

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**KOMPLEKS DÜZLEMDE CARLESON EĞRİLERİ ÜZERİNDE TANIMLI
MORREY UZAYLARINDA MAKSİMAL OPERATÖR, KESİRLİ MAKSİMAL
OPERATÖR, POTANSİYEL OPERATÖR VE CAUCHY SİNGÜLER
İNTEGRAL OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI**

Merve Esra YILDIRIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2013**

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

25/12/2013

Merve Esra YILDIRIM

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KOMPLEKS DÜZLEMDE CARLESON EĞRİLERİ ÜZERİNDE TANIMLI MORREY UZAYLARINDA MAKSİMAL OPERATÖR, KESİRLİ MAKSİMAL OPERATÖR, POTANSİYEL OPERATÖR VE CAUCHY SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

Merve Esra YILDIRIM

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmını içermektedir. İkinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilmiş, Carleson eğrileri ve Morrey uzayları hatırlatılarak bu uzayların bazı temel özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde maksimal operatörün kompleks düzlemde Carleson eğrileri üzerinde tanımlı $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ Morrey uzaylarında sınırlılığı verilmiştir. Daha sonra, S_Γ Cauchy singüler integral operatörünün $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ Morrey uzaylarında sınırlılığı gösterilmiştir. Dördüncü bölümde kompleks düzlemde Carleson eğrileri üzerinde tanımlanan Morrey uzaylarında Riesz potansiyel operatörü ve kesirli maksimal operatörünün sınırlılığı gösterilmiştir. Beşinci bölümde tartışma ve sonuçlar verilmiştir.

Aralık 2013, 53 sayfa

Anahtar Kelimeler: Carleson eğrisi, Morrey uzayı, BMO uzayı, maksimal operatör, kesirli maksimal operatör, potansiyel operatör, Cauchy singüler integral operatörü, Sobolev-Morrey eşitsizliği.

ABSTRACT

Master Thesis

THE BOUNDEDNESS OF MAXIMAL OPERATOR, FRACTIONAL MAXIMAL OPERATOR, POTENTIAL OPERATOR AND CAUCHY SINGULAR INTEGRAL OPERATORS ON MORREY SPACES DEFINED ON CARLESON CURVES IN THE COMPLEX PLANE

Merve Esra YILDIRIM

Ankara University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

This thesis consists of five chapters. First chapter includes a brief introduction to the topic. In the second chapter, basic definitions and theorems are given. Furthermore, the definitions of Carleson curves and Morrey spaces are recalled and basic properties of these are presented in this chapter. In the third chapter, the boundedness of maximal operator in $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ Morrey spaces defined on Carleson in complex plane is given. After that, the boundedness of S_Γ Cauchy singular integral operator in $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ Morrey spaces is shown. In the fourth chapter, the boundedness of Riesz potential operator and fractional maximal operator in Morrey spaces defined on Carleson curve in complex plane are shown. The fifth chapter is devoted to discussion and conclusions.

December 2013, 53 pages

Key Words: Carleson curve, Morrey space, BMO space, maximal operator, fractional maximal operator, potential operator, Cauchy singular integral operator, Sobolev-Morrey inequality.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her konuda yardımcı ve destek olan sayın hocam Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ'ye (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), bu konuda çalışmama yardımcı olan Dr. Canay AYKOL YÜCE'ye, çalışmalarım sırasında destek ve anlayışını esirgemeyen sevgili aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Merve Esra YILDIRIM

Ankara, Aralık 2013

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
SİMGELER DİZİNİ	1
ŞEKİLLER DİZİNİ	2
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1 Temel Tanım ve Teoremler	3
2.2 Carleson Eğrileri	10
2.3 $L_{p,\lambda}$ Morrey Uzayları	18
3. CARLESON EĞRİLERİ ÜZERİNDE TANIMLI MORREY UZAYLARINDA MAKSİMAL OPERATÖRÜN ve CAUCHY SİNGÜLER OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI	26
3.1 Maksimal Fonksiyon	26
3.2 Cauchy Singüler İntegralleri	29
4. CARLESON EĞRİLERİ ÜZERİNDE POTANSİYEL OPERATÖRÜ ve KESİRLİ MAKSİMAL FONKSİYONU İÇİN SOBOLEV-MORREY EŞİTSİZLİKLERİ	37
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	48
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	53

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	n -boyutlu Öklid uzayı
L_p	L_p Uzayı
$Supp f$	f fonksiyonunun desteği
$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$	lokal integrallenebilen fonksiyonların uzayı
χ_A	A nın karakteristik fonksiyonu
$B(x, r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
Δ	Laplace operatörü
$\hat{f}$	f fonksiyonunun fourier dönüşümü
$L_{p,\lambda}$	Morrey uzayı
Γ	Carleson eğrisi
ν	Yay uzunluk ölçüsü
ω	Ağırlık fonksiyonu
M	Maksimal operatör
M^α	Kesirli maksimal operatör
BMO	Ortalama sınırlı salımlı fonksiyonlar uzayı
$M^\#$	Keskin (sharp) maksimal fonksiyon
$\tilde{I}^\alpha$	Modifiye edilmiş Riesz potansiyel operatörü

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 γ nın teğet vektörü.....	10
Şekil 2.2 $\ell(\gamma, P)$ yay uzunluğu.....	11
Şekil 2.3 σ_γ fonksiyonu.....	13
Şekil 2.4 re^{ir} Arşimed spirali.....	15
Şekil 2.5 $x \sin \frac{1}{x}$ in grafiği.....	17
Şekil 2.6 $x^2 \sin \left(\frac{1}{x}\right)$ in grafiği.....	17

1. GİRİŞ

$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}} = \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

olacak biçimdeki tüm fonksiyonların kümesidir, burada $0 \leq \lambda \leq n$, $p \geq 1$, $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $B(x, r)$, $\mathbb{R}^n$ de x merkezli r yarıçaplı yuvarı göstermektedir. Bu uzaylar eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarının çalışmalarında Morrey (1938) tarafından ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzayları varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerde oldukça kullanışlıdır. Ayrıca Navier-Stokes ve Schrödinger denklemleri, süreksiz katsayılı eliptik problemler potansiyel teorisinde önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır.

F. Chiarenza ve M. Frasca (1987) $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayında

$$Mf(x) = \sup_{t>0} |B(x, t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |f(y)| dy$$

maksimal operatörünün sınırlılığını çalışmıştır, burada $|B(x, t)|$, $\mathbb{R}^n$ de t yarıçaplı x merkezli $B(x, t)$ yuvarının Lebesgue ölçüsünü göstermektedir.

Öklid uzayları üzerinde tanımlanan $L_{p,\lambda}$ Morrey uzaylarında

$$I^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y) dy}{|x - y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n$$

Riesz potansiyellerinin sınırlılığı Peetre (1969) ve Adams (1975) tarafından çalışılmıştır.

Lokal Morrey-tipi uzaylarda maksimal operatörler ve Riesz potansiyellerinin sınırlılığı için gerek ve yeter şartlar Burenkov vd. (2004, 2007)' de verilmiştir.

Γ lokal düzeltilebilir bir Jordan eğrisi olmak üzere her $t \in \Gamma$ ve $r > 0$ için

$$\nu\Gamma(t, r) \leq c_0 r$$

oluyorsa bu durumda Γ eğrisine bir Carleson eğrisi (regüler eğri) denir, burada $\Gamma(t, r)$

$$\Gamma(t, r) := \Gamma \cap B(t, r), \quad t \in \Gamma, \quad r > 0,$$

şeklinde tanımlanır.

Kazimetrik ölçü uzayları üzerinde tanımlanan Morrey uzaylarında, özellikle Carleson eğrileri üzerinde tanımlanan $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ Morrey uzaylarında

$$Mf(t) = \sup_{t>0} (\nu\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| d\nu(\tau)$$

M maksimal operatörünün sınırlılığını N. Samko (2008) çalışmıştır.

Γ bir Carleson eğrisi üzerinde tanımlanan $L_{p,\lambda}$ Morrey uzaylarında

$$S_\Gamma f(t) = \frac{1}{\pi} \int_\Gamma \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t}$$

Cauchy singüler integral operatörünün sınırlılığı Kokilashvili ve Meskhi (2008), Samko (2008) tarafından çalışılmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir, ayrıca Carleson eğrileri ve Morrey uzayları hatırlatılarak bazı temel özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde ilk önce, maksimal fonksiyon tanımlanıp, ardından bu operatörün kompleks düzlemde Carleson eğrileri üzerinde tanımlı $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ Morrey uzaylarında sınırlılığı verilmiştir. Daha sonra, S_Γ Cauchy singüler integral operatörlerinin $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ Morrey uzaylarında varlık ve sınırlılığı araştırılmıştır. Dördüncü bölümde kompleks düzlemde Carleson eğrileri üzerinde tanımlanan Morrey uzaylarındaki Riesz potansiyel operatörleri ve kesirli maksimal operatörlerin sınırlılığı gösterilmiştir. Ardından, Carleson eğrileri üzerindeki kesirli maksimal M^α operatörünün sınırlılığı üzerine bir sonuç verilmiştir. Ayrıca, $1 \leq p = (1 - \lambda)/\alpha$ limit durumunda, eğer Γ bir sonsuz Carleson eğrisi ise bu durumda modifiye edilmiş $\tilde{I}^\alpha$ potansiyel operatörünün $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ den $BMO(\Gamma)$ ya sınırlı ve eğer Γ , bir sonlu Carleson eğrisi ise I^α operatörünün $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ den $BMO(\Gamma)$ ya sınırlı olduğu gösterilmiştir. Beşinci bölümde, tez çalışmasından elde edilen sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1 X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

$$(N1) \|x\| \geq 0 \quad \text{ve} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$(N2) \|ax\| = |a|\|x\|,$$

$$(N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde norm denir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu bir vektör uzayı denir. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 X bir küme olsun. Eğer X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir:

$$(i) X \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \text{ Her } E \in \mathcal{A} \text{ için } E^c = X \setminus E \in \mathcal{A}$$

$$(iii) k = 1, 2, \dots, n \text{ için } E_k \in \mathcal{A} \text{ ise } \bigcup_{k=1}^n E_k \in \mathcal{A}$$

Eğer (iii) şartı yerine

$$”\text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}”$$

şartı konulursa $\mathcal{A}$ cebirine bir σ -ceberi adı verilir.

Tanım 2.1.3 X bir küme ve $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ -ceberi olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{A})$ ikilisine ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de $\mathcal{A}$ -ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme adı verilir.

Tanım 2.1.4 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}([\alpha, +\infty[) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

oluyorsa f ye ölçülebilir fonksiyon denir. X üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $M(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5 (Ölçü ve Sonlu Ölçü) $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona ölçü denir. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye sonlu ölçü adı verilir.

Tanım 2.1.6 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L_p = \left\{ f \in M(X, \Sigma) : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

kümesine p -inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. L_p uzayında bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır.

$$\text{ess sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf \{ \lambda : \mu(x \in X : |f(x)| > \lambda) = 0 \}$$

dir.

Tanım 2.1.7 (X, τ) bir topolojik uzay ve $M \subset X$ olsun. I bir indis kümesi olmak üzere, eğer $M \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ ise $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesine M kümesinin bir örtüsü denir. Eğer A_i ler açık ise $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesine M kümesinin bir açık örtüsü denir. $J \subset I$ olmak üzere $M \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ ise $\{A_i\}_{i \in J}$ ailesine bir alt örtü denir. Eğer J sonlu ise $\{A_i\}_{i \in J}$ ailesine bir sonlu alt örtü denir.

Tanım 2.1.8 (X, τ) bir topolojik uzay ve $M \subset X$ olsun. Eğer M nin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa M ye X in kompakt alt kümesi denir. Eğer X kompakt ise X e kompakt uzay denir.

(X, d) metrik uzayında

$$M \subset X \text{ kompakttır} \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset M \text{ için } \exists (x_{n_k}) \subset (x_n) \text{ var } \ni x_{n_k} \rightarrow x \in M$$

dir. Eğer bir X metrik uzayında $M \subset X$ kompakt ise M kapalı ve sınırlıdır, fakat tersi doğru değildir.

Tanım 2.1.9 $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun desteği $f(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının kapanışdır ve

$$Supp f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$$

ile gösterilir. Eğer f fonksiyonunun desteği kompakt bir küme ise bu durumda f kompakt destekli fonksiyon adını alır.

Tanım 2.1.10 f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her kompakt K kümesi üzerinde

$$\int_K |f| d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna lokal (yerel) integrallenebilirdir denir ve $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

$$L_1^{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \int_K |f| d\mu < \infty; K \subset \mathbb{R}^n, K \text{ kompakt} \right\}$$

ve $1 \leq p \leq \infty$ için

$$L_p^{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \left(\int_K |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty; K \subset \mathbb{R}^n, K \text{ kompakt} \right\}$$

ile gösterilir.

Teorem 2.1.1 Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise $L_p(\mathbb{R}^n) \subset L_p^{loc}(\mathbb{R}^n) \subset L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ dir.

Teorem 2.1.2 (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L_p, g \in L_q$ olsun. Bu durumda $fg \in L_1$ olur ve

$$\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir (Sadosky 1979).

Tanım 2.1.11 $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlanan χ_A fonksiyonu A nın karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.12 $B(t, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - t| < r\}$ t merkezli r yarıçaplı açık yuvardır.

Tanım 2.1.13 $a < b$ olmak üzere

$C[a, b]$, $[a, b]$ aralığında reel değerli fonksiyonlar

$C^1(a, b)$, (a, b) aralığında reel değerli sürekli türevlenebilir fonksiyonlar

$C^1[a, b]$, $C[a, b] \cap C^1(a, b)$ içinde a ve b de türevleri tek taraflı sonlu limitlere sahip fonksiyonlar olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.14 Eğer $1 < p < \infty$ olmak üzere herhangi bir B yuvarı için

$$\begin{aligned} [w]_{A_p} &= \sup_B [w]_{A_p(B)} \\ &= \sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} < \infty \end{aligned}$$

ise w ağırlık fonksiyonu A_p Muckenhoupt sınıfındandır denir, burada supremum bütün B yuvarları üzerinden alınmaktadır ve $1/p + 1/p' = 1$ biçimindedir.

$p = 1$ iken, hemen her x için

$$Mw(x) \leq Cw(x) \quad (2.1)$$

olacak şekilde $C > 1$ varsa $w \in A_1$ dir ve (2.1) eşitsizliğini sağlayan C nin infimumu $[w]_{A_1}$ ile gösterilir.

p ve p' üsleri ile Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$1 = \frac{1}{|B|} \int_B dx = \frac{1}{|B|} \int_B w(x)^{1/p} w(x)^{-1/p} dx \leq [w]_{A_p}^{1/p}$$

elde edilir.

(2.1) eşitsizliğinde $p \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse

$$\frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx \leq C \exp \left(\frac{1}{|B|} \int_B \log w(x) dx \right)$$

elde edilir, bu durumda eşitsizlik sağlandığında $w \in A_\infty$ denir. Ayrıca, $p = \infty$ iken $A_\infty = \bigcup_{1 \leq p < \infty} A_p$ ile tanımlanır. A_∞ için verilen bu iki tanım eşdeğerdir (Garcia-Cuerva ve Rubio de Francia 1985).

Teorem 2.1.3 (Lebesgue Diferensiyelleme Teoremi) $f \in L_1^{loc}(R^n)$ olsun. Bu durumda $h.h.x \in R^n$ için

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy = f(x)$$

olur (Grafakos 2004).

Tanım 2.1.15 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. M maksimal operatörü

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

biçiminde tanımlanır.

Aşağıdaki teorem maksimal operatörün Lebesgue uzaylarındaki sınırlılığını karakterize etmektedir.

Teorem 2.1.4 $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan f fonksiyonu için

(i) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise Mf maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.

