

**KESİRLİ MERTEBELİ DİFERANSİYEL-CEBİRSEL
DENKLEMLERİN HAAR DALGACIK
FONKSİYONLARI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

Mesut KARABACAK

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Doç. Dr. Ercan ÇELİK

2015

Her hakkı saklıdır

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KESİRLİ MERTEBELİ DİFERANSİYEL-CEBİRSEL
DENKLEMLERİN HAAR DALGACIK FONKSİYONLARI İLE
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Mesut KARABACAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

ERZURUM
2015

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY FORMU



**KESİRLİ MERTEBELİ DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN
HAAR DALGACIK FONKSİYONLARI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

Doç. Dr. Ercan ÇELİK danışmanlığında, Mesut KARABACAK tarafından hazırlanan bu çalışma 31/01/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

İmza :

Üye : Doç. Dr. Ercan ÇELİK

İmza :

Üye : Doç. Dr. Aydın SEÇER

İmza :

Üye : Doç. Dr. A.Cihan KONYALIOĞLU

İmza :

Üye : Doç. Dr. Nejmi CENGİZ

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 19.02.2015 tarih ve 07/311 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

KESİRLİ MERTEBELİ DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN HAAR DALGACIK FONKSİYONLARI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Mesut KARABACAK

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ercan ÇELİK

Bu tezde kesirli (fraksiyonel) mertebeli Diferansiyel-Cebirsel denklemlerin nümerik çözümleri incelenmiştir. Öncelikle kesirli mertebeden farklı türev tanımları ortaya konmuş ve bu türevlerin bazı önemli özellikleri verilmiştir. Daha sonra genel olarak dalgacık (wavelet) fonksiyonlarından bahsedilerek Haar Dalgacık fonksiyonları göz önüne alınmıştır. Buna bağlı olarak Haar dalgacık fonksiyonları yardımıyla fonksiyonların ve farklı mertebeden türevlerinin seri açılımları birbiri cinsinden gösterilmiştir. Son olarak seçilen üç diferansiyel-cebirsel denklem üzerinde bu seri açılımlar kullanılarak nümerik çözümler elde edilmiş ve bu nümerik çözümler çizelge ve grafikler yardımıyla yorumlanmıştır.

2015, 72 sayfa

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel-Cebirsel denklem, kesirli mertebeli diferansiyel-cebirsel denklem, Haar dalgacık fonksiyonları, Haar serisi, operasyonel matris

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

THE NUMERICAL SOLUTIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL- ALGEBRAIC EQUATIONS BY HAAR WAVELET FUNCTIONS

Mesut KARABACAK

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Applied Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ercan ÇELİK

In this study numerical solutions of fractional order differential-algebraic equations have been examined. First, different derivative definitions for fractional order have been presented and some important properties of these derivatives have been given. Later Haar wavelet functions have been considered after generally mentioning about wavelet functions. Accordingly, employing Haar wavelet functions series expansions of functions and different order derivatives have been shown in terms of each other. Finally, by using these series expansions on selected three differential-algebraic equations, numerical solutions have been obtained and these numerical solutions have been interpreted by way of tables and graphs.

2015, 72 pages

Keywords: differential-algebraic equation, fractional differential-algebraic equation, Haar wavelet functions, Haar series, operational matrix

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Ercan ÇELİK'e en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezimin hazırlanması sürecinde, değerli bilgi ve katkılarını benden esirgemeyen Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Sayın Yrd. Doç. Dr. Muhammed YİĞİDER'e, tezimdeki denklem çözümlerinin yazılım kodlarının hazırlanmasında desteğini esirgemeyen değerli dostum Sayın Yrd. Doç. Dr. Kadirhan POLAT'a ve tezimin yazım sürecinde desteğiyle yanımda olan değerli dostlarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Rıdvan ŞAHİN'e ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Gökçe Dilek KÜÇÜK'e teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Bu doktora çalışmasını babam ve anneme ithaf ediyorum...

Mesut KARABACAK

Ocak, 2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	5
2.1. Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller.....	13
2.1.1. Bazı elementer fonksiyonların kesirli mertebeden türevi ve grafikleri.....	13
2.1.2. Riemann-Liouville kesirli türevleri ve kesirli integralleri	19
2.1.3. Caputo kesirli türevleri	20
2.1.4. Kesirli türevlerin bazı temel özellikleri.....	21
2.2. Kesirli Mertebeli Diferansiyel Denklemler.....	22
2.3. Kesirli Mertebeli Diferansiyel-Cebirsel Denklemler	25
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	26
3.1. Dalgacık (Wavelet) Dönüşümleri	26
3.2. Haar Dalgacık Fonksiyonları	28
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	32
4.1. Operasyonel Matrisin Teşkili.....	34
4.2. Test Problemleri	43
4.2.1 Test problemi 1	56
4.2.2 Test problemi 2	56
4.2.3 Test problemi 3	56
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	70
KAYNAKLAR	71
ÖZGEÇMİŞ	73

SİMGELER DİZİNİ

$ A $	A matrisinin determinantı
$B(m, n)$	Beta fonksiyonu
$b_i(t)$	Block Pulse fonksiyonları
$\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}$	Jakobiyan matrisi
$\delta_{i,j}$	Kronecker Delta fonksiyonu
$\hat{D}_a^\alpha$	Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
D_*^α	Caputo kesirli türev operatörü
$\Phi_{m \times m}$	m -boyutlu Haar matrisi
F^α	Block Pulse operasyonel matrisi
$[f(t)]_{haar}$	$f(t)$ fonksiyonunun Haar dalgacık fonksiyonları cinsinden açılımı
Γ	Gamma fonksiyonu
J^α	Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
$P_{m \times m}$	m -boyutlu Operasyonel matris

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Gamma fonksiyonuna ait değişim grafiği	11
Şekil 2.2. $f(x) = 1$ için bazı kesirli mertebelerden türev grafiği	16
Şekil 2.3. $f(x) = x$ için bazı kesirli mertebelerden türev grafiği.....	16
Şekil 2.4. $f(x) = e^x$ için bazı kesirli mertebelerden türev grafiği.....	17
Şekil 2.5. $f(x) = \sin x$ için bazı kesirli mertebelerden türev grafiği	18
Şekil 2.6. $f(x) = \cos x$ için bazı kesirli mertebelerden türev grafiği	18
Şekil 3.1. Dalgacık analizinin uygulama alanları	27
Şekil 3.2. Bazı Haar dalgacık fonksiyonlarına ait grafikler ve bu fonksiyonların integrallerinin grafikleri.....	29
Şekil 4.1. Test problemi 1 ve $m = 4$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	38
Şekil 4.2. Test problemi 1 ve $m = 8$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	39
Şekil 4.3. Test problemi 1 ve $m = 16$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	40
Şekil 4.4. Test problemi 1 ve $m = 32$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	41
Şekil 4.5. Test problemi 1 ve $m = 64$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	42
Şekil 4.6. Test problemi 1 ve $m = 128$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	43
Şekil 4.7. Test problemi 2 ve $m = 4$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	46
Şekil 4.8. Test problemi 2 ve $m = 4$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	47
Şekil 4.9. Test problemi 2 ve $m = 8$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	48
Şekil 4.10. Test problemi 2 ve $m = 8$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	49
Şekil 4.11. Test problemi 2 ve $m = 16$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	50

Şekil 4.12. Test problemi 2 ve $m = 16$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	51
Şekil 4.13. Test problemi 2 ve $m = 32$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	52
Şekil 4.14. Test problemi 2 ve $m = 32$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	53
Şekil 4.15. Test problemi 2 ve $m = 64$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	54
Şekil 4.16. Test problemi 2 ve $m = 64$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	55
Şekil 4.17. Test problemi 2 ve $m = 128$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	56
Şekil 4.18. Test problemi 2 ve $m = 128$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	57
Şekil 4.19. Test problemi 3 ve $m = 4$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	60
Şekil 4.20. Test problemi 3 ve $m = 4$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	61
Şekil 4.21. Test problemi 3 ve $m = 8$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	62
Şekil 4.22. Test problemi 3 ve $m = 8$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	63
Şekil 4.23. Test problemi 3 ve $m = 16$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	64
Şekil 4.24. Test problemi 3 ve $m = 16$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	65
Şekil 4.25. Test problemi 3 ve $m = 32$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	66
Şekil 4.26. Test problemi 3 ve $m = 32$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	67
Şekil 4.27. Test problemi 3 ve $m = 64$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	68
Şekil 4.28. Test problemi 3 ve $m = 64$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği	69

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Test problemi 1 ve $m = 4$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	38
Çizelge 4.2. Test problemi 1 ve $m = 8$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	39
Çizelge 4.3. Test problemi 1 ve $m = 16$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	40
Çizelge 4.4. Test problemi 1 ve $m = 32$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	41
Çizelge 4.5. Test problemi 1 ve $m = 64$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	42
Çizelge 4.6. Test problemi 1 ve $m = 128$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	43
Çizelge 4.7. Test problemi 2 ve $m = 4$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	46
Çizelge 4.8. Test problemi 2 ve $m = 4$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	47
Çizelge 4.9. Test problemi 2 ve $m = 8$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	48
Çizelge 4.10. Test problemi 2 ve $m = 8$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	49
Çizelge 4.11. Test problemi 2 ve $m = 16$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	50
Çizelge 4.12. Test problemi 2 ve $m = 16$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	51
Çizelge 4.13. Test problemi 2 ve $m = 32$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	52
Çizelge 4.14. Test problemi 2 ve $m = 32$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	53

Çizelge 4.15. Test problemi 2 ve $m = 64$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	54
Çizelge 4.16. Test problemi 2 ve $m = 64$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	55
Çizelge 4.17. Test problemi 2 ve $m = 128$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	56
Çizelge 4.18. Test problemi 2 ve $m = 128$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	57
Çizelge 4.19. Test problemi 3 ve $m = 4$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	60
Çizelge 4.20. Test problemi 3 ve $m = 4$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	61
Çizelge 4.21. Test problemi 3 ve $m = 8$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	62
Çizelge 4.22. Test problemi 3 ve $m = 8$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	63
Çizelge 4.23. Test problemi 3 ve $m = 16$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	64
Çizelge 4.24. Test problemi 3 ve $m = 16$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	65
Çizelge 4.25. Test problemi 3 ve $m = 32$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	66
Çizelge 4.26. Test problemi 3 ve $m = 32$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	67
Çizelge 4.27. Test problemi 3 ve $m = 64$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	68
Çizelge 4.28. Test problemi 3 ve $m = 64$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	69

1. GİRİŞ

1695'te G. W. Leibnitz tarafından L'Hospital'e türev operatörünün kesirli mertebeden olmasının anlamının sorulduğu mektupla matematik literatürüne giren kesir mertebeli türevlenme (Ross 1977) ve beraberinde kesirli mertebeli diferansiyel denklemler, günümüzde pek çok alanda kendini göstermektedir. Leibnitz'in türevin mertebesi üzerine ortaya attığı bu soru 300 yıldan daha fazla süredir Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grünwald ve Letnikov gibi ünlü birçok matematikçinin de üzerinde çalıştığı bir konu olmuştur. Kesirli mertebeli diferansiyel denklemler üzerinden kesir mertebeli modellemeler iletim hatları teorisi, sıvıların kimyasal analizi, ısı transferi, difüzyon, Schrödinger denklemi, malzeme bilimi, akışkanlar mekaniği, kuantum mekaniği ve fraktal süreçler gibi birçok uygulama alanında kendisine yer edinerek yeni bir çığır açmıştır (Blair 1947; Anastasio 1994; Podlubny 1999; Bayın 2004). Kesirli mertebeli türev ve kesirli mertebeden integral tanımlarının çoğu, 20. yüzyıl bitmeden ortaya konulmuştur. Fakat temel bilimler ve mühendislik uygulamalarının heyecan verici gelişmelerinde direkt olarak kullanılması ancak geçtiğimiz yüz yıl içerisinde gerçekleşebilmiştir.

Genel olarak çeşitli mühendislik bilimleri ve doğa bilimleri gibi uygulamalı bilim dallarında ortaya çıkan matematiksel modellemelerde karşılaşılan problemler, adi diferansiyel denklem, kısmi diferansiyel denklem ve diferansiyel-cebirselleşen denklem içermektedir. Özellikle elektrik devre tasarımı, matematiksel modelleme teorisi, bilgisayar destekli tasarım (CAD/CAM), mekanik sistemlerin simülasyonu, güç sistemleri, kimyasal işlemlerin simülasyonu ve optimal kontrol gibi problemlerin matematiksel modellemelerinde daha çok diferansiyel-cebirselleşen denklemler ortaya çıkmaktadır. Uygulamalı bilim dallarında karşılaşılan problemlerin matematiksel modellemelerinde lineer problemlerden ziyade lineer olmayan problemlerin ortaya çıkması, problemlerin çözümlerinin analitik biçimde elde edilmesini daha zorlaştırmaktadır. Bu ise diferansiyel-cebirselleşen denklemlerin analitik çözümlerinin veya nümerik çözümlerinin bulunması gerekliliğini ortaya çıkarmıştır. Bu ihtiyaç nümerik çözüm yöntemlerinin geliştirilmesini zorunlu kılmıştır. Nümerik yöntemler teorisinin

pratiğe uygulanabilirliğı bakımından önemli rol oynamaktadır. Bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler uygulamalı bilim dallarında ortaya çıkan karmaşık problemlerin nümerik yöntemlerle daha hızlı çözülmesine imkân vermektedir. Günümüze kadar basit bir algoritmayla çok daha hızlı sonuçlanan, lineer ve lineer olmayan problemlerin çözümünde kullanılabilen birbirinden farklı birçok nümerik metot ortaya konmuştur. Bu teze konu olan diferansiyel-cebirselle denklemler ve kesirli diferansiyel-cebirselle denklemlerin çözümleri üzerine de birçok farklı yöntem geliştirilmiş ve denenmiştir. Bu yöntemlerden bazıları hakkında aşağıda bilgi sunulmuştur.

Diferansiyel-cebirselle denklemlerin nümerik çözümleri için ilk metot Gear (1971) tarafından tanıtılmıştır. Gear, süresiz network analizi ve sürekli sistem simülasyonunda ortaya çıkan diferansiyel-cebirselle denklemleri inceleyerek sınıflandırmış ve çözümlerini incelemiştir.

Petzold (1982), diferansiyel-cebirselle denklemlerin adi diferansiyel denklemlerden farklı olduğunu ortaya koyan bir makale yayınlamıştır.

Gear and Petzold (1984), adi diferansiyel denklemler için geliştirilmiş nümerik yöntemlere göre diferansiyel-cebirselle denklemlerin çözülebilirliklerini incelemiş, sınıflandırmış ve çözülememe durumlarını ortaya koymuşlardır.

Brenan *et al.* (1989), elektrik akımının simülasyonu, kimyasal reaksiyonlar gibi matematiksel modellemelerde ortaya çıkan

$$M(t)y' = f(t, y), \quad t \in [a, b]$$

şeklindeki diferansiyel-cebirselle denklemlerin çözümüyle ilgilenmişlerdir

Hairer *et al.* (1989), Runge-Kutta metodunu kullanarak diferansiyel-cebirsal denklemlerin nümerik çözümleriyle ilgili çalışma yapmış ve bu tip denklemlerin çözümünde başlangıç ve sınır değeri içeren problemleri kullanmışlardır.

Ascher and Spiter (1994), sıralama (collocation) metodunu kullanarak sınır değeri verilmiş diferansiyel-cebirsal denklemleri çözmüşlerdir.

Müller (2000), diferansiyel-cebirsal denklemlerle modellenmiş bir dinamik sistemin avantajları (pros) ve dezavantajları (cons) ile ilgili bir çalışma yapmıştır.

Diferansiyel-cebirsal denklemlerin Chebyshev serileri yardımıyla ve Páde serisi yaklaşımıyla nümerik çözümü üzerinde kapsamlı çalışmalar yapılmıştır (Çelik and Bayram 2003a; 2003b; 2004; Çelik and Yeloğlu 2006; Yiğider and Çelik 2013).

Ayaz (2004), diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanarak, diferansiyel-cebirsal denklemler için yeni bir nümerik yaklaşım ortaya koymuştur.

Güzel and Bayram (2006), Páde serileri yaklaşımını yüksek indeksli diferansiyel-cebirsal denklemlere uygulamışlardır.

İbiş (2011), kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsal denklemler için Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM), Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM), Homotopi Analiz Metodu (HAM), Adomian Ayrışım Metodu (ADM) ve Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM) gibi yaklaşık çözüm yöntemlerinin etkinliği ile ilgili karşılaştırmalı bir doktora tezi hazırlamıştır.

Bu bilgilerin yanında bu tezde kullanılan Haar dalgacık fonksiyonları ilk olarak 1909 yılında matematikçi Alfred Haar tarafından kendi doktora tezinin eklerinde bir fonksiyon ailesi olarak tanımlanmıştır. O dönemde pek ilgi görmeyen bu fonksiyonlar, 1984 yılında jeofizikçi Jean Morlet'in bu fonksiyonları ilk kez "wavelet" konsepti altında yeniden

tanımlayıp coğrafi bilgi sistemlerinin analizinde kullanmasıyla tekrar gündeme gelmiştir. 1985 yılında Yves Meyer kendi ismiyle, Haar dalgacıklarından sonra ikinci ortogonal dalgacık fonksiyonları olan Meyer dalgacıklarını tanıtmıştır. Dalgacık fonksiyonları ile yapılan dönüşümlerle (transformation) veri veya sinyal işleme tekniği özellikle mühendislik alanlarında popüler olmaya başlayınca 1987 yılında Paris'te pek çok bilim insanının katıldığı uluslararası bir konferans düzenlenmiştir. Günümüzde dalgacık analizi (wavelet analysis) artık başlı başına bir araştırma sahası haline gelmiştir.

Bu tezde bir ilk olarak kesirli mertebeli diferansiyel-cebirsal denklemlerin nümerik çözümlerinin araştırılmasında Haar dalgacık fonksiyonları kullanılmıştır. Oluşturulan nümerik metot üç test problemi üzerinde denenmiş ve sonuçlar paylaşılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde sık kullanılan bazı temel tanımlar verilmiştir.

Tanım 2.1: Bir bağımsız değişken ile bir bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini ihtiva eden denkleme diferansiyel denklem denir ve genel olarak

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde kapalı form ile gösterilir. Burada $y^{(n)}$, y nin x e göre n inci türevidir. (2.1) denklemini $y^{(n)}$ ye göre çözülebilirse

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

açık formu ile ifade edilir.

Tanım 2.2: x bir reel değişken olmak üzere

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{(n-1)}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

şeklindeki denklemlere lineer diferansiyel denklem denir.

Tanım 2.3: m . dereceden bir

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$$

polinomunu göz önüne alalım. Bu polinomun sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

şeklindeki denkleme cebirsel denklem denir. Pozitif m tamsayısına $f(x) = 0$ denkleminin derecesi denir. $f(x)$ polinomunda $f(x_i) = 0$ denklemini sağlayan x_i ye denklemin kökü denir.

Tanım 2.4: $c_i, b \in \mathbb{R}$ ve x_i ler de değişkenler olmak üzere

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = b$$

şeklindeki bir ifadeye lineer cebirsel denklem denir.

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

sistemine lineer cebirsel denklem sistemi adı verilir. Burada $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisine sistemin katsayılar matrisi ve

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ ile } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

matrislerine sırası ile sistemin ikinci yanı ve bilinmeyenler matrisi denir.

$$[A: B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

matrisine sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi denir.

Yukarıdaki lineer denklem sisteminin matris gösterimi $Ax = B$ şeklindedir. Bir lineer denklem sisteminde sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi üzerinde yapılan elementer satır ve sütun işlemleri sistemin çözümünü değiştirmez. Yani

- Herhangi iki denklemin yeri değiştirilirse,
- Herhangi iki denklemin her iki yanı sıfırdan farklı bir skalerle çarpılırsa,
- Herhangi iki denklemin her iki yanı, herhangi bir skalerle çarpıldıktan sonra başka bir denklemle taraf tarafa toplanırsa sistemin çözümleri aynı kalır.

Bir lineer denklem sisteminde $[A: B]$ genişletilmiş katsayılar matrisini indirgenmiş eşelon forma getirerek çözümler bulunabilir. Bu metotla sistemi çözmeye Gauss-Jordan yok etme metodu ve katsayılar matrisini indirgenmiş eşelon forma getirerek çözmeye de Gauss-Jordan indirgeme metodu adı verilir.

Tanım 2.5: A , $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $|A| \neq 0$ ise A matrisine (tersi mevcut ise) non-singüler (regüler) matris, $|A| = 0$ ise A matrisine (tersi mevcut olmayan) singüler (regüler olmayan) matris denir.

Tanım 2.6: A , $n \times n$ tipinde bir regüler matris ($|A| \neq 0$) ise $Ax = B$ lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$x = A^{-1}B$$

eşitliğinden elde edilir.

Tanım 2.7: Bir bağımlı değişken (bilinmeyen fonksiyon) ile iki veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini ihtiva eden bir bağıntıya kısmi diferansiyel denklem denir. Buna göre u bağımlı $x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımsız değişkenler olmak üzere

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1 \dots}) = 0 \quad (2.3)$$

bağıntısı, bir bağımlı değişken ve n –bağımsız değişkenli kısmi diferansiyel denklemdir. Örneğin

$$\begin{aligned} xu_x - yu_y &= xyu \\ u_{xxx} - uu_y + u^2 &= 0 \end{aligned}$$

birer kısmi diferansiyel denklemdir.

