

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ**

**BİR PARABOLİK DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN SÖNÜMÜ**

**Burhan SELÇUK**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ANKARA  
2014**

**Her hakkı saklıdır**

## ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

13/01/2014

Burhan SELÇUK

# ÖZET

Doktora Tezi

## BİR PARABOLİK DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN SÖNÜMÜ

Burhan SELÇUK

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nuri ÖZALP

Bu tez 6 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel teoremler ve lemmalar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, tekil sınır şartlı bir lineer olmayan parabolik denklemin çözümünün sönüm davranışı incelenmiştir. Bu denklemin sonlu zamanda çözümünün söndüğü ve belli kabuller altında zamana göre türevin patladığı ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, tekil sınır yayımlı bir lineer olmayan parabolik denklemin çözümünün sönüm davranışı incelenmiştir. Bu denklemin sonlu zamanda çözümünün söndüğü ve belli kabuller altında zamana göre türevin patladığı ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde, tekil sınır şartlı bir lineer olmayan parabolik sistemin çözümünün sönüm davranışı incelenmiştir. Bu denklemin sonlu zamanda çözümünün söndüğü ve belli kabuller altında sönüm zamanında sönüm noktasında  $(u_t, v_t)$  nin patladığı gösterilmiştir.

Altıncı bölüm sonuç kısmına ayrılmıştır.

**Ocak 2014, 43 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Lineer olmayan parabolik denklem, sönüm, tekil olmayan sınır şartı, tekil olmayan sınırdaki akış, maksimum prensibi.

## ABSTRACT

Ph.D. Thesis

### QUENCHING OF SOLUTIONS FOR A PARABOLIC EQUATION

Burhan SELÇUK

Ankara University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Nuri ÖZALP

This thesis consists of six chapters.

The first chapter devoted to the introduction.

In the second chapter, some necessary lemmas and theorems that will be needed for later use are given.

In the third chapter, the quenching behavior of solution of a nonlinear parabolic equation with a singular boundary condition is studied. The finite-time quenching and blow up of time derivative for the solution is proved.

In the fourth chapter, the quenching behavior of solution of a nonlinear parabolic equation with a singular boundary outflux is considered. The finite-time quenching and blow up of time derivative for the solution is proved.

In the fifth chapter, the quenching behavior of solution of a nonlinear parabolic system with a singular boundary condition is studied. The finite-time quenching and blow up of time derivative for the solution is proved.

The sixth chapter devoted to the conclusion.

**January 2014, 43 pages**

**Key Words:** Nonlinear parabolic equation, quenching, singular boundary condition, singular boundary outflux, maximum principles.

## TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan ve çalışmalarım süresince yakın ilgi ve desteğini hiç esirgemeyen Danışman Hocam Doç.Dr. Nuri ÖZALP (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca, akademik çalışmalara yönelmemi sağlayan ve her daim ilgi ve sevgilerini esirgemeyen değerli hocalarım Prof.Dr. Feyzi BAŞAR (Fatih Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)'a, Prof.Dr. Baki KARLIĞA (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)'ya ve Prof.Dr. Ömer AKIN (TOBB ETU Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan aileme de saygı ve sevgilerimi sunarım.

Burhan SELÇUK  
Ankara, Ocak 2014

## İÇİNDEKİLER

|  |     |
|--|-----|
| TEZ ONAY SAYFASI   |     |
| ETİK.....  | i   |
| ÖZET.....  | ii  |
| ABSTRACT.....  | iii |
| TEŞEKKÜR.....  | iv  |
| SİMGELER DİZİNİ.....   | vi  |
| 1. GİRİŞ.....  | 1   |
| 1.1 Sönüm Probleminin Ortaya Çıkışı ve Literatür Özeti.....                    | 1   |
| 1.2 Problem Tespiti.....   | 8   |
| 2. KULLANILAN YÖNTEM VE TEKNİKLER.....   | 10  |
| 2.1 Bir Boyutlu Parabolik Operatörler İçin Maksimum<br>Prensibleri.....        | 10  |
| 2.2 Zayıf Parabolik Sistemlerde Maksimum Prensibleri.....                      | 12  |
| 3. TEKİL SINIR ŞARTLI LİNEER OLMAYAN BİR<br>PARABOLİK DENKLEMİN SÖNÜMÜ.....    | 16  |
| 3.1 Sınırdaki Sönüm ve $u_t$ nin Patlaması.....                                | 17  |
| 3.2 Bir Alt Çözüm ve Sönüm Zamanı için Bir Üst Sınır.....                      | 21  |
| 3.3 Bir Sönüm Oranı ve Sönüm Zamanı Alt Sınırlar.....                          | 23  |
| 4. TEKİL SINIR YAYILIMLI LİNEER OLMAYAN<br>BİR PARABOLİK DENKLEMİN SÖNÜMÜ..... | 25  |
| 4.1 Sınırdaki Sönüm ve $u_t$ nin Patlaması.....                                | 26  |
| 4.2 Bir Sönüm Oranı ve Sönüm Zamanı Alt Sınırlar.....                          | 29  |
| 5. TEKİL SINIR ŞARTLI LİNEER OLMAYAN BİR<br>PARABOLİK SİSTEMİN SÖNÜMÜ.....     | 31  |
| 5.1 Sınırdaki Sönüm ve $u_t$ nin Patlaması.....                                | 32  |
| 5.2 Bir Sönüm Kriteri ve Bir Sönüm Oranı.....                                  | 37  |
| 6. SONUÇLAR.....   | 39  |
| KAYNAKLAR.....   | 40  |
| ÖZGEÇMİŞ.....  | 43  |

## SİMGELER DİZİNİ

$T$  Sönüm Zamanı

$C^{2,1}$   $x$ 'e göre 2.mertebeden,  $t$ 'ye göre 1.mertebeden türevlere sahip fonksiyon uzayı

## 1. GİRİŞ

Isı denklemleri fizikte, kimyada, biyolojide ve değişik mühendislik dallarında hala popülerliğini sürdüren aktif bir çalışma alanıdır. Isı denklemleri teorisi üzerinde yapılan çalışmalar ve bunların uygulamaları son yıllarda oldukça artış göstermektedir. Isı denklemlerini esas alan birçok problem çeşiti mevcuttur. Bunlardan, en çok çalışılanlarından biri patlama problemi. Patlama probleminde, çözümler sonlu bir  $T$  zamanında sonsuza gider, yani patlar. Bir diğeri problem çeşiti ise, patlama probleminin değişik bir versiyonu olan, sönmüm problemi. Patlama ve sönmüm problemleri bir dönüşüm yardımıyla kolaylıkla birbirine dönüştürülebilmektedir.

### 1.1 Sönmüm Probleminin Ortaya Çıkışı ve Literatür Özeti

Sönmüm probleminin 39 yıllık tarihi vardır. 1975 yılında Kawarada, iyonik iletkenlerdeki polarizasyon olayını incelerken aşağıdaki parabolik denklem modelini oluşturmuştur:

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}.$$

Daha sonra, bu denklemi esas alan aşağıdaki ısı yayılım problemini ele alan bir makale yayınladı (Kawarada 1975):

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \frac{1}{1-u}, \quad x \in (0, L), \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad x \in (0, L). \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Bu makalede, sönmüm kavramı ilk kez verilmiş ve ilginç sonuçlar elde edilmiştir.  $T$  sönmüm zamanı sonlu olmak üzere bu sonuçlar:

$$L > 2\sqrt{2} \text{ ise, o zaman } \lim_{t \rightarrow T^-} u(L/2, t) \rightarrow 1 \quad (1.2)$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(L/2, t) \rightarrow 1 \text{ ise, o zaman } \lim_{t \rightarrow T^-} u_t(L/2, t) \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

dur. Dikkat edilirse (1.2) koşulunun gerçekleşmesi durumunda ısı denkleminin kaynağında patlama oluşmaktadır. Bu durumu Kawarada sönüm durumu olarak tanımlamıştır; yani eğer belli bir zamanda eğer kaynak fonksiyonu sonsuza giderse veya, zaman değişkenine göre türev sonsuza giderse çözüm sönümlüdür denir. (1.1) probleminde

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \max_{0 \leq x \leq L} u(x, t) \rightarrow 1 \quad (1.4)$$

veya

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \sup_{0 \leq x \leq L} u_t(x, t) \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

oluştduğundan dolayı çözüm sönümlüdür.  $T$  ye de sönüm zamanı denir.

Son zamanlarda daha revaçta olan bir başka tanım; tekilliğin sınır koşullarında oluşması durumudur. Aşağıdaki çalışmayı (Fila ve Levine 1993) buna örnek verebiliriz:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = -u^{-\beta}(1, t), \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_0 > 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

$T$  sönüm zamanı olmak üzere, (1.6) probleminde Fila ve Levine sönüm tanımı olarak

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \min_{0 \leq x \leq 1} u(x, t) \rightarrow 0$$

durumunu almışlardır.

Birçok matematikçi yıllar boyunca Kawarada'nın ortaya koyduğu bu yeni problem üzerinde çalışmış, bunları geliştirmiş ve genelleştirmişlerdir. Bunun içinde, çeşitli sınır şartlarına sahip sönüm problemlerinin çözümlerinin sönüm davranışını hem analitik yöntemler hem de nümerik yöntemler kullanılarak incelemişlerdir. Ayrıntılı bilgi için Chan (1996a, 1996b) ve Kirk ve Roberts (2003)'ün çalışmaları incelenebilir.

Walter (1976)

$$\left. \begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(u), \quad x \in (-a, a), \quad t > 0, \\ u(-a, t) &= 0, \quad u(a, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad x \in [-a, a], \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

ve Acker ve Walter (1976, 1978)

$$\left. \begin{aligned} u_t - u_{xx} &= g(u, u_x), \quad x \in (-a, a), \quad t > 0, \\ u(-a, t) &= 0, \quad u(a, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad x \in [-a, a], \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

(1.1) problemindeki

$$u_t - u_{xx} = (1 - u)^{-1}$$

ana denkleminde daha genel olan

$$u_t - u_{xx} = f(u)$$

ve

$$u_t - u_{xx} = g(u, u_x)$$

denklemlerini esas alan (1.7) ve (1.8) problemlerini ele alıp, Kawarada'nın sonuçlarını genelleştirmişlerdir. Ayrıca, (1.7) ve (1.8) problemleri için, bir kritik uzunluk  $2a^*$  ın varlığını gösterdiler. Öyle ki, eğer  $a < a^*$  ise, o zaman her bir  $t$  için  $u(x, t)$  vardır, ve eğer  $a > a^*$  ise, o zaman sönüm olayı gerçekleşir. Levine ve Montgomery (1980),  $a = a^*$  durumunda (1.7) probleminin çözümlerinin sönüm davranışını incelediler. Chan ve Chen (1987), monoton iteratif teknik kullanarak, kritik uzunluğu belirleyen bir nümerik metod verdiler. 1988'de Chan ve Kwong, (1.7) ve (1.8) problemlerini ve ayrıca bu problemlerdeki ana denklemleri

$$u_x(-a, t) = c(t), \quad u_x(a, t) = -c(t), \quad t > 0, \quad (1.9)$$

sınır şartları ile alarak, (1.1) problemi için Kawarada'nın (1.3) sonucunun ispatındaki boşlukları doldurmuşlardır.

Levine (1989),  $\varepsilon, \beta > 0$  için aşağıdaki problemleri ele aldı:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \varepsilon (1 - u)^{-\beta}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_0 < 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\u(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = \varepsilon(1 - u(1, t))^{-\beta}, \quad t > 0, \\u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_0 < 1, \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

Çözümlerin sönümü, sönmemesi ve sönüm sonrası için kriterler elde etti. Guo (1990), aynı problemi sınırlarını genişleterek simetrik bir aralıkta yeniden ele aldı:

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + \varepsilon(1 - u)^{-\beta}, \quad -1 < x < 1, \quad t > 0, \\u(-1, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_0 < 1, \quad -1 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

Sonlu birçok sönüm noktasının varlığını ispatladı. Ayrıca, değişken dönüşümü ile sönüm problemini patlama problemine çevirerek, sönüm noktasında çözümlerin asimptotik davranışlarını veren teoremi ispatladı. Daha sonra, Chan ve Özalp (1995), aşağıdaki sınır-değer problemini çalıştılar:

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + f(u), \quad 0 < x < a, \quad t > 0, \\u(0, t) &= 0, \quad u_x(a, t) = -ku(a, t), \quad t > 0, \\u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq a.\end{aligned}$$

Burada,  $k > 0$ , bazı pozitif  $c$  sabitleri için  $f(u) \in C^2[0, c)$  öyle ki  $\lim_{u \rightarrow c^-} f(u) = \infty$ ,  $f(0) > 0$ ,  $f'(u) > 0$  ve  $f''(u) > 0$ ,  $x \in [0, a]$  da  $\varphi'' + f(\varphi) \geq 0$  dır. Sönüm zamanından önce bir klasik çözümün varlığını ve sönüm noktasının yerini gösterdiler. Ayrıca, sınır noktaları hariç sonlu sayıda sönüm noktasının varlığını gösterdiler. Hatta, sönüm zamanında, sönüm noktasında  $u_t$  nin patladığını gösterdiler.

Şimdi, sönümün ikinci tanımını kullanan problemleri hatırlayalım. 1993'de Fila ve Levine, sınırda tekilliğe sahip ısı akışı olan (1.6) problemini incelediler.  $u_0$  üzerindeki belli kabuller altında sönüm noktasını  $x = 1$  olarak buldular. Deng ve Xu (1999),  $0 < \beta$ ,  $m < \infty$  olduğunda aşağıdaki lineer olmayan sınır şartlı lineer olmayan denklemi çalışmışlardır.

$$\begin{aligned}(u^m)_t &= u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = -u^{-\beta}(1, t), \quad t > 0, \\u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

$u$  nun sonlu bir zamanında sadece  $x = 1$  noktasında söndüğünü ve  $c, \check{c} > 0$  için  $T$  söntüm zamanı yakınındaki söntüm oranını  $c < u(1, t)(T - t)^{1/(m+2\beta+1)} < \check{c}$  biçiminde elde ettiler.