(ii) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise $Mf \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|Mf\|_{L_p} \leq A_p \|f\|_{L_p}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

(iii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $\forall \alpha > 0$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}| \leq \frac{A}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$$

sağlanır, burada A sadece boyuta bağlı bir sabittir (Stein 1970).

Riesz Potansiyeli

Tanım 2.1.16 $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ix \cdot y} dy$$

ile tanımlanan $\widehat{f}$ fonksiyonuna f nin Fourier dönüşümü denir. Bu dönüşüm

$$\widehat{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ix \cdot y} dy$$

veya eşdeğer olarak

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i x \cdot y} dy$$

almabilir. Eğer $n = 1$ ve $f \in L_1(\mathbb{R})$ ise bu durumda

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy$$

olur.

Tanım 2.1.17 f yeterince düzgün bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun Laplasyeni;

$$\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

biçiminde tanımlanır.

$f \in S$ olmak üzere

$$F^{-1}(\hat{f}(x)) = f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(xy)} \hat{f}(y) dy$$

dir. $e^{i(xy)} = e^{i(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} -(\Delta) f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta e^{i(xy)}) \hat{f}(y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\frac{\partial}{\partial x_1^2} e^{ix_1 y_1} - \frac{\partial}{\partial x_2^2} e^{ix_2 y_2} - \dots + \frac{\partial}{\partial x_n^2} e^{ix_n y_n} \right) \hat{f}(y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 e^{i(xy)} \hat{f}(y) dy \end{aligned}$$

$$I^\alpha f = F^{-1} |y|^{-\alpha} F f, f \in S \quad (2.2)$$

olduğundan

$$\Rightarrow (-\Delta) f = F^{-1} |y|^2 F f$$

yazılabilir. Bilindiği gibi Laplace operatörü eliptik operatördür. P. Seeley göstermiştir ki eğer bir eliptik L operatörü için

$$L f = F^{-1} \phi(x) F f$$

formülü mevcut ise o zaman onun istenilen kompleks kuvveti için

$$L^z f = F^{-1} \phi^z(x) F f$$

geçerlidir.

Dolayısıyla bu teoreme göre Laplace operatörü için

$$(-\Delta)^z f = F^{-1} |y|^{2z} F f$$

yazılabilir. Buradan $z = -\frac{\alpha}{2}$ için

$$(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f = F^{-1} |y|^{-\alpha} F f \quad (2.3)$$

olduğu görülür. Yani (2.2) ve (2.3) den görülür ki Riesz potansiyelinin ve $-\Delta$ nın negatif kesir kuvvetinin genelleşmiş anlamda Fourier dönüşümleri aynıdır. Bu durumda

$$I^\alpha = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} \quad , \quad 0 < \alpha < n \quad (2.4)$$

ifadesi yazılabilir. (2.3) ün yardımıyla Laplace operatörünün negatif kesir kuvvetleri tanımlanabilir, burada $0 < \alpha < n$ ve

$$c(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

olmak üzere

$$(I^\alpha f)(x) = \frac{1}{c(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

I^α operatörüne Riesz potansiyeli denir.

$I^\alpha f$ Riesz potansiyelinin L_p uzaylarındaki sınırlılığı aşağıdaki teoremle verilir:

Teorem 2.1.5 (Hardy-Littlewood-Sobolev Teoremi)

$0 < \alpha < n$, $1 \leq p < q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ olsun.

- (i) Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ise $I^\alpha f$ Riesz potansiyeli hemen her x için mutlak yakınsaktır.
- (ii) Eğer $p > 1$ ise bu durumda

$$\|I^\alpha f\|_{L_q} \leq A_{p,q} \|f\|_{L_p}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

(iii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |I^\alpha f(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{A\|f\|_{L_1}}{\lambda} \right)^q$$

dır (Stein 1970).

2.2 Carleson Eğrileri

Tanım 2.2.1 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ şeklinde tanımlanan sürekli bir fonksiyona kompleks düzlemde bir eğri (veya yay) denir.

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eğrisinin parametrik denklemi $\gamma = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$ ile verilir.

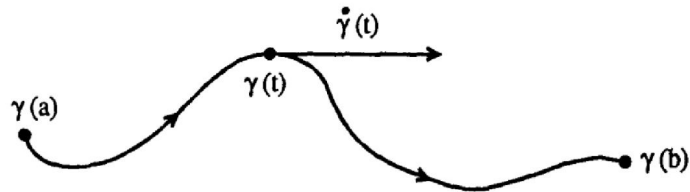
Tanım 2.2.2 $\mathbb{C}$ nin bir Γ alt kümesi, bağlantılı ve uç uca birleştirilmiş sonlu sayıda yayların birleşimi olarak temsil ediliyorsa buna birleşik yay denir.

Tanım 2.2.3 $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ nin $\forall t \in [a, b]$ için $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ türevi varsa γ eğrisine diferensiyellenebilir eğri denir.

Tanım 2.2.4 Eğer $t \in [a, b]$ için $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ile verilen eğrinin $\forall t \in [a, b]$ için $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ türevi mevcut, sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. Burada $x'(a)$, $x'(b)$, $y'(a)$, $y'(b)$

$$x'(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{x(t) - x(a)}{t - a}$$

tek taraflı türev yaklaşımıdır. $\gamma'(t) \neq 0$ olan bir t noktası için, bu türevin bir geometrik yorumu vardır, yani; $\gamma(t)$ noktasında γ nın yönünde bir teğet vektörü vardır ve şekil 2.1 de gösterilmiştir.



Şekil 2.1 γ nın teğet vektörü

Tanım 2.2.5 Bir $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eğrisinin uzunluğu

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \sup \{ \ell(\gamma, P) : P \text{ } [a, b] \text{ nin bir parçalanışı} \} \\ &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|, P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\} \end{aligned}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.2.6 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ve $P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $[a, b]$ aralığının tüm parçalanışlarını göstermek üzere

$$\ell(\gamma, P) = \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| < \infty$$

ise γ eğrisine düzeltilebilir eğri denir.

Tanım 2.2.7 $\mathbb{C}$ nin bir Γ altkütmesi, kompleks düzlemin $T := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ birim çemberine homeomorf ise bu durumda Γ ya Jardon eğrisi denir.

Tanım 2.2.8 Γ eğrisi $l = \nu\Gamma$ olmak üzere $\nu(t) = s$ yay uzunluk ölçüsü ile kompleks düzlemde $\Gamma = \{t \in \mathbb{C} : t = t(s), 0 \leq s \leq l \leq \infty\}$ düzeltilebilir Jordan eğrisi olsun.

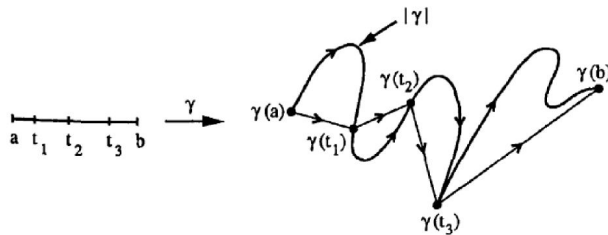
$B(t, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - t| < r\}$ olmak üzere

$$\Gamma(t, r) := \Gamma \cap B(t, r), t \in \Gamma, r > 0,$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.2.9 Γ lokal düzeltilebilir bir birleşik yay olsun ve Γ nın Lebesgue uzunluk ölçüsü ile donatılmış olduğunu kabul edelim. Ölçülebilir bir $\gamma \subset \Gamma$ alt kümesinin ölçüsü $|\gamma|$ ile tanımlanacaktır. Özel olarak, $|\Gamma(t, \varepsilon)|$, $\Gamma(t, \varepsilon)$ u oluşturan sayılabilir çokluktaki yayların uzunlukları toplamıdır.

Geometrik olarak $\ell(\gamma, P)$ ifade edilemez, fakat γ nın "içine çizilmiş" bir belirli poligonal yolun uzunluğudur. $n = 4$ için bir parçalanma durumu şekil 2.2 de gösterilmiştir.



Şekil 2.2 $\ell(\gamma, P)$ yay uzunluğu

Uyarı 2.2.1 Düzeltilebilir eğriler için aşağıdaki özellikler sağlanır.

- 1) Eğer γ bir düzeltilebilir eğri ise bu durumda onun tersi olan $-\gamma$ ile γ nın uzunluğu aynıdır. Yani $\ell(\gamma) = \ell(-\gamma)$ dir.
- 2) Eğer γ eğrisi $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ şeklinde yazılabiliyorsa

$$\gamma \text{ düzeltilebilirdir} \Leftrightarrow \text{her } 1 \leq k \leq n \text{ için } \gamma_k \text{ lar düzeltilebilirdir}$$
$$\text{ve } \ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) + \cdots + \ell(\gamma_n) \text{ dir}$$

- 3)Eğer β , parametre değişimi ile γ dan elde edilebiliyor ise bu durumda bu eğrilerin biri düzeltilebilir olduğunda diğeri de düzeltilebilirdir ve $\ell(\gamma) = \ell(\beta)$ dir.

Tanım 2.2.10 Düzgün bir $\Gamma : \gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$ eğrisinin uzunluğu

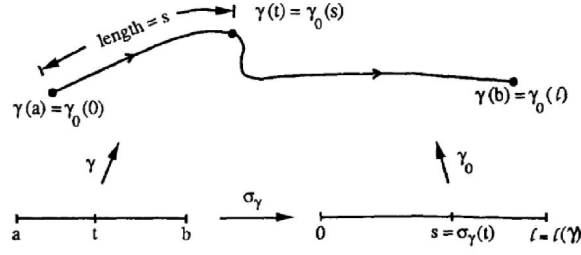
$$\nu\Gamma = \ell(\gamma) = \int_{\gamma} |dz| = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

ile verilir.

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ bir düzeltilebilir eğrisi ile onun uzunluk fonksiyonunu eşlemek mümkündür.

$\sigma_{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uzunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır: $\sigma_{\gamma}(a) = 0$ ve $a < t \leq b$ için $\sigma_{\gamma}(t)$, γ yı $[a, t]$ aralığına kısıtlayarak elde edilen eğrinin uzunluğudur. σ_{γ} fonksiyonu $[0, \ell(\gamma)]$ aralığında azalmayan ve sürekli bir fonksiyondur. Şimdi $s = \sigma_{\gamma}(t)$ olduğunda $\gamma_0(s) = \gamma(t)$ ı sağlayan bir $\gamma_0 : [0, \ell(\gamma)] \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunu tanımlayalım. γ_0 m iyi tanımlı ve sürekli olduğu açıktır. $\ell(\gamma) > 0$ olduğunu kabul edersek, böylece γ_0 bir eğridir. γ , $h = \sigma_{\gamma}$ parametre değişimi ile γ_0 dan elde edileceği açıktır. γ_0 m düzeltilebilir ve $\ell(\gamma_0) = \ell(\gamma)$ olduğu yukarıdaki uyarıdan görülebilir. İlave olarak γ_0 m σ_{γ_0} uzunluk fonksiyonu $0 \leq s \leq \ell(\gamma)$ için $\sigma_{\gamma_0}(s) = s$ formülüne de sahiptir. Geometrik olarak σ_{γ} , $\gamma_0(s) = \gamma(a)$ dan başlayan ve daima γ ile özelleştirilen "yönler" e dikkat ederek γ eğrisi boyunca bir s uzunluğunda hareket

ederek varılan noktadır ve bu şekil 2.3 de gösterilmiştir.



Şekil 2.3 σ_γ fonksiyonu

γ_0 ın bu tarifi, γ ın yay uzunluğu parametrizasyonudur.

Örnek olarak, eğer $z_1 \neq z_2$ ile $\gamma = [z_1, z_2]$ doğru parçası ise γ_0

$$0 \leq s \leq |z_2 - z_1| \text{ için } \gamma_0(s) = z_1 + s[(z_2 - z_1) / |z_2 - z_1|]$$

ile verilir.

Uyarı 2.2.2 Bir Γ birleşik yayı kompleks düzlemin bir alt kümesinde sınırlı ise sınırlıdır denir. Yani $\Gamma \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ olacak şekilde $R > 0$ varsa Γ sınırlıdır denir. Aksi taktirde Γ sınırlı değildir denir. $[0, 1]$ 'e homeomorfik yayların veya Jardon eğrilerinin daima sınırlı olduğu açıktır. Ayrıca;

$[0, \infty)$ veya $(-\infty, +\infty)$ a homeomorfik lokal düzeltilebilir bir yay sınırlıdır $\Leftrightarrow$ Bu yay düzeltilebilirdir.

Uyarı 2.2.3 Aşağıdaki eşitlik

$$\nu\Gamma(t, r) = |\Gamma(t, r)|$$

her $t \in \Gamma$ ve $r > 0$ için sağlanır (V. Kokilashvili, V. Paataashvili, and S. Samko, 2006).

Tanım 2.2.11 Γ lokal düzeltilebilir bir Jordan eğrisi olsun. Eğer her $t \in \Gamma$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\nu\Gamma(t, \varepsilon) \leq C_\Gamma \varepsilon \text{ olacak şekilde } C_\Gamma \quad (2.5)$$

sabiti varsa bu durumda Γ eğrisine bir Carleson eğrisi (regüler eğri) denir. Burada $C_\Gamma > 0$, r ve ε dan bağımsız Carleson sabitidir. (2.5) koşulu genellikle Carleson koşulu olarak ifade edilir.

Lemma 2.2.1 Γ lokal düzeltilebilir birleşik bir yay olsun ve $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ sonlu sayıda yayların $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_N$ olacak şekilde birleşimi olsun.

$$\Gamma_j(t, \varepsilon) \subset \Gamma(t, \varepsilon) \subset \Gamma_1(t, \varepsilon) \cup \dots \cup \Gamma_N(t, \varepsilon)$$

olduğundan ve

$$|\Gamma_j(t, \varepsilon)| \leq |\Gamma(t, \varepsilon)| \leq |\Gamma_1(t, \varepsilon)| + \dots + |\Gamma_N(t, \varepsilon)|$$

ifadesinden

$$\Gamma \text{ bir Carleson eğrisidir} \Leftrightarrow \text{Herbir } \Gamma_j \text{ Carleson eğrisidir.}$$

elde edilir.

Uyarı 2.2.4 i) Γ sınırlı eğri ise genellikle (2.5) koşulu göz önüne alınır. Bu durumda Γ sınırlı ise (2.5) koşulu

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \sup_{t \in \Gamma} \sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \frac{|\Gamma(t, \varepsilon)|}{\varepsilon} < \infty \quad (2.6)$$

koşuluna denktir. Aslında (2.6) nin (2.5) den elde edildiği açıktır. Tersine; $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ ise

$$\frac{|\Gamma(t, \varepsilon)|}{\varepsilon} \leq \frac{|\Gamma(t, \varepsilon)|}{\varepsilon_0} \leq \frac{|\Gamma|}{\varepsilon_0}$$

ifadesi (2.6) koşuluyla birlikte (2.5)' i verir.

ii) Γ sınırlı olmayan bir eğri ise (2.5) ile (2.6) denk değildir. Bu " lokal incelik" nin inşası ile görülebilir ki, Γ yayının Γ_n parçaları kenar uzunlukları $2n$ olan bir kareler dizisinin içinde n^2 ile karşılaştırılabilir.

$$n = 1, 2, 3, \dots \text{ için } x_{n,k} = n^2 - n + k ; (k = 0, 1, 2, \dots, 2n) \text{ için } y_{n,k} = x_{n,k} + 2ni$$

olsun. Böylece

$$\Gamma_n := \left\{ \bigcup_{k=1,3,\dots,2n-1} [x_{n,k}, y_{n,k}] \right\} \cup \left\{ \bigcup_{k=1,3,\dots,2n-1} [x_{n,k}, y_{n,k+1}] \right\} \cup \left\{ \bigcup_{k=1,3,\dots,2n-1} [y_{n,k}, y_{n,k+1}] \right\}$$

ile $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ tanımlanır. Bir resmin çiziminden sonra her $\varepsilon > \frac{1}{2}$ için

$\frac{|\Gamma(t, \varepsilon)|}{\varepsilon} < 1 + \sqrt{2}$ olduğu kolayca görülebilir. Fakat

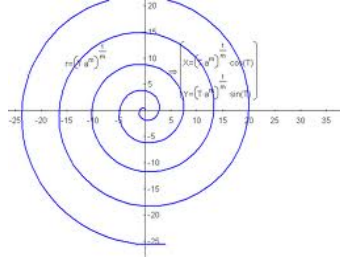
$$\frac{|\Gamma(n^2 + ni, n\sqrt{2})|}{n\sqrt{2}} \geq \frac{2n + 2n \cdot 2n}{n\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}n \rightarrow \infty$$

dır. Böylece (2.6) , $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ile sağlanır. Fakat (2.5) sağlanmaz.

