

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

**DALGA DÖNÜŞÜMÜ ALTINDA İNDİRGENEBİLEN
LİNEER OLMAYAN BAZI FİZİKSEL DENKLEMLERİN
YARI ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

Meryem ODABAŞI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emine MISIRLI

Matematik Anabilim Dalı

**Bilim Dalı Kodu: 403.06.01
Sunuş Tarihi: 20.02.2015**

Bornova-İZMİR

2015

Meryem ODABAŞI tarafından DOKTORA tezi olarak sunulan “**Dalga Dönüşümü Altında İndirgenebilen Lineer Olmayan Bazı Fiziksel Denklemlerin Yarı Analitik Çözümleri Üzerine**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **20.02.2015** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

Jüri Başkanı : Prof. Dr. Emine MISIRLI

Raportör Üye : Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

Üye : Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ

Üye : Prof. Dr. Mehmet SEZER

Üye : Doç. Dr. Seval ÇATAL

İmza











EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum “Dalga Dönüşümü Altında İndirgenebilen Lineer Olmayan Bazı Fiziksel Denklemlerin Yarı Analitik Çözümleri Üzerine” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

20 / 02 / 2015



Meryem ODABAŞI

ÖZET**DALGA DÖNÜŞÜMÜ ALTINDA İNDİRGENEBİLEN
LİNEER OLMAYAN BAZI FİZİKSEL DENKLEMLERİN
YARI ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

ODABAŞI, Meryem

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emine MISIRLI

Şubat 2015, 116 sayfa

Kısmi diferansiyel denklemler teorisi uygulamalı matematik, fizik, mühendislik ve diğer bilim alanlarındaki uygulamaları nedeniyle doğa olaylarını açıklamakta kullanılabilecek en önemli kavramlardan biridir. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini klasik yöntemler ile elde etmek her zaman mümkün değildir. Bu nedenle bu tür denklemler için çok sayıda analitik ve nümerik yöntem geliştirilmekte ve uygulanmaktadır.

Bu tez çalışmasında, dalga dönüşümü altında adi diferansiyel denkleme indirgenebilen lineer olmayan bazı fiziksel denklemlerin hareketli dalga çözümleri trial (deneme) denklem yöntemi, modifiye edilmiş trial denklem yöntemi ve genişletilmiş trial denklem yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Bu yöntemler matematiksel fiziğin bilinen denklemlerine uygulanarak bu denklemlerin hareketli dalga çözümleri elde edilmiş ve dalga tipleri belirlenmiştir.

Trial denklem yöntemi ile tamsayı mertebeden lineer olmayan fiziksel denklemler için başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Bu nedenle yöntem, uygulamalı matematikte önemli bir yere sahip olan kesirli (fractional) mertebeden kısmi diferansiyel denklemlere ve denklem sistemine de uygulanmış ve bazı yeni hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir. Bununla birlikte, lineer olmayan fiziksel oluşum denklemlerinin tam çözümlerine ulaşmak için etkin yaklaşımlardan biri olan trial denklem yöntemi ile elde edilen çözümlerin fiziksel davranışları değerlendirilmiştir.

Anahtar sözcükler: Lineer olmayan fiziksel oluşum denklemleri, trial denklem yöntemi, hareketli dalga çözümleri, kesirli kısmi diferansiyel denklemler.

ABSTRACT

**ON THE SEMI ANALYTICAL SOLUTIONS OF SOME
NONLINEAR PHYSICAL EQUATIONS REDUCED UNDER
THE WAVE TRANSFORMATION**

ODABAŞI, Meryem

Ph.D. in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Emine MISIRLI

February 2015, 116 pages

The theory of partial differential equations is one of the most important concepts of explaining natural phenomena because of its applications in applied mathematics, physics, engineering and other field of science. It is not always possible to obtain the solutions of nonlinear partial differential equations by classical methods. Therefore, numerous analytical and numerical methods have been developed and applied for these equations.

In this thesis, we investigate the traveling wave solutions of some nonlinear physical equations reduced to the ordinary differential equations under the wave transformation by using the trial equation method, modified trial equation method and extended trial equation method. We have applied these methods to some particular equations of mathematical physics and obtained traveling wave solutions of these equations and determined the types of the waves.

By means of the trial equation method, solutions of the nonlinear integer order physical equations have been successfully obtained. Therefore, modified trial equation method has been applied to the fractional partial differential equations and system of differential equation that have an important role in applied mathematics and the traveling wave solutions of these equations have been obtained. Additionally, the solutions obtained by the trial equation method which is an efficient approach to get exact solutions of the physical evolution equations have been evaluated.

Keywords: Nonlinear physical evolution equations, trial equation method, traveling wave solutions, fractional partial differential equations.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması süresince bilgi ve önerileriyle bana yol gösteren, ilgisini esirgemeyen ve her konuda destek olan danışman hocam Prof. Dr. Emine MISIRLI'ya, BİDEB 2211 programı ile sunduğu destekten dolayı TÜBİTAK'a ve her zaman yanımda olan aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ	xvi
1. GİRİŞ	1
2. TRIAL DENKLEM YÖNTEMİ.....	8
2.1 Hareketli Dalga Çözümleri	8
2.2 Fiziksel Oluşum Denklemleri için Trial Denklem Yöntemi.....	11
2.3 Yöntemin Analizi.....	15
2.4 Trial Denklem Yönteminin Uygulamaları.....	19
2.4.1 Liouville denklemine uygulaması.....	19
2.4.2 Tzitzeica-Dodd-Bullough denklemine uygulaması	23
2.4.3 Lineer olmayan telgraf denklemine uygulaması.....	25
2.4.4 Genelleştirilmiş ısı iletim denklemine uygulaması.....	28
2.4.5 Sharma-Tasso-Olver denklemine uygulaması.....	31
2.4.6 Lineer olmayan coupled Klein-Gordon denklemlerine uygulaması.....	34

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
3. MODİFİYE EDİLMİŞ TRIAL DENKLEM YÖNTEMİ	37
3.1 Modifiye Edilmiş Trial Denklem Yönteminin Uygulamaları.....	38
3.1.1 Sharma-Tasso-Olver denklemine uygulaması	38
3.1.2 Modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemine uygulaması	45
3.1.3 İki boyutlu Bratu denklemine uygulaması	48
3.1.4 Genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemine uygulaması	51
4. GENİŞLETİLMİŞ TRIAL DENKLEM YÖNTEMİ.....	59
4.1 Genişletilmiş Trial Denklem Yönteminin Uygulamaları	60
4.1.1 İki boyutlu Bratu denklemine uygulaması	61
4.1.2 Genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemine uygulaması	67
5. KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HAREKETLİ DALGA ÇÖZÜMLERİ	75
5.1 Kesirli Türevler	76
5.2 Modifiye Edilmiş Riemann-Liouville Türevi	77
5.3 Kesirli Diferansiyel Denklemler için Modifiye Edilmiş Trial Denklem Yöntemi.....	78
5.4 Modifiye Edilmiş Trial Denklem Yönteminin Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları	80

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

5.4.1 Lineer olmayan kesirli Klein-Gordon denkleminde uygulaması.....	80
5.4.2 Lineer olmayan kesirli CRWP denkleminde uygulaması.....	88
5.4.3 Lineer olmayan kesirli Cahn-Allen denkleminde uygulaması	92
5.4.4 Uzay-zaman kesirli KdV denkleminde uygulaması	97
5.4.5 Uzay-zaman kesirli foam drainage denkleminde uygulaması	99
5.4.6 Zaman kesirli Hirota-Satsuma coupled KdV sistemine uygulaması	102
6. SONUÇ.....	106
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	108
ÖZGEÇMİŞ	116

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 (2.52) çözümünün $a_2 = 1, c = -1$ değerleri için grafikleri	22
2.2 (2.53) çözümünün $a_2 = -1, c = 1$ değerleri için grafikleri	22
2.3 (2.55) çözümünün $c = 1, \xi_0 = 0, -10 < x < 10, 0 < t < 5$ değerleri için grafiği	23
2.4 (2.77) çözümünün $\alpha = 1, \beta = -1, \xi_0 = 0, -10 < x < 10, 0 < t < 5$ değerleri için grafiği	27
2.5 (2.79) çözümünün $\alpha = 1, \beta = -1, \xi_0 = 0, -10 < x < 10, 0 < t < 5$ değerleri için grafiği	28
2.6 u_1 ve u_2 çözümlerinin $n = 3, a = 1, \xi_0 = 0$ değerleri için grafikleri	31
2.7 u_3 ve u_4 çözümlerinin $n = 2, a = 1, \xi_0 = 0$ değerleri için grafikleri	31
2.8 (2.100) çözümünün $c = \alpha = \pm 2, \xi_0 = 0$ değerleri için grafikleri	33
2.9 (2.104) çözümünün $c = \alpha = \pm 2$ değerleri için grafikleri	34
3.1 (3.14) çözümlerinin $c = \alpha = \pm 1, a_2 = -2$ değerleri için grafikleri	40
3.2 (3.33) $u_1(x, t)$ çözümünün $c = \alpha = 1$ değerleri için grafikleri	44
3.3 $u_1(x, t)$ ve $u_2(x, t)$ çözümlerinin $c = 1, \alpha = -1$ değerleri için grafikleri ..	44
3.4 (3.45) ve (3.46) çözümlerinin $c = 2, \xi_0 = 0$ değerleri için grafikleri	47

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.5 u_1 ve u_4 çözümlerinin $c = 1/2$, $\xi_0 = 0$ değerleri için grafikleri.....	48
3.6 (3.62) çözümünün $b_0 = a_3 = 1$, $s = 2$, $k = \lambda = 1$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ değerleri için grafiği.....	50
3.7 (3.94) çözümünün $n = 1$, $l = 2$, $b = -1$, $\xi_0 = 0$ ve sırası ile $k = \pm 4$, $a = \mp 1$, $\omega = \pm 1$ değerleri için grafikleri.....	57
3.8 (3.94) çözümünün $n = 1$, $l = 2$, $b = -1$, $\xi_0 = 0$ ve sırası ile $k = \pm 4$, $a = \pm 2$, $\omega = \pm 1$ değerleri için grafikleri	57
3.9 (3.96) çözümünün $n = 1$, $l = 2$, $a = -2$, $k = 4$, $\xi_0 = 0$ ve sırası ile $b = \pm 1$, $\omega = \pm 1$ değerleri için grafikleri	57
3.10 (3.96) çözümünün $n = 1$, $l = 2$, $a = 2$, $k = 4$, $\xi_0 = 0$ ve sırası ile $b = \pm 1$, $\omega = \pm 1$ değerleri için grafikleri	58
5.1 (5.30) $u_1(x, t)$ çözümünün $\theta_1 = \theta_2 = k = 1$, $\lambda = 2$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.01$, 0.50 ve 0.95 değerleri için grafikleri	83
5.2 (5.30) $u_2(x, t)$ çözümünün $\theta_1 = \theta_2 = k = 1$, $\lambda = 2$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.01$, 0.50 ve 0.95 değerleri için grafikleri	83
5.3 (5.30) $u_3(x, t)$ çözümünün $\theta_1 = \theta_2 = k = 1$, $\lambda = 2$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.01$, 0.50 ve 0.95 değerleri için grafikleri	83
5.4 (5.31) $u_4(x, t)$ çözümünün $\theta_1 = \theta_2 = k = 1$, $\lambda = 2$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.01$, 0.50 ve 0.95 değerleri için grafikleri	83
5.5 (5.35) $u_1(x, t)$ çözümünün $\theta_1 = -1$, $k = \theta_2 = 1$, $\lambda = 2$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.01$, 0.50 ve 0.95 değerleri için grafikleri	84

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.6 (5.35) $u_2(x, t)$ çözümünün $\theta_1 = -1$, $k = \theta_2 = 1$, $\lambda = 2$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.01$, 0.50 ve 0.95 değerleri için grafikleri ...	84
5.7 (5.36) $u_3(x, t)$ çözümünün $\theta_1 = -1$, $k = \theta_2 = 1$, $\lambda = 2$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.01$, 0.50 ve 0.95 değerleri için grafikleri ...	85
5.8 (5.36) $u_4(x, t)$ çözümünün $\theta_1 = -1$, $k = \theta_2 = 1$, $\lambda = 2$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.01$, 0.50 ve 0.95 değerleri için grafikleri ...	85
5.9 (5.138) u_1 , v_1 ve w_1 çözümlerinin $\lambda = -1$, $\xi_0 = 0$, $\alpha = 0.01$ değerleri için grafikleri	104
5.10 (5.138) u_1 , v_1 ve w_1 çözümlerinin $\lambda = -1$, $\xi_0 = 0$, $\alpha = 0.5$ değerleri için grafikleri	104
5.11 (5.138) u_1 , v_1 ve w_1 çözümlerinin $\lambda = -1$, $\xi_0 = 0$, $\alpha = 0.95$ değerleri için grafikleri	104

1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemler uygulamalı matematik, fizik ve mühendislik alanında karşılaşılan pek çok problemin matematiksel modelini oluşturmaktadır. Tarihsel açıdan bakıldığında, bu denklemlerin kaynağı olarak geometrideki yüzey çalışmaları ve mekanikteki çeşitli problemler gösterilebilir. Kısmi diferansiyel denklemler hem temel doğa yasalarını ifade ettiği için, hem de bilim ve mühendislikte karşılaşılan problemlerin matematiksel analizi sırasında ortaya çıktığı için birçok araştırmacı tarafından bu denklemler ile ifade edilen matematiksel problemler ve çözüm teknikleri incelenmektedir.

Fiziksel olguların diferansiyel denklemler ile ifade edilen matematiksel yasalara uyduğu ilk olarak Isaac Newton tarafından keşfedilmiştir. Newton, mekanik yasalarını formüle etmiş ve bunları gezegenlerin hareketine uygulamıştır. Newton'un bu temel keşfinden sonra fizik, kimya ve biyoloji gibi alanlarda pek çok kısmi diferansiyel denklem matematiksel olarak modellenmiş ve çeşitli yöntemlerle çözülmüştür. Bu denklemler arasında; katı cisimlerin dinamiği ve akışkanların hareketi için Euler'in denklemleri, Lagrange'ın hareket denklemleri, Hamilton'un analitik mekanikteki hareket denklemleri, Fourier'nin ısı iletim denklemleri, Cauchy'nin hareket denklemleri ve Navier'in elastik hareket denklemleri, viskoz sıvıların hareketi için Navier-Stokes denklemleri, kompleks fonksiyonlar teorisindeki Cauchy-Riemann denklemleri, elastik katıların statik ve dinamik davranışları için Cauchy-Green denklemleri, Kirchhoff'un elektrik devreleri için denklemleri, Maxwell'in elektromanyetik alan denklemleri ile kuantum mekaniğindeki Schrödinger ve Dirac denklemleri sayılabilir (Debnath and Myint-U, 2007).

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin araştırılmaya başlanması oldukça eskiye dayanmakla birlikte, bu denklemler için günümüzde farklı teknikler ve yöntemler uygulanmakta ve kayda değer gelişmeler olmaktadır. Lineer olmayan dalga denklemleri ile kuantum alan teorisi, plazma fiziği, lineer olmayan optik, yoğun madde fiziği ve akışkanlar dinamiği gibi alanlarda karşılaşıldığı için bu denklemler yoğun olarak çalışılmaktadır. Lineer olmayan dalga denklemleri, lineer dalga denklemlerinden farklı olarak şok dalgaları, su dalgaları, solitonlar ve soliter (tekli) dalga çözümlerine sahiptir. Lineer olmayan dalgalar teorisi ve solitonlar, yirminci yüzyılın önemli gelişmeleri arasında gösterilmektedir. Soliton etkileşimlerinin, kanonik kısmi diferansiyel denklemlerin açık tam çözümlerini elde etmek için ters saçılım yönteminin ve

lineer olmayan evrim denklemlerinin incelenmesi için asimtotik pertürbasyon analizinin keşfi de bu yüzyıldaki büyük başarılar arasında kabul edilmektedir (Debnath, 2012).

Doğadaki dalga hareketlerinde lineer olmama ve yayılım (dispersion) temel bir role sahiptir. John Scott Russell, 1834 yılında Edinburgh–Glasgow kanalı üzerinde, şekil değişikliği olmadan uzun süre yayılan su dalgalarını, yani soliter (tekli) dalgaları gözlemlemiş ve bu gözlemini "Dalgalar üzerine raporlar" çalışmasında 1844 yılında yayınlamıştır. Bir soliter dalga, değişmemiş formda izole bir yayılımı temsil eder. Bu gözlem, Russell'ın su dalgalarını kapsamlı bir şekilde deneysel olarak incelemeye başlamasına sebep olmuştur. Russell, su dalgalarını soliter dalgalar ve tüm diğer dalgalar olarak iki gruba ayırmış ve önceliği soliter dalgaları incelemeye ayırmıştır.

Korteweg ve deVries, 1895 yılında sığ su dalgalarının yayılımını KdV denklemi olarak bilinen denklem ile modellemişlerdir. KdV denklemi, dispersif dalgalar için en temel lineer olmayan modeldir. Bu denklem, soliter dalgaları da içeren kalıcı dalga çözümlerine sahiptir ve birçok bilim adamı tarafından incelenmiştir. 1965 yılında Zabusky ve Kruskal, KdV denkleminin titreşim benzeri (pulselike) soliter çözümlerinin daha önce bilinmeyen bir özelliğini ortaya çıkarmışlardır: KdV denkleminin soliter çözümü, bu şekildeki başka bir çözümle elastik olarak etkileşimde bulunur. Zabusky ve Kruskal, bu çözümleri soliton olarak adlandırmışlardır (Ablowitz and Segur, 1981).

Solitonlar elastik olarak yayılabilme özelliğine sahiptir ve bu sayede enerjilerini kaybetmeden yayılır ve başka bir dalga ile etkileşime girdiklerinde kendilerine ait özellikleri koruyarak dağılırlar. Başka bir dalga ile çarpıştıktan sonra daima çarpışmadan önceki başlangıç şekline ve hızına geri dönen lineer olmayan dalgalar soliton olarak nitelendirilir.

Rosenau ve Hyman, 1993 yılında soliter dalgaların kompaktan olarak adlandırılan yeni bir sınıfını keşfetmişlerdir. Bu yeni çözüm sınıfı, $K(m, n)$ olarak gösterilen dispersif lineer olmayan denklemlerin çözümleri araştırılırken ortaya çıkmıştır. Kompaktonlar, sonlu dalga boyuna sahip solitonlar olarak tanımlanabilir. Kompaktonun genişliği genliğinden bağımsızdır fakat hızı yüksekliğine bağlıdır. Kompaktonlar da solitonlar gibi diğer dalgalarla çarpıştıktan sonra aynı şekle geri dönen soliter dalgalardır. Kompaktonlar, soliton etkileşimleriyle benzer şekilde elastik çarpışmalar sergiler. Bununla birlikte,

soliton çarpışmalarının aksine iki kompaktonun çarpıştığı nokta küçük genlikli kompakton-antikompakton çiftleri yaratır.

Lineer olmayan modeller için soliton tipi çözümlerin varlığı akışkanlar mekaniği, katı madde fiziği, plazma fiziği, lineer olmayan optik gibi birçok alandaki uygulamaları nedeniyle büyük önem taşımaktadır. Lineer olmayan oluşum denklemlerinin soliton tipi çözümleri, olayların fiziksel işleyişinin daha iyi anlaşılmasını sağlamaktadır.

Lineer olmayan pek çok olayın matematiksel modellemesi, adi veya kısmi diferansiyel denklemler, integral veya integro-diferansiyel denklemler ile ifade edilebilmektedir. Bazı durumlarda ise lineer olmayan problemlerin modellemesi sırasında tamsayı mertebeden türevler yetersiz kalabilmektedir. Bu durumda kesirli (fractional) mertebeden diferansiyel denklemler kullanılabilir. Lineer olmayan pek çok fiziksel olayın matematiksel modellemesinde, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler ile tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlere göre gerçeğe daha yakın sonuçlar elde edilebilmektedir.

Kesirli analizin tarihi 17. yüzyıla kadar dayanmakla birlikte, tamsayı olmayan mertebeden türevlerin fizik ve mühendislikteki yararlarının görülmesi, son yıllarda kesirli analizin daha çok ilgi görmesini sağlamış ve gelişimini hızlandırmıştır. Kesirli diferansiyel denklemler fizik, mekanik, biyoloji, mühendislik, elektrokimya, ekonomi, ısı iletimi, kontrol teorisi, akustik, sinyal işleme, sistem tanımlama, kozmoloji gibi birçok alanda önemli uygulamalara sahiptir.

Literatürde kesirli türev operatörlerinin Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Riesz, Hadamard, Chen, Caputo ve Jumarie gibi birçok farklı tanımı (Podlubny, 1999; Kilbas et al., 2006) yer almaktadır. En sık kullanılan türev tanımlarından biri olan Riemann-Liouville türevi, başlangıç koşullarının da kesirli mertebeden tanımını gerektirmektedir ve bu tanıma göre sabitin türevi sıfıra eşit değildir. Caputo tanımında ise başlangıç koşullarının tamsayı mertebeden tanımı mümkündür ve sabitin türevi sıfıra eşittir. Bununla birlikte, fonksiyon diferansiyellenebilir olmadığında Caputo tanımı uygulanamaz. Jumarie (2006) tarafından önerilen modifiye edilmiş Riemann-Liouville türev tanımı ise, sürekli olan fakat diferansiyellenebilir olmayan fonksiyonlar için de uygulanabilmektedir. Bu çalışmada lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin tam

çözümleri araştırılırken Jumarie'nin modifiye edilmiş Riemann-Liouville tanımı kullanılmıştır.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini standart yöntemleri kullanarak elde etmek her zaman mümkün olmayabilir. Bu sebeple son yıllarda bu problemlerin tam ve yaklaşık çözümlerine ulaşmak için pek çok etkin yöntem önerilmekte ve uygulanmaktadır. Bu yöntemler arasında; Hirota'nın bilineer dönüşümü (Hirota, 1971, 1973), ters saçılım yöntemi (Ablowitz, 1991), tanh yöntemi (Malfliet, 1992, 1996), homojen denge yöntemi (Wang, 1995, 1996), genişletilmiş tanh yöntemi (Fan, 2000), Jacobi eliptik fonksiyon yöntemi (Liu et al., 2001), first integral yöntemi (Feng, 2002), F-açılım yöntemi (Zhou et al., 2003), sinüs-kosinüs yöntemi (Wazwaz, 2004, 2005a), üstel fonksiyon yöntemi (He and Wu, 2006), (G'/G) açılım yöntemi (Wang et al., 2008), modifiye edilmiş Kudryashov yöntemi (Kudryashov, 2012) sayılabilir.

Ma ve Fuchssteiner (1996), lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için etkin bir yöntem önermişlerdir. Bu yaklaşımın temelinde, verilen diferansiyel denklemin çözümlerini, çözülebilir diferansiyel denklemlerin çözüm fonksiyonları -özel olarak polinomial ve rasyonel fonksiyonlar- olarak genişletme fikri vardır. Bu yaklaşımı kullanarak Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov denkleminin bazı açık hareketli dalga çözümlerini (explicit traveling wave solutions) elde etmişlerdir.

Son dönemde, Liu (2005a, 2005b) lineer olmayan oluşum denklemleri için trial denklemler yöntemini önermiş ve bu yöntemi çeşitli denklemlere uygulamıştır. Bu yöntem, kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için geliştirilen sistematik bir araçtır. Yöntemin temelinde, u 'nun bir diferansiyel denklemi ele alındığında, bu denklemin tam çözümünün çözülebilir bir denklemi, örneğin $u' = F(u)$ denklemini sağladığı kabul edilir. Burada, F integre edilebilir fonksiyonlar sınıfında yer almalıdır. Bu durumda amaç, F fonksiyonunu belirlemek olacaktır. F fonksiyonu polinomial, rasyonel ya da irrasyonel olarak seçilebilmektedir. F polinomial fonksiyon olduğunda Liu (2006a), KdV-Burgers ve Boussinesq denklemlerinin tam çözümlerini elde etmiştir. Liu (2006b) çalışmasında ise F rasyonel fonksiyon olarak seçilmiş ve $(u')^2 = F(u)$ yaklaşımı kullanılarak yüksek mertebeden KdV denkleminin hareketli dalga çözümleri bulunmuştur. Bununla birlikte, bazı diferansiyel denklemler için polinomial ya da rasyonel F fonksiyonları bulunamayabilir. Bu sebeple Du (2010), F fonksiyonunu irrasyonel fonksiyon olarak seçerek bu tip denklemleri çözmek için

yeni bir trial denklem yöntemi önermiştir. Du, bu irrasyonel yaklaşımı kullanarak Burgers–KdV, disipatif sine-Gordon ve Fujimoto–Watanabe denklemlerinin bazı tam çözümlerini vermiştir. Liu (2010), tam diskriminasyon (complete discrimination) sistemini kullanarak polinomial yaklaşım altında bazı lineer olmayan diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümlerini sınıflandırmıştır. Liu (2011) çalışmasında ise simetri özellikleri ile polinomial trial denklemi birleştiren bir yaklaşım önermiş ve bu yaklaşımı uygulayarak Burgers-KdV ve yüksek mertebeden lineer olmayan terimler içeren reaksiyon-difüzyon denklemlerinin tam çözümlerini elde etmiştir. Daha sonra Du (2011), trial denklem için polinomial ve irrasyonel ifadelerin yer aldığı yeni bir yaklaşım önermiş ve bunu kullanarak RLW-Burgers ve (2+1)-boyutlu KdV-Burgers denklemlerinin bazı tam çözümlerini elde etmiştir. Liu (2011), değişken katsayılı diferansiyel denklemler için trial denklem yönteminin yeni bir versiyonunu önermiş ve bu yaklaşımla lineer olmayan Schrödinger denkleminin tam çözümlerine ulaşmıştır.

Bunlara ek olarak, (Gürefe et al., 2011) çalışmasında KdV ve $K(m,n)$ denklemlerine polinomial yaklaşım uygulanmıştır. (Gürefe et al., 2012) çalışmasında ise irrasyonel trial denklem yöntemi yüksek mertebeden evrim denklemlerine uygulanmış ve (3+1) boyutlu potansiyel Yu-Toda-Sasa-Fukuyama (YTSE) ile (2+1) boyutlu Broer-Kaup-Kupershmidt (BKK) denklemlerinin bazı hareketli dalga çözümleri bulunmuştur. (Pandir et al., 2012) çalışmasında trial denklem yönteminin genişletilmiş (extended) formu önerilmiş ve bu yöntem Camassa Holm KP ve genelleştirilmiş KdV denklemlerine uygulanmıştır. (Bulut et al., 2013) çalışmasında geliştirilmiş (modified) trial denklem yöntemi kesirli türevli dalga denklemine ve kesirli türevli genelleştirilmiş Burgers denklemine uygulanmıştır. (Pandir et al., 2013a, 2013b) çalışmalarında ise genişletilmiş trial denklem yöntemi genelleştirilmiş kesirli türevli KdV, kesirli türevli $K(n,n)$ ve kesirli türevli dispersive KdV denklemlerine uygulanmıştır. (Pandir and Gürefe, 2013) çalışmasında genelleştirilmiş kesirli türevli Zakharov-Kuznetsov denklemi için genişletilmiş trial denklem yöntemi kullanılmıştır. (Bulut and Pandir, 2013) çalışmasında kesirli türevli Sharma-Tasso-Olver denklemi için geliştirilmiş trial denklem yöntemi uygulanmıştır. (Ekici et al., 2013) çalışmasında Klein-Gordon-Zakharov denklemi için genişletilmiş trial denklem yöntemi kullanılmıştır. (Odabaşı and Mısırlı, 2014) çalışmasında genişletilmiş trial denklem yöntemi uygulanmış ve iki boyutlu Bratu denkleminin tam çözümleri elde edilmiştir. (Belgacem et al., 2014) çalışmasında genişletilmiş trial denklem yöntemi uygulanarak genelleştirilmiş Benjamin ve Burger-KdV denklemlerinin hareketli

dalga çözümleri bulunmuştur. (Gürefe et al., 2014) çalışmasında Davey–Stewartson denkleminin tam çözümleri genişletilmiş trial denklem yöntemi ile bulunmuştur. (Li, 2014a, 2014b) çalışmalarında ise geliştirilmiş Boussinesq ve Benjamin-Ono denklemlerinin hareketli dalga çözümleri trial denklem yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

Bu çalışmada, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için geliştirilen sistematik ve etkin bir yaklaşım olan trial denklem yöntemi ve tam diskriminasyon sistemi (complete discrimination system) ele alınmış, bu yaklaşım pek çok denkleme uygulanmış ve başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

Giriş bölümünde kısmi diferansiyel denklemlere genel bir bakış açısı ortaya konmuş ve literatür taramasına yer verilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde trial denklem yöntemi açıklanmış ve analiz edilmiştir. Bu yöntem uygulanırken, öncelikle verilen kısmi diferansiyel denklem dalga dönüşümü yardımıyla adi diferansiyel denkleme indirgenmiştir. Bu yaklaşım Liouville, Tzitzeica-Dodd-Bullough, lineer olmayan telgraf, genelleştirilmiş ısı iletim, Sharma-Tasso-Olver ve lineer olmayan coupled Klein-Gordon denklemlerine uygulanmış ve bu denklemlerin hareketli dalga çözümleri (traveling wave solutions) elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, modifiye edilmiş trial denklem yöntemi (modified trial equation method) ele alınmış ve yöntem, Sharma-Tasso-Olver, modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony, iki boyutlu Bratu ve genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemlerine uygulanmış ve bu denklemlerin tam çözümleri elde edilmiştir. Sharma-Tasso-Olver denklemi hem klasik trial denklem yöntemi hem de modifiye edilmiş trial denklem yöntemi ile çözülmüş ve bu sayede yöntemler arasındaki bağlantı gösterilmiş ve modifiye edilmiş trial denklem yöntemi ile daha fazla çözüme ulaşılabildiği gözlenmiştir. Elde edilen hareketli dalga çözümleri soliton, kink soliton, kompakt, rasyonel ve periyodik yapıdadır. Çözüm yapılarının fiziksel davranışlarını görebilmek için grafiklere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, genişletilmiş trial denklem yöntemi (extended trial equation method) kullanılarak iki boyutlu Bratu ve genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemlerinin hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir. Bu denklemlerin genişletilmiş trial denklem yöntemi kullanılarak elde edilen çözümlerinin, üçüncü bölümde modifiye edilmiş trial denklem yöntemi ile

bulunan çözümler ile aynı denklik sınıfında yer aldıkları gösterilmiştir. Bununla birlikte, genişletilmiş trial denklem yöntemi ile çözüm uzayı genişlemiş ve daha fazla hareketli dalga çözümü elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, modifiye edilmiş trial denklem yöntemi ve trial denklem yöntemi kesirli (fractional) mertebeden diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Bunun için öncelikle Jumarie (2006) tarafından tanımlanan modifiye edilmiş Riemann-Liouville türevi kullanılarak kesirli kısmi denklem, adi diferansiyel denkleme indirgenmiştir. Bu yaklaşım lineer olmayan kesirli Klein-Gordon, kesirli CRWP (Clannish Random Walker Parabolic), kesirli Cahn-Allen, uzay-zaman kesirli KdV, uzay-zaman kesirli foam drainage (köpük drenaj) denklemleri ve zaman kesirli Hirota–Satsuma coupled KdV sistemi için uygulanmış ve bu denklemlerin hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir. Trial denklem yöntemi ilk kez uzay-zaman kesirli denklemlere ve zaman kesirli sisteme uygulanmıştır. Elde edilen çözümler sınıflandırılmış ve bazı denklemler için yeni çözümlere ulaşılmıştır.