Tanım 2.8: $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}$ ve $\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}$ Jakobiyen matrisi singüler matris olmak üzere, bir diferansiyel-cebirselleşen denklem

$$F(x, u(x), \dot{u}(x)) = 0 \quad (2.4)$$

ve

$$F(x, u(x), \dot{u}(x)) = \begin{pmatrix} F_1(x, u(x), \dot{u}(x)) \\ F_2(x, u(x), \dot{u}(x)) \\ \vdots \\ F_n(x, u(x), \dot{u}(x)) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır.

(2.4) denklemine genel non-lineer kapalı diferansiyel-cebirselleşen denklem denir. Diferansiyel-cebirselleşen denklem yarı açık formda

$$\dot{u} = F(x, u, y) \quad (2.6)$$

$$0 = G(x, u, y) \quad (2.7)$$

şeklinde yazılabilir. Dikkat edilirse y değişkeninin türevi yukarıda bulunmamaktadır işte böyle bir y değişkeni cebirsel değişken, u değişkeni ise diferansiyel değişken olarak adlandırılır. (2.7) denkleminde ise cebirsel denklem denir.

Teorem 2.1. (Diferansiyel-cebirsel denklemlerin çözülebilirliği) $\mathbb{I}, \mathbb{R}$ de bir açık alt aralık $\Omega, \mathbb{R}^{2m+1}$ de bağlantılı bir alt küme ve $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\phi(t, c): \mathbb{I} \rightarrow \tilde{\Omega}$ ($\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^r$) fonksiyonu için

i. Her $c \in \tilde{\Omega}$ için $\phi(t, c)$, $\mathbb{I}$ aralıklarında tanımlıdır.

ii. $(t, c) \in \mathbb{I} \times \tilde{\Omega}$ $(t, \phi(t, c), \phi'(t, c)) \in \Omega$ dır.

iii. Eğer $\psi(t)$, $(t, \psi(t), \psi'(t)) \in \Omega$ olacak şekilde herhangi bir çözüm ise bazı $c \in \tilde{\Omega}$

için $\psi(t) = \phi(t, c)$ dir.

Şartlarını sağlayan $r -$ boyutlu bir $\phi(t, c)$ çözüm ailesi varsa $F(t, y, y') = 0$ diferansiyel-cebirsel denklemi $\mathbb{I}$ ($\mathbb{I} \subset \Omega$) alt aralıklarında çözülebilirdir (Brenan *et al.* 1989).

Bu teoremde (t, c) nin bir fonksiyonu olan ϕ nin grafiği $(r + 1)$ boyutlu bir manifolddur. Teoremden de anlaşıldığı üzere bir diferansiyel-cebirsel denklem için lokal olarak $r -$ boyutlu bir çözüm ailesi söz konusudur. Herhangi bir $t_0 \in \mathbb{I}$ başlangıç değer formu $\phi(t_0, c)$ şeklinde $r -$ boyutlu bir manifolddur ve r, t_0 dan bağımsızdır. Çözümler bu manifoldda başlangıç değerinin sürekli bir fonksiyonudur veya bir sabite eşdeğerdir.

Örnek 2.1:

$$\begin{aligned} u_1'(x) + u_1(x) - u_2(x) &= -\cos x \\ u_1(x) + u_2(x) &= e^{-x} + \sin x \end{aligned}$$

şeklindeki denklem sistemi bir diferansiyel-cebirsal denklemdir.

Tanım 2.9: x bir reel değişken ve c bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots + a_n(x - c)^n + \dots$$

serisine c merkezli kuvvet serisi denir.

Tanım 2.10: Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ de her mertebeden türevi varsa

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \dots$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ 'deki Taylor serisi denir. Eğer $c = 0$ alınırsa bu seriye $f(x)$ fonksiyonunun MacLaurin serisi adı verilir.

Tanım 2.11: Leopold Kronecker tarafından tanımlanan aşağıdaki fonksiyona Kronecker-Delta fonksiyonu denir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

Tanım 2.12: (Gamma Fonksiyonu) $z \in \mathbb{C}$, ve $z \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} s^{z-1} e^{-s} ds$$

şeklindeki Euler integrali ile tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir ve Γ ile gösterilir.

Gamma fonksiyonunun kesirli mertebeden türev ve integralin doğuşunda önemli bir rolü vardır. Basit bir biçimde ifade edilirse pozitif tamsayılar için kullanılan faktöriyel işleminin tüm reel sayılara genelleştirilmesidir. Gamma fonksiyonunun sık kullanılan özelliklerinden birkaç tanesi aşağıda verilmiştir.

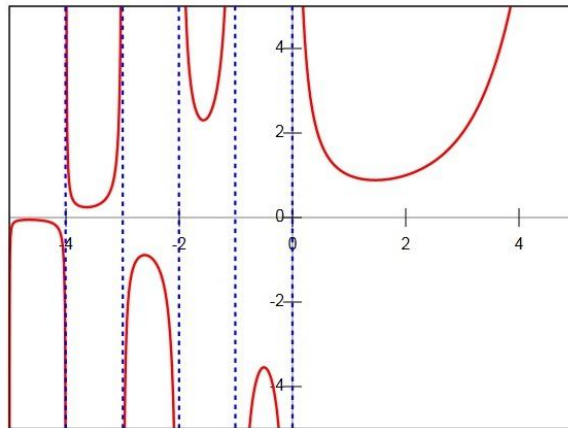
i. $\Gamma(1) = 1$

ii. $z \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\Gamma(z) = (z - 1)!$

iii. $z \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$

dir.

Şekil 2.1’ de sıfır noktası civarında gama fonksiyonunun davranışı gösterilmektedir. Gamma fonksiyonu pozitif bölgede her noktada tanımlı olmasına karşın, negatif tamsayı değerlerinde sonsuza yakınsamaktadır (Arfken and Weber 1995).



Şekil 2.1. Gamma fonksiyonuna ait değişim grafiği

Tanım 2.13: (Beta Fonksiyonu) $m, n \in \mathbb{C}$, $Re(m) > 0$, $Re(n) > 0$ olmak üzere

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

şeklinde tanımlanır.

Beta Fonksiyonu Gamma fonksiyonu gibi bir Euler integralidir ve $B(m, n)$ ile gösterilir. Gamma fonksiyonunu ile Beta fonksiyonu arasındaki ilişki aşağıdaki eşitlik ile verilir.

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = B(n, m)$$

Bu eşitlik gamma fonksiyonunun birçok değerini hesaplamak yerine doğrudan Beta fonksiyonunun değerlerinden faydalanılabileceğini göstermektedir (Arfken and Weber 1995).

Tanım 2.13: (Konvolüsyon) $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli olmak üzere

$$f(t) * g(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

şeklindeki integrale $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu yada konvolüsyon çarpımı denir.

Konvolüsyon çarpımı Gamma ve Beta fonksiyonları gibi kesirli mertebeli analizde önemli rol oynamaktadır. Konvolüsyon çarpımına ait bazı özellikler aşağıda verilmiştir.

i. $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$

$$\text{ii. } c \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere } c(f * g) = (cf) * g = f * (cg)$$

$$\text{iii. } f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

$$\text{iv. } f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$\text{v. } k(t) = f(t) * g(t) \text{ ise } k(t - \tau) = f(t - \tau) * g(t) = f(t) * g(t - \tau)$$

dir.

2.1. Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller

Kesirli mertebeden türevlerin birbirinden farklı ve birbiriyle görünürde uyuşmayan birçok tanımı literatürde mevcuttur. Bunlar Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, Caputo, Hadamard, Riezs, Weyl, Abel tanımlarıdır. Fakat literatür incelediğinde, bu tanımların aslında Riemann-Liouville türev tanımının genelleştirilmiş şekli, varyantları yada belirli şartlar altında Riemann-Liouville türev tanımı ile bağlantılı olduğu görülür. Bu tanımlar arasındaki temel fark ele alınan fonksiyonların tanım kümesi ve seçilen yardımcı parametrelerdir (Li 2003).

Çalışmamızda başlangıç koşullarını içeren kesirli diferansiyel-cebirselsel denklemlerin nümerik çözümü esas alındığından, bu tip problemler için her ikisi de kullanılabilir durumda olan Riemann-Liouville ve Caputo türev tanımlarını birlikte verilmiştir.

2.1.1. Bazı elementer fonksiyonların kesirli mertebeden türevi ve grafikleri

Kesirli türev tanımları ve özelliklerine geçmeden önce bazı elementer (temel) fonksiyonların kesirli mertebeden türevlerinin gamma fonksiyonu aracılığıyla hesaplanabileceğini gösterelim.

$f(x) = x^k$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun birinci türevi bilindiği gibi

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = kx^{k-1}$$

şeklindedir. Bu şekilde ard arda türevler alınarak

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^k = \frac{k!}{(k-\alpha)!} x^{k-\alpha}$$

α -mertebeli türevin genel formu elde edilir. Bu genel formda karşımıza çıkan faktöriyel değerleri yerine yukarıda tanımını verdiğimiz Gamma fonksiyonunun özellikleri kullanılarak elde edilen eşitlikler yazılırsa

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha}$$

formu elde edilir ve bu form bize Gamma fonksiyonunun özellikleri ile α mertebesini reel sayı seçebilme imkanı tanır.

Örneğin $f(x) = x$ fonksiyonunun bu manada $\alpha = \frac{1}{2}$ olmak üzere yarı türevi; Gamma fonksiyonunun değerlerinin yerlerine yazılmasıyla

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^k = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}+1\right)} x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{1!}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

dir. Bulunan bu ifadenin tekrar yarı türevi alınırsa

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} 2\pi^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = 2\pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1)} x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 2\pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} x^0 = \frac{2\sqrt{\pi} x^0}{2\sqrt{\pi} 0!} = 1$$

bulunur. Zaten bu değer, beklenen değer olan $f(x) = x$ fonksiyonunun 1.mertebeden türevidir. Yani

$$\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \right) x = \frac{d}{dx} x = 1$$

Kesirli türevin bu özelliği aslında reel sayılarla bile kısıtlı kalınamayacağını da bir işarettir. Mesela $i^2 = -1$ olmak üzere $(1 + i)$. mertebeden türevin ardından $(1 - i)$. mertebeden türev aldığımızı düşünersek toplamda 2. türevi elde ederiz. O halde kompleks sayı mertebeli türevlenmenin de var olduğu aşıkardır. Biz bu tezde henüz literatürde çok yeni olan kompleks sayı mertebeli türevlenmeye girmeyeceğiz.

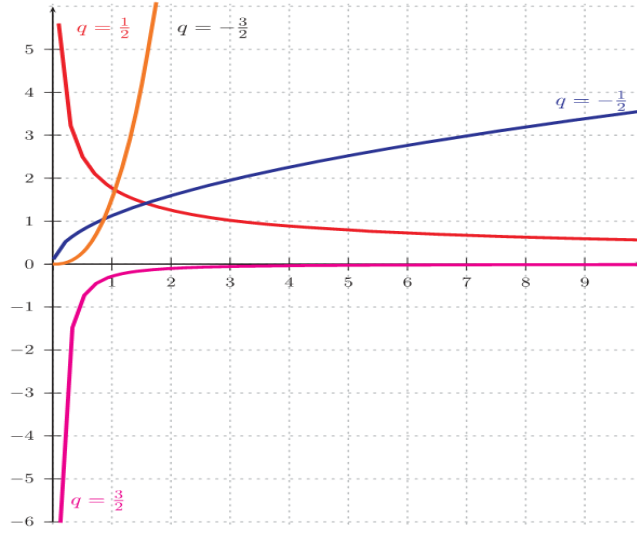
Küçük bir cebirsel düzenlemeyle yukarıda elde ettiğimiz bu kesirli türevi, aşağıda vereceğimiz kesirli türev tanımlarından herhangi birisiyle, mesela Riemann-Liouville kesirli türev tanımı ile aynı sonucu bulabiliriz.

Aşağıda bazı elementer fonksiyonların kesirli mertebelerden türevleri gösterilmiş ve özel olarak $q = \pm \frac{1}{2}$ ve $q = \pm \frac{3}{2}$. mertebelerden türevlerinin eğrileri çizilen grafiklerde topluca gösterilmiştir.

Örnek 2.2: $f(x) = 1$ olsun. O halde bu fonksiyonun kesirli türevi

$$\frac{d^q 1}{dx^q} = \frac{x^{-q}}{\Gamma(1 - q)}$$

şeklinde yazılır. Bazı kesirli mertebeler için bu türevlerin grafiği aşağıdaki gibidir.

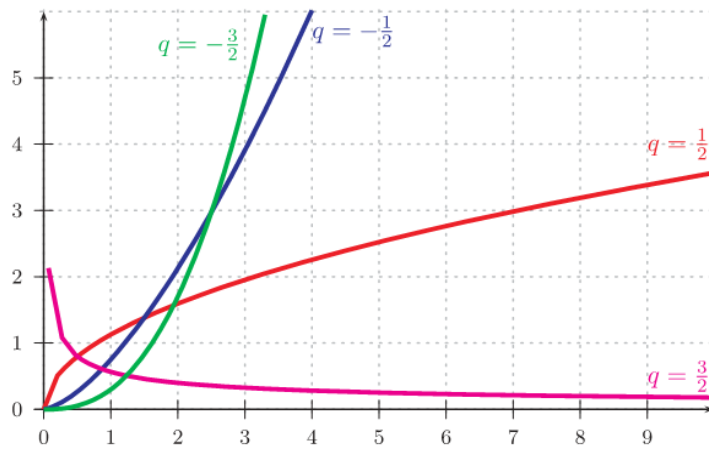


Şekil 2.2. $f(x) = 1$ için bazı kesirli mertebelerden türev grafiği

Örnek 2.3: $f(x) = x$ olsun. Bu durumda birim fonksiyonun kesirli türevi

$$\frac{d^q x}{dx^q} = \frac{x^{1-q}}{\Gamma(2-q)}$$

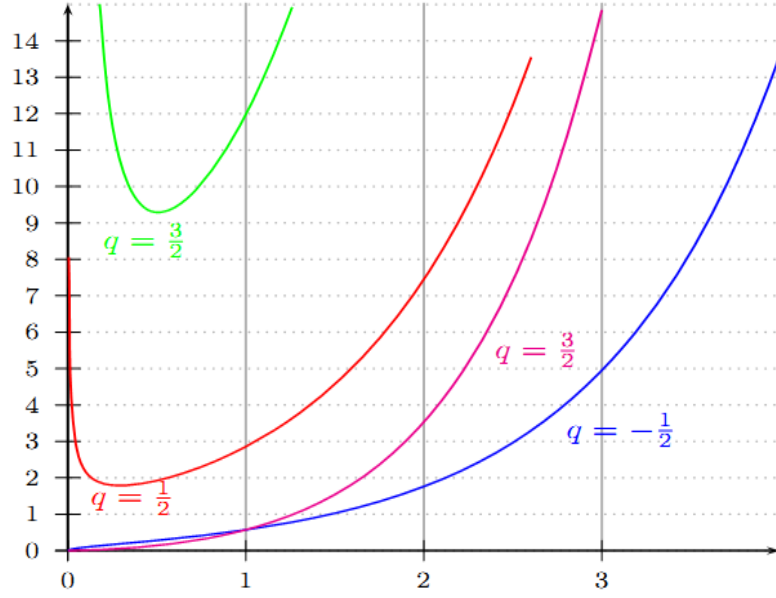
biçiminde olup bu fonksiyon için yine farklı kesirli mertebelerden türevin grafikleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.3. $f(x) = x$ için bazı kesirli mertebelerden türev grafiği

Örnek 2.4: $f(x) = e^x$ olsun. O halde bu fonksiyonun kesirli türevi ve grafikleri aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{d^q e^x}{dx^q} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-q}}{\Gamma(k-q+1)}$$

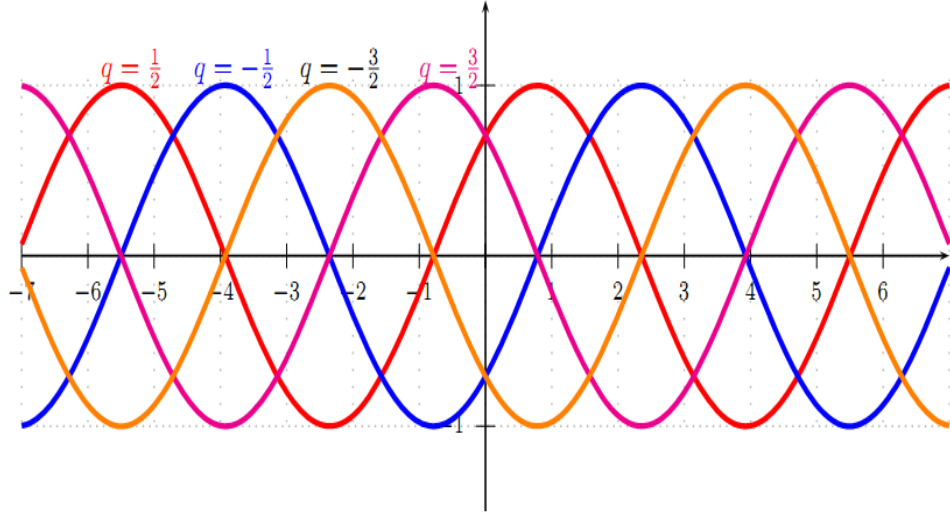


Şekil 2.4. $f(x) = e^x$ için bazı kesirli mertebelerden türev grafiği

Örnek 2.5: $f(x) = \sin x$ için kesirli mertebeli türev,

$$\frac{d^q \sin(x)}{dx^q} = \sin\left(x + \frac{q\pi}{2}\right)$$

şeklindedir. Grafikleri ise aşağıdaki gibidir.

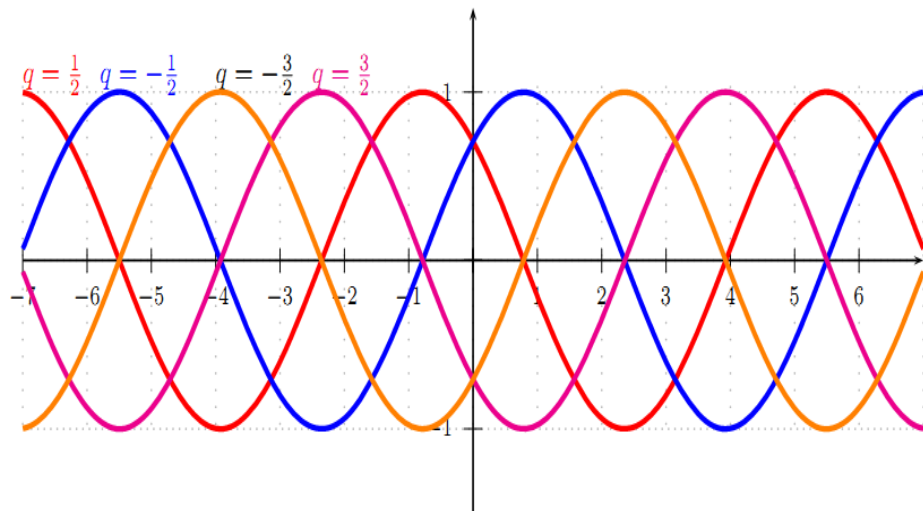


Şekil 2.5. $f(x) = \sin x$ için bazı kesirli mertebelerden türev grafiği

Örnek 2.6: $f(x) = \cos x$ için kesirli mertebeli türev

$$\frac{d^q \cos(x)}{dx^q} = \cos\left(x + \frac{q\pi}{2}\right)$$

şeklinde olup grafikleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.6. $f(x) = \cos x$ için bazı kesirli mertebelerden türev grafiği

2.1.2. Riemann-Liouville kesirli türevleri ve kesirli integralleri

Bazı kaynaklarda, Riemann-Liouville integral ve türev tanımları ve teoremleri detaylı bir şekilde verilmiştir (Oldham *et al.* 1974; Ross and Miller 1993; Kılbas *et al.* 2006; Diethelm 2010). Biz burada sadece bu tezde kullanılan tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.1.2.1. $x > 0$ ve $f(x)$ reel değerli fonksiyonu için $f_1(x) \in C[0, \infty)$ olmak üzere $f(x) = x^p f_1(x)$ olacak şekilde bir $p > \mu$, ($\mu \in \mathbb{R}$) reel sayısı varsa, $f(x)$ reel fonksiyonuna C_μ uzayındadır denir. Eğer ($n \in \mathbb{N}$) ve $f^n \in C_\mu$ ise, bu takdirde $f(x)$ reel fonksiyonuna C_μ^n uzayındadır denir. (Odibat and Shawagfeh 2007).

Tanım 2.1.2.2 $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olsun. $a \leq x \leq b$ için $f \in L_1[a, b]$ fonksiyonunun α mertebeli Riemann-Liouville kesirli integrali J^α aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

$\alpha = 0$ için

$$(J_a^0 f)(x) = f(x)$$

dir. $f \in C_\alpha$, $\alpha, \beta > 0$, $a \geq 0$ ve $\gamma > -1$ olmak üzere, Riemann-Liouville integral operatörünün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

$$i) (J_a^\alpha J_a^\beta f)(x) = (J_a^{\alpha+\beta} f)(x)$$

$$ii) (J_a^\alpha J_a^\beta f)(x) = (J_a^\beta J_a^\alpha f)(x)$$

$$iii) J_a^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma}$$

Bir $f(x)$ fonksiyonunun α - mertebeli Riemann-Liouville kesirli türevi, Riemann-Liouville kesirli integral operatörü yardımıyla tanımlanır.