Örnek 2.2.1 $\Gamma := [0, 2\pi] \cup \{re^{ir} : r \geq 2\pi\}$ olsun. Her $t \in \Gamma$ için $\varepsilon < \pi$ iken $|\Gamma(t, \varepsilon)| < 2\pi\varepsilon$ olduğu kolayca görülebilir. Diğer taraftan $R > 2\pi$ ise bu durumda ;

$$|\Gamma(0, R)| = 2\pi + \int_{2\pi}^R |d(re^{ir})| = 2\pi + \int_{2\pi}^R \sqrt{1 + r^2} dr > \int_{2\pi}^R r dr = \frac{R^2}{2} - 2\pi^2$$

olur. $R \rightarrow \infty$ iken $\frac{|\Gamma(0, R)|}{R} \rightarrow \infty$ olur.



Şekil 2.4 re^{ir} Arşimed spirali

Uyarı 2.2.5 Eğer t , Γ eğrisinin bir uç noktası ise bu durumda

$$\Gamma := \{z \in C : |z - t| = \varepsilon, \varepsilon \text{ yeterince küçük}\}$$

çemberi üzerinde bir noktaya sahip olduğu sürece $|\Gamma(t, \varepsilon)| \geq \varepsilon$ olur. t nin Γ eğrisinin veya Γ Jardon eğrisinin bir sınır noktası olmaması durumunda benzer şekilde yeterince küçük her ε için $|\Gamma(t, \varepsilon)| \geq 2\varepsilon$ olduğu görülür. Bu özellikle $C_\Gamma \geq 2$ den daima elde edilir. Ayrıca Γ sınırlı bir eğri ise;

Γ bir Carleson eğrisidir $\Leftrightarrow$ Yeterince küçük her ε ve her $t \in \Gamma$ için $\varepsilon \leq |\Gamma(t, \varepsilon)| \leq C_\Gamma \varepsilon$

dir. Sınırlı Carleson eğrileri $\Gamma(t, \varepsilon)$ nun küçük parçalarının ölçütleri $\{z \in \mathbb{C} : |z - t| < \varepsilon\}$ disklerinin çapları ile karşılaştırılabilir olan sınırlı eğriler olarak tanımlanabilir.

Sonuç 2.2.1

Lokal düzeltilebilir bir birleşik Γ eğrisi Carleson eğrisidir. $\Leftrightarrow$

$$C'_\Gamma := \sup_{z \in \mathbb{C}} \sup_{\varepsilon > 0} \frac{|\Gamma \cap B(z, \varepsilon)|}{\varepsilon} < \infty \quad (2.7)$$

dir.

İspat. Burada $B(z, \varepsilon) := \{\zeta \in C : |\zeta - z| < \varepsilon\}$ dir. (2.7) sağlanırsa (2.5) in sağlandığı açıktır. Tersine, farzedelim ki (2.5) geçer olsun. Bu durumda $C'_\Gamma \leq 2C_\Gamma$ ise (2.7).sağlanır Eğer $\Gamma \cap B(z, \varepsilon) = \emptyset$ ise bu durumda $\frac{|\Gamma \cap B(z, \varepsilon)|}{\varepsilon} = 0$ dir. Diğer taraftan eğer bir $t \in \Gamma \cap B(z, \varepsilon)$ varsa bu durumda $\frac{|\Gamma \cap B(z, \varepsilon)|}{\varepsilon} = C_\Gamma 2\varepsilon$ olduğundan $\Gamma \cap B(z, \varepsilon) \subset \Gamma \cap B(t, 2\varepsilon)$ olur. Bu durumda ispat tamamlanır. ■

Önerme 2.2.1

$$\Gamma = \{\lambda \in C : \lambda = x + if(x), a \leq x \leq b\} \quad (2.8)$$

olsun. Eğer

$$\forall x \in (a, b) \text{ için } f \in C[a, b] \cap C^1(a, b) \text{ ve } |f'(x)| \leq M$$

sağlanıyorsa bu durumda Γ bir Carleson eğrisidir.

İspat. Eğer $t = x_0 + if(x_0) \in \Gamma$ ve $\varepsilon > 0$ ise $\Gamma(t, \varepsilon)$,

$\max\{a, x_0 - \varepsilon\} \leq x \leq \min\{b, x_0 + \varepsilon\}$ u sağlayan tüm $x + iy \in \mathbb{C}$ in tüm şeritleri tarafından kapsanır. Sonuç olarak;

$$\begin{aligned} |\Gamma(t, \varepsilon)| &= \int_{\Gamma(t, \varepsilon)} |d\lambda| \leq \int_{\max\{a, x_0 - \varepsilon\}}^{\min\{b, x_0 + \varepsilon\}} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \\ &\leq \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \sqrt{1 + M^2} dx = 2\sqrt{1 + M^2} \varepsilon \end{aligned}$$

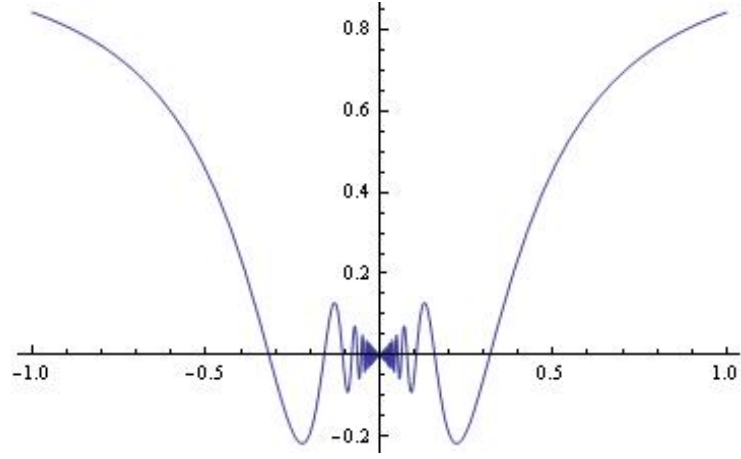
elde edilir. ■

Örnek 2.2.2 (2.8) ile tanımlanan bir Carleson eğrisi için $\alpha > 0$ alalım ve

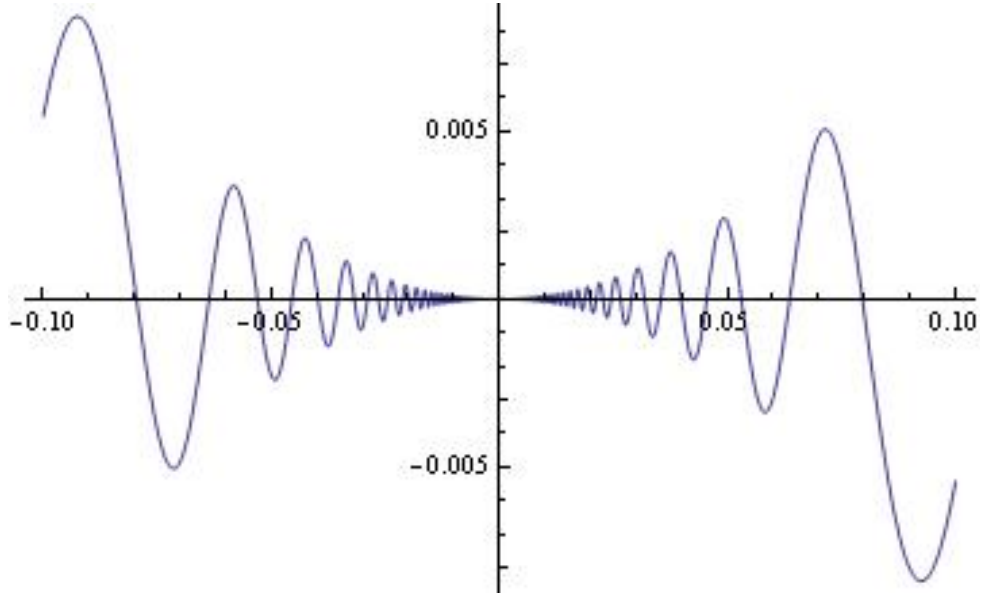
$$x \in (0, 1] \text{ için } f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x}) & , x \in (0, 1] \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. $f \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$ olduğu açıktır.

$$\Gamma, \alpha \geq 2 \text{ için Carleson eğrisidir.} \quad (2.9)$$



Şekil 2.5 $x \sin \frac{1}{x}$ in grafiği



Şekil 2.6 $x^2 \sin \frac{1}{x}$ in grafiği

Önerme 2.2.2 Her $r \in (0, d]$ için

$$|r\varphi'(r)| \leq M \text{ ve } \varphi \in C(0, d] \cap C^1(0, d)$$

ve

$$\Gamma = \{0\} \cup \{\lambda \in C : \lambda = re^{i\varphi(r)}\}$$

ise Γ bir Carleson eğrisidir.

İspat. Γ nın sınırlı bir eğri olduğu açıktır. $t \in \Gamma$ için $\Gamma(t, \varepsilon)$ parçası orjin merkezli $\max\{0, |t| - \varepsilon\}$ ve $\min\{d, |t| + \varepsilon\}$ yarıçaplı iki çemberin arasında kalan halkanın bir

alt kümesidir. Böylece;

$$\begin{aligned} |\Gamma(t, \varepsilon)| &= \int_{|\Gamma(t, \varepsilon)|} |d\lambda| \leq \int_{\max\{0, |t|-\varepsilon\}}^{\min\{d, |t|+\varepsilon\}} \sqrt{1 + r^2(\varphi'(r))^2} dr \\ &\leq \int_{|t|-\varepsilon}^{|t|+\varepsilon} \sqrt{1 + M^2} dr = 2\sqrt{1 + M^2}\varepsilon \end{aligned}$$

olur. ■

Örnek 2.2.3 Bir $\delta \in \mathbb{R}$ sabiti için $\varphi(r) = -\delta \log r$ olsun. $\delta = 0$ durumu bir doğru parçasıdır. $\delta > 0$ (veya $\delta < 0$) ise $r \rightarrow 0$ iken

$$\lambda = re^{-i\delta \log r} = r^{1-i\delta}, \quad (\log r = \ln r \text{ dir})$$

oriijinde saat yönünün tersine yukarı kaydırma (veya saat yönünde) bir "logaritmik spiral" tanımlar. $r\varphi'(r) = -\delta$ olduğundan $\varphi \in C[0, d] \cap C^1(0, d)$ ve her $r \in (0, d]$ için $|r\varphi'(r)| \leq M$ olduğundan yukarıdaki önermeden logaritmik spiralın Carleson yayı olduğunu elde ederiz.

Tanım 2.2.12 Γ Carleson eğrisi olmak üzere $1 \leq p < \infty$ için $L_p(\Gamma)$ Lebesgue uzayı

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} = \begin{cases} \left(\int_{\Gamma} |f(t)|^p d\nu(t) \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Gamma} |f(t)|, & p = \infty \end{cases}$$

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in \Gamma} |f(t)| = \inf \{ \lambda : \nu \{ t \in \Gamma : |f(t)| > \lambda \} = 0 \}$$

sonlu olacak biçimde Γ üzerindeki tüm ölçülebilir fonksiyonların kümesidir.

Tanım 2.2.13 $1 < p < \infty$ olmak üzere $WL_p(\Gamma)$ zayıf $L_p(\Gamma)$ uzayı

$$\|f\|_{WL_p(\Gamma)} = \sup_{r>0} r \left(\nu \{ t \in \Gamma : |f(t)| > r \} \right)^{1/p} < \infty$$

olacak biçimde lokal integrallenebilir fonksiyonların kümesi olarak tanımlanır.

2.3 $L_{p,\lambda}$ Morrey Uzayları

Bu kısımda öncelikle $0 \leq \lambda \leq n + p$ olmak üzere, $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayı tanıtılacak ve bu uzay üzerinde tanımlanan norm verilecektir. Daha sonra, λ nın durumlarına göre

$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayının yapısı hakkında bazı sonuçlar verilecektir. Daha da önemlisi, tezimizin ana maddesini oluşturan $0 < \lambda < n$ için $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı tanıtılacaktır.

Tanım 2.3.1 ($L_{p,\lambda}$ Uzayı) Ω , $\mathbb{R}^n$ nin açık ve bağlantılı bir alt kümesi ve $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq n + p$ olmak üzere Ω daki f lokal integrallenebilen fonksiyonlar uzayını, $L_{p,\lambda} = L_{p,\lambda}(\Omega)$ ile göstereceğiz öyle ki her $x_0 \in \Omega$ için (f, x_0 ve r ye bağlı) herhangi bir σ sayısı vardır ve

$$\int_{B(x_0,r) \cap \Omega} |f(x) - \sigma|^p dx \leq Cr^\lambda$$

eşitsizliği gerçekleşir, burada C sabiti sadece f ye bağlıdır ve $B(x_0, r)$, merkezi x_0 ve yarıçapı r olan açık yuvarı göstermektedir. Bu durumda

$$\|f\| = \inf C^{\frac{1}{p}} \quad (2.10)$$

ile tanımlanan $\|\cdot\|$, $L_{p,\lambda}$ uzayında bir yarı - normdur. (f sabit olduğunda kesin olarak $\|f\| = 0$ dir).

$L_{p,\lambda}$ Uzayının Yapısı

$L_{p,\lambda}$ uzaylarının yapıları hakkında bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

a) $\lambda = 0$ olduğunda $L_{p,\lambda} = L_p$, yani bilinen Lebesgue uzayıdır.

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \leq c < \infty$$

dir.

b) $0 < \lambda < n$ olduğunda $L_{p,\lambda}$ Morrey uzayı, yani her $x_0 \in \Omega$ ve her r için

$$\int_{B(x_0,r) \cap \Omega} |f(x)|^p dx \leq Cr^\lambda$$

sağlanacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır. Bu durum Campanato tarafından gösterilmiştir.

c) $\lambda = n$ olduğunda $L_{p,\lambda} = \varepsilon$ John - Nirenberg uzayı, yani her $x_0 \in \Omega$ ve her r için uygun bir σ ile

$$\int_{B(x_0,r) \cap \Omega} \left(\exp \left(\frac{|f(x) - \sigma|}{C} \right) - 1 \right) dx \leq r^n$$

dir.

d) $n < \lambda \leq n + p$ olduğunda $L_{p,\lambda} = Lip_\alpha$, $\alpha = \frac{(\lambda-n)}{p}$, yani her x ve $y \in \Omega$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^n, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

sağlanır. Bu durum Campanato ve Meyers tarafından bağımsız olarak gösterilmiştir. Tüm durumlarda C sadece f ye bağlıdır (Peetre 1969).

Tanım 2.3.2 $0 \leq \lambda < 1$, $1 \leq p < \infty$ ve $f \in L_p^{loc}(\Gamma)$ olmak üzere $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ Morrey uzayları

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)} &= \sup_{r>0, t \in \Gamma} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t,r))} \\ &= \sup_{r>0, t \in \Gamma} \left(r^{-\lambda} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)|^p d\nu(\tau) \right)^{1/p} < \infty \end{aligned}$$

olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır. $\lambda < 0$ veya $\lambda > 1$ iken $L_{p,\lambda}(\Gamma) = \emptyset$ dir, burada $\emptyset$, Γ üzerinde 0 a denk olan fonksiyonların kümesini belirtmektedir.