Sonuç bölümünde ise, lineer olmayan fiziksel denklemlerin hareketli dalga çözümlerine ulaşmak için etkin yöntemlerden biri olan trial denklem yöntemi ile elde edilen çözümler değerlendirilmiştir.

2. TRIAL DENKLEM YÖNTEMİ

Çalışmanın bu bölümünde öncelikle hareketli dalga çözümleri hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra, trial denklem yöntemi açıklanmış ve yöntem matematiksel olarak analiz edilmiştir. Ardından yöntem Liouville, Tzitzeica-Dodd-Bullough, lineer olmayan telgraf, genelleştirilmiş ısı iletim ve Sharma-Tasso-Olver denklemlerine ve lineer olmayan coupled Klein-Gordon sistemine de uygulanmış ve bu denklemlerin ve sistemin hareketli dalga çözümleri elde edilmiş ve dalga tipleri belirlenmiştir. Ayrıca bu çözümlerin fiziksel davranışlarını görebilmek için grafiklere yer verilmiştir.

2.1 Hareketli Dalga Çözümleri

Bu kısımda, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için hareketli dalga çözümleri (traveling wave solutions) ile ilgili temel bilgilere yer verilecektir (Ames, 1972).

Hareketli dalga çözümlerini incelemek için difüzyon denklemi ele alınacaktır. Pek çok fiziksel problem

$$u_t = (u^n)_{xx}$$

biçimindeki difüzyon denklemi ile ifade edilebilir. λ sabit olmak üzere, " f hangi formda olmalıdır ki $f(x-\lambda t)$ difüzyon denkleminin bir çözümü olabilsin?" sorusunun yanıtı araştırılmıştır. Bunun için f fonksiyonu difüzyon denklemini sağlamalıdır. Yani f fonksiyonu difüzyon denkleminde yerine konulduğunda

$$(f^n)'' + \lambda f' = 0$$

biçimindeki diferansiyel denklemi sağlamalıdır. Burada f' , $\xi = x - \lambda t$ olmak üzere ξ 'ye göre türevi göstermektedir. Bu ifade integre edildiğinde

$$(f^n)' + \lambda f = A$$

denklemi elde edilir. n pozitif tamsayı iken bir kez daha integral alındığında A ve B sabitler ve $A \neq 0$ olmak üzere

$$\sum_{j=0}^{n-2} \frac{(A/\lambda)^j u^{n-1-j}}{n-1-j} + \left(\frac{A}{\lambda}\right)^{n-1} \ln\left(u - \frac{A}{\lambda}\right) = \frac{\lambda}{n} (\lambda t - x + B)$$

kapalı (implicit) çözümü elde edilir. Eğer $A=0$ ise, $n \neq 1$ iken

$$u(x, t) = \left[\frac{\lambda(n-1)}{n} (\lambda t - x + B) \right]^{1/(n-1)}$$

biçiminde bir açık (explicit) çözümü elde edilir. Eğer $n=1$ ise, bu durumda

$$u(x, t) = B \exp[-\lambda(x - \lambda t)]$$

açık çözümüne ulaşılır. Yani, bir difüzyon denkleminin ortamda bozulmadan yayılan bir hareketli dalga çözümüne sahip olması mümkündür. Benzer bir soru dalga mekaniği için de sorulabilir. Bu özel hareketli dalga çözüm sınıfları, sabit hızlı ve değişmeyen şekilde yayılan dalgaları temsil eder. Değişmeden yayılan (steady propagating) dalgalar için λ yayılımın hızını göstermek üzere, dinamik değişkenler sadece $\xi = x - \lambda t$ 'nin fonksiyonları olacaktır. Burada kısmi türevlerin

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t}$$

biçiminde olacağı açıktır.

x konum ve t zaman değişkenleri olmak üzere, x ve t 'ye bağlı kısmi diferansiyel denklem ξ 'ye bağlı adi diferansiyel denkleme indirgenebilmektedir. Bu durumda, elde edilen adi diferansiyel denklemin çözümleri aynı zamanda kısmi diferansiyel denklemin de çözümleri olur. Bu çözümler, λ hızına parametrik olarak bağlıdır. $\xi = x - \lambda t$ dönüşümü, uzay koordinat sistemini dalga ortamına göre hareket eden sisteme dönüştürmektedir (Ames, 1972).

Scott (1970), bir mekanik iletim hattını ele alarak bu hattı

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = G(\phi)$$

biçiminde bir denklem ile modellemiştir. Bu modelde sarkaç döngüsü özel olarak $G(\phi) = \sin \phi$ şeklindedir. Bu model için $\phi = \phi(\xi)$, $\xi = x - \lambda t$ biçiminde çözümler araştırıldığında,

$$d^2\phi / d\xi^2 = G(\phi) / (1 - \lambda^2)$$

ifadesi elde edilir. $G(\phi) = \sin \phi$ özel durumunda iki farklı çözüm

$$\phi = 4 \tan^{-1} \left\{ \exp \pm \left[(x - \lambda t) / (1 - \lambda^2)^{1/2} \right] \right\}, \quad \lambda < 1,$$

$$\phi = 4 \tan^{-1} \left\{ \exp \pm \left[(x - \lambda t) / (\lambda^2 - 1)^{1/2} \right] \right\} + \pi, \quad \lambda > 1$$

biçiminde elde edilir. Burada integrasyon sabiti birinci durumda $+1$ ve ikinci durumda -1 değerlerine eşittir.

İntegrasyon sabiti E 'nin ± 1 değerlerinden farklı olması durumunda ϕ ,

$$(1 - \lambda^2)^{1/2} \int_0^\phi \frac{d\phi}{[2(E - \cos \phi)]^{1/2}} = \xi$$

biçiminde ξ 'nin bir kapalı fonksiyonu olarak yazılabilir.

$E > 1$ ve $\lambda < 1$ olması durumunda; $cdx = cnx / dn x$, $\gamma = 2(E + 1)$ modülünün eliptik fonksiyonunu göstermek üzere ϕ ,

$$\phi = \cos^{-1} \left\{ 2cd^2 \left[\frac{\xi}{\gamma(1 - \lambda^2)^{1/2}} \right] - 1 \right\}$$

biçiminde ξ 'nin bir monoton artan fonksiyonu olarak ifade edilir.

$-1 < E < 1$ ve $\lambda > 1$ olması durumunda ise sn , $2\gamma^2 = 1 - E$ modülünün eliptik fonksiyonunu göstermek üzere ϕ ,

$$\phi = 2 \sin^{-1} \left\{ \gamma \operatorname{sn} \left[\frac{\xi}{(\lambda^2 - 1)^{1/2}} \right] \right\}$$

biçiminde ξ 'nin bir periyodik fonksiyonu olarak ifade edilebilir (Ames, 1972).

Burada sözü edilen yapılar, 1844 yılında Scott-Russell tarafından incelenmiş ve Korteweg ve deVries tarafından detaylandırılmıştır. Su dalgaları teorisinin yeniden incelenmesi Stoker (1957) çalışmasında yer almaktadır.

Korteweg ve deVries, $u_t \pm u^p u_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$ denkleminin bir özel hali olan ve su dalgalarının yayımını modelleyen

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

biçimindeki denklemi incelemişlerdir. Bu denklem soliton olarak adlandırılan,

$$\phi(\xi) = A_0 + A \operatorname{sech}^2(\xi / \Delta)$$

yapısındaki $u = \phi(\xi)$, $\xi = x - \lambda t$ soliter titreşim dalgası (solitary wave pulse) çözümüne sahiptir. Burada $|x| \rightarrow \infty$ iken A_0 , u değerleri, $A = 3\lambda$ ve $\Delta = 2\lambda^{-1/2}$ dir. λ hızının artması, genliğin büyüdüğü ve titreşim genişliğinin küçüldüğü anlamına gelir (Ames, 1965, 1972).

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için geliştirilen sistematik yöntemlerden biri de trial (deneme) denklem yöntemidir.

2.2 Fiziksel Oluşum Denklemleri için Trial Denklem Yöntemi

Liu (2005a, 2005b) tarafından önerilen trial denklem yöntemi, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümlerini sistematik olarak elde etmek için geliştirilen etkin yöntemlerden biridir. Liu'nun yöntemini tanımlamak için u 'nun bir diferansiyel denklemi ele alınsın. Bu diferansiyel denklemin tam çözümü

$$u'(\xi) = F(u, \theta_1, \dots, \theta_m) \quad (2.1)$$

denklemini sağlasın. Bu durumda amaç F fonksiyonunu belirlemek olacaktır. Burada F polinomial, rasyonel ya da irrasyonel olarak seçilebilir. $\theta_1, \dots, \theta_m$ parametreler olmak üzere, (2.1) denkleminin çözümü

$$\xi - \xi_0 = \int \frac{du}{F(u, \theta_1, \dots, \theta_m)} \quad (2.2)$$

integral formunda yeniden yazılabilir. Burada dikkat edilmesi gereken, F fonksiyonunun integre edilebilir denklemler sınıfında olması gerektiğidir. Yöntemin uygulama kolaylığı göz önüne alındığında F polinom olarak seçilebilir.

Eğer bu polinom, farklı köklere sahip bir polinom ise seriye açılabilir ve denge prensibi ile birlikte yakınsaklığı incelenebilir. Denge prensibi, diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türev ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimlerin dengelenmesi esasına dayanır (Malfliet, 1992; Baldwin et al., 2004). F integre edilebilir ve farklı köklere sahip bir polinom olduğunda çözümlerin uzayı gerdiği söylenebilir. Farklı parametrelere göre integral farklı çözümleri verecektir. Bu noktada önemli olan, elde edilen parametre değerleri ve bu değerlere karşı gelen integral çözümlerini elde edebilmektir. F seçiminin detayları için (Ames, 1972) incelenebilir. (Yang et al., 1996) çalışmasında yer alan polinomlar için tam diskriminasyon sistemi (complete discrimination system) olarak adlandırılan matematiksel kavram parametrelerin belirlenmesi problemini çözmek için uygulanabilir. (Liu, 2006c) çalışmasında polinomlar için tam diskriminasyon sistemi lineer olmayan diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümlerini sınıflandırmak için uygulanmıştır. Dalga dönüşümü altında integral forma doğrudan indirgenebilen pek çok lineer olmayan diferansiyel denklem için hareketli dalga çözümleri polinomlar için tam diskriminasyon sistemi kullanılarak sınıflandırılabilir. Bununla birlikte, indirgenmiş denklemleri doğrudan integral formda yazılamayan lineer olmayan diferansiyel denklemler de mevcuttur. (Fan, 2003) ve benzeri çalışmalarda bu denklemleri çözmek için yaklaşım yöntemleri tanıtılmıştır. Trial denklem yönteminin uygulanması ile hareketli dalga çözümleri (2.2) integrali ile doğrudan bağlantılı olmayan denklemlerin çözümleri, bu integral ile dolaylı olarak ilişkilendirilir. Yöntemin temel noktası, lineer olmayan bir diferansiyel denklemin her tam çözümünün bir integrali çözerek belirlenebileceği fikridir. Çalışmamızda, diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için trial denklem yöntemi ve tam diskriminasyon sistemi temel alınacaktır.

Polinomlar için tam diskriminasyon sistemi, ikinci dereceden $ax^2 + bx + c$ polinomunun diskriminatı olan $\Delta = b^2 - 4ac$ ifadesinin yüksek dereceden polinomlar için genelleştirilmesini amaçlamaktadır. (Yang et al., 1996) çalışmasında bilgisayar cebiri yardımıyla polinomlar için tam diskriminasyon sistemini hesaplayan bir algoritma verilmiştir. Örneğin, üçüncü dereceden $F(w) = w^3 + d_2w^2 + d_1w + d_0$ polinomu için tam diskriminasyon sistemi

$$\Delta = -27 \left(\frac{2d_2^3}{27} + d_0 - \frac{d_1d_2}{3} \right)^2 - 4 \left(d_1 - \frac{d_2^2}{3} \right)^3, \quad D_1 = d_1 - \frac{d_2^2}{3} \quad (2.3)$$

ile verilmektedir.

(Liu, 2010) çalışmasında hareketli dalga çözümleri integrallenebilir $(u')^2 = a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0$ adi diferansiyel denklemini çözmeye dayanan bazı denklemler için sınıflandırılmıştır.

$$w = (a_3)^{\frac{1}{3}} u, \quad d_2 = a_2 (a_3)^{-\frac{2}{3}}, \quad d_1 = a_1 (a_3)^{-\frac{2}{3}}, \quad d_0 = a_0 \quad (2.4)$$

dönüşümleri ile

$$\pm (a_3)^{\frac{1}{3}} (\xi - \xi_0) = \int \frac{dw}{\sqrt{w^3 + d_2 w^2 + d_1 w + d_0}} \quad (2.5)$$

integrali elde edilebilir. Buna göre,

$\Delta = 0, D_1 < 0$ olması durumunda $F(w) = (w - \alpha)^2(w - \beta)$, $\alpha \neq \beta$ olacaktır. Bir katlı kök ve farklı bir kök olması durumu incelenir.

$\Delta = 0, D_1 = 0$ olması durumunda, $F(w) = (w - \alpha)^3$ yazılabilir. Bu durumda polinomun birbirine eşit üç kökü vardır.

$\Delta > 0, D_1 < 0$ ise $F(w) = (w - \alpha)(w - \beta)(w - \gamma)$ olur. Bu durumda polinomun farklı üç kökü vardır.

$\Delta < 0$ ise $F(w) = (w - \alpha)(w^2 + pw + q)$, $p^2 - 4q < 0$ olacaktır. Polinomun iki kompleks ve bir reel kökü olması durumu incelenir.

(Liu, 2005c) çalışmasında 4. mertebeden polinom yaklaşımı için kök katsayı durumları incelenmiştir. F polinomu 4. mertebeden

$$F(w) = w^4 + pw^2 + qw + r \quad (2.6)$$

biçiminde bir polinom olduğunda tam diskriminasyon sistemi

$$\begin{aligned} D_1 &= 4, \quad D_2 = -p, \quad D_3 = 8rp - 2p^3 - 9q^2, \\ D_4 &= 4p^4r - p^3q^2 + 36prq^2 - 32r^2p^2 - \frac{27}{4}q^4 + 64r^3, \\ F_2 &= 9p^2 - 32pr \end{aligned} \quad (2.7)$$

ile verilmektedir. Benzer şekilde (Yang et al., 1996; Liu, 2006c) çalışmalarında beşinci mertebeden $F(w) = w^5 + pw^3 + qw^2 + rw + s$ polinomu için tam diskriminasyon sistemi incelenmiştir.

Liu, $F(u)$ polinomial ya da rasyonel fonksiyon olduğunda birçok lineer olmayan diferansiyel denklemin tam çözümlerini elde etmiştir. (Du, 2010) çalışmasında, F fonksiyonu irrasyonel bir fonksiyon olarak alınmış ve bu tür diferansiyel denklemleri çözmek için yeni bir trial denklem yöntemi önerilmiştir. (Liu, 2011) çalışmasında ise lineer olmayan değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemler için trial denklem yönteminin yeni bir versiyonu önerilmiştir.

Lineer olmayan diferansiyel denklemler için trial denklem yönteminin temel adımları aşağıdaki şekilde açıklanabilir (Liu, 2006a):

Adım 1. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, \dots) = 0. \quad (2.8)$$

biçiminde ele alınsın. k ve c sıfırdan farklı sabitler olmak üzere,

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = kx - ct \quad (2.9)$$

dalga dönüşümü kullanıldığında (2.8) kısmi diferansiyel denklemi

$$N(u, u', u'', \dots) = 0 \quad (2.10)$$

adi diferansiyel denkleme indirgenir.

Adım 2. Trial denklem

$$u' = F(u) = \sum_{i=0}^m a_i u^i \quad (2.11)$$

biçiminde ele alınsın. Burada m , (2.10) denklemindeki en yüksek mertebeden türev ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin dengelenmesi ile belirlenecek pozitif tamsayı ve $a_0, a_1, \dots, a_m$ belirlenecek parametrelerdir. (2.11) ifadesinin türevleri alındığında

$$u'' = F'(u)F(u), \quad (2.12)$$

$$u''' = F''(u)F^2(u) + [F'(u)]^2 F(u) \quad (2.13)$$

ifadeleri elde edilir. (2.11) denklemi ve diğer türev terimleri (2.10) denkleminde yerine konulduğunda u 'nun $G(u)$ polinomu

$$G(u) = r_k u^k + \dots + r_1 u + r_0 = 0. \quad (2.14)$$

biçiminde elde edilir. Denge prensibi kullanılarak (2.11) denklemindeki polinom yaklaşımının derecesini gösteren m değeri belirlenebilir.

Adım 3. $G(u)$ polinomunun tüm katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$r_i = 0, \quad i = 0, \dots, k \quad (2.15)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir ve bu sistem çözüldüğünde c ve $a_0, a_1, \dots, a_m$ katsayıları belirlenebilir.

Adım 4. (2.11) denklemi

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{du}{F(u)} \quad (2.16)$$

integral formunda yeniden yazılır. $F(u)$ 'nun köklerini sınıflandırmak için m . mertebeden polinom için tam diskriminasyon sistemi (complete discrimination system) kullanılır ve (2.16) integrali hesaplanır. Böylece, (2.8) denkleminin tam çözümü elde edilir.

2.3 Yöntemin Analizi

Bu bölümde yöntem matematiksel olarak analiz edilecektir (Liu, 2006a). Trial denklem yöntemi her zaman uygulanabilir değildir. Bunu göstermek için

$$u'' + \alpha u' = u^2 \quad (2.17)$$

gibi bir denklem ele alınsın.

(2.11) trial denklemi (2.17) denkleminde yerine konulduğunda

$$F(u)(\alpha + F'(u)) = u^2 \quad (2.18)$$

ifadesi elde edilir. (2.18) denkleminin sağ tarafının mertebesi $2m-1$, sol tarafın mertebesi ise $2n$ 'dir. $2m-1=2n$ olamayacağı için bu tipteki bir denkleme trial denklem yöntemi uygulanamaz.

Eğer,

$$u = \varphi^s \quad (2.19)$$

dönüşümü (2.10) adi diferansiyel denkleminde yerine konulur ise,

$$H(\varphi, \varphi', \varphi'', \dots) = 0 \quad (2.20)$$

denklemi elde edilir. Böylece (2.20) denkleminde s 'nin bazı değerleri için trial denklem yöntemi uygulanabilir.

Bu kısımda, (Liu, 2006a) çalışmasında ispatlanan ilgili lemma ve teoreme yer verilecektir.

Lemma 2.1 (2.19) dönüşümü altında

$$\varphi' = F(\varphi) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi^i \quad (2.21)$$

trial denklemi ele alınırsa, bu durumda $u^{(k)}$ ifadesinin mertebesi $s + k(n-1)$ olur.

İspat. Basit hesaplamalarla,

$$u' \propto \varphi^{s-1} F(\varphi), \quad u'' \propto \varphi^{s-2} F^2(\varphi), \quad u''' \propto \varphi^{s-3} F^3(\varphi), \dots \quad (2.22)$$

denklikleri yazılabilir. Böylece, $u^{(k)} \propto \varphi^{s-k} F^k(\varphi)$ genellemesi yapılabilir ve $u^{(k)}$ ifadesinin mertebesi, $s - k + nk = s + (n-1)k$ olur.

Teorem 2.1 Aşağıdaki denklem ele alınsın:

$$\sum_{i=1}^k b_i u^{(i)} = \sum_{j=0}^m c_j u^j. \quad (2.23)$$

(2.19) dönüşümü ve (2.21) trial denklemi kullanıldığında $n > 0$ olacak şekilde pozitif tamsayı çözümleri alındığında

$$k(n-1) = (m-1)s \quad (2.24)$$

eşitliği elde edilir.

İspat. Lemma 2.1 kullanılarak bu sonucu ispatlamak oldukça kolaydır. Örneğin, $k = 2$, $m = 2$ alınırsa, $s = 2(n-1)$; $k = 3$, $m = 2$ alınırsa, $s = 3(n-1)$ olur.

Cebirsel denklem sisteminin serbestlik derecesini arttırmak için (2.19) dönüşümü aşağıdaki daha genel forma dönüştürülebilir:

$$u = \sum_{i=0}^s d_i \phi^i. \quad (2.25)$$

Bu durumda süreç şöyle ilerleyecektir: (2.25) dönüşümü ve (2.21) trial denklemi ele alınacak ve bu ifadeler (2.10) adi diferansiyel denklemine yerine konulacaktır. Denge prensibi kullanıldığında s ve n arasında bir bağıntı bulunabilir. Buna karşı gelen (2.15) benzeri cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde $a_0, \dots, a_n$ ve $d_0, \dots, d_s$ değerleri belirlenir. (2.16) integrali alınarak kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü belirlenebilir (Liu, 2006a).

(Liu, 2011) çalışmasında, simetri özellikleri kullanılarak dolaylı (indirect) trial denklem yöntemi önerilmiştir. Buna göre $u^{[r]}$, x 'e göre r . mertebeden kısmi türevi göstermek üzere

$$P(u, u_t, u_{tt}, \dots, u_x, u_{xx}, \dots, u_{tx}, \dots, u^{[r]}) = 0 \quad (2.26)$$

kısmi diferansiyel denklemi $u = u(\xi)$, $\xi = x - \omega t$ dalga dönüşümü ile

$$N(u, \omega u', \omega^2 u'', \dots, u', u'', \dots, \omega u'', \dots, u^{(r)}) = 0 \quad (2.27)$$

adi diferansiyel denklemine indirgenir. Bazen integrasyonla bu denklemin mertebesi indirgenebilir.

$$u = a_0 + a_1\phi + \dots + a_m\phi^m \quad (2.28)$$

dönüşümü altında (2.27) denklemi $a_0, \dots, a_m$ belirlenecek sabitler, $m \geq 1$ ve Q karşı gelen polinom olmak üzere

$$Q(\phi, \phi', \dots, \phi^{(r)}) = 0 \quad (2.29)$$

biçimini alır.

c sabit iken, (2.29) ifadesi

$$\xi^* = \xi + c \quad (2.30)$$

$$\phi^* = \phi \quad (2.31)$$

bir parametrelili grubu altında invaryant olduğundan (2.29) ifadesinin mertebesi bir indirgenebilir (Oliver, 1993).

$$w = \phi' \quad (2.32)$$

biçiminde alınır, $\phi'' = w \frac{dw}{d\phi}$, $\phi''' = w \left(\frac{dw}{d\phi} \right)^2 + w^2 \frac{d^2w}{d\phi^2}$ ifadeleri elde edilir. Bu sonuçlar (2.29)'da yerine konulduğunda

$$Q_1(\phi, w, w', \dots, w^{(r-1)}) = 0 \quad (2.33)$$

elde edilir. (2.33) ifadesinin $b_0, \dots, b_n$ belirlenecek sabitler olmak üzere

$$w = b_0 + b_1\phi + \dots + b_n\phi^n \quad (2.34)$$

polinomial biçiminde bir çözüme sahip olduğu kabul edilsin. Denge prensibine göre m ile n arasında bir bağıntı bulunabilir. ϕ 'nin bir polinomunu elde etmek için m ve n 'nin belirli değerleri alınarak, (2.34) denklemi (2.33) denkleminde yerine konulur. Bu polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlendiğinde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir ve bu sistemin çözümünden $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n$ değerleri belirlenebilir.

$$w = \phi' = b_0 + b_1\phi + \dots + b_n\phi^n \quad (2.35)$$

birinci mertebeden adi diferansiyel denklemi integre edildiğinde ϕ belirlenir. ϕ değeri (2.28) ifadesinde yerine konularak u çözümü elde edilir (Liu, 2011).

Önerilen bu dolaylı trial denklem yöntemi u ve ϕ arasında lineer ilişki varsa direkt yönteme indirgenir.

2.4 Trial Denklem Yönteminin Uygulamaları

Bu kısımda trial denklem yöntemi matematiksel fiziğin önemli denklemlerine uygulanmış ve başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Yöntem Liouville, Tzitzeica-Dodd-Bullough, lineer olmayan telgraf, genelleştirilmiş ısı iletim, Sharma-Tasso-Olver denklemlerine ve lineer olmayan coupled Klein-Gordon sistemine uygulanmış ve bu denklemlerin ve sistemin hareketli dalga çözümleri elde edilmiş ve dalga tipleri belirlenmiştir.

2.4.1 Liouville denklemine uygulaması

Joseph Liouville (1809-1882) tarafından formüle edilen ve kuantum fiziği ile kuantum alan teorisinde önemli uygulamaları olan Liouville denklemi ele alınsın:

$$u_{xt} + e^u = 0. \quad (2.36)$$

$$u = u(\xi), \quad \xi = x - ct \quad (2.37)$$

dalga dönüşümü kullanıldığında (2.36) denklemi

$$-cu'' + e^u = 0 \quad (2.38)$$

biçiminde bir adi diferansiyel denkleme dönüşür.

$$u = \ln v \quad (2.39)$$

dönüşümü altında (2.38) denklemi

$$-c(vv'' - v'^2) + v^3 = 0 \quad (2.40)$$

şeklindeki adi diferansiyel denkleme indirgenir. Trial denklem

$$(v')^2 = F(v) = \sum_{i=0}^n a_i v^i \quad (2.41)$$

biçiminde seçilebilir. Bu denklem (2.40) adi diferansiyel denkleminde yerine konulur ve (2.40) denkleminde en yüksek mertebeden lineer olmayan terim olan v^3 ile en yüksek mertebeden türev vv'' (veya v'^2) dengelenir ise, $n=3$ olarak belirlenir.

(2.41) ifadesi (2.40) adi diferansiyel denkleminde yerine konulduğunda v 'nin bir polinomu elde edilir. Bu polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned} a_0 c &= 0 \\ a_1 c &= 0 \\ a_2 c - a_2 c &= 0 \\ a_3 c - 2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

biçiminde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden katsayılar,

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = a_2, \quad c = \frac{2}{a_3} \quad (2.43)$$

olarak belirlenir. (2.43) katsayıları (2.16) integral formunda yerine konulduğunda

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{\sqrt{a_2 v^2 + a_3 v^3}} dv \quad (2.44)$$

ifadesi elde edilir. $w = (a_3)^{\frac{1}{3}} v$ dönüşümü ile $d_2 = a_2 (a_3)^{-\frac{2}{3}}$ olmak üzere (2.44) integrali

$$\pm(a_3)^{\frac{1}{3}} (\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{\sqrt{w^3 + d_2 w^2}} dw \quad (2.45)$$

biçiminde yazılabilir.

$G(w) = w^3 + d_2 w^2 + d_1 w + d_0$ olmak üzere $G(w)$ için tam diskriminasyon sistemini oluşturan Δ ve D_1 değerleri

$$\Delta = -27 \left(2 \frac{d_2^3}{27} + d_0 - \frac{d_1 d_2}{3} \right)^2 - 4 \left(d_1 - \frac{d_2^2}{3} \right)^3, \quad (2.46)$$

$$D_1 = d_1 - \frac{d_2^2}{3} \quad (2.47)$$

ile verilmektedir. Bu örnekte $d_0 = d_1 = 0$ olduğu dikkate alınır

$$\Delta = -27 \left(2 \frac{d_2^3}{27} \right)^2 - 4 \left(-\frac{d_2^2}{3} \right)^3 = -4 \frac{d_2^6}{27} + 4 \frac{d_2^6}{27} = 0 \quad (2.48)$$

$$D_1 = -\frac{d_2^2}{3} \quad (2.49)$$

olarak belirlenir.

$\Delta = 0$ bulunduğu için tam diskriminasyon sistemi dikkate alındığında aşağıdaki durumlar ortaya çıkar:

Durum 1. $D_1 < 0$ olması durumunda,

(2.45) denklemi integre edildiğinde

$$v(\xi) = -\frac{1}{2} c a_2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{a_2} (\xi - \xi_0) \right), \quad (2.50)$$

$$v(\xi) = -\frac{1}{2} c a_2 \sec^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{-a_2} (\xi - \xi_0) \right), \quad (2.51)$$

ifadelerine ulaşılır. $\xi = x - ct$ ve $u = \ln v$ dönüşümleri dikkate alındığında, Liouville denkleminin hareketli dalga çözümleri $a_2 > 0$ olması durumunda

$$u_1(x, t) = \ln \left[-\frac{1}{2} c a_2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{a_2} (x - ct - \xi_0) \right) \right], \quad c < 0, \quad (2.52)$$

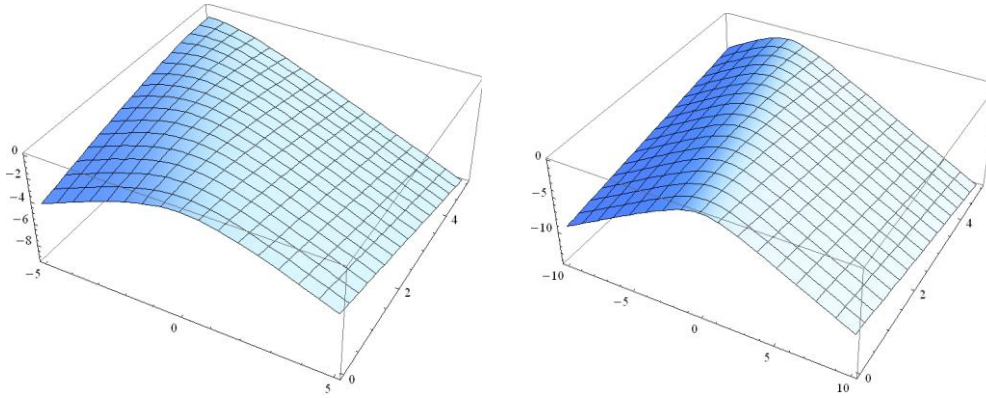
biçiminde ve $a_2 < 0$ olması durumunda ise

$$u_2(x, t) = \ln \left[-\frac{1}{2} c a_2 \sec^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{-a_2} (x - ct - \xi_0) \right) \right], \quad c > 0 \quad (2.53)$$

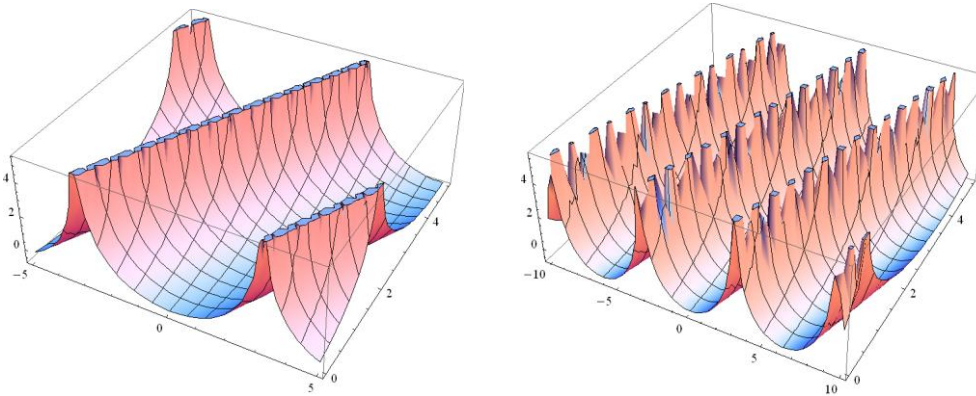
biçiminde elde edilir.