Tanım 2.1.2.3: $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $m - 1 < \alpha \leq m$ olmak üzere f fonksiyonunun α mertebeli Riemann-Liouville kesirli türevi

$$(\hat{D}_a^\alpha f)(x) = D^m [J_a^{m-\alpha} f(x)] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \left[\int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t) dt \right]$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny 1999).

2.1.3. Caputo kesirli türevleri

Caputo türev tanımının özellikleri detaylı bir şekilde ilk olarak M. Caputo tarafından ve daha sonra bazı kaynaklarda verilmiştir (Caputo 1967; Kılbas *et al.* 2006). Bu nedenle bu tezde sadece temel özellikler verilecektir.

Tanım 2.1.3.1: $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{Z}^+$, $x > 0$, $f \in C_{-1}^m$ olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonunun α . mertebeden ($\alpha > 0$) Caputo türev operatörü

$$(D_a^\alpha f)(x) = (J_a^{m-\alpha} D^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt$$

biçiminde tanımlanır.

Ayrıca $-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{Z}^+$, $x > 0$, $f \in C_\alpha^m$, $\alpha \geq -1$ olmak üzere, Caputo türev tanımına ait,

$$i) (D_a^\alpha J_a^\alpha f)(x) = f(x) \tag{2.17}$$

$$ii) (J_a^\alpha D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}, \quad a \geq 0 \tag{2.18}$$

özellikleri mevcuttur.

Tanım 2.1.3.2: $m - 1 < \alpha \leq m$ olmak üzere, α . mertebeden ($\alpha > 0$) Caputo zaman-kesirli türev operatörü,

$$D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \frac{\partial^m u(x, \tau)}{\partial \tau^m} d\tau & ; \quad m-1 < \alpha < m \\ \frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m} & ; \quad \alpha = m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Podlubny 1999).

Teorem 2.1.3.3. (Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi) $0 < \alpha \leq 1$ için $f(x) \in C[a, b]$ ve $D_a^\alpha f(x) \in C[a, b]$ olsun. Bu durumda

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (D_a^\alpha f)(\xi) \cdot (x - a)^\alpha$$

olur. Burada $\forall x \in (a, b]$ için $a \leq \xi \leq x$ ve D_a^α , α – mertebeli Caputo kesirli türevidir (Podlubny 1999).

2.1.4. Kesirli türevlerin bazı temel özellikleri

i. Lineerlik: Kesirli mertebeli türevler de tamsayı mertebeli türevlere benzer bir lineerlik özelliğine sahiptir. Yani

$$D^p(\lambda f(t)) + \mu D^p g(t) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t)$$

yazılabilir ki bu özellik Riemann-Liouville tanımından kolayca doğrulanabilir (Ross and Miller 1993; Podlubny 1999).

ii. Leibnitz Çarpım kuralı

Eğer $f(t)$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonları ve bunların türevleri $[a, t]$ aralığında sürekli olmak üzere

$${}_a D_t^\alpha (\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_a D_t^{\alpha-k} f(t)$$

eşitliği Leibnitz kuralı olarak adlandırılır. Leibnitz kuralı özellikle kesirli türevi bilinen bir fonksiyon ile bir polinomun çarpımının kesirli türevini hesaplamada çok kullanışlıdır (Ross and Miller 1993; Podlubny 1999).

2.2. Kesirli Mertebeli Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde kesirli diferansiyel denklemlere ait bazı temel tanımlar verilecektir. Daha detaylı bilgi Podlubny tarafından verilmiştir (Podlubny 1999).

Tanım 2.2.1: Bir veya daha fazla bağımsız değişkenin kesirli türevlerini içeren denklemlere kesirli diferansiyel denklem denir. Yani, kesirli diferansiyel denklemler kesirli mertebelerden türevlere sahip olan diferansiyel denklemlerdir (Benghorbal 2004).

Örnek 2.2.1:

$$x D^{\frac{1}{3}} y(x) - D^{\frac{2}{5}} y(x) - y(x) = \sin(x) \quad (2.24)$$

biçiminde verilen (2.24) denklemi bir kesirli diferansiyel denklemdir. Kesirli diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

i) Kesirli adi diferansiyel denklemler,

Bu denklemlere örnek olarak

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{3}}y(x) + 5y^2(x) &= 3 \\ D^{\frac{1}{2}}y(x) + D^{\frac{1}{2}}x(x) &= x \\ D^{\frac{3}{2}}y(x) + D^{\frac{1}{2}}y(x) - 2y(x) &= 0 \end{aligned}$$

gösterilebilir.

ii) Kesirli kısmi diferansiyel denklemler,

Bu denklemlere örnek olarak

$$D_t^{\frac{3}{2}}u(x, t) = \gamma^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

gösterilebilir.

iii) Lineer kesirli diferansiyel denklemler

Bir kesirli diferansiyel denklem eğer;

$$a_n(x)D^{\alpha_n}y(x) + a_{n-1}(x)D^{\alpha_{n-1}}y(x) + \cdots + a_1(x)D^{\alpha_1}y(x) + a_0(x)D^{\alpha_0}y(x) = f(x) \quad (2.29)$$

biçiminde yazılabiliyorsa lineer kesirli diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Dikkat edilirse, lineer kesirli diferansiyel denklemlerin iki özelliği göze çarpmaktadır.

i) Bağımlı değişken y ve y 'nin kesirli türevleri birinci derecedendir. Yani, y bağımlı değişkenini içeren her terimin kuvveti 1'dir.

ii) Her terimin katsayısı yalnız x bağımsız değişkenine bağlıdır.

Buna göre, lineer olmayan bir kesirli diferansiyel denklem non-lineer kesirli diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Yukarıdaki tanımlardan hareketle;

$$x^2 D^{\frac{1}{2}} y(x) + y(x) = e^x$$

$$D^{2q} y(x) + D^q y(x) - y(x) = 0$$

denklemleri lineerdir. Fakat

$$D^{\frac{2}{3}} y(x) = y^2(x)$$

$$y(x) D^{\frac{3}{2}} y(x) + D^{\frac{3}{5}} y(x) = x^3$$

denklemleri non-lineerdir.

Tanım 2.2.2: Kesirli diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeli türevin mertebesine kesirli diferansiyel denklemin mertebesi denir.

Örneğin,

$$y(x) D^{\frac{7}{3}} y(x) + \left(D^{\frac{3}{5}} y(x) \right)^2 = (x + 1)^2$$

denklemini bir $\frac{7}{3}$.mertebeden non-lineer adi kesirli diferansiyel denklemdir.

2.3. Kesirli Mertebeli Diferansiyel-Cebirsel Denklemler

Tanım 2.3.1: $i = 1, 2, 3, \dots, (n - 1)$, $t \geq 0$, $0 < \alpha_i \leq 1$, olmakla birlikte başlangıç koşulları için de $x_i(0) = a_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ olmak üzere bir kesirli mertebeli diferansiyel-cebirsel denklem

$$D_*^{\alpha_i} x_i(t) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1', x_2', \dots, x_n')$$

$$g(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

şeklinde tanımlanır (Zurigat *et al.* 2010).

Bu tanıma göre bir sonraki bölümde üzerinde çalışacağımız denklemlere örnek olarak aşağıdaki denklemleri verebiliriz.

Örnek 2.3.1: $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x(t) + y(t) &= e^{-t} + \cos(t) \\ D^\alpha x(t) + x(t) - y(t) &= -\sin(t) \\ x(0) &= 1 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Örnek 2.3.2: $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1} x(t) - x(t) + z(t) x(t) &= 1 \\ D^{\alpha_2} z(t) - y(t) + x^2(t) + z(t) &= 0 \\ y(t) - x^2(t) &= 0 \\ x(0) = y(0) = z(0) &= 0 \end{aligned}$$

İkinci örnekten de görülebildiği üzere kesirli diferansiyel-cebirsel denklemin içerisinde farklı kesirli mertebelerden türevler de bulunabilmektedir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde tezde kullanılacak olan metot hakkında literatür özetiyle beraber detaylı bilgi verilmiştir.

3.1. Dalgacık (Wavelet) Dönüşümleri

Herhangi bir fiziksel sistemden elde edilen verilerin analizi için birçok dönüşüm metodu tanımlanmıştır. Bunların en çok bilinenlerinden ve en eskilerinden biri olan Fourier dönüşümü bir verinin bilinir bileşenleri hakkında bilgi verirken herhangi bir zaman bilgisi içermemektedir. Dolayısıyla Fourier dönüşüm metodu ile veri işlemede, herhangi bir anda meydana gelen fiziksel olayları gözlemlemek mümkün değildir. Bu temel sorun yüzünden durağan olmayan veriler için Fourier dönüşümleri uygun değildir.

Verileri fonksiyonlar aracılığıyla işlemek için Dalgacık yaklaşımını Haar ilk olarak 1909'da kendi tezinde kullanmıştır. Haar dalgacık fonksiyonunun en önemli özelliği sıkı desteğe sahip olmasıdır. Buna karşın Haar dalgacık fonksiyonunun türevlenmesi sürekli değildir. 1930'lu yıllarda değişken ölçekli taban fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalarda, Littlewood and Paley (1937), ölçeği değişirken enerjisini koruyan fonksiyonlar elde etmişlerdir. 1950–1960 yıllarda Littlewood-Paley teorisi kısmi diferansiyel denklemler ve integral denklemlerine uygulanmıştır.



Şekil 3.1. Dalgacık analizinin uygulama alanları

Kesir mertebeli sistemler, mertebesi tamsayıdan farklı herhangi bir reel sayı olan sistemlerdir. Kesir mertebeli sistemler 19. yy da tanımlanmış olmasına rağmen mühendislik alanında uygulamaları 1990'lı yıllarda gerçekleşebilmiştir. Kesir mertebeli sistemlerin etkileri elektronik, kontrol sistemleri, haberleşme gibi birçok alanda incelenmekte ve bu alanlarda uygulamaları gerçekleştirilmektedir. Kesir mertebeli sistemlerin çözümü için farklı kesirli türev tanımları vardır. Bunlardan en yaygın kullanılanları yukarıda bahsedildiği üzere Riemann-Liouville ve Caputo tanımlarıdır. Bu

tanımlar gamma fonksiyonu, limit, türev ve integral işlemi gibi bir dizi karmaşık işlem gerektirmektedir. Bu işlemlerin bilgisayar ortamında işlenmesi veya analiz edilmesi zordur. Bu yöntemlere alternatif olacak farklı çözüm yöntemleri de mevcuttur. Bunlar Laplace dönüşümü yöntemi, kesirli diferansiyel farklar yöntemi, kuvvet serisi yöntemi gibi yöntemlerdir. Son yıllarda ise bu yöntemlere ek olarak dalgacık (wavelet) yöntemi kullanılmaktadır. Dalgacık yöntemi sistem analizinde ve türev veya integral denklemlerinin sayısal çözümünde oldukça yaygın kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde, türev veya integral ifadesi bir işlem matrisi yardımıyla çözülür. Matris, türev veya integral mertebesine göre dalgacık dönüşümünde değer alır. Dalgacık dönüşümü yöntemlerinden olan Haar dönüşüm yöntemi en yaygın kullanılan dönüşüm yöntemlerinden biridir.

3.2. Haar Dalgacık Fonksiyonları

Haar dalgacık fonksiyonları farklı periyoda sahip kare dalgalardan oluşur. Bu dalgacık fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.1. (Haar Dalgacık Fonksiyonları) $j \geq 0$, $0 \leq k \leq 2^j$, $n = 2^j + k$, $n, j, k \in \mathbb{Z}$, ve

$$h_0(t) = 1, \quad 0 \leq t < 1$$

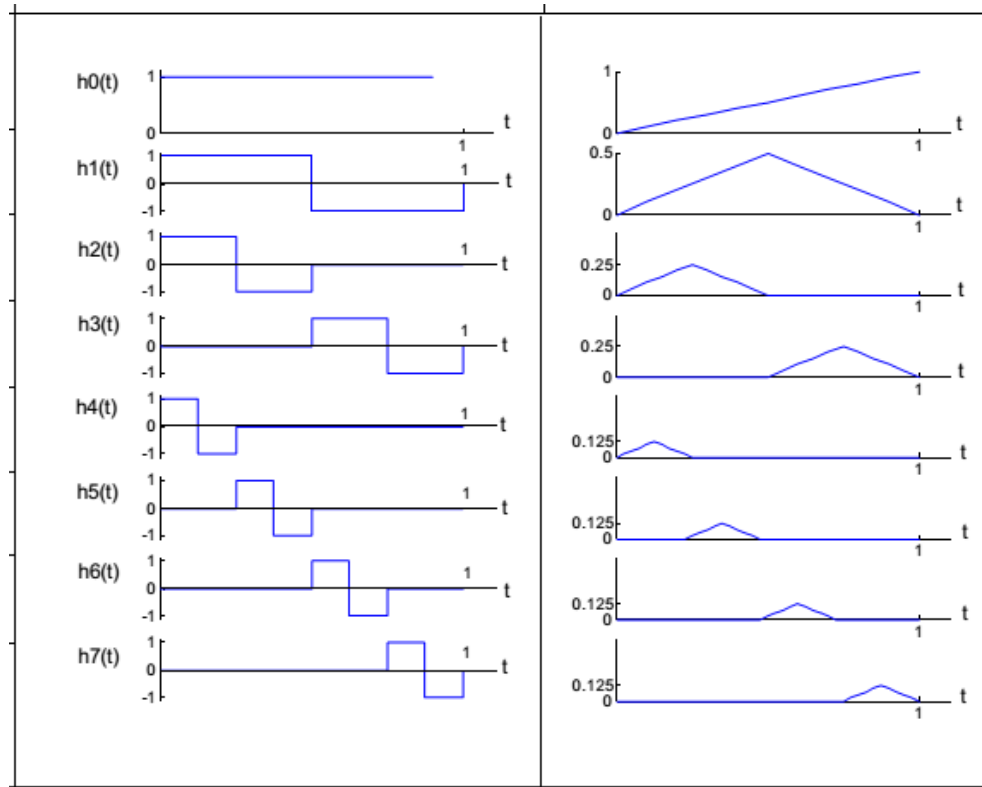
$$h_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.5 \\ -1, & 0.5 \leq t < 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere Haar dalgacık fonksiyonları

$$h_n(t) = h_1(2^j t - k)$$

şeklinde tanımlanır (Li and Zhao 2010).

$h_0(t)$ ve $h_1(t)$ verilmiş olmakla birlikte diğer Haar dalgacık fonksiyonları da tanım aracılığıyla düzenlenebilir. Bu tanıma istinaden ilk birkaç Haar dalgacık fonksiyonu ve bu fonksiyonların integrallerinin grafikleri Şekil 3.2’de gösterilmiştir.



Şekil 3.2. Bazı Haar dalgacık fonksiyonlarına ait grafikler ve bu fonksiyonların integrallerinin grafikleri

$h_n(t)$ $[0, 1)$ aralığının dışında tanımından da görüleceği üzere sıfırdır. Grafikler incelendiğinde n arttıkça Haar dalgacıkları sürekli lokalize olmaktadır. Bu nedenle $\{h_n(t)\}$, $L_2([0, 1))$ uzayında lokal baz formundadır.

Tanım 3.2. $j \geq 0$, $0 \leq k \leq 2^j$, $n = 2^j + k$, $n, j, k \in \mathbb{Z}$, olmak üzere herhangi bir $f(t) \in L_2([0, 1))$ fonksiyonu Haar dalgacık fonksiyonları cinsinden seri biçiminde

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i h_i(t)$$

şeklinde yazılır.

Bu yazılıştta, $i = 0, 1, 2, 3 \dots$ olmak üzere c_i Haar katsayıları

$$c_i = 2^j \int_0^1 f(t) h_i(t) dt$$

integrali ile tanımlanır.

Bu halde aşağıdaki integralin değeri çok küçük kalacağından ihmal edilebilir.

$$\varepsilon = \int_0^1 \left[f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} c_i h_i(t) \right]^2 dt, \quad m = 2^j, \quad j \in \{0\} \cup \mathbb{N},$$

Haar dalgacıklarının $L_2([0, 1))$ uzayında ortogonal baz olduğundan

$$\int_0^1 h_l(t) h_i(t) dt = \begin{cases} 2^{-j}, & i = l, \\ 0, & i \neq l. \end{cases}$$

yazılabilir. Haar serisine açılım ifadesindeki katsayıları veren integralin değişken değerinden dolayı $f(t)$ bir parçalı sabit formundadır veya bir parçalı sabite yaklaşır diyebiliriz. Nümerik yaklaşık değer aradığımızdan dolayı belli bir m terimden sonrasını ihmal edebiliriz. Bu noktada $m = 2^j$ olmak üzere Haar serisine açılışı matris biçiminde yazabilmek maksadıyla katsayılar için C_m ve Haar dalgacık fonksiyonları için $H_m(t)$ matrislerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$C_m \triangleq [c_0, c_1, \dots, c_{m-1}]^T$$

$$H_m(t) \triangleq [h_0(t), h_1(t), \dots, h_{m-1}(t)]^T$$

bu durumda bir $\hat{f}(t)$ kısmi toplamıyla birlikte

$$f(t) \approx \sum_{i=0}^{m-1} c_i h_i(t) = C_m^T H_m(t) = \hat{f}(t)$$

yazabiliriz. Burada sıralama noktasını (collocation point)

$$t_i = \frac{(2i-1)}{2m}, i = 1, 2, \dots, m$$

şeklinde seçersek $m \times m$ tipindeki Haar matrisini $\Phi_{m \times m}$ yi tesis edebiliriz. Dolayısıyla

$$\Phi_{m \times m} \triangleq \left[H_m\left(\frac{1}{2m}\right) \quad H_m\left(\frac{3}{2m}\right) \quad \dots \quad H_m\left(\frac{2m-1}{2m}\right) \right]$$

biçiminde yazılır. Örnek olarak $m = 8$ için Haar matrisi

$$\Phi_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Yine aynı şekilde,

$$\hat{f}_m = \left[\hat{f}\left(\frac{1}{2m}\right) \quad \hat{f}\left(\frac{3}{2m}\right) \dots \hat{f}\left(\frac{2m-1}{2m}\right) \right] = C_m^T \Phi_{m \times m}$$

dir. Burada Haar katsayılarını veren vektör C_m^T dir ve $C_m^T = \hat{f}_m \Phi_{m \times m}^{-1}$ ifadesinden elde edilebilir (Li and Zhao 2010).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde Haar dalgacığı yöntemiyle kesirli mertebeli diferansiyel-cebirsell denklemlerin nümerik çözülebilirliğinin gösterilebilmesi için bazı denklem modelleri üzerinde çalışılmıştır. Denklem modellerine geçmeden önce çözümde karşılaştığımız temel problem olan Haar dalgacık fonksiyonlarının integrallenebilmesi için operasyonel matris formu teşkil edilmiştir.

Burada seçilen denklemler örnek modeller olup literatürde bilinir denklemlerdir. Elde edilen sonuçlar, kesirli türevin farklı mertebeleri için yaklaşık çözümler ile analitik (tam) çözümlerin sayısal verileri tablolarda karşılaştırılmış ve grafikleriyle beraber sunulmuştur.

4.1. Operasyonel Matrisin Teşkili

Bir önceki bölümde tanımlanan $H_m(t)$ fonksiyonlarının integrasyonu Haar serisine açılmakla tanımlanmıştır. Bu integrasyon aşağıdaki formdadır (Gu and Jiang 1996).

$$\int_0^t H_m(\tau) d\tau \approx P_{m \times m} H_m(t)$$

Burada seçtiğimiz P $m \times m$ tipinde Haar dalgacığı operasyonel matrisidir. Amacımız kesirli mertebe integrasyonun Haar dalgacığı operasyonel matrisini türetmektir. Bu türetmeyi yapmadan önce genel Riemann–Liouville kesirli mertebeli integrasyon tanımını hatırlayalım. Bu tanım aşağıdaki gibidir.

$$(I^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t)$$

Biz bu tanımda $f(t)$ yi Haar fonksiyonları cinsinden yazarsak, Riemann–Liouville kesirli mertebeli integrasyon tanımını Haar katsayılarını dahil ederek aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$(I^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t) \approx C_m^T \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \{t^{\alpha-1} * H_m(t)\}$$

Bununla birlikte m –terimli Block Pulse Fonksiyonlarını (BPF) tanımlayalım. Bu fonksiyonlar operasyonel matrisin teşkilinde önemli rol üstlenmekle birlikte aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$b_i(t) = \begin{cases} 1, & 1/m \leq t < (1+m)/m \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, (m-1)$$

$b_i(t)$ fonksiyonları ayrık (disjoint) ve ortogonaldır. Yani

$$b_i(t)b_l(t) = \begin{cases} 0, & i \neq l \\ b_i(t), & i = l \end{cases}$$

$$\int_0^1 b_i(t)b_l(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq l \\ 1/m, & i = l \end{cases}$$

yazılabilir. Haar fonksiyonları birer parçalı sabit olduklarından dolayı m terimli Block Pulse fonksiyonlarına genişletilebilirler. O halde,

$$B_m(t) \triangleq [b_0(t) \ b_0(t) \ \dots \ b_i(t) \ \dots \ b_{m-1}(t)]^T$$

olup

$$H_m(t) = \Phi_{m \times m} B_m(t)$$

şeklinde yazabiliriz (Gu and Jiang 1996).