Yukarıda bahsedilenler haricinde de çok değişik söntüm problemleri çalışılmıştır. Şimdi, bunlardan önemli birkaçını hatırlayalım. Salin (2003),  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $u_0 \in (0, 1]$  olduğunda

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \ln(\alpha u), \quad x \in (-l, l), \quad t \in (0, T), \\ u(-l, t) &= u(l, t) = 1, \quad t \in [0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in [-l, l] \end{aligned}$$

problemini çalıştı. Başlangıç fonksiyonundaki belli kabuller altında sonlu zamanda söntümün gerçekleştiğini gösterdi. Söntüm noktalarının kümesini elde etti. Ayrıca yukarıdaki probleme  $\alpha u = e^{-v}$  dönüşümü uygulayarak aşağıdaki

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= \alpha v e^v - v_x^2, \quad x \in (-l, l), \quad t \in (0, T), \\ v(-l, t) &= v(l, t) = -\ln(\alpha), \quad t \in [0, T), \\ v(x, 0) &= -\ln(\alpha u_0(x)), \quad x \in [-l, l] \end{aligned}$$

patlama problemine dönüştürdü. Bu yeni problemin patlama olayını ve patlama noktalarının kümesini elde etti. Daha sonra birinci problemin söntüm olayı ile ikinci problemin patlama olaylarının birbirine denk olduğunu gösterdi. Liang vd. (2007) aşağıdaki parabolik problemin nümerik çözümleri için yeni bir uyarlanmış yöntem uyguladılar:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{yy} + f(u), \quad 0 < y < a, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) &= 0 = u(a, t), \quad t \in (0, T), \\ u(y, 0) &= u_0, \quad y \in (0, a). \end{aligned}$$

Burada  $\theta > 0$ ,  $f(u) = (1 - u)^\theta$ ,  $0 \leq u_0 < 1$  dir. Ayrıca  $0 \leq u < 1$  aralığında  $f(u)$  monoton artan bir kaynak fonksiyonu ve  $f(0) = 1$ ,  $\lim_{u \rightarrow 1^-} f(u) = \infty$  dur. Dyakevich (2008),  $p, q > 0$ ,  $T \leq \infty$ ,  $D = (0, a)$ ,  $\bar{D} = [0, a]$ ,  $\Omega = D \times (0, T)$  olduğunda aşağıdaki dejenere yarı-linear parabolik başlangıç sınır-değer problemini çalıştı:

$$\begin{aligned} x^q u_t - u_{xx} &= x^p f(u), \quad \Omega \text{ da,} \\ u_x(0, t) &= 0 = u_x(a, t), \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \bar{D} \text{ da.} \end{aligned}$$

Burada  $f(0) > 0$ ,  $f' > 0$ ,  $f'' \geq 0$  ve  $c$  bazı pozitif sabitler olmak üzere  $\lim_{u \rightarrow c^-} f(u) = \infty$  dur. İlk önce tek klasik çözümün varlığını gösterdi. Daha sonra  $p > q$  olduğunda sadece  $x = a$  sınır noktasında,  $p < q$  olduğunda sadece  $x = 0$  sınır noktasında sönüm olayının gerçekleştiğini ve  $p = q$  olduğunda  $\bar{D}$  nin sönüm kümesi olduğunu gösterdi.

Yukarıdaki bazı örneklerde de görüldüğü gibi, sönüm problemleri ile patlama problemleri arasında yakın bir ilişki vardır. Literatürde, iki ısı kaynağına sahip sönüm problemleri patlama problemlerine göre daha az çalışılmıştır. Bu tür patlama problemlerinden en önemli birini hatırlayalım. Lin ve Wang (1999),  $p, q > 0$  olduğunda aşağıdaki sınırdaki ısı yayımlı yarı-lineer ısı denklemin patlama davranışını incelediler:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u^p, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = u^q(1, t), \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

$\max(p, q) > 1$ ,  $u'_0(x) \geq 0$  ve  $u''_0(x) + u_0^p(x) \geq 0$  olduğunda sonlu zamanda tek patlama noktasının  $x = 1$  olduğunu gösterdiler. Hatta,  $T$  patlama zamanının yakınında patlama oranını elde ettiler.

Şimdi de, iki tekil ısı kaynağına sahip sönüm problemlerine iki örnek verelim. Chan ve Yuen (2001),  $a, p, q > 0$ ,  $T \leq \infty$ ,  $D = (0, a)$ ,  $\Omega = D \times (0, T)$  olduğunda aşağıdaki problemi ele aldılar. Bu problem, İki lineer olmayan kaynağı içeren ilk sönüm problemidir.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad \Omega \text{ da,} \\ u_x(0, t) &= (1 - u(0, t))^{-p}, \quad u_x(a, t) = (1 - u(a, t))^{-q}, \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq u_0(x) < 1, \quad D \text{ de.} \end{aligned}$$

$u_0$  bir alt çözüm olduğunda sonlu zamanda  $x = a$  nın tek sönüm noktası olduğunu ve sönüm zamanında  $u_t$  nin patladığını gösterdiler. Dahası, pozitif kararlı durumu kullanarak sönüm ve sönmemeye için kriterler elde ettiler. Zhi ve Mu (2007),  $p, q > 0$  olduğunda aşağıdaki tekil sınır şartlı yarı-lineer ısı denklemin sönüm davranışını incelediler.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + (1 - u)^{-p}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= u^{-q}(0, t), \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

$u'_0(x) \geq 0$  ve  $u''_0(x) + u_0^p(x) \leq 0$  olduğunda sonlu zamanda tek patlama noktasının  $x = 0$  olduğunu gösterdiler. Hatta,  $T$  sönüm zamanı ve  $C_1, C_2 > 0$  olduğunda, sönüm zamanının yakınında sönüm oranını  $C_1 \leq u(0, t)(T - t)^{1/2(q+1)} \leq C_2$  olarak elde ettiler.

Parabolik sistemler için de, sönüm problemi araştırmacılar tarafından son zamanlarda çok çalışılmıştır. Bunlardan iki tanesini hatırlayalım. (Pablo vd. 2002) aşağıdaki parabolik sistemin sönümünü araştırdılar;

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - v^{-p}, \quad v_t = v_{xx} - u^{-q}, \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u_x(0, t) &= v_x(0, t) = u_x(1, t) = v_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Burada,  $p, q > 0$  ve  $u_0, v_0$  pozitif düzgün bir fonksiyon ve sınırlarda uyumluluk şartlarını sağlar.  $u'_0, v'_0 \geq 0$ ,  $u''_0 - v_0^{-p}, v''_0 - u_0^{-q} < 0$  şartları sağladığında, sonlu zamanda tek sönüm noktası olarak  $x = 0$  elde ettiler. Ayrıca, sönüm zamanında  $(u_t, v_t)$  nin patladığını gösterdiler. Sening ve Xianfa (2008), aşağıdaki parabolik sistemin sönümünü araştırdılar;

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad v_t = v_{xx}, \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = -v^{-p}(1, t), \quad t \in (0, T), \\ v_x(0, t) &= 0, \quad v_x(1, t) = -u^{-q}(1, t), \quad t \in (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Burada,  $p, q > 0$  ve  $u_0, v_0$  pozitif düzgün bir fonksiyon ve sınırlarda uyumluluk şartlarını sağlar.  $u'_0, u''_0, v'_0, v''_0 \leq 0$  şartları sağladığında, sonlu zamanda tek sönüm noktası olarak  $x = 1$  elde ettiler. Son olarak, parabolik sistemler için patlama problemlerinin en önemlilerinden birini hatırlayalım.

Fu ve Guo (2002),  $p_1, p_2, q_1, q_2 > 0$  olduğunda aşağıdaki sınırdaki ısı yayımlı yarı-

lineer parabolik sistemin patlama davranışını incelediler:

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} + v^{p_1}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\
v_t &= v_{xx} + u^{p_2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\
u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = v^{q_1}(1, t), \quad t > 0, \\
v_x(0, t) &= 0, \quad v_x(1, t) = u^{q_2}(1, t), \quad t > 0, \\
u(x, 0) &= u_0(x) < 1, \quad v(x, 0) = v_0(x) < 1, \quad 0 \leq x \leq 1
\end{aligned}$$

$\max(p_1 p_2, q_1 q_2, p_1 q_2, p_2 q_1) > 1$  ve  $u'_0(x), v'_0(x) \geq 0$  olduğunda sonlu zamanda tek patlama noktasının  $x = 1$  olduğunu gösterdiler. Hatta,  $T$  patlama zamanının yakınında patlama oranlarını elde ettiler.

## 1.2 Problem Tespiti

Literatürde, iki tekil ısı kaynağına sahip lineer olmayan parabolik denklemler ve bu tür iki denklemden oluşan parabolik sistemler için sönüm problemi çok az çalışılmıştır. Bu çalışmada, aşağıdaki problemlerin sönüm davranışını inceleyeceğiz.

**Problem 1.1** *Aynı tip iki tekil ısı kaynağına sahip (biri parabolik denklemin tanımlı olduğu bölgenin içinde ve diğeri parabolik bölgenin sınırında) bir parabolik problemin sönüm davranışını araştıracağız. Bunun için de, aşağıdaki ısı yayılım modelini ele alacağız:*

$$\left. \begin{aligned}
u_t &= u_{xx} + (1 - u)^{-p}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\
u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = (1 - u(1, t))^{-q}, \quad 0 < t < T, \\
u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1.
\end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Burada,  $p$  ve  $q$  pozitif sabitler,  $T \leq \infty$  dur. İlk olarak, sonlu zamanda sönüm olayının sadece sınırdaki gerçekleştiğini ve sönüm anında  $u_t$  nin patladığını göstereceğiz. Bu problem için bir alt çözüm elde edip, bu alt çözümün yardımıyla sönüm zamanı için bir üst sınır elde edeceğiz. Son olarak da, sönüm oranları elde edip bu sönüm oranları yardımıyla sönüm zamanı için alt sınırlar elde edeceğiz.

**Problem 1.2** *Farklı tip iki tekil ısı kaynağına sahip (biri parabolik denklemin tanımlı olduğu bölgenin içinde ve diğeri parabolik bölgenin sınırında) bir parabolik problemin*

sönüm davranışını araştıracağız. Bunun için de, aşağıdaki ısı yayılım modelini ele alacağız:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + (1 - u)^{-p}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = -u^{-q}(1, t), \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Burada,  $p$  ve  $q$  pozitif sabitler,  $T \leq \infty$  dur. İlk olarak, sonlu zamanda sönüm olayının sadece sınırdaki gerçekleştiğini ve sönüm anında  $u_t$  nin patladığını göstereceğiz. Son olarak da, bir sönüm oranı elde edip bu sönüm oranı yardımıyla sönüm zamanı için bir alt sınır elde edeceğiz.

**Problem 1.3** İki tekil ısı kaynağına sahip iki parabolik denklemden oluşan bir parabolik sistemin sönüm davranışını araştıracağız. Bunun için de, aşağıdaki ısı yayılım modelini ele alacağız:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + (1 - v)^{-p_1}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ v_t &= v_{xx} + (1 - u)^{-p_2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = (1 - v(1, t))^{-q_1}, \quad 0 < t < T, \\ v_x(0, t) &= 0, \quad v_x(1, t) = (1 - u(1, t))^{-q_2}, \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= u_0(x) < 1, \quad v(x, 0) = v_0(x) < 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Burada,  $p_1, p_2, q_1$  ve  $q_2$  pozitif sabitler,  $T \leq \infty$  dur. İlk olarak, sonlu zamanda sönüm olayının sadece sınırdaki gerçekleştiğini ve sönüm anında  $(u_t, v_t)$  nin patladığını göstereceğiz. Son olarak da, bir karşılaştırma teoremi kullanılarak bir sönüm kriteri ve bir sönüm oranı elde edeceğiz.

## 2. KULLANILAN YÖNTEM VE TEKNİKLER

Kısmi türevli denklemler teorisinde maksimum-minimum problemleri önemli yer tutarlar. Özellikle başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümlerinde kısmi türevli denklem, denklemin tanımlı olduğu bölge, bölgenin sınırı ile verilen başlangıç ve sınır şartlarının yapısı önemlidir. Çoğu zaman denklemin veya verilen sınır şartlarının durumlarına göre problemin çözümünde maksimum ve minimum değerlerinin önemi büyüktür. Problemin çözüm karakteri maksimum ve minimum prensipleri yardımıyla incelenebilir. Fiziksel olarak gerçekleşen ısı yayılım problemi için çözüm davranışlarını çoğu zaman maksimum prensibi yardımıyla inceleyebiliriz.

Eliptik ve parabolik tipten kısmi türevli denklemlerin genel incelemelerinde de maksimum prensibi önemli bir yer tutar. Özellikle, patlama ve sönüm problemlerinde sıklıkla kullanılan maksimum prensipleri ve Hopf lemmasını hatırlayalım (Protter ve Weinberger 1967).

### 2.1 Bir Boyutlu Parabolik Operatörler için Maksimum Prensibleri

Bu kısımdaki teoremler ve lemmalar ispatsız olarak verilecektir.

**Tanım 2.1** *Bir  $(x, t)$  noktasında eğer  $a(x, t) > 0$  ise (reaksiyon-difüzyon denklemini sağlayacak şekilde), o zaman*

$$L[u] \equiv a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

*operatörüne paraboliktir denir. Eğer,  $xt$ -düzleminin bir  $D$  bölgesindeki herbir  $(x, t)$  elemana için*

$$a(x, t) \geq \mu$$

*olacak şekilde bir  $\mu > 0$  sabiti var ise,  $L$  ye  $D$  bölgesinde düzgün paraboliktir denir.*

**Teorem 2.1** *( $a(x, t) \equiv 1, b(x, t) \equiv 0$  durumu)  $E = (0, l) \times (0, t)$ ,  $S_1 = \{x = 0, 0 \leq t \leq T\}$ ,  $S_2 = \{0 \leq x \leq l, t = 0\}$  ve  $S_3 = \{x = l, 0 \leq t \leq T\}$  olsun. Bir dikdörtgensel*

$E$  bölgesinde  $u(x, t)$  fonksiyonu

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

eşitsizliğini sağlasın. O halde  $u$  nun maksimum değeri  $E \cup \partial E$  kapalı bölgesinin  $S_1, S_2$  ya da  $S_3$  kenarlarından birinde olmalıdır.