Ayrıca, $0 \leq \lambda < 1$, $1 \leq p < \infty$ ve $f \in W L_p^{loc}(\Gamma)$ olmak üzere $W L_{p,\lambda}(\Gamma)$ ile

$$\|f\|_{W L_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{W L_{p,\lambda}(\Gamma)} = \sup_{r>0, t \in \Gamma} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{W L_p(\Gamma(t,r))}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayı belirtilmektedir.

Lemma 2.3.1 Γ bir Carleson eğrisi ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

$$L_{p,1}(\Gamma) = L_\infty(\Gamma)$$

ve

$$\|f\|_{L_\infty(\Gamma)} < \|f\|_{L_{p,1}(\Gamma)} < c_0^{1/p} \|f\|_{L_\infty(\Gamma)}$$

dir.

İspat. $f \in L_\infty(\Gamma)$ olsun. Bu durumda

$$\left(r^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)|^p d\nu(\tau) \right)^{1/p} \leq c_0^{1/p} \|f\|_{L_\infty(\Gamma)}$$

dir. Böylece $f \in L_{p,1}(\Gamma)$ ve

$$\|f\|_{L_{p,1}(\Gamma)} \leq c_0^{1/p} \|f\|_{L_\infty(\Gamma)}$$

dir. $f \in L_{p,1}(\Gamma)$ olsun. Lebesgue diferensiyellenebilme teoreminden

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\nu\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)|^p d\nu(\tau) = |f(t)|^p$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} |f(t)| &= \left(\lim_{r \rightarrow 0} (\nu\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)|^p d\nu(\tau) \right)^{1/p} \\ &\leq \sup_{t \in \Gamma, 0 < r \leq 1} \left((\nu\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)|^p d\nu(\tau) \right)^{1/p} \\ &\leq \|f\|_{L_{p,1}(\Gamma)} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $f \in L_\infty(\Gamma)$ ve $\|f\|_{L_\infty(\Gamma)} \leq \|f\|_{L_{p,1}(\Gamma)}$ dir. ■

Lemma 2.3.2 Γ bir Carleson eğrisi, $1 \leq p < \infty$ and $0 \leq \lambda < 1$ olsun. Eğer $\alpha = \frac{1-\lambda}{p}$ ise, bu durumda $1/p + 1/p' = 1$ olmak üzere

$$L_{p,\lambda}(\Gamma) \subset L_{1,1-\lambda}(\Gamma) \text{ ve } \|f\|_{L_{1,1-\lambda}(\Gamma)} \leq c_0^{1/p'} \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}$$

dir.

İspat. $f \in L_{p,\lambda}(\Gamma)$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$ ve $\alpha p = 1 - \lambda$ olsun. Hölder eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| d\nu(\tau) &\leq \left(\int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)|^p d\nu(\tau) \right)^{1/p} \left(\int_{\Gamma(t,r)} d\nu(\tau) \right)^{1/p'} \\ &\leq c_0^{1/p'} r^{1/p'} \left(\int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)|^p d\nu(\tau) \right)^{1/p} \end{aligned}$$

dir. İlave olarak,

$$\begin{aligned} r^{\alpha-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| d\nu(\tau) &\leq c_0^{1/p'} r^{\alpha-1/p} \left(\int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)|^p d\nu(\tau) \right)^{1/p} \\ &= c_0^{1/p'} \left(r^{-\lambda} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)|^p d\nu(\tau) \right)^{1/p} \\ &\leq c_0^{1/p'} \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)} \end{aligned}$$

dir. Böylece $f \in L_{1,1-\alpha}(\Gamma)$ ve

$$\|f\|_{L_{1,1-\alpha}(\Gamma)} \leq c_0^{1/p'} \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}$$

dir. ■

Tanım 2.3.3 Γ bir Carleson eğrisi ve $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ olsun.

f nin maksimal fonksiyonu;

$$Mf(t) = \sup_{t>0} (\nu\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} |f(\tau)| d\nu(\tau)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.3.4 (BMO Uzayı) $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ olmak üzere $BMO(\Gamma)$ uzayı

$$f_{\Gamma(t, r)} = (\nu\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} f(\tau) d\nu(\tau).$$

olmak üzere

$$\|f\|_{BMO(\Gamma)} = \sup_{r>0, t \in \Gamma} (\nu\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} |f(\tau) - f_{\Gamma(t, r)}| d\nu(\tau) < \infty$$

olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 2.3.5 (Keskin (sharp) Maksimal Fonksiyon) $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ ve

$$f_{\Gamma(t, r)} = (\nu\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} f(\tau) d\nu(\tau).$$

olmak üzere keskin maksimal fonksiyon

$$M^\# f(t) = \sup_{r>0} \frac{1}{|\Gamma(t, r)|} \int_{\Gamma(t, r)} |f(\tau) - f_{\Gamma(t, r)}| d\nu(\tau)$$

şeklinde tanımlanır, burada supremum Γ da t leri içeren tüm $\Gamma(t, r)$ ler üzerinden alınır. Bu integrallerin her biri $\Gamma(t, r)$ ler üzerinde f nin ortalama salınımını ölçer. Diyebiliriz ki; eğer $M^\# f(x)$ fonksiyonu sınırlıysa f ortalama sınırlı salınlımlı fonksiyondur. Bu özellikteki fonksiyonlar uzayı, $BMO(\Gamma)$ uzayı olarak adlandırılır ve

$$BMO = \{f(x) \in L_1^{loc} : M^\# f(x) \in L_\infty\}$$

dir.

BMO üzerindeki norm

$$\|f\|_{BMO} = \|M^\# f\|_\infty$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.6 (Kesirli Maksimal Operatör) Γ bir Carleson eğrisi ve $0 < \alpha < 1$ olsun. Her $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ kesirli maksimal M^α operatörü

$$M^\alpha f(t) = \sup_{t>0} (\nu\Gamma(t, r))^{\alpha-1} \int_{\Gamma(t, r)} |f(\tau)| d\nu(\tau)$$

dir.

Tanım 2.3.7 Γ bir Carleson eğrisi ve $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ olsun. f nin Riesz potansiyeli

$$I^\alpha f(t) = \int_\Gamma \frac{f(\tau) d\nu(\tau)}{|t - \tau|^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

biçiminde tanımlanır.

Riesz potansiyellerinin $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzaylarındaki sınırlılığı Peetre (1969) ve Adams (1975) tarafından çalışılmıştır.

$0 < \alpha < n$ ve $0 \leq \lambda < n$, $1 \leq p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ olsun.

1) Eğer $1 < p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ise bu durumda I^α nın $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $L_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlılığı için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\lambda}$ olmasıdır.

2) Eğer $p = 1$ ise bu durumda I^α nin $L_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $WL_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlılığı için gerek ve yeter koşul $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\lambda}$ olmasıdır.

Eğer $\alpha = \frac{n}{p} - \frac{n}{q}$ ise bu durumda $\lambda = 0$ ve Teorem 1 in ifadesi $L_p(\mathbb{R}^n)$ de Hardy-Littlewood-Sobolev'in klasik sonucuna döntüşür:

$$1 < p < q < \infty \text{ için, } I^\alpha, L_p(\mathbb{R}^n) \text{ den } L_q(\mathbb{R}^n) \text{ ya sınırlıdır} \Leftrightarrow \alpha = \frac{n}{p} - \frac{n}{q}$$

ve

$$p = 1 < q < \infty \text{ için, } I^\alpha, L_1(\mathbb{R}^n) \text{ den } WL_q(\mathbb{R}^n) \text{ ya sınırlıdır} \Leftrightarrow \alpha = n - \frac{n}{q}$$

(Adams, 1975).

Kazimetric ölçü uzayları üzerinde tanımlanan Morrey uzaylarında, özellikle Carleson eğrileri üzerinde tanımlanan $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ Morrey uzaylarında I^α potansiyel operatörünün sınırlılığı Kokilashvili ve Meskhi (2008) tarafından çalışılmıştır ve aşağıdaki teoremi ispatlanmıştır.

Teorem 2.3.1 Γ bir Carleson eğrisi, $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda_1 < \frac{p}{q}$, $\frac{\lambda_1}{p} = \frac{\lambda_2}{q}$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$ olsun. Bu durumda I^α operatörü $L_{p,\lambda_1}(\Gamma)$ uzayından $L_{q,\lambda_2}(\Gamma)$ ye sınırlıdır.

Tanım 2.3.8 Γ bir Carleson eğrisi ve $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ olsun. f nin modifiye edilmiş potansiyel operatörü;

$$\tilde{I}^\alpha f(t) = \int_{\Gamma} (|t - \tau|^{\alpha-1} - |t_0 - \tau|^{\alpha-1} \chi_{\Gamma \setminus \Gamma(t_0,1)}(\tau)) f(\tau) d\nu(\tau), \quad t_0 \in \Gamma$$

biçiminde tanımlanır.

Çeşitli uzaylarda Carleson eğrileri üzerinde tanımlı Maksimal operatör ve potansiyel operatör Bötcher ve Karlovich (1997,1999), Karlovich (2008), Kokilashvili (1990), Kokilashvili ve Meskhi (2001,2008), Kokilashvili ve Samko (2008), Samko(2008) gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Lemma 2.3.3 (Kokilashvili ve S. Samko, 2008) Γ bir Carleson eğrisi ve $\alpha > 0$ olsun, bu durumda c_1 ve c_2 $t \in \Gamma$ ve $r > 0$ ya bağlı olmayan pozitif sabitler olmak üzere

$$c_1 r^\alpha \leq \int_{\Gamma(t,r)} |t - \tau|^{\alpha-1} d\nu(\tau) \leq c_2 r^\alpha$$

dir.

Lemma 2.3.4 $t, \tau, t_0 \in \mathbb{C}$ ve $0 < \alpha < 1$ olsun. Bu durumda $2|t - t_0| \leq |t_0 - \tau|$ için

$$||t - \tau|^{\alpha-1} - |t_0 - \tau|^{\alpha-1}| \leq 2^{1-\alpha} |t_0 - \tau|^{\alpha-2} |t - t_0|$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Ortalama değeri Teoreminden $\min \{|t - \tau|, |t_0 - \tau|\} \leq \xi \leq \max \{|t - \tau|, |t_0 - \tau|\}$ olmak üzere

$$||t - \tau|^{\alpha-1} - |t_0 - \tau|^{\alpha-1}| \leq ||t - \tau| - |t_0 - \tau|| \cdot \xi^{\alpha-2}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$\begin{aligned} |t - \tau| &\leq |t_0 - \tau| + |t - t_0| \leq \frac{3}{2}|t_0 - \tau|, \\ |t - \tau| &\geq |t_0 - \tau| - |t - t_0| \geq \frac{1}{2}|t_0 - \tau| \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} |t - \tau| - |t_0 - \tau| &\leq |t - t_0| \leq \frac{1}{2}|t_0 - \tau|, \\ |t - \tau| - |t_0 - \tau| &\geq -\frac{1}{2}|t - t_0| \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\frac{1}{2}|t_0 - \tau| \leq |t - \tau| \leq \frac{3}{2}|t_0 - \tau|$$

ve

$$||t - \tau| - |t_0 - \tau|| \leq \frac{1}{2}|t - t_0|$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■

3. CARLESON EĞRİLERİ ÜZERİNDE TANIMLI MORREY UZAYLARINDA MAKSİMAL OPERATÖR ve CAUCHY SİNGÜLER OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

Bu bölümde kompleks düzlemde Carleson eğrileri üzerinde maksimal operatör ve Cauchy singüler integral operatörü tanımlanıp ve bu operatörlerin $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ uzaylarında sınırlılığı verilecektir.

3.1 Maksimal Fonksiyon

Maksimal fonksiyon harmonik analizin önemli konuları arasındadır. Özellikle kısmi türevli denklemler teorisi ve matematiksel fizikte birçok uygulamaları vardır.

Bu kesimde maksimal operatörün, Carleson eğrileri üzerinde sınırlılığı incelenecektir. $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ olsun. Lebesgue Diferensiyelleme Teoremi'ne göre

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\nu \Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} f(\tau) d\nu(\tau) = f(t)$$

elde ederiz, burada $B(t, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - t| < r\}$ t merkezli r yarıçaplı açık yuvar olmak üzere

$$\Gamma(t, r) := \Gamma \cap B(t, r), \quad t \in \Gamma, \quad r > 0,$$

dır. Yukarıdaki limit yerine supremum f yerine $|f|$ alınarak f nin maksimal fonksiyonu tanımlanır.

Maksimal fonksiyon $\mathbb{R}^n$ nin standart kümelerinde $n = 1$ için Hardy Littlewood tarafından tanımlanmış ve Wiener tarafından n - boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına genişletilmiştir (Stein 1970).

Γ bir Carleson eğrisi ve $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ olsun. f nin maksimal fonksiyonu

$$Mf(t) = \sup_{t>0} (\nu \Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} |f(\tau)| d\nu(\tau)$$

biçimindedir.

Kısmi diferensiyel denklemlerin çalışılması ile ilgili olarak Morrey (1938) da giriş yapılan ve çeşitli kitaplarda verilen $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ Morrey uzaylarında maksimal, singüler ve potansiyel operatörlerin sınırlılığı son yıllarda araştırılmıştır (Adams vd. (2004),

Alvarez ve Plerez (1994), Arai ve Mizuhara (1997), Chiarenza ve Frasca (1987), Di Fazio ve Ragusa (1991), Ding ve Lu. (2002), Nakai (1994), Nakai (2001), Nakai ve Sumitomo (2001), Palagachev ve Softova (2004), Peetre(1966), Peetre (1969), Pradolini ve Salinas (2004), Shirai (2006), Spanne (1965), Stampacchia (1965)). Morrey uzaylarındaki maksimal operatörlerin sınırlılığı (Chiarenza ve Frasca (1987)) tarafından ispatlanmıştır.

Aşağıdaki ifade Öklidyen uzaylarda (Fefferman ve Stein (1971), Lemma 1; Stein (1993)) geçerlidir ve homojen uzaylar için Pradolini ve Salinas (2004) daki Önerme 3.4 de verilmiştir.

$$C_1 r \leq \nu \Gamma(t, r) \leq C_2 r, C_1 > 0 \text{ ve } C_2 > 0 \quad (3.1)$$

Lemma 3.1.1 (Feffermann-Stein eşitsizliği) Γ bir Carleson eğrisi olsun. Bu durumda

$$\int_{\Gamma} (Mf)(\tau)^p w(\tau) d\nu(\tau) \leq \int_{\Gamma} f(\tau)^p (Mw)(\tau) d\nu(\tau) \quad (3.2)$$

Γ üzerindeki bütün negatif olmayan f, w fonksiyonları için sağlanır.

$L_{p,\lambda}(\Gamma)$ da, M maksimal operatörün sınırlılığını Samko (2008) çalışmış ve aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 3.1.1 Γ bir Carleson eğrisi olsun. (3.1) şartı altında M maksimal operatörü $L_{p,\lambda}(\Gamma)$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$ uzayında sınırlıdır.

