m-1)}(t) \right|$$

olur. $\lambda \rightarrow 1^-$ iken (4.35)' in limitini alarak

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \sigma_p^{(m-1)}(x) - \sigma_p^{(m)}(x) \right| \leq 0 \quad (4.36)$$

olduğuna ulaşılır. (4.33) veya (4.36)' dan, $s(x)$ ' in $(L)'$ ye $(\bar{N}, p, m - 1)$ toplanabilir olduğu sonucuna ulaşılır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Chen, C. and Hsu, J.**, 2000, Tauberian theorems for weighted means of double sequences, *Anal. Math.*, 26, 243-262 p.
- Çanak, İ.**, 2010, A short proof of the generalized Littlewood Tauberian theorem, *Appl. Math. Lett.*, 23(7), 818-820 p.
- Çanak, İ. and Dik, M.**, 2008, On some Tauberian conditions for Abel summability, *Int. J. Math. Anal.*, 2(1-4), 27-33 p.
- Çanak, İ. and Totur, Ü.**, 2011a, A Tauberian theorem for Cesàro summability of integrals, *Appl. Math. Lett.*, 24(3), 391-395 p.
- Çanak, İ. and Totur, Ü.**, 2011b, Some Tauberian theorems for the weighted mean methods of summability, *Comput. Math. Appl.*, 62(6), 2609-2615 p.
- Çanak, İ. and Totur, Ü.**, 2011c, Tauberian conditions for Cesàro summability of integrals, *Appl. Math. Lett.*, 24(6), 891-896 p.
- Çanak, İ. and Totur, Ü.**, 2012, Alternative proofs of some classical type Tauberian theorems for Cesàro summability of integrals, *Math. Comput. Model.*, 55(3), 1558-1561 p.
- Çanak, İ. and Totur, Ü.**, 2012, The (C, α) integrability of functions by weighted mean methods, *Filomat*, 26(6), 1204-1209 p.
- Çanak, İ. and Totur, Ü.**, 2013, Extended Tauberian theorem for the weighted mean method of summability, *Ukr. Math. J.*, 65(7), 1032-1041 p.
- Çanak, İ., Totur, Ü., and Allahverdiev, B. P.**, 2012, Tauberian conditions with controlled oscillatory behavior, *Appl. Math. Lett.*, 25(3), 252-256 p.
- Çanak, İ., Totur, Ü., and Dik, M.**, 2010, One-sided Tauberian conditions for $(A; k)$ summability method, *Math. Comput. Modelling*, 51(5-6), 425-430 p.
- Dik, M.**, 2001, Tauberian theorems for sequences with moderately oscillatory control moduli, *Math. Morav.*, 5, 57-94 p.
- Fekete, Á. and Móricz, F.**, 2005, Necessary and sufficient Tauberian conditions in the case of weighted mean summable integrals over IR_+ , *II. Publ. Math., Debrecen.* 67(1-2), 65-78 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Hardy, G. H.**, 1949, Divergent series, Clarendon Press, Oxford.
- Hardy, G. H. and Littlewood, J. E.**, 1914, Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive, *Lond. M. S. Proc.*, 13, 174-191 p.
- Karamata, J.**, 1933, Sur un mode de croissance régulière, Théorèmes fondamentaux, *Bull. Soc. Math.*, France, 61, 55-62 p.
- Korevaar, J.**, 2004, Tauberian theory. A century of developments, Springer, Berlin, xvi+483 p.
- Laforgia, A.**, 2009, A theory of divergent integrals, *Appl. Math. Lett.*, 22(6), 834-840p.
- Landau, E.**, 1913, Über einen satz des herrn Littlewood, *Rend.*, Palermo, 35, 265-276p.
- Littlewood, J. E.**, 1911, The converse of Abel's theorem on power series, *Proc. London Math. Soc.*, 9(2), 434-448 p.
- Móricz, F.**, 2004, Necessary and sufficient Tauberian conditions in the case of weighted mean summable integrals over IR_+ , *Math. Inequal. Appl.*, 7(1), 87-93p.
- Móricz, F. and Németh, Z.**, 2000, Tauberian conditions under which convergence of integrals follows from summability $(C, 1)$ over IR_+ , *Analysis Mathematica*, 26, 53-61 p.
- Móricz, F. and Rhoades, B. E.**, 1995, Necessary and sufficient Tauberian conditions for certain weighted mean methods of summability, *Acta Math. Hungar.*, 66(1-2), 105-111 p.
- Móricz, F. and Stadtmüller, U.**, 2012, Characterization of convergence of weighted averages of sequences and functions, *Period. Math. Hungar.*, 65(1), 135-145 p.
- Okur, M. A. and Totur, Ü.**, 2019, Tauberian theorems for the logarithmic summability methods of integrals, *Positivity*, 23, 55-73.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Özsaraç, F. and Çanak, İ.**, 2019, Tauberian theorems for iterations of weighted mean summable integrals, *Positivity*, 23(1), 219-231 p.
- Ozsarac, F. and Canak, I.**, 2020, Tauberian theorems for the weighted mean method of summability of integrals, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 35(3), 775-788 p.
- Powell, R. and Shah, S.**, 1972, Summability theory and its applications, Van Nostrand-Reinhold Company, London, vi+178 p.
- Schmidt, R.**, 1925, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen, *Math. Z.*, 22, 89-152 p.
- Stanojević, Č. V.**, 1998, Analysis of Divergence: Control and Management of Divergent Process, Graduate Research Seminar Lecture Notes, edited by İ. Çanak, University of Missouri-Rolla, 56, U.S.A..
- Tietz, H.**, 1990, Schmidtsche Umkehrbedingungen für Potenzreihenverfahren, *Acta Sci. Math.*, 54(3-4), 355-365 p.
- Totur, Ü. and Çanak, İ.**, 2010, Tauberian conditions under which convergence follows from Abel summability, *Appl. Math. Lett.*, 23(12), 1439-1443 p.
- Totur, Ü. and Çanak, İ.**, 2012a, One-sided Tauberian conditios for $(C;1)$ summability method of integrals, *Math. Comput. Modelling*, 55(5-6), 1813-1818 p.
- Totur, Ü. and Çanak, İ.**, 2012b, Some general Tauberian conditions for the weighted mean summability method, *Comput. Math. Appl.*, 63(5), 999-1006 p.
- Totur, Ü. and Çanak, İ.**, 2013a, On Tauberian conditions for $(C;1)$ summability of integrals, *Rev. Un. Mat. Argentina*, 54(2), 59-65 p.
- Totur, Ü. and Çanak, İ.**, 2013b, On the $(C,1)$ summability method of improper integrals, *Appl. Math. Comput.*, 219(24), 11065-11070 p.
- Totur, Ü. and Okur, M. A.**, 2015, Alternative proofs of some classical Tauberian theorems for the weighted mean method of integrals, *Filomat*, 29(10), 2281-2287 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Totur, Ü. and Okur, M. A., 2018, On Tauberian conditions for the logarithmic methods of integrability, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* , 41, 879-892.



TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlama sürecinde ve doktora aşaması boyunca çalışmalarımda engin bilgi, görüş ve tecrübeleriyle, çok değerli katkıları ve yol göstericiliğinden dolayı, tüm zorlukları kolaylaştıran danışman hocam Prof. Dr. İbrahim ÇANAK' a;

Çalışmamı doktora süreci boyunca yakından inceleyen, değerli görüş ve yönlendirmeleriyle bu tezin gelişimine katkı veren başta tez izleme komitesi üyeleri Doç. Dr. Tahsin ÖNER ve Dr. Öğr. Üyesi Yılmaz ERDEM olmak üzere, Doç. Dr. Tuncer ACAR ve Dr. Öğr. Üyesi Serhan ULUSAN' a;

Beni yetiştirerek bu günlere getiren, maddi ve manevi her türlü desteklerini üzerimde hissettiğim annem Ceyhan ÖZSARAÇ' a, babam Zeki ÖZSARAÇ' a ve kardeşim Dijle ÖZSARAÇ' a;

Bu süreçte yanımda olan, kontrol ve düzeltmelerde yardımlarını esirgemeyen Özlem GÜNDÜZ DANACI' ya;

teşekkür ederim.

Bu tez çalışması, “BİDEB-2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı” adı altında finansal olarak TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir. Desteklerinden dolayı TÜBİTAK' a teşekkürü bir borç bilirim.

05 / 08 / 2021

Fırat ÖZSARAÇ

ÖZGEÇMİŞ

Özlük Bilgileri

Ad-Soyad: Fırat ÖZSARAÇ

Öğrenim Durumu

2014-2021: Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Doktora Programı (GNO: 4.00/4.00)

2012-2014: Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Yüksek Lisans Programı (GNO: 4.00/4.00)

2007-2012: Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Lisans Programı

Yayınlar

- **Özsaraç, F.** and Çanak, İ., 2019, Tauberian theorems for iterations of weighted mean summable integrals, *Positivity*, 23(1),219-231p.
- **Ozsarac, F.** and Canak, I., 2020, Tauberian theorems for the weighted mean method of summability of integrals, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 35(3), 775-788p.

Uluslararası Kongrelerde Sunulan Bildiriler

- **Ozsarac, F.** and Canak, I., Tauberian Theorems for the Weighted Mean Summability Methods of Integrals, 4th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, 11-15 May 2017, Kusadası, Aydın,Turkey.
- **Ozsarac, F.** and Canak, I., Tauberian Theorems for Iterations of Weighted Mean Summable Integrals, International conference on Mathematics, 3-6 July 2018, Istanbul,Turkey.
- Canak, I. and **Ozsarac, F.**, Tauberian Theorems for the Weighted Mean Summability of Integrals on $[1,\infty)$, 3rd International Conference of Mathematical Sciences(ICMS 2019), Maltepe University, 4-8 September 2019, Istanbul,

Turkey.

Burslar ve Ödüller

- **2012:** TÜBİTAK 2228/A Son Sınıf Lisans Öğrencileri için Lisansüstü (Yüksek Lisans/ Doktora) Bursiyerliği
- **2012:** Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü Birinciliği
- **2014:** TÜBİTAK 2211/E Doğrudan Yurtiçi Doktora Bursiyerliği