**Lemma 2.1**  $u(x, t)$  fonksiyonu,  $xt$  - düzleminin bir  $E$  bölgesinde

$$L[u] \equiv a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

düzgün parabolik eşitsizliğinin bir çözümü ve  $a(x, t), b(x, t)$  sınırlı olsun.  $K$  bir disk olsun. Öyle ki  $K$  nın  $\partial K$  sınırı  $E$  bölgesinin içinde olsun. Kabul edelim ki  $u$  nun maksimumu olan  $M$ ,  $E$  bölgesinde,  $K$  nın içinde  $u < M$ ,  $K$  nın sınırındaki bazı  $p$  noktalarında  $u = M$  olsun. O takdirde  $p$  noktası  $K$  ya teğet  $x$ -eksenine paraleldir. (Yani,  $p$  noktası  $K$  diskinde ya en alt ya da en üst noktadır.)

**Lemma 2.2** Kabul edelim ki  $xt$  - düzleminin bir  $E$  bölgesinde  $u(x, t)$  fonksiyonu, Lemma 2.1. deki  $L$  operatörü için  $L[u] \geq 0$  eşitsizliğini,  $E$  nin bir  $(x_0, t_0)$  iç noktasında  $u < M$  ve  $E$  nin tamamında  $u \leq M$  sağlasın. Eğer  $I$ ,  $(x_0, t_0)$  noktasını kapsayan yatay bir yol ise o takdirde  $I$  üzerinde  $u < M$  dir.

**Uyarı 2.1** Lemma 2.2. ye göre bölge içerisindeki bir doğru üzerinde  $u \equiv M$  olacak şekilde bir tek nokta bulunabiliyorsa, o takdirde bu doğru üzerindeki her noktada  $u \equiv M$  dir.

**Lemma 2.3**  $xt$  - düzleminin bir  $E$  bölgesinde  $u(x, t)$  fonksiyonu, Lemma 2.1. deki  $L$  operatörü için  $L[u] \geq 0$  eşitsizliğini sağlasın.  $t_0, t_1$  sabitleri için  $t_0 < t < t_1$  şeridi boyunca  $E$  nin bir kısmında  $u < M$  olsun. Buna göre,  $E$  nin içinde kalan  $t = t_1$  şeridinin bir kısmında  $u \equiv M$  dir.

**Teorem 2.2**  $xt$  - düzleminin bir  $E$  bölgesinde  $u(x, t)$  fonksiyonu

$$L[u] \equiv a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

düzgün parabolik eşitsizliğinin bir çözümü ve  $a(x, t), b(x, t)$  sınırlı olsun. Eğer,  $E$  nin bir  $(x_1, t_1)$  iç noktasında  $u(x, t)$  fonksiyonu,  $M$  maksimum değerine ulaşıyor ve  $E$  de  $(x_1, t_0)$  noktasını içeren  $x = x_1, t_0 \leq t \leq t_1$  bir dikey şeriti var ise, o takdirde  $E$  deki herbir  $t = t_0$  doğru parçası boyunca  $u \equiv M$  dir.

**Lemma 2.4** (Hopf Lemması)  $xt$  - düzleminin bir  $E$  bölgesinde  $u(x, t)$  fonksiyonu

$$L[u] \equiv a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

düzgün parabolik eşitsizliğinin bir çözümü ve  $a(x, t), b(x, t)$  sınırlı olsun.  $P, \partial E$  sınırında  $u$  nun maksimuma ulaştığı nokta ve  $P$  noktasından  $\partial E$  ye çizilen normal,  $t$  eksenine paralel olmasın.  $E$  nin içinde  $p$  noktasında  $\partial E$  ye teğet bir çember çizilebilsin ve bu bölgede  $u < M$  olsun. Eğer  $\frac{\partial}{\partial \nu}, E$  den dış yönlü türevi mevcut ise o takdirde  $P$  noktasında  $\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$  dir.

**Teorem 2.3** Kabul edelim ki, bir  $E$  bölgesinde Teorem 2.2 nin hipotezleri sağlansın,  $E$  de  $h \leq 0$  ve  $[L + h][u] \geq 0$  olsun. Eğer,  $E$  nin bir  $(x_1, t_1)$  iç noktasında  $u(x, t)$  fonksiyonu,  $M$  maksimum değerine ulaşıyor ve eğer  $M \geq 0$  ise, Teorem 2.2 nin sonuçları sağlanır. Ayrıca, eğer bir  $P$  sınır noktasında  $M \geq 0$  ise, o zaman  $P$  noktasında Lemma 2.4 nin sonuçları sağlanır.

## 2.2 Zayıf Parabolik Sistemlerde Maksimum Prensibleri

Şimdi, zayıf parabolik sistemlerin, patlama ve sönüm problemleri araştırılırken sıklıkla kullandığımız güçlü maksimum prensibini ve Hopf lemmasını hatırlayalım.

Bir ikinci mertebeden parabolik eşitsizlikleri sağlayan fonksiyonlar için maksimum prensibi, parabolik eşitsizliklerin belli sistemlerine genişletilebilir.  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  fonksiyonunun elemanları

$$u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_k(x, t)$$

olsun.  $n$ -boyutlu Öklid uzayının bir elemanı olan  $\mathbf{x}$  vektörünün bileşenleri  $x_1, x_2, \dots, x_n$  olsun.  $\mathbf{u}$  vektörü ile  $\mathbf{x}$  vektörünü birlikte düşündüğümüzde

$$L_v \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(v)}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^{(v)}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t}, \quad v = 1, 2, \dots, k$$

şeklinde  $k$  adet düzgün parabolik operatörler elde edilir. İlaveten, elemanları  $\{h_{uv}(x, t)\}$ ,  $\mu, v = 1, 2, \dots, k$  olan  $k \times k$  lık bir  $H = H(\mathbf{x}, t)$  fonksiyonlarını tanımlayalım.

Bir maksimum prensibi kurmak için parabolik eşitsizliklerin sistemi aşağıdaki formda olmalıdır:

$$\left. \begin{aligned} L_1[u_1] + \sum_{v=1}^k h_{1v}u_v &\geq 0, \\ L_2[u_2] + \sum_{v=1}^k h_{2v}u_v &\geq 0, \\ &\vdots \\ L_k[u_k] + \sum_{v=1}^k h_{kv}u_v &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

(2.1) in herbir eşitsizliği sadece bir bileşenin türevini içermektedir. Sistem terimlerin sadece çiftleşmesidir, yani terimler farklılaşmamıştır. Bu formdaki bir sistem "*zayıf birleşmiş (weakly coupled)*" olarak adlandırılır. Böyle sistemler, kendiliğinden çürümüş birkaç maddenin eşzamanlı yayılmasında ortaya çıkar.

$H$  matrisinin köşegen üzerinde bulunmayan elemanları için ek bir kabul yapacağız. Bu da,  $\mu \neq v$  için

$$h_{\mu v} \geq 0, \quad \mu, v = 1, 2, \dots, k \quad (2.2)$$

dir.  $v = 1, 2, \dots, k$  için,  $u_v$  her bileşeni negatif ise ( $u_v < 0$ ),  $\mathbf{u} < 0$  notasyonunu kullanacağız. Benzer tanım, herbir bileşen pozitif olmadığında da geçerlidir.

$(n + 1)$ -boyutlu uzayda  $E = D \times (0, T)$  formundaki bir bölgede, aşağıdaki kesin eşitsizlikleri sağlayan  $\mathbf{u}$  vektör değerli fonksiyonları için bir maksimum prensibi ispatlamak kolaydır:

$$L_\mu[u_\mu] + \sum_{v=1}^k h_{\mu v}u_v \geq 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, k. \quad (2.3)$$

Kabul edelim ki, bütün  $a_{ij}^{(v)}, b_i^{(v)}, h_{\mu v}$  katsayıları  $E$  de sınırlı olsun. Göstereceğiz ki, eğer  $t = 0$  (başlangıç hattı) ve  $\partial D \times (0, T)$  üzerinde  $\mathbf{u} < 0$  ise, o zaman  $E$  de  $\mathbf{u} < 0$  dir. Bunu yapmak için,  $E$  de bir  $(\mathbf{x}, t)$  noktasında  $\mathbf{u} < 0$  eşitsizliğinin geçerli olmadığını kabul edelim.  $\bar{t}$ ,  $E$  de  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) < 0$  sağlayan  $t$  değerlerinin üst sınırlarının minimumu olsun. O zaman, süreklilikten, görülür ki  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \bar{t}) \leq 0$  ve,  $E$  deki bazı  $(\bar{x}, \bar{t})$  noktasında  $\mathbf{u}$  nun bileşenlerinden biri sıfır olur. Yani, en az bir  $u_\tau$  bileşeni için,  $u_\tau(\bar{x}, \bar{t}) = 0$  elde ederiz.  $t \leq \bar{t}$  için  $\mathbf{u} \leq 0$  olduğundan

$$L_\tau[u_\tau] \leq 0, \quad (\bar{x}, \bar{t}) \text{ de,} \quad (2.4)$$

ve, (2.2) den,

$$\sum_{v=1}^k h_{\tau v} u_v \leq 0, (\bar{x}, \bar{t}) \text{ de} \quad (2.5)$$

elde ederiz. (2.4) ve (2.5) eşitsizliklerini birlikte düşündüğümüzde bu durum, (2.3) deki  $\tau$  inci eşitsizlik ile çelişir. Bu çelişikiden,  $E$  de  $\mathbf{u} < 0$  sonucunu elde ederiz.

(2.1) eşitsizlikleri yerine (2.3) ü sağlayan pozitif olmayan  $\mathbf{u}$  fonksiyonları için bir maksimum prensibi elde etmek için,  $E$  boyunca aşağıdaki eşitsizliğini sağlayan bir  $\beta$  sabiti seçelim:

$$\beta - \sum_{v=1}^k h_{\mu v}(x, t) > 0, \mu = 1, 2, \dots, k.$$

Bu seçim  $H$  ın elemanları  $E$  de sınırlı olduğunda daima doğrudur. O zaman, eğer  $\mathbf{u}$ ,  $E$  de (2.1) eşitsizliklerini sağlarsa, herhangi bir  $\epsilon > 0$  için görülür ki,  $E$  de

$$L_{\mu}[u_{\mu} - \epsilon e^{\beta t}] + \sum_{v=1}^k h_{\mu v}[u_{\mu} - \epsilon e^{\beta t}] > 0, \mu = 1, 2, \dots, k$$

dır.

Şimdi, bileşenleri  $v_{\mu} = u_{\mu} - \epsilon e^{\beta t}$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, k$  olan bir  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  fonksiyonu tanımlayalım ve not edelim ki  $t = 0$  (başlangıç hattında) ve  $\partial D \times (0, T)$  üzerinde  $\mathbf{u} \leq 0$  ise, noktaların aynı kümesi üzerinde  $\mathbf{v} < 0$  olmasını gerektirir. Kesin eşitsizlik sistemini sağlayan fonksiyonlar için yukarıda kurulan maksimum prensibi her bir  $\epsilon > 0$  ve  $\mathbf{v}$  için geçerlidir.  $\epsilon \rightarrow 0$  aldığımızda,  $E$  de  $\mathbf{u} \leq 0$  sonucu elde ederiz.  $\mu \neq v$  için  $h_{\mu v} \geq 0$  eşitsizliğinden,  $u_{\mu}$  nin her bir elemanı  $E$  de

$$L_{\mu}[u_{\mu}] + h_{\mu v} u_{\mu} \geq 0$$

dır. Herhangi bir  $\beta > 0$  sabiti için,  $E$  de bu eşitsizliği aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$L_{\mu}[e^{\beta t} u_{\mu}] + (h_{\mu v} + \beta) e^{\beta t} u_{\mu} \geq 0.$$

$E$  de  $h_{\mu v} + \beta \geq 0$  eşitsizliğini sağlayan yeterince büyük  $\beta$  yı çözelim.  $E$  de,  $u_{\mu} \leq 0$  olduğundan,

$$\left. \begin{array}{l} L_{\mu}[e^{\beta t} u_{\mu}] \geq 0, E \text{ de,} \\ (h_{\mu v} + \beta) e^{\beta t} u_{\mu} \leq 0, t = 0 \text{ ve } \partial D \times (0, T) \text{ üzerinde} \end{array} \right\}$$

olduğu görülür. Düzgün parabolik operatörler için maksimum prensibinden, eğer bazı  $(x_0, t_0)$  iç noktalarında  $u_\mu = 0$  ise, o zaman  $t \leq t_0$  için  $u_\mu \equiv 0$  dır. Bu, aşağıdaki güçlü maksimum prensibinden elde edilir.

**Teorem 2.4** (Güçlü maksimum prensibi)  $\mathbf{u}$ , bir  $E = D \times (0, T)$  bölgesinde (2.1) eşitsizliğini (düzgün parabolik sistemler için) sağlasın. Eğer,  $t = 0$  (başlangıç hattı) ve  $\partial D \times (0, T)$  üzerinde  $\mathbf{u} \leq 0$  ve  $H$ , (2.2) eşitsizliğini sağlar ise, o zaman  $E$  de,  $\mathbf{u} \leq 0$  dır. Dahası, eğer bir noktada  $u_\mu = 0$  ise, o zaman  $t \leq t_0$  için  $u_\mu \equiv 0$  dır.