Şekil 2.1 ve Şekil 2.2, Liouville denkleminin u_1 ve u_2 çözümlerinin dalga yapısını göstermektedir. a_2 keyfi sabitin ve c dalga hızının değişen değerlerine göre (2.52) çözümü, hiperbolik soliter (tekli) dalga çözüm yapısındadır. (2.53) ise periyodik dalga yapısında bir çözümdür.

(2.52) çözümü (Kutluay et al., 2010) referansında (G'/G) yöntemi ve (Bhutani and Moussa, 1994) referansında direkt yaklaşım yöntemi kullanılarak bulunan çözümle aynı yapıdadır. Ayrıca, $\xi_0 = 0$ alınırsa (Wazwaz, 2008) çalışmasında tanh yöntemi kullanılarak bulunan çözüme ulaşmak da mümkündür.



Şekil 2.1 (2.52) çözümünün $a_2 = 1$, $c = -1$ değerleri için grafikleri



Şekil 2.2 (2.53) çözümünün $a_2 = -1$, $c = 1$ değerleri için grafikleri

Durum 2. $D_1 = 0$ olması durumunda,

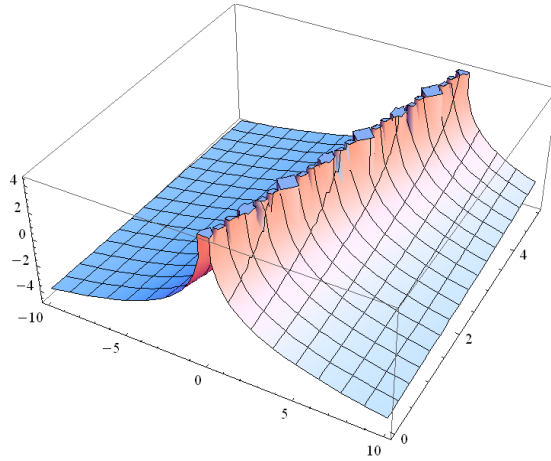
(2.45) denklemi integre edildiğinde

$$v(\xi) = \frac{4}{a_3 (\xi - \xi_0)^2} \quad (2.54)$$

ifadesi elde edilir. Dalga dönüşümü dikkate alındığında, Liouville denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_3(x, t) = \ln \left[\frac{2c}{(x - ct - \xi_0)^2} \right], \quad c > 0 \quad (2.55)$$

biçiminde elde edilir. Bu çözüm, (Kutluay, 2010) çalışmasındaki çözümle aynı denklik sınıfında yer almaktadır. Şekil 2.3 Liouville denkleminin (2.55) çözümünün yapısını göstermektedir.



Şekil 2.3 (2.55) çözümünün $c=1$, $\xi_0=0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ değerleri için grafiği

2.4.2 Tzitzeica-Dodd-Bullough denkleminin uygulaması

Tzitzeica-Dodd-Bullough (TDB) denklemi (Wazwaz, 2005a; He, 2007) ele alınsın:

$$u_{xt} = e^{-u} + e^{-2u}. \quad (2.56)$$

Bu denklem katı hal fiziği, doğrusal olmayan optik ve kuantum alan teorisi gibi alanlarda önemli uygulamalara sahiptir.

$$v(x,t) = e^{-u} \quad (2.57)$$

dönüşümü altında (2.56) denklemi

$$vv_{xt} - v_x v_t + v^3 + v^4 = 0 \quad (2.58)$$

biçiminde bir denkleme dönüşür. $v(x,t) = v(\xi)$, $\xi = kx - ct$ dönüşümü kullanıldığında, (2.58) denklemi

$$-kcvv'' + kc(v')^2 + v^3 + v^4 = 0 \quad (2.59)$$

biçiminde bir adi diferansiyel denkleme indirgenir. Trial denklem

$$(v')^2 = F(v) = \sum_{i=0}^n a_i v^i \quad (2.60)$$

şeklinde seçilebilir. Bu denklem (2.59) adi diferansiyel denkleminde yerine konulur ve denge prensibi kullanılarak denklemdaki en yüksek mertebeden lineer olmayan terim ile en yüksek mertebeden türev terimi dengelenir ise, $n=4$ olarak belirlenir. Bu durumda trial denklem

$$(v')^2 = a_4 v^4 + a_3 v^3 + a_2 v^2 + a_1 v + a_0 \quad (2.61)$$

biçiminde olacaktır. (2.61) ifadesi (2.59) adi diferansiyel denkleminde yerine konulduğunda v 'nin bir polinomu elde edilir. Bu polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned} 2a_0 ck &= 0 \\ a_1 ck &= 0 \\ 2 - a_3 ck &= 0 \\ 2 - 2a_4 ck &= 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden katsayılar

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = a_2, \quad a_3 = \frac{2}{ck}, \quad a_4 = a_4, \quad c = \frac{1}{ka_4}. \quad (2.63)$$

şeklinde belirlenir. (2.63) katsayıları (2.60) denkleminde yerine yazılıp denklem integral formda düzenlenirse

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{dv}{\sqrt{a_2 v^2 + 2a_4 v^3 + a_4 v^4}} \quad (2.64)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade tam diskriminasyon sistemine göre integre edildiğinde,

$$v(\xi) = -\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{2\sqrt{ck}}(\xi - \xi_0)\right) - \frac{1}{2}, \quad (2.65)$$

$$v(\xi) = -\frac{1}{2} \coth\left(\frac{1}{2\sqrt{ck}}(\xi - \xi_0)\right) - \frac{1}{2}, \quad (2.66)$$

ifadelerine ulaşılır. (2.57) dönüşümü dikkate alınırsa Tzitzeica-Dodd-Bullough denkleminin hareketli dalga çözümleri

$$u(x, t) = -\ln\left[\pm\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{2\sqrt{ck}}(kx - ct - \xi_0)\right) - \frac{1}{2}\right], \quad (2.67)$$

$$u(x, t) = -\ln\left[\pm\frac{1}{2} \coth\left(\frac{1}{2\sqrt{ck}}(kx - ct - \xi_0)\right) - \frac{1}{2}\right], \quad (2.68)$$

biçiminde elde edilir. Elde edilen bu çözümler hiperbolik yapıda soliter dalga çözümleridir.

Bu çözümler, (Khan and Akbar, 2013) çalışmasında bulunan çözümlerle aynı denklik sınıfındadır.

2.4.3 Lineer olmayan telgraf denkleminin uygulaması

Lineer olmayan telgraf denklemi (Wang, 2008; Mirzazadeh, 2012) ele alınsın:

$$u_{tt} - u_{xx} + u_t + \alpha u + \beta u^3 = 0. \quad (2.69)$$

Telgraf denklemi, x uzaklık ve t zaman değişkenleri olmak üzere, bir çift iletken içindeki voltaj ve akımı tanımlamaktadır. Telgraf denklemleri, 1880'li yıllarda iletim hatlarını modelleyen Oliver Heaviside tarafından tanıtılmıştır. Bu model, elektromanyetik dalgaların telgraf teli üzerinde yansıyabileceğini ve bu dalga şekillerinin hat boyunca ortaya çıkabileceğini ifade etmektedir. Bu teori, telgraf hatları, radyo frekans iletkenleri gibi yüksek frekanslı iletim hatlarına, telefon hatları gibi ses frekanslarına sahip hatlara, bunun yanı sıra güç hattı ve doğru akım gibi düşük frekanslı hatlar dahil olmak üzere tüm frekanslardaki iletim hatlarına uygulanmıştır. Sinyal analizinde, telgraf denklemi genellikle elektrik sinyallerinin yayılımı ve iletimi için kullanılır. Bununla birlikte, telgraf denkleminin mikrodalgalar ve radyo frekansları gibi alanlarda da uygulamaları vardır (Atangana, 2015; Pandit et al., 2015).

$u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - ct$ dalga dönüşümü kullanıldığında (2.69) denklemi

$$(c^2 - 1)u'' - cu' + \alpha u + \beta u^3 = 0. \quad (2.70)$$

biçiminde bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. Trial denklem

$$u' = F(u) = a_n u^n + \dots + a_1 u + a_0 \quad (2.71)$$

şeklinde seçilebilir. (2.71) ve diğer türev terimleri (2.70) adi diferansiyel denkleminde yerine konulur ve denge prensibi uygulanırsa $n = 2$ olarak bulunur.

Bu durumda trial denklem

$$u' = F(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 \quad (2.72)$$

biçimini alır. (2.72) ifadesi (2.70) denkleminde yerine konulduğunda u 'nun bir polinomu elde edilir. Bu polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned} -a_0 a_1 + c^2 a_0 a_1 - c a_0 &= 0 \\ -a_1^2 + c^2 a_1^2 - 2a_0 a_2 + 2c^2 a_0 a_2 - c a_1 + \alpha &= 0 \\ -3a_1 a_2 + 3c^2 a_1 a_2 - c a_2 &= 0 \\ -2a_2^2 + 2c^2 a_2^2 + \beta &= 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

biçiminde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica yardımıyla çözülmüş ve katsayılar belirlenmiştir.

Durum 1. Katsayılar

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{-1}{2}\sqrt{\alpha(9\alpha-2)}, \quad a_2 = \frac{-1}{2}\sqrt{\beta(2-9\alpha)}, \quad c = -\frac{3\sqrt{\alpha}}{\sqrt{9\alpha-2}} \quad (2.74)$$

şeklinde belirlenir. (2.72) denklemi integre edildiğinde

$$u(\xi) = \frac{a_1 \exp(\xi_0)}{\exp(a_1 \xi) - a_2 \exp(a_1 \xi_0)} \quad (2.75)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade düzenlendiğinde

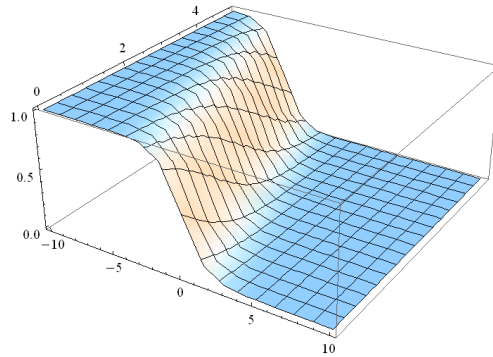
$$u(\xi) = \frac{a_1}{\exp[a_1(\xi - \xi_0)] - a_2} \quad (2.76)$$

bulunur. Dalga dönüşümü ile (2.74) katsayıları dikkate alınır (2.69) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\exp\left[\frac{\sqrt{\alpha(9\alpha-2)}}{2}\left(x + \frac{3\sqrt{\alpha}}{\sqrt{9\alpha-2}}t - \xi_0\right)\right] \pm \sqrt{-\beta}} \quad (2.77)$$

biçiminde elde edilir.

Şekil 2.4, lineer olmayan telgraf denkleminin (2.77) çözümünün yapısını göstermektedir.



Şekil 2.4 (2.77) çözümünün $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ değerleri için grafiği

Durum 2. Katsayılar

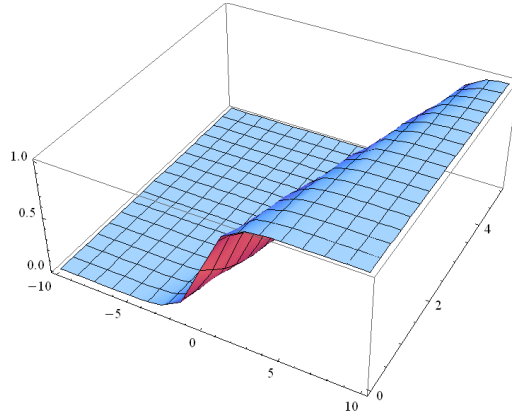
$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha(9\alpha-2)}, \quad a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\beta(2-9\alpha)}, \quad c = \frac{3\sqrt{\alpha}}{\sqrt{9\alpha-2}} \quad (2.78)$$

şeklinde belirlenir.

(2.72) denklemi integre edilir ve Durum 1 ile benzer şekilde dalga dönüşümü ile (2.78) katsayıları dikkate alınırsa lineer olmayan telgraf denkleminin hareketli dalga çözümleri

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\exp\left[-\frac{\sqrt{\alpha(9\alpha-2)}}{2}\left(x - \frac{3\sqrt{\alpha}}{\sqrt{9\alpha-2}}t - \xi_0\right)\right] \pm \sqrt{-\beta}} \quad (2.79)$$

biçiminde elde edilir. Şekil 2.5, lineer olmayan telgraf denkleminin (2.79) çözümünün yapısını göstermektedir.



Şekil 2.5 (2.79) çözümünün $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\xi_0=0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ değerleri için grafiği

2.4.4 Genelleştirilmiş ısı iletim denklemine uygulaması

Isı iletim süreci ilk kez 19. yüzyıl başlarında Jean Baptiste Joseph Fourier tarafından kısmi diferansiyel denklemler ile formüle edilmiştir. Isı iletimi, sıcaklık farkından dolayı katı, sıvı ve gazlardaki termal enerjinin moleküler transferidir. Pek çok alanda uygulaması olan ısı iletim denkleminin tam çözümlerini elde etmek büyük önem taşımaktadır.

$a > 0$ ve $n > 1$ olmak üzere lineer olmayan genelleştirilmiş ısı iletim (heat conduction) denklemi (Kabir, 2011) ele alınsın:

$$u_t - a(u^n)_{xx} - u + u^n = 0. \quad (2.80)$$

$u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = k(x - ct)$ dalga dönüşümü kullanıldığında (2.80) denklemi

$$-kcu' - ak^2(u^n)'' - u + u^n = 0, \quad (2.81)$$

veya denk olarak

$$-kcu' - ak^2n(n-1)u^{n-2}(u')^2 - ak^2nu^{n-1}u'' - u + u^n = 0 \quad (2.82)$$

biçiminde yazılabilir. Analitik çözüm elde etmek için

$$u(\xi) = v^{\frac{-1}{n-1}}(\xi) \quad (2.83)$$

dönüşümü kullanılırsa (2.82) denklemi

$$kc(n-1)v'v^2 + ak^2n(1-2n)v'^2 + ak^2n(n-1)vv'' - (n-1)^2v^3 + (n-1)^2v^2 = 0 \quad (2.84)$$

şeklinde yazılabilir. Trial denklem

$$v' = F(v) = a_0 + a_1v + \dots + a_nv^n \quad (2.85)$$

biçiminde seçilir ve (2.82) adi diferansiyel denkleminde yerine konulur. Burada en yüksek mertebeden lineer olmayan terimler dengelenirse, $n = 2$ olarak bulunur. (2.85) ifadesi (2.82) adi diferansiyel denkleminde yerine konulduğunda v 'nin bir polinomu elde edilir. Bu polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned} aa_0^2k^2n - 2aa_0^2k^2n^2 &= 0 \\ aa_0a_1k^2n - 3aa_0a_1k^2n^2 &= 0 \\ a_0ckn - a_0ck - aa_1^2k^2n^2 - 2aa_0a_2k^2n^2 + n^2 - 2n + 1 &= 0 \\ a_1ckn - a_1ck - aa_1a_2k^2n - 2aa_1a_2k^2n^2 - n^2 + 2n - 1 &= 0 \\ a_2ckn - a_2ck - aa_2^2k^2n &= 0 \end{aligned} \quad (2.86)$$

biçiminde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden katsayılar,

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \pm \frac{n-1}{kn\sqrt{a}}, \quad a_2 = \pm \frac{1-n}{kn\sqrt{a}}, \quad c = \mp \sqrt{a} \quad (2.87)$$

olarak bulunur. (2.85) denklemi tam diskriminasyon sistemine göre integre edildiğinde, $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$ olduğu dikkate alınır

$$v(\xi) = -\frac{a_1}{2a_2} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \tanh \left[\frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2} (\xi - \xi_0) \right] \quad (2.88)$$

$$v(\xi) = -\frac{a_1}{2a_2} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \coth \left[\frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2} (\xi - \xi_0) \right] \quad (2.89)$$

ifadeleri elde edilir. (2.87) katsayıları ve (2.83) dönüşümü göz önüne alındığında, genelleştirilmiş lineer olmayan ısı iletim denkleminin hareketli dalga çözümleri

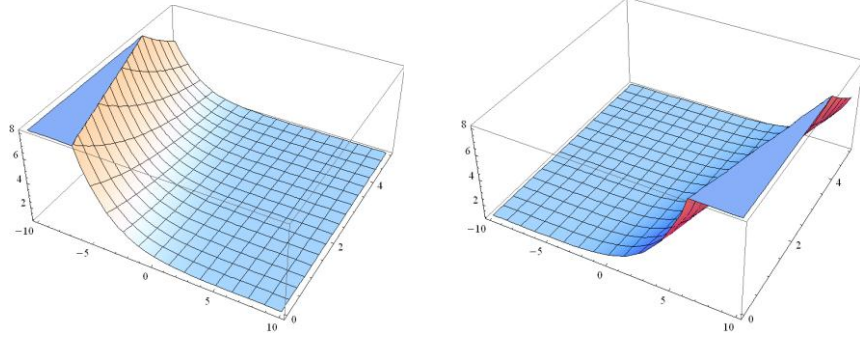
$$u_{1,2}(x, t) = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\pm \frac{n-1}{2n\sqrt{a}} (x \pm \sqrt{at} - \xi_0) \right] \right\}^{\frac{-1}{n-1}} \quad (2.90)$$

$$u_{3,4}(x, t) = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth \left[\pm \frac{n-1}{2n\sqrt{a}} (x \pm \sqrt{at} - \xi_0) \right] \right\}^{\frac{-1}{n-1}} \quad (2.91)$$

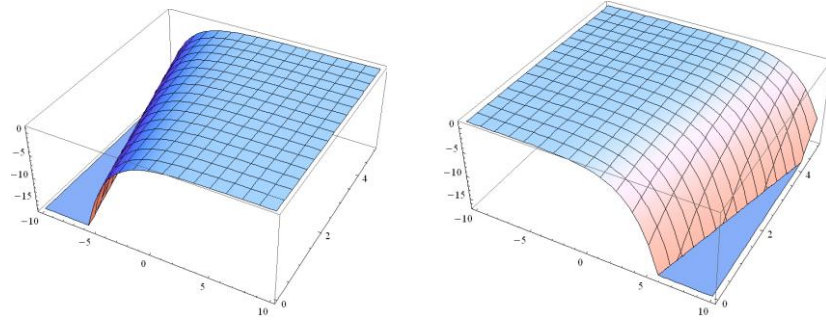
biçiminde elde edilir.

Bu çözümler (Kabir, 2011) çalışmasında G'/G yöntemi ve (Wazwaz, 2005b) çalışmasında tanh yöntemi kullanılarak bulunan çözümlerle aynı denklik sınıfındadır.

Şekil 2.6 ve Şekil 2.7, genelleştirilmiş ısı iletim denkleminin (2.90) ve (2.91) çözümlerinin yapısını göstermektedir.



Şekil 2. 6 u_1 ve u_2 çözümlerinin $n=3$, $a=1$, $\xi_0=0$ değerleri için grafikleri



Şekil 2. 7 u_3 ve u_4 çözümlerinin $n=2$, $a=1$, $\xi_0=0$ değerleri için grafikleri

2.4.5 Sharma-Tasso-Olver denkleminin uygulaması

α reel parametre ve u , zaman ve uzay değişkenlerine bağlı bilinmeyen fonksiyon olmak üzere Sharma-Tasso-Olver denklemi (Jawad et al., 2010) ele alınsın:

$$u_t + \alpha(u^3)_x + \frac{3}{2}\alpha(u^2)_{xx} + \alpha u_{xxx} = 0. \quad (2.92)$$

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - ct \quad (2.93)$$

dalga dönüşümü yapıldığında (2.92) denklemi

$$-cu + \alpha u^3 + 3\alpha u u' + \alpha u'' + c_0 = 0 \quad (2.94)$$

adi diferansiyel denkleme indirgenir. Trial denklem

$$u' = F(u) = a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n \quad (2.95)$$

biçiminde seçilir ve (2.94) adi diferansiyel denkleminde yerine konulur. Burada en yüksek mertebeden lineer olmayan terimler dengelenirse, $n=2$ olarak belirlenir.

(2.95) ifadesi (2.94) adi diferansiyel denkleminde yerine konulduğunda u 'nun bir polinomu elde edilir. Bu polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned} a_0 a_1 \alpha &= 0 \\ 3a_0 \alpha + a_1^2 \alpha + 2a_0 a_2 \alpha - c &= 0 \\ 3a_1 \alpha + 3a_1 a_2 \alpha &= 0 \\ 3a_2 \alpha + 2a_2^2 \alpha + \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (2.96)$$

biçiminde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

Durum 1. Katsayılar

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \sqrt{\frac{c}{\alpha}}, \quad a_2 = -1, \quad c = a_1^2 \alpha \quad (2.97)$$

biçiminde bulunmuştur. Bu katsayılar (2.62) denkleminde yerine konulur ve denklem integre edilirse

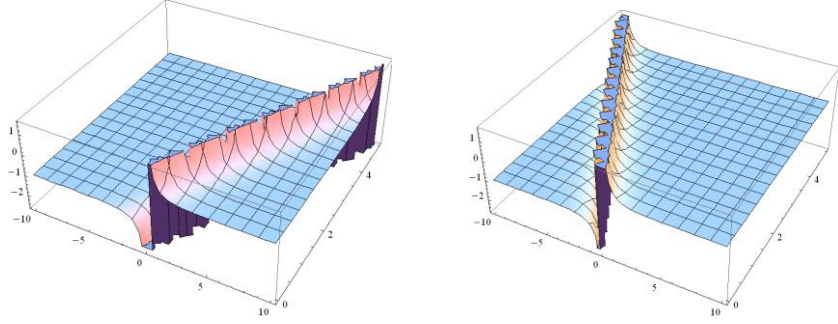
$$u(\xi) = \frac{a_1 \exp(\xi a_1)}{\exp(\xi a_1) + \exp(\xi_0 a_1)} \quad (2.98)$$

$$u(\xi) = \frac{a_1 \exp(\xi_0 a_1)}{\exp(\xi a_1) + \exp(\xi_0 a_1)} \quad (2.99)$$

ifadeleri elde edilir. (2.98) ve (2.99) ifadeleri düzenlenir ve (2.93) dönüşümleri ve $a_1 = \pm \sqrt{\frac{c}{\alpha}}$ olduğu dikkate alınır. Sharma-Tasso-Olver denkleminin tam çözümleri

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{\frac{c}{\alpha}}}{\pm \exp\left[\pm \sqrt{\frac{c}{\alpha}}(x-ct-\xi_0)\right] \mp 1} \quad (2.100)$$

biçiminde elde edilir.



Şekil 2. 8 (2.100) çözümünün $c = \alpha = \pm 2$, $\xi_0 = 0$ değerleri için grafikleri

Şekil 2.8, Sharma-Tasso-Olver denkleminin c hızı ve α parametresine bağlı olarak değişen çözüm yapısını göstermektedir.

Durum 2.

$$a_0 = a_0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -1, \quad c = a_0 \alpha \quad (2.101)$$

Bu katsayılar (2.95) denkleminde yerine konulur ve denklem integre edilir ise

$$u(\xi) = \sqrt{a_0} \tanh\left[\sqrt{a_0}(\xi - \xi_0)\right] \quad (2.102)$$

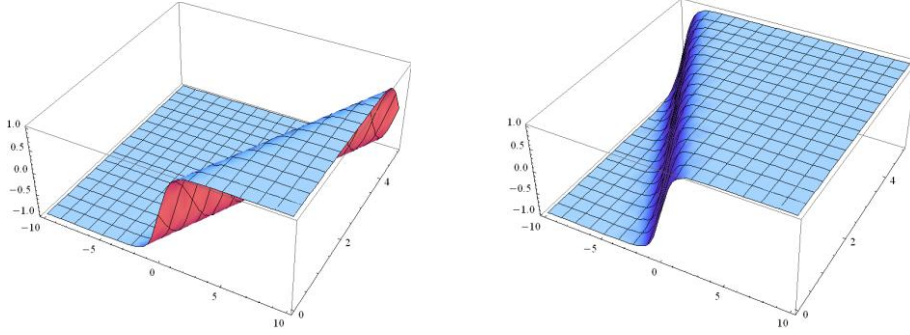
$$u(\xi) = \sqrt{a_0} \coth\left[\sqrt{a_0}(\xi - \xi_0)\right] \quad (2.103)$$

ifadeleri elde edilir. (2.60) dönüşümleri ve $a_0 = \frac{c}{\alpha}$ olduğu dikkate alındığında $\xi_0 = 0$ seçilirse Sharma-Tasso-Olver denkleminin hareketli dalga çözümleri

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{c}{\alpha}} \tanh\left[\sqrt{\frac{c}{\alpha}}(x-ct)\right], \quad (2.104)$$

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{c}{\alpha}} \coth \left[\sqrt{\frac{c}{\alpha}} (x-ct) \right] \quad (2.105)$$

biçiminde elde edilir.



Şekil 2. 9 (2.104) çözümünün $c = \alpha = \pm 2$ değerleri için grafikleri

2.4.6 Lineer olmayan coupled Klein-Gordon denklemlerine uygulaması

Lineer olmayan coupled (birleştirilmiş) Klein-Gordon denklemleri (Alagesan, 2004) ele alınsın:

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{tt} - u + 2u^3 + 2uv &= 0 \\ v_x - v_t - 4uu_t &= 0. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Bu sistem teorik fizik ve matematiksel fizik alanında önemli uygulamalara sahiptir. Özellikle kuantum mekaniğinde uygulamaları yer almaktadır.

$$u(x,t) = u(\xi), \quad v(x,t) = v(\xi), \quad \xi = x - ct \quad (2.107)$$

dalga dönüşümü kullanıldığında (2.106) denklemleri

$$(1-c^2)u'' - u + 2u^3 + 2uv = 0, \quad (2.108)$$

$$(1+c)v' + 4cuu' = 0 \quad (2.109)$$

biçiminde u ve v 'nin adi diferansiyel denklemlerine indirgenir. (2.109) denklemini ξ 'ye göre integre edildiğinde

$$v = -\frac{2c}{1+c}u^2 \quad (2.110)$$

bağıntısı elde edilir. (2.110) denklemi (2.108) denkleminde yerine konulup ifade integre edildiğinde

$$(1-c^2)u'' - u - \frac{2(c-1)}{c+1}u^3 = 0 \quad (2.111)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde en yüksek mertebeden lineer olmayan terim ile en yüksek mertebeden türevin dengelenmesi sonucu $n=2$ olarak belirlenir. Bu durumda trial denklem

$$u' = a_2u^2 + a_1u + a_0 \quad (2.112)$$

biçiminde seçilebilir. (2.112) ve diğer türev terimleri (2.111) adi diferansiyel denkleminde yerine konulduğunda u 'nun bir polinomu elde edilir. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned} a_0a_1 + ca_0a_1 - c^2a_0a_1 - c^3a_0a_1 &= 0 \\ a_1^2 + ca_1^2 - c^2a_1^2 - c^3a_1^2 + 2ca_0a_2 - 2c^2a_0a_2 - 2c^3a_0a_2 - 1 - c &= 0 \\ 3a_1a_2 + 3ca_1a_2 - 3c^2a_1a_2 - 3c^3a_1a_2 &= 0 \\ 2a_2^2 + 2ca_2^2 - 2c^2a_2^2 - 2c^3a_2^2 + 2 - 2c &= 0 \end{aligned} \quad (2.113)$$

biçiminde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde katsayılar

$$a_0 = \frac{\sqrt{-(1+c)^2}}{2-2c^2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{-(1+c)^2}} \quad (2.114)$$

şeklinde belirlenir. Bu katsayılar (2.112) denkleminde yerine konulur ve ifade tam diskriminasyon sistemi dikkate alınarak integre edilir ise,

$$u(\xi) = \pm \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \tanh \left[\sqrt{a_0a_2} (\xi - \xi_0) \right], \quad (2.115)$$

$$u(\xi) = \pm \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \coth \left[\sqrt{a_0 a_2} (\xi - \xi_0) \right] \quad (2.116)$$

olarak elde edilir. (2.114) katsayıları göz önüne alındığında coupled Klein-Gordon denklemlerinin hareketli dalga çözümleri

$$u_1(x, t) = \pm \frac{1+c}{\sqrt{2-2c^2}} \tanh \left[\sqrt{\frac{-1}{2-2c^2}} (x-ct-\xi_0) \right] \quad (2.117)$$

$$v_1(x, t) = \pm \frac{c(1+c)}{1-c} \tanh^2 \left[\sqrt{\frac{-1}{2-2c^2}} (x-ct-\xi_0) \right] \quad (2.118)$$

ve

$$u_2(x, t) = \pm \frac{1+c}{\sqrt{2-2c^2}} \coth \left[\sqrt{\frac{-1}{2-2c^2}} (x-ct-\xi_0) \right] \quad (2.119)$$

$$v_2(x, t) = \pm \frac{c(1+c)}{1-c} \coth^2 \left[\sqrt{\frac{-1}{2-2c^2}} (x-ct-\xi_0) \right] \quad (2.120)$$

biçiminde elde edilir. Bu çözümler kink soliton ve soliter dalga yapısındadır.