Kilicman ve Al Zhour kesirli mertebeli integrasyonun Block Pulse operasyonel matrisi F^α yı

$$(I^\alpha B_m)(t) \approx F^\alpha B_m(t)$$

$$F^\alpha = \frac{1}{m^\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{m-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \xi_{m-3} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xi_k = (k + 1)^{\alpha+1} - 2k^{\alpha+1} + (k - 1)^{\alpha+1}$$

şeklinde tanımlamışlardır (Kilicman and Al Zhour 2007).

Biz buradan kesirli mertebeli integrasyonun Haar dalgacığı operasyonel matrisini türetebiliriz. $P_{m \times m}^\alpha$ operasyonel matris olmak üzere

$$(I^\alpha H_m)(t) \approx P_{m \times m}^\alpha H_m(t)$$

olup yukarıdaki ifadeden

$$(I^\alpha H_m)(t) \approx (I^\alpha \Phi_{m \times m} B_m)(t) = \Phi_{m \times m} (I^\alpha B_m)(t) \approx \Phi_{m \times m} F^\alpha B_m(t)$$

yazabiliriz. Yazılan bu ifadeyi kullanarak

$$P_{m \times m}^\alpha H_m(t) = P_{m \times m}^\alpha \Phi_{m \times m} B_m(t) = \Phi_{m \times m} F^\alpha B_m(t)$$

yazılabilir (Gu and Jiang 1996). Son olarak $P_{m \times m}^\alpha$ yı aşağıdaki matris çarpımı şeklinde aşağıdaki biçimde tesis edebiliriz.

$$P_{m \times m}^\alpha = \Phi_{m \times m} F^\alpha \Phi_{m \times m}^{-1}$$

Örnek bir hesaplama Mathematica yazılımı aracılığıyla, $\alpha = 0,5$, $m = 8$, için $P_{m \times m}^\alpha$ değeri hesaplanıp aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

$$P_{8 \times 8}^{0.5} = \begin{bmatrix} 0.7523 & -0.2203 & -0.1558 & -0.0820 & -0.1102 & -0.0580 & -0.0447 & -0.0377 \\ 0.2203 & 0.3116 & -0.1558 & 0.2296 & -0.1102 & -0.0580 & 0.1756 & 0.0782 \\ 0.0410 & 0.1148 & 0.2203 & -0.0350 & -0.1102 & 0.1623 & -0.0389 & -0.0063 \\ 0.0779 & -0.0779 & 0 & 0.2203 & 0 & 0 & -0.1102 & 0.1623 \\ 0.0094 & 0.0196 & 0.0812 & -0.0032 & 0.1558 & -0.0247 & -0.0026 & -0.0009 \\ 0.0112 & 0.0439 & -0.0551 & -0.0194 & 0 & 0.1558 & -0.0247 & -0.0026 \\ 0.0145 & -0.0145 & 0 & 0.0812 & 0 & 0 & 0.1558 & -0.0247 \\ 0.0275 & -0.0275 & 0 & -0.0551 & 0 & 0 & 0 & 0.1558 \end{bmatrix}$$

4.2. Test Problemleri

4.2.1. Test problemi 1

$0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere aşağıdaki kesirli mertebeli diferansiyel-cebirsal denklemi alalım.

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) - tDy(t) + x(t) - (1+t)y(t) &= 0 \\ y(t) - \sin t &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Başlangıç şartları $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ olsun. Bu denklemin tam çözümleri

$\alpha = 1$ olduğu durum için $x(t) = e^{-t} + tsint$, $y(t) = \sin t$ dir.

İlk olarak denklemimizdeki fonksiyonları bütünsel olarak türev içermeyen Haar serisi formuna dönüştürebilmemiz için $x(t)$ ve $y(t)$ nin türev fonksiyonları $Dx(t)$ ve $Dy(t)$ yi Haar serisi formunda

$$Dx(t) = U^T H_m(t) \quad (4.2)$$

ve

$$Dy(t) = R^T H_m(t) \quad (4.3)$$

olarak matris çarpımı biçiminde tasarlayalım.

Diğer taraftan (4.1) denklemindeki tüm terimleri Haar serisi formundaki açılımlarını yazalım. Bu durumda başlangıç şartları ile birlikte

$$D^\alpha x(t) = U^T P_{m \times m}^{1-\alpha} H_m(t) \quad (4.4)$$

$$x(t) = U^T P_{m \times m}^1 H_m(t) + \underbrace{1}_{x(0)} \quad (4.5)$$

$$y(t) = R^T P_{m \times m}^1 H_m(t) + \underbrace{0}_{y(0)} \quad (4.6)$$

yazılır. Yine benzer şekilde, denklem sistemimizdeki bilinen bir fonksiyon olan $f(t) = \sin t$ fonksiyonu da Haar serisi biçiminde yazılabilir. Herhangi bir m değeri için bu yazılışı aşağıdaki gibi gösterelim.

$$f(t) = f_m^T H_m(t) = [\sin t]_{\text{haar}} \quad (4.7)$$

Bu durumda (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) eşitlikleri (4.1) denklemimizde önceki değerlerinin yerine yazılırsa aşağıdaki denklemi elde ederiz.

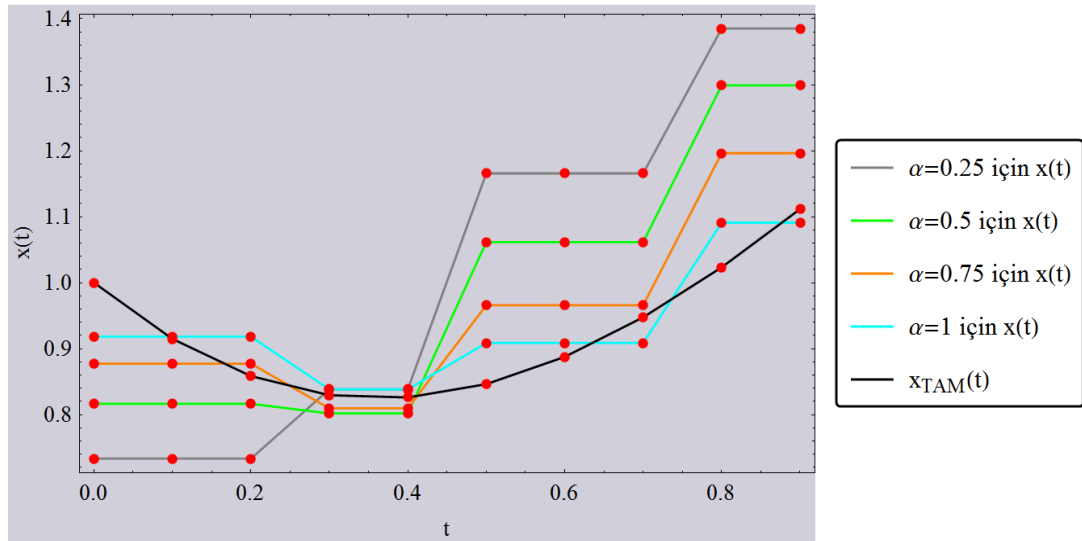
$$\begin{aligned}
U^T P_{m \times m}^{1-\alpha} H_m(t) - t R^T H_m(t) + U^T P_{m \times m}^1 H_m(t) + 1 - (1+t) R^T P_{m \times m}^1 H_m(t) &= 0 \\
R^T P_{m \times m}^1 H_m(t) - [\sin t]_{haar} &= 0
\end{aligned}$$

Bu denklem sistemi m değerine göre boyutu değişen, fakat çözümü mevcut, matris formunda türev içermeyen klasik lineer cebirsel denklem sistemidir. Karmaşık olmasına rağmen Mathematica, Maple, Matlab gibi programlarla ya da diğer denklem çözücülerle rahatlıkla çözülebilmektedir.

Farklı m değerlerine göre bu cebirsel denklemden elde edilen çözümlerden U_m^T katsayıları ve sabit olarak belirlenmiş operasyonel matris katsayılarından yine farklı m değerlerine göre (4.5) ile elde edilen $x(t)$ değerleri aşağıdaki çizelgelerde sunulmuştur. Bu çözümde aşırı karmaşıklığı önlemek ve güvenilir yaklaşık değerler elde edebilmek için $m = 4, 8, 16, 32, 64, 128$ olarak alınmıştır. Bulduğumuz sayısal değerlere ait grafikler de farklı α değerleri için karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Çizelge 4.1. Test problemi 1 ve $m = 4$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

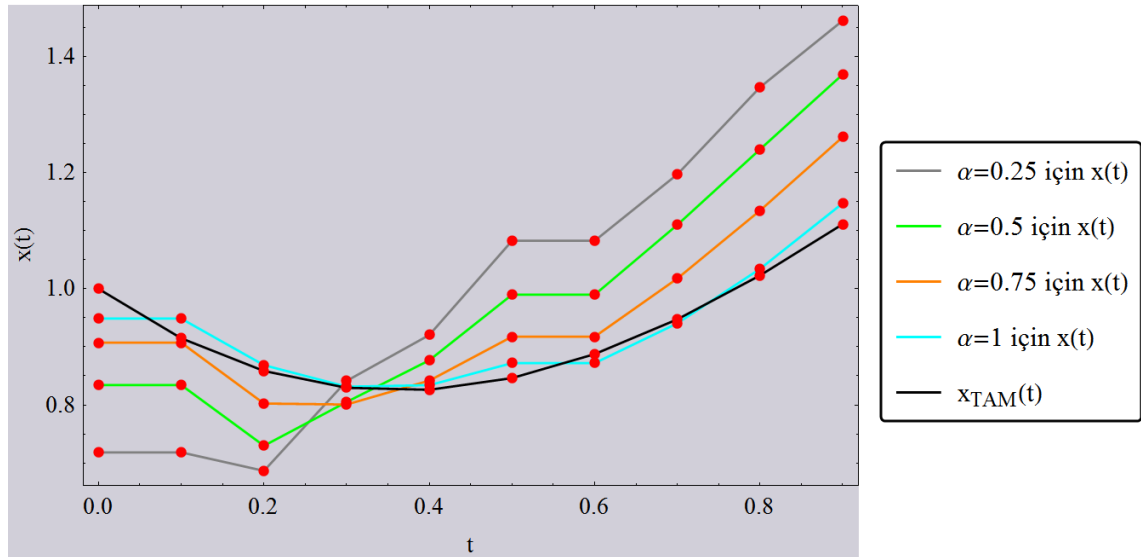
$m = 4$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	0.733299	0.816484	0.877233	0.918254	1.	0.0817462
$t=0.1$	0.733299	0.816484	0.877233	0.918254	0.914821	0.00343299
$t=0.2$	0.733299	0.816484	0.877233	0.918254	0.858465	0.0597891
$t=0.3$	0.838351	0.801852	0.809541	0.838292	0.829474	0.0088174
$t=0.4$	0.838351	0.801852	0.809541	0.838292	0.826087	0.0122043
$t=0.5$	1.16563	1.06146	0.965783	0.908694	0.846243	0.0624501
$t=0.6$	1.16563	1.06146	0.965783	0.908694	0.887597	0.0210964
$t=0.7$	1.16563	1.06146	0.965783	0.908694	0.947538	0.0388441
$t=0.8$	1.38509	1.29897	1.19617	1.09095	1.02321	0.0677313
$t=0.9$	1.38509	1.29897	1.19617	1.09095	1.11156	0.0206188



Şekil 4.1. Test problemi 1 ve $m = 4$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.2. Test problemi 1 ve $m = 8$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

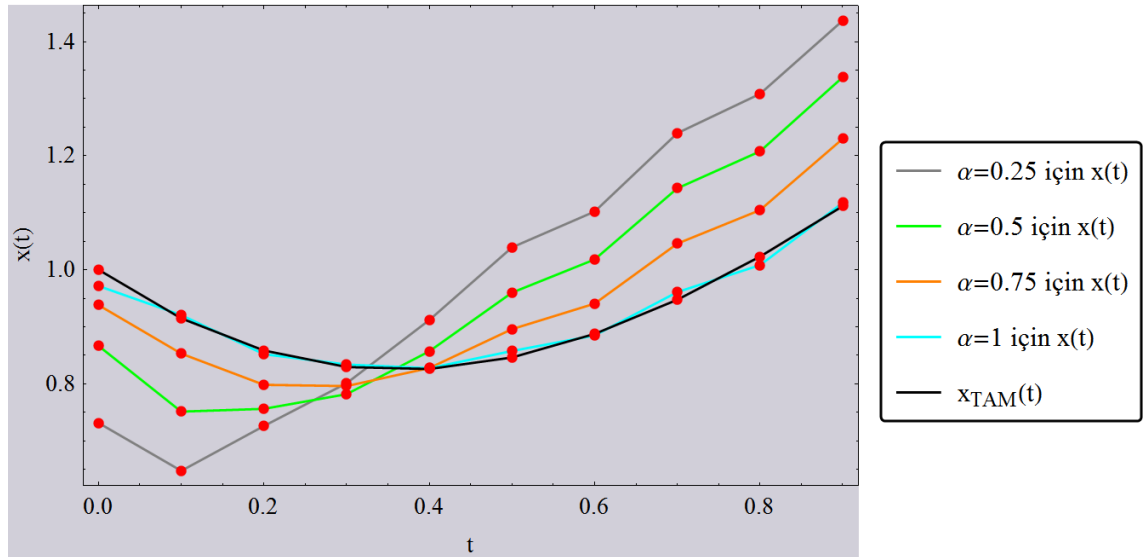
$m = 8$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	0.718159	0.834216	0.907282	0.948749	1.	0.0512505
$t=0.1$	0.718159	0.834216	0.907282	0.948749	0.914821	0.0339287
$t=0.2$	0.686364	0.729621	0.802391	0.868562	0.858465	0.0100972
$t=0.3$	0.841455	0.805047	0.800684	0.831463	0.829474	0.00198882
$t=0.4$	0.920544	0.876959	0.841859	0.834009	0.826087	0.0079216
$t=0.5$	1.08287	0.989918	0.917579	0.872034	0.846243	0.0257907
$t=0.6$	1.08287	0.989918	0.917579	0.872034	0.887597	0.015563
$t=0.7$	1.19744	1.11038	1.01788	0.940697	0.947538	0.0068404
$t=0.8$	1.34758	1.24052	1.13501	1.03455	1.02321	0.0113343
$t=0.9$	1.46242	1.36971	1.26177	1.14762	1.11156	0.0360512



Şekil 4.2. Test problemi 1 ve $m = 8$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.3. Test problemi 1 ve $m = 16$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

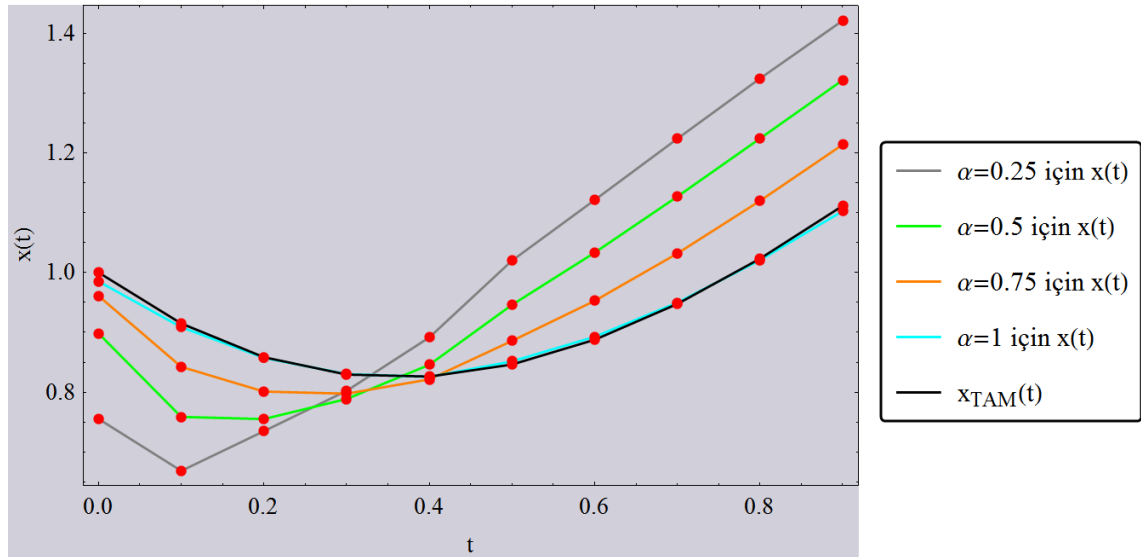
$m = 16$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	0.731419	0.866552	0.938066	0.97162	1.	0.0283801
$t=0.1$	0.647441	0.751332	0.853024	0.920588	0.914821	0.00576711
$t=0.2$	0.726144	0.756175	0.7983	0.852085	0.858465	0.00637945
$t=0.3$	0.801188	0.78193	0.796112	0.833893	0.829474	0.00441895
$t=0.4$	0.911956	0.857104	0.827704	0.827476	0.826087	0.00138902
$t=0.5$	1.0393	0.959957	0.895969	0.857618	0.846243	0.0113742
$t=0.6$	1.1022	1.01817	0.940669	0.884961	0.887597	0.00263606
$t=0.7$	1.23962	1.143	1.04599	0.960968	0.947538	0.0134307
$t=0.8$	1.30858	1.20777	1.10471	1.00823	1.02321	0.014981
$t=0.9$	1.43708	1.33783	1.2298	1.11755	1.11156	0.00598303



Şekil 4.3. Test problemi 1 ve $m = 16$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.4. Test problemi 1 ve $m = 32$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

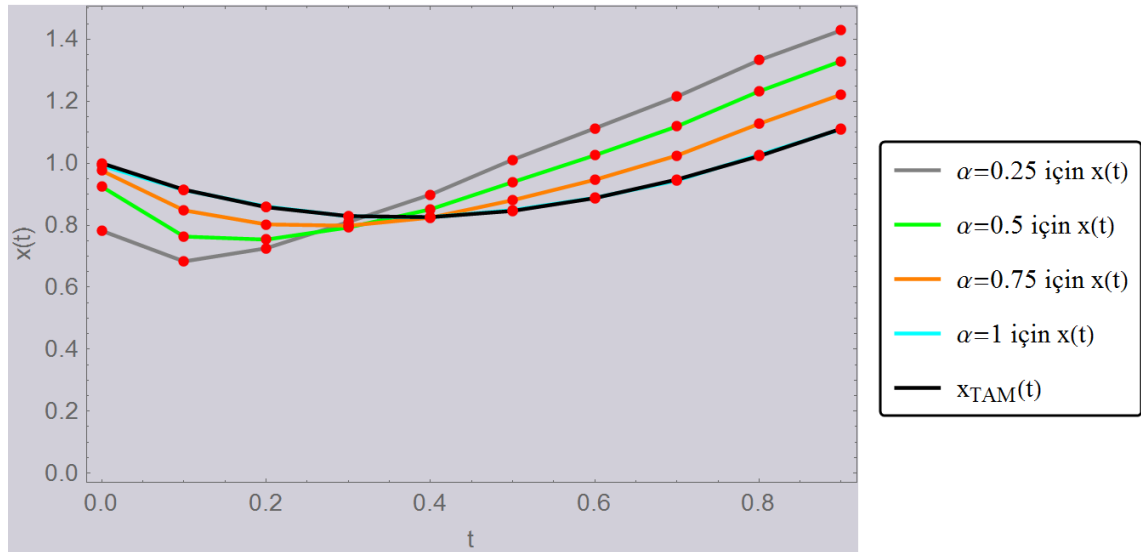
$m = 32$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	0.755277	0.898167	0.960868	0.9851	1.	0.0149001
$t=0.1$	0.668525	0.758682	0.842397	0.908652	0.914821	0.00616903
$t=0.2$	0.734891	0.755093	0.801024	0.857432	0.858465	0.00103258
$t=0.3$	0.80229	0.788708	0.79753	0.830224	0.829474	0.000749809
$t=0.4$	0.891566	0.845801	0.821455	0.825576	0.826087	0.000511798
$t=0.5$	1.01993	0.946003	0.88577	0.851529	0.846243	0.00528577
$t=0.6$	1.12119	1.03327	0.952761	0.892594	0.887597	0.00499712
$t=0.7$	1.22366	1.12698	1.03187	0.949773	0.947538	0.00223485
$t=0.8$	1.32443	1.22407	1.1199	1.0207	1.02321	0.00251104
$t=0.9$	1.42115	1.3217	1.21382	1.10286	1.11156	0.00870196



Şekil 4.4. Test problemi 1 ve $m = 32$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.5. Test problemi 1 ve $m = 64$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