**Lemma 2.5** (Hopf lemması) Bir  $E = D \times (0, T)$  bölgesinde,  $\mathbf{u}$ , (2.1) eşitsizliklerini ve  $H$ , (2.2) eşitsizliğini sağlasın. O zaman  $\mathbf{u} \leq 0$  dır (Teorem 2.4). Ayrıca, eğer  $u_\tau$  nun bazı elemanları  $\partial D \times (0, T)$  sınırının bir  $P$  noktasında 0 değerini alır ise, ve  $E$  de sınırında  $P$  noktasına sahip bir  $K$  küresi var ve  $K$  da  $u_\tau < 0$  ise, o zaman  $\partial/\partial v$  herhangi bir yöndeki dış normal türev olduğunda  $P$  noktasında

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial v} > 0$$

dır.

### 3. TEKİL SINIR ŞARTLI LİNEER OLMAYAN BİR PARABOLİK DENKLEMİN SÖNÜMÜ

Bu bölümde, problem (1.10) un sönüm davranışını inceleyeceğiz.  $p$  ve  $q$  pozitif sabitler ve  $T \leq \infty$  olduğunda, aşağıdaki ısı yayılım modelini ele alalım:

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + (1 - u)^{-p}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = (1 - u(1, t))^{-q}, \quad 0 < t < T, \\u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

Burada  $u(x, t) \in C^{2,1}$ , problem (1.10) un bir çözümü olsun. Yeterince düzgün ve sınırdaki

$$u'_0(0) = 0, u'_0(1) = (1 - u_0(1))^{-q}$$

uyumluluk şartları sağlanacak şekilde başlangıç fonksiyonunu  $u_0 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  seçelim.

Ayrıca, bu bölüm boyunca, problem (1.10) için başlangıç hattı ( $0 < x < 1$ ) üzerinde,  $u_0(x)$  başlangıç fonksiyonunun

$$u_{xx}(x, 0) + (1 - u(x, 0))^{-p} \geq 0, \quad (3.1)$$

$$u_x(x, 0) \geq 0 \quad (3.2)$$

şartlarını sağlandığını kabul edeceğiz. Ek olarak, Kesim 3.3 de aşağıdaki şartların geçerli olduğunu kabul edeceğiz:

$$u_x(x, 0) \geq x(1 - u(x, 0))^{-q}, \quad 0 < x < 1, \quad (3.3)$$

$$u_t(1, t) = u_{xx}(1, t) + (1 - u(1, t))^{-p}, \quad 0 < t < T. \quad (3.4)$$

Bu problem için amacımız, biri parabolik denklemin tanımlı olduğu bölgenin içinde ve diğeri sınırdaki ısı yayılımına sahip aynı tipten iki tekil ısı kaynağına sahip problem (1.10) un sönüm davranışını incelemektir. İlk olarak, bu problem için sönüm tanımını verelim.

**Tanım 3.1** *Sonlu bir  $T$  zamanı için problem (1.10) un bir  $u(x, t)$  çözümü vardır öyle ki*

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \max\{u(x, t) : 0 \leq x \leq 1\} \rightarrow 1$$

*oluyorsa, problem (1.10) a Sönüm Problemi denir. Bundan sonra problem (1.10) için sönüm zamanını  $T$  ile göstereceğiz.*

İlk olarak, (3.1) şartı altında sonlu zamanda sönümün gerçekleştiğini ispatlayacağız. Daha sonra, (3.1) ve (3.2) şartları altında sönümün sadece  $x = 1$  noktasında gerçekleştiğini ispatlayacağız. Nihayet,  $t \rightarrow T^-$  iken  $x = 1$  sönüm noktasında  $u_t$  nin patladığını göstereceğiz. Daha sonra, problem (1.10) için, bir alt çözüm elde edeceğiz. Bu alt çözüm yardımıyla, problem (1.10) un  $u$  çözümünün  $x = 1$  de sönüdüğünü göstereceğiz ve sönüm zamanı için bir üst sınır hesaplayacağız. Son olarak, (3.3) ve (3.4) şartları altında sönüm oranları elde edeceğiz. Bu sönüm oranlarından yararlanarak sönüm zamanı için alt sınırlar elde edeceğiz.

### 3.1 Sınırdaki Sönüm ve $u_t$ nin Patlaması

İlk olarak, (3.1), (3.2) ve uyumluluk şartlarını sağlayan bir  $u_0(x)$  başlangıç fonksiyonu verelim.

**Uyarı 3.1**  $0 < A < 1$ ,  $\alpha = \frac{1}{A(1-A)} > 1$  olmak üzere  $u(x, 0) = Ax^\alpha$  alalım. Gerçekten de,  $q = 1$  için

$$\begin{aligned} u_x(x, 0) &= A\alpha x^{\alpha-1} > 0, \\ u_{xx}(x, 0) + (1 - u(x, 0))^{-p} &= A\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} + \frac{1}{(1 - Ax^\alpha)^p} > 0, \\ u_x(0, 0) &= 0, \\ u_x(1, 0) &= \frac{1}{(1 - u(1, 0))} \implies A\alpha = \frac{1}{(1 - A)} \end{aligned}$$

sağlanır. Örneğin,  $q = 1$  ve  $A = 0.5$  için,  $u(x, 0) = \frac{1}{2}x^4$  başlangıç fonksiyonu (3.1), (3.2) ve uyumluluk şartlarını sağlar.

**Uyarı 3.2**  $u_0(x)$ , (3.2) şartını sağlasın.  $v = u_x(x, t)$  alalım.  $v(x, t)$  aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + p(1-u)^{-p-1}v, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ v(0, t) &= 0, \quad v(1, t) = (1-u(1, t))^{-q} > 0, \quad 0 < t < T, \\ v(x, 0) &= u_x(x, 0) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Maksimum prensibinden  $(0, 1] \times (0, T)$  de  $v(x, t) > 0$  ve böylece  $u_x(x, t) > 0$  dir.

Ayrıca  $u(1, t) = \max_{0 \leq x \leq 1} u(x, t)$  elde ederiz.

**Lemma 3.1**  $u_0(x)$ , (3.1) şartını sağlasın. O zaman,  $[0, 1] \times [0, T)$  de  $u_t(x, t) \geq 0$  dir.

**İspat.** (Fu vd. 2003) deki Lemma 3.1 den faydalanalım.  $v = u_t(x, t)$  alalım.  $v(x, t)$

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + p(1-u)^{-p-1}v, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ v_x(0, t) &= 0, \quad v_x(1, t) = q(1-u(1, t))^{-q-1}v(1, t), \quad 0 < t < T, \\ v(x, 0) &= u_{xx}(x, 0) + (1-u(x, 0))^{-p} \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

sağlar. Herhangi bir  $\tau \in (0, T)$  için

$$\begin{aligned} L &= \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} \left( \frac{1}{2}q(1-u(x, t))^{-q-1} \right), \\ M &= 2L + 4L^2 + \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} (p(1-u(x, t))^{-p-1}) \end{aligned}$$

alalım.  $w(x, t) = e^{-Mt-Lx^2}v(x, t)$  dönüşümünü uygulayalım. Buradan

$$c(x, t) = 4L^2(x^2 - 1) + p(1-u(x, t))^{-p-1} - \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} (p(1-u(x, t))^{-p-1}) \leq 0$$

olduğunda

$$W_t = W_{xx} + 4LxW_x + cW$$

eşitliğini ve

$$d(t) = - \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} (q(1-u(x, t))^{-q-1}) + q(1-u(1, t))^{-q-1} \leq 0$$

olduğunda

$$W_x(1, t) = d(t)W(1, t)$$

eşitliğini sağlar. Yukarıdakilerden  $c = c(x, t) \leq 0$  ve  $d = d(t) \leq 0$  olduğunda  $w(x, t)$

$$\begin{aligned} w_t &= w_{xx} + 4Lxw_x + cw, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq \tau, \\ w_x(0, t) &= 0, \quad w_x(1, t) = d(t)w(1, t), \quad 0 < t \leq \tau, \\ w(x, 0) &\geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

sağlar. Maksimum prensibi ve Hopf lemmasından,  $[0, 1] \times [0, \tau]$  da  $w(x, t) \geq 0$  elde ederiz. Böylece  $[0, 1] \times [0, T)$  de  $u_t(x, t) \geq 0$  dir. ■

**Teorem 3.1**  $u_0$ , (3.1) şartını sağlasın.  $O$  zaman sonlu bir  $T$  zamanı vardır öyle ki problem (1.10) un  $u$  çözümü  $T$  de söner.

**İspat.** Kabul edelim ki  $u_0$ , (3.1) şartını sağlasın. (3.1) şartını  $x$  e göre 0 dan 1 e integral alırsak

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_{xx}(x, 0) dx + \int_0^1 (1 - u(x, 0))^{-p} dx &\geq \int_0^1 0 dx \\ u_x(1, 0) - u_x(0, 0) + \int_0^1 (1 - u(x, 0))^{-p} dx &> 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edelim;

$$\omega = (1 - u(1, 0))^{-q} + \int_0^1 (1 - u(x, 0))^{-p} dx > 0$$

Kütle fonksiyonumuz  $m(t) = \int_0^1 (1 - u(x, t)) dx$ ,  $0 < t < T$  olsun.  $O$  zaman, Lemma 3.1 den

$$\begin{aligned} m'(t) &= - \int_0^1 u_t(x, t) dx \\ &= - \int_0^1 (u_{xx}(x, t) + (1 - u(x, t))^{-p}) dx \\ &= -u_x(1, t) + u_x(0, t) - \int_0^1 (1 - u(x, t))^{-p} dx \\ &= - (1 - u(1, t))^{-q} - \int_0^1 (1 - u(x, t))^{-p} dx \leq -\omega \end{aligned}$$

elde ederiz. Yukarıdaki son eşitsizlikte 0 dan  $t$  ye integral alırsak  $m(t) \leq m(0) - \omega t$  elde ederiz. Bu da, bazı  $T_0$ , ( $0 < T \leq T_0$ ) için  $m(T_0) = 0$  olmasını gerektirir. Böylece  $u$  sonlu bir  $T$  zamanında söner. ■

**Teorem 3.2**  $u_0$ , (3.1) ve (3.2) şartlarını sağlasın.  $O$  zaman  $x = 1$  tek sönüm noktasıdır.

**İspat.**  $\eta \in (0, 1)$ ,  $\tau \in (0, T)$  ve  $\varepsilon$  sonradan belirlenecek pozitif bir sabit olduğunda  $[1 - \eta, 1] \times [\tau, T)$  de

$$J(x, t) = u_x - \varepsilon(x - (1 - \eta))$$

yardımcı fonksiyonunu tanımlayalım. O zaman,  $(0, 1] \times (0, T)$  de  $u_x(x, t) > 0$  olduğundan  $(1 - \eta, 1) \times (\tau, T)$  de

$$J_t - J_{xx} = p(1 - u)^{-p-1}u_x > 0$$

elde ederiz. Ayrıca  $(0, 1] \times (0, T)$  de  $u_x(x, t) > 0$  ve  $\varepsilon$  yeterince küçük olduğunda  $J(x, \tau) > 0$  dir. Dahası  $\varepsilon$  yeterince küçük olduğunda  $t \in (\tau, T)$  için

$$J(1 - \eta, t) = u_x(1 - \eta, t) > 0,$$

$$J(1, t) = (1 - u(1, t))^{-q} - \varepsilon\eta > 1 - \varepsilon\eta > 0$$

dir. Maksimum prensibinden,  $(x, t) \in [1 - \eta, 1] \times [\tau, T)$  için  $J(x, t) > 0$  yani  $u_x > \varepsilon(x - (1 - \eta))$  elde ederiz. Bu son eşitsizliği  $x$  e göre  $1 - \eta$  den  $1$  e integrallersek

$$u(1 - \eta, t) < u(1, t) - \frac{\varepsilon\eta^2}{2} < 1 - \frac{\varepsilon\eta^2}{2}$$

elde ederiz. Böylece  $[0, 1)$  de sönüm gerçekleşmez. Teorem 3.1 den  $x = 1$  in tek sönüm noktası olduğu görülür. Teorem ispatlandı. ■

**Teorem 3.3**  $x = 1$  sönüm noktasında  $u_t$  patlar.

**İspat.** Chan ve Yuen (2001)'deki gibi sönüm anında  $u_t$  nin patladığını ispatlayalım. Kabul edelim ki  $[0, 1] \times [0, T)$  de  $u_t$  sınırlı olsun. O zaman bir  $M$  pozitif sabiti vardır öyle ki  $u_t < M$  dir. Yani,  $u_{xx} + (1 - u)^{-p} < M \Rightarrow u_{xx} < M$  dir.  $x$  e göre, önce  $x$  den  $1$  e sonra  $0$  dan  $1$  e olacak şekilde iki kez integral alırsak

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_x^1 u_{xx}(x, t) dx \right) dx &< \int_0^1 \left( \int_x^1 M dx \right) dx \\ \int_0^1 (u_x(1, t) - u_x(x, t)) dx &< M \int_0^1 (1 - x) dx \\ u_x(1, t) - u(1, t) + u(0, t) &< \frac{M}{2} \\ \frac{1}{(1 - u(1, t))^q} &< \frac{M}{2} + u(1, t) - u(0, t) \end{aligned}$$

elde ederiz.  $t \rightarrow T^-$  iken, eşitsizliğin sol yanı sonsuz iken sağ yanı sonludur. Bu çelişkidten  $u_t$  nin sönüm noktasında patladığı görülür. ■

### 3.2 Bir Alt Çözüm ve Sönüm Zamanı için Bir Üst Sınır

**Tanım 3.2**  $\mu$  aşağıdaki şartları sağlar ise, problem (1.10) un bir alt çözümü olarak adlandırılır:

$$\begin{aligned}\mu_t - \mu_{xx} &\leq (1 - \mu)^{-p}, \quad 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ \mu_x(0, t) &= 0, \quad \mu_x(1, t) \leq (1 - \mu(1, t))^{-q}, \quad 0 < t < T, \\ \mu(x, 0) &\leq u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

Eşitsizlikler yön değiştirirse bir üst çözüm elde ederiz.

**Lemma 3.2**  $u$  ve  $\mu$ , sırasıyla  $[0, 1] \times [0, T)$  de problem (1.10) un bir çözümü ve alt çözümü olsun.  $O$  zaman,  $[0, 1] \times [0, T)$  de  $u \geq \mu$  dir.