İspat. (3.2) Fefferman-Stein eşitsizliği ile,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (Mf(\tau))^p \chi_{\Gamma(t,r)}(\tau) d\tau &= \int_{\Gamma(t,r)} (Mf(\tau))^p d\tau \leq C \int_{\Gamma} |f(\tau)|^p M_{\chi_{\Gamma(t,r)}}(\tau) d\tau \\ &\leq C \int_{\Gamma(t,2r)} |f(\tau)|^p d\tau + C \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\Gamma(t,2^{j+1}r) \setminus \Gamma(t,2^j r)} |f(\tau)|^p M_{\chi_{\Gamma(t,r)}}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

elde ederiz. (3.1) şartı altında geçerli olan

$$\Gamma(t, 2r) = \Gamma \cap B(t, 2r) \text{ ve } B(t, 2r) : \{\tau : |t - \tau| < 2r\}$$

olduğundan

$$\Gamma \setminus \Gamma(t, 2r) = \{\tau : |t - \tau| \geq 2r\} \cap \Gamma$$

elde edilir. Bu durumda

$$|t - \tau| - r \geq r \Rightarrow (|t - \tau| - r) \geq r$$

olur.

$$\Rightarrow \frac{r}{(|t - \tau| - r)} \leq 1$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} M_{\chi_{\Gamma(t,r)}} &= \sup_{r>0} \frac{1}{|\Gamma(t,r)|} \int_{\Gamma(t,r)} \chi_{\Gamma(t_0,r)}(y) dy \\ \chi_{\Gamma(t_0,r)} &= \begin{cases} 1 & , t_0 \in \Gamma(t, r) \\ 0 & , t_0 \notin \Gamma(t, r) \end{cases} \\ &= \sup_{r>0} \frac{1}{|\Gamma(t,r)|} \int_{\Gamma(t,r) \cap \Gamma(t_0,r)} dy = c \end{aligned}$$

elde edilir

$$M_{\chi_{\Gamma(t,r)}}(\tau) \leq C \frac{r}{(\nu \Gamma(t, r) - r)} \quad (3.3)$$

eşitsizliğini kullanacağız, ispat (3.1) şartı altında Burenkov ve Guliyev (2004), de olduğu durumla aynıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(t,r)} (Mf(\tau))^p d\tau &\leq C \int_{\Gamma(t,2r)} |f(\tau)|^p d\tau + C \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Gamma(t,2^{j+1}r) \setminus \Gamma(t,2^j r)} |f(\tau)|^p M_{\chi_{\Gamma(t,r)}}(\tau) d\tau \\ &\leq C \int_{\Gamma(t,2r)} |f(\tau)|^p d\tau + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C}{[2^j - 1]} \int_{\Gamma(t,2^{j+1}r)} |f(\tau)|^p d\tau. \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\|Mf\|_{L_{p,\lambda}} &= \sup_{t \in \Gamma, r > 0} \frac{1}{r^\lambda} \int_{\Gamma(t,r)} (Mf(\tau))^p d\tau \\
&\leq \sup_{t \in \Gamma, r > 0} \frac{C}{r^\lambda} \int_{\Gamma(t,2r)} |f(\tau)|^p d\tau + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C}{[2^j - 1]^{1-\lambda}} \sup_{t \in \Gamma, r > 0} \frac{1}{r^\lambda} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)|^p d\tau \\
&= C_1 \|f\|_{L_{p,\lambda}}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

bulunur.

Ayrıca $p = 1$ için

$$\|Mf\|_{L_{1,\lambda}} \leq c \|f\|_{L_{1,\lambda}}$$

olduğundan

$$t |\{Mf > t\} \cap \Gamma(t, r)| \leq cr^\lambda \|f\|_{L_{1,\lambda}}$$

elde edilir. ■

3.2 Cauchy Singüler İntegralleri

Bu kesimde, kompleks düzlemde Carleson eğrileri üzerindeki Cauchy singüler integral operatörü tanımlanacak ve ardından $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ uzaylarında sınırlılığı araştırılacaktır.

Tanım 3.2.1 Γ yönlendirilmiş bir eğri olsun. $\varepsilon > 0$ için,

$$(S_\varepsilon f)(t) := \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t,\varepsilon)} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

ile bir $t \in \Gamma$ noktasında bir $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun $S_\varepsilon f$ kesikli singüler integralini tanımlayalım.

$f \in L_1(\Gamma)$ ise $(S_\varepsilon f)(t)$ nin iyi tanımlı ve sonlu olduğu açıktır.

Tanım 3.2.2 $t \in \Gamma$ ve f her $\varepsilon > 0$ için $(S_\varepsilon f)(t)$ iyi tanımlı ve sonlu olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (S_\varepsilon f)(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t,\varepsilon)} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau \tag{3.5}$$

limiti mevcut ve sonlu ise bu limit $(Sf)(t)$ ile gösterilir ve t noktasında f nin Cauchy singüler integralinin değeri olarak adlandırılır. S nin Γ üzerinde tanımlandığını belirtmek amacıyla çoğunlukla S yerine S_Γ yazılacaktır.

Aşağıdaki teorem Γ nın sınırlı ve f nin sabit olduğu durum içindir.

Teorem 3.2.1 Γ bir basit düzeltilebilir eğri ve $t \in \Gamma$ noktasında teğet (iki-yanlı) mevcut olsun. Bu durumda

$$(S1)(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, \varepsilon)} \frac{d\tau}{\tau - t}$$

vardır ve sonludur. Eğer Γ bir Jordan eğrisi ise bu durumda $(S1)(t) = 1$ dir. Eğer Γ , A noktasında başlayan ve B noktasında sonlanan bir yay ise bu durumda

$$(S1)(t) := \frac{1}{\pi} \log \frac{B - t}{A - t} - 1 \quad (3.6)$$

dir, burada $\log((B - t)/(A - t))$, $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ da analitik ve z , t ye soldan yaklaşırken sonsuzda sıfır olan $\log((B - z)/(A - z))$ fonksiyonunun dalının sınır değeridir.

İspat. İlk olarak belirtelim ki (3.6) nın sağ tarafı

$$\frac{1}{\pi} (\log(B - t) - \log(A - t) - \sigma(t))$$

dır, burada $\log(z - t)$ Λ , $\Gamma \cap \Lambda = \{t\}$ olacak şekilde t yi sonsuza birleştiren herhangi bir eğri olmak üzere $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ da sürekli logaritmanın herhangi bir dalıdır ve $\sigma(t) \in \{-\pi, \pi\}$

$$\sigma(t) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} \arg(\tau - \pi) - \lim_{\tau \rightarrow t^-} \arg(\tau - \pi)$$

ile tanımlıdır.

$s \mapsto z(s)$, $t = (s_0)$ ın bir komşuluğunda Γ nın doğal parametrizasyonu olsun. Bu durumda

$$s \rightarrow s_0 \text{ iken } z(s) = z(s_0) + z'(s_0)(s - s_0) + o(|s - s_0|)$$

dır. Genelliği bozmaksızın, $z(s_0) = 0$ ve $z'(s_0) = 1$ kabul edebiliriz; yani,

$$z(s) = s - s_0 + o(|s - s_0|) \quad (3.7)$$

olsun. $n \in \{2, 3, \dots\}$ verilsin, bu durumda

$$|s - s_0| \leq \delta_n \text{ için } |o(|s - s_0|)| < (1/n) |s - s_0| \quad (3.8)$$

olacak şekilde bir $\delta_n > 0$ vardır. δ_n nin, 0 a monoton azalan olduğunu kabul edebiliriz. (3.7), (3.8) ve $\arcsin(1/n) < \pi/(2n)$ eşitsizliğinden, $\text{arc } \gamma_n := \{\tau \in \Gamma : \ell(\tau, t) \leq \delta_n\}$ kümesi

$$\Delta_n := \{re^{i\theta} : r \in \mathbb{R}, -\pi/(2n) < \theta < \pi/(2n)\}$$

bölgesinde içerilir. a ve b , γ_2 nin uç noktalarını gösterebilir. $(\Gamma \setminus \gamma_2) \cup \{a, b\}$ kümesi kompakttır ve $\tau \mapsto |\tau| (= |\tau - t|)$ bu küme üzerinde sürekli ve pozitiftir. $\mu_0 > 0$ bu fonksiyonun minimumu olsun. Bu durumda $\Gamma(0, \mu_0)$ sadece γ_2 nin noktalarını içerir:

$$\varepsilon \leq \mu_0 \text{ için } \Gamma(0, \varepsilon) = \gamma_2(0, \varepsilon) \quad (3.9)$$

olur.

Şimdi $\delta_n \leq \mu_0$ olacak şekilde bir $n \geq 2$ tamsayısını sabitleyelim ve $0 < \varepsilon < \delta_n/2$ olsun. $\tau_1, \tau_2 \in \gamma_2$ için, γ_2 nin τ_1, τ_2 arasındaki altyayının uzunluğunu $\ell(\tau_1, \tau_2)$ ile gösterelim. $\tau = z(s) \in \gamma_2$ ve $|\tau| \leq \varepsilon$ olsun. Bu durumda (3.8),

$$\varepsilon \geq |z(s)| = |s - s_0 + o(|s - s_0|)| > |s - s_0| - \frac{1}{2} |s - s_0| = \frac{1}{2} |s - s_0|$$

olmasını gerektirir, böylece $|s - s_0| \leq 2\varepsilon < \delta_n$ olur. Böylece yine (3.8) den dolayı,

$$\varepsilon \geq |z(s)| = |s - s_0 + o(|s - s_0|)| > |s - s_0| - \frac{1}{n} |s - s_0| = \frac{n-1}{n} |s - s_0|$$

olur. Özet olarak, $\tau \in \gamma_n \subset \Delta_n$ ve

$$\ell(0, \tau) = |s - s_0| < \frac{n}{n-1} \varepsilon \quad (3.10)$$

olduğunu elde ederiz.

$P(\varepsilon) := \gamma_2 \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = \varepsilon, \text{Re } z \geq 0\}$ kümesi kompakttır ve $z \mapsto s - s_0 := \ell(0, z)$ $P(\varepsilon)$ üzerinde süreklidir.

$$\begin{aligned} s_-(\varepsilon) &:= \min \{s : z(\varepsilon) \in P(\varepsilon)\}, & s_+(\varepsilon) &:= \max \{s : z(\varepsilon) \in P(\varepsilon)\} \\ \alpha(\varepsilon) &:= \varepsilon e^{i \arg z(s_-(\varepsilon))}, & \beta(\varepsilon) &:= \varepsilon e^{i \arg z(s_+(\varepsilon))} \end{aligned}$$

olsun.

$\gamma_2 \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z \geq 0\}$ yayı, 0 ve $\alpha(\varepsilon)$ arasındaki $\eta_1(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$ ve $\beta(\varepsilon)$ arasındaki

$\eta_2(\varepsilon)$ ve $\beta(\varepsilon)$ ve b arasındaki $\eta_3(\varepsilon)$ altaylarının birleşimidir. $\eta_2^+(\varepsilon) := \{\tau \in \eta_2(\varepsilon) : |\tau| \geq \varepsilon\}$ diyelim. (3.10) dan $\ell(0, \beta(\varepsilon)) < n\varepsilon/(n-1)$ olduğunu elde ederiz. $\ell(0, \alpha(\varepsilon)) \geq |\alpha(\varepsilon)| = \varepsilon$ olduğundan,

$$|\eta_2^+(\varepsilon)| \leq |\eta_2(\varepsilon)| = \ell(\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon)) < \frac{n}{n-1}\varepsilon - \varepsilon = \frac{\varepsilon}{n-1}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$\left| \int_{\eta_2^+(\varepsilon)} \frac{d\tau}{\tau} \right| \leq \int_{\eta_2^+(\varepsilon)} \frac{|d\tau|}{|\tau|} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\eta_2^+(\varepsilon)} |d\tau| \leq \frac{1}{n-1}$$

dır ve böylece $\beta(\varepsilon) \in \gamma_n \subset \Delta_n$ olmasından dolayı

$$\begin{aligned} \left| \int_{(\gamma_2 \setminus \gamma_2(0, \varepsilon)) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}} \frac{d\tau}{\tau} - \log b + \log \varepsilon \right| &= \left| \int_{\eta_2^+(\varepsilon)} \frac{d\tau}{\tau} + \int_{\eta_3(\varepsilon)} \frac{d\tau}{\tau} - \log b + \log \varepsilon \right| \\ &\leq \frac{1}{n-1} + \left| \int_{\eta_3(\varepsilon)} \frac{d\tau}{\tau} - \log b + \log \varepsilon \right| \\ &= \frac{1}{n-1} + |\log b - \log \beta(\varepsilon) - \log b + \log \varepsilon| \\ &= \frac{1}{n-1} + |\log \varepsilon - \log \beta(\varepsilon)| \\ &= \frac{1}{n-1} + |\arg \beta(\varepsilon)| \\ &< \frac{1}{n-1} + \frac{\pi}{2n} \end{aligned} \tag{3.11}$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$\left| \int_{(\gamma_2 \setminus \gamma_2(0, \varepsilon)) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}} \frac{d\tau}{\tau} + \log a - \log \varepsilon \right| < \frac{1}{n-1} + \frac{\pi}{2n} \tag{3.12}$$

olduğunu ispatlayabiliriz. (3.11) ve (3.12) eklenerek, $n \geq 2$, $\delta_n \leq \mu_0$ ve $0 < \varepsilon < \delta_n/2$ iken

$$\left| \int_{\gamma_2 \setminus \gamma_2(0, \varepsilon)} \frac{d\tau}{\tau} - \log b + \log a \right| < \frac{2}{n-1} + \frac{\pi}{n}$$

elde edilir. Bu

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_2 \setminus \gamma_2(0, \varepsilon)} \frac{d\tau}{\tau} = \log b - \log a$$

olduğunu gösterir. Son olarak (3.9) eşitliğinden yararlanarak teoremin kalan kısmı elde edilir. ■

Singüler integraller hakkındaki klasik kitapların çoğunda $(Sf)(t)$ yi (3.5) ile tanımlamayıp, daha ziyade

$$(Sf)(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, \varepsilon)} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (3.13)$$

ile tanımlamıştır. (3.9) eşitliğinden, eğer Γ Carleson eğrisi ve t de iki yanlı teğete sahip (hemen hemen tüm $t \in \Gamma$ larda bu beklenir) ise, bu durumda yeterince küçük her $\varepsilon > 0$ için $\Gamma[t, \varepsilon] \subset \Gamma(t, \varepsilon) \subset \Gamma(t, C_\Gamma \varepsilon)$ dır. Böylece bu t noktalarında her iki tanım denktir. $(Sf)(t)$ yi hesaplamak için,

$$(S_\varepsilon f)(t) := \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, \varepsilon)} \frac{f(\tau) - f(t)}{\tau - t} d\tau + \frac{f(t)}{\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, \varepsilon)} \frac{d\tau}{\tau - t} \quad (3.14)$$

yazarız. Teorem 3.2.1, (3.14) ün sağ tarafındaki ikinci terim her düzeltilebilir Γ eğrisi üzerinde bir limite sahip olduğunu ifade eder. f yeterince düzgün bir fonksiyon ise (3.14) ün sağ tarafındaki birinci terim bir singüleriteye sahip değildir.

Tanım 3.2.3 $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, kompakt destekli bütün $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ sonsuz kez sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesidir, ve $C_0^\infty(\Gamma)$ ile $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ deki fonksiyonların Γ ya kısıtlanmış olanların kümesidir. $C_0^\infty(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$ olduğu açıktır.

Teorem 3.2.2 Γ bir basit lokal düzeltilebilir eğri ve $f \in C_0^\infty(\Gamma)$ olsun. Eğer $t \in \Gamma$ da Γ için (iki yanlı) teğet mevcutsa, bu durumda $(Sf)(t)$ limiti mevcuttur ve sonludur.