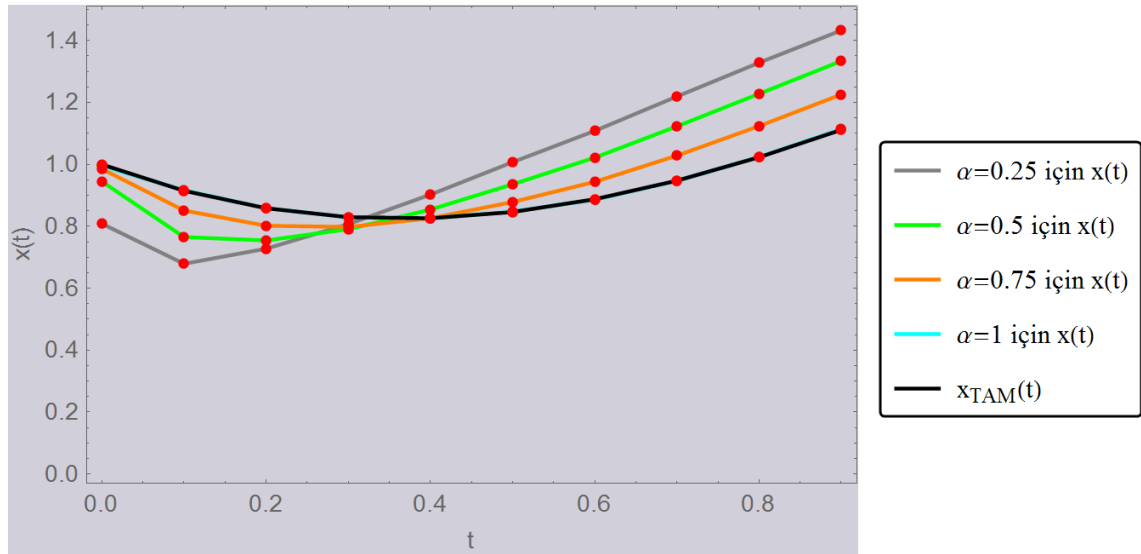
$m = 64$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	0.782094	0.924493	0.975959	0.99237	1.	0.00763034
$t=0.1$	0.683279	0.763543	0.84811	0.913802	0.914821	0.00101839
$t=0.2$	0.725575	0.753697	0.802788	0.860553	0.858465	0.00208844
$t=0.3$	0.810657	0.792724	0.798557	0.828818	0.829474	0.000656211
$t=0.4$	0.898733	0.851368	0.824468	0.826004	0.826087	0.0000834134
$t=0.5$	1.01147	0.93913	0.880835	0.848783	0.846243	0.00253987
$t=0.6$	1.11271	1.02571	0.946667	0.88843	0.887597	0.000832635
$t=0.7$	1.21514	1.11901	1.0249	0.944377	0.947538	0.00316047
$t=0.8$	1.33268	1.23222	1.12755	1.02711	1.02321	0.00389781
$t=0.9$	1.42895	1.32978	1.22183	1.11011	1.11156	0.00145401



Şekil 4.5. Test problemi 1 ve $m = 64$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.6. Test problemi 1 ve $m = 128$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

$m = 128$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	0.808558	0.944945	0.985447	0.996139	1.	0.00386059
$t=0.1$	0.679012	0.76541	0.851144	0.916502	0.914821	0.00168166
$t=0.2$	0.727777	0.754367	0.80185	0.858814	0.858465	0.000349671
$t=0.3$	0.807262	0.790713	0.798005	0.829366	0.829474	0.000108214
$t=0.4$	0.90261	0.854189	0.826033	0.826312	0.826087	0.000224122
$t=0.5$	1.00732	0.935718	0.87841	0.847487	0.846243	0.00124384
$t=0.6$	1.10845	1.02195	0.943653	0.886413	0.887597	0.00118456
$t=0.7$	1.2194	1.12299	1.02838	0.94701	0.947538	0.000527254
$t=0.8$	1.32856	1.22814	1.12372	1.02386	1.02321	0.000649027
$t=0.9$	1.43283	1.33381	1.22584	1.11376	1.11156	0.00219866



Şekil 4.6. Test problemi 1 ve $m = 128$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

4.2.2. Test problemi 2

$0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere aşağıdaki kesirli mertebeli diferansiyel-cebirsal denklemi alalım.

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) + x(t) - y(t) &= -\sin t \\ x(t) + y(t) &= e^{-t} + \sin t \end{aligned} \quad (4.8)$$

Başlangıç şartları $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ şeklinde verilsin. Bu denklemin tam çözümleri $\alpha = 1$ olduğu durum için $x(t) = e^{-t}$ $y(t) = \sin t$ dir.

İlk olarak, denklemimizdeki fonksiyonları bütünsel olarak türev içermeyen haar serisi formuna dönüştürebilmemiz için $x(t)$ ve $y(t)$ 'nin türev fonksiyonları $Dx(t)$ ve $Dy(t)$ yi haar serisi formunda

$$Dx(t) = U^T H_m(t) \quad (4.9)$$

ve

$$Dy(t) = R^T H_m(t) \quad (4.10)$$

olarak matris çarpımı biçiminde yazalım.

Şimdi de denklemlerimizdeki diğer terimleri Haar Serisi formundaki açılımlarını yazalım.

Bu durumda başlangıç şartları ile birlikte

$$D^\alpha x(t) = U^T P_{m \times m}^{1-\alpha} H_m(t) \quad (4.11)$$

$$x(t) = U^T P_{m \times m}^1 H_m(t) + \underbrace{1}_{x(0)} \quad (4.12)$$

$$y(t) = R^T P_{m \times m}^1 H_m(t) + \underbrace{0}_{y(0)} \quad (4.13)$$

yazılır. Yine benzer şekilde, denklem sistemimizdeki bilinen fonksiyonlar olan

$f(t) = -\sin t$ ve $g(t) = e^{-t} + \sin t$ fonksiyonları da yukarıdaki tanım gereği Haar serisi biçiminde yazılabilir. Herhangi bir m değeri için bu yazılışları yine aşağıdaki gibi gösterelim.

$$f(t) = f_m^T H_m(t) = [-\sin t]_{haar} \quad , \quad g(t) = g_m^T H_m(t) = [e^{-t} + \sin t]_{haar} \quad (4.14)$$

Bu durumda (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14) eşitlikleri (4.8) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki denklemi elde ederiz.

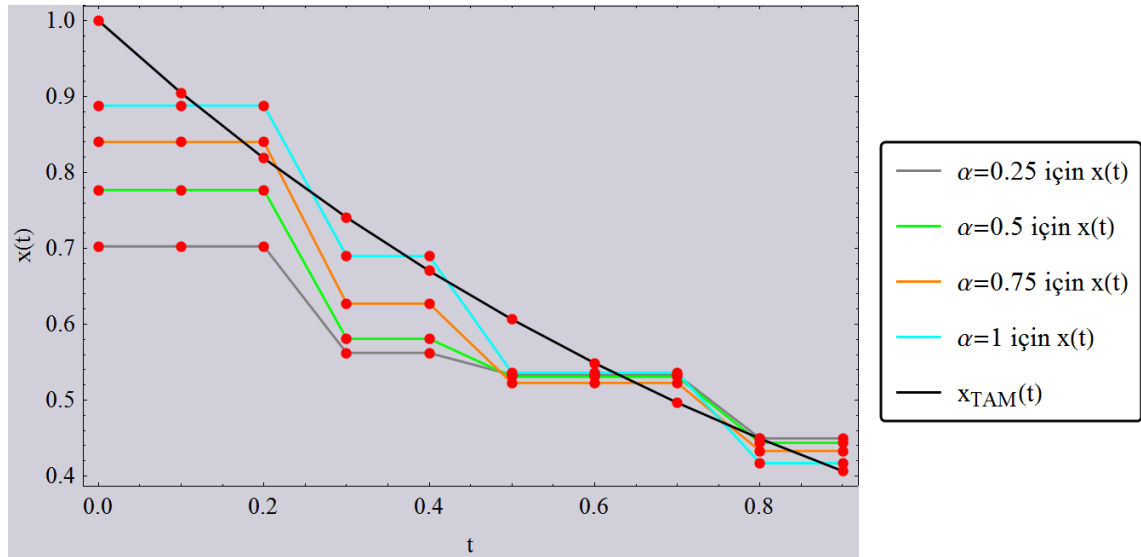
$$\begin{aligned} U^T P_{m \times m}^{1-\alpha} H_m(t) + U^T P_{m \times m}^1 H_m(t) + 1 - R^T P_{m \times m}^1 H_m(t) + [\sin t]_{haar} &= 0 \\ U^T P_{m \times m}^1 H_m(t) + 1 + R^T P_{m \times m}^1 H_m(t) - [e^{-t} + \sin t]_{haar} &= 0 \end{aligned}$$

Bu denklem sistemi de yine m değerine göre boyutu değişen fakat çözümü mevcut, matris formunda türev içermeyen klasik lineer cebirsel denklem sistemidir.

Farklı m değerlerine göre bu cebirsel denklemden elde edilen çözümlerden U_m^T ve R_m^T katsayıları ile sabit olarak belirlenmiş operasyonel matris katsayılarından yine farklı m değerlerine göre (4.12) ile elde edilen $x(t)$ ve (4.13) ile elde edilen $y(t)$ değerleri aşağıdaki çizelgelerde ayrı ayrı sunulmuştur. Bu çözümde yine karmaşıklığı önlemek ve güvenilir yaklaşık değerler elde edebilmek için $m = 4, 8, 16, 32, 64, 128$ olarak alınmıştır. Bulduğumuz sayısal değerlere ait grafikler de farklı α değerleri ve $x(t)$, $y(t)$ için ayrı ayrı karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Çizelge 4.7. Test problemi 2 ve $m = 4$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

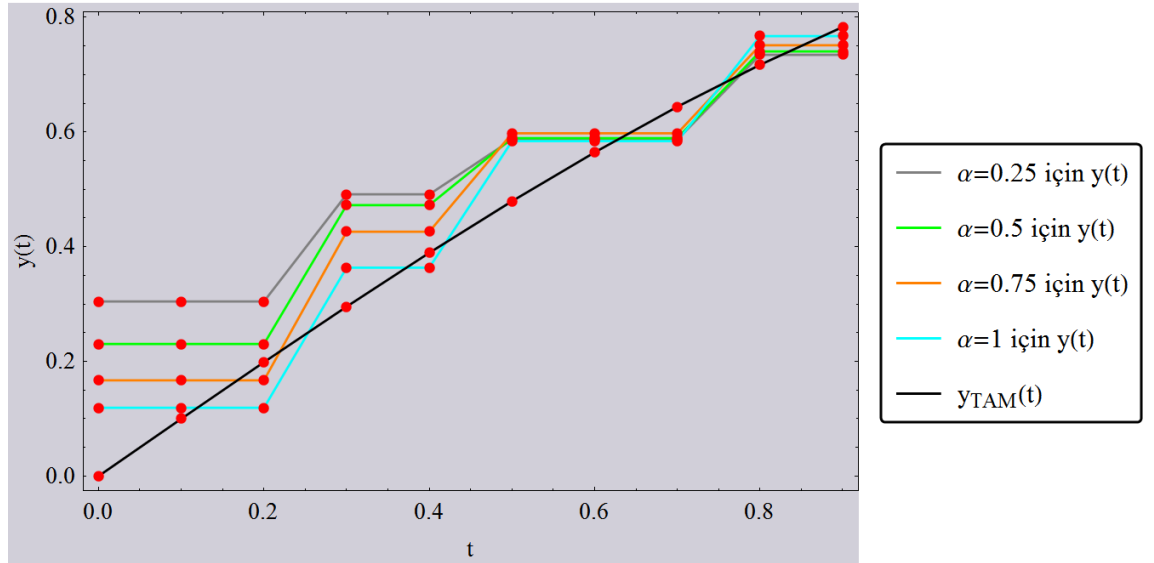
$m = 4$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	0.702679	0.776901	0.840192	0.88825	1.	0.11175
$t=0.1$	0.702679	0.776901	0.840192	0.88825	0.904837	0.0165877
$t=0.2$	0.702679	0.776901	0.840192	0.88825	0.818731	0.0695189
$t=0.3$	0.562210	0.580916	0.627252	0.689928	0.740818	0.0508898
$t=0.4$	0.562210	0.580916	0.627252	0.689928	0.67032	0.0196084
$t=0.5$	0.533378	0.530899	0.522654	0.536212	0.606531	0.0703185
$t=0.6$	0.533378	0.530899	0.522654	0.536212	0.548812	0.0125995
$t=0.7$	0.533378	0.530899	0.522654	0.536212	0.496585	0.0396268
$t=0.8$	0.449643	0.443859	0.433045	0.416939	0.449329	0.0323893
$t=0.9$	0.449643	0.443859	0.433045	0.416939	0.406569	0.0103699



Şekil 4.7. Test problemi 2 ve $m = 4$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.8. Test problemi 2 ve $m = 4$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

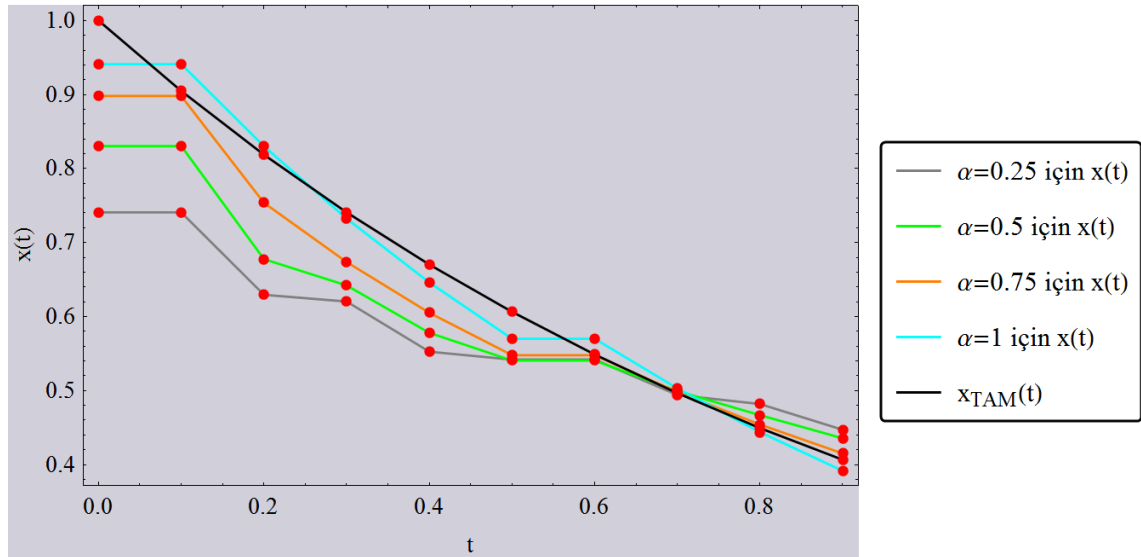
$m = 4$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y_{TAM}(t)$	$y_{HATA}(t)$
$t=0$	0.304492	0.23027	0.166979	0.118922	0.	0.118922
$t=0.1$	0.304492	0.23027	0.166979	0.118922	0.0998334	0.0190885
$t=0.2$	0.304492	0.23027	0.166979	0.118922	0.198669	0.0797474
$t=0.3$	0.491352	0.472645	0.42631	0.363633	0.29552	0.0681132
$t=0.4$	0.491352	0.472645	0.42631	0.363633	0.389418	0.025785
$t=0.5$	0.58698	0.58946	0.597704	0.584147	0.479426	0.104721
$t=0.6$	0.58698	0.58946	0.597704	0.584147	0.564642	0.0195041
$t=0.7$	0.58698	0.58946	0.597704	0.584147	0.644218	0.0600711
$t=0.8$	0.734763	0.740547	0.751361	0.767466	0.717356	0.0501098
$t=0.9$	0.734763	0.740547	0.751361	0.767466	0.783327	0.015861



Şekil 4.8. Test problemi 2 ve $m = 4$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.9. Test problemi 2 ve $m = 8$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

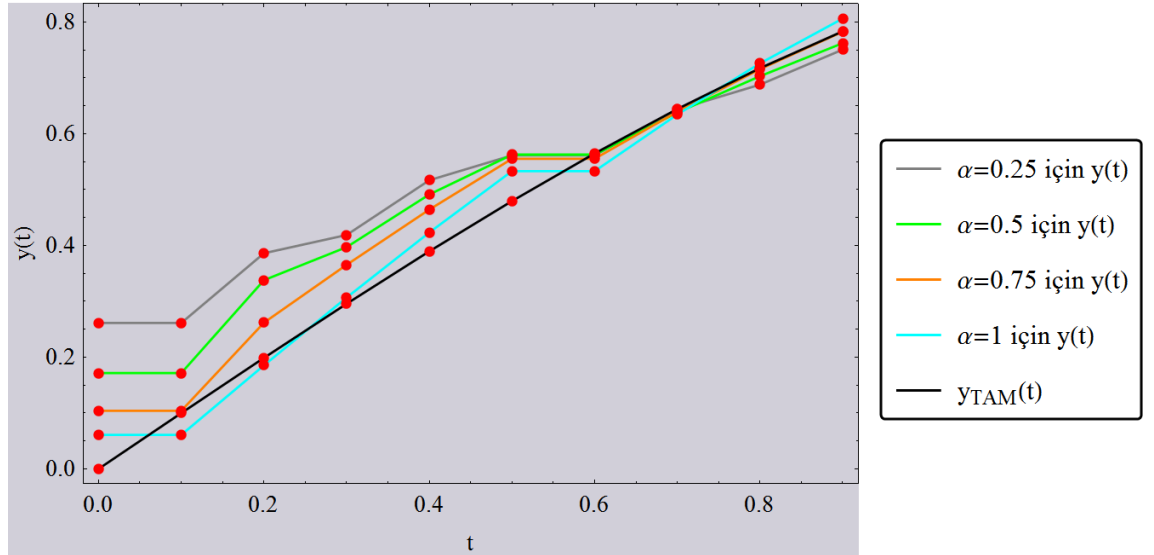
$m = 8$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	0.740771	0.830452	0.89799	0.941079	1.	0.0589215
$t=0.1$	0.740771	0.830452	0.89799	0.941079	0.904837	0.0362411
$t=0.2$	0.629461	0.677678	0.753775	0.830197	0.818731	0.011466
$t=0.3$	0.620348	0.642125	0.673724	0.732411	0.740818	0.00840716
$t=0.4$	0.552602	0.578078	0.605185	0.646168	0.67032	0.0241523
$t=0.5$	0.541898	0.540616	0.547911	0.570099	0.606531	0.0364318
$t=0.6$	0.541898	0.540616	0.547911	0.570099	0.548812	0.0212872
$t=0.7$	0.494188	0.499459	0.498046	0.503	0.496585	0.00641461
$t=0.8$	0.481892	0.466772	0.454117	0.44381	0.449329	0.00551909
$t=0.9$	0.447091	0.435622	0.415053	0.391594	0.40657	0.0149757



Şekil 4.9. Test problemi 2 ve $m = 8$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.10. Test problemi 2 ve $m = 8$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

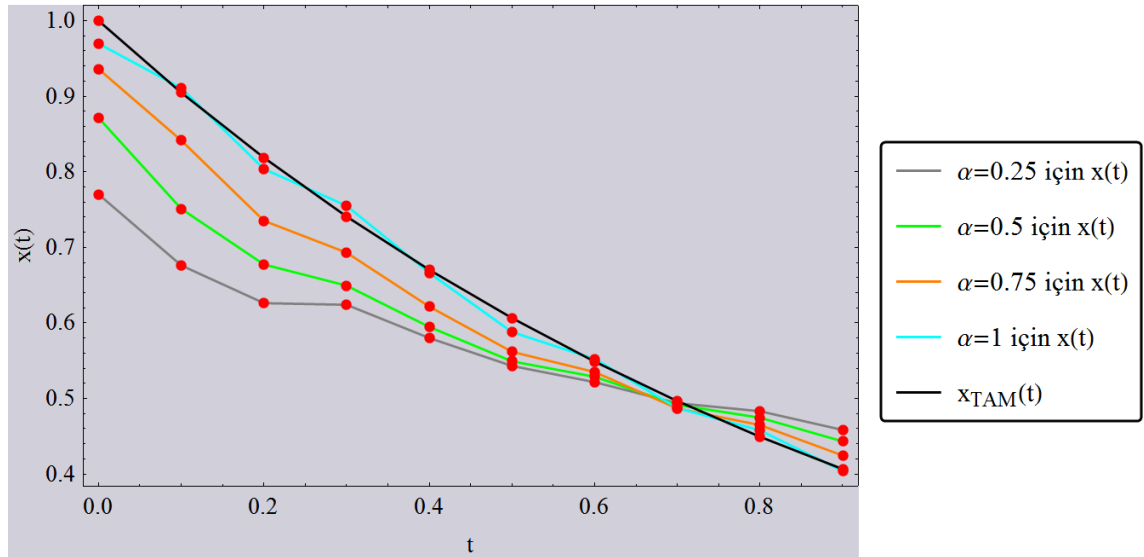
$m = 8$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y_{TAM}(t)$	$y_{HATA}(t)$
$t=0$	0.261101	0.17142	0.103883	0.0607939	0.	0.0607939
$t=0.1$	0.261101	0.17142	0.103883	0.0607939	0.0998334	0.0390395
$t=0.2$	0.385971	0.337755	0.261658	0.185236	0.198669	0.0134337
$t=0.3$	0.418706	0.396929	0.36533	0.306643	0.29552	0.0111229
$t=0.4$	0.516723	0.491247	0.46414	0.423157	0.389418	0.0337387
$t=0.5$	0.561187	0.56247	0.555174	0.532987	0.479426	0.0535611
$t=0.6$	0.561187	0.56247	0.555174	0.532987	0.564642	0.0316558
$t=0.7$	0.643251	0.637979	0.639393	0.634439	0.644218	0.00977894
$t=0.8$	0.687864	0.702984	0.715639	0.725946	0.717356	0.00859001
$t=0.9$	0.750595	0.762064	0.782634	0.806093	0.783327	0.0227659