**İspat.** Lemma 3.1 deki yöntemi kullanacağız. İlk önce,  $v(x, t) = u(x, t) - \mu(x, t)$  alalım.  $\eta(x, t)$  ve  $\xi(1, t)$  sırasıyla,  $u(x, t)$  ve  $\mu(x, t)$ ,  $u(1, t)$  ve  $\mu(1, t)$  arasında olduğunda  $v(x, t)$

$$\begin{aligned}v_t &\geq v_{xx} + p(1 - \eta)^{-p-1}v, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ v_x(0, t) &= 0, \quad v_x(1, t) \geq q(1 - \xi(1, t))^{-q-1}v(1, t), \quad 0 < t < T, \\ v(x, 0) &\geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1\end{aligned}$$

sağlar. Herhangi bir  $\tau \in (0, T)$  için,

$$\begin{aligned}L &= \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} \left( \frac{1}{2}q(1 - \xi(x, t))^{-q-1} \right), \\ M &= 2L + 4L^2 + \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} (p(1 - \eta(x, t))^{-p-1})\end{aligned}$$

alalım.  $w(x, t) = e^{-Mt-Lx^2}v(x, t)$  dönüşümünü uygulayalım.  $c = c(x, t) \leq 0$  ve  $d = d(t) \leq 0$  olduğunda  $w(x, t)$

$$\begin{aligned}w_t &\geq w_{xx} + 4Lxw_x + cw, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq \tau, \\ w_x(0, t) &= 0, \quad w_x(1, t) \geq d(t)w(1, t), \quad 0 < t \leq \tau, \\ w(x, 0) &\geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1\end{aligned}$$

sağlar. Maksimum prensibinden,  $[0, 1] \times [0, \tau]$  de  $w(x, t) \geq 0$  elde ederiz. Böylece,  $[0, 1] \times [0, T)$  de  $u \geq \mu$  dir. ■

**Teorem 3.4**  $x = 1$  bir sönüm noktasıdır.

**İspat.**  $\min_{x \in [0,1]} u_0(x) = c \geq 0$  alalım.  $\tau = 2(1 - c)^{q+1}/(q + 1)$  olduğunda  $[0, 1] \times [0, \tau]$  de

$$\mu(x, t) = 1 - \left( \frac{(q+1)(1-x^2+\tau-t)}{2} \right)^{1/(q+1)}$$

olsun.  $x \in (0, 1), t \in (0, \tau)$  için,

$$\begin{aligned} \mu_t - \mu_{xx} &= \frac{-1}{2} \left( \frac{(q+1)(1-x^2+\tau-t)}{2} \right)^{-q/(q+1)} \\ &\quad - x^2 q \left( \frac{(q+1)(1-x^2+\tau-t)}{2} \right)^{(-2q-1)/(q+1)} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca  $t \in (0, \tau)$  için,

$$\begin{aligned} \mu_x(0, t) &= 0, \\ \mu_x(1, t) &= (1 - \mu(1, t))^{-q} \end{aligned}$$

dir. Dahası  $x \in (0, 1)$  için,

$$\mu(x, 0) = 1 - \left( \frac{(q+1)(1-x^2+\tau)}{2} \right)^{1/(q+1)} \leq 1 - \left( \frac{(q+1)\tau}{2} \right)^{1/(q+1)} = c$$

dir. Yukarıdakilerden  $\mu(x, t)$ , problem (1.10) un bir alt çözümüdür. İlaveden,  $t = \tau$  ve  $x = 1$  olduğunda

$$\mu(1, \tau) = 1$$

elde edilir. Böylece, Lemma 3.2 den

$$u(1, \tau) \geq \mu(1, \tau) = 1$$

elde ederiz.  $\mu$  bir alt çözüm olduğundan,  $\tau$  dan önce ki bir  $T$  zamanında  $u(1, T) = 1$  dir. O zaman,  $x = 1$  bir sönüm noktasıdır. ■

**Uyarı 3.3** *Sönüm zamanı için bir üst sınır hesaplayalım. Teorem 3.4 den,  $c = 0$  için maksimum üst sınır  $2/(q+1)$  dir. Örneğin başlangıç fonksiyonu olarak, Uyarı 3.1 deki,  $q = 1$  için  $u(x, 0) = \frac{1}{2}x^4$  seçelim. O zaman, sönüm zamanı için bir üst sınır  $T = 1$  olarak hesaplanır.*

### 3.3 Bir Sönüm Oranı ve Sönüm Zamanı için Alt Sınırlar

Bu kısımda, (3.3) ve (3.4) şartları altında, problem (1.10) için sönüm oranları ve bu sönüm oranlarından yararlanılarak sönüm zamanı için alt sınırlar elde edeceğiz.

**Teorem 3.5**  $u_0$ , (3.1) – (3.4) şartlarını sağlasın.  $O$  zaman pozitif  $C_1$  ve  $C_2$  sabitleri vardır öyle ki,  $t, T$  ye çok yakın olduğunda

$$\begin{aligned} \text{eğer } p > 2q + 1 \text{ ise, o zaman } u(1, t) &\geq 1 - C_1(T - t)^{1/(p+1)}, \\ \text{eğer } q \leq p \leq 2q + 1 \text{ ise, o zaman } u(1, t) &\geq 1 - C_2(T - t)^{1/(2q+2)} \end{aligned}$$

dir.

**İspat.**  $[0, 1] \times [0, T)$  de  $J(x, t) = u_x - x(1-u)^{-q}$  yardımcı fonksiyonunu tanımlayalım.  $(0, 1] \times [0, T)$  de  $u_x > 0$  ve  $p \geq q$  olduğundan  $J(x, t)$

$$\begin{aligned} J_t - J_{xx} - p(1-u)^{-p-1}J &= 2q(1-u)^{-q-1}u_x + (p-q)x(1-u)^{-p-q-1} \\ &\quad + xq(q+1)(1-u)^{-q-2}u_x^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

sağlar. Diğer taraftan (3.3) den,  $J(x, 0) \geq 0$  ve  $t \in (0, T)$  için

$$J(0, t) = 0, J(1, t) = 0.$$

Maksimum prensibinden,  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T)$  için  $J(x, t) \geq 0$  dir. Bu yüzden

$$J_x(1, t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{J(1, t) - J(1-h, t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-J(1-h, t)}{h} \leq 0$$

dir. Ayrıca, (3.4) den

$$\begin{aligned} J_x(1, t) &= u_{xx}(1, t) - (1-u(1, t))^{-q} - q(1-u(1, t))^{-2q-1} \\ &= u_t(1, t) - (1-u(1, t))^{-p} - (1-u(1, t))^{-q} - q(1-u(1, t))^{-2q-1} \leq 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \text{eğer } p > 2q + 1 \text{ ise, o zaman } u_t(1, t) &\leq (q+2)(1-u(1, t))^{-p}, \\ \text{eğer } q \leq p \leq 2q + 1 \text{ ise, o zaman } u_t(1, t) &\leq (q+2)(1-u(1, t))^{-2q-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliklerde  $t$  den  $T$  ye integral alırsak,  $C_1 = [(q+2)(p+1)]^{1/(p+1)}$  ve  $C_2 = [(q+2)(2q+2)]^{1/(2q+2)}$  olduğunda

$$\text{eğer } p > 2q+1 \text{ ise, o zaman } u(1, t) \geq 1 - C_1(T-t)^{1/(p+1)},$$

$$\text{eğer } q \leq p \leq 2q+1 \text{ ise, o zaman } u(1, t) \geq 1 - C_2(T-t)^{1/(2q+2)}$$

elde edilir. ■

**Uyarı 3.4** *Sönüm zamanı için alt sınırlar hesaplayalım. Teorem 3.5 den  $T$  sönüm zamanı için alt sınırlar*

$$\text{eğer } p > 2q+1 \text{ ise, o zaman } T = (1 - u_0(1))^{p+1}/(q+2)(p+1),$$

$$\text{eğer } q \leq p \leq 2q+1 \text{ ise, o zaman } T = (1 - u_0(1))^{2q+2}/(q+2)(2q+2)$$

olarak elde edilir. Örneğin başlangıç fonksiyonu olarak, Uyarı 3.1 deki,  $q = 1$  için  $u(x, 0) = \frac{1}{2}x^4$  seçelim. O zaman, sönüm zamanı için alt sınırlar

$$p = 4, q = 1 \text{ için } T \approx 0.0021,$$

$$1 \leq p < 3, q = 1 \text{ için } T \approx 0.0052$$

olarak hesaplanır.

#### 4. TEKİL SINIR YAYILIMLI LİNEER OLMAYAN BİR PARABOLİK DENKLEMİN SÖNÜMÜ

Bu bölümde, problem (1.11) in sönüm davranışını inceleyeceğiz.  $p$  ve  $q$  pozitif sabitler ve  $T \leq \infty$  olduğunda, aşağıdaki ısı yayılım modelini ele alalım:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + (1 - u)^{-p}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = -u^{-q}(1, t), \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Burada  $u(x, t) \in C^{2,1}$ , problem (1.11) in bir çözümü olsun. Yeterince düzgün ve sınırlı yanlarında

$$u'_0(0) = 0, \quad u'_0(1) = -u_0^{-q}(1)$$

uyumluluk şartları sağlanacak şekilde başlangıç fonksiyonunu  $u_0 : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$  seçelim.

Ayrıca, 4. kısım boyunca, problem (1.11) için başlangıç hattı ( $0 < x < 1$ ) üzerinde,  $u_0(x)$  başlangıç fonksiyonunun

$$u_{xx}(x, 0) + (1 - u(x, 0))^{-p} \geq 0, \quad (4.1)$$

$$u_x(x, 0) \leq 0 \quad (4.2)$$

şartlarını sağlandığını kabul edeceğiz. Ek olarak, Kesim 4.2 de aşağıdaki şartların geçerli olduğunu kabul edeceğiz:

$$u_x(x, 0) \leq -xu^{-q}(x, 0), \quad 0 < x < 1, \quad (4.3)$$

$$u_t(0, t) = u_{xx}(0, t) + (1 - u(0, t))^{-p}, \quad 0 < t < T. \quad (4.4)$$

Bu problemde amacımız, iki farklı tipten tekil ısı kaynağına sahip problem (1.11) in sönüm davranışını incelemektir. İlk olarak bu problem için sönüm tanımını verelim.

**Tanım 4.1** *Sonlu bir  $T$  zamanı için problem (1.11) in bir  $u(x, t)$  çözümü vardır öyle ki*

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \max\{u(x, t) : 0 \leq x \leq 1\} \rightarrow 1 \text{ ya da } \lim_{t \rightarrow T^-} \min\{u(x, t) : 0 \leq x \leq 1\} \rightarrow 0$$

oluyorsa, problem (1.11) e Sönüm Problemi denir. Bundan sonra problem (1.11) için sönüm zamanını  $T$  ile göstereceğiz.

İlk olarak, (4.1) şartı altında sonlu zamanda sönümün gerçekleştiğini ispatlayacağız. Daha sonra, (4.1) ve (4.2) şartları altında sönümün sadece  $x = 0$  noktasında gerçekleştiğini ispatlayacağız. Nihayet,  $t \rightarrow T^-$  iken  $x = 0$  sönüm noktasında  $u_t$  nin patladığını göstereceğiz. Son olarak, (4.3) ve (4.4) şartları altında bir sönüm oranı elde edeceğiz. Bu sönüm oranından yararlanarak sönüm zamanı için bir alt sınır elde edeceğiz.

#### 4.1 Sınırdaki Sönüm ve $u_t$ nin Patlaması

**Uyarı 4.1**  $u_0(x) = 0.9 - \frac{2}{3}x^{4.5}$  alalım. Örneğin,  $p = 9$  and  $q = \log_{\frac{30}{7}} 3$  için,  $u_0(x)$  başlangıç fonksiyonu (4.1), (4.2) ve uyumluluk şartlarını sağlar.

**Uyarı 4.2**  $u_0(x)$ , (4.2) şartını sağlasın.  $v = u_x(x, t)$  alalım.  $v(x, t)$  aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + p(1 - u)^{-p-1} v, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ v(0, t) &= 0, \quad v(1, t) = -u^{-q}(1, t) < 0, \quad 0 < t < T, \\ v(x, 0) &= u_x(x, 0) \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Maksimum Prensibinden  $(0, 1] \times (0, T)$  de  $v(x, t) < 0$  ve böylece  $u_x(x, t) < 0$  dir. Ayrıca  $u(0, t) = \max_{0 \leq x \leq 1} u(x, t)$  elde ederiz.

**Lemma 4.1**  $u_0$ , (4.1) şartını sağlasın.  $O$  zaman,  $[0, 1] \times [0, T)$  de  $u_t(x, t) \geq 0$  dir.

**İspat.** Lemma 3.1 deki ispatdan faydalanalım.  $v = u_t(x, t)$  alalım.  $v(x, t)$

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + p(1 - u)^{-p-1} v, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ v_x(0, t) &= 0, \quad v_x(1, t) = qu^{-q-1}(1, t)v(1, t), \quad 0 < t < T, \\ v(x, 0) &= u_{xx}(x, 0) + (1 - u(x, 0))^{-p} \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

sağlar. Herhangi bir  $\tau \in (0, T)$  için

$$\begin{aligned} L &= \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} \left( \frac{1}{2} qu^{-q-1}(x, t) \right), \\ M &= 2L + 4L^2 + \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} (p(1 - u(x, t))^{-p-1}) \end{aligned}$$

alalım.  $w(x, t) = e^{-Mt-Lx^2}v(x, t)$  dönüşümünü uygulayalım. Buradan

$$c(x, t) = 4L^2(x^2 - 1) + p(1 - u(x, t))^{-p-1} - \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} (p(1 - u(x, t))^{-p-1}) \leq 0$$

olduğunda

$$W_t = W_{xx} + 4LxW_x + cW$$

eşitliğini ve

$$d(t) = - \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} (qu^{-q-1}(x, t)) + qu^{-q-1}(1, t) \leq 0$$

olduğunda

$$W_x(1, t) = d(t)W(1, t)$$

eşitliğini sağlar. Yukarıdakilerden  $c = c(x, t) \leq 0$  ve  $d = d(t) \leq 0$  olduğunda  $w(x, t)$

$$\begin{aligned} w_t &= w_{xx} + 4Lxw_x + cw, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq \tau, \\ w_x(0, t) &= 0, \quad w_x(1, t) = d(t)w(1, t), \quad 0 < t \leq \tau, \\ w(x, 0) &\geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

sağlar. Maksimum Prensibi ve Hopf Lemmasından,  $[0, 1] \times [0, \tau]$  de  $w(x, t) \geq 0$  elde ederiz. Böylece  $[0, 1] \times [0, T]$  de  $u_t(x, t) \geq 0$  dir. ■

**Teorem 4.1**  $u_0$ , (4.1) şartını sağlasın.  $O$  zaman sonlu bir  $T$  zamanı vardır öyle ki problem (1.11) in  $u$  çözümü  $T$  de söner.