İspat. Γ nın sonlu olması durumunda, Teorem 3.2.1 ve (3.14) formülünden $\varepsilon \rightarrow 0$ ken

$$\int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, \varepsilon)} \frac{f(\tau) - f(t)}{\tau - t} d\tau \quad (3.15)$$

ifadesi sonludur. $t \rightarrow \tau$

$$f(\tau) = f(t) + f'(t)(\tau - t) + O(|\tau - t|^2)$$

olduğundan

$$\int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, \varepsilon)} \frac{f(\tau) - f(t)}{\tau - t} d\tau = \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, \varepsilon)} \frac{O(|\tau - t|^2)}{|\tau - t|} d\tau + f'(t) \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, \varepsilon)} d\tau \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.16) nın ikinci teriminin yakınsak olduğu açıktır. Fonksiyon τ ya giderken $\frac{O(|\tau-t|^2)}{|\tau-t|} \in L_1(\Gamma)$ dır ve böylece

$$G := \int_{\Gamma} \frac{O(|\tau-t|^2)}{|\tau-t|} d\tau$$

mevcut ve sonludur. Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ ve $C < \infty$ sabiti için

$$\left| \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, \varepsilon)} \frac{O(|\tau-t|^2)}{|\tau-t|} d\tau - G \right| \leq \int_{\Gamma} \frac{|O(|\tau-t|^2)|}{|\tau-t|} d\tau \leq C\varepsilon |\Gamma(t, \varepsilon)| \leq C\varepsilon |\Gamma|$$

(3.16) nın ilk terimi G ye yakınsar.

Γ nın sonsuz olması durumunda ise her $R > 0$ için

$$\int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, \varepsilon)} \frac{f(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, R)} \frac{f(\tau)}{\tau-t} d\tau + \int_{\Gamma(t, R) \setminus \Gamma(t, \varepsilon)} \frac{f(\tau)}{\tau-t} d\tau \quad (3.17)$$

sağlanır. (3.17) nin ilk terimi $\text{supp } f \subset \Gamma(t, R)$ ise yok olur, ikinci terimin yakınsaklığı açıktır. ■

Γ bir Carleson eğrisi ve $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ olmak üzere S_{Γ} Cauchy singüler integral operatörü

$$S_{\Gamma} f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau-t}$$

biçimindedir.

S_{Γ} Cauchy singüler integral operatörünün sınırlılığını ispatlamak için Calderon-Zygmund singüler operatörleri için Öklidyen kümelerde bilinen

$$M^{\#} f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|\Gamma(t, r)|} \int_{\Gamma(t, r)} |f(\tau) - f_{\Gamma(t, r)}|^p d\nu(\tau), \quad f_{\Gamma(t, r)} = \int_{\Gamma(t, r)} f(\tau) d\nu(\tau)$$

olmak üzere

$$M^{\#} (|S_{\Gamma} f|^s)(t) \leq C[Mf(t)]^s, \quad 0 < s < 1 \quad (3.18)$$

noktasal Alvarez-Pérez- tipli eşitsizlikten yararlanılacaktır.

S_Γ Cauchy singüler integral operatörünün $L_{p,\lambda}(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$ sınırlılığını elde etmek için aşağıdaki lemma kullanılacaktır.

Lemma 3.2.1 X ölçüsü sonsuz olan bir homejen metrik uzay olsun. (3.18) şartı altında,

$$\|Mf\|_{L_{p,\lambda}(X)} \leq C \|M^\# f\|_{L_{p,\lambda}(X)}, \quad 1 < p < \infty, \quad 0 \leq \lambda < 1$$

dir.

İspat. İspat, Di Fazio ve Ragusa (1991) dakine benzerdir. Homojen metrik ölçü uzaylar için geçerli olan L_p normundaki aşağıdaki ağırlıklı Fefferman-Stein eşitsizliğini kullanacağız:

$$\int_X |Mf(x)|^p w(x) dx \leq C \int_X |M^\# f(x)|^p w(x) dx, \quad w \in A_\infty, \quad f \in L^p(X, w) \quad (3.19)$$

A_1 Coifman-Rochberg karakterizasyonuna göre, $\left[M_{\chi_{B(x,r)}}\right]^\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ fonksiyonu A_1 dedir. (3.19), $\chi_{B(x,r)} \leq M_{\chi_{B(x,r)}} \leq \left[M_{\chi_{B(x,r)}}\right]^\varepsilon$ eşitsizliğini ve (3.18) kullanarak

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} |Mf(y)|^p d\mu(y) &\leq C \int_X |Mf(y)|^p \left[M_{\chi_{B(x,r)}}(y)\right]^\varepsilon d\mu(y) \\ &\leq C \int_X |M^\# f(y)|^p \left[M_{\chi_{B(x,r)}}(y)\right]^\varepsilon d\mu(y) \\ &\leq \int_{B(x,r)} |M^\# f(y)|^p d\mu(y) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C}{(2^{j+1}-1)^{N_\varepsilon}} \int_{B(x,2^{j+1}r)} |M^\# f(y)|^p d\mu(y) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda (3.4) eşitsizliğine benzer olarak,

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{L_{p,\lambda}} &= \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} (Mf(y))^p d\mu(y) \\ &\leq \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{C}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |M^\# f(y)|^p d\mu(y) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C}{[2^{j+1}-1]^{N_\varepsilon-\lambda}} \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,2^{j+1}r)} |M^\# f(y)|^p d\mu(y) \end{aligned}$$

$\varepsilon \in \left(\frac{\lambda}{n}, 1\right)$ seçimi altında lemma ispatlanır. ■

S_Γ singüler operatörünün sınırlı eğriler üzerindeki sınırlılığı Kokilashvili, ve Meskhi (2008) makalesinde ispatlanmıştır.

Aşağıdaki teoremde S_Γ singüler operatörünün sonsuz Carleson eğrileri üzerindeki sınırlılığının ispatı verilecektir.

Teorem 3.2.3 Γ bir Carleson eğrisi olsun. S_Γ singüler operatörü, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$ olmak üzere $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ uzaylarında sınırlıdır.

İspat. Bir sınırlı Carleson eğrisi üzerindeki bir fonksiyon, Morrey uzayının korunması ile bir sonsuz Carleson eğrisi için sıfıra stürdürülebileceğinden, Γ nın bir sonsuz eğri olduğunu kabul etmek yeterlidir.

(3.5) eşitsizliği ve

$$\|f\|_{p,\lambda} = \|f^s\|_{\frac{p}{s},\lambda}, \quad 0 < s < 1$$

eşitliği kullanılarak

$$\|S_\Gamma f\|_{p,\lambda} = \|(S_\Gamma f)^s\|_{\frac{p}{s},\lambda} \leq \|M[(S_\Gamma f)^s]\|_{\frac{p}{s},\lambda}$$

bulunur. Lemma 3.2.1 ve (3.18) eşitsizliği ile,

$$\|S_\Gamma f\|_{p,\lambda} \leq C \|M^\#[(S_\Gamma f)^s]\|_{\frac{p}{s},\lambda} \leq C \|(Mf)^s\|_{\frac{p}{s},\lambda} = C \|Mf\|_{p,\lambda}$$

elde edilir. Son olarak Teorem 3.1.1. in uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} \|S_\Gamma f\|_{p,\lambda} &\leq C \|Mf\|_{p,\lambda} = \sup_{t \in \Gamma, r > 0} \frac{1}{r^\lambda} \int_{\Gamma(t,r)} (Mf(\tau))^p d\tau \\ &\leq \sup_{t \in \Gamma, r > 0} \frac{C}{r^\lambda} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)|^p d\tau + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C}{[2^j - 1]^{1-\lambda}} \sup_{t \in \Gamma, r > 0} \frac{1}{r^\lambda} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)|^p \\ &= C_1 \|f\|_{L_{p,\lambda}} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece S_Γ nın $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ uzaylarında sınırlılığı elde edilir. ■

4. CARLESON EĞRİLERİ ÜZERİNDE POTANSİYEL OPERATÖRÜ ve KESİRLİ MAKSİMAL FONKSİYONU İÇİN SOBOLEV-MORREY EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde, Carleson eğrileri üzerinde tanımlanan potansiyel operatörleri için Sobolev-Morrey eşitsizliklerini ispatlayacağız. Ayrıca Carleson eğrileri üzerinde tanımlı Morrey uzaylarında M^α kesirli maksimal operatörünün sınırlılığı üzerine bir sonuç vereceğiz.

Γ bir Carleson eğrisi ve $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ olsun. f nin Riesz potansiyeli

$$I^\alpha f(t) = \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\nu(\tau)}{|t - \tau|^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

biçimindedir.

$1 \leq p < \infty$, $f \in WL_p^{loc}(\Gamma)$ olmak üzere $WL_{p,\lambda}(\Gamma)$ ile

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{WL_{p,\lambda}(\Gamma)} = \sup_{r>0, t \in \Gamma} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL_p(\Gamma(t,r))}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır.

Teorem 4.1 Γ bir Carleson eğrisi, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \lambda < 1 - \alpha$ ve $1 \leq p < \frac{1-\lambda}{\alpha}$ olsun.

1) $1 < p < \frac{1-\lambda}{\alpha}$ için

a.) Eğer $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ise I^α , $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ dan $L_{q,\lambda}(\Gamma)$ ya sınırlıdır.

b.) Γ nın sonsuz eğri olması durumunda I^α nın $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ dan $L_{q,\lambda}(\Gamma)$ ya sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ olmasıdır.

2) $p = 1$ için

a.) Eğer $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ise I^α , $L_{1,\lambda}(\Gamma)$ dan $WL_{q,\lambda}(\Gamma)$ ya sınırlıdır.

b.) Γ nın sonsuz eğri olması durumunda I^α nın $L_{1,\lambda}(\Gamma)$ dan $WL_{q,\lambda}(\Gamma)$ ya sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ olmasıdır.

İspat. 1) (Yeterlilik) Γ bir Carleson eğrisi, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \lambda < 1 - \alpha$, $f \in L_{p,\lambda}(\Gamma)$, $1 < p < \frac{1-\lambda}{\alpha}$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ olsun. Bu durumda

$$I^\alpha f(t) = \left(\int_{\Gamma(t,r)} + \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t,r)} \right) f(\tau) |t - \tau|^{\alpha-1} d\nu(\tau) \equiv A_1(t, r) + A_2(t, r) \quad (4.1)$$

yazarız. $A_1(t, r)$ için

$$\begin{aligned}
|A_1(t, r)| &\leq \int_{\Gamma(t, r)} |f(\tau)| |t - \tau|^{\alpha-1} d\nu(\tau) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} (2^{-j}r)^{\alpha-1} \int_{\Gamma(t, 2^{-j+1}r) \setminus \Gamma(t, 2^{-j}r)} |f(\tau)| d\nu(\tau) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} (2^{-j}r)^{\alpha-1} \nu\Gamma(t, 2^{-j+1}r) Mf(t) \leq 2c_0 r^\alpha Mf(t) \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j\alpha}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan

$$C_1 = \frac{2c_0}{2^\alpha - 1} \text{ ile } |A_1(t, r)| \leq C_1 r^\alpha Mf(t) \quad (4.2)$$

dir. $A_2(t, r)$ için, Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|A_2(t, r)| &\leq \left(\int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, r)} |t - \tau|^{-\beta} |f(\tau)|^p d\nu(\tau) \right)^{1/p} \\
&\quad \times \left(\int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, r)} |t - \tau|^{(\frac{\beta}{p} + \alpha - 1)p'} d\nu(\tau) \right)^{1/p'} = J_1 \cdot J_2
\end{aligned}$$

elde ederiz. $\lambda < \beta < 1 - \alpha p$ olsun. J_1 için $C_2 = \left(\frac{2^\beta}{2^{\beta-\lambda}-1} \right)^{1/p}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
J_1 &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \int_{\Gamma(t, 2^{j+1}r) \setminus \Gamma(t, 2^j r)} |f(\tau)|^p |t - \tau|^{-\beta} d\nu(\tau) \right)^{1/p} \\
&\leq 2^{\frac{\lambda}{p}} r^{\frac{\lambda-\beta}{p}} \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{(\lambda-\beta)j} \right)^{1/p} = C_2 r^{\frac{\lambda-\beta}{p}} \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}
\end{aligned} \quad (4.3)$$

elde edilir.

J_2 için $C_3 = \frac{c_0^{1/p'}}{1-2^{(1-\beta)/p-\alpha}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
J_2 &= \left(\int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, r)} |t - \tau|^{(\frac{\beta}{p} + \alpha - 1)p'} d\nu(\tau) \right)^{1/p'} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Gamma(t, 2^{j+1}r) \setminus \Gamma(t, 2^j r)} |t - \tau|^{(\frac{\beta}{p} + \alpha - 1)p'} d\nu(\tau) \right)^{1/p'} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} (2^j r)^{(\frac{\beta}{p} + \alpha - 1)p'} \nu\Gamma(t, 2^{j+1}r) \right)^{1/p'} \\
&\leq \left(c_0 \sum_{j=1}^{\infty} (2^j r)^{(\frac{\beta}{p} + \alpha - 1)p'+1} \right)^{1/p'} \leq C_3 r^{\frac{\beta}{p} + \alpha - \frac{1}{p}}
\end{aligned} \quad (4.4)$$

elde edilir. Bu durumda (4.3) ve (4.4) den $C_4 = C_2 \cdot C_3$ olmak üzere

$$|A_2(t, r)| \leq C_4 r^{\frac{\lambda-1}{p} + \alpha} \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)} \quad (4.5)$$

elde ederiz. Böylece, (4.2) ve (4.5) den

$$|I^\alpha f(t)| \leq C_1 r^\alpha Mf(t) + C_4 r^{\frac{\lambda-1}{q}} \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}$$

elde ederiz. r ye göre minimize ederek, $r = \left[(Mf(t))^{-1} \|f\|_{L_{p,\lambda}} \right]^{p/(1-\lambda)}$ ve $C_5 = C_1 + C_4$ olmak üzere

$$|I^\alpha f(t)| \leq C_5 (Mf(t))^{p/q} \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}^{1-p/q}$$

elde ederiz. Böylece Teorem 2.3.1 den $C_6 = C_5 \cdot C_{p,\lambda}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(t,r)} |I^\alpha f(t)|^q d\nu(\tau) &\leq C_5 \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}^{q-p} \int_{\Gamma(t,r)} (Mf(t))^p d\nu(\tau) \\ &\leq C_5 C_{p,\lambda} r^\lambda \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}^{q-p} \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}^p = C_6 r^\lambda \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}^q \end{aligned}$$

dir. Böylece $I^\alpha f \in L_{q,\lambda}(\Gamma)$ ve

$$\|I^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}(\Gamma)} \leq C_6 \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}$$

olur.

(Gereklilik) Γ bir sonsuz Carleson eğrisi, $1 < p < \frac{1-\lambda}{\alpha}$ olsun ve I^α , $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ den $L_{q,\lambda}(\Gamma)$ ya sınırlı olsun. $t = t(s) \in \Gamma$ için $rt = t(rs)$, $f_r(t) =: f(rt)$ tanımlayalım.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \|f_r\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)} &= r^{-\frac{1}{p}} \sup_{\tau \in \Gamma, r_1 > 0} \left(r_1^{-\lambda} \int_{\Gamma(t,rr_1)} |f(\tau)|^p d\nu(\tau) \right)^{1/p} \\ &= r^{-\frac{1-\lambda}{p}} \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)} \end{aligned}$$

ve

$$I^\alpha f_r(t) = r^{-\alpha} I^\alpha f(rt)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \|I^\alpha f_r\|_{L_{q,\lambda}(\Gamma)} &= r^{-\alpha} \sup_{r_1 > 0, t \in \Gamma} \left(r_1^{-\lambda} \int_{\Gamma(t,r_1)} |I^\alpha f(rt)|^q d\nu(t) \right)^{1/q} \\ &= r^{-\alpha - \frac{1-\lambda}{q}} \sup_{r_1 > 0, t \in \Gamma} \left(r_1^{-\lambda} \int_{\Gamma(t,rr_1)} |I^\alpha f(t)|^q d\nu(t) \right)^{1/q} \\ &= r^{-\alpha - \frac{1-\lambda}{q}} \|I^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}(\Gamma)} \end{aligned}$$

elde ederiz.