Şekil 4.10. Test problemi 2 ve $m = 8$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.11. Test problemi 2 ve $m = 16$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

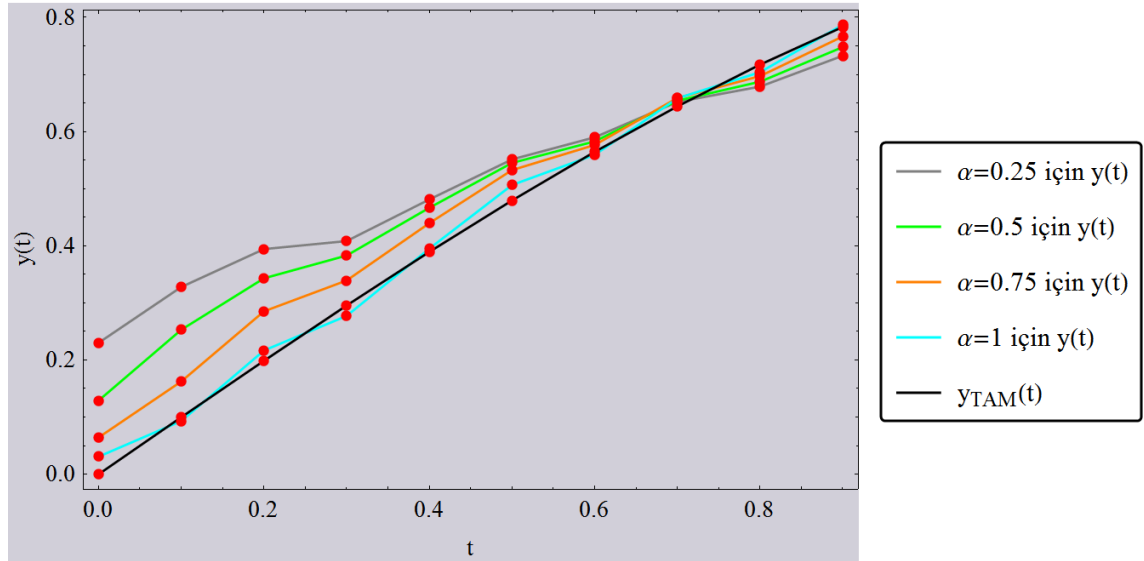
$m = 16$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	0.770277	0.871444	0.936064	0.969683	1.	0.0303167
$t=0.1$	0.676157	0.751076	0.841605	0.91089	0.904837	0.0060521
$t=0.2$	0.626215	0.677405	0.735231	0.803787	0.818731	0.0149438
$t=0.3$	0.624044	0.649372	0.693072	0.755058	0.740818	0.0142398
$t=0.4$	0.580069	0.594734	0.62161	0.666288	0.67032	0.00403194
$t=0.5$	0.5431	0.549239	0.5618	0.58796	0.606531	0.018571
$t=0.6$	0.521658	0.528787	0.535099	0.552321	0.548812	0.00350929
$t=0.7$	0.493803	0.49162	0.486778	0.487396	0.496585	0.00918959
$t=0.8$	0.483164	0.474597	0.4648	0.457855	0.449329	0.00852591
$t=0.9$	0.458369	0.44323	0.424555	0.404038	0.40657	0.00253187



Şekil 4.11. Test problemi 2 ve $m = 16$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.12. Test problemi 2 ve $m = 16$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

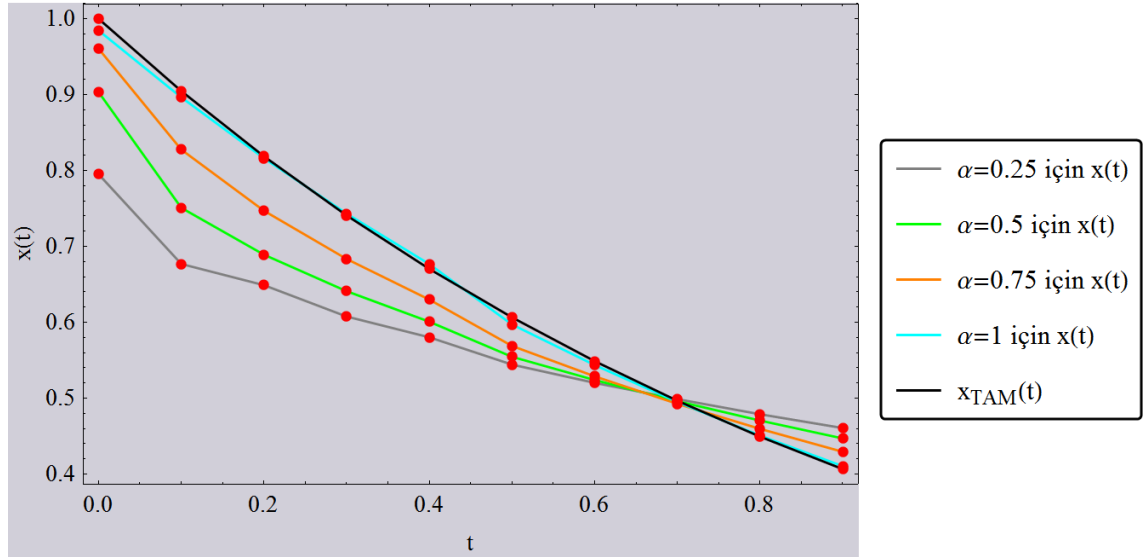
$m = 16$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y_{TAM}(t)$	$y_{HATA}(t)$
$t=0$	0.230201	0.129034	0.0644145	0.0307948	0.	0.0307948
$t=0.1$	0.327966	0.253048	0.162518	0.0932336	0.0998334	0.00659984
$t=0.2$	0.394317	0.343127	0.285302	0.216745	0.198669	0.0180758
$t=0.3$	0.408353	0.383024	0.339325	0.277338	0.29552	0.0181818
$t=0.4$	0.481242	0.466577	0.439701	0.395023	0.389418	0.00560449
$t=0.5$	0.551381	0.545242	0.532682	0.506521	0.479426	0.0270959
$t=0.6$	0.590068	0.582939	0.576627	0.559405	0.564642	0.00523782
$t=0.7$	0.652002	0.654185	0.659027	0.65841	0.644218	0.0141921
$t=0.8$	0.678837	0.687403	0.697201	0.704146	0.717356	0.0132101
$t=0.9$	0.732864	0.748003	0.766679	0.787195	0.783327	0.00386847



Şekil 4.12. Test problemi 2 ve $m = 16$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.13. Test problemi 2 ve $m = 32$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

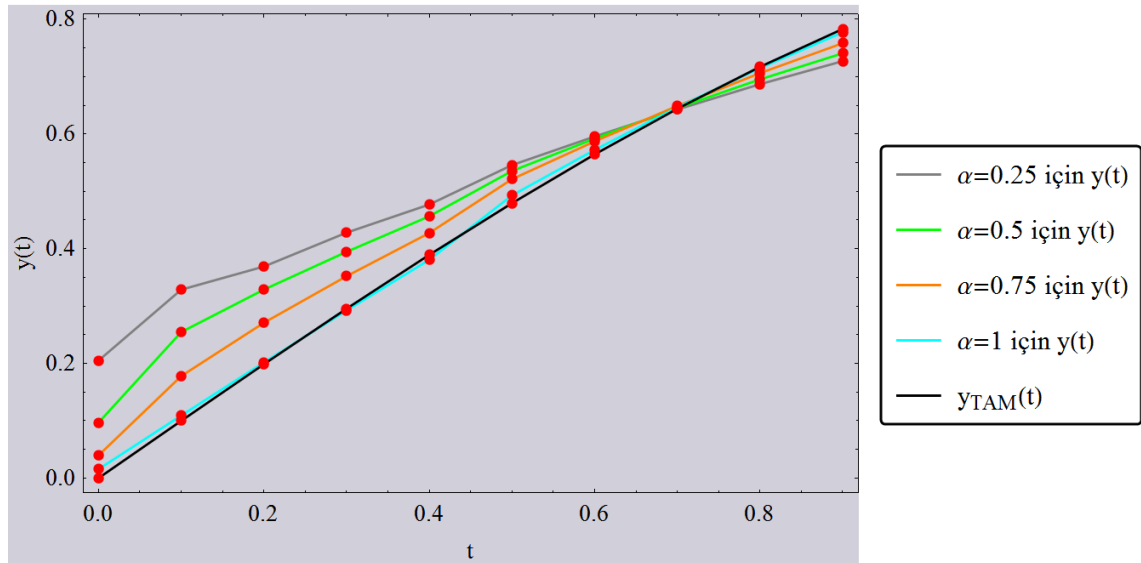
$m = 32$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	0.795161	0.903384	0.960563	0.984614	1.	0.0153864
$t=0.1$	0.676905	0.75091	0.827633	0.896485	0.904837	0.00835263
$t=0.2$	0.648953	0.689144	0.747001	0.816245	0.818731	0.0024854
$t=0.3$	0.607608	0.641041	0.683477	0.743189	0.740818	0.00237058
$t=0.4$	0.580252	0.600786	0.629933	0.676672	0.67032	0.0063519
$t=0.5$	0.544298	0.554566	0.568868	0.597151	0.606531	0.00937943
$t=0.6$	0.520223	0.523946	0.528777	0.543706	0.548812	0.00510517
$t=0.7$	0.498754	0.496064	0.492542	0.495045	0.496585	0.00153984
$t=0.8$	0.478835	0.47051	0.459554	0.45074	0.449329	0.001411
$t=0.9$	0.460617	0.446988	0.429373	0.4104	0.40657	0.00383038



Şekil 4.13. Test problemi 2 ve $m = 32$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.14. Test problemi 2 ve $m = 32$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

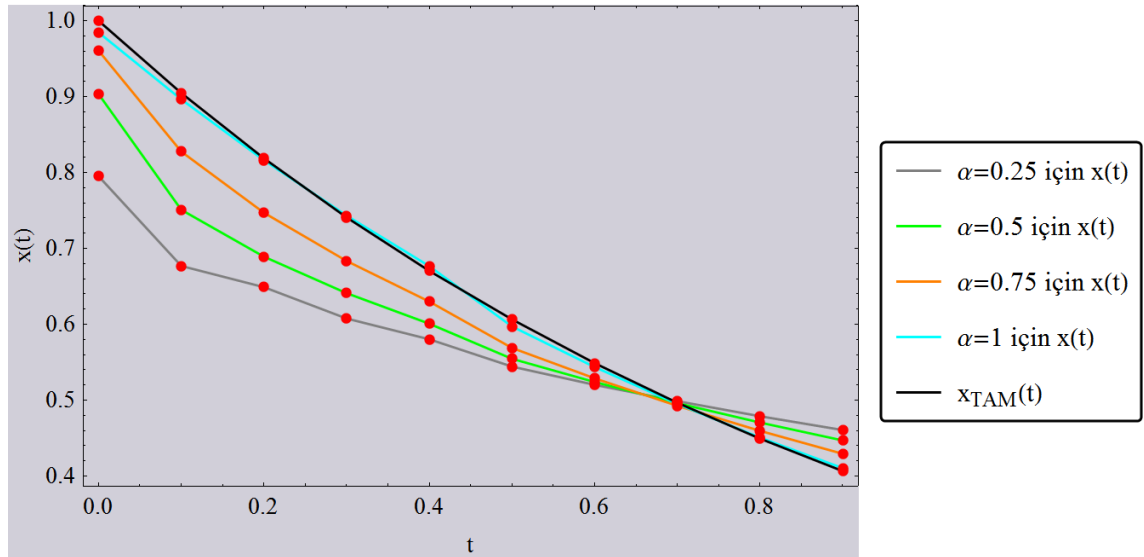
$m = 32$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y_{TAM}(t)$	$y_{HATA}(t)$
$t=0$	0.20496	0.0967363	0.039558	0.0155072	0.	0.0155072
$t=0.1$	0.328647	0.254642	0.177918	0.109066	0.0998334	0.00923306
$t=0.2$	0.368954	0.328763	0.270906	0.201662	0.198669	0.00299259
$t=0.3$	0.428062	0.39463	0.352194	0.292481	0.29552	0.00303877
$t=0.4$	0.477148	0.456614	0.427467	0.380728	0.389418	0.00869003
$t=0.5$	0.545908	0.53564	0.521338	0.493055	0.479426	0.0136292
$t=0.6$	0.595822	0.5921	0.587269	0.572339	0.564642	0.0076967
$t=0.7$	0.642886	0.645576	0.649099	0.646595	0.644218	0.00237741
$t=0.8$	0.687076	0.695401	0.706357	0.715171	0.717356	0.00218536
$t=0.9$	0.727248	0.740876	0.758491	0.777464	0.783327	0.0058628



Şekil 4.14. Test problemi 2 ve $m = 32$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.15. Test problemi 2 ve $m = 64$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

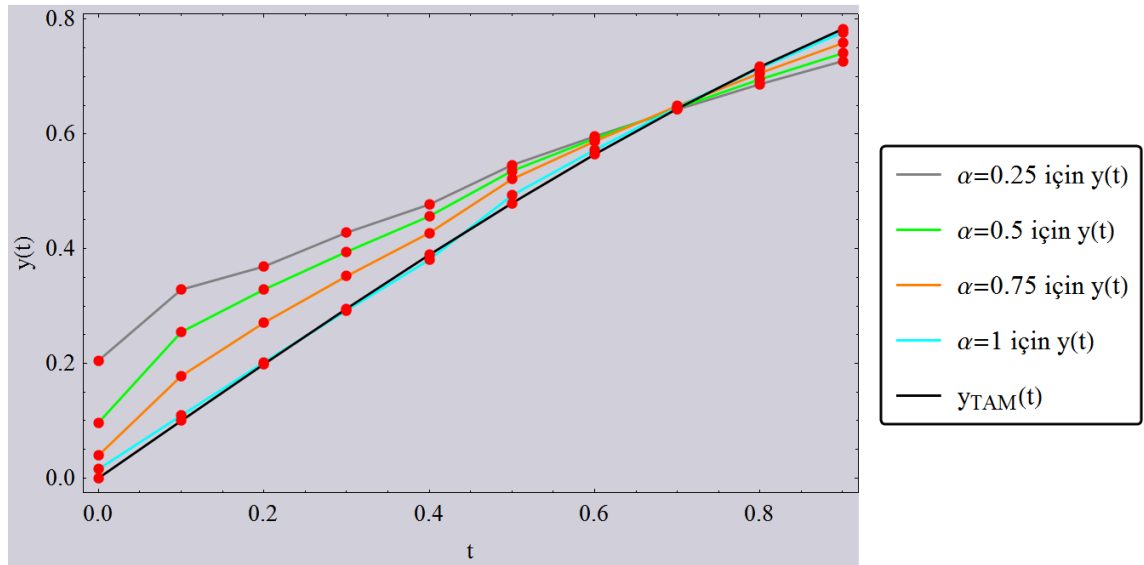
$m = 64$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	0.817337	0.9282	0.975972	0.992248	1.	0.00775217
$t=0.1$	0.69597	0.759499	0.835728	0.903448	0.904837	0.00138957
$t=0.2$	0.6482	0.693628	0.75298	0.822595	0.818731	0.00386449
$t=0.3$	0.60686	0.637486	0.678734	0.737366	0.740818	0.00345181
$t=0.4$	0.577039	0.597699	0.625841	0.671378	0.67032	0.00105746
$t=0.5$	0.546105	0.557272	0.57243	0.601817	0.606531	0.00471388
$t=0.6$	0.522237	0.526396	0.531978	0.547959	0.548812	0.000852725
$t=0.7$	0.500438	0.498301	0.495444	0.498921	0.496585	0.00233572
$t=0.8$	0.47728	0.468481	0.456948	0.447229	0.449329	0.00210023
$t=0.9$	0.459155	0.445117	0.426983	0.407206	0.40657	0.000635911



Şekil 4.15. Test problemi 2 ve $m = 64$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.16. Test problemi 2 ve $m = 64$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

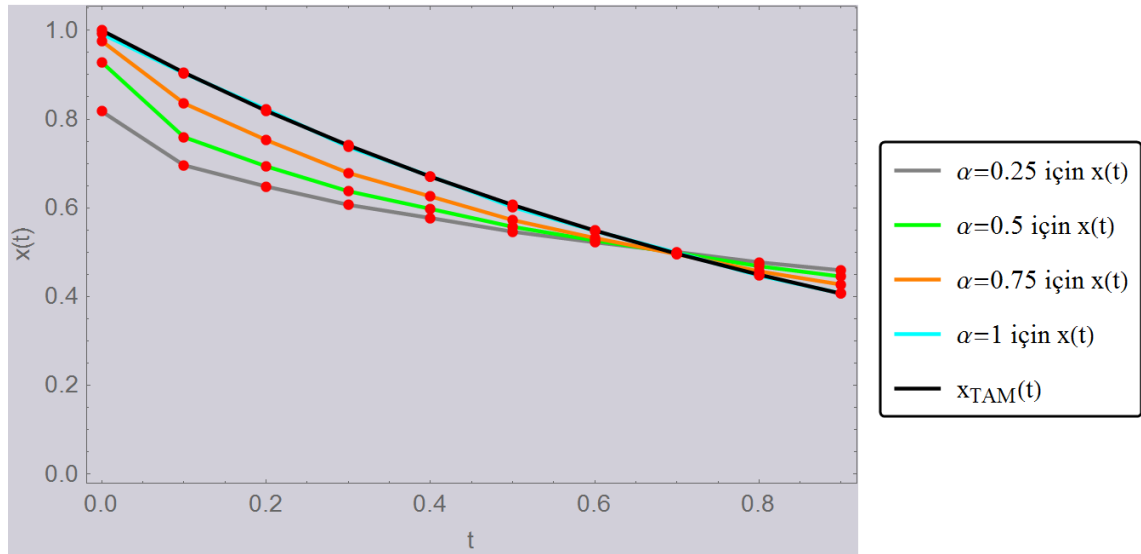
$m = 64$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y_{TAM}(t)$	$y_{HATA}(t)$
$t=0$	0.182694	0.0718299	0.0240581	0.00778253	0.	0.00778253
$t=0.1$	0.308843	0.245314	0.169085	0.101365	0.0998334	0.00153144
$t=0.2$	0.368451	0.323022	0.26367	0.194055	0.198669	0.00461391
$t=0.3$	0.430488	0.399862	0.358614	0.299982	0.29552	0.00446222
$t=0.4$	0.482308	0.461648	0.433506	0.387969	0.389418	0.0014489
$t=0.5$	0.541973	0.530806	0.515647	0.486261	0.479426	0.00683524
$t=0.6$	0.591649	0.58749	0.581908	0.565927	0.564642	0.00128477
$t=0.7$	0.639106	0.641242	0.6441	0.640623	0.644218	0.00359477
$t=0.8$	0.690562	0.69936	0.710894	0.720613	0.717356	0.00325685
$t=0.9$	0.730405	0.744443	0.762578	0.782355	0.783327	0.00097237



Şekil 4.16. Test problemi 2 ve $m = 64$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.17. Test problemi 2 ve $m = 128$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

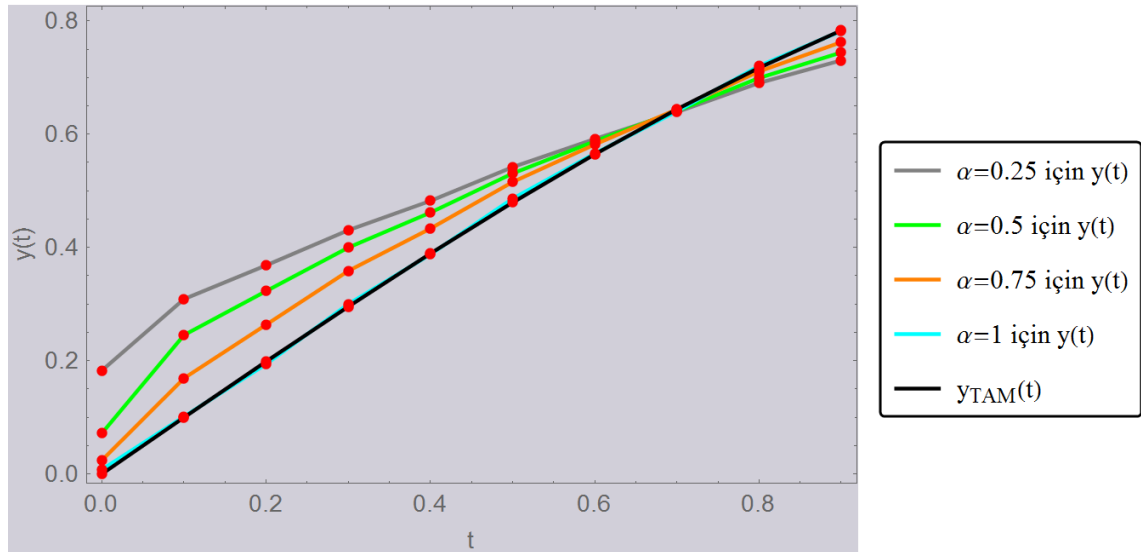
$m = 128$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	0.837625	0.947223	0.985487	0.996108	1.	0.003891
$t=0.1$	0.694830	0.762959	0.839847	0.906966	0.904837	0.002129
$t=0.2$	0.645960	0.691372	0.750024	0.819375	0.818731	0.000644
$t=0.3$	0.608269	0.639287	0.681130	0.740242	0.740818	0.000575
$t=0.4$	0.575881	0.596161	0.623803	0.668753	0.67032	0.001566
$t=0.5$	0.547148	0.558630	0.574218	0.604167	0.606531	0.002363
$t=0.6$	0.523189	0.527625	0.533584	0.550100	0.548812	0.001288
$t=0.7$	0.499571	0.497186	0.494000	0.496974	0.496585	0.000388
$t=0.8$	0.478068	0.469498	0.458257	0.448978	0.449329	0.000350
$t=0.9$	0.458432	0.444184	0.425791	0.405617	0.40657	0.000951



Şekil 4.17. Test problemi 2 ve $m = 128$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.18. Test problemi 2 ve $m = 128$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

$m = 128$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.75$	$\alpha=1$		
t	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y_{TAM}(t)$	$y_{HATA}(t)$
$t=0$	0.162382	0.052784	0.01452	0.0038986	0.	0.00389869
$t=0.1$	0.309632	0.241502	0.164614	0.0974953	0.099833	0.00233816
$t=0.2$	0.371313	0.325902	0.26725	0.197899	0.198669	0.00077010
$t=0.3$	0.428237	0.397219	0.355376	0.296263	0.29552	0.00074306
$t=0.4$	0.484445	0.464165	0.436523	0.391574	0.389418	0.00215538
$t=0.5$	0.539867	0.528386	0.512797	0.482848	0.479426	0.00342282
$t=0.6$	0.589617	0.58518	0.579222	0.562705	0.564642	0.00193698
$t=0.7$	0.641022	0.643407	0.646593	0.643619	0.644218	0.00059834
$t=0.8$	0.68881	0.69738	0.708621	0.7179	0.717356	0.00054380
$t=0.9$	0.731967	0.746215	0.764608	0.784782	0.783327	0.00145472



Şekil 4.18. Test problemi 2 ve $m = 128$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

4.2.3. Test problemi 3

$0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ olmak üzere aşağıdaki kesirli mertebeli diferansiyel-cebirselsel denklemi alalım.