**İspat.** Kabul edelim ki  $u_0$ , (4.1) şartını sağlasın. (4.1) şartını  $x$  e göre 0 dan 1 e integral alırsak

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_{xx}(x, 0)dx + \int_0^1 (1 - u(x, 0))^{-p} dx &\geq \int_0^1 0dx \\ u_x(1, 0) - u_x(0, 0) + \int_0^1 (1 - u(x, 0))^{-p} dx &> 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edelim;

$$\omega = -u^{-q}(1, 0) + \int_0^1 (1 - u(x, 0))^{-p} dx > 0$$

Kütle fonksiyonumuz  $m(t) = \int_0^1 (1 - u(x, t)) dx$ ,  $0 < t < T$  olsun. O zaman, Lemma 4.1 den

$$\begin{aligned}
m'(t) &= - \int_0^1 u_t(x, t) dx \\
&= - \int_0^1 (u_{xx}(x, t) + (1 - u(x, t))^{-p}) dx \\
&= -u_x(1, t) + u_x(0, t) - \int_0^1 (1 - u(x, t))^{-p} dx \\
&= u^{-q}(1, t) - \int_0^1 (1 - u(x, t))^{-p} dx \leq -\omega
\end{aligned}$$

elde ederiz. Yukarıdaki son eşitsizlikte  $t$  ye göre 0 dan  $t$  ye integral alırsak  $m(t) \leq m(0) - \omega t$  elde ederiz. Bu da, bazı  $T_0$ , ( $0 < T \leq T_0$ ) için  $m(T_0) = 0$  olmasını gerektirir. Böylece  $u$  sonlu bir  $T$  zamanında söner. ■

**Teorem 4.2**  $u_0$ , (4.1) ve (4.2) şartlarını sağlasın. O zaman  $x = 0$  tek sönüm noktasıdır.

**İspat.**  $b_2 \in (0, 1]$ ,  $b_1 \in (0, b_2)$ ,  $\tau \in [0, T)$  ve  $\varepsilon$  sonradan belirlenecek pozitif bir sabit olduğunda  $[b_1, b_2] \times [\tau, T)$  de

$$J(x, t) = u_x + \varepsilon(b_2 - x)$$

yardımcı fonksiyonunu tanımlayalım. O zaman,  $(0, 1] \times (0, T)$  de  $u_x(x, t) < 0$  olduğundan  $(b_1, b_2) \times (\tau, T)$  de

$$J_t - J_{xx} = p(1 - u)^{-p-1} u_x < 0$$

elde ederiz. Ayrıca  $(0, 1] \times (0, T)$  de  $u_x(x, t) < 0$  ve  $\varepsilon$  yeterince küçük olduğunda  $J(x, \tau) < 0$  dır. Dahası  $\varepsilon$  yeterince küçük olduğunda  $t \in (\tau, T)$  için

$$J(b_1, t) = u_x(b_1, t) + \varepsilon(b_2 - b_1) < 0,$$

$$J(b_2, t) = u_x(b_2, t) < 0$$

dir. Maksimum prensibinden,  $(x, t) \in [b_1, b_2] \times [\tau, T)$  için  $J(x, t) < 0$  yani  $u_x < -\varepsilon(b_2 - x)$  elde ederiz. Bu son eşitsizliği  $x$  e göre  $b_1$  den  $b_2$  e integrallersek

$$u(b_2, t) < u(b_1, t) - \frac{\varepsilon(b_2 - b_1)^2}{2} < 1 - \frac{\varepsilon(b_2 - b_1)^2}{2} < 1$$

elde ederiz. Böylece  $(0, 1]$  de sönüm gerçekleşmez. Teorem 4.1 den  $x = 0$  in tek sönüm noktası olduğu görülür. Teorem ispatlandı. ■

**Teorem 4.3** *Eğer  $p \geq 1$  ise, o zaman  $x = 0$  sönüm noktasında  $u_t$  patlar.*

**İspat.** Kabul edelim ki  $[0, 1] \times [0, T)$  de  $u_t$  sınırlı olsun. O zaman bir pozitif  $M$  sabiti vardır ki öyle ki  $u_t < M$  olsun. Yani

$$u_{xx} + (1 - u)^{-p} < M.$$

Bu eşitsizliği  $u_x$  ile çarpıp  $x$  e göre 0 dan  $x$  e integral alalım:

$$\int_0^x u_{xx} u_x dx + \int_0^x (1 - u)^{-p} u_x dx > \int_0^x M u_x dx.$$

$p = 1$  için

$$\ln [1 - u(0, t)] > \frac{-1}{2} u_x^2 + \ln [1 - u(x, t)] + M [u(x, t) - u(0, t)]$$

ve  $p \neq 1$  için

$$\frac{(1 - u(0, t))^{-p+1}}{-p + 1} > \frac{-1}{2} u_x^2 + \frac{(1 - u(x, t))^{-p+1}}{-p + 1} + M [u(x, t) - u(0, t)]$$

elde ederiz.  $t \rightarrow T^-$  iken,  $p \geq 1$  olduğunda yukarıdaki eşitsizliklerin sol yönü eksi sonsuza giderken sağ tarafı ise eksi sonlu olur. Bu tezettan,  $p \geq 1$  için,  $x = 0$  sönüm noktasında  $u_t$  patlar. ■

## 4.2 Bir Sönüm Oranı ve Sönüm Zamanı için Bir Alt Sınır

Bu kısımda, (4.3) ve (4.4) şartları altında, problem (1.11) için bir sönüm oranı ve bu sönüm oranından yararlanarak sönüm zamanı için bir alt sınır elde edeceğiz.

**Teorem 4.4**  $u_0$ , (4.1)–(4.4) şartlarını sağlasın. O zaman bir pozitif  $C_1$  sabiti vardır öyle ki,  $t, T$  ye çok yakın olduğunda

$$u(0, t) \geq 1 - C_1 (T - t)^{1/(p+1)}$$

dir.

**İspat.**  $[0, 1] \times [0, T)$  de  $J(x, t) = u_x + xu^{-q}$  yardımcı fonksiyonunu tanımlayalım.  $(0, 1] \times [0, T)$  de  $u_x < 0$  olduğundan  $J(x, t)$

$$J_t - J_{xx} = [p(1-u)^{-p-1} + 2qu^{-q-1}] u_x - qxu^{-q-1}(1-u)^{-p} - q(q+1)xu^{-q-2}u_x^2$$

sağlar. Diğer taraftan (4.3) den,  $J(x, 0) \leq 0$  ve  $t \in (0, T)$  için

$$J(0, t) = 0, J(1, t) = 0.$$

Maksimum prensibinden,  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T)$  için  $J(x, t) \leq 0$  dir. Bu yüzden

$$J_x(0, t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{J(h, t) - J(0, t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{J(h, t)}{h} \leq 0$$

dir. Ayrıca, (4.4) den,

$$\begin{aligned} J_x(0, t) &= u_{xx}(0, t) + u^{-q}(0, t) \leq 0 \\ &= u_t(0, t) - (1 - u(0, t))^{-p} + u^{-q}(0, t) \leq 0 \end{aligned}$$

ve

$$u_t(0, t) \leq (1 - u(0, t))^{-p}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte  $t$  den  $T$  ye integral alırsak,  $C_1 = (p+1)^{1/(p+1)}$  olduğunda

$$u(0, t) \geq 1 - C_1(T - t)^{1/(p+1)}$$

elde edilir. ■

**Uyarı 4.3** *Sönüm zamanı için bir alt sınır hesaplayalım. Teorem 4.4 den  $T$  sönüm zamanı için bir alt sınır  $(1 - u_0(0))^{p+1}/(p+1)$  dir. Başlangıç fonksiyonu olarak Uyarı 4.1 deki  $u_0(x) = 0.9 - \frac{2}{3}x^{4.5}$  seçelim. Böylece,  $p = 9$  için sönüm zamanını  $T = 10^{-11}$  olarak elde edilir.*

## 5. TEKİL SINIR ŞARTLI LİNEER OLMAYAN BİR PARABOLİK SİSTEMİN SÖNÜMÜ

Bu bölümde, problem (1.12) nin sönüm davranışını inceleyeceğiz. Bu bölümde,  $p_1, p_2, q_1$  ve  $q_2$  pozitif sabitler ve  $T \leq \infty$  olmak üzere aşağıdaki ısı yayılım modelini ele alalım:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + (1 - v)^{-p_1}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ v_t &= v_{xx} + (1 - u)^{-p_2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = (1 - v(1, t))^{-q_1}, \quad 0 < t < T, \\ v_x(0, t) &= 0, \quad v_x(1, t) = (1 - u(1, t))^{-q_2}, \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Burada  $u(x, t), v(x, t) \in C^{2,1}$ , problem (1.12) nin çözümü olsun. Yeterince düzgün ve sınırların yanlarında

$$u'_0(0) = v'_0(0) = 0, \quad u'_0(1) = (1 - v_0(1))^{-q_1}, \quad v'_0(1) = (1 - u_0(1))^{-q_2}$$

uyumluluk şartları sağlanacak şekilde başlangıç fonksiyonlarını  $(u_0, v_0) : [0, 1] \rightarrow [0, 1)$  seçelim.

Ayrıca, bu bölüm boyunca problem (1.12) için başlangıç hattı üzerinde ( $0 < x < 1$ ) üzerinde

$$u_{xx}(x, 0) + (1 - v(x, 0))^{-p_1} \geq 0, \quad (5.1)$$

$$v_{xx}(x, 0) + (1 - u(x, 0))^{-p_2} \geq 0, \quad (5.2)$$

$$u_x(x, 0) \geq 0, \quad (5.3)$$

$$v_x(x, 0) \geq 0 \quad (5.4)$$

şartlarının sağlandığını kabul edeceğiz. Bu problemde amacımız, iki tekil ısı kaynağına sahip iki parabolik problemden oluşan, bir parabolik sistemin çözümlerinin sönüm davranışını incelemektir. İlk olarak, bu problem için sönüm tanımını verelim.

**Tanım 5.1** *Sonlu bir  $T$  zamanı için problem (1.12) nin bir  $\{u(x, t), v(x, t)\}$  çözümü vardır öyle ki*

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \max\{u(x, t), v(x, t) : 0 \leq x \leq 1\} \rightarrow 1$$

oluyorsa, problem (1.12) e Sönüm Problemi denir. Bundan sonra problem (1.12) için sönüm zamanını  $T$  ile göstereceğiz.

İlk olarak, (5.1) ve (5.2) şartları altında sonlu zamanda sönümün gerçekleştiğini ispatlayacağız. Ayrıca, (5.1) – (5.4) şartları altında sönümün sadece  $x = 1$  noktasında gerçekleştiğini ispatlayacağız. Daha sonra,  $t \rightarrow T^-$  iken  $x = 1$  sönüm noktasında  $(u_t, v_t)$  nin patladığını göstereceğiz. Son olarak, bir karşılaştırma teoremi kullanılarak bir sönüm kriteri ve bir sönüm oranı elde edeceğiz.

### 5.1 Sınırdaki Sönüm ve $(u_t, v_t)$ nin Patlaması

**Uyarı 5.1** (5.1) – (5.4) şartları düzgündür. Kolaylıkla, (5.1) – (5.4) ve uyumluluk şartlarını sağlayan  $(u_0(x), v_0(x))$  başlangıç fonksiyonları bulabiliriz. Örneğin,  $p_1 \neq p_2, q_1 = q_2 = 1$  için  $u_0(x) = \frac{1}{2}x^4, v_0(x) = \frac{1}{2}x^3$  başlangıç fonksiyonları (5.1) – (5.4) ve uyumluluk şartlarını sağlar.

**Uyarı 5.2**  $u_0, (5.3)$  ve  $v_0, (5.4)$  şartını sağlasın. O zaman, zayıf parabolik sistemler için güçlü maksimum prensibinden,  $(0, 1] \times (0, T)$  de  $u_x(x, t), v_x(x, t) > 0$  dır. Ayrıca,  $u(1, t) = \max_{0 \leq x \leq 1} u(x, t)$  ve  $v(1, t) = \max_{0 \leq x \leq 1} v(x, t)$  elde ederiz.

**Tanım 5.2** Eğer  $(\mu, \lambda)$  aşağıdaki eşitsizlikleri sağlarsa, o zaman problem (1.12) nin bir alt çözümü olarak adlandırılır:

$$\begin{aligned} \mu_t - \mu_{xx} &\leq (1 - \lambda)^{-p_1}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ \lambda_t - \lambda_{xx} &\leq (1 - \mu)^{-p_2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ \mu_x(0, t) &= 0, \quad \mu_x(1, t) \leq (1 - \lambda(1, t))^{-q_1}, \quad 0 < t < T, \\ \lambda_x(0, t) &= 0, \quad \lambda_x(1, t) \leq (1 - \mu(1, t))^{-q_2}, \quad 0 < t < T, \\ \mu(x, 0) &\leq u_0(x), \quad \lambda(x, 0) \leq v_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizliklerde yön değiştirilirse, bir üst çözüm elde edilir.