$C_{p,q,\lambda}$, sadece p , q ve λ ya bağılı olmak üzere I^α nın sınırlılığından dolayı

$$\|I^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}(\Gamma)} \leq C_{p,q,\lambda} r^{\alpha + \frac{1-\lambda}{q} - \frac{1-\lambda}{p}} \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)},$$

elde ederiz. Eğer $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ise bu durumda her $f \in L_{p,\lambda}(\Gamma)$ için

$$r \rightarrow 0 \text{ iken } \|I^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}} = 0$$

elde ederiz ki bu imkansızdır. Benzer şekilde, eğer $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ise bu durumda her $f \in L_{p,\lambda}(\Gamma)$ için

$$r \rightarrow \infty \text{ iken } \|I^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}(\Gamma)} = 0$$

elde ederiz ki bu imkansızdır. Dolayısıyla $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{1-\lambda}$ dir.

2) (*Yeterlilik*) $f \in L_{1,\lambda}(\Gamma)$ ve $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ olsun.

$$\nu \{ \tau \in \Gamma(t, r) : |I^\alpha f(\tau)| > 2\beta \} \leq \nu \{ \tau \in \Gamma(t, r) : |A_1(\tau, r)| > \beta \}$$

$$+ \nu \{ \tau \in \Gamma(t, r) : |A_2(\tau, r)| > \beta \}$$

elde ederiz.

Teorem 3.1.1 ve (4.2) eşitsizliğini hesaba katarak $C_7 = C_1 \cdot C_{1,\lambda}$ olmak üzere

$$\nu \{ \tau \in \Gamma(t, r) : |A_1(\tau, r)| > \beta \} \leq \nu \left\{ \tau \in \Gamma(t, r) : Mf(\tau) > \frac{\beta}{C_1 r^\alpha} \right\}$$

$$\leq \frac{C_7 r^\alpha}{\beta} \cdot r^\lambda \|f\|_{L_{1,\lambda}(\Gamma)},$$

elde ederiz.

$A_2(t, r)$ için $C'_4 = \frac{2^\lambda}{1-2^{\alpha+\lambda-1}}$ olmak üzere

$$|A_2(t, r)| \leq \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, r)} |f(\tau)| |t - \tau|^{\alpha-1} d\nu(\tau)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} (2^j r)^{\alpha-1} \int_{\Gamma(t, 2^{j+1}r) \setminus \Gamma(t, 2^j r)} |f(\tau)| d\nu(\tau)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} (2^j r)^{\alpha-1} (2^{j+1} r)^\lambda \|f\|_{L_{1,\lambda}(\Gamma)}$$

$$= C_4'^{\alpha+\lambda-1} \|f\|_{L_{1,\lambda}(\Gamma)} = C_4'^{\frac{\lambda-1}{q}} \|f\|_{L_{1,\lambda}(\Gamma)}$$

elde ederiz. Böylece eğer $C_4' r^{\frac{\lambda-1}{q}} \|f\|_{L_{1,\lambda}(\Gamma)} = \beta$ dersek, bu durumda $|A_2(\tau, r)| \leq \beta$ ve sonuç olarak $|\{\tau \in \Gamma(t, r) : |A_2(\tau, r)| > \beta\}| = 0$ dir.

Son olarak, $C_8 = C_7 \cdot C_4^{q-1}$ olmak üzere

$$\nu \{\tau \in \Gamma(t, r) : |I^\alpha f(\tau)| > 2\beta\} \leq \frac{C_7}{\beta} r^\lambda r^\alpha \|f\|_{L_{1,\lambda}(\Gamma)} = C_8 r^\lambda \left(\frac{\|f\|_{L_{1,\lambda}(\Gamma)}}{\beta} \right)^q$$

olur.

(Gereklilik) I^α , $L_{1,\lambda}(\Gamma)$ den $WL_{q,\lambda}(\Gamma)$ ye sınırlı olsun

$$\begin{aligned} \|I^\alpha f_r\|_{WL_{q,\lambda}(\Gamma)} &= \sup_{\beta > 0} \beta \sup_{\tau \in \Gamma, r_1 > 0} \left(r_1^{-\lambda} \int_{\{\tau \in \Gamma(t, r_1) : |\mathcal{I}^\alpha f_r(\tau)| > \beta\}} d\nu(\tau) \right)^{1/q} \\ &= r^{-\alpha} \sup_{\beta > 0} \beta r^\alpha \sup_{\tau \in \Gamma, r_1 > 0} \left(\tau^{-\lambda} \int_{\{\tau \in \Gamma(t, r_1) : |\mathcal{I}^\alpha f(r\tau)| > \beta r^\alpha\}} d\nu(\tau) \right)^{1/q} \\ &= r^{-\alpha - \frac{1}{q}} \sup_{\beta > 0} \beta r^\alpha \sup_{\tau \in \Gamma, r_1 > 0} \left(r^\lambda (r_1 r)^{-\lambda} \int_{\{\tau \in \Gamma(t, r r_1) : |\mathcal{I}^\alpha f(\tau)| > \beta r^\alpha\}} d\nu(\tau) \right)^{1/q} \\ &= r^{-\alpha - \frac{1-\lambda}{q}} \|I^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}(\Gamma)} \end{aligned}$$

elde ederiz. I^α nın $L_{1,\lambda}(\Gamma)$ den $WL_{q,\lambda}(\Gamma)$ ye sınırlılığından, $C_{1,q,\lambda}$ sadece q ve λ ya bağlı olmak üzere

$$\|I^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}(\Gamma)} \leq C_{1,q,\lambda} r^{\alpha + \frac{1-\lambda}{q} - (1-\lambda)} \|f\|_{L_{1,\lambda}(\Gamma)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eğer $1 < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ise bu durumda $f \in L_{1,\lambda}(\Gamma)$ için

$$r \rightarrow 0 \text{ iken } \|I^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}(\Gamma)} = 0$$

olduğunu elde ederiz ki bu imkansızdır. Benzer şekilde, eğer $1 > \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ise bu durumda her $f \in L_{1,\lambda}(\Gamma)$ için

$$r \rightarrow \infty \text{ iken } \|I^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}(\Gamma)} = 0$$

elde ederiz ki bu imkansızdır. Böylece $1 = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{1-\lambda}$ elde ederiz. Böylece Teorem 4.1 nin ispatı tamamlanır. ■

Γ bir Carleson eğrisi ve $0 < \alpha < 1$ olsun. Her $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ için M^α kesirli maksimal operatörü

$$M^\alpha f(t) = \sup_{t > 0} (\nu \Gamma(t, r))^{\alpha-1} \int_{\Gamma(t, r)} |f(\tau)| d\nu(\tau)$$

ile tanımlanır ve her $t \in \Gamma$ için

$$M^\alpha f(t) \leq I^\alpha(|f|)(t) \quad (4.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.1 ve (4.6) eşitsizliğinin bir sonucu olarak aşağıdaki sonucu elde ederiz. Böylece M^α kesirli maximal operatörünün sınırlılığı, I^α potansiyel operatörünün sınırlılığından elde edilmiş olur.

Sonuç 4.1 Γ bir Carleson eğrisi, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \lambda < 1 - \alpha$ ve $1 \leq p < \frac{1-\alpha}{\alpha}$ olsun.

1) $1 < p < \frac{1-\lambda}{\alpha}$ için

a.) Eğer $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ise M^α , $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ dan $L_{q,\lambda}(\Gamma)$ ya sınırlıdır.

b.) Γ nın sonsuz eğri olması durumunda M^α nın $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ dan $L_{q,\lambda}(\Gamma)$ ya sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ olmasıdır.

2) $p = 1$ için

a.) Eğer $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ise M^α , $L_{1,\lambda}(\Gamma)$ dan $WL_{q,\lambda}(\Gamma)$ ya sınırlıdır.

b.) Γ nın sonsuz eğri olması durumunda M^α nın $L_{1,\lambda}(\Gamma)$ dan $WL_{q,\lambda}(\Gamma)$ ya sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ olmasıdır.

İspat. 1) ve 2) ifadelerinin ispatlarının yeterlilik kısımları Teorem 4.1 ve (4.6) eşitsizliğinden görülür.

(*Gereklilik*) Teorem 4.1 deki gibi $f_r(\tau) =: f(r\tau)$ tanımlanmış olsun. Bu durumda

$$\|M^\alpha f_r\|_{WL_{q,\lambda}(\Gamma)} = r^{-\alpha - \frac{1-\lambda}{q}} \|M^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}(\Gamma)}$$

ve

$$\|M^\alpha f_r\|_{L_{q,\lambda}(\Gamma)} = r^{-\alpha - \frac{1-\lambda}{q}} \|M^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}(\Gamma)}$$

olduğu açıktır.

1) $1 < p < \frac{1-\lambda}{\alpha}$, $f \in L_{p,\lambda}(\Gamma)$ olsun ve M^α , $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ dan $L_{q,\lambda}(\Gamma)$ ya sınırlı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|M^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}(\Gamma)} &= r^{\alpha + \frac{1-\lambda}{q}} \|M^\alpha f_r\|_{L_{q,\lambda}(\Gamma)} \\ &\leq Cr^{\alpha + \frac{1-\lambda}{q}} \|f_r\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)} = Cr^{\alpha + \frac{1-\lambda}{q} - \frac{1-\lambda}{p}} \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)} \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ise bu durumda her $f \in L_{p,\lambda}(\Gamma)$ için

$$r \rightarrow 0 \text{ iken } \|M^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}(\Gamma)} = 0$$

elde edilir ki bu imkansızdır. Benzer şekilde, eğer $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ise bu durumda her $f \in L_{p,\lambda}(\Gamma)$ için

$$r \rightarrow \infty \text{ iken } \|M^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}(\Gamma)} = 0$$

elde ederizki bu imkansızdır, ve böylece $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{1-\lambda}$ buluruz.

2) $M^\alpha L_{1,\lambda}(\Gamma)$ den $WL_{q,\lambda}(\Gamma)$ ya sınırlı olsun. Bu durumda C , q ve α ya bağlı olmak üzere

$$\begin{aligned} \|M^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}(\Gamma)} &= r^{\alpha + \frac{1-\lambda}{q}} \|M^\alpha f_r\|_{WL_{q,\lambda}(\Gamma)} \\ &\leq Cr^{\alpha + \frac{1-\lambda}{q}} \|f_r\|_{L_{1,\lambda}(\Gamma)} = Cr^{\alpha + \frac{1-\lambda}{q} - (1-\lambda)} \|f\|_{L_{1,\lambda}(\Gamma)} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Eğer $1 < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ise bu durumda her $f \in L_{1,\lambda}(\Gamma)$ için

$$r \rightarrow 0 \text{ iken } \|M^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}(\Gamma)} = 0$$

elde ederiz, ki bu imkansızdır. Benzer şekilde, eğer $1 > \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ise bu durumda her $f \in L_{1,\lambda}(\Gamma)$ için

$$r \rightarrow \infty \text{ iken } \|M^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}(\Gamma)} = 0$$

elde ederiz ki bu da imkansızdır. Buradan $1 = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{1-\lambda}$ buluruz. Böylece Sonuç 4.1 nin ispatı tamamlanır. ■

Γ bir Carleson eğrisi ve $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ olsun. f nin modifiye edilmiş potansiyel operatörü;

$$\tilde{I}^\alpha f(t) = \int_{\Gamma} (|t - \tau|^{\alpha-1} - |t_0 - \tau|^{\alpha-1} \chi_{\Gamma \setminus \Gamma(t_0,1)}(\tau)) f(\tau) d\nu(\tau), \quad t_0 \in \Gamma$$

biçimindedir.

Γ bir sonsuz eğri olduğu zaman, $p = \frac{1-\lambda}{\alpha}$ limit durumunda Teorem 4.1 deki 1) ifadesi sağlanmaz. Üstelik, $p = \frac{1-\lambda}{\alpha}$ iken her $t \in \Gamma$ için $I^\alpha f(t) = \infty$ olacak şekilde bir $f \in L_{p,\lambda}(\Gamma)$ vardır. Bununla beraber, ispatlayacağız ki, eğer $L_\infty(\Gamma)$ uzayı daha geniş

olan $BMO(\Gamma)$ uzayı ile yer değiştirirse, modifiye edilmiş $\tilde{I}^\alpha$ potansiyel operatörü için Teorem 4.1 deki 1) ifadesi sağlanır.

Aşağıdaki teorem Mamedkhanov ve Dadashova (2010) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 4.2 Γ bir Carleson eđriři, $0 < \alpha < 1$, ve $0 \leq \lambda \leq 1 - \alpha$ olsun. Bu durumda

1) Eğer Γ sonsuz eğri ise, bu durumda modifiye edilmiş $\tilde{I}^\alpha$ potansiyel operatörü $L_{\frac{1-\lambda}{\alpha},\lambda}(\Gamma)$ dan $BMO(\Gamma)$ ya sınırlıdır.

2) Eğer Γ sonlu eğri ise, bu durumda I^α potansiyel operatörü $L_{\frac{1-\lambda}{\alpha},\lambda}(\Gamma)$ dan $BMO(\Gamma)$ ya sınırlıdır.

3) M^α , $L_{\frac{1-\lambda}{\alpha},\lambda}(\Gamma)$ dan $L_\infty(\Gamma)$ ya sınırlıdır.

İspat. 1) Γ bir sonsuz eğri $\alpha = 1 - \lambda$, ve $f \in L_{1,1-\alpha}(\Gamma)$ olsun. Verilen $r > 0$ ve $t_0 \in \Gamma$ için, $\chi_{\Gamma(t_0,2r)}$, $\Gamma(t_0, 2r)$ kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$f_1(t) = f(t)\chi_{\Gamma(t_0,2r)}(t), \quad f_2(t) = f(t) - f_1(t), \quad (4.7)$$

diyelim. Bu durumda

$$F_1(t) = \int_{\Gamma(t_0,2r)} (|t - \tau|^{\alpha-1} - |t_0 - \tau|^{\alpha-1} \chi_{\Gamma \setminus \Gamma(t_0,1)}(\tau)) f(\tau) d\nu(\tau)$$

ve

$$F_2(t) = \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t_0,2r)} (|t - \tau|^{\alpha-1} - |t_0 - \tau|^{\alpha-1} \chi_{\Gamma \setminus \Gamma(t_0,1)}(\tau)) f(\tau) d\nu(\tau)$$

olmak üzere

$$\tilde{I}^\alpha f(t) = \tilde{I}^\alpha f_1(t) + \tilde{I}^\alpha f_2(t) = F_1(t) + F_2(t),$$

elde ederiz. f_1 fonksiyonu kompakt (sınırlı) desteğe sahiptir ve böylece

$$a_1 = - \int_{\Gamma(t_0,2r) \setminus \Gamma(t_0, \min\{1,2r\})} |t_0 - \tau|^{\alpha-1} f(\tau) d\nu(\tau)$$

sonludur.