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1}x(t) - tDy(t) + t^2Dz(t) + x(t) - (1+t)y(t) + (t^2 + 2t)z(t) &= 0 \\ D^{\alpha_2}y(t) - tDz(t) - y(t) + (t-1)z(t) &= 0 \\ z(t) - \sin t &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Başlangıç şartları $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$ olsun. Bu denklemin tam çözümleri $\alpha = 1$ olduğu durum için $x(t) = e^{-t} + te^t$, $y(t) = e^t + tsint$, $z(t) = sint$ dir. Yine aynı şekilde, türev fonksiyonları $Dx(t)$, $Dy(t)$ ve $Dz(t)$ yi matris formunda düşünelim.

$$\begin{aligned} Dx(t) &= U^T H_m(t) \\ Dy(t) &= R^T H_m(t) \\ Dz(t) &= S^T H_m(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Şimdi de (4.15) denklemindeki diğer terimlerin Haar serisi formundaki açılımlarını yazalım. Bu durumda başlangıç şartları ile birlikte tüm bilinmeyen içeren terimler

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1}x(t) &= U^T P_{m \times m}^{1-\alpha} H_m(t) \\ D^{\alpha_2}y(t) &= R^T P_{m \times m}^{1-\alpha} H_m(t) \\ x(t) &= U^T P_{m \times m}^1 H_m(t) + \underbrace{1}_{x(0)} \\ y(t) &= R^T P_{m \times m}^1 H_m(t) + \underbrace{1}_{y(0)} \\ z(t) &= S^T P_{m \times m}^1 H_m(t) + \underbrace{0}_{z(0)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

şeklinde yazılabilir. Yine benzer şekilde, (4.15) denkleminde bilinen bir fonksiyon olan $f(t) = sint$ fonksiyonu da Haar serisi biçiminde yazılabilir. Herhangi bir m değeri için bu yazılışı aşağıdaki gibi yazalım.

$$f(t) = f_m^T H_m(t) = [\sin t]_{haar} \quad (4.18)$$

Bu durumda (4.16 - 4.17 - 4.18) eşitlikleri (4.15) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki denklemi elde ederiz.

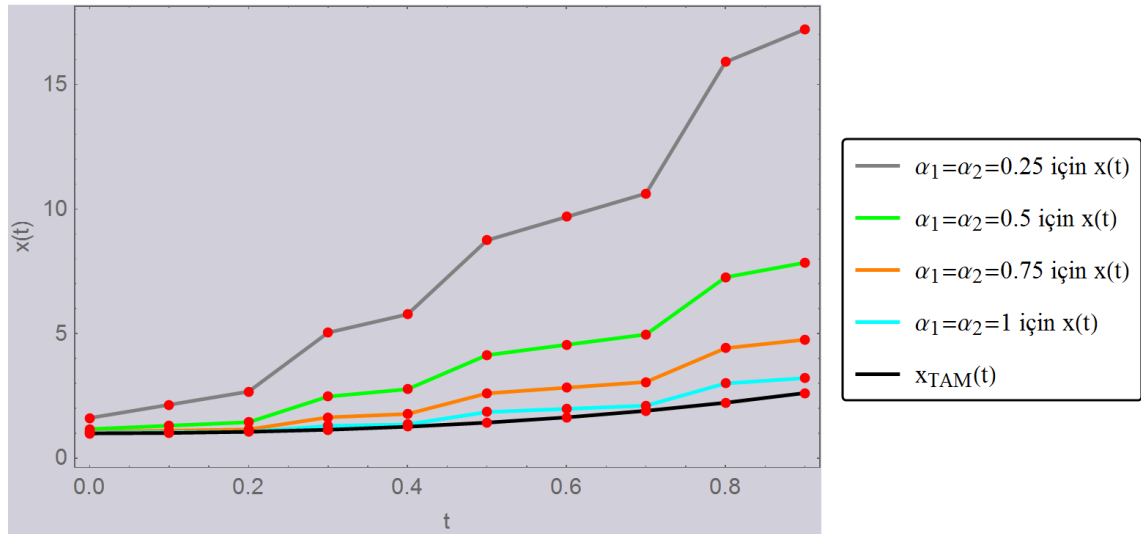
$$\begin{aligned} & U^T P_{m \times m}^{1-\alpha} H_m(t) - t R^T H_m(t) + t^2 S^T H_m(t) + U^T P_{m \times m}^1 H_m(t) + 1 \\ & \quad - (1+t)[R^T H_m(t) + 1] + (t^2 + 2t)[S^T H_m(t)] = 0 \\ & R^T P_{m \times m}^{1-\alpha} H_m(t) - t S^T H_m(t) - [R^T P_{m \times m}^1 H_m(t) + 1] + (t-1) S^T P_{m \times m}^1 H_m(t) = 0 \\ & \quad S^T P_{m \times m}^1 H_m(t) - [\sin t]_{haar} = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

(4.19) denklem sistemi de yukarıdaki ilk iki örnekteki gibi yine m değerine göre boyutu değişken fakat çözümü mevcut, matris formunda türev içermeyen klasik lineer cebirsel denklem sistemidir.

Farklı m değerlerine göre bu cebirsel denklemden elde edilen çözümlerden, sırasıyla U_m^T ve R_m^T katsayıları ile sabit olarak belirlenmiş operasyonel matris katsayılarından yine farklı m değerlerine göre (4.17) ile elde edilen $x(t)$ ve $y(t)$ değerleri aşağıdaki çizelgelerde ayrı ayrı sunulmuştur. Bu çözümde yine karmaşıklığı önlemek ve güvenilir yaklaşık değerler elde edebilmek için $m = 4, 8, 16, 32, 64$ olarak alınmıştır. Bulduğumuz sayısal değerlere ait grafikler de farklı α değerleri ve $x(t)$, $y(t)$ için ayrı ayrı karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Çizelge 4.19. Test problemi 3 ve $m = 4$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

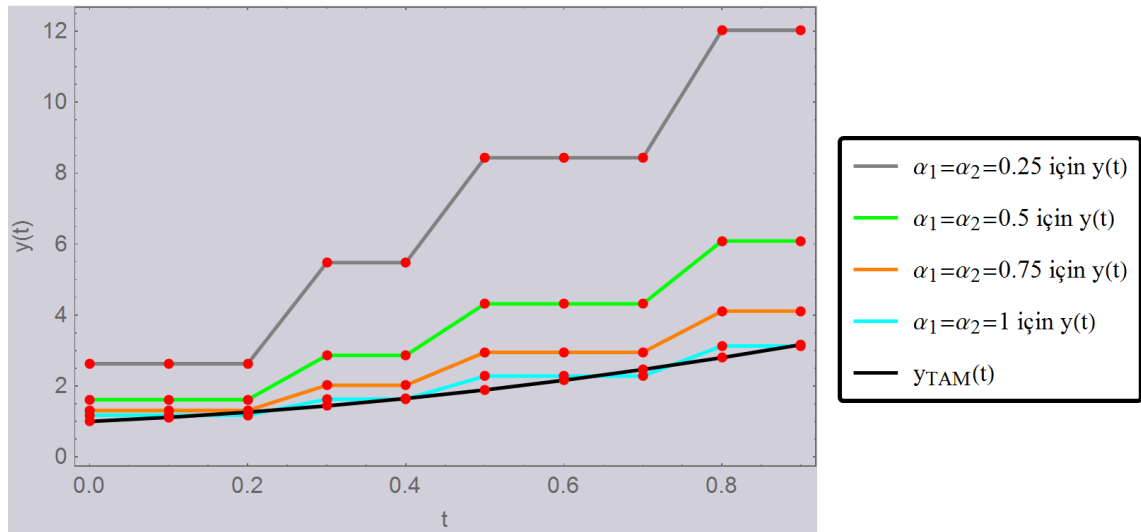
$m = 4$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.25$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	1.61696	1.17216	1.06428	1.02806	1.	0.0280599
$t=0.1$	2.14731	1.30995	1.11066	1.04568	1.01535	0.0303214
$t=0.2$	2.67766	1.44774	1.15704	1.06329	1.06301	0.000280498
$t=0.3$	5.04419	2.47839	1.64439	1.29897	1.14578	0.153192
$t=0.4$	5.77759	2.7727	1.77799	1.36177	1.26705	0.0947239
$t=0.5$	8.74985	4.1424	2.60673	1.85617	1.43089	0.425276
$t=0.6$	9.68861	4.55604	2.83431	1.98412	1.64208	0.342037
$t=0.7$	10.6274	4.96968	3.06189	2.11207	1.90621	0.20586
$t=0.8$	15.9014	7.2638	4.41931	3.00543	2.22976	0.775671
$t=0.9$	17.2114	7.85166	4.76138	3.21827	2.62021	0.59806



Şekil 4.19. Test problemi 3 ve $m = 4$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.20. Test problemi 3 ve $m = 4$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

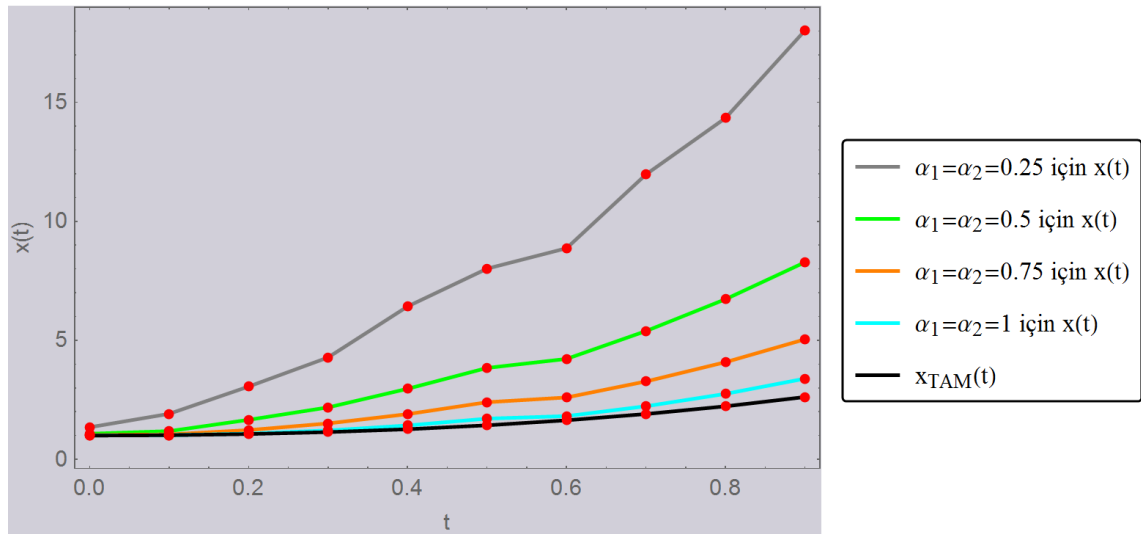
$m = 4$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.25$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$		
t	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y_{TAM}(t)$	$y_{HATA}(t)$
$t=0$	2.62556	1.61379	1.30883	1.17616	1.	0.176159
$t=0.1$	2.62556	1.61379	1.30883	1.17616	1.11515	0.061005
$t=0.2$	2.62556	1.61379	1.30883	1.17616	1.26114	0.0849773
$t=0.3$	5.47832	2.86243	2.02141	1.62806	1.43851	0.189544
$t=0.4$	5.47832	2.86243	2.02141	1.62806	1.64759	0.0195335
$t=0.5$	8.43508	4.31609	2.94946	2.27952	1.88843	0.391087
$t=0.6$	8.43508	4.31609	2.94946	2.27952	2.1609	0.118617
$t=0.7$	8.43508	4.31609	2.94946	2.27952	2.46471	0.185184
$t=0.8$	12.0315	6.08808	4.10995	3.1284	2.79943	0.32897
$t=0.9$	12.0315	6.08808	4.10995	3.1284	3.1646	0.0362013



Şekil 4.20. Test problemi 3 ve $m = 4$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.21. Test problemi 3 ve $m = 8$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

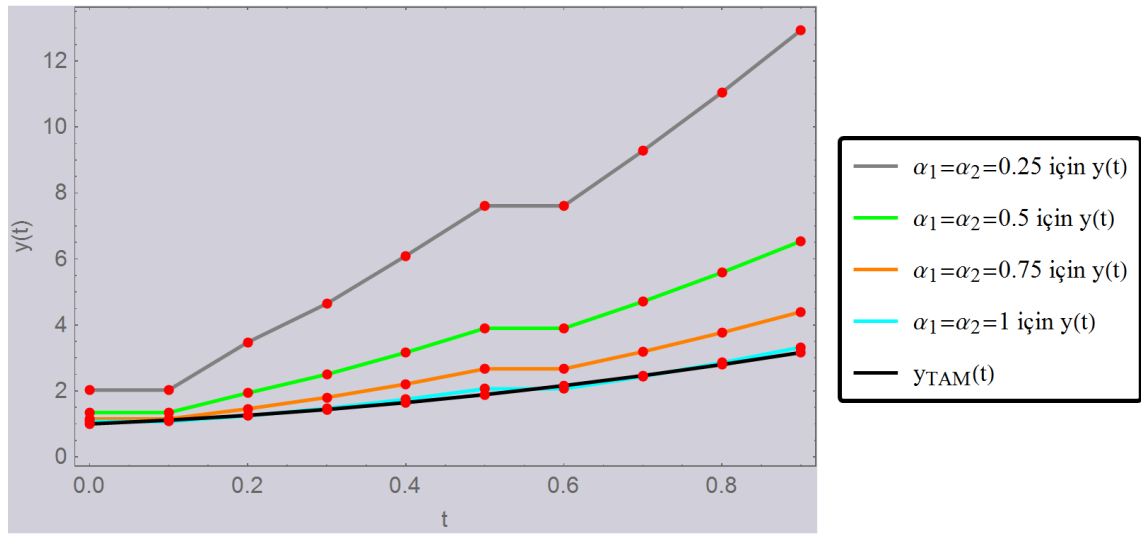
$m = 8$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.25$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	1.34862	1.07514	1.02151	1.00737	1.	0.00736935
$t=0.1$	1.91347	1.18652	1.04892	1.01484	1.01535	0.000512273
$t=0.2$	3.05975	1.66285	1.23072	1.08268	1.06301	0.0196696
$t=0.3$	4.28293	2.18479	1.51097	1.21716	1.14578	0.0713793
$t=0.4$	6.42659	2.96663	1.90085	1.42458	1.26705	0.157532
$t=0.5$	8.01592	3.8422	2.40179	1.71253	1.43089	0.28164
$t=0.6$	8.87413	4.22264	2.60159	1.8191	1.64208	0.177016
$t=0.7$	11.9776	5.39407	3.27569	2.23379	1.90621	0.327576
$t=0.8$	14.347	6.73044	4.08588	2.75384	2.22976	0.524081
$t=0.9$	18.0286	8.28606	5.04585	3.39224	2.62021	0.772025



Şekil 4.21. Test problemi 3 ve $m = 8$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.22. Test problemi 3 ve $m = 8$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

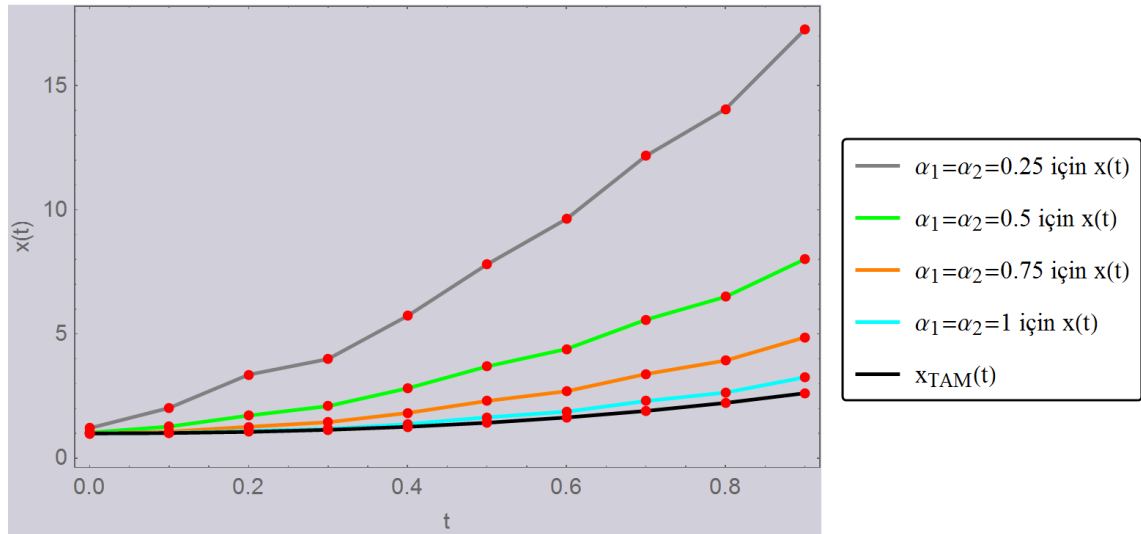
$m = 8$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.25$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$		
t	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y_{TAM}(t)$	$y_{HATA}(t)$
$t=0$	2.02714	1.34433	1.15154	1.07473	1.	0.0747289
$t=0.1$	2.02714	1.34433	1.15154	1.07473	1.11515	0.0404254
$t=0.2$	3.47658	1.93763	1.45953	1.24847	1.26114	0.0126705
$t=0.3$	4.64668	2.5022	1.8031	1.47122	1.43851	0.0327064
$t=0.4$	6.09683	3.16475	2.20681	1.74361	1.64759	0.0960148
$t=0.5$	7.61211	3.89868	2.66942	2.06567	1.88843	0.177238
$t=0.6$	7.61211	3.89868	2.66942	2.06567	2.1609	0.0952323
$t=0.7$	9.27851	4.70882	3.19008	2.43701	2.46471	0.0276908
$t=0.8$	11.0501	5.59024	3.76714	2.85692	2.79943	0.0574911
$t=0.9$	12.9359	6.54018	4.39886	3.32451	3.1646	0.159913



Şekil 4.22. Test problemi 3 ve $m = 8$ için $y(t)$ 'nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.23. Test problemi 3 ve $m = 16$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