3. MODİFİYE EDİLMİŞ TRIAL DENKLEM YÖNTEMİ

Liu (2006b), lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini daha etkin bir şekilde elde etmek için modifiye edilmiş trial denklem yöntemini (modified trial equation method) önermiştir. Burada, klasik trial denklem yönteminden farklı olarak F fonksiyonu rasyonel olarak seçilmektedir. Bu bölümde önce modifiye edilmiş trial denklem yöntemi açıklanacak ve ardından yöntem Sharma-Tasso-Olver, modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony, iki boyutlu Bratu ve genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemlerine uygulanacaktır. Modifiye edilmiş trial denklem yönteminin adımları aşağıdaki şekilde özetlenebilir (Liu, 2006b):

Adım 1. Lineer olmayan

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, \dots) = 0. \quad (3.1)$$

kısmi diferansiyel denklemi ele alınsın. k ve c sıfırdan farklı sabitler olmak üzere,

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = kx - ct \quad (3.2)$$

dalga dönüşümü kullanıldığında (3.1) kısmi diferansiyel denklemi aşağıdaki adi diferansiyel denkleme indirgenir:

$$N(t, x, u, u', u'', \dots) = 0. \quad (3.3)$$

Adım 2. Trial denklem

$$(u')^2 = F(u) = \frac{G(u)}{H(u)} = \frac{a_n u^n + \dots + a_1 u + a_0}{b_n u^m + \dots + b_1 u + b_0}. \quad (3.4)$$

biçiminde ele alınsın. (3.4) denklemi ve diğer türev terimleri (3.3) denkleminde yerine konulur ve denge prensibi kullanılırsa, n ve m arasında bir bağıntı elde edilir. n ve m 'nin bazı değerleri seçilerek hesaplamalar yapılabilir.

Adım 3. (3.4) denkleminin (3.3) yerine konulması

$$M(u) = r_s u^s + \dots + r_1 u + r_0 \quad (3.5)$$

polinomunu verir. a_i ve b_j katsayılarını hesaplamak için tüm r_k değerleri ($k = 0, \dots, s$) sıfıra eşitlenir:

$$r_s = 0, \dots, r_0 = 0. \quad (3.6)$$

(3.6) cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde, a_i ve b_j değerleri belirlenir.

Adım 4. (3.4) denklemi aşağıdaki integral formda yeniden yazılabilir:

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{du}{\sqrt{F(u)}} = \int \sqrt{\frac{H(u)}{G(u)}} du. \quad (3.7)$$

(3.7) integrali $H(u)$ ve $G(u)$ polinomları için sınıflandırılarak hesaplandığında (3.1) denkleminin tam çözümü belirlenmiş olur.

3.1 Modifiye Edilmiş Trial Denklem Yönteminin Uygulamaları

Modifiye edilmiş trial denklem yöntemi Sharma-Tasso-Olver, modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony, iki boyutlu Bratu ve genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemlerine uygulanmış ve bu denklemlerin hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir. Sharma-Tasso-Olver denklemi hem trial denklem yöntemi ile hem de modifiye edilmiş trial denklem yöntemiyle çözülmüş ve yöntemler karşılaştırılmıştır. Modifiye edilmiş trial denklem yöntemi kullanılarak başarılı sonuçlar elde edilmiş ve denklemlerin çözüm yapıları sınıflandırılmıştır.

3.1.1 Sharma-Tasso-Olver denklemine uygulaması

Bu kısımda, Bölüm 2.4.5'te trial denklem yöntemi ile çözülen Sharma-Tasso-Olver denklemine modifiye edilmiş trial denklem yöntemi uygulanmıştır. Bu sayede yöntemler arasındaki ilişki ve genişletme gösterilmiştir.

Modifiye edilmiş trial denklem yöntemini uygulayabilmek için rasyonel yaklaşım kullanılacaktır. Buna göre, trial denklem

$$u' = F(u) = \frac{G(u)}{H(u)} = \frac{a_n u^n + \dots + a_1 u + a_0}{b_n u^m + \dots + b_1 u + b_0} \quad (3.8)$$

biçiminde seçilebilir. (3.8) ve diğer türev terimleri (2.94) adi diferansiyel denkleminde yerine konulur ve denge prensibi uygulanırsa $n-m=2$ olarak bulunur.

Durum 1: $n=2$ ve $m=0$ olarak seçilsin.

Bu durumda trial denklem

$$u' = F(u) = \frac{G(u)}{H(u)} = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2}{b_0} \quad (3.9)$$

biçimini alır. (3.9) ifadesi (2.94) denkleminde yerine konulduğunda u 'nun bir polinomu elde edilir. Bu polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek

$$\begin{aligned} -\alpha a_0 a_1 &= 0 \\ -\alpha a_1^2 - 2\alpha a_0 a_2 - 3\alpha a_0 b_0 + c b_0^2 &= 0 \\ -3\alpha a_1 a_2 - 3\alpha a_1 b_0 &= 0 \\ -2\alpha a_2^2 - 3\alpha a_2 b_0 - \alpha b_0^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden katsayılar aşağıdaki şekilde belirlenir:

Durum 1.1:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = a_1, \quad a_2 = a_2, \quad b_0 = -a_2, \quad c = \frac{\alpha a_1^2}{a_2^2}. \quad (3.11)$$

(3.11) katsayıları (3.9) denkleminde yerine konulur ve ifade integral formda düzenlenirse

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{b_0}{a_1 u - b_0 u^2} du \quad (3.12)$$

yazılabilir. Bu denklem integre edildiğinde Sharma -Tasso-Olver denkleminin tam çözümleri

$$u(\xi) = \frac{a_1}{\pm \exp\left[\pm \frac{a_1(\xi - \xi_0)}{b_0}\right] \mp a_2} \quad (3.13)$$

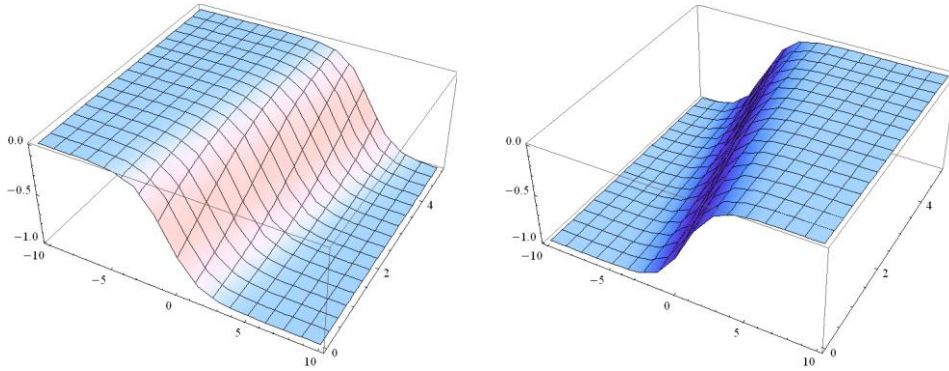
olarak elde edilir. (2.93) dalga dönüşümü dikkate alındığında $\xi_0 = 0$ olmak üzere Sharma -Tasso-Olver denkleminin tam çözümleri

$$u(x, t) = \frac{a_2 \sqrt{\frac{c}{\alpha}}}{\pm \exp\left[\pm \sqrt{\frac{c}{\alpha}}(x - ct)\right] \mp a_2} \quad (3.14)$$

olarak elde edilir.

Modifiye edilmiş trial denklem yöntemi kullanılarak elde edilen (3.14) çözümü, trial denklem yöntemi ile elde edilen (2.100) çözümü ile aynı denklik sınıfında yer almaktadır. (3.14) çözümünde özel olarak $a_2 = 1$ seçilirse trial denklem yöntemi ile elde edilen (2.100) çözümüne ulaşılır.

Buna göre modifiye edilmiş trial denklem yöntemi kullanılarak elde edilen çözüm yapısı, trial denklem yöntemi ile elde edilen çözüm yapısını da kapsamaktadır.



Şekil 3.1 (3.14) çözümlerinin $c = \alpha = \pm 1$, $a_2 = -2$ değerleri için grafikleri

Şekil 3.1, Sharma-Tasso-Olver denkleminin hareketli dalga çözümünün c hızı, α parametresi ve a_2 keyfi sabitine göre değişen dalga tipini göstermektedir. Parametrelerin değişen değerlerine göre çözüm, kink soliton dalga yapısındadır.

Durum 1.2:

$$a_0 = a_0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -b_0, \quad b_0 = b_0, \quad c = \frac{\alpha a_0}{b_0}. \quad (3.15)$$

(3.15) katsayıları (3.9) denkleminde yerine konulur ve ifade integral formda yeniden yazılır. Bu ifade integre edildiğinde

$$u(\xi) = \sqrt{\frac{a_0}{b_0}} \tanh\left(\sqrt{\frac{a_0}{b_0}}(\xi - \xi_0)\right) \quad (3.16)$$

$$u(\xi) = \sqrt{\frac{a_0}{b_0}} \coth\left(\sqrt{\frac{a_0}{b_0}}(\xi - \xi_0)\right) \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.16) ve (3.17) denklemlerinde dalga dönüşümü ve $\frac{a_0}{b_0} = \frac{c}{\alpha}$ olduğu dikkate alınır ve $\xi_0 = 0$ seçilirse Sharma-Tasso-Olver denkleminin kink soliton çözümleri

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{c}{\alpha}} \tanh\left(\sqrt{\frac{c}{\alpha}}(x - ct)\right), \quad (3.18)$$

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{c}{\alpha}} \coth\left(\sqrt{\frac{c}{\alpha}}(x - ct)\right) \quad (3.19)$$

olarak elde edilir.

Modifiye edilmiş trial denklem yöntemiyle elde edilen (3.18) ve (3.19) çözümleri trial denklem yöntemiyle elde edilen (2.104) ve (2.105) çözümleriyle aynı yapıdadır.

Durum 2: $n=3$ ve $m=1$ olarak seçilsin.

Bu durumda trial denklem

$$u' = F(u) = \frac{G(u)}{H(u)} = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3}{b_0 + b_1 u} \quad (3.20)$$

biçimini alır. (3.20) ifadesi (2.94) denkleminde yerine konulduğunda u 'nun bir polinomu elde edilir. Bu polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned}
& -\alpha a_0 a_1 b_0 + \alpha a_0^2 b_1 = 0 \\
& -\alpha a_1^2 b_0 - 2\alpha a_0 a_2 b_0 - 3\alpha a_0 b_0^2 + c b_0^3 + \alpha a_0 a_1 b_1 = 0 \\
& -3\alpha a_1 a_2 b_0 - 3\alpha a_0 a_3 b_0 - 3\alpha a_1 b_0^2 - 6\alpha a_0 b_0 b_1 + 3c b_0^2 b_1 = 0 \\
& -2\alpha a_2^2 b_0 - 4\alpha a_1 a_3 b_0 - 3\alpha a_2 b_0^2 - \alpha b_0^3 - \alpha a_1 a_2 b_1 - \alpha a_0 a_3 b_1 - 6\alpha a_1 b_0 b_1 - 3\alpha a_0 b_1^2 + 3c b_0 b_1^2 = 0 \\
& -5\alpha a_2 a_3 b_0 - 3\alpha a_3 b_0^2 - \alpha a_2^2 b_1 - 2\alpha a_1 a_3 b_1 - 6\alpha a_2 b_0 b_1 - 3\alpha b_0^2 b_1 - 3\alpha a_1 b_1^2 + c b_1^3 = 0 \\
& -3\alpha a_3^2 b_0 - 3\alpha a_2 a_3 b_1 - 6\alpha a_3 b_0 b_1 - 3\alpha a_2 b_1^2 - 3\alpha b_0 b_1^2 = 0 \\
& -2\alpha a_3^2 b_1 - 3\alpha a_3 b_1^2 - \alpha b_1^3 = 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica programı yardımıyla çözüldüğünde aşağıdaki katsayılar belirlenir:

Durum 2.1:

$$a_0 = \frac{a_1 b_0}{b_1}, \quad a_1 = a_1, \quad a_2 = -b_0, \quad a_3 = -b_1, \quad b_0 = b_0, \quad b_1 = b_1, \quad c = \frac{\alpha a_1}{b_1}. \tag{3.22}$$

(3.22) katsayıları

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{b_0 + b_1 u}{a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3} du \tag{3.23}$$

denkleminde yerine konulur ve denklem integre edilirse

$$\pm(\xi - \xi_0) = \frac{-b_0 - 2b_1 u + b_1 \lambda_1}{2(u - \lambda_1)^2}, \tag{3.24}$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left[(b_0 + b_1 \lambda_2) \ln \left| \frac{u - \lambda_2}{u - \lambda_1} \right| - \frac{(b_0 + b_1 \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2)}{u - \lambda_1} \right], \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
\pm(\xi - \xi_0) = & \frac{(b_0 + b_1 \lambda_1) \ln |u - \lambda_1|}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{(b_0 + b_1 \lambda_2) \ln |u - \lambda_2|}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} + \frac{(b_0 + b_1 \lambda_3) \ln |u - \lambda_3|}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \\
& \tag{3.26}
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Burada, λ_1, λ_2 ve λ_3 ,

$$u^3 + \frac{a_2}{a_3}u^2 + \frac{a_1}{a_3}u + \frac{a_0}{a_3} = 0 \quad (3.27)$$

polinomial denkleminin köklerini göstermektedir.

Durum 2.2: Katsayılar

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{b_0(a_2 + b_0)}{b_1}, \quad a_2 = a_2, \quad a_3 = -b_1, \quad b_0 = b_0, \quad b_1 = b_1, \quad c = \frac{\alpha(a_2 + b_0)^2}{b_1^2}. \quad (3.28)$$

olarak bulunur. (3.28) katsayıları (3.23) denkleminde yerine konulur ve denklem integre edilirse

$$\pm(\xi - \xi_0) = \frac{1}{2a_1} \left[\frac{2(a_2b_0 - 2a_1b_1)}{\sqrt{4a_1a_3 - a_2^2}} \arctan \left[\frac{2a_3u + a_2}{\sqrt{4a_1a_3 - a_2^2}} \right] + b_0 \ln \left| \frac{u(a_3u + a_2) + a_1}{u^2} \right| \right] \quad (3.29)$$

biçimindeki kapalı çözüm elde edilir.

Durum 2.3:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = a_1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -b_1, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = b_1, \quad c = \frac{\alpha a_1}{b_1}. \quad (3.30)$$

(3.30) katsayıları (3.23) denkleminde yerine konulur ve denklem integre edilirse

$$u(\xi) = -\sqrt{\pm \frac{c}{\alpha}} \tan \left[\sqrt{\pm \frac{c}{\alpha}} (\xi \pm \xi_0) \right] \quad (3.31)$$

$$u(\xi) = \sqrt{\pm \frac{c}{\alpha}} \cot \left[\sqrt{\pm \frac{c}{\alpha}} (\xi \pm \xi_0) \right] \quad (3.32)$$

ifadelerine ulaşılır. (2.93) dönüşümü dikkate alınır ve $\xi_0 = 0$ olarak seçilirse denklemin periyodik çözümleri

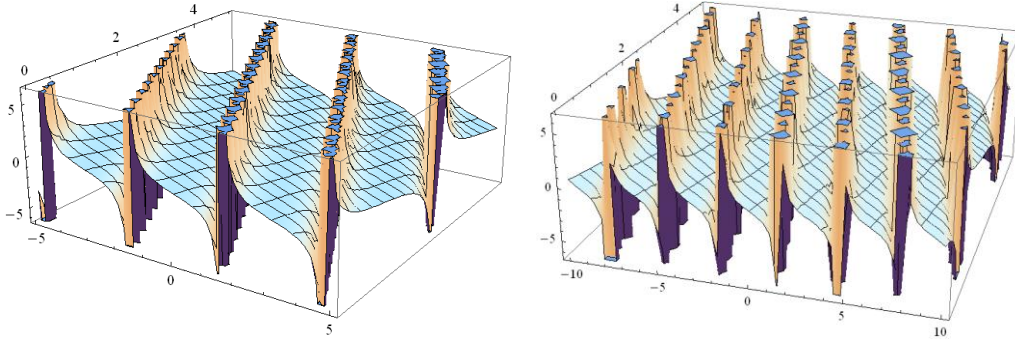
$$u_{1,2}(x,t) = -\sqrt{\pm \frac{c}{\alpha}} \tan \left[\sqrt{\pm \frac{c}{\alpha}} (x \pm ct) \right], \quad (3.33)$$

$$u_{3,4}(x,t) = \sqrt{\pm \frac{c}{\alpha}} \cot \left[\sqrt{\pm \frac{c}{\alpha}} (x \pm ct) \right] \quad (3.34)$$

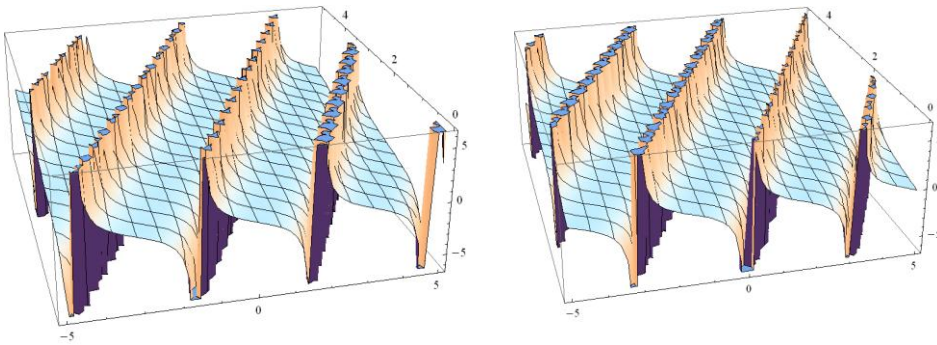
olarak belirlenir.

Bu çözümler (Erbaş and Yusufoglu, 2009) çalışmasında bulunan çözümlerle aynı denklik sınıfındadır.

Şekil 3.3 ve Şekil 3.4, Sharma-Tasso-Olver denkleminin periyodik çözümlerinin c hızı ve α parametresine göre değişen dalga yapısını göstermektedir.



Şekil 3.2 (3.33) $u_1(x,t)$ çözümünün $c = \alpha = 1$ değerleri için grafikleri



Şekil 3.3 $u_2(x,t)$ ve $u_4(x,t)$ çözümlerinin $c=1$, $\alpha=-1$ değerleri için grafikleri

Sharma-Tasso-Olver denklemi özelinde görüldüğü gibi, modifiye edilmiş trial denklem yöntemi kullanıldığında, trial denklem yöntemine göre daha fazla sayıda çözüme ulaşılmıştır.

3.1.2 Modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony denkleminin uygulaması

Benjamin-Bona-Mahony denklemi, lineer olmayan dispersif sistemdeki uzun dalgaları modeller. Bu denklem, soğuk plazmadaki hidromanyetik dalgaların, sıvılardaki uzun dalga boyunun yüzey dalgalarının, sıkıştırılabilir sıvılardaki kütleçekim dalgalarının ve anharmonik kristallerin akustik dalgalarının analizinde kullanılmaktadır.

Modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemi (Benjamin, 1972; Yusufoglu, 2008) ele alınsın:

$$u_t + u_x + u^2 u_x + u_{xxt} = 0. \quad (3.35)$$

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - ct \quad (3.36)$$

dalga dönüşümü kullanıldığında (3.35) denklemi

$$-cu' + u' + u^2 u' - cu''' = 0 \quad (3.37)$$

biçiminde bir adi diferansiyel denkleme indirgenir. Bu denklem integre edildiğinde

$$(1 - c)u - cu'' + \frac{u^3}{3} + c_0 = 0 \quad (3.38)$$

denklemini elde edilir. Trial denklem

$$u' = F(u) = \frac{G(u)}{H(u)} = \frac{a_n u^n + \dots + a_1 u + a_0}{b_n u^m + \dots + b_1 u + b_0} \quad (3.39)$$

biçiminde seçilebilir. (3.39) ve diğer türev terimleri (3.38) adi diferansiyel denkleminde yerine konular ve denge prensibi uygulanırsa $n - m = 2$ olarak bulunur.

Durum 1: $n = 2$ ve $m = 0$ olarak seçilsin.

Bu durumda trial denklem

$$u' = F(u) = \frac{G(u)}{H(u)} = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2}{b_0} \quad (3.40)$$

biçimini alır. (3.40) ifadesi (3.38) denkleminde yerine konulduğunda u 'nun bir polinomu elde edilir. Bu polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned} 3c_0 b_0^2 - 3ca_0 a_1 &= 0 \\ 3b_0^2 - 3c_0 b_0^2 - 6ca_0 a_2 - 3ca_1^2 &= 0 \\ 9ca_1 a_2 &= 0 \\ b_0^2 - 6ca_2^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden katsayılar

$$a_0 = \mp \sqrt{\frac{3}{2c}}(c-1)b_0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \pm \frac{b_0}{\sqrt{6c}}, \quad c = \pm \frac{b_0^2}{6a_2^2}, \quad c_0 = 0 \quad (3.42)$$

biçiminde elde edilir. (3.42) katsayıları (3.40) denkleminde yerine konulur ve ifade integre edilirse

$$u(\xi) = \frac{\sqrt{a_0 a_2}}{a_2} \tanh \left[\sqrt{a_0 a_2} (\xi - \xi_0) \right], \quad (3.43)$$

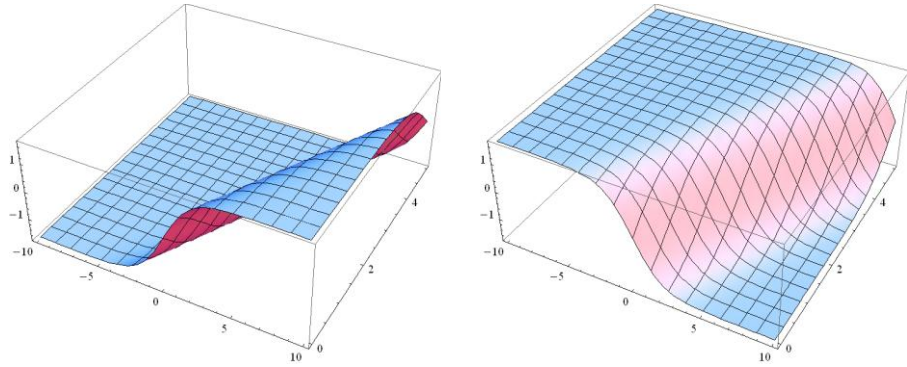
$$u(\xi) = \frac{\sqrt{a_0 a_2}}{a_2} \coth \left[\sqrt{a_0 a_2} (\xi - \xi_0) \right] \quad (3.44)$$

elde edilir. (3.42) katsayıları dikkate alındığında modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony denkleminin hareketli dalga çözümleri $c > 1$ olmak üzere

$$u(x, t) = \pm \sqrt{3(c-1)} \tanh \left[\sqrt{\frac{c-1}{2c}} (x - ct) - \xi_0 \right], \quad (3.45)$$

$$u(x, t) = \pm \sqrt{3(c-1)} \coth \left[\sqrt{\frac{c-1}{2c}} (x - ct) - \xi_0 \right] \quad (3.46)$$

olarak elde edilir. Şekil 3.5 modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony denkleminin kink soliton yapısındaki çözümlerini göstermektedir.



Şekil 3.4 (3.45) ve (3.46) çözümlerinin $c = 2$, $\xi_0 = 0$ değerleri için grafikleri

Durum 2: $n = 3$ ve $m = 1$ olarak seçilsin.

Bu durumda trial denklem

$$u' = F(u) = \frac{G(u)}{H(u)} = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3}{b_0 + b_1 u} \quad (3.47)$$

biçimini alır. (3.47) ifadesi (2.94) denkleminde yerine konulduğunda u 'nun bir polinomu elde edilir. Bu polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned} 3ca_0a_1b_0 - 3ca_0^2b_1 &= 0 \\ 3ca_1^2b_0 + 6ca_0a_2b_0 - 3b_0^3 + 3cb_0^3 - 3ca_0a_1b_1 &= 0 \\ 9ca_1a_2b_0 + 9ca_0a_3b_0 - 9b_0^2b_1 + 9cb_0^2b_1 &= 0 \\ 6ca_2^2b_0 + 12ca_1a_3b_0 - b_0^3 + 3ca_1a_2b_1 + 3ca_0a_3b_1 - 9b_0b_1^2 + 9cb_0b_1^2 &= 0 \\ 15ca_2a_3b_0 + 3ca_2^2b_1 + 6ca_1a_3b_1 - 3b_0^2b_1 - 3b_1^3 + 3cb_1^3 &= 0 \\ 9ca_3^2b_0 + 9ca_2a_3b_1 - 3b_0b_1^2 &= 0 \\ 6ca_3^2b_1 - b_1^3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica programı yardımıyla çözüldüğünde katsayılar

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \sqrt{\frac{3}{2c}}(c-1)b_1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{b_1}{\sqrt{6c}}, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = b_1 \quad (3.49)$$

biçiminde belirlenir. (3.49) katsayıları

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{b_0 + b_1 u}{a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3} du \quad (3.50)$$

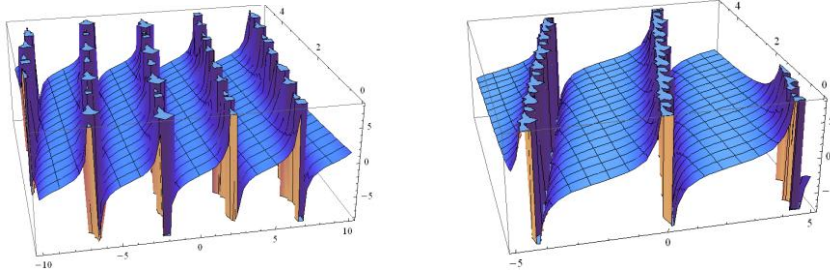
denkleminde yerine konulur ve denklem tam diskriminasyon sistemine göre integre edilirse modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony denkleminin hareketli dalga çözümleri $c < 1$ olmak üzere

$$u_{1,2}(x, t) = \pm \sqrt{3(1-c)} \tan \left[\sqrt{\frac{1-c}{2c}} (x - ct) - \xi_0 \right], \quad (3.51)$$

$$u_{3,4}(x, t) = \pm \sqrt{3(1-c)} \cot \left[\sqrt{\frac{1-c}{2c}} (x - ct) - \xi_0 \right] \quad (3.52)$$

biçiminde periyodik çözüm yapısında elde edilir.

Şekil 3.7 modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony denkleminin periyodik dalga yapısındaki çözümlerini göstermektedir.



Şekil 3.5 u_1 ve u_4 çözümlerinin $c = 1/2$, $\xi_0 = 0$ değerleri için grafikleri

3.1.3 İki boyutlu Bratu denklemine uygulaması

İki boyutlu Bratu denklemi, katı materyallerdeki termal reaksiyon sürecini modeller. Bratu problemi termal reaksiyon sürecinin yanı sıra kimyasal reaktör teorisi, ışınsal ısı transferi, nanoteknoloji, termal yanmanın yakıt ateşleme modeli ve evrenin genişlemesi modeli gibi çok sayıda uygulama alanına sahiptir.

İki boyutlu Bratu denklemi (Boyd, 1986; Mısırlı and Güreffe, 2011)

$$u_{xx} + u_{tt} + \lambda \exp(su) = 0 \quad (3.53)$$

ele alınsın.

$$u(x, t) = u(\eta), \quad \eta = kx + wt \quad (3.54)$$

dalga dönüşümü ve

$$u = (1/s) \ln v \quad (3.55)$$

dönüşümü altında (3.53) denklemi

$$(k^2 + w^2)vv'' - (k^2 + w^2)(v')^2 + \lambda sv^3 = 0 \quad (3.56)$$

adi diferansiyel denkleme indirgenir. İki boyutlu Bratu denklemini çözebilmek için trial denklem

$$(u')^2 = F(u) = \frac{G(u)}{H(u)} = \frac{a_n u^n + \dots + a_1 u + a_0}{b_n u^m + \dots + b_1 u + b_0} \quad (3.57)$$

biçiminde seçilir ve bu ifade (3.56) adi diferansiyel denklemde yerine konulursa denge prosedüründen $n - m = 3$ olarak belirlenir.

Durum 1: $n = 3, m = 0$ olarak seçilirse, bu durumda

$$(u')^2 = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3}{b_0}, \quad (3.58)$$

$$u'' = \frac{a_1 + 2a_2 u + 3a_3 u^2}{2b_0} \quad (3.59)$$

ifadeleri elde edilir. (3.58) ve (3.59) ifadeleri (3.56) adi diferansiyel denklemde yerine konulduğunda elde edilen polinomun katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned} k^2 a_0 + w^2 a_0 &= 0 \\ k^2 a_1 + w^2 a_1 &= 0 \\ k^2 a_3 + w^2 a_3 + \lambda s b_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden katsayılar,

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= 0, & a_2 &= a_2, & a_3 &= a_3, \\ b_0 &= b_0, & w &= \pm \sqrt{\frac{2\lambda s b_0}{a_3} - k^2} \end{aligned} \quad (3.61)$$

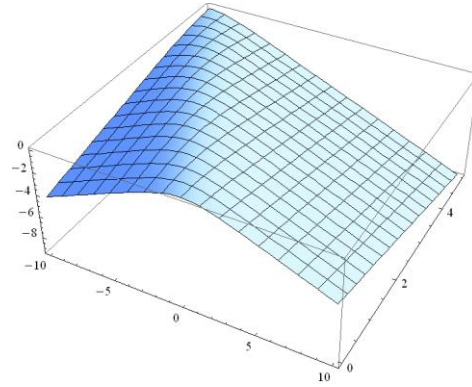
olarak belirlenir.

(3.61) katsayıları (3.58) denkleminde yerine konulur ve denklem integre edilirse, iki boyutlu Bratu denkleminin hareketli dalga çözümleri

$$u_{1,2}(x, t) = \frac{1}{s} \ln \left[\frac{b_0}{a_3 \cosh^2 \left[\frac{1}{2} \left(kx \pm \sqrt{\frac{2\lambda s b_0}{a_3} - k^2} t - \xi_0 \right) \right]} \right] \quad (3.62)$$

biçiminde elde edilir.

Bu çözüm, k ve λ parametreleri ile a_3 ve b_0 keyfi sabitlerinin değişen değerlerine göre soliton yapıdadır ve Şekil 3.6 çözüm yapısını göstermektedir.



Şekil 3.6 (3.62) çözümünün $b_0 = a_3 = 1$, $s = 2$, $k = \lambda = 1$, $\xi_0 = 0$ değerleri için grafiği

Durum 2: $n = 4$, $m = 1$ olarak seçilirse, bu durumda trial denklem

$$(u')^2 = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4}{b_0 + b_1 u} \quad (3.63)$$

biçimini alacaktır. (3.63) ve diğer türev ifadeleri (3.56) denkleminde yerine

yazıldığında

$$\begin{aligned}
k^2 a_0 b_0 + w^2 a_0 b_0 &= 0 \\
k^2 a_1 b_0 + w^2 a_1 b_0 + 3k^2 a_0 b_1 + 3w^2 a_0 b_1 &= 0 \\
k^2 a_1 b_1 + w^2 a_1 b_1 &= 0 \\
k^2 a_3 b_0 + w^2 a_3 b_0 + 2\lambda s b_0^2 - k^2 a_2 b_1 - w^2 a_2 b_1 &= 0 \\
k^2 a_4 b_0 + w^2 a_4 b_0 + 2\lambda s b_0 b_1 &= 0 \\
k^2 a_4 b_1 + w^2 a_4 b_1 + 2\lambda s b_1^2 &= 0
\end{aligned} \tag{3.64}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle katsayılar

$$\begin{aligned}
a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = a_3, \\
a_4 = a_4, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = b_1, \quad w = \pm \sqrt{-k^2 - \frac{2\lambda s b_1}{a_4}}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

olarak belirlenebilir. (3.64) cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle hesaplanan diğer katsayılar için iki boyutlu Bratu denkleminin kapalı çözümleri elde edilmiştir. (3.63) trial denkleminde pay ve payda dereceleri arasında üç fark olduğundan katsayılar için optimizasyon gerekebilir. Açık çözüm elde edebilmek için katsayılar (3.65) biçiminde alındığında trial denklem üçüncü dereceden polinoma indirgenmektedir. (3.65) katsayıları (3.63) denkleminde yerine yazılır ve denklem integre edilirse, iki boyutlu Bratu denkleminin hareketli dalga çözümleri

$$u(x, t) = \frac{1}{s} \ln \left[\frac{a_3}{a_4} \sec^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_3}{b_1}} \left(kx \pm \sqrt{-k^2 - \frac{2\lambda s b_1}{a_4}} t - \xi_0 \right) \right) \right] \tag{3.66}$$

biçiminde kompakt çözümler yapılarında elde edilir.