Aynı zamanda

$$\begin{aligned} F_1(\eta) - a_1 &= \int_{\Gamma(t_0,2r)} |\eta - \tau|^{\alpha-1} f(\tau) d\nu(\tau) \\ &\quad - \int_{\Gamma(t_0,2r) \setminus \Gamma(t_0, \min\{1,2r\})} |t_0 - \tau|^{\alpha-1} f(\tau) d\nu(\tau) \\ &\quad + \int_{\Gamma(t_0,2r) \setminus \Gamma(t_0, \min\{1,2r\})} |t_0 - \tau|^{\alpha-1} f(\tau) d\nu(\tau) \\ &= \int_{\Gamma} |\eta - \tau|^{\alpha-1} f_1(\tau) d\nu(\tau) = \mathcal{I}^\alpha f_1(\eta). \end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$|F_1(\eta) - a_1| \leq \int_{\Gamma(t_0, 2r)} |\eta - \tau|^{\alpha-1} |f(\tau)| d\nu(\tau).$$

elde ederiz. Her $t \in \Gamma(t_0, r)$ için Lemma 2.3.3 ile

$$\begin{aligned} & (\nu\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} |F_1(\eta) - a_1| d\nu(\eta) \\ & \leq (\nu\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} \left(\int_{\Gamma(t_0, 3r)} |\eta - \tau|^{\alpha-1} |f(\tau)| d\nu(\tau) \right) d\nu(\eta) \\ & \leq r^{-1} \int_{\Gamma(t_0, 3r)} \left(\int_{\Gamma(t, r)} |\eta - \tau|^{\alpha-1} d\nu(\eta) \right) |f(\tau)| d\nu(\tau) \\ & \leq r^{-1} \int_{\Gamma(t_0, 3r)} \left(\int_{\Gamma(\tau, 3r+|t-t_0|)} |\eta - \tau|^{\alpha-1} d\nu(\eta) \right) |f(\tau)| d\nu(\tau) \quad (4.8) \\ & \leq c_2 r^{-1} (3r + |t - t_0|)^\alpha \int_{\Gamma(t_0, 3r)} |f(\tau)| d\nu(\tau) \\ & \leq c_2 r^{-\alpha} (3r + |t - t_0|)^\alpha \|f\|_{L_{1,1-\alpha}(\Gamma)} \\ & \leq 4^\alpha c_2 \|f\|_{L_{1,1-\alpha}(\Gamma)} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$a_2 = \int_{\Gamma(t_0, \max\{1, 2r\}) \setminus \Gamma(t_0, 2r)} |t_0 - \tau|^{\alpha-1} f(\tau) d\nu(\tau)$$

diyelim. $t \in \Gamma(t_0, r)$ için

$$|F_2(t) - a_2| \leq \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t_0, 2r)} |f(\tau)| \left| |t - \tau|^{\alpha-1} - |t_0 - \tau|^{\alpha-1} \right| d\nu(\tau)$$

dir. Lemma 2.3.4 uygulanarak,

$$\begin{aligned} |F_2(t) - a_2| & \leq 2^{1-\alpha} |t - t_0| \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t_0, 2r)} |f(\tau)| |t_0 - \tau|^{\alpha-2} d\nu(\tau) \\ & = 2^{1-\alpha} |t - t_0| I_1 \end{aligned}$$

elde ederiz. I_1 için,

$$\begin{aligned} I_1 & = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\Gamma(t, 2^{j+2}r) \setminus \Gamma(t, 2^{j+1}r)} |f(\tau)| |t_0 - \tau|^{\alpha-2} d\nu(\tau) \\ & \leq \sum_{j=0}^{\infty} (2^{j+1}r)^{\alpha-2} \int_{\Gamma(t, 2^{j+2}r)} |f(\tau)| d\nu(\tau) \\ & \leq 2^{1-\alpha} r^{-1} \|f\|_{L_{1,1-\alpha}(\Gamma)} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Bu durumda her $t \in \Gamma(t_0, r)$ için

$$|F_2(t) - a_2| \leq 2^{2-2\alpha} \|f\|_{L_{1,1-\alpha}(\Gamma)} \quad (4.9)$$

elde ederiz.

$$a_f = a_1 + a_2 = \int_{\Gamma(t_0, \max\{1, 2r\})} |t_0 - \tau|^{\alpha-1} f(\tau) d\nu(\tau)$$

ile gösterelim.

Son olarak, (4.8) ve (4.9) dan $C_3 = 4^\alpha c_2 + 2^{2-2\alpha}$ olmak üzere

$$\sup_{r>0, t_0 \in \Gamma} \frac{1}{\nu\Gamma(t_0, r)} \int_{\Gamma(t_0, r)} \left| \tilde{I}^\alpha f(t) - a_f \right| d\nu(t) \leq C_3 \|f\|_{L_{1,1-\alpha}(\Gamma)}$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{I}^\alpha f \right\|_{BMO} &\leq 2 \sup_{r>0, t_0 \in \Gamma} \frac{1}{\nu\Gamma(t_0, r)} \int_{\Gamma(t_0, r)} \left| \tilde{I}^\alpha f(t) - a_f \right| d\nu(t) \\ &\leq 2C_3 \|f\|_{L_{1,1-\alpha}(\Gamma)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

elde edilir.

$1 < \frac{1-\lambda}{\alpha}$ durumunda Teorem 4.2 in 1) ifadesi, Lemma 2.3.2 ve (4.10) eşitsizliğinden elde edilir.

2) $f \in L_{p,\lambda}(\Gamma)$, $1 \leq p = \frac{1-\lambda}{\alpha}$ ve $t_0 \in \Gamma$ olsun, ve Γ bir sonlu eğri olsun. Bu durumda

$$C(f) = \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t_0, 1)} |t_0 - \tau|^{\alpha-1} f(\tau) d\nu(\tau)$$

olmak üzere $2^N \leq l = \nu\Gamma < 2^{N+1}$ ve

$$I^\alpha f(t) = \tilde{I}^\alpha f(t) + C(f)$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. Bu durumda $C(f)$ sonludur:

$$\begin{aligned} |C(f)| &\leq \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t_0, 1)} |t_0 - \tau|^{\alpha-1} |f(\tau)| d\nu(\tau) \\ &= \sum_{j=0}^N \int_{\Gamma(t, 2^{j+1}) \setminus \Gamma(t, 2^j)} |t_0 - \tau|^{\alpha-1} |f(\tau)| d\nu(\tau) \\ &\leq \sum_{j=0}^N 2^{j(\alpha-1)} \int_{\Gamma(t, 2^{j+1}) \setminus \Gamma(t, 2^j)} |f(\tau)| d\nu(\tau) \\ &\leq N 2^{1-\alpha} \|f\|_{L_{1,1-\alpha}(\Gamma)} \\ &\leq N 2^{1-\alpha} c_0^{1/p'} \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)} \end{aligned}$$

3) M^α operatörünün sınırlılığı

$$\begin{aligned} M^\alpha f(t) &\leq \sup_{t \in \Gamma, r>0} r^{\alpha-1} \int_{\Gamma(t, r)} |f(\tau)| d\nu(\tau) \\ &= \|f\|_{L_{1,1-\alpha}(\Gamma)} \leq c_o^{1/p'} \|f\|_{L_{\frac{1-\lambda}{\alpha}, \lambda}(\Gamma)} \end{aligned}$$

eşitsizliklerinden elde edilir. Böylece Teorem 4.2 ispatlanır. ■

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, ilk olarak Carleson eğrileri ve $L_{p,\lambda}$ Morrey uzayları tanımlanmıştır. Kompleks düzlemde Carleson eğrileri üzerinde maksimal operatör ve Cauchy singüler integral operatörü tanımlanmış ve bu operatörlerin $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ Morrey uzaylarında sınırlılığı verilmiştir:

Teorem Γ bir Carleson eğrisi olsun. $C_1 r \leq \nu\Gamma(t, r) \leq C_2 r$, $C_1 > 0$ ve $C_2 > 0$ şartı altında M maksimal operatörü $L_{p,\lambda}(\Gamma)$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$ uzayında sınırlıdır.

Teorem Γ bir Carleson eğrisi olsun. S_Γ singüler operatörü, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$ olmak üzere $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ uzaylarında sınırlıdır.

Daha sonra, Carleson eğrileri üzerinde tanımlanan I^α Riesz potansiyel operatörü için aşağıdaki Sobolev-Morrey eşitsizlikleri ispatlanmıştır:

Teorem Γ bir Carleson eğrisi, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \lambda < 1 - \alpha$ ve $1 \leq p < \frac{1-\lambda}{\alpha}$ olsun.

1) $1 < p < \frac{1-\lambda}{\alpha}$ için

a.) Eğer $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ise I^α , $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ dan $L_{q,\lambda}(\Gamma)$ ya sınırlıdır.

b.) Γ nın sonsuz eğri olması durumunda I^α nın $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ dan $L_{q,\lambda}(\Gamma)$ ya sınırlı olması için için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ olmasıdır.

2) $p = 1$ için

a.) Eğer $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ise I^α , $L_{1,\lambda}(\Gamma)$ dan $WL_{q,\lambda}(\Gamma)$ ya sınırlıdır.

b.) Γ nın sonsuz eğri olması durumunda I^α nın $L_{1,\lambda}(\Gamma)$ dan $WL_{q,\lambda}(\Gamma)$ ya sınırlı olması için için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ olmasıdır.

Ayrıca, tezin sonunda Carleson eğrileri üzerindeki M^α kesirli maksimal operatörünün sınırlılığı üzerine bir sonuç verilmiş ve $1 \leq p = (1 - \lambda)/\alpha$ limit durumunda, eğer Γ bir sonsuz Carleson eğrisi ise bu durumda modifiye edilmiş $\tilde{I}^\alpha$ potansiyel operatörünün $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ den $BMO(\Gamma)$ ya sınırlı ve eğer Γ , bir sonlu Carleson eğrisi ise I^α operatörünün $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ den $BMO(\Gamma)$ ya sınırlı olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- Adams, D.R. 1975. *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J. 42, pp. 765-778.
- Adams, D.R. and Xiao, J. 2004. *Nonlinear potential analysis on Morrey spaces and their capacities*. Indiana Univ. Math. J., 53(6):1631.1666.
- Alvarez, J. 1981. *The distribution function in the Morrey space*. Proc. Amer. Math. Soc., 83:693. 699.
- Alvarez, T. and PLerez, C. 1994 *Estimates with A_∞ weights for various singular integral operators*. Boll. Un. Mat. Ital, A (7) 8(1):123.133.
- Arai, H. and Mizuhara, T. 1997. *Morrey spaces on spaces of homogeneous type and estimates for $\square_b$ and the Cauchy-Szego projection*. Math. Nachr., 185(1):5.20.
- Böttcher, A. and Karlovich, Y.I. 1997. *Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators*, Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 397 pages.
- Böttcher, A. and Karlovich, Y.I. 1999. *Toeplitz operators with PC symbols on general Carleson Jordan Curves with arbitrary Muckenhoupt Weights*, Trans. Amer. Math. Soc., 351, 3143–3196.
- Burenkov, V.I and Guliyev, H.V. 2004. *Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces*, Studia Math., 163, no. 2, 157-176.
- Burenkov, V.I., Guliyev, H.V. and Guliyev V.S. 2007. *Necessary and sufficient conditions for boundedness of the fractional maximal operator in the local Morrey-type spaces*, J. Comput. Appl. Math., 208, no. 1, 280-301.
- Burenkov, V.I., Guliyev, H.V. and Guliyev V.S. 2007. *Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Riesz potential in the local Morrey-type spaces*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk, 412, No.5, 585-589. English Transl. Doklady Mathematics, **75** (2007), no. 1, 103-107.
- Chiarenza, F. and Frasca, M. 1987. *Morrey spaces and Hardy–Littlewood maximal function*, Rend. Math., **7**, 273-279.
- Ding, Y. and Lu, S. 2002. *Boundedness of homogeneous fractional integrals on L^p for $N/\alpha \leq p \leq \infty$* . Nagoya Math. J., 167:17.33.
- Eridani, Kokilashvili, V. and Meskhi, A. 2008. *Morrey spaces and fractional integral operators*, arXiv:0806.2391v1 [math.FA].
- Fazio, G. D. and Ragusa, M.A. 1991. *Commutators and Morrey spaces*. Bollettino U.M.I., 7(5-A):323.332.

- Fefferman, C. and Stein, E.M. 1971. Some maximal inequalities. Amer. J. Math., 93:107-115.
- Garcia-Cuerva, J. and Rubio de Francia, J. L. 1985. *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*. North-Holland Math. 16, Amsterdam.
- Genebashvili, I., Gogatishvili, A., Kokilashvili, V. and Krbec, M. 1998. *Weight theory for integral transforms on spaces of homogeneous type*, Pitman Monographs and Surveys, Pure and Applied mathematics: Longman Scientific and Technical, 422 pages.
- Gohberg, I. and Krupnik, N. 1992. *One-Dimensional Linear Singular Integral equations, Vol. I. Introduction. Operator theory: Advances and Applications*, 53. Basel-Boston: Birkhauser Verlag, 266 pages.
- Grafakos, L. 2004. *Classical and Modern Fourier Analysis*. Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, New Jersey.
- Karlovich, A.Y. 2008. *Maximal operators on variable Lebesgue spaces with weights related to oscillations of Carleson curves*, ArXiv:0808.0258v1 [math.CA], 1-13.
- Kokilashvili, V. 1990. *Fractional integrals on curves*, (Russian) Trudy Tbliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR, 95, 56–70.
- Kokilashvili, V. and Meskhi, A. 2001. *Fractional integrals on measure spaces*, Frac. Calc. Appl. Anal., 4, no. 4, 1-24.
- Kokilashvili, V. and Meskhi, A. 2008. *Boundedness of Maximal and Singular Operators in Morrey spaces with Variable Exponent*, Arm. J. Math. (Electronic), 1, no 1, 18-28.
- Kokilashvili, V., Paataashvili, V. and Samko, S. 2006. *Boundedness in Lebesgue spaces with variable exponent of the Cauchy singular operators on Carleson curves*. In Ya. Erusalimsky, I. Gohberg, S. Grudsky, V. Rabinovich, and N. Vasilevski, editors, *Operator Theory: Advances and Applications*, dedicated to 70th birthday of Prof. I.B.Simonenko, volume 170, pages 167-186. BirkhNauser Verlag, Basel.
- Kokilashvili, V. and Samko, S. 2008. *Boundedness of maximal operators and potential operators on Carleson curves in lebesgue Spaces with variable exponent*, Acta Math. Sin. (English Ser.), 24, no. 11, 1775—1800.
- Mamedkhanov, J.I. and Dadashova, I.B 2010. *Some properties of the potential operators in Morrey spaces defined on Carleson curves*, Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal, 55:8-10, 937-945.
- Morrey, C.B. 1938. *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 43, 126-166.

- Nakai, E. 1994. *Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces*. Math. Nachr., 166:95.103.
- Nakai, E. 2001. *On generalized fractional integrals*. Taiwanese J. Math., 5(3):587.602.
- Nakai, E. and Sumitomo, H. 2001. *On generalized Riesz potentials and spaces of some smooth functions*. Sci. Math. Jpn., 54(3):463.472.
- Palagachev, D.K. and Softova, L.G. 2004. *Singular integral operators, Morrey spaces and fine regularity of solutions to PDEs*. Potential Analysis, 20:237.263.
- Palka, B.P. An Introduction to *Complex Function Theory Potential Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- Peetre, J. 1966. *On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant*. Annali di Mat. Pured Appl., 72(1):295.304.
- Peetre, J. 1969. *On the theory of $L_{p,\lambda}$ spaces*, J. Functional Analysis, 4, 71-87.
- Pradolini, G. and Salinas, O. 2004. *Maximal operators on spaces of homogeneous type*. Proc. Amer. Math. Soc., 132:435.441.
- Ragusa, M.A. 2008. *Commutators of fractional integral operators on Vanishing-Morrey spaces*. J. of Global Optim., 40(1-3):361. 368.
- Sadosky, C. 1979. *Interpolation of operators and singular integrals*, Marcel Dekker Inc. 375p.
- Samko, N. 2008. *Weighted Hardy and singular operators in Morrey Spaces*, Arxiv: 0808.239v1 [math.FA], 1-24.
- Samko, S.G. and Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. 1993. *Fractional Integrals and Derivative. Theory and Applications*. Gordon and Breach Sci. Publishers.
- Shirai, S. 2006. *Necessary and sufficient conditions for boundedness of commutators of fractional integral operators on classical Morrey spaces*. Hokkaido Math. J., 35(3):683.696.
- Spanne, S. 1965. *Some function spaces defined by using the mean oscillation over cubes*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 19:593.608.
- Stampacchia, G. 1965. *The spaces $L^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ and interpolation*. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, 3(19):443.462.
- Stein, E.M. 1970. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.
- Stein, E.M. and Weiss, G. 1971. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean Spaces*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

Stein, E.M. 1993. *Harmonic Analysis: real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Merve Esra YILDIRIM

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 21.04.1988

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Sivas Kongre Lisesi (2005)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2012)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2012 – Ocak 2014)