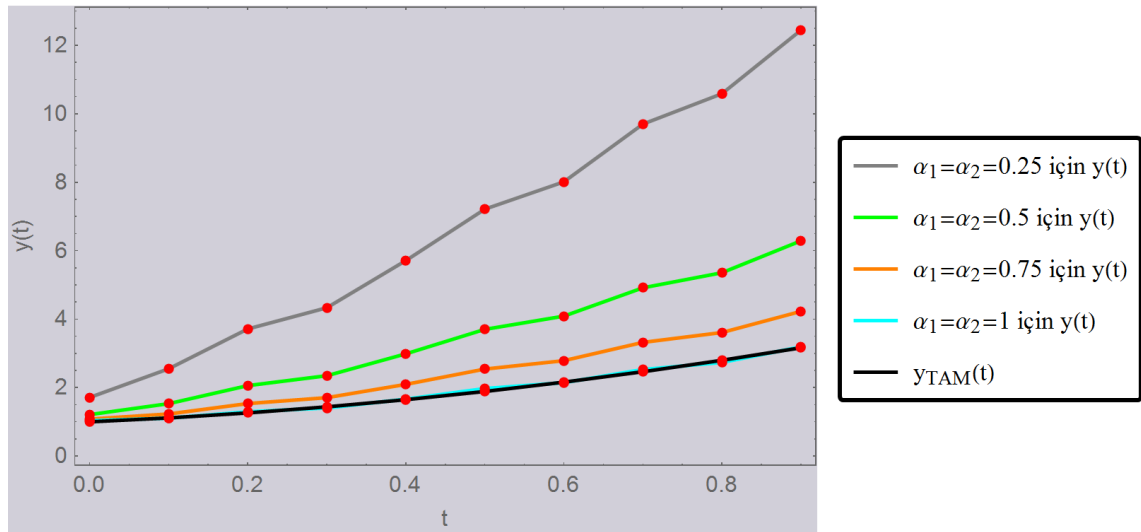
$m = 16$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.25$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	1.21283	1.03417	1.00722	1.00189	1.	0.00189493
$t=0.1$	2.02618	1.27681	1.07351	1.01986	1.01535	0.00450322
$t=0.2$	3.36464	1.71984	1.26749	1.09878	1.06301	0.0357672
$t=0.3$	3.99575	2.10036	1.45287	1.18305	1.14578	0.0372791
$t=0.4$	5.73231	2.81834	1.82487	1.37713	1.26705	0.110085
$t=0.5$	7.80538	3.69671	2.30791	1.65056	1.43089	0.219668
$t=0.6$	9.63563	4.40037	2.69947	1.87694	1.64208	0.234859
$t=0.7$	12.176	5.58007	3.39158	2.30521	1.90621	0.398993
$t=0.8$	14.057	6.50055	3.93532	2.64542	2.22976	0.415659
$t=0.9$	17.2657	8.01805	4.86936	3.26129	2.62021	0.641082



Şekil 4.23. Test problemi 3 ve $m = 16$ için $x(t)$ 'nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.24. Test problemi 3 ve $m = 16$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

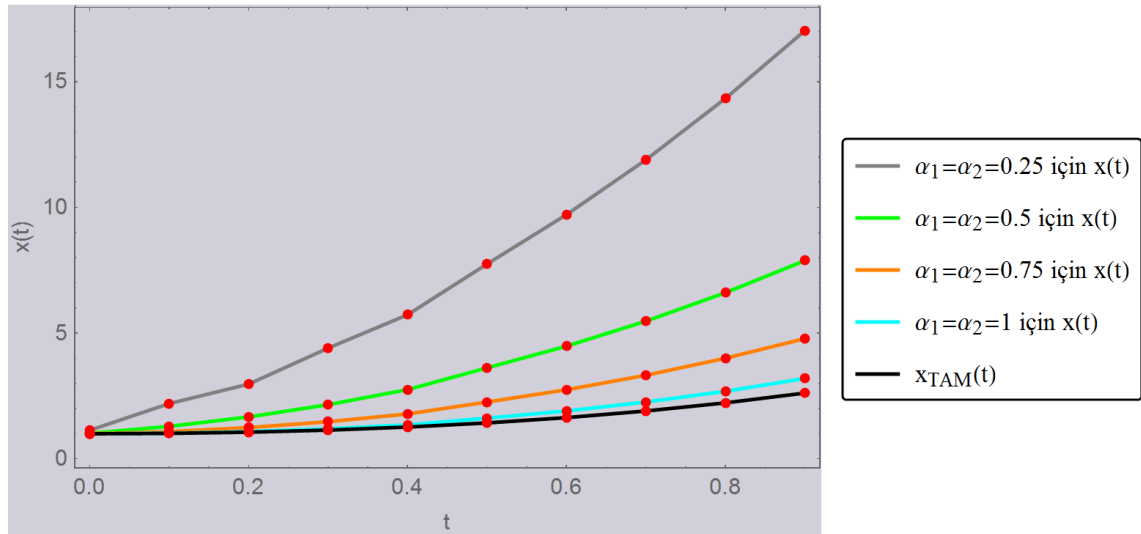
$m = 16$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.25$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$		
t	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y_{TAM}(t)$	$y_{HATA}(t)$
$t=0$	1.71385	1.21154	1.0809	1.03424	1.	0.034242
$t=0.1$	2.55214	1.53201	1.23097	1.1087	1.11515	0.00645537
$t=0.2$	3.71466	2.05834	1.53474	1.29387	1.26114	0.0327339
$t=0.3$	4.33422	2.34854	1.70706	1.40485	1.43851	0.0336601
$t=0.4$	5.7121	2.98759	2.09545	1.66399	1.64759	0.0164004
$t=0.5$	7.21545	3.70331	2.54287	1.97277	1.88843	0.0843345
$t=0.6$	8.01446	4.08959	2.78853	2.14569	2.1609	0.0152178
$t=0.7$	9.70208	4.91722	3.32281	2.5282	2.46471	0.0634978
$t=0.8$	10.5893	5.35774	3.61102	2.7376	2.79943	0.0618263
$t=0.9$	12.4462	6.29019	4.22842	3.1921	3.1646	0.027506



Şekil 4.24. Test problemi 3 ve $m = 16$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.25. Test problemi 3 ve $m = 32$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

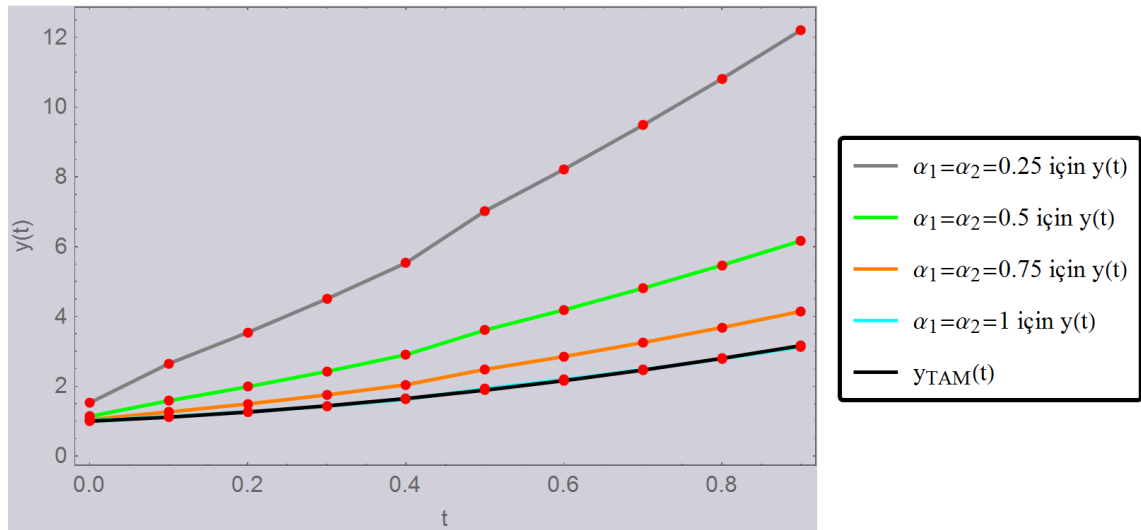
$m = 32$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.25$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	1.13684	1.016	1.00243	1.00048	1.	0.00048083
$t=0.1$	2.19953	1.29448	1.08492	1.02389	1.01535	0.00853149
$t=0.2$	2.97356	1.66864	1.24609	1.08786	1.06301	0.0248491
$t=0.3$	4.4068	2.15698	1.47998	1.19676	1.14578	0.05098
$t=0.4$	5.73368	2.75666	1.78853	1.35529	1.26705	0.0882424
$t=0.5$	7.752	3.6215	2.26284	1.62182	1.43089	0.190924
$t=0.6$	9.71659	4.48525	2.75036	1.9082	1.64208	0.266121
$t=0.7$	11.8992	5.47947	3.32861	2.26216	1.90621	0.355949
$t=0.8$	14.34	6.61126	4.00435	2.69048	2.22976	0.460721
$t=0.9$	17.0349	7.88868	4.78512	3.20062	2.62021	0.580409



Şekil 4.25. Test problemi 3 ve $m = 32$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.26. Test problemi 3 ve $m = 32$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

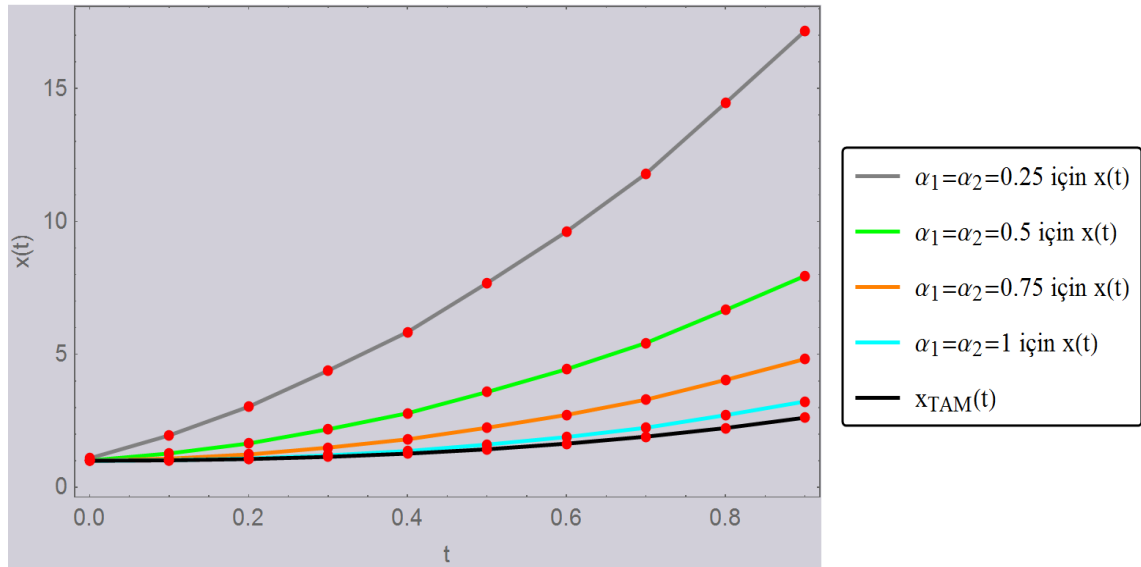
$m = 32$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.25$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$		
t	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y_{TAM}(t)$	$y_{HATA}(t)$
$t=0$	1.52668	1.13727	1.04532	1.01637	1.	0.0163651
$t=0.1$	2.64709	1.58464	1.26464	1.12794	1.11515	0.0127819
$t=0.2$	3.54191	1.98629	1.4929	1.26666	1.26114	0.00552748
$t=0.3$	4.50375	2.42351	1.75139	1.433	1.43851	0.00551227
$t=0.4$	5.53329	2.90262	2.04261	1.6272	1.64759	0.0203906
$t=0.5$	7.01954	3.6087	2.48257	1.92956	1.88843	0.041128
$t=0.6$	8.21732	4.18804	2.85094	2.18875	2.1609	0.0278493
$t=0.7$	9.48315	4.80874	3.25157	2.47546	2.46471	0.0107523
$t=0.8$	10.8139	5.46941	3.68375	2.78933	2.79943	0.0100948
$t=0.9$	12.2065	6.16869	4.1467	3.12999	3.1646	0.0346092



Şekil 4.26. Test problemi 3 ve $m = 32$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.27. Test problemi 3 ve $m = 64$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

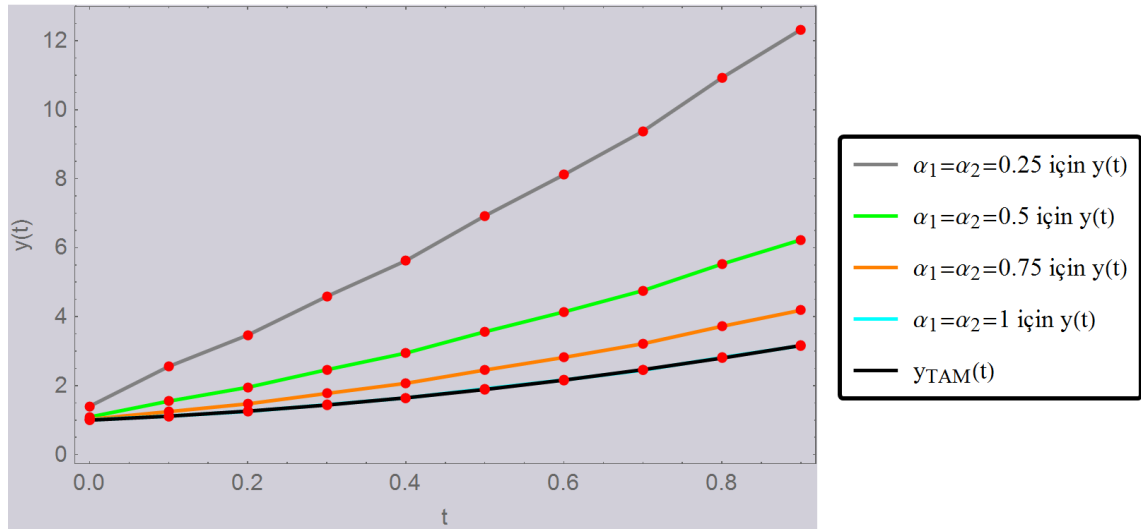
$m = 64$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.25$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$		
t	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$	$x_{TAM}(t)$	$x_{HATA}(t)$
$t=0$	1.09101	1.00764	1.00082	1.00012	1.	0.0001211
$t=0.1$	1.95202	1.27439	1.07833	1.02123	1.01535	0.0058737
$t=0.2$	3.03111	1.64897	1.23572	1.08277	1.06301	0.0197603
$t=0.3$	4.3903	2.18247	1.49385	1.20401	1.14578	0.058231
$t=0.4$	5.84079	2.78764	1.8061	1.36521	1.26705	0.0981623
$t=0.5$	7.68221	3.58419	2.24072	1.60798	1.43089	0.177092
$t=0.6$	9.61914	4.44192	2.72401	1.89108	1.64208	0.248997
$t=0.7$	11.7969	5.42976	3.29771	2.24141	1.90621	0.335203
$t=0.8$	14.4549	6.66727	4.03953	2.71388	2.22976	0.484122
$t=0.9$	17.1636	7.95195	4.82559	3.22818	2.62021	0.607972



Şekil 4.27. Test problemi 3 ve $m = 64$ için $x(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

Çizelge 4.28. Test problemi 3 ve $m = 64$ için $y(t)$ nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

$m = 64$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.25$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$		
t	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y(t)$	$y_{TAM}(t)$	$y_{HATA}(t)$
$t=0$	1.40346	1.09202	1.02608	1.008	1.	0.00799656
$t=0.1$	2.5564	1.55086	1.24654	1.1173	1.11515	0.00214525
$t=0.2$	3.4657	1.95138	1.47258	1.25371	1.26114	0.00742641
$t=0.3$	4.58626	2.46158	1.77418	1.44773	1.43851	0.00921944
$t=0.4$	5.62208	2.94429	2.06814	1.64422	1.64759	0.00337005
$t=0.5$	6.92258	3.56212	2.45309	1.90874	1.88843	0.0203079
$t=0.6$	8.11453	4.13794	2.81872	2.16558	2.1609	0.00467888
$t=0.7$	9.37479	4.75523	3.21668	2.44996	2.46471	0.0147468
$t=0.8$	10.9272	5.52597	3.72083	2.81608	2.79943	0.0166496
$t=0.9$	12.3248	6.22839	4.18628	3.15889	3.1646	0.0057093



Şekil 4.28. Test problemi 3 ve $m = 64$ için $y(t)$ 'nin tam ve yaklaşık çözümlerinin grafiği

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada sunulan Haar Dalgacık fonksiyonları ile Haar serisi dönüşümünün, kesirli mertebeli diferansiyel-cebirsal denklemlerin nümerik çözümleri için etkili bir metot olduğu görülmüştür. Bu tezde tam çözümlerle Haar seri dönüşümü ile elde edilen yaklaşık çözümler çizelgeler ve grafikler üzerinde karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda tam çözümler ile Haar seri dönüşüm yöntemi ile elde edilen çözümlerin uyumlu olduğu teyit edilmiştir. Bu metodun yazılım kodları Wolfram Mathematica 10.0 programı üzerinde hazırlanmıştır. Mevcut bilgisayar kapasitesine bağlı olarak, oluşturduğumuz nihai cebirsal denklem en yüksek $m = 128$ için çözülebilmektedir. Bununla beraber Haar dalgacık fonksiyonları ile yapılan dönüşüm ve çözümde m nin daha büyük değerleri için analitik (tam) çözüme daha da yakın değerler elde edileceği test problemlerinde görülmüştür.

KAYNAKLAR

- Anastasio, T.J., 1994. The fractional-order dynamics of brainstem vestibulo-oculomotor neurons, *Biological Cybernetics*, 72:69-79.
- Arfken G.B., Weber H.J., 1995. *Mathematical Methods for Physicist*, Fourth Edition, Academic Press.
- Ascher, U.M. and Spiter, R.J., 1994. Collocation software for boundary value differential-algebraic equations, *SIAM, J. Sci. Comput.*, 15:938–952.
- Ayaz, F., 2004. Applications of differential transform method to differential-algebraic equations, *Appl. Math. Comput.*, 152:649-657.
- Bayın, S., 2004. *Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler*, Ders Kitapları A.Ş.
- Benghorbal, M.M., 2004. *Power Series Solutions of Fractional Differential Equations and Symbolic Derivatives and Integrals*, Faculty of Graduate Studies, PhD. Thesis, The University of Western Ontario, Canada.
- Blair, G. W. S., 1947. The role of psychophysics in rheology, *Journal of Colloid Sciences*, 2: 21-32.
- Brenan, K.E., Campbell, S.L. and Petzold, L.R., 1989. *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, Elsevier, New York
- Caputo, M., 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. Part II, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 13: 529–539
- Çelik, E. and Bayram, M., 2003a. Arbitrary order numerical method for solving differential-algebraic equations by Pade' series, *Appl. Math. Comput.*, 137:57–65.
- Çelik, E. and Bayram, M., 2003b. On the numerical solution of differential-algebraic equations by Pade' series, *Appl. Math. Comput.* 137:151–160.
- Çelik, E. and Bayram, M., 2004. Numerical solution of differential-algebraic equation systems and applications, *Appl. Math. Comput.*, 154:405–413.
- Çelik, E. and Yeloğlu, T., 2006. Chebyshev series approximation for solving differential-algebraic equations (DAEs). *International Journal of Computer Mathematics*, 83, 651-662.
- Diethelm, K., 2010. *The analysis of fractional differential equations*. Springer, 262p, Berlin.
- Gear, C.W. and Petzold, L.R., 1984. *ODE Methods for the Solution of Differential-Algebraic Systems*, SIAM, *J. Numerical Analysis*, 21:716–728.
- Gear, C.W., 1971. The Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations, *IEEE Trans. Circuit Theory*, TC-18, pp. 89-95.
- Gu, J. S., Jiang, W.S., 1996, The Haar wavelets operational matrix of integration, *Int. J. Syst. Sci.* 27 623-628.
- Guzel, N. and Bayram, M., 2006. On the numerical solution of differential-algebraic equations with index-3, *Appl. Math. Comput.*, 175:1320-1331.
- Hairer, E., Lubich, C.H. and Roche, M., 1989. *The Numerical Solution of Differential Algebraic Systems by Runge Kutta methods*, Lecture Notes in Mathematics, 1409, Springer, Berlin.

- İbiş, B., 2011. Kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsell denklemlerin nümerik çözümleri. Doktora tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- Kilbas, A.A., Srivastava and H.M., Trujillo, J.J., 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier B.V., Amsterdam.
- Kilicman, A., Al Zhour, Z.A.A., 2007. Kronecker operational matrices for fractional calculus and some applications, Appl. Math. Comput. 187: 250–265.
- Li, X., 2003. Fractional Calculus, Fractal Geometry and Stochastic Processes, PhD Thesis, The University of Western Ontario, Canada.
- Li, Y. and Zhao, W., 2010. Haar wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations. Appl. Math. Comput. v216. 2276-2285.
- Littlewood, J. E., Paley, R. E. A. C., 1937. Theorems on Fourier Series and Power Series (II), Proc. London Math. Soc. 42 (1): 52–89.
- Müller, P. C., 2000. Descriptor Systems: Pros and Cons of System Modelling by Differential-Algebraic Equations, Mathematics Computers in Simulation. 53:273-279. 99.
- Odibat, Z. and Shawagfeh, N., 2007. Generalized Taylor's formula, Applied Mathematics and Computation, 186: 286–293.
- Oldham, K.B., Jerome, S., and Trujillo, J.J., 1974. The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, Academic Press, California.
- Petzold, L.R., 1982. Differential-algebraic equations are not ODEs, SIAM, J. Sci. Statist. Comput, 3:367–384.
- Podlubny, I., 1999. Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, California.
- Ross, B., 1977. The Development of Fractional Calculus (1695-1900), Historia Mathematica, 4: 75-89.
- Ross, B. and Miller, K.S., 1993. An introduction To Fractional Calculus And Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons Inc., Canada.
- Yığider, M., and Çelik, E., 2013. The numerical solution of partial differential-algebraic equations, Advances in Difference Equations, 2013:8
- Zurigat, M., Momani, S. and Alawneh, A., 2010. Analytical approximate solutions of systems of fractional algebraic- differential equations by homotopy analysis method. Computer & Mathematics with Applications, 59, 1227-1235.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Erzurum’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum’da tamamladı. 1998 yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde lisans öğrenimine başlayarak 2003 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik bilim dalında direkt doktora eğitimine başladı. 2005 yılında doktora eğitimine ara vererek 2009 yılında kaldığı yerden doktora eğitimine devam etti. Halen Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.