**Lemma 5.1**  $(u_0, v_0), (5.1) - (5.2)$  şartlarını sağlasın. O zaman, **a)**  $[0, 1] \times [0, T)$  de  $u_t(x, t), v_t(x, t) \geq 0$  dır. **b)**  $(0, 1) \times [0, T)$  de  $u_t(x, t), v_t(x, t) > 0$  dır.

**İspat. a)**  $(0, 1)$  de,  $u_{xx}(x, 0) + (1 - v(x, 0))^{-p_1} \geq 0$  ve  $v_{xx}(x, 0) + (1 - u(x, 0))^{-p_2} \geq 0$ ,  $u'_0(0) = 0$ ,  $u'_0(1) = (1 - v_0(1))^{-q_1}$ ,  $v'_0(0) = 0$ ,  $v'_0(1) = (1 - u_0(1))^{-q_2}$ , görülür ki  $(u_0(x), v_0(x))$ , problem (1.12) nin bir alt çözümüdür. Güçlü maksimum prensibinden,  $(0, 1) \times (0, T)$  de

$$u(x, t) \geq u_0(x), v(x, t) \geq v_0(x)$$

dir.

Fu ve Guo (2002)'deki Lemma 2.1 in ispatından faydalanalım.  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T - h)$  için  $\Theta = u(x, t + h) - u(x, t)$  ve  $\Psi = v(x, t + h) - v(x, t)$  yardımcı fonksiyonlarını tanımlayalım. O zaman,  $\beta_1(x, t)$  fonksiyonu,  $v(x, t + h)$  ve  $v(x, t)$  fonksiyonları arasında ve  $\beta_2(1, t)$  fonksiyonu,  $v(1, t + h)$  ve  $v(1, t)$  fonksiyonları arasında olduğunda,  $\Theta(x, t)$

$$\begin{aligned} \Theta_t &= \Theta_{xx} + p_1 (1 - \beta_1)^{-p_1 - 1} \Psi, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T - h, \\ \Theta_x(0, t) &= 0, \quad \Theta_x(1, t) = q_1 (1 - \beta_2(1, t))^{-q_1 - 1} \Psi(1, t), \quad 0 < t < T - h, \\ \Theta(x, 0) &= u(x, h) - u(x, 0) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

ve  $\xi_1(x, t)$  fonksiyonu,  $u(x, t + h)$  ve  $u(x, t)$  fonksiyonları arasında ve  $\xi_2(1, t)$  fonksiyonu-  
 $u(1, t + h)$  ve  $u(1, t)$  fonksiyonları arasında olduğunda,  $\Psi(x, t)$

$$\begin{aligned} \Psi_t &= \Psi_{xx} + p_2 (1 - \xi_1)^{-p_2 - 1} \Theta, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T - h, \\ \Psi_x(0, t) &= 0, \quad \Psi_x(1, t) = q_2 (1 - \xi_2(1, t))^{-q_2 - 1} \Theta(1, t), \quad 0 < t < T - h, \\ \Psi(x, 0) &= v(x, h) - v(x, 0) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

sağlarlar.

Herhangi bir  $\tau \in (0, T - h)$  sabiti için,  $0 \leq x \leq 1$  and  $0 \leq t \leq \tau$  için göreceğiz ki  $\Psi \geq 0$  and  $\Theta \geq 0$  dir. Tezathk elde etmek için, kabul edelim ki  $[0, 1] \times [0, \tau]$  de  $\Theta$  bir negatif minimum değerine sahip olsun ve  $\min_{[0, 1] \times [0, \tau]} \Theta \leq \min_{[0, 1] \times [0, \tau]} \Psi$ .  $\bar{\Theta}(x, t) = e^{-Mt - Lx^2} \Theta(x, t)$  ve  $\bar{\Psi}(x, t) = e^{-Mt - Lx^2} \Psi(x, t)$  dönüşümlerini tanımlayalım. Burada,  $L$  ve  $M$  aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$\begin{aligned} L &= \max_{0 \leq t \leq \tau} \left( \frac{1}{2} q_1 (1 - \beta_2(1, t))^{-q_1 - 1} \right), \\ M &= 2L + 4L^2 + \max_{[0, 1] \times [0, \tau]} \left( p_1 (1 - \beta_1(x, t))^{-p_1 - 1} \right) + \max_{[0, 1] \times [0, \tau]} \left( p_2 (1 - \xi_1(x, t))^{-p_2 - 1} \right). \end{aligned}$$

O zaman,  $\bar{\Theta}$  ve  $\bar{\Psi}$

$$\begin{aligned}\bar{\Theta}_t &= \bar{\Theta}_{xx} + 4Lx\bar{\Theta}_x + (2L + 4L^2x^2 - M)\bar{\Theta} + p_1(1 - \beta_1(x, t))^{-p_1-1}\bar{\Psi}, \\ 0 < x < 1, 0 < t < \tau, \\ \bar{\Psi}_t &= \bar{\Psi}_{xx} + 4Lx\bar{\Psi}_x + (2L + 4L^2x^2 - M)\bar{\Psi} + p_2(1 - \xi_1(x, t))^{-p_2-1}\bar{\Theta}, \\ 0 < x < 1, 0 < t < \tau\end{aligned}$$

sağlar.  $-\delta := \min_{[0,1] \times [0,\tau]} \bar{\Theta} < 0$  olduğunda  $([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0, 1\} \times (0, \tau])$  sınırı üzerinde  $\bar{\Theta} \geq -\delta$  and  $\bar{\Psi} \geq -\delta$  olduğundan, zayıf birleşmiş parabolik sistemler için güçlü maksimum prensibinden görülür ki,  $\bar{\Theta}$  bölgenin içinde negatif minimum değerini alamaz. Böylece,  $(0, 1) \times (0, \tau]$  de  $\bar{\Theta} > -\delta$  dir.  $\{0, 1\} \times (0, \tau]$  sınırı üzerinde bir minimum nokta olarak  $(x_0, t_0)$  ı alalım.  $\bar{\Theta}_x(0, t) \leq 0, 0 < t \leq \tau$  olduğunda, aynı güçlü maksimum prensibi gerektirir ki  $x_0 = 1$  ve  $\bar{\Theta}_x(x_0, t_0) < 0$  dir. Fakat,

$$\bar{\Theta}_x(1, t_0) = (q_1(1 - \beta_2(1, t_0))^{-q_1-1} - 2L)\bar{\Theta} = -(q_1(1 - \beta_2(1, t_0))^{-q_1-1} - 2L)\delta \geq 0$$

bu bir tezattır. O zaman,  $[0, 1] \times [0, \tau]$  de  $\bar{\Theta} \geq 0$  ve  $\bar{\Psi} \geq 0$  dir.  $h \rightarrow 0$  iken,  $[0, 1] \times [0, \tau]$  de  $u_t(x, t) \geq 0$  ve  $v_t(x, t) \geq 0$  dir.

**b)** Herhangi bir  $(\xi, \eta) \in (0, 1) \times (0, T)$  için,  $(0, 1) \times (0, T)$  ın  $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$  bir alt kümesi vardır öyle ki  $(\xi, \eta) \in [x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ .  $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$  de,  $H = u_t(x, t), K = v_t(x, t)$  tanımlayalım. O zaman,  $(x_1, x_2) \times (t_1, t_2)$  de

$$\begin{aligned}H_t - H_{xx} &= p_1(1 - v)^{-p_1-1}K, \\ K_t - K_{xx} &= p_2(1 - u)^{-p_2-1}H\end{aligned}$$

dir. Ayrıca,  $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$  üzerinde  $H, K \geq 0$  dir. Güçlü maksimum prensibi gerektirir ki,  $(x_1, x_2) \times (t_1, t_2)$  de  $H, K > 0$  ya da  $H, K \equiv 0$  dir.  $H, K \equiv 0$  olduğunda,  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  nin  $t$  ye göre artanlığı ile çelişir. Bu yüzden,  $u_t, v_t > 0$  dir.  $(0, 1) \times (0, T)$  de  $(\xi, \eta)$  rastgele birer değişken olduklarından,  $(0, 1) \times (0, T)$  de  $u_t, v_t > 0$  dir.

■

**Teorem 5.1**  $(u_0, v_0)$ , (5.1)–(5.2) şartlarını sağlasın. O zaman sonlu bir  $T$  zamanı vardır öyle ki problem (1.12) nin  $(u, v)$  çözümü  $T$  de söner.

**İspat.** Kabul edelim ki  $(u_0, v_0)$ , (5.1) ve (5.2) şartlarını sağlasın. O zaman

$$\begin{aligned} w_1 &= (1 - v(1, 0))^{-q_1} + \int_0^1 (1 - v(x, 0))^{-p_1} dx > 0, \\ w_2 &= (1 - u(1, 0))^{-q_2} + \int_0^1 (1 - u(x, 0))^{-p_2} dx > 0 \end{aligned}$$

vardır. Kütle fonksiyonlarımız;

$$\begin{aligned} m_1(t) &= \int_0^1 (1 - u(x, t)) dx, \quad 0 < t < T, \\ m_2(t) &= \int_0^1 (1 - v(x, t)) dx, \quad 0 < t < T \end{aligned}$$

olsun. O zaman, Lemma 5.1 (a) dan

$$\begin{aligned} m_1'(t) &= -(1 - v(1, t))^{-q_1} - \int_0^1 (1 - v(x, t))^{-p_1} dx \leq -w_1, \\ m_2'(t) &= -(1 - u(1, t))^{-q_2} - \int_0^1 (1 - u(x, t))^{-p_2} dx \leq -w_2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliklerde 0 dan  $t$  ye integral alırsak  $m_1(t) \leq m_1(0) - w_1 t$  ve  $m_2(t) \leq m_2(0) - w_2 t$  elde ederiz. Bu da, bazı  $T_0 = \min(\frac{m_1(0)}{w_1}, \frac{m_2(0)}{w_2})$ ,  $(0 < T \leq T_0)$  için  $m_1(T_0) = 0$  veya  $m_2(T_0) = 0$  olmasını gerektirir. Böylece,  $(u, v)$  sonlu bir  $T$  zamanında söner. ■

**Teorem 5.2**  $(u_0, v_0)$ , (5.1)– (5.4) şartlarını sağlasın. O zaman,  $x = 1$  tek sönüm noktasıdır.

**İspat.**  $\eta \in (0, 1)$ ,  $\tau \in (0, T)$  ve  $\varepsilon$  sonradan belirlenecek pozitif sabit olduğunda

$$J(x, t) = u_x - \varepsilon(x - (1 - \eta)) \text{ in } [1 - \eta, 1] \times [\tau, T)$$

yardımcı fonksiyonunu tanımlayalım. O zaman,  $(0, 1] \times (0, T)$  de  $v_x(x, t) > 0$  olduğundan

$$J_t - J_{xx} = p_1(1 - v)^{-p_1-1} v_x > 0 \text{ in } (1 - \eta, 1) \times (\tau, T)$$

elde ederiz. Ayrıca  $(0, 1] \times (0, T)$  de  $u_x(x, t) > 0$  ve  $\varepsilon$  yeterince küçük olduğunda  $J(x, \tau) > 0$  dir. Dahası,  $\varepsilon$  yeterince küçük olduğunda,  $t \in (\tau, T)$  için

$$\begin{aligned} J(1 - \eta, t) &= u_x(1 - \eta, t) > 0, \\ J(1, t) &= (1 - v(1, t))^{-q_1} - \varepsilon\eta > 1 - \varepsilon\eta > 0 \end{aligned}$$

dir. Maksimum prensibinden,  $(x, t) \in [1 - \eta, 1] \times [\tau, T)$  için  $J(x, t) > 0$  yani  $u_x > \varepsilon_1(x - (1 - \eta_1))$  dir. Bu eşitsizlikte  $x$  e göre sırasıyla,  $(1 - \eta)$  den 1 e integral alırsak

$$u(1 - \eta, t) < u(1, t) - \frac{\varepsilon\eta^2}{2} < 1 - \frac{\varepsilon\eta^2}{2}$$

elde ederiz. Böylece,  $u$ ,  $[0, 1)$  de 1 değerini alamaz. Benzer işlemlerle  $v$  de,  $[0, 1)$  de 1 değerini alamaz. Teorem 5.1 den  $x = 1$  in tek sönüm noktası olduğu görülür. Teorem ispatlandı. ■

**Teorem 5.3**  $x = 1$  sönüm noktasında  $(u_t, v_t)$  patlar.

**İspat.**  $\tau \in (0, T)$  ve  $\delta$  sonra belirlenecek pozitif sabit olduğunda,  $[0, 1] \times [\tau, T)$  de

$$\begin{aligned} J_1(x, t) &= u_t - \delta u_x, \\ J_2(x, t) &= v_t - \delta v_x \end{aligned}$$

yardımcı fonksiyonlarımızı tanımlayalım. O zaman,  $(x, t) \in (0, 1) \times [\tau, T)$  için  $J_1(x, t)$  ve  $J_2(x, t)$

$$\begin{aligned} (J_1)_t - (J_1)_{xx} - p_1(1 - v(1, t))^{-p_1-1} J_2 &= 0, \\ (J_2)_t - (J_2)_{xx} - p_2(1 - u(1, t))^{-p_2-1} J_1 &= 0 \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlarlar Ayrıca,  $\delta$  yeterince küçük olduğunda, Lemma 5.1 (b) den,  $J_1(x, \tau) > 0$  ve  $J_2(x, \tau) > 0$  dir. Dahası  $t \in (\tau, T)$  için

$$\begin{aligned} (J_1)_x(0, t) &= 0, \quad (J_1)_x(1, t) = q_1(1 - v(1, t))^{-q_1-1} J_2, \\ (J_2)_x(0, t) &= 0, \quad (J_2)_x(1, t) = q_2(1 - u(1, t))^{-q_2-1} J_1 \end{aligned}$$

dir. Lemma 5.1 (a) daki benzer işlemler uygulanarsa, güçlü maksimum prensibinden,  $[0, 1] \times [\tau, T)$  de  $J_1(x, t) \geq 0$  ve  $J_2(x, t) \geq 0$  dir. O zaman,  $(x, t) \in \{1\} \times [\tau, T)$  için

$$\begin{aligned} u_t &\geq \delta(1 - v)^{-q_1}, \\ v_t &\geq \delta(1 - u)^{-q_2} \end{aligned}$$

dir Teorem ispatlandı. ■

**İspat.** Chan ve Yuen (2001)'deki gibi sönüm anında  $u_t$  nin patladığını ispatlayalım. Kabul edelim ki  $[0, 1] \times [0, T)$  de  $u_t$  sınırlı olsun. O zaman  $M_1, M_2$  pozitif sabitleri vardır öyle ki  $u_t < M_1$  ve  $v_t < M_2$  dir. Yani,

$$\begin{aligned} u_{xx} + (1 - v)^{-p_1} &< M_1 \Rightarrow u_{xx} < M_1, \\ v_{xx} + (1 - u)^{-p_2} &< M_2 \Rightarrow v_{xx} < M_2 \end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki eşitsizliklerde,  $x$  e göre, önce  $x$  den 1 e sonra 0 dan 1 e olacak şekilde iki kez integral alırsak

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - v(1, t))^{q_1}} &< \frac{M_1}{2} + u(1, t) - u(0, t), \\ \frac{1}{(1 - u(1, t))^{q_2}} &< \frac{M_2}{2} + v(1, t) - v(0, t) \end{aligned}$$

elde ederiz.  $t \rightarrow T^-$  iken, eşitsizliğin sol yanı sonsuz iken sağ yanı sonludur. Bu çelişkidenden  $(u_t, v_t)$  nin sönüm noktasında patladığı görülür. ■

## 5.2 Bir Sönüm Kriteri ve Bir Sönüm Oranı

Bu kesimde bir sönüm kriteri ve bir sönüm oranı elde edeceğiz. İlk olarak, bir karşılaştırma lemması verelim.