3.1.4 Genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denkleminin uygulaması

a, b, k sabitler ve l, m, n tamsayılar olmak üzere genelleştirilmiş yapıdaki Benjamin-Bona-Mahony denklemi

$$(u^l)_t + a(u^l)_x + k(u^m)_x - b(u^n)_{xxt} = 0 \tag{3.67}$$

biçiminde verilmektedir (Triki and İsmail, 2010; Li and Zhao, 2012).

Benjamin-Bona-Mahony denklemi, viskoz olmayan sıvılarda uzun dispersif dalgaların yayılımını tanımlamak için KdV denkleminin alternatif olarak formüle edilmiştir (Benjamin et al., 1972).

B ve ω sabitler olmak üzere

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = B(x - \omega t) \quad (3.68)$$

dalga dönüşümü kullanıldığında BBM (m,n) denklemi

$$(a - \omega)u^l + ku^m + b\omega B^2(u^n)'' = 0 \quad (3.69)$$

biçimini alır.

Durum 1. $l = n$, $m \neq n$ iken,

Denkleminde lineer olmayan u^m terimiyle $(u^n)''$ teriminin dengelenmesi ile

$$mP = nP + 2 \quad (3.70)$$

elde edilir. Böylece,

$$P = \frac{2}{m - n} \quad (3.71)$$

olarak belirlenir. Analitik çözüm elde edebilmek için

$$u = v^{\frac{1}{m-n}} \quad (3.72)$$

dönüşümü kullanıldığında, (3.69) denklemi

$$(a - \omega)(m - n)^2 v^2 + k(m - n)^2 v^3 + \omega b B^2 [n(2n - m)(v')^2 + n(m - n)vv''] = 0 \quad (3.73)$$

biçiminde bir adi diferansiyel denkleme indirgenir. BBM (m,n) denklemini çözmek için modifiye edilmiş trial denklem yöntemi uygulanacaktır. Trial denklem,

$$(v')^2 = F(v) = \frac{G(v)}{H(v)} = \frac{a_r v^r + \dots + a_1 v + a_0}{b_s v^s + \dots + b_1 v + b_0} \quad (3.74)$$

biçiminde seçilir ve adi diferansiyel denklemde yerine konulursa, denge prensibinden $r - s = 3$ olarak belirlenir.

$r = 3, s = 0$ olarak alındığında trial denklem

$$(v')^2 = \frac{a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3}{b_0} \quad (3.75)$$

biçimini alır ve

$$v'' = \frac{a_1 + 2a_2 v + 3a_3 v^2}{2b_0} \quad (3.76)$$

olarak belirlenir. (3.75) ve (3.76) ifadeleri (3.73) adi diferansiyel denkleminde yerine konulduğunda elde edilen polinomun katsayıları sıfıra eşitlenir ise

$$\begin{aligned} -bB^2 mn \omega a_0 + 2bB^2 n^2 \omega a_0 &= 0 \\ -bB^2 mn \omega a_1 + 3bB^2 n^2 \omega a_1 &= 0 \\ bB^2 n^2 \omega a_2 + m^2 a b_0 - 2mnab_0 + n^2 a b_0 - m^2 \omega b_0 + 2mn\omega b_0 - n^2 \omega b_0 &= 0 \\ bB^2 mn \omega a_3 + bB^2 n^2 \omega a_3 + 2km^2 b_0 - 4kmnb_0 + 2kn^2 b_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.77)$$

şeklinde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden katsayılar

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{(m-n)^2(a-\omega)b_0}{bB^2 n^2 \omega}, \\ a_3 &= -\frac{2k(m-n)^2 b_0}{bB^2 n(m+n)\omega}, \quad b_0 = b_0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

olarak belirlenir. Bu katsayılar

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{b_0 dv}{\sqrt{a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3}} \quad (3.79)$$

denkleminde yerine konulur ve ifade tam diskriminasyon sistemi dikkate alınarak

integre edilir ise, $A = \sqrt{\frac{b_0}{a_3}}$ olmak üzere

$$v(\xi) = -\frac{a_2}{a_3} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2A} \sqrt{\frac{a_2}{a_3}} (\xi - \xi_0) \right), \quad \frac{a_2}{a_3} > 0, \quad (3.80)$$

$$v(\xi) = \frac{a_2}{a_3} \operatorname{cosech}^2 \left(\frac{1}{2A} \sqrt{\frac{a_2}{a_3}} (\xi - \xi_0) \right), \quad \frac{a_2}{a_3} > 0, \quad (3.81)$$

$$v(\xi) = -\frac{a_2}{a_3} \sec^2 \left(\frac{1}{2A} \sqrt{-\frac{a_2}{a_3}} (\xi - \xi_0) \right), \quad \frac{a_2}{a_3} < 0, \quad (3.82)$$

$$v(\xi) = -\frac{a_2}{a_3} \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{1}{2A} \sqrt{-\frac{a_2}{a_3}} (\xi - \xi_0) \right), \quad \frac{a_2}{a_3} < 0 \quad (3.83)$$

ifadeleri elde edilir. (3.72) dönüşümü dikkate alındığında, $\omega = -\frac{2k(m-n)^2 b_0}{bB^2 n(m+n)a_3}$

olmak üzere genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denkleminin hareketli dalga çözümleri

$$u_1(x, t) = \left[\frac{(\omega - a)(m+n)}{2kn} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(m-n)^2(\omega - a)}{bB^2 n^2 \omega}} B(x - \omega t) - \xi_0 \right) \right]^{\frac{1}{m-n}}, \quad (3.84)$$

$$u_2(x, t) = \left[\frac{(a - \omega)(m+n)}{2kn} \operatorname{cosech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(m-n)^2(\omega - a)}{bB^2 n^2 \omega}} B(x - \omega t) - \xi_0 \right) \right]^{\frac{1}{m-n}}, \quad (3.85)$$

$$u_3(x, t) = \left[\frac{(\omega - a)(m+n)}{2kn} \sec^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{(m-n)^2(\omega - a)}{bB^2 n^2 \omega}} B(x - \omega t) - \xi_0 \right) \right]^{\frac{1}{m-n}}, \quad (3.86)$$

$$u_4(x, t) = \left[\frac{(\omega - a)(m+n)}{2kn} \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(m-n)^2(a - \omega)}{bB^2 n^2 \omega}} B(x - \omega t) - \xi_0 \right) \right]^{\frac{1}{m-n}} \quad (3.87)$$

biçiminde elde edilir.

(3.84) ve (3.85) çözümleri soliter dalga yapısında çözümlerdir. (3.86) ve (3.87) çözümleri ise kompakt yapıda hareketli dalga çözümleridir. Elde edilen çözümlerin genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemini sağladığı Mathematica yardımıyla doğrulanmıştır.

Durum 2. $m = n$, $l \neq n$ iken,

Denklemden lineer olmayan u^l terimiyle $(u^n)''$ teriminin dengelenmesi ile

$$lP = nP + 2 \quad (3.88)$$

elde edilir. Böylece,

$$P = \frac{2}{l-n} \quad (3.89)$$

olarak belirlenir.

$$u = v^{\frac{1}{l-n}} \quad (3.90)$$

dönüşümü kullanıldığında, genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemi,

$$(a - \omega)(l - n)^2 v^3 + k(l - n)^2 v^2 + \omega b B^2 [n(2n - l)(v')^2 + n(l - n)vv''] = 0 \quad (3.91)$$

biçiminde bir adi diferansiyel denkleme indirgenir. (3.74) denklemi (3.91) adi diferansiyel denkleminde yerine konulursa, denge prensibinden $r - s = 3$ olarak belirlenir.

Durum 1 ile benzer şekilde trial denklem ve diğer türev terimleri (3.91) adi diferansiyel denkleminde yerinde konulur ve elde edilen polinomun katsayıları sıfıra eşitlenir ise,

$$\begin{aligned} bB^2 l n \omega a_0 - 2bB^2 n^2 \omega a_0 &= 0 \\ bB^2 l n \omega a_1 - 3bB^2 n^2 \omega a_1 &= 0 \\ 2bB^2 n^2 \omega a_2 + 2kl^2 b_0 - 4knlb_0 + 2kn^2 b_0 &= 0 \\ bB^2 l n \omega a_3 + bB^2 n^2 \omega a_3 + 2al^2 b_0 - 4anlb_0 + 2an^2 b_0 - 2l^2 \omega b_0 \\ &+ 4nl\omega b_0 - 2n^2 \omega b_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.92)$$

biçiminde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde katsayılar

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{k(l-n)^2 b_0}{bB^2 n^2 \omega}, \\ a_3 &= -\frac{2(l-n)^2 (a-\omega) b_0}{bB^2 n(l+n)\omega}, \quad b_0 = b_0 \end{aligned} \quad (3.93)$$

olarak belirlenir.

Bu katsayılar (3.79) denkleminde yerine konulur ve ifade tam diskriminasyon sistemi dikkate alınarak integre edilir.

$$(3.72) \text{ dönüşümü göz önüne alınır ise, } \omega = -\frac{2(l-n)^2 (a-\omega) b_0}{bB^2 n(l+n)a_3} \text{ olmak üzere}$$

genelleştirilmiş yapıdaki Benjamin-Bona-Mahony denkleminin hareketli dalga çözümleri $\frac{k}{b\omega} < 0$ olması durumunda

$$u_5(x, t) = \left[\frac{k(l+n)}{2n(\omega-a)} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{k(l-n)^2}{bB^2 n^2 \omega}} B(x-\omega t) - \xi_0 \right) \right]^{\frac{1}{l-n}}, \quad (3.94)$$

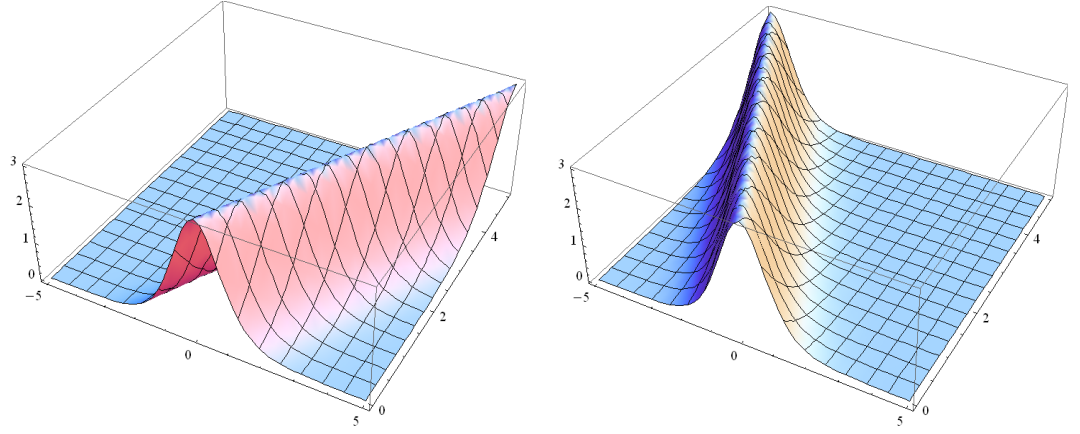
$$u_6(x, t) = \left[\frac{k(l+n)}{2n(a-\omega)} \operatorname{cosech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{k(l-n)^2}{bB^2 n^2 \omega}} B(x-\omega t) - \xi_0 \right) \right]^{\frac{1}{l-n}} \quad (3.95)$$

şeklinde hiperbolik yapıda ve $\frac{k}{b\omega} > 0$ olması durumunda ise

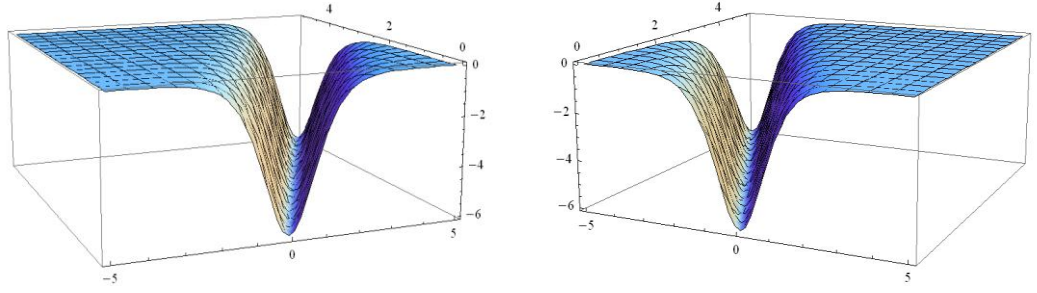
$$u_7(x, t) = \left[\frac{k(l+n)}{2n(\omega-a)} \sec^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k(l-n)^2}{bB^2 n^2 \omega}} B(x-\omega t) - \xi_0 \right) \right]^{\frac{1}{l-n}}, \quad (3.96)$$

$$u_8(x, t) = \left[\frac{k(l+n)}{2n(\omega-a)} \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k(l-n)^2}{bB^2 n^2 \omega}} B(x-\omega t) - \xi_0 \right) \right]^{\frac{1}{l-n}} \quad (3.97)$$

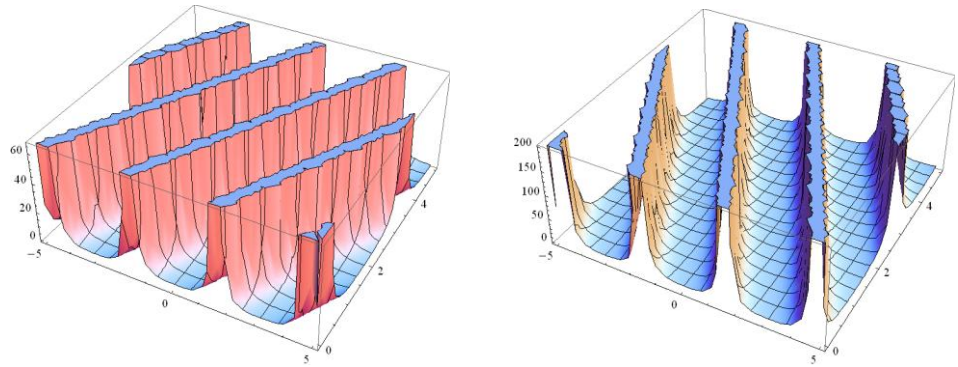
biçiminde periyodik yapıda elde edilir.



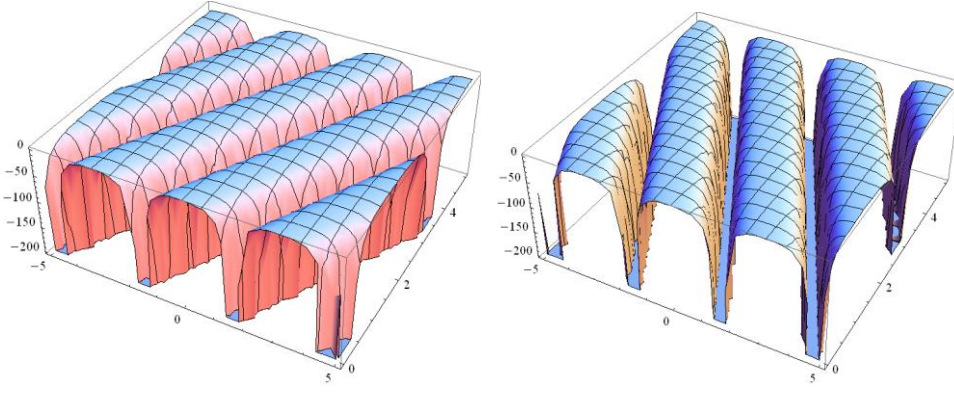
Şekil 3.7 (3.94) çözümünün $n=1$, $l=2$, $b=-1$, $\xi_0=0$ ve sırası ile $k=\pm 4$, $a=\mp 1$, $\omega=\pm 1$ değerleri için grafikleri



Şekil 3.8 (3.94) çözümünün $n=1$, $l=2$, $b=-1$, $\xi_0=0$ ve sırası ile $k=\pm 4$, $a=\pm 2$, $\omega=\pm 1$ değerleri için grafikleri



Şekil 3.9 (3.96) çözümünün $n=1$, $l=2$, $a=-2$, $k=4$, $\xi_0=0$ ve sırası ile $b=\pm 1$, $\omega=\pm 1$ değerleri için grafikleri



Şekil 3.10 (3.96) çözümünün $n=1$, $l=2$, $a=2$, $k=4$, $\xi_0=0$ ve sırası ile $b=\pm 1$, $\omega=\pm 1$ değerleri için grafikleri

(3.94) ve (3.95) çözümleri soliter dalga çözümleridir. (3.96) ve (3.97) çözümleri ise kompaktın yapıda hareketli dalga çözümleridir. Bu çözümlerin genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemini sağladıkları Mathematica yardımıyla doğrulanmış ve çözüm yapıları grafikler ile gösterilmiştir.

4. GENİŞLETİLMİŞ TRIAL DENKLEM YÖNTEMİ

Genişletilmiş trial denklem yöntemi (extended trial equation method), kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini daha etkin bir şekilde elde etmek için önerilmiştir (Pandir et al., 2012). Bu kısımda genişletilmiş trial denklem yöntemi açıklanmış ve yöntem iki boyutlu Bratu ve Benjamin-Bona-Mahony denklemlerine uygulanmıştır. 3. bölümde modifiye edilmiş trial denklem yöntemi ile hareketli dalga çözümleri elde edilen bu denklemlere genişletilmiş trial denklem yöntemi uygulanmış ve bu sayede yöntemler karşılaştırılmıştır.

Adım 1. Lineer olmayan kısmi

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (4.1)$$

diferansiyel denklemi ele alınsın. k ve w keyfi sabitler olmak üzere,

$$u(x, t) = u(\eta), \quad \eta = kx + wt \quad (4.2)$$

dalga dönüşümü kullanıldığında (4.1) kısmi diferansiyel denklemi

$$N(u, u', u'', \dots) = 0 \quad (4.3)$$

adi diferansiyel denkleme indirgenir.

Adım 2. Aşağıdaki seri ve trial denklem ele alınsın:

$$u = \sum_{i=0}^{\delta} \tau_i \Gamma^i, \quad (4.4)$$

$$(\Gamma')^2 = \Lambda(\Gamma) = \frac{\Phi(\Gamma)}{\Psi(\Gamma)} = \frac{\xi_{\theta} \Gamma^{\theta} + \dots + \xi_1 \Gamma + \xi_0}{\zeta_{\epsilon} \Gamma^{\epsilon} + \dots + \zeta_1 \Gamma + \zeta_0}. \quad (4.5)$$

(4.4) ve (4.5) denklemleri ile $\Phi(\Gamma)$ ve $\Psi(\Gamma)$ polinomlar olmak üzere

$$(u')^2 = \frac{\Phi(\Gamma)}{\Psi(\Gamma)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i \tau_i \Gamma^{i-1} \right)^2, \quad (4.6)$$

$$u'' = \frac{\Phi'(\Gamma)\Psi(\Gamma) - \Phi(\Gamma)\Psi'(\Gamma)}{2\Psi^2(\Gamma)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i\tau_i\Gamma^{i-1} \right) + \frac{\Phi(\Gamma)}{\Psi(\Gamma)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i(i-1)\tau_i\Gamma^{i-2} \right) \quad (4.7)$$

ifadeleri yazılabilir. (4.6) ve (4.7) denklemlerinin (4.3) denkleminde yerine konulması Γ 'nın bir polinomunu verir:

$$\Omega(\Gamma) = \mathcal{G}_s\Gamma^s + \dots + \mathcal{G}_1\Gamma + \mathcal{G}_0 = 0. \quad (4.8)$$

Denge prensibine göre θ, ϵ ve δ arasında bir bağıntı bulunabilir ve bazı değerleri hesaplanabilir.

Adım 3. $\Omega(\Gamma)$ polinomunun tüm katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile aşağıdaki gibi bir cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\mathcal{G}_i = 0, \quad i = 0, \dots, s. \quad (4.9)$$

(4.9) cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde, $\xi_0, \dots, \xi_\theta, \zeta_0, \dots, \zeta_\epsilon$ ve $\tau_0, \dots, \tau_\delta$ değerleri belirlenebilir.

Adım 4. (4.5) denklemi aşağıdaki integral formda yeniden yazılır:

$$\pm(\eta - \eta_0) = \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Lambda(\Gamma)}} = \int \sqrt{\frac{\Psi(\Gamma)}{\Phi(\Gamma)}} d\Gamma. \quad (4.10)$$

(4.10) integrali $\Phi(\Gamma)$ polinomunun kökleri için sınıflandırılarak hesaplandığında (4.1) denkleminin tam çözümleri belirlenmiş olur.

4.1 Genişletilmiş Trial Denklem Yönteminin Uygulamaları

Genişletilmiş trial denklem yöntemi iki boyutlu Bratu ve genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemlerinin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için uygulanmış ve elde edilen çözüm yapıları sınıflandırılmıştır. Genişletilmiş trial denklem yöntemi uygulandığında, modifiye edilmiş trial denklem yöntemi ile aynı denklik sınıfında çözümler elde edilebildiği gibi, daha fazla çözüme de ulaşılabildiği görülmüştür.

4.1.1 İki boyutlu Bratu denkleminin uygulaması

Bu kısımda, Bölüm 3.1.3'te modifiye edilmiş trial denklem yöntemi ile çözülen iki boyutlu Bratu denkleminin, genişletilmiş trial denklem yöntemi uygulanmış ve bu denklemin hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir.

İki boyutlu Bratu denklemi ele alınsın (Odabaşı and Mısırlı, 2014):

$$u_{xx} + u_{tt} + \lambda \exp(su) = 0. \quad (4.11)$$

(3.54) dalga dönüşümü ve (3.55) dönüşümleri altında iki boyutlu Bratu denklemi

$$(k^2 + w^2)vv'' - (k^2 + w^2)(v')^2 + \lambda sv^3 = 0 \quad (4.12)$$

biçiminde bir adi diferansiyel denkleme indirgenmiştir. (4.6) ve (4.7) denklemleri (4.14) adi diferansiyel denklemde yerine konulursa denge prensibinden

$$\theta = \epsilon + \delta + 2 \quad (4.13)$$

olarak belirlenir.

Durum 1: $\epsilon = 0$, $\delta = 1$ ve $\theta = 3$ olarak seçilirse, bu durumda $\xi_3 \neq 0$, $\xi_0 \neq 0$ olmak üzere,

$$(v')^2 = \frac{(\tau_1)^2(\xi_3\Gamma^3 + \xi_2\Gamma^2 + \xi_1\Gamma + \xi_0)}{\xi_0} \quad (4.14)$$

ifadesi elde edilir. (4.14) ve diğer türev terimleri (4.12) adi diferansiyel denkleminde yerine konulduğunda elde edilen polinomun katsayıları sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned} -2as\xi_0\tau_0^3 - k^2\xi_1\tau_0\tau_1 - w^2\xi_1\tau_0\tau_1 + 2k^2\xi_0\tau_1^2 + 2w^2\xi_0\tau_1^2 &= 0 \\ -2k^2\xi_2\tau_0\tau_1 - 2w^2\xi_2\tau_0\tau_1 - 6as\xi_0\tau_0^2\tau_1 + k^2\xi_1\tau_1^2 + w^2\xi_1\tau_1^2 &= 0 \\ -3k^2\xi_3\tau_0\tau_1 - 3w^2\xi_3\tau_0\tau_1 - 6as\xi_0\tau_0\tau_1^2 &= 0 \\ -k^2\xi_3\tau_1^2 - w^2\xi_3\tau_1^2 - 2as\xi_0\tau_1^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. (4.57) sistemi çözüldüğünde katsayılar

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \frac{-\xi_3 \tau_0^3 + \xi_1 \tau_0 \tau_1^2}{2\tau_1^3}, \quad \xi_1 = \xi_1, \quad \xi_2 = \frac{3\xi_3 \tau_0}{2\tau_1} + \frac{\xi_1 \tau_1}{2\tau_0}, \quad \xi_3 = \xi_3, \\ \zeta_0 &= \zeta_0, \quad \tau_0 = \tau_0, \quad \tau_1 = \tau_1, \quad w = \pm \sqrt{\pm \frac{2\lambda s \zeta_0 \tau_1}{\xi_3} - k^2}\end{aligned}\quad (4.16)$$

olarak belirlenir.

Bu katsayılar (4.14) denkleminde yerine konulur ve ifade integral formda yazılırsa, $A = \sqrt{(\zeta_0 / \xi_3)}$ olmak üzere,

$$\pm(\eta - \eta_0) = A \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^3 + \left(\frac{3\tau_0}{2\tau_1} + \frac{\xi_1 \tau_1}{2\xi_3 \tau_0}\right) \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_3} \Gamma + \frac{-\xi_3 \tau_0^3 + \xi_1 \tau_0 \tau_1^2}{2\xi_3 \tau_1^3}}}\quad (4.17)$$

ifadesi elde edilir. (4.17) denklemi integre edildiğinde, $A = \sqrt{(\zeta_0 / \xi_3)}$ olmak üzere

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{2A}{\sqrt{\Gamma - \alpha_1}},\quad (4.18)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}} \arctan \sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}}, \quad \alpha_2 > \alpha_1,\quad (4.19)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{A}{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}} \ln \left| \frac{\sqrt{\Gamma - \alpha_2} - \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{\sqrt{\Gamma - \alpha_2} + \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2,\quad (4.20)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = 2\sqrt{\frac{\zeta_0 / \xi_3}{\alpha_2 - \alpha_1}} F(\varphi, l), \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3,\quad (4.21)$$

ifadelerine ulaşılır. Burada,

$$F(\varphi, l) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 \psi}},\quad (4.22)$$

ifadesi, modül olarak bilinen l parametresiyle birlikte birinci tür Legendre eliptik integralini göstermektedir. Ayrıca,

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha_2 - \alpha_2}{\Gamma - \alpha_1}}, \quad l^2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2}. \quad (4.23)$$

Bununla birlikte, α_1, α_2 ve α_3 ,

$$\Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_3} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_3} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_3} = 0 \quad (4.24)$$

polinomial denkleminin kökleridir.

(4.18)-(4.21) çözümleri (4.4) ve (3.55) denklemlerinde yerine konulduğunda, iki boyutlu Bratu denkleminin çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u(x, t) = \ln \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \frac{4\tau_1(\zeta_0 / \xi_3)}{\left(kx \pm \sqrt{\frac{2\lambda s \zeta_0 \tau_1}{\xi_3} - k^2 t - \eta_0} \right)^2} \right]^{\frac{1}{s}}. \quad (4.25)$$

(4.25) çözümünde özel olarak $\tau_1 \alpha_1 = -\tau_0$, alınır ise $w = \sqrt{\frac{2\lambda s \zeta_0 \tau_1}{\xi_3} - k^2}$ olmak üzere

$$u(x, t) = \frac{1}{s} \ln \left[\frac{4\tau_1(\zeta_0 / \xi_3)}{(kx \pm wt - \eta_0)^2} \right], \quad (4.26)$$

rasyonel çözümü elde edilir. Tam diskriminasyon sistemine göre iki boyutlu Bratu denkleminin diğer hareketli dalga çözümleri

$$u(x, t) = \ln \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \tau_1 (\alpha_2 - \alpha_1) \operatorname{sech}^2 \left(\pm \frac{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}{2\sqrt{(\zeta_0 / \xi_3)}} \left(kx \pm \sqrt{\frac{2\lambda s \zeta_0 \tau_1}{\xi_3} - k^2 t - \eta_0} \right) \right) \right]^{\frac{1}{s}}, \quad (4.27)$$

$$u(x, t) = \ln \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \tau_1 (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cosech}^2 \left(\frac{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}{2\sqrt{(\zeta_0 / \xi_3)}} \left(kx \pm \sqrt{-\frac{2\lambda s \zeta_0 \tau_1}{\xi_3} - k^2 t - \eta_0} \right) \right) \right]^{\frac{1}{s}}, \quad (4.28)$$

$$u(x,t) = \ln \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \tau_1 (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cosec}^2 \left(-\frac{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}{2\sqrt{(\zeta_0 / \xi_3)}} \left(kx \pm \sqrt{-\frac{2\lambda s \zeta_0 \tau_1}{\xi_3} - k^2 t - \eta_0} \right) \right) \right]^{\frac{1}{s}}, \quad (4.29)$$

$$u(x,t) = \ln \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \tau_1 (\alpha_1 - \alpha_2) \sec^2 \left(-\frac{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}{2\sqrt{(\zeta_0 / \xi_3)}} \left(kx \pm \sqrt{-\frac{2\lambda s \zeta_0 \tau_1}{\xi_3} - k^2 t - \eta_0} \right) \right) \right]^{\frac{1}{s}}, \quad (4.30)$$

$$u(x,t) = \ln \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \tau_1 (\alpha_2 - \alpha_1) \left(\operatorname{sn}^2 \left(\pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}{\sqrt{(\zeta_0 / \xi_3)}} \left(kx - \frac{\sqrt{-k^2 \xi_3 - 2\lambda s \zeta_0 \tau_1}}{\sqrt{\xi_3}} t - \eta_0 \right), \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} \right) \right) \right]^{-1} \right]^{\frac{1}{s}} \quad (4.31)$$

biçiminde elde edilmiştir.

Geniştirilmiş trial denklem yöntemi ile bulunan (4.27) çözümü, Bölüm 3.1.3'te modifiye edilmiş trial denklem yöntemi ile elde edilen (3.62) çözümü ile aynı denklik sınıfında yer almaktadır. (4.27) çözümünde özel olarak $\tau_1 \alpha_1 = -\tau_0$, $\frac{\zeta_0}{\xi_3} = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{b_0}{a_3}$ olarak alınır ise modifiye edilmiş trial denklem yöntemi ile elde edilen (3.62) çözümüne ulaşılır.

Bu çözümlerin iki boyutlu Bratu denklemini sağladıkları Mathematica yardımıyla doğrulanmıştır. Literatürde aynı çözümlere rastlanmamış olup, bu çözümler iki boyutlu Bratu denkleminin yeni hareketli dalga çözümleridir.

Durum 2: $\epsilon = 0$, $\delta = 2$ ve $\theta = 4$ olarak seçilirse, bu durumda, $\xi_4 \neq 0$, $\zeta_0 \neq 0$ olmak üzere trial denklem

$$(v')^2 = \frac{(\tau_1 + 2\tau_2)^2 (\xi_4 \Gamma^4 + \xi_3 \Gamma^3 + \xi_2 \Gamma^2 + \xi_1 \Gamma + \xi_0)}{\zeta_0} \quad (4.32)$$

biçimini alır. (4.31) ve diğer türev ifadeleri (4.14) denkleminde yerine konularak bir polinom elde edilir. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned}
& 2as\zeta_0\tau_0^3 + k^2\xi_1\tau_0\tau_1 + w^2\xi_1\tau_0\tau_1 - 2k^2\xi_0\tau_1^2 - 2w^2\xi_0\tau_1^2 + 4k^2\xi_0\tau_0\tau_2 + 4w^2\xi_0\tau_0\tau_2 = 0 \\
& -2k^2\xi_2\tau_0\tau_1 - 2w^2\xi_2\tau_0\tau_1 - 6as\zeta_0\tau_0^2\tau_1 + k^2\xi_1\tau_1^2 + w^2\xi_1\tau_1^2 - 6k^2\xi_1\tau_0\tau_2 + 4k^2\xi_0\tau_1\tau_2 \\
& \quad + 4w^2\xi_0\tau_1\tau_2 = 0 \\
& -3k^2\xi_3\tau_0\tau_1 - 3w^2\xi_3\tau_0\tau_1 - 6as\zeta_0\tau_0\tau_1^2 + 8k^2\xi_2\tau_0\tau_2 - 8w^2\xi_2\tau_0\tau_2 - 6as\zeta_0\tau_0^2\tau_2 \\
& \quad + k^2\xi_1\tau_1\tau_2 + w^2\xi_1\tau_1\tau_2 + 4k^2\xi_0\tau_2^2 + 4w^2\xi_0\tau_2^2 = 0 \\
& -4k^2\xi_4\tau_0\tau_1 - 4w^2\xi_4\tau_0\tau_1 - k^2\xi_3\tau_1^2 - w^2\xi_3\tau_1^2 - 2as\zeta_0\tau_1^3 - 10k^2\xi_3\tau_0\tau_2 - 10w^2\xi_3\tau_0\tau_2 \\
& \quad - 2k^2\xi_2\tau_1\tau_2 - 2w^2\xi_2\tau_1\tau_2 - 12as\zeta_0\tau_0\tau_1\tau_2 + 2k^2\xi_1\tau_2^2 + 2w^2\xi_1\tau_2^2 = 0 \\
& 2k^2\xi_4\tau_1^2 + 2w^2\xi_4\tau_1^2 + 12k^2\xi_4\tau_0\tau_2 + 12w^2\xi_4\tau_0\tau_2 + 5k^2\xi_3\tau_1\tau_2 + 5w^2\xi_3\tau_1\tau_2 + 6as\zeta_0\tau_1^2\tau_2 \\
& \quad + 6as\zeta_0\tau_0\tau_2^2 = 0 \\
& 8k^2\xi_4\tau_1\tau_2 + 8w^2\xi_4\tau_1\tau_2 + 2k^2\xi_3\tau_2^2 + 2w^2\xi_3\tau_2^2 + 6as\zeta_0\tau_1\tau_2^2 = 0 \\
& 4k^2\xi_4\tau_2^2 + 4w^2\xi_4\tau_2^2 + 2as\zeta_0\tau_2^3 = 0
\end{aligned} \tag{4.33}$$

şeklinde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica yardımıyla çözüldüğünde katsayılar

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \frac{\xi_2\tau_0^2}{\tau_1^2 + 2\tau_0\tau_2}, \quad \xi_1 = \frac{2\xi_2\tau_0\tau_1}{\tau_1^2 + 2\tau_0\tau_2}, \\
\xi_3 &= \frac{2\xi_2\tau_1\tau_2}{\tau_1^2 + 2\tau_0\tau_2}, \quad \xi_4 = \frac{\xi_0\tau_2^2}{\tau_1^2 + 2\tau_0\tau_2}, \\
\zeta_0 &= \zeta_0, \quad \tau_0 = \tau_0, \quad \tau_1 = \tau_1, \\
w &= \pm \sqrt{-\frac{\lambda s \zeta_0 (\tau_1^2 + 2\tau_0\tau_2)}{2\xi_2\tau_2} - k^2}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

olarak belirlenir. Bu sonuçlar (4.10) denkleminde yerine konulduğunda, $B = \sqrt{\zeta_0(\tau_1^2 + 2\tau_0\tau_2) / \xi_0\tau_2^2}$ olmak üzere

$$\pm(\eta - \eta_0) = B \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^4 + \frac{2\xi_2\tau_1}{\xi_0\tau_2}\Gamma^3 + \left(\frac{\tau_1^2 + 2\tau_0\tau_2}{\xi_0\tau_2^2}\right)\xi_2\Gamma^2 + \left(\frac{2\xi_2\tau_0\tau_1}{\xi_0\tau_2^2}\right)\Gamma + \frac{\xi_2\tau_0^2}{\xi_0\tau_2^2}}} \tag{4.35}$$

elde edilir. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4 ,

$$\Gamma^4 + \frac{\xi_3}{\xi_3}\Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_4}\Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_4}\Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_4} = 0 \tag{4.36}$$

polinomial denkleminin kökleri olmak üzere, (4.35) denklemi integre edilir ve bu sonuçlar (4.4) ve (3.55) denklemlerinde yerine konulur ise,

$$w = \pm \sqrt{-\lambda s \zeta_0 (\tau_1^2 + 2\tau_0 \tau_2) / 2\xi_2 \tau_2 - k^2},$$

$$B = \sqrt{\zeta_0 (\tau_1^2 + 2\tau_0 \tau_2) / \xi_0 \tau_2^2}, \quad (4.37)$$

$$C = kx - \sqrt{(2k^2 \xi_2 \tau_2 + \lambda s \zeta_0 (\tau_1^2 + 2\tau_0 \tau_2) / 2\xi_2 \tau_2) t}$$

olmak üzere iki boyutlu Bratu denkleminin çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u(x, t) = \ln \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \frac{\tau_1 B}{kx + wt - \eta_0} + \tau_2 \left(\alpha_1 \pm \frac{B}{kx + wt - \eta_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{s}}, \quad (4.38)$$

$$u(x, t) = \ln \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \frac{4B^2 (\alpha_2 - \alpha_1) \tau_1}{4B^2 - [(\alpha_1 - \alpha_2)(kx + wt - \eta_0)]^2} + \tau_2 \left(\alpha_1 + \frac{4B^2 (\alpha_2 - \alpha_1)}{4B^2 - [(\alpha_1 - \alpha_2)(kx + wt - \eta_0)]^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{s}}, \quad (4.39)$$

$$u(x, t) = \ln \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \tau_1}{\exp \left[\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{B} \right) (kx + wt - \eta_0) \right] - 1} + \tau_2 \left(\alpha_1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{\exp \left[\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{B} \right) (kx + wt - \eta_0) \right] - 1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{s}}, \quad (4.40)$$

$$u(x, t) = \ln \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \tau_1}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\left(\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} / B \right) (C) \right]} + \tau_2 \left(\alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\left(\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} / B \right) (C) \right]} \right)^2 \right]^{\frac{1}{s}}. \quad (4.41)$$

4.1.2 Genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denkleminin uygulaması

Bölüm 3.1.4'te modifiye edilmiş trial denklem yöntemi uygulanan genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denkleminin şimdi de genişletilmiş trial denklem yöntemi uygulanacaktır.

a, b, k sabitler ve l, m, n tamsayılar olmak üzere genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemi (Benjamin et al., 1972; Triki and İsmail, 2010; Li and Zhao, 2012)

$$(u^l)_t + a(u^l)_x + k(u^m)_x - b(u^n)_{xxt} = 0 \quad (4.42)$$

biçiminde verilmiştir. $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = B(x - \omega t)$ dalga dönüşümü kullanılarak BBM (m,n) denklemi

$$(a - \omega)u^l + ku^m + b\omega B^2(u^n)'' = 0 \quad (4.43)$$

biçimini alır. Bölüm 3.4 ile benzer şekilde denklemde $l = n$, $m \neq n$ iken, lineer olmayan u^m terimiyle $(u^n)''$ teriminin dengelenmesi ve $u = \frac{1}{v^{m-n}}$ dönüşümünün kullanılması sonucunda (4.43) denklemi

$$(a - \omega)(m - n)^2 v^2 + k(m - n)^2 v^3 + \omega b B^2 [n(2n - m)(v')^2 + n(m - n)vv''] = 0 \quad (4.44)$$

biçiminde bir adi diferansiyel denkleme indirgenir.

(4.6) ve (4.7) türev ifadeleri (4.44) adi diferansiyel denkleminde yerine yazılır ve denge prosedürü uygulanırsa

$$\theta = \epsilon + \delta + 2 \quad (4.45)$$

bağıntısı elde edilir.

Durum 1: $\epsilon = 0$, $\delta = 1$ ve $\theta = 3$ seçilirse, bu durumda $\xi_3 \neq 0$ ve $\zeta_0 \neq 0$ olmak üzere trial denklem

$$(v')^2 = \frac{(\tau_1)^2(\xi_3\Gamma^3 + \xi_2\Gamma^2 + \xi_1\Gamma + \xi_0)}{\zeta_0} \quad (4.46)$$

biçimini alır. (4.65) ve diğer türev ifadeleri (4.44) adi diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & -2m^2a\zeta_0\tau_0^2 + 4mna\zeta_0\tau_0^2 - 2n^2a\zeta_0\tau_0^2 + 2m^2wa\zeta_0\tau_0^2 \\ & - 4mnw\zeta_0\tau_0^2 + 2n^2w\zeta_0\tau_0^2 - 2km^2\zeta_0\tau_0^3 + 4kmn\zeta_0\tau_0^3 - 2kn^2\zeta_0\tau_0^3 \\ & - bB^2mnw\xi_1\tau_0\tau_1 + bB^2n^2w\xi_1\tau_0\tau_1 + 2bB^2mnw\xi_0\tau_1^2 - 4bB^2n^2w\xi_0\tau_1^2 = 0 \\ & - 4m^2a\zeta_0\tau_0\tau_1 + 8mna\zeta_0\tau_0\tau_1 - 4n^2a\zeta_0\tau_0\tau_1 + 4m^2wa\zeta_0\tau_0\tau_1 - 8mnw\zeta_0\tau_0\tau_1 \\ & + 4n^2w\zeta_0\tau_0\tau_1 - 2bB^2mnw\xi_2\tau_0\tau_1 + 2bB^2n^2w\xi_2\tau_0\tau_1 - 6km^2\zeta_0\tau_0^2\tau_1 + \\ & 12kmn\zeta_0\tau_0^2\tau_1 - 6kn^2\zeta_0\tau_0^2\tau_1 + bB^2mnw\xi_1\tau_1^2 - 3bB^2n^2w\xi_1\tau_1^2 = 0 \\ & - 3bB^2mnw\xi_3\tau_0\tau_1 + 3bB^2n^2w\xi_3\tau_0\tau_1 - 2m^2a\zeta_0\tau_1^2 + 4mna\zeta_0\tau_1^2 \\ & - 2n^2a\zeta_0\tau_1^2 + 2m^2w\zeta_0\tau_1^2 - 4mnw\zeta_0\tau_1^2 + 2n^2w\zeta_0\tau_1^2 - 2bB^2n^2w\xi_2\tau_1^2 \\ & - 6km^2\zeta_0\tau_0\tau_1^2 + 12kmn\zeta_0\tau_0\tau_1^2 - 6kn^2\zeta_0\tau_0\tau_1^2 = 0 \\ & - bB^2mnw\xi_3\tau_1^2 - bB^2n^2w\xi_3\tau_1^2 - 2km^2\zeta_0\tau_1^3 + 4kmn\zeta_0\tau_1^3 - 2kn^2\zeta_0\tau_1^3 = 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

şeklinde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden katsayılar,

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{\tau_0^2(bB^2n\xi_3a(m+n) + 2kn\tau_0) + 2k(m-n)^2\zeta_0\tau_1}{2bB^2kn^2\tau_1^3} \\ \xi_1 &= \frac{\tau_0(bB^2n\xi_3a(m+n) + 3kn\tau_0) + 2k(m-n)^2\zeta_0\tau_1}{bB^2kn^2\tau_1^2} \\ \xi_2 &= \frac{2k\tau_1\zeta_0(m-n)^2 + bB^2n\xi_3(a(m+n) + 6kn\tau_0)}{2bB^2kn^2\tau_1} \\ \xi_3 &= \xi_3, \quad \zeta_0 = \zeta_0, \quad \tau_0 = \tau_0, \quad \tau_1 = \tau_1, \\ w &= -\frac{2k(m-n)^2\zeta_0\tau_1}{bB^2n\xi_3(m+n)} \end{aligned} \quad (4.48)$$

olarak belirlenir. (4.48) katsayıları (4.46) denkleminde yerine yazılır ve denklem

integral formda yeniden düzenlenirse $A = \sqrt{\frac{\zeta_0}{\xi_3}}$ olmak üzere

$$\pm(\eta - \eta_0) = A \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_3} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_3} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_3}}} \quad (4.49)$$

ifadesi elde edilir. (4.49) denklemini integre edildiğinde,

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{A}{\sqrt{\Gamma - \alpha_1}}, \quad (4.50)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}} \arctan \sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}}, \quad \alpha_2 > \alpha_1, \quad (4.51)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{A}{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}} \ln \left| \frac{\sqrt{\Gamma - \alpha_2} - \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{\sqrt{\Gamma - \alpha_2} + \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \quad (4.52)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}} F(\varphi, l), \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 \quad (4.53)$$

ifadelerine ulaşılır. Burada,

$$F(\varphi, l) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 \psi}}, \quad \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha_2 - \alpha_2}{\Gamma - \alpha_1}}, \quad l^2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (4.54)$$

göstermektedir. Ayrıca α_1, α_2 ve α_3 ;

$$\Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_3} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_3} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_3} = 0 \quad (4.55)$$

polinomial denkleminin kökleridir. Dalga dönüşümü ve (3.72) dönüşümü dikkate alındığında genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denkleminin çözümleri

$$u(x, t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \frac{4\tau_1 A^2}{(B(x + \frac{2k(m-n)^2 \zeta_0 \tau_1}{bB^2 n \xi_3 (m+n)} t) - \eta_0)^2} \right]^{\frac{1}{m-n}}, \quad (4.56)$$

$$u(x,t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \tau_1 (\alpha_2 - \alpha_1) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}{2A} \left(B \left(x + \frac{2k(m-n)^2 \zeta_0 \tau_1}{bB^2 n \xi_3 (m+n)} t \right) - \eta_0 \right) \right) \right]^{\frac{1}{m-n}}, \quad (4.57)$$

$$u(x,t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \tau_1 (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cosech}^2 \left(\frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{2A} \left(B \left(x + \frac{2k(m-n)^2 \zeta_0 \tau_1}{bB^2 n \xi_3 (m+n)} t \right) \right) \right) \right]^{\frac{1}{m-n}}, \quad (4.58)$$

$$u(x,t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \frac{\tau_1 (\alpha_2 - \alpha_1)}{\operatorname{sn}^2 \left(\frac{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}{2A} \left(B \left(x + \frac{2k(m-n)^2 \zeta_0 \tau_1}{bB^2 n \xi_3 (m+n)} t - \eta_0 \right) \right), \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m-n}} \quad (4.59)$$

olarak elde edilir.

(4.57) ve (4.58) çözümleri genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denkleminin Bölüm 3.1.4'te elde edilen çözümleri ile aynı denklik sınıfında yer almaktadır.

Bu çözümlerde $\tau_1 \alpha_1 = -\tau_0$ ve $\eta_0 = 0$ olarak alınsın. Bu durumda $A_1 = \frac{2A\sqrt{\tau_1}}{B}$ ve $w = -\frac{2k(m-n)^2 \zeta_0 \tau_1}{bB^2 n \xi_3 (m+n)}$ olmak üzere (4.56) çözümü

$$u(x,t) = \left(\frac{A_1}{x - wt} \right)^{\frac{2}{m-n}} \quad (4.60)$$

biçiminde rasyonel fonksiyon çözümü olarak yazılabilir.

(4.57) çözümü ise $B_2 = \frac{B\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{2A}$ ve $B_1 = (\tau_1 (\alpha_2 - \alpha_1))^{\frac{1}{m-n}}$ olmak üzere

$$u(x,t) = \frac{B_1}{\cosh^{\frac{2}{m-n}} (B_2 (x - wt))} \quad (4.61)$$

yapısında soliton çözüm olarak ifade edilebilir.

(4.58) çözümü ise $C_1 = (\tau_1(\alpha_1 - \alpha_2))^{\frac{1}{m-n}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = \frac{C_1}{\sinh^{\frac{2}{m-n}}(B_2(x - wt))} \quad (4.62)$$

biçiminde tekil (singular) soliton çözüm olarak yazılabilir.

(4.59) çözümü ise $\varphi = \frac{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}{A} B(x - wt)$ ve $l^2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2}$ olmak üzere

$$u(x, t) = \frac{B_1}{sn^{\frac{2}{m-n}}(\varphi, l)} \quad (4.63)$$

şeklinde eliptik fonksiyon çözümü olarak yazılabilir. Bu çözümlerde B_1 ve C_1 solitonların genliğini ve w solitonların hızını göstermektedir.

Durum 2: $\epsilon = 0$, $\delta = 2$ ve $\theta = 4$ olarak seçilirse, bu durumda, $\xi_4 \neq 0$, $\zeta_0 \neq 0$ olmak üzere trial denklem

$$(v')^2 = \frac{(\tau_1 + 2\tau_2)^2(\xi_4\Gamma^4 + \xi_3\Gamma^3 + \xi_2\Gamma^2 + \xi_1\Gamma + \xi_0)}{\zeta_0} \quad (4.64)$$

biçimini alır. (4.64) ve diğer türev ifadeleri (4.44) denkleminde yerine konularak bir polinom elde edilir. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlendiğinde elde edilen cebirsel denklem sistemi Mathematica yardımıyla çözüldüğünde katsayılar

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2\xi_0\tau_1}{\tau_0}, & \xi_2 &= \frac{\xi_0(\tau_1^2 + 2\tau_0\tau)}{\tau_0^2} \\ \xi_3 &= \frac{2\xi_0\tau_1\tau_2}{\tau_0^2}, & \xi_4 &= \frac{\xi_0\tau_2^2}{\tau_0^2}, \\ \zeta_0 &= \frac{bB^2n\xi_0(kn\tau_1^2 - 2(a(m+n) + 2kn\tau_0)\tau_2)}{k(m-n)^2\tau_0^2} \\ w &= \frac{-kn\tau_1^2 + 2(a(m+n) + 2kn\tau_0)\tau_2}{2(m+n)\tau_2} \end{aligned} \quad (4.65)$$

olarak belirlenir. Bu katsayılar (4.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\pm(\eta - \eta_0) = A \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^4 + \frac{2\tau_1}{\tau_2} \Gamma^3 + \left(\frac{\tau_1^2 + 2\tau_0\tau_2}{\tau_2^2}\right) \Gamma^2 + \left(\frac{2\tau_0\tau_1}{\tau_2^2}\right) \Gamma + \left(\frac{\tau_0}{\tau_2}\right)^2}} \quad (4.66)$$

integrali elde edilir. Burada,

$$A = \sqrt{\frac{bB^2 n \tau_2^2 (k n \tau_1^2 - 2(a(m+n) + 2k n \tau_0) \tau_2)}{k(m-n)^2}}. \quad (4.67)$$

(4.66) denklemi integrale edildiğinde

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{A}{\sqrt{\Gamma - \alpha_1}}, \quad (4.68)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\alpha_1 - \alpha_2} \sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_2}{\Gamma - \alpha_1}}, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \quad (4.69)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{A}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \left| \frac{\sqrt{\Gamma - \alpha_1}}{\sqrt{\Gamma - \alpha_2}} \right|, \quad (4.70)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} - \sqrt{(\Gamma - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}}{\sqrt{(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} + \sqrt{(\Gamma - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}} \right|, \quad (4.71)$$

($\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$),

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3)}} F(\varphi, l), \quad (\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4) \quad (4.72)$$

ifadeleri elde edilir. Burada,

$$A = \sqrt{\frac{bB^2 n \tau_2^2 (k n \tau_1^2 - 2(a(m+n) + 2k n \tau_0) \tau_2)}{k(m-n)^2}}, \quad (4.73)$$

$$F(\varphi, l) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 \psi}},$$

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\Gamma - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_4)}}, \quad l^2 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_4)}. \quad (4.74)$$

Bununla birlikte, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4 ;

$$\Gamma^4 + \frac{\xi_3}{\xi_3} \Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_4} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_4} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_4} = 0 \quad (4.75)$$

polinomial denkleminin kökleridir.

Buna göre, genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denkleminin çözümleri, $w = \frac{-kn\tau_1^2 + 2(a(m+n) + 2kn\tau_0)\tau_2}{2(m+n)\tau_2}$ olmak üzere

$$u(x, t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \frac{\tau_1 A}{B(x - wt) - \eta_0} + \tau_2 \left(\alpha_1 \pm \frac{A}{B(x - wt) - \eta_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{m-n}}, \quad (4.76)$$

$$u(x, t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \frac{4A^2(\alpha_2 - \alpha_1)\tau_1}{4A^2 - [(\alpha_1 - \alpha_2)(B(x - wt) - \eta_0)]^2} + \right. \\ \left. + \tau_2 \left(\alpha_1 + \frac{4A^2(\alpha_2 - \alpha_1)\tau_1}{4A^2 - [(\alpha_1 - \alpha_2)(B(x - wt) - \eta_0)]^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{m-n}}, \quad (4.77)$$

$$u(x, t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\tau_1}{\exp\left[\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{A}\right)(B(x - wt) - \eta_0)\right] - 1} \right. \\ \left. + \tau_2 \left(\alpha_1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\tau_1}{\exp\left[\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{A}\right)(B(x - wt) - \eta_0)\right] - 1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{m-n}}, \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned}
u(x,t) = & \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\tau_1}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}}{A} (B(x - wt) - \eta_0) \right]} \right] \\
& + \tau_2 \left(\alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\tau_1}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}}{A} (B(x - wt) - \eta_0) \right]} \right)^2 \right]^{\frac{1}{m-n}}
\end{aligned}
\tag{4.79}$$

olarak elde edilir.

Genişletilmiş trial denklem yöntemi kullanıldığında, modifiye edilmiş trial denklem yöntemi ile aynı denklik sınıfında çözümler elde edildiği gibi, buna ek olarak daha fazla çözüme ulaşıldığı gözlenmiştir.

5. KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HAREKETLİ DALGA ÇÖZÜMLERİ

Kesirli (fractional) diferansiyel denklemler, klasik tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlerin genelleştirilmiş halidir. Lineer olmayan pek çok fiziksel olayın modellenmesinde, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlere göre gerçeğe daha yakın sonuçlar vermesi son yıllarda bu denklemlere olan ilgiyi arttırmıştır. Tamsayı olmayan mertebeden türevlerin fizik ve mühendislikteki yararlarının keşfi, kesirli analizin gelişimini hızlandırmıştır.

Kesirli türevler, adi diferansiyel ve integral operatörlerle iyi tanımlanamayan kompleks kuantum alanı dinamik sistemleri gibi bazı olguları ifade etmek için etkin bir araçtır (Baleanu et al., 2012). Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, hem teorisindeki gelişim hem de çeşitli bilimlerdeki uygulamaları nedeniyle daha çok ilgi görmeye başlamıştır. Fizik, mühendislik, elektrokimya, ekonomi, ısı iletimi, kontrol teorisi, akustik, sinyal işleme, sistem tanımlama, kozmoloji, eletromanyetik teori, matematiksel biyoloji, klasik mekanik, kuantum mekaniği, akışkanlar mekaniği, varyasyonel analiz, optimal kontrol ve plazma fiziği gibi pek çok alanda uygulaması olan kesirli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek büyük önem taşımaktadır.

Kesirli analizin tarihi Leibniz tarafından $\alpha = 1/2$. mertebeden türevin tanımlanmasıyla birlikte 17. yüzyıla kadar dayanmaktadır. Daha sonra, kesirli operatörlerin pek çok farklı formu tanıtılmıştır. Bunlar arasında Grunwald–Letnikov, Riemann–Liouville, Hadamard, Chen, Riesz ve Caputo kesirli türevleri (Podlubny, 1999; Kilbas et al., 2006) sayılabilir.

Literatürde yaygın olarak kullanılan türev tanımlarından biri olan Riemann–Liouville türevi, başlangıç koşullarının da kesirli mertebeden tanımını gerektirmektedir ve bu tanıma göre sabitin türevi sıfıra eşit değildir. Caputo tanımında ise başlangıç koşullarının tamsayı mertebeden tanımı mümkündür ve sabitin türevi sıfıra eşittir. Bununla birlikte, fonksiyon diferansiyellenebilir olmadığında Caputo tanımı uygulanamaz.

Jumarie (2006), diferansiyellenebilir olmayan fonksiyonlar de için kesirli türevleri kullanmanın ve geliştirmenin önemli olduğu düşüncesiyle bu fonksiyonlar için kesirli mertebeden Taylor serisinin yeni bir ifadesini türetmiştir.

Kesirli fark kullanılarak kesirli türev tanımı verildiğinde Rieman-Liouville türevinin aksine sabitin türevi sıfır olmaktadır. Bu düşünceyle başlangıç değerinin etkisinin olmadığı modifiye edilmiş Rieman-Liouville kesirli türevi (Jumarie, 2006) önerilmiştir. Modifiye edilmiş Riemann-Liouville türev tanımı, sürekli olan fakat diferansiyellenebilir olmayan fonksiyonlar için de uygulanabilmektedir. Bu çalışmada lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin tam çözümleri araştırılırken Jumarie'nin modifiye edilmiş Riemann-Liouville türev tanımı kullanılmıştır.

Bu bölümde, kesirli diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için modifiye edilmiş trial denklem yöntemi uygulanmıştır. Bu nedenle, öncelikle Jumarie'nin modifiye edilmiş Rieman-Liouville türev tanımı ve bu türevin bazı özellikleri verilmiştir. Kesirli diferansiyel denklemler, modifiye edilmiş Riemann-Liouville tanımı kullanılarak adi diferansiyel denkleme indirgenmiştir. Modifiye edilmiş trial denklem yöntemi, kesirli türevli Klein-Gordon, kesirli CRWP, kesirli Cahn-Allen, uzay-zaman kesirli KdV, uzay-zaman kesirli foam drainage (köpük drenaj) denklemlerine ve zaman kesirli Hirota-Satsuma coupled KdV sistemine de uygulanmış ve hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir. Çözümler sınıflandırılmış ve çözüm yapıları grafikler yardımıyla gösterilmiştir.

5.1 Kesirli Türevler

Literatürde kesirli türevlerle ilgili verilen ilk tanımlardan biri Riemann-Liouville tanımıdır. $n-1 \leq \alpha < n$ ve Γ , Euler'in gama fonksiyonunu temsil etmek üzere Riemann-Liouville sol türev tanımı

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-\xi)^{n-\alpha-1} f(\xi) d\xi \quad (5.1)$$

biçiminde verilebilir. Riemann-Liouville kesirli türev tanımında $f(x) = C$ alındığında, fonksiyonun α . türevi $Cx^\alpha / \Gamma(1-\alpha)$, yani sıfırdan farklı olacaktır. Bu dezavantajı ortadan kaldırmak için, (Caputo, 1967) çalışmasında

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha} f'(\xi) d\xi, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (5.2)$$

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\xi) d\xi, \quad n < \alpha < n+1 \quad (5.3)$$

tanımları önerilmiştir. Ancak bu tanım, $f(x)$ diferansiyellenebilir olmadığında uygulanamaz. Ayrıca fonksiyonun ilk türevini almak için ikinci türeve ihtiyaç vardır. Sonlu farklar yardımıyla yapılacak bir tanım bu durumu çözmeye yardımcı olabilir (Jumarie, 2006). Modifiye edilmiş Riemann-Liouville türevi bu gerekçeler ile geliştirilmiştir.

5.2 Modifiye Edilmiş Riemann-Liouville Türevi

Modifiye edilmiş Riemann-Liouville türevi Jumarie (2006, 2007, 2009) tarafından geliştirilmiştir.

$f : [0,1] \rightarrow \mathfrak{R}$ ve $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere modifiye edilmiş Riemann-Liouville türevi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Jumarie, 2006):

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (5.4)$$

olmak üzere, $\alpha < 0$ için

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha-1} [f(\xi) - f(0)] d\xi \quad (5.5)$$

biçimindedir. Pozitif α değerleri için tanım,

$$\begin{aligned} f^{(\alpha)}(x) &= \left(f^{(\alpha-1)}(x) \right)' \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha} [f(\xi) - f(0)] d\xi, \quad 0 < \alpha < 1, \end{aligned} \quad (5.6)$$

ve

$$f^{(\alpha)}(x) = \left(f^{(n)}(x) \right)^{(\alpha-n)}, \quad n \leq \alpha < n+1, \quad n \geq 1 \quad (5.7)$$

şeklindedir.

Modifiye edilmiş Riemann-Liouville türevi için, sabitin α . mertebeden türevi sıfıra eşittir, yani

$$D_x^\alpha k = 0. \quad (5.8)$$

Ayrıca,

$$D_x^\alpha x^\mu = \begin{cases} 0, & \mu \leq \alpha - 1 \\ \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha}, & \mu > \alpha - 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

$$D_x^\alpha [f(u(x))] = f'_u(u) D_x^\alpha u(x) = D_x^\alpha f(u) (u'_x)^\alpha. \quad (5.10)$$

özellikleri de verilebilir.

$0 < \alpha < 1$ olması durumunda $f^{(\alpha)}(x)$ ifadesinin Laplace dönüşümü

$$L\{f^{(\alpha)}(x)\} = s^\alpha L\{f(x)\} - s^{\alpha-1} f(0) \quad (5.11)$$

biçiminde olacaktır (Jumarie, 2009).

5.3 Kesirli Diferansiyel Denklemler için Modifiye Edilmiş Trial Denklemler Yöntemi

Lineer olmayan kesirli türevli diferansiyel denklemler için modifiye edilmiş trial denklem yönteminin temel adımları aşağıdaki şekilde özetlenebilir (Liu, 2006b; Bulut et al., 2013):

Adım 1. Zaman kesirli kısmi diferansiyel denklem

$$P(u, D_t^\alpha u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0 \quad (5.12)$$

biçiminde ele alınsın. $\lambda \neq 0$ olmak üzere

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.13)$$

dalga dönüşümü altında (5.12) denklemi

$$N(t, x, u, u', u'', \dots) = 0 \quad (5.14)$$

adi diferansiyel denkleme indirgenir.