**Lemma 5.2 a)** Eğer  $x \in [0, 1]$  için  $u_0(x) \geq v_0(x)$ ,  $p_1 \geq p_2$  ve  $q_1 \geq q_2$  ise, o zaman  $[0, 1] \times (0, T)$  de  $u(x, t) \geq v(x, t)$  dir. **b)** Eğer  $x \in [0, 1]$  için  $v_0(x) \geq u_0(x)$ ,  $p_2 \geq p_1$  ve  $q_2 \geq q_1$  ise, o zaman  $[0, 1] \times (0, T)$  de  $v(x, t) \geq u(x, t)$  dir.

**İspat.** **a)**  $[0, 1] \times [0, T)$  de,  $M(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$  yardımcı fonksiyonunu tanımlayalım. O zaman,  $\beta_1(x, t)$ ,  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  fonksiyonları arasında olduğunda ve  $p_1 \geq p_2$  için,  $(0, 1) \times [0, T)$  de,  $M(x, t)$

$$\begin{aligned} M_t - M_{xx} &= (1 - v)^{-p_1} - (1 - u)^{-p_2} \\ &= (1 - v)^{-p_1} - (1 - u)^{-p_1} + (1 - u)^{-p_1} - (1 - u)^{-p_2} \\ &\geq -p_1(1 - \beta_1)^{-p_1-1}M \end{aligned}$$

sağlar. Böylece, maksimum prensibinden,  $(0, 1) \times [0, T)$  de  $M(x, t)$  bir negatif minimum değerini alamaz. Ayrıca,  $x \in (0, 1)$  için  $u_0 \geq v_0$  olduğunda  $M(x, 0) \geq 0$  dir. Dahası,  $\beta_2(1, t)$ ,  $u(1, t)$  ve  $v(1, t)$  fonksiyonları arasında olduğunda ve  $q_1 \geq q_2$  için,

$$\begin{aligned} M_x(0, t) &= 0, \quad t \in (0, T), \\ M_x(1, t) &= (1 - v(1, t))^{-q_1} - (1 - u(1, t))^{-q_2} \\ &= (1 - v(1, t))^{-q_1} - (1 - u(1, t))^{-q_1} + (1 - u(1, t))^{-q_1} - (1 - u(1, t))^{-q_2} \\ &\geq -q_1(1 - \beta_2(1, t))^{-q_1-1}M, \quad t \in (0, T) \end{aligned}$$

dir. Maksimum prensibinden,  $[0, 1] \times [0, T)$  de  $M(x, t) \geq 0$  dir yani  $[0, 1] \times [0, T)$  de  $u(x, t) \geq v(x, t)$  dir.

**b)** Yukarıdaki işlemlerin benzerleri uygularsak, eğer  $x \in [0, 1]$  için  $v_0(x) \geq u_0(x)$ ,  $p_2 \geq p_1$  ve  $q_2 \geq q_1$  ise, o zaman  $[0, 1] \times (0, T)$  de  $v(x, t) \geq u(x, t)$  dir. ■

**Sonuç 5.1** *Problemın tanımından, görürüz ki*

$$\begin{aligned} \text{eğer } \lim_{t \rightarrow T^-} v(1, t) &= 1 \text{ ise, o zaman } \lim_{t \rightarrow T^-} u_t(1, t) = \infty, \\ \text{eğer } \lim_{t \rightarrow T^-} u(1, t) &= 1 \text{ ise, o zaman } \lim_{t \rightarrow T^-} v_t(1, t) = \infty. \end{aligned}$$

O zaman, Teorem 5.3 ve Lemma 5.2 den,

**a)** Eğer  $x \in [0, 1]$  için  $v_0(x) \geq u_0(x)$ ,  $p_2 \geq p_1$  ve  $q_2 \geq q_1$  ise,  $x = 1$  sönüm noktasında  $u_t$  patlar. Dahası,

$$u_t(1, t) \geq \delta(1 - v(1, t))^{-q_1} \geq \delta(1 - u(1, t))^{-q_1}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece,  $t$  den  $T$  ye integral alırsak,

$$u(1, t) \leq 1 - C_1(T - t)^{1/(q_1+1)}$$

sönüm oranını elde ederiz ( $C_1 = (\delta(q_1 + 1))^{1/(q_1+1)}$ ).

**b)** Eğer  $x \in [0, 1]$  için  $u_0(x) \geq v_0(x)$ ,  $p_1 \geq p_2$  ve  $q_1 \geq q_2$  ise,  $x = 1$  sönüm noktasında  $v_t$  patlar. Dahası,

$$v_t(1, t) \geq \delta(1 - u(1, t))^{-q_2} \geq \delta(1 - v(1, t))^{-q_2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece,  $t$  den  $T$  ye integral alırsak,

$$v(1, t) \leq 1 - C_2(T - t)^{1/(q_2+1)}$$

sönüm oranını elde ederiz ( $C_2 = (\delta(q_2 + 1))^{1/(q_2+1)}$ ).

## 6. SONUÇLAR

Literatürde, iki tekil ısı kaynağına sahip sönüm problemleri hem parabolik denklemler hem de parabolik sistemler için çok az çalışılmıştır. Bu çalışmada, literatürdeki bu eksiklik giderilmeye çalışılmıştır.

İlk olarak, tekil sınır şartlı lineer olmayan bir parabolik denklemin çözümünün sönüm davranışı incelenmiştir. Önce, bu denklemin sonlu zamanda çözümünün sönüdüğü ispatlanmıştır. Daha sonra, başlangıç fonksiyonu üzerindeki belli kabuller altında tek sönüm noktası  $x = 1$  olarak elde edilmiştir. Daha sonra, sönüm zamanında sönüm noktasında  $u_t$  nin patladığı gösterilmiştir. Ayrıca, bir alt çözüm ve sönüm zamanı için bir üst sınır elde edilmiştir. Son olarak, bir sönüm oranı ve sönüm zamanı için alt sınırlar elde edilmiştir.

Daha sonra, tekil sınır yayımlı lineer olmayan bir parabolik denklemin çözümünün sönüm davranışı incelenmiştir. İlk olarak, bu denklemin sonlu zamanda çözümünün sönüdüğü ispatlanmıştır. Başlangıç fonksiyonu üzerindeki belli kabuller altında tek sönüm noktası  $x = 0$  olarak elde edilmiştir. Daha sonra, sönüm zamanında sönüm noktasında  $u_t$  nin patladığı gösterilmiştir. Son olarak, bir sönüm oranı ve sönüm zamanı için bir alt sınır elde edilmiştir.

Son olarak, tekil sınır şartlı lineer olmayan bir parabolik sistemin çözümünün sönüm davranışı incelenmiştir. İlk olarak, bu denklemin sonlu zamanda çözümünün sönüdüğü ispatlanmıştır. Daha sonra, başlangıç fonksiyonu üzerindeki belli kabuller altında tek sönüm noktası  $x = 1$  olarak elde edilmiştir. Ayrıca, sönüm zamanında sönüm noktasında  $(u_t, v_t)$  nin patladığı gösterilmiştir. Son olarak, bir karşılaştırma teoremi kullanılarak bir sönüm kriteri ve bir sönüm oranı elde edilmiştir.

## KAYNAKLAR

- Acker, A. and Walter, W. 1976. The quenching problem for nonlinear parabolic differential equations, Lecture Notes in Mathematics 564, 1-12, Springer, New York.
- Acker, A. and Walter, W. 1978. On the global existence of solutions of parabolic differential equations with a singular nonlinear term, *Nonlinear Analysis* 2, 499-505.
- Chan, C.Y. 1996a. Recent advances in quenching phenomena, *Proc. Dynam. Sys. Appl.* 2, pp. 107-113.
- Chan, C.Y. 1996b. New results in quenching, *Proc. of the First World Congress of Nonlinear Analysts*, Walter de Gruyter, New York, pp. 427-434.
- Chan, C.Y. and Chen, C.S. 1987. A nonlinear singular parabolic initial boundary value problem, *Nonlinear Analysis and Applications*, 115-119, Marcel Dekker, New York.
- Chan, C.Y. and Kwong, M. K. 1988. Quenching phenomena for singular nonlinear parabolic equations, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, Vol. 12, 12, 1377-1383.
- Chan, C.Y. and Ozalp, N. 1995. Singular reactions-diffusion mixed boundary value quenching problems, *Dynamical Systems and Applications*, World Sci. Ser. Appl. Anal., 4, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 127-137.
- Chan, C.Y. and Yuen, S.I. 2001. Parabolic problems with nonlinear absorptions and releases at the boundaries, *Appl. Math. Comput.*, 121, 203-209.
- Deng, K. and Xu, M. 1999. Quenching for a nonlinear diffusion equation with a singular boundary condition, *Z. Angew. Math. Phys.* 50, 574-584.
- Dyakevich, N. E. 2008. Existence, uniqueness, and quenching properties of solutions for degenerate semilinear parabolic problems with second boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.* 338, 892-901.
- Fila, M. and Levine, H.A. 1993. Quenching on the boundary, *Nonlinear Anal.* 21, 795-802.
- Fu, S.-C. and Guo, J.-S. 2002. Blow up for a semilinear reaction-diffusion sys-

- tem coupled in both equations and boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.* 276, 458-475.
- Fu, S.-C., Guo, J.-S. and Tsai, J.C. 2003. Blow up behavior for a semilinear heat equation with a nonlinear boundary condition, *Tohoku Math. J.*55, 565-581.
- Guo, J.-S. 1990. On the quenching behavior of the solution a semilinear parabolic equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 151 (1), 58-79.
- Kawarada, H. 1975. On solutions of initial-boundary problem for  $u_t = u_{xx} + 1/(1-u)$ , *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 10, 729-736.
- Kirk, C.M. and Roberts, C.A. 2003. A review of quenching results in the context of nonlinear volterra equations, *Dynamics of Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis*, 10, 343-356.
- Levine, H.A. and Montgomery J. T. 1980. The quenching of solutions of some nonlinear parabolic equations, *SIAM J. math Analysis* 11, 842-847.
- Liang, K.W., Lin, P. and Tan, R.C.E. 2007. Numerical solution of quenching problems using mesh-dependent variable temporal steps, *Applied Numerical Mathematics*, 57, 791-800.
- Lin, Z. and Wang, M. 1999. The blow-up properties of solutions to semilinear heat equations with nonlinear boundary conditions, *Z. angew. Math.Phys.* 50, 361-374.
- De Pablo, A., Quiros, F. and Rossi, J. D. 2002. Nonsimultaneous quenching, *Applied Mathematics Letters*, 15, 265-269.
- Protter, M.H. and Weinberger, H. F. 1967. *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Salin, T. 2003. On quenching with logarithmic singularity, *Nonlinear Anal.* 52, 261-289.
- Sening, Z. and Xianfa, S. 2008. Quenching rates for heat equations with coupled singular nonlinear boundary flux, *Science in China Series A: Mathematics*, Vol. 51, No. 9, 1631-1643.
- Walter, W. 1976. *Parabolic differential equations with a singular nonlinear term*,

Funkcialaj Ekvacio 19, 271-277.

Zhi, Y. and Mu, C. 2007. The quenching behavior of a nonlinear parabolic equation with a nonlinear boundary outflux, *Appl. Math.Comput.* 184, 624-630.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Burhan SELÇUK

**Doğum Yeri** : Malatya

**Doğum Tarihi** : 15.02.1978

**Medeni Hali** : Bekar

**Yabancı Dili** : İngilizce

### Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

**Lise** : Malatya Fen Lisesi (1994)

**Lisans** : İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği  
Bölümü (1999)

**Yüksek Lisans** : Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik  
Anabilim Dalı (2004 - 2006)

**Doktora** : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik  
Anabilim Dalı (2008 – 2014)

### Yayımları

#### (SCI)

1) **Selcuk B.** and Ozalp N. The quenching behavior of a semilinear heat with a singular boundary outflux, Quarterly of Applied Mathematics, (accepted).

#### (Diğerleri)

1) **Selcuk B.** The quenching behavior of a parabolic system, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1Math. Stat., (doi:10.1501/Commua1\_0000000696).