Adım 2. $F(u)$ ve $G(u)$ polinomlar olmak üzere trial denklem

$$u' = \frac{F(u)}{G(u)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i u^i}{\sum_{j=0}^l b_j u^j} = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n}{b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \dots + b_l u^l}. \quad (5.15)$$

biçiminde seçilsin. Bu durumda,

$$u'' = \frac{F(u)[F'(u)G(u) - F(u)G'(u)]}{G^3(u)} \quad (5.16)$$

şeklinde olacaktır. (5.15) ve (5.16) denklemlerinin (5.14) denkleminde yerine konulmasıyla u 'nın $\Omega(u)$ polinomu

$$\Omega(u) = p_s u^s + \dots + p_1 u + p_0 = 0 \quad (5.17)$$

elde edilir. Denge prensibine göre n ve l arasında bir bağıntı elde edilebilir ve bazı değerleri hesaplanabilir.

Adım 3. $\Omega(u)$ polinomunun tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek

$$p_i = 0, \quad i = 0, \dots, s \quad (5.18)$$

biçiminde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde $a_0, \dots, a_n$ ve $b_0, \dots, b_l$ değerleri belirlenebilir.

Adım 4. (5.15) denklemini

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{G(u)}{F(u)} du \quad (5.19)$$

integral formunda yeniden yazılabilir. Böylece, polinomlar için tam diskriminasyon sistemi kullanılarak (5.19) ifadesi integre edildiğinde (5.12) denkleminin tam çözümüne ulaşılır.

5.4 Modifiye Edilmiş Trial Denklem Yönteminin Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları

Bu kısımda, kesirli diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümleri modifiye edilmiş trial denklem yöntemi ve trial denklem yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Yöntem kesirli Klein-Gordon, kesirli CRWP, kesirli Cahn-Allen, uzay-zaman kesirli KdV ve uzay-zaman kesirli foam drainage (köpük drenaj) denklemlerine uygulanmış ve bazı denklemler için yeni hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca trial denklem yöntemi zaman kesirli Hirota–Satsuma coupled KdV sistemine de uygulanmış ve sistemin tam çözümü bulunmuştur. Elde edilen çözümler sınıflandırılmış ve çözüm yapıları grafikler yardımıyla gösterilmiştir.

5.4.1 Lineer olmayan kesirli Klein-Gordon denklemine uygulaması

Klein-Gordon denklemi katı hal fiziği, lineer olmayan optik, kuantum alan kuramı ve yoğun madde fiziğindeki uygulamaları nedeniyle matematiksel fizikte önemli bir yere sahiptir. Bu denklem, solitonlar ve yoğun madde fiziği çalışmalarında, çarpışmasız plazmada solitonların etkileşimleri araştırılırken ve çeşitli dalga denklemleri incelenirken dikkat çekmiştir (Yusufoğlu, 2008). Bununla birlikte, Klein-Gordon denklemi klasik mekanikteki ve kuantum mekaniğindeki pek çok problem için model oluşturur. Örneğin, lineer olmayan sinüs Klein-Gordon denklemi gerilmiş bir tele takılı sert sarkacın hareketini, Josephson eklemi modeller (Golmankhaneh et al., 2011).

Lineer olmayan kesirli Klein-Gordon denklemi (Lu, 2012a; Taghizadeh et al., 2013)

$$\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \theta_1 u(x,t) + \theta_2 u^3(x,t), \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (5.20)$$

ele alınsın.

$$u(x,y,t) = u(\xi), \quad \xi = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.21)$$

dalga dönüşümü altında (5.20) denklemi

$$(\lambda^2 - k^2)u'' - \theta_1 u - \theta_2 u^3 = 0 \quad (5.22)$$

biçiminde bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. Burada $u' = du/d\xi$. (5.15) ve (5.16) denklemleri denge prensibi için yeniden düzenlendiğinde

$$u' = \frac{a_n}{b_l} u^{n-l} + \dots, \quad (5.23)$$

$$u'' = \frac{(a_n n a_n b_l - l b_l a_n^2)}{b_l^3} u^{2n-2l-1} + \dots \quad (5.24)$$

ifadeleri elde edilir. (5.22) denkleminde en yüksek mertebeden türev u'' ile lineer olmayan u^3 terimleri dengelendiğinde $n = l + 2$ olarak belirlenir.

Modifiye edilmiş trial denklem yönteminin çözüm adımları uygulanarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Durum 1. $l = 0$ ve $n = 2$ olarak seçilirse, $a_2 \neq 0$ ve $b_0 \neq 0$ olmak üzere

$$u' = \frac{F(u)}{G(u)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i u^i}{\sum_{j=0}^l b_j u^j} = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2}{b_0} \quad (5.25)$$

trial denklemi ele alınır. Bu durumda

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{F(u)[F'(u)G(u) - F(u)G'(u)]}{G^3(u)} \\ &= \frac{(a_1 + 2a_2 u)(a_0 + a_1 u + a_2 u^2)}{b_0^2} \end{aligned} \quad (5.26)$$

olacaktır. (5.26) ve (5.25) denklemleri (5.22) denkleminde yerine konulduğunda elde edilen polinomun katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned} k^2 a_0 a_1 - \lambda^2 a_0 a_1 &= 0 \\ k^2 a_1^2 - \lambda^2 a_1^2 + 2k^2 a_0 a_2 - 2\lambda^2 a_0 a_2 + b_0^2 \theta_1 &= 0 \\ 3k^2 a_1 a_2 - 3\lambda^2 a_1 a_2 &= 0 \\ 2k^2 a_2^2 - 2\lambda^2 a_2^2 + b_0^2 \theta_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.27)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Bu cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde katsayılar

$$a_0 = \frac{a_2 \theta_1}{\theta_2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = a_2, \quad b_0 = b_0, \quad \lambda = \sqrt{k^2 + \frac{b_0^2 \theta_2}{2a_2^2}} \quad (5.28)$$

olarak elde edilir. Bu sonuçlar

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{b_0}{a_2 u^2 + a_1 u + a_0} du \quad (5.29)$$

denkleminde yerine konulur ve ifade integre edildiler ise aşağıdaki durumlar ortaya çıkar:

Durum 1.1 $\frac{\theta_1}{\lambda^2 - k^2} > 0$ ise, bu durumda (5.20) denkleminin tam çözümleri

$$u_{1,2}(x, t) = \pm \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \tan \left[\sqrt{\frac{\theta_1}{2(\lambda^2 - k^2)}} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right], \quad (5.30)$$

$$u_{3,4}(x, t) = \pm \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \cot \left[\sqrt{\frac{\theta_1}{2(\lambda^2 - k^2)}} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right] \quad (5.31)$$

olarak elde edilir. Burada $\xi_0 = 0$ olarak alınırsa bu çözümler

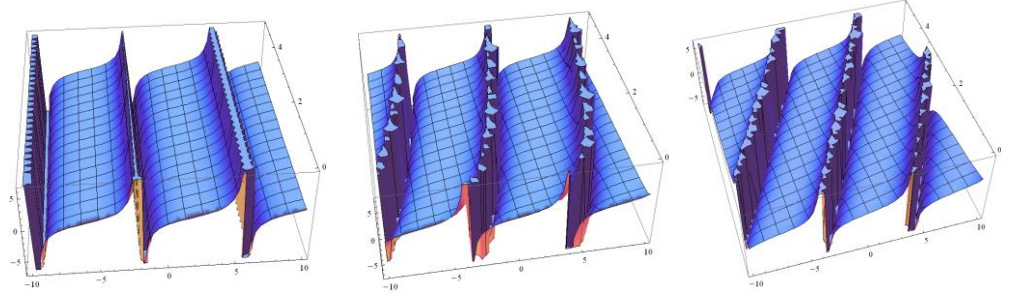
$$u(x, t) = A \tan \left[\pm B \left(kx - \lambda_2 t^\alpha \right) \right]. \quad (5.32)$$

$$u(x, t) = A \cot \left[\pm B \left(kx - \lambda_2 t^\alpha \right) \right]. \quad (5.33)$$

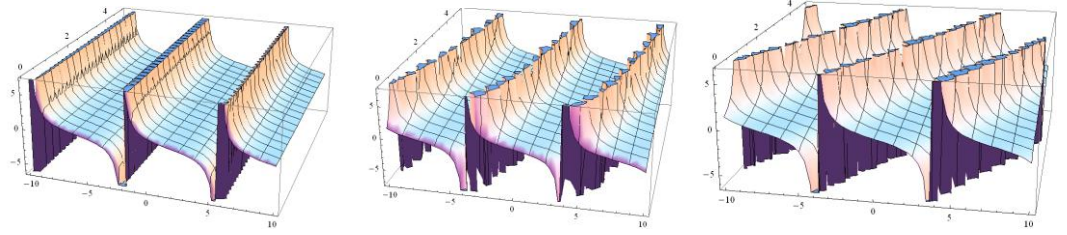
periyodik çözümlerine indirgenebilir. Burada,

$$A = \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_2}}, \quad B = \sqrt{\frac{\theta_1}{2(\lambda^2 - k^2)}}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.34)$$

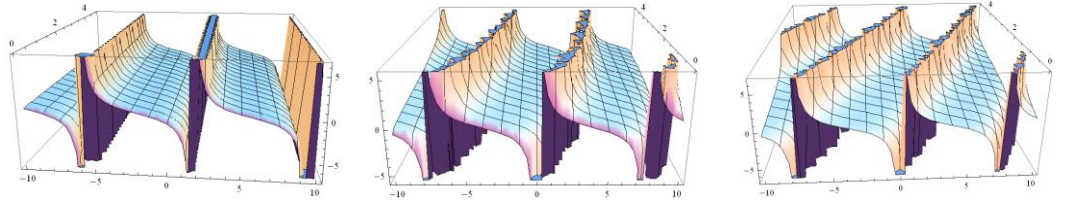
değerlerini göstermektedir.



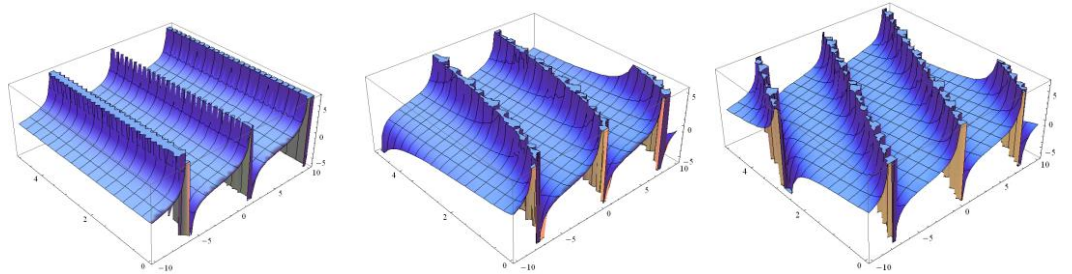
Şekil 5.1 (5.30) $u_1(x, t)$ çözümünün $\theta_1 = \theta_2 = k = 1$, $\lambda = 2$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.01, 0.50$ ve 0.95 değerleri için grafikleri



Şekil 5.2 (5.30) $u_2(x, t)$ çözümünün $\theta_1 = \theta_2 = k = 1$, $\lambda = 2$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.01, 0.50$ ve 0.95 değerleri için grafikleri



Şekil 5.3 (5.31) $u_3(x, t)$ çözümünün $\theta_1 = \theta_2 = k = 1$, $\lambda = 2$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.01, 0.50$ ve 0.95 değerleri için grafikleri



Şekil 5.4 (5.31) $u_4(x, t)$ çözümünün $\theta_1 = \theta_2 = k = 1$, $\lambda = 2$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.01, 0.50$ ve 0.95 değerleri için grafikleri

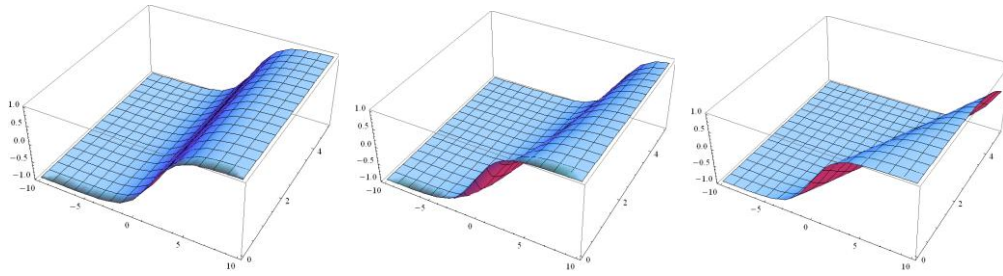
Durum 1.2 $\frac{\theta_1}{\lambda^2 - k^2} < 0$ ise, bu durumda (5.20) denkleminin tam çözümleri

$$u_{1,2}(x, t) = \pm \sqrt{-\frac{\theta_1}{\theta_2}} \tanh \left[\sqrt{\frac{\theta_1}{2(k^2 - \lambda^2)}} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right], \quad (5.35)$$

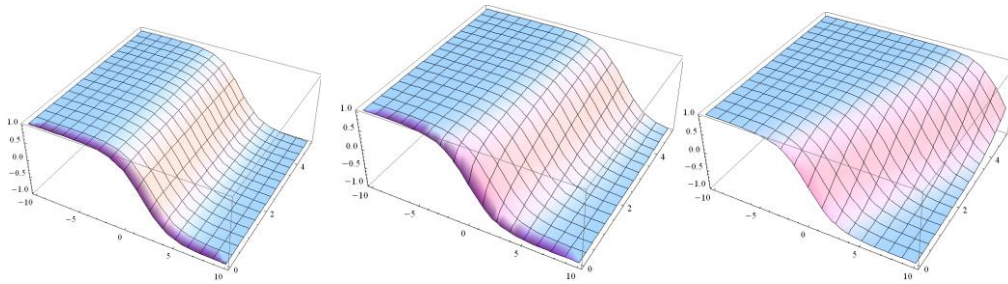
$$u_{3,4}(x, t) = \pm \sqrt{-\frac{\theta_1}{\theta_2}} \coth \left[\sqrt{\frac{\theta_1}{2(k^2 - \lambda^2)}} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right] \quad (5.36)$$

biçiminde elde edilir.

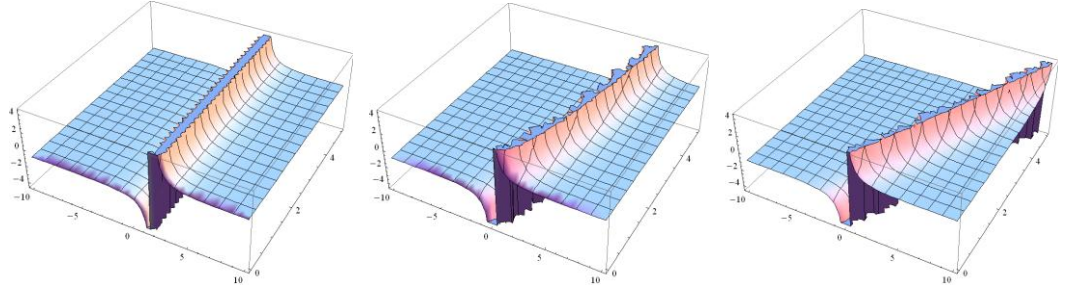
Bu çözümlerin (Lu, 2012a; Taghizadeh et al., 2013) çalışmalarındaki çözümler ile aynı denklik sınıfında oldukları görülmektedir.



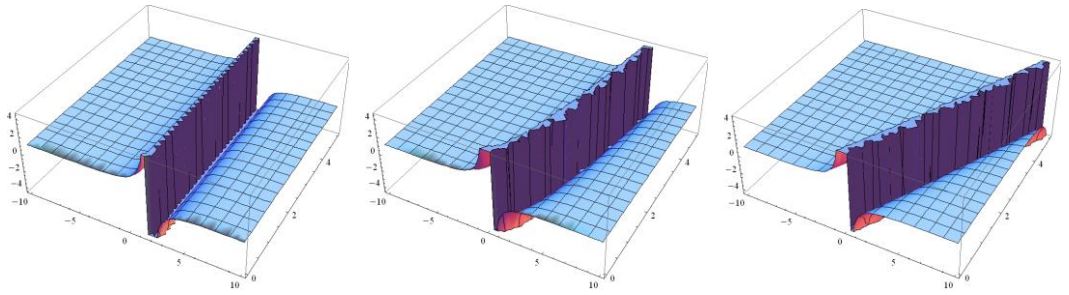
Şekil 5.5 (5.35) $u_1(x, t)$ çözümünün $\theta_1 = -1$, $k = \theta_2 = 1$, $\lambda = 2$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.01, 0.50$ ve 0.95 değerleri için grafikleri



Şekil 5.6 (5.35) $u_2(x, t)$ çözümünün $\theta_1 = -1$, $k = \theta_2 = 1$, $\lambda = 2$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.01, 0.50$ ve 0.95 değerleri için grafikleri



Şekil 5.7 (5.36) $u_3(x,t)$ çözümünün $\theta_1 = -1$, $k = \theta_2 = 1$, $\lambda = 2$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.01$, 0.50 ve 0.95 değerleri için grafikleri



Şekil 5.8 (5.36) $u_4(x,t)$ çözümünün $\theta_1 = -1$, $k = \theta_2 = 1$, $\lambda = 2$, $\xi_0 = 0$, $-10 < x < 10$, $0 < t < 5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.01$, 0.50 ve 0.95 değerleri için grafikleri

Durum 2. $l = 1$ ve $n = 3$ olarak seçilirse trial denklem

$$u' = \frac{F(u)}{G(u)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i u^i}{\sum_{j=0}^l b_j u^j} = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3}{b_0 + b_1 u} \quad (5.37)$$

biçimini alır. Bu durumda $a_3 \neq 0$ ve $b_1 \neq 0$ olmak üzere

$$u'' = \frac{(a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3)((b_0 + b_1 u)(a_1 + 2a_2 u + 3a_3 u^2) - b_1(a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3))}{(b_0 + b_1 u)^3} \quad (5.38)$$

ifadesi elde edilir. (5.37) ve (5.38) denklemleri (5.22) adi diferansiyel denkleminde yerine konulduğunda elde edilen polinomun katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned}
& -k^2 a_0 a_1 b_0 + \lambda^2 a_0 a_1 b_0 + k^2 a_0^2 b_1 - \lambda^2 a_0^2 b_1 = 0 \\
& -k^2 a_1^2 b_0 + \lambda^2 a_1^2 b_0 - 2k^2 a_0 a_2 b_0 + 2\lambda^2 a_0 a_2 b_0 + k^2 a_0 a_1 b_1 - \lambda^2 a_0 a_1 b_1 - b_0^3 \theta_1 = 0 \\
& -3k^2 a_1 a_2 b_0 + 3\lambda^2 a_1 a_2 b_0 - 3k^2 a_0 a_3 b_0 + 3\lambda^2 a_0 a_3 b_0 - 3b_0^2 b_1 \theta_1 = 0 \\
& -2k^2 a_2^2 b_0 + 2\lambda^2 a_2^2 b_0 - 4k^2 a_1 a_3 b_0 + 4\lambda^2 a_1 a_3 b_0 - k^2 a_1 a_2 b_1 + \lambda^2 a_1 a_2 b_1 - \\
& \quad -k^2 a_0 a_3 b_1 + \lambda^2 a_0 a_3 b_1 - 3b_0 b_1^2 - b_0^3 \theta_2 = 0 \quad (5.39) \\
& -5k^2 a_2 a_3 b_0 + 5\lambda^2 a_2 a_3 b_0 - k^2 a_2^2 b_1 + \lambda^2 a_2^2 b_1 - 2k^2 a_1 a_3 b_1 + \\
& \quad + 2\lambda^2 a_1 a_3 b_1 - b_1^3 \theta_1 - 3b_0^2 b_1 \theta_2 = 0 \\
& -3k^2 a_3^2 b_0 + 3\lambda^2 a_3^2 b_0 - 3k^2 a_2 a_3 b_1 + 3\lambda^2 a_2 a_3 b_1 - 3b_0 b_1^2 \theta_2 = 0 \\
& -2k^2 a_3^2 b_1 + 2\lambda^2 a_3^2 b_1 - b_1^3 \theta_2 = 0
\end{aligned}$$

biçiminde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden katsayılar aşağıdaki şekilde belirlenir:

Durum 2.1 Katsayılar

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_0, \quad a_1 = a_1, \quad a_2 = \frac{a_0 \theta_2}{\theta_1}, \quad a_3 = \frac{a_1 \theta_2}{\theta_1}, \\
b_0 &= b_0, \quad b_1 = b_1, \quad \lambda = \sqrt{\frac{b_1^2 \theta_1^2 + 2k^2 a_1^2 \theta_2}{2a_1^2 \theta_2}} \quad (5.40)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu katsayılar için kesirli Klein-Gordon denkleminin kapalı çözümü elde edilmiştir.

Durum 2.2 Katsayılar

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0, \quad a_1 = \frac{a_3 \theta_1}{\theta_2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = a_3, \\
b_0 &= 0, \quad b_1 = b_1, \quad \lambda = \sqrt{k^2 + \frac{b_1^2 \theta_2}{2a_3^2}} \quad (5.41)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu katsayılar

$$\pm(\xi - \xi_0) = \frac{b_1}{a_3} \int \frac{u + b_0 / b_1}{u^3 + (a_2 / a_3)u^2 + (a_1 / a_3)u + (a_0 / a_3)} du \quad (5.42)$$

denkleminde yerine konulur ve ifade tam diskriminasyon sistemine göre integre edilirse,

$$u(\xi) = \sqrt{\frac{-a_1}{a_3}} \tanh \left[-\sqrt{\frac{a_1 a_3}{b_1^2}} (\xi - \xi_0) \right], \quad (5.43)$$

$$u(\xi) = \sqrt{\frac{-a_1}{a_3}} \coth \left[-\sqrt{\frac{a_1 a_3}{b_1^2}} (\xi - \xi_0) \right], \quad (5.44)$$

$$u(\xi) = \sqrt{\frac{a_1}{a_3}} \tan \left[\sqrt{\frac{a_1 a_3}{b_1^2}} (\xi - \xi_0) \right], \quad (5.45)$$

$$u(\xi) = \sqrt{\frac{a_1}{a_3}} \cot \left[\sqrt{\frac{a_1 a_3}{b_1^2}} (\xi - \xi_0) \right] \quad (5.46)$$

elde edilir. Bu ifadeler (5.41) katsayılarına göre düzenlendiğinde

$$\sqrt{\frac{a_1}{a_3}} = \sqrt{\frac{a_3 \theta_1}{\theta_2 a_3}} = \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_2}}, \quad (5.47)$$

$$\sqrt{\frac{a_1 a_3}{b_1^2}} = \sqrt{\frac{a_3^2 \theta_1}{b_1^2 \theta_2}} = \sqrt{\frac{b_1^2 \theta_2}{2 b_1^2 (\lambda^2 - k^2)} \cdot \frac{\theta_1}{\theta_2}} = \sqrt{\frac{\theta_1}{2 (\lambda^2 - k^2)}} \quad (5.48)$$

ifadeleri dikkate alınırsa kesirli türevli Klein-Gordon denkleminin hareketli dalga çözümleri $\frac{\theta_1}{(\lambda^2 - k^2)} < 0$ olması durumunda

$$u(x, t) = \pm \sqrt{-\frac{\theta_1}{\theta_2}} \tanh \left[\sqrt{\frac{-\theta_1}{2(\lambda^2 - k^2)}} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} - \xi_0 \right) \right], \quad (5.49)$$

$$u(x, t) = \pm \sqrt{-\frac{\theta_1}{\theta_2}} \coth \left[\sqrt{\frac{-\theta_1}{2(\lambda^2 - k^2)}} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} - \xi_0 \right) \right] \quad (5.50)$$

biçiminde ve $\frac{\theta_1}{(\lambda^2 - k^2)} > 0$ olması durumunda ise

$$u(x, t) = \pm \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \tan \left[\sqrt{\frac{\theta_1}{2(\lambda^2 - k^2)}} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right], \quad (5.51)$$

$$u(x, t) = \pm \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \cot \left[\sqrt{\frac{\theta_1}{2(\lambda^2 - k^2)}} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right] \quad (5.52)$$

şeklinde elde edilir.

Bu çözümler, hiperbolik şok dalga yapısında ve periyodik dalga yapısında çözümlerdir ve Durum 1’de bulunan çözümlerle aynı denklik sınıfında yer alırlar.

5.4.2 Lineer olmayan kesirli CRWP denkleminin uygulaması

Lineer olmayan kesirli CRWP (Clannish Random Walker Parabolic) denklemi (Bulut and Kılıç, 2013) ele alınsın:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad \alpha > 0. \quad (5.53)$$

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.54)$$

dalga dönüşümü altında (5.53) denklemi $u' = du / d\xi$ olmak üzere

$$-cu' - u' + 2uu' + u'' = 0 \quad (5.55)$$

adi diferansiyel denkleminin indirgenir. (5.15) denkleminin (5.55) denkleminde yerine konulur ve denge prensibi uygulanırsa $n = l + 2$ olarak belirlenir.

Durum 1. $l = 0$ ve $n = 2$ olarak seçilirse, $a_2 \neq 0$ ve $b_0 \neq 0$ olmak üzere

$$u' = \frac{F(u)}{G(u)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i u^i}{\sum_{j=0}^l b_j u^j} = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2}{b_0} \quad (5.56)$$

ve

$$u'' = \frac{(a_1 + 2a_2u)(a_0 + a_1u + a_2u^2)}{b_0^2} \quad (5.57)$$

olacaktır. (5.55) ve (5.56) denklemleri (5.54) denkleminde yerine konularak elde edilen polinomun katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned} -a_0a_1 + a_0b_0 + ca_0b_0 &= 0 \\ -a_1^2 - 2a_0a_2 - 2a_0b_0 + a_1b_0 + ca_1b_0 &= 0 \\ -3a_1a_2 - 2a_1b_0 + a_2b_0 + ca_2b_0 &= 0 \\ -2a_2^2 - 2a_2b_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.58)$$

şeklindeki cebirsel denklem sistemi elde edilir. (5.58) sisteminin çözümünden katsayılar

$$a_0 = 0, \quad a_1 = a_1, \quad a_2 = a_2, \quad b_0 = -a_2, \quad c = -1 - \frac{a_1}{a_2} \quad (5.59)$$

olarak belirlenir. Bu katsayılar

$$\pm(\xi - \xi_0) = \frac{b_0}{a_2} \int \frac{du}{u^2 + (a_1/a_2)u} \quad (5.60)$$

denkleminde yerine konulur ve denklem tam diskriminasyon sistemine göre integre edilirse

$$\pm(\xi - \xi_0) = -\frac{A}{u - \alpha_1}, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad (5.61)$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = -\frac{A}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \left| \frac{u - \alpha_1}{u - \alpha_2} \right|, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2 \quad (5.62)$$

ifadeleri elde edilir. Burada $A = \pm(b_0/a_2)$ ve α_1, α_2

$$u^2 + \frac{a_1}{a_2}u = 0. \quad (5.63)$$

polinomial denkleminin kökleridir. Bu durumda,

$$u(\xi) = \alpha_1 - \frac{A}{\xi - \xi_0}, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad (5.64)$$

$$u(\xi) = \alpha_1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\exp\left[\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{A}(\xi - \xi_0)\right]}, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2 \quad (5.65)$$

ifadeleri elde edilir. Böylece, $\alpha_1 = \alpha_2$ olması durumunda (5.53) denkleminin tam çözümü

$$u(x, t) = \frac{1+c}{2} + \frac{1}{\left(x - \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0\right)} \quad (5.66)$$

olarak bulunur. $\alpha_1 = -\frac{a_1}{a_2}$ ve $\alpha_2 = 0$ durumunda ise $-\frac{a_1}{a_2} = 1+c$ olduğu dikkate alınırsa, (5.53) denkleminin tam çözümü

$$u(x, t) = 1+c + \frac{1+c}{\exp\left[(1+c)\left(x - \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0\right)\right] - 1} \quad (5.67)$$

olarak elde edilir. Bu ifadelerde $\xi_0 = 0$ olarak seçilir ise, $\lambda_1 = c / \Gamma(1+\alpha)$ olmak üzere (5.66) ve (5.67) çözümleri sırasıyla rasyonel ve single kink yapısındaki çözümlere indirgenebilir:

$$u(x, t) = \frac{1+c}{2} + \frac{1}{(x - \lambda_1 t^\alpha)}, \quad (5.68)$$

$$u(x, t) = 1+c + \frac{1+c}{\exp\left[(1+c)(x - \lambda_1 t^\alpha)\right] - 1}. \quad (5.69)$$

Durum 2. $l=1$ ve $n=3$ olarak seçilirse trial denklem

$$u' = \frac{F(u)}{G(u)} = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3}{b_0 + b_1 u} \quad (5.70)$$

biçimini alır. (5.70) ve diğer türev terimleri (5.55) diferansiyel denkleminde yerine konulduğunda elde edilen polinomun katsayıları sıfırlandığında

$$\begin{aligned}
& a_0 a_1 b_0 + a_0 b_0^2 - c a_0 b_0^2 - a_0^2 b_1 = 0 \\
& a_1^2 b_0 + 2 a_0 a_2 b_0 + 2 a_0 b_0^2 - a_1 b_0^2 - c a_1 b_0^2 - a_0 a_1 b_1 - 2 a_0 b_0 b_1 - 2 c a_0 b_0 b_1 = 0 \\
& 3 a_1 a_2 b_0 + 3 a_0 a_3 b_0 + 2 a_1 b_0^2 - a_2 b_0^2 - c a_2 b_0^2 + 4 a_0 a_1 b_1 - 2 a_1 b_0 b_1 - \\
& \quad - 2 c a_1 b_0 b_1 - a_0 b_1^2 - c a_0 b_1^2 = 0 \\
& 2 a_2^2 b_0 + 4 a_1 a_3 b_0 + 2 a_2 b_0^2 - a_3 b_0^2 - c a_3 b_0^2 + a_1 a_2 b_1 + a_0 a_3 b_1 + 4 a_1 b_0 b_1 - \\
& \quad - 2 a_2 b_0 b_1 - 2 c a_2 b_0 b_1 + 2 a_0 b_1^2 - a_1 b_1^2 - c a_1 b_1^2 = 0 \\
& 5 a_2 a_3 b_0 + 2 a_3 b_0^2 + a_2^2 b_1 + 2 a_1 a_3 b_1 + 4 a_2 b_0 b_1 - 2 a_3 b_0 b_1 - \\
& \quad - 2 c a_3 b_0 b_1 + 2 a_1 b_1^2 - a_2 b_1^2 - c a_2 b_1^2 = 0 \\
& 3 a_3^2 b_0 + 3 a_2 a_3 b_1 + 4 a_3 b_0 b_1 + 2 a_2 b_1^2 - a_3 b_1^2 - c a_3 b_1^2 = 0 \\
& 2 a_3^2 b_1 + 2 a_3 b_1^2 = 0
\end{aligned} \tag{5.71}$$

biçiminde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden katsayılar aşağıdaki şekilde belirlenir:

Durum 2.1 Katsayılar

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{b_0(-a_2 b_0 - b_0^2 + a_1 b_1)}{b_1^2}, \quad a_1 = a_1, \quad a_2 = a_2, \\
a_3 &= -b_1, \quad b_0 = b_0, \quad b_1 = b_1, \quad c = -1 + \frac{a_2 + b_0}{b_1}
\end{aligned} \tag{5.72}$$

olarak hesaplanır. Bu katsayılar

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{b_0 + b_1 u}{a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0} du \tag{5.73}$$

denkleminde yerine konularak denklem integre edildiğinde denklemin kapalı çözümü elde edilmiştir.

Durum 2.2

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0, \quad a_1 = a_1, \quad a_2 = a_2, \quad a_3 = b_1 \\
b_0 &= 0, \quad b_1 = b_1, \quad c = -1 - \frac{a_2}{b_1}.
\end{aligned} \tag{5.74}$$

Bu katsayılar (5.73) denkleminde yerine konulduğunda

$$\begin{aligned}
\pm(\xi - \xi_0) &= \int \frac{b_1 u}{b_1 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u} du \\
&= \int \frac{1}{u^2 + \frac{a_2}{b_1} u + \frac{a_1}{b_1}} du
\end{aligned} \tag{5.75}$$

integrali elde edilir. Tam diskriminasyon sistemi dikkate alınarak ifade integrale edildiğinde

$$u(\xi) = -\frac{a_2}{2b_1} + \frac{\sqrt{a_2^2 - 4a_1b_1}}{2b_1} \tanh \left[\frac{\sqrt{a_2^2 - 4a_1b_1}}{2b_1} (\xi - \xi_0) \right], \tag{5.76}$$

$$u(\xi) = -\frac{a_2}{2b_1} + \frac{\sqrt{a_2^2 - 4a_1b_1}}{2b_1} \coth \left[\frac{\sqrt{a_2^2 - 4a_1b_1}}{2b_1} (\xi - \xi_0) \right] \tag{5.77}$$

olarak belirlenir. $c = -1 - \frac{a_2}{b_1}$ olduğu dikkate alınarak gerekli düzenlemeler

yapıldığında, $c_1 = \frac{4a_1}{b_1}$ olmak üzere (5.53) denkleminin

$$u(x, t) = \frac{1+c}{2} + \frac{\sqrt{(1+c)^2 - c_1}}{2} \tanh \left[\frac{\sqrt{(1+c)^2 - c_1}}{2} \left(x - \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right], \tag{5.78}$$

$$u(x, t) = \frac{1+c}{2} + \frac{\sqrt{(1+c)^2 - c_1}}{2} \coth \left[\frac{\sqrt{(1+c)^2 - c_1}}{2} \left(x - \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right] \tag{5.79}$$

şeklindeki yeni hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir.

Bu çözümlerin kesirli CRWP denklemini sağladıkları Mathematica ile kontrol edilmiştir. Literatürde kesirli CRWP denkleminin aynı çözümleri yer almamaktadır.

5.4.3 Lineer olmayan kesirli Cahn-Allen denklemine uygulaması

α zaman kesirli türevin mertebesini göstermek üzere lineer olmayan kesirli türevli Cahn-Allen denklemi (Esen at al., 2013; Bekir et al., 2014)

$$D_t^\alpha u - u_{xx} + u^3 - u = 0, \quad 0 < t, 0 < \alpha \leq 1 \quad (5.80)$$

ele elınsın.

Cahn-Allen denklemi, kuantum mekaniği, plazma fiziği ve matematiksel biyoloji gibi alanlarda uygulamalara sahiptir. Bu denklem ergimiş alaşımlar gibi ikili karışımların, izotermal ve izotropik faz ayrımlarının incelenmesinde model teşkil eder.

k ve λ keyfi sabitler olmak üzere

$$u(x, y, t) = u(\xi), \quad \xi = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.81)$$

dönüşümü kullanıldığında, $u' = du / d\xi$ olmak üzere (5.80) denklemi

$$-\lambda u' - k^2 u'' + u^3 - u = 0 \quad (5.82)$$

adi diferansiyel denklemine dönüşür. (5.82) denkleminde en yüksek mertebeden lineer olmayan u'' ve u^3 terimleri dengelendiğinde $n = l + 2$ olarak belirlenir.

Lineer olmayan kesirli türevli Cahn-Allen denklemini çözmek için modifiye edilmiş trial denklem yönteminin çözümleri uygulanarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Durum 1. $l = 0$ ve $n = 2$ olarak seçilirse, $a_2 \neq 0$ ve $b_0 \neq 0$ olmak üzere trial denklem

$$u' = \frac{F(u)}{G(u)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i u^i}{\sum_{j=0}^l b_j u^j} = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2}{b_0} \quad (5.83)$$

biçimini alır. Bu durumda

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{F(u)[F'(u)G(u) - F(u)G'(u)]}{G^3(u)} \\ &= \frac{(a_1 + 2a_2 u)(a_0 + a_1 u + a_2 u^2)}{b_0^2} \end{aligned} \quad (5.84)$$

olacaktır. (5.83) ve (5.84) denklemleri (5.82) denkleminde yerine konulduğunda elde edilen polinomun katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned}
 k^2 a_0 a_1 + \lambda a_0 b_0 &= 0 \\
 k^2 a_1^2 + 2k^2 a_0 a_2 + \lambda a_1 b_0 + b_0^2 &= 0 \\
 3k^2 a_1 a_2 + \lambda a_2 b_0 &= 0 \\
 2k^2 a_2^2 - b_0^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.85}$$

biçiminde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde katsayılar aşağıdaki şekilde belirlenir:

Durum 1.1 Katsayılar

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -a_2, \quad a_2 = a_2, \quad b_0 = \sqrt{2}ka_2, \quad \lambda = \frac{3k}{\sqrt{2}} \tag{5.86}$$

olarak hesaplanır. Bu sonuçlar,

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{\frac{a_2}{b_0}u^2 + \frac{a_1}{b_0}u + \frac{a_0}{b_0}} du \tag{5.87}$$

denkleminde yerine konulur ve bu ifade integre edilirse,

$$u(\xi) = -\frac{a_1}{2a_2} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \tanh \left[\frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2b_0} (\xi - \xi_0) \right] \tag{5.88}$$

$$u(\xi) = -\frac{a_1}{2a_2} - \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \coth \left[\frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2b_0} (\xi - \xi_0) \right] \tag{5.89}$$

elde edilir. Dalga dönüşümü ve (5.86) katsayıları dikkate alınırsa, (5.80) denkleminin hareketli dalga çözümleri

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \tanh \left[\mp \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{3t^\alpha}{\sqrt{2}\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right] \tag{5.90}$$

ve

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \coth \left[\mp \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{3t^\alpha}{\sqrt{2}\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right] \quad (5.91)$$

biçiminde elde edilir.

Durum 1.2

$$a_0 = 0, \quad a_1 = a_2, \quad a_2 = a_2, \quad b_0 = \sqrt{2}ka_2, \quad \lambda = -\frac{3k}{\sqrt{2}}. \quad (5.92)$$

(5.92) katsayılarına göre (5.83) denklemi integre edildiğinde (5.80) denkleminin tam çözümleri

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \tanh \left[\pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x + \frac{3t^\alpha}{\sqrt{2}\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right], \quad (5.93)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \coth \left[\pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x + \frac{3t^\alpha}{\sqrt{2}\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right] \quad (5.94)$$

biçiminde elde edilir.

Durum 2. $l = 1$ ve $n = 3$ olarak seçilirse trial denklem

$$u' = \frac{F(u)}{G(u)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i u^i}{\sum_{j=0}^l b_j u^j} = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3}{b_0 + b_1 u} \quad (5.95)$$

biçimini alır. Bu durumda $a_3 \neq 0$ ve $b_1 \neq 0$ olmak üzere

$$u'' = \frac{(a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3) \left((b_0 + b_1 u)(a_1 + 2a_2 u + 3a_3 u^2) - b_1(a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3) \right)}{(b_0 + b_1 u)^3} \quad (5.96)$$

ifadesi elde edilir. (5.95) ve (5.96) denklemleri (5.82) adi diferansiyel denkleminde yerine konulduğunda elde edilen polinomun katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned}
k^2 a_0 a_1 b_0 + \lambda a_0 b_0^2 - k^2 a_0^2 b_0 &= 0 \\
k^2 a_1^2 b_0 + 2k^2 a_0 a_2 b_0 + \lambda a_1 b_0^2 + b_0^3 - k^2 a_0 a_1 b_1 + 2\lambda a_0 b_0 b_1 &= 0 \\
3k^2 a_1 a_2 b_0 + 3k^2 a_0 a_3 b_0 + \lambda a_2 b_0^2 + 2\lambda a_1 b_0 b_1 + 3b_0^2 b_1 + \lambda a_0 b_1^2 &= 0 \\
2k^2 a_2 b_0 + 4k^2 a_1 a_3 b_0 + \lambda a_3 b_0^2 - b_0^3 + k^2 a_1 a_2 b_1 + k^2 a_0 a_3 b_1 + \\
&+ 2\lambda a_2 b_0 b_1 + \lambda a_1 b_1^2 + 3b_0 b_1^2 = 0 \\
5k^2 a_2 a_3 b_0 + k^2 a_2^2 b_1 + 2k^2 a_1 a_3 b_1 + 2\lambda a_3 b_0 b_1 - 3b_0^2 b_1 + \lambda a_2 b_1^2 + b_1^3 &= 0 \\
3k^2 a_3^2 b_0 + 3k^2 a_2 a_3 b_1 + \lambda a_3 b_1^2 - 3b_0 b_1^2 &= 0 \\
2k^2 a_3^2 b_1 - b_1^3 &= 0
\end{aligned} \tag{5.97}$$

şeklinde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden katsayılar aşağıdaki şekilde belirlenir:

Durum 2.1

$$\begin{aligned}
a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{b_1}{\sqrt{2k}}, \quad a_3 = \frac{b_1}{\sqrt{2k}}, \\
b_0 = 0, \quad b_1 = b_1, \quad \lambda = \frac{3k}{\sqrt{2}}.
\end{aligned} \tag{5.98}$$

(5.98) katsayıları

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{b_1 u}{a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0} du \tag{5.99}$$

denkleminde yerine konulur ve bu ifade tam diskriminasyon sistemi dikkate alınarak integre edilirse,

$$u(\xi) = \frac{\frac{-b_1}{\sqrt{2k}}}{\exp\left[\frac{a_2}{b_1}(-\xi + \xi_0)\right] - \frac{b_1}{\sqrt{2k}}} \tag{5.100}$$

ifadesi elde edilir. Dalga dönüşümü ve (5.98) katsayıları dikkate alınır, k ve b_1 keyfi sabitler olmak üzere kesirli Cahn-Allen denkleminin tam çözümü

$$u(x,t) = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}k}{b_1} \exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{3t^\alpha}{\sqrt{2}\Gamma(1+\alpha)} + \xi_0\right)\right]} + 1 \quad (5.101)$$

biçiminde elde edilir.

Bu çözüm, Durum 1.1’de elde edilen çözümlerle aynı denklik sınıfında yer almaktadır. (5.101) çözümünde özel olarak $\sqrt{2}k = b_1$ olarak alınır ise, Durum 1.1’de elde edilen (5.91) çözümüne, $\sqrt{2}k = -b_1$ olarak alınır ise de (5.90) çözümüne ulaşılır.

Durum 2.2

$$\begin{aligned} a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{b_1}{\sqrt{2}k}, \quad a_3 = -\frac{b_1}{\sqrt{2}k}, \\ b_0 = 0, \quad b_1 = b_1, \quad \lambda = -\frac{3k}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Bu durumda (5.99) denklemi integre edilir ve (5.102) katsayılarına göre benzer şekilde düzenlenir ise, k ve b_1 keyfi sabitler olmak üzere kesirli Cahn-Allen denkleminin tam çözümü

$$u(x,t) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}k}{b_1} \exp\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{3t^\alpha}{\sqrt{2}\Gamma(1+\alpha)} + \xi_0\right)\right]} - 1 \quad (5.103)$$

olarak elde edilir.

(5.101) ve (5.103) çözümlerinin de kesirli Cahn-Allen denklemini sağladıkları Mathematica yardımıyla doğrulanmıştır.

5.4.4 Uzay-zaman kesirli KdV denklemine uygulaması

$t > 0$ ve $0 < \alpha, \beta \leq 1$ olmak üzere uzay-zaman kesirli KdV denklemi

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + au \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^{3\beta} u}{\partial x^{3\beta}} = 0 \quad (5.104)$$

ele alınsın (Younis et al., 2014).

KdV tipi denklemler sığ su dalgaları (shallow-water waves), lineer olmayan dispersif modellerdeki kısa dalgalar, uzun dalgalar üreten sistemlerdeki akustik dalgalar, kuantum alan teorisi, katı hal fiziği ve plazma fiziği gibi birçok alanda uygulamalara sahiptir.

μ ve λ sabitler olmak üzere

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = \frac{\mu x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.105)$$

dalga dönüşümü altında uzay-zaman kesirli KdV denklemi

$$\frac{\lambda}{2} u^2 + \frac{a\mu}{6} u^3 + \frac{\mu^3}{2} (u')^2 + c_1 u + c_0 = 0 \quad (5.106)$$

adi diferansiyel denkleme indirgenir.

(5.106) denkleminde $(u')^2$ ile u^3 terimlerinin dengelenmesi ile $n-m=3$ olarak bulunur. $n=3$ ve $m=0$ seçilmesi durumunda trial denklem

$$(u')^2 = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3}{b_0} \quad (5.107)$$

olarak alınabilir. (5.107) ifadesi (5.106) adi diferansiyel denkleminde yerine konulduğunda u 'nun bir polinomu elde edilir. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlendiğinde elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülür ise katsayılar

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -\frac{2b_0 c_1}{\mu^3}, \quad a_2 = a_2, \quad a_3 = -\frac{bb_0}{3\mu^2}, \quad \lambda = -\frac{\mu^3 a_2}{b_0} \quad (5.108)$$

şeklinde hesaplanır. Trial denklem yönteminin çözüm adımları uygulanır ve (5.107) ifadesi tam diskriminasyon sistemi dikkate alınarak integre edilir ise

$$u(\xi) = \frac{a_2}{2a_3} \tanh^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_2}{2b_0}} (\xi - \xi_0) \right], \quad (5.109)$$

$$u(\xi) = \frac{a_2}{2a_3} \coth^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_2}{2b_0}} (\xi - \xi_0) \right] \quad (5.110)$$

denklemleri elde edilir. (5.108) katsayıları dikkate alındığında uzay-zaman kesirli KdV denkleminin hareketli dalga çözümleri $\frac{\lambda}{\mu} < 0$ olması durumunda

$$u_1(x, t) = \frac{3\lambda}{2a\mu} \tanh^2 \left[\left(\frac{1}{2\mu} \sqrt{-\frac{\lambda}{2\mu}} \right) \left(\frac{\mu x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right], \quad (5.111)$$

$$u_1(x, t) = \frac{3\lambda}{2a\mu} \coth^2 \left[\left(\frac{1}{2\mu} \sqrt{-\frac{\lambda}{2\mu}} \right) \left(\frac{\mu x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right] \quad (5.112)$$

biçiminde elde edilir. $\frac{\lambda}{\mu} > 0$ olması durumunda ise çözümler

$$u_3(x, t) = -\frac{3\lambda}{2a\mu} \tan^2 \left[\left(\frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{\lambda}{2\mu}} \right) \left(\frac{\mu x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right], \quad (5.113)$$

$$u_4(x, t) = -\frac{3\lambda}{2a\mu} \cot^2 \left[\left(\frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{\lambda}{2\mu}} \right) \left(\frac{\mu x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right] \quad (5.114)$$

şeklinde periyodik çözüm olarak ifade edilir.

5.4.5 Uzay-zaman kesirli foam drainage denklemine uygulaması

Uzay-zaman kesirli foam drainage (köpük drenaj) denklemi $0 < \alpha, \beta \leq 1$ ve u , x ve t 'nin bir fonksiyonu olmak üzere

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{1}{2} u \frac{\partial^{2\beta} u}{\partial x^{2\beta}} - 2u^2 \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} - \left(\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} \right)^2 = 0 \quad (5.115)$$

biçiminde verilmektedir (Cox et al., 2002; Lu, 2012b).

Bu denklem, kanallardaki yerçekimine bağlı hareket eden sıvı akışını modeller.

μ ve λ sabitler olmak üzere

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = \frac{\mu x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.116)$$

dalga dönüşümü kullanıldığında uzay-zaman kesirli foam drainage denklemi

$$-\lambda u' + \frac{1}{2} \mu^2 u u'' + 2\mu u^2 u' + \mu^2 (u')^2 = 0 \quad (5.117)$$

biçiminde bir adi diferansiyel denkleme indirgenir. Bu adi diferansiyel denklemde $u^2 u'$ ile $(u')^2$ terimlerinin dengelenmesi ile, $n-m=2$ olarak belirlenir. Bu durumda trial denklem

$$u' = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2}{b_0} \quad (5.118)$$

olarak seçilebilir. (5.118) ve diğer türev terimleri (5.117) denkleminde yerine konulur ise, u 'nın bir polinomu elde edilir. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlendiğinde ise

$$\begin{aligned} 2\mu^2 a_0^2 - 2\lambda a_0 b_0 &= 0 \\ 5\mu^2 a_0 a_1 - 2\lambda a_1 b_0 &= 0 \\ 3\mu^2 a_1^2 + 6\mu^2 a_0 a_2 + 4\mu a_0 b_0 - 2\lambda a_2 b_0 &= 0 \\ 7\mu^2 a_1 a_2 + 4\mu a_1 b_0 &= 0 \\ 4\mu^2 a_2^2 + 4\mu a_2 b_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.119)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden katsayılar

$$a_0 = a_0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{\mu a_0}{\lambda}, \quad b_0 = \frac{\mu^2 a_0}{\lambda} \quad (5.120)$$

olarak belirlenir. Bu katsayılar (5.118) denkleminde yerine konulur ve ifade tam diskriminasyon sistemi dikate alınarak integre edilir ise,

$$u(\xi) = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \tanh \left[\frac{1}{b_0} \sqrt{a_0 a_2} (\xi - \xi_0) \right], \quad (5.121)$$

$$u(\xi) = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \coth \left[\frac{1}{b_0} \sqrt{a_0 a_2} (\xi - \xi_0) \right], \quad (5.122)$$

$$u(\xi) = -\sqrt{-\frac{a_0}{a_2}} \tanh \left[\frac{1}{b_0} \sqrt{-a_0 a_2} (\xi - \xi_0) \right], \quad (5.123)$$

$$u(\xi) = \sqrt{-\frac{a_0}{a_2}} \cot \left[\frac{1}{b_0} \sqrt{-a_0 a_2} (\xi - \xi_0) \right] \quad (5.124)$$

olarak bulunur. (5.120) katsayıları ve (5.116) dönüşümü göz önüne alınarak ifade yeniden düzenlenirse, uzay-zaman kesirli foam drainage denkleminin hareketli dalga çözümleri, ξ_0 keyfi sabit olmak üzere, $\frac{\lambda}{\mu} < 0$ olması durumunda,

$$u_1(x, t) = \sqrt{\frac{-\lambda}{\mu}} \tanh \left[\frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{-\lambda}{\mu}} \left(\frac{\mu x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right], \quad (5.125)$$

$$u_2(x, t) = \sqrt{\frac{-\lambda}{\mu}} \coth \left[\frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{-\lambda}{\mu}} \left(\frac{\mu x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right] \quad (5.126)$$

biçiminde şok dalga yapısında elde edilir.

$\frac{\lambda}{\mu} > 0$ olması durumunda ise, uzay-zaman kesirli foam drainage denkleminin

$$u_3(x, t) = -\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \tanh \left[\frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \left(\frac{\mu x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right], \quad (5.127)$$

$$u_4(x, t) = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \cot \left[\frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \left(\frac{\mu x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right] \quad (5.128)$$

şeklinde periyodik çözüm yapısındaki hareketli dalga çözümleri elde edilir.

Bu çözümlerin uzay-zaman kesirli foam drainage denklemini sağladıkları Mathematica kullanılarak gösterilmiştir. Uzay-zaman kesirli diferansiyel denklemler için trial denklem yöntemi ilk kez uygulanmış ve başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

5.4.6 Zaman kesirli Hirota–Satsuma coupled KdV sistemine uygulaması

Zaman kesirli Hirota–Satsuma coupled KdV sistemi u, v ve w fonksiyonları x ve t 'ye bağlı fonksiyonlar ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u &= \frac{1}{4} u_{xxx} + 3uu_x + 3(-v^2 + w)_x, \\ D_t^\alpha v &= -\frac{1}{2} v_{xxx} - 3uv_x, \\ D_t^\alpha w &= -\frac{1}{2} w_{xxx} - 3uw_x \end{aligned} \quad (5.129)$$

biçimindedir (Lu, 2012a).

Hirota-Satsuma sistemi ilk olarak (Hirota and Satsuma, 1981) çalışmasında farklı dağılımlara sahip olan iki uzun dalğanın etkileşimlerini tanımlamak için önerilmiştir.

$\lambda \neq 0$ sabit olmak üzere

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.130)$$

dalga dönüşümü ile

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} U^2(\xi), \quad v(x, t) = U(\xi) - \lambda, \quad w(x, t) = 2\lambda^2 - 2\lambda U(\xi) \quad (5.131)$$

dönüşümleri kullanıldığında (5.129) zaman kesirli Hirota–Satsuma coupled KdV sistemi

$$\lambda U'' + 2U^3 - 2\lambda^2 U = 0 \quad (5.132)$$

biçiminde bir adi diferansiyel denkleme indirgenir. Bu denklemde en yüksek mertebeden türev ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimler dengelendiğinde $n = 2$ olarak belirlenir.

Bu durumda trial denklem

$$U' = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 \quad (5.133)$$

şeklinde seçilebilir. (5.133) ifadesinin türevi alınarak (5.132) adi diferansiyel denkleminde yerine konulduğunda elde edilen polinomun katsayıları sıfıra eşitlenir ise

$$\begin{aligned} \lambda a_0 a_1 &= 0 \\ 2\lambda^2 - \lambda a_1^2 - 2\lambda a_0 a_2 &= 0 \\ 3\lambda a_1 a_2 &= 0 \\ 2\lambda a_2^2 + 2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.134)$$

cebirsel denklem sistemine ulaşılır. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden katsayılar

$$a_0 = \mp i \lambda^{3/2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \pm \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \quad (5.135)$$

olarak belirlenir. Bu katsayılar (5.133) denkleminde yerine konulur ve ifade integre edilirse $\lambda = -a_0 a_2$ olmak üzere

$$U(\xi) = \lambda \tanh \left[\sqrt{-\lambda} (\xi - \xi_0) \right] \quad (5.136)$$

$$U(\xi) = \lambda \coth \left[\sqrt{-\lambda} (\xi - \xi_0) \right] \quad (5.137)$$

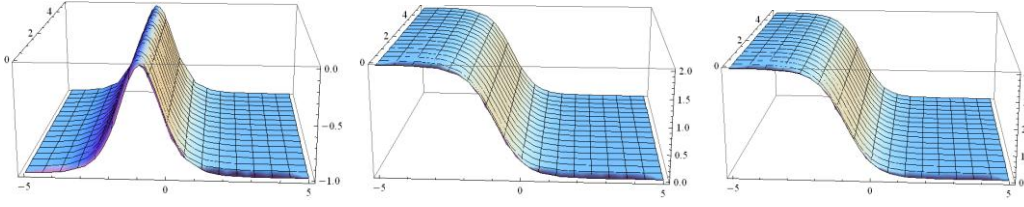
elde edilir. Buna göre, göre dalga dönüşümü ve (5.131) dönüşümleri dikkate alındığında zaman kesirli Hirota–Satsuma coupled KdV sisteminin hareketli dalga çözümleri ξ_0 keyfi sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \lambda \tanh^2 \left[\sqrt{-\lambda} \left(x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right], \\ v_1(x, t) &= \lambda \left(-1 + \tanh \left[\sqrt{-\lambda} \left(x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right] \right), \\ w_1(x, t) &= 2\lambda^2 \left(1 - \tanh \left[\sqrt{-\lambda} \left(x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (5.138)$$

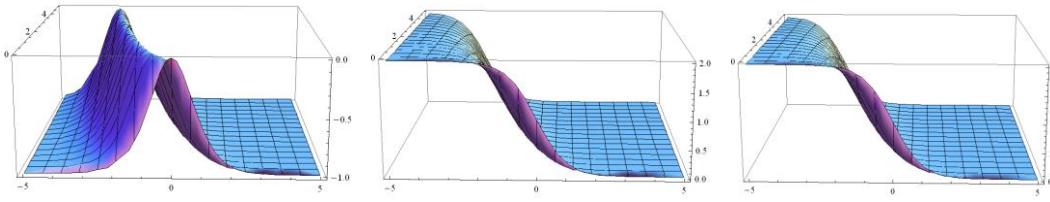
ve

$$\begin{aligned}
u_2(x,t) &= \lambda \coth^2 \left[\sqrt{-\lambda} \left(x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right], \\
v_2(x,t) &= \lambda \left(-1 + \coth \left[\sqrt{-\lambda} \left(x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right] \right), \\
w_2(x,t) &= 2\lambda^2 \left(1 - \coth \left[\sqrt{-\lambda} \left(x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right] \right)
\end{aligned} \tag{5.139}$$

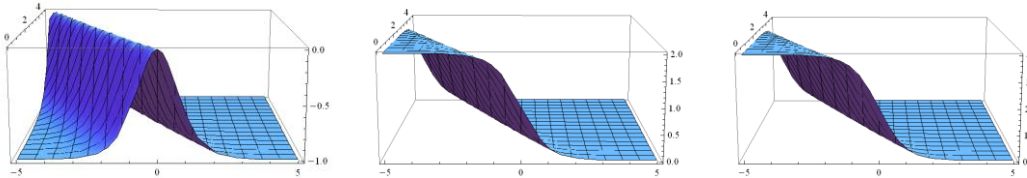
biçiminde elde edilir.



Şekil 5.9 (5.138) u_1 , v_1 ve w_1 çözümlerinin $\lambda = -1$, $\xi_0 = 0$, $\alpha = 0.01$ değerleri için grafikleri



Şekil 5.10 (5.138) u_1 , v_1 ve w_1 çözümlerinin $\lambda = -1$, $\xi_0 = 0$, $\alpha = 0.5$ değerleri için grafikleri



Şekil 5.11 (5.138) u_1 , v_1 ve w_1 çözümlerinin $\lambda = -1$, $\xi_0 = 0$, $\alpha = 0.95$ değerleri için grafikleri

Şekil 5.9, Şekil 5.10 ve Şekil 5.11 zaman kesirli Hirota-Satsuma coupled KdV sisteminin (5.138) çözümünün sırasıyla $\alpha = 0.01, 0.5$ ve 0.95 değerleri için değişen dalga yapısını göstermektedir.

Zaman kesirli Hirota-Satsuma coupled KdV sisteminin u_1 ve u_2 çözümleri parametrelerin değişen değerlerine göre soliton dalga yapısındadır. v_1 ve w_1 çözümleri ise kink dalga yapısındadır. Zaman kesirli sistemler için trial denklem yöntemi ilk kez uygulanmış ve başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

6. SONUÇ

Bu çalışmada, dalga dönüşümü altında adi diferansiyel denkleme indirgenebilen lineer olmayan bazı fiziksel denklemlerin ve sistemlerin hareketli dalga çözümleri (traveling wave solutions) trial denklem yöntemi kullanılarak incelenmiş ve bazı denklemler için yeni çözümler elde edilmiştir.

Trial denklem yöntemi, modifiye edilmiş trial denklem yöntemi ve genişletilmiş trial denklem yöntemi matematiksel fizikte önemli uygulamaları olan Liouville, Tzitzeica-Dodd-Bullough, lineer olmayan telgraf, genelleştirilmiş ısı iletim, Sharma-Tasso-Olver, modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony, iki boyutlu Bratu, genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemleri ve lineer olmayan coupled Klein-Gordon sistemi için incelenmiş ve bu denklemlerin hareketli dalga çözümleri tam diskriminasyon sistemi de dikkate alınarak elde edilmiştir.

Sharma-Tasso-Olver denkleminin tam çözümleri hem trial denklem yöntemi ve hem de modifiye edilmiş trial denklem yöntemi ile elde edilerek yöntemler arasındaki bağlantı gösterilmiştir. Modifiye edilmiş trial denklem yöntemi kullanıldığında daha fazla çözüme ulaşılabildiği Bölüm 3'te belirlenmiştir. Modifiye edilmiş trial denklem yöntemi ve genişletilmiş trial denklem yöntemi iki boyutlu Bratu ve genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemlerine uygulanmış ve böylece yöntemler karşılaştırılmıştır. Genişletilmiş trial denklem yöntemi kullanıldığında modifiye edilmiş trial denklem yöntemi ile aynı denklik sınıfında çözümler elde edildiği gibi, daha fazla çözüme ulaşılabildiği de Bölüm 4'te gösterilmiştir.

Tamsayı mertebeden diferansiyel denklemler için trial denklem yöntemi ile başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Bu nedenle yöntem kesirli (fractional) kısmi diferansiyel denklemler için de incelenmiş ve bazı denklemlere uygulanmıştır. Kesirli Klein-Gordon, kesirli CRWP, kesirli Cahn-Allen, uzay-zaman kesirli KdV, uzay-zaman kesirli foam-drainage denklemlerinin ve Hirota-Satsuma coupled KdV sisteminin hareketli dalga çözümleri de elde edilmiştir. Yöntem, uzay-zaman kesirli denklemler ve zaman kesirli sistem için ilk kez uygulanmıştır.

Trial denklem yöntemi ile hem tamsayı mertebeden hem de kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler için beklentilere uygun olarak soliton, kink soliton, kompakt, periyodik ve rasyonel yapıda hareketli dalga çözümleri

elde edilmiş ve bu çözümlerin fiziksel davranışlarını görebilmek için grafikleri de çizilmiştir. Matematiksel biyoloji, kuantum fiziği, katı hal fiziği, iletişim, lineer olmayan optik, plazma fiziği, akışkanlar mekaniği gibi uygulama alanlarına sahip olan bu fiziksel oluşum denklemlerinin soliter dalga yapısındaki hareketli dalga çözümlerinin elde edilmesi olayların fiziksel davranışlarının daha iyi anlaşılmasına ve yorumlanmasına katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Ablowitz, M.J. and Clarkson, P.A.**, 1991, Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering Transform, Cambridge University Press, Cambridge, 516 p.
- Ablowitz, M.J. and Segur, H.**, 1981, Solitons and the Inverse Scattering Transform, SIAM, Philadelphia, 425 p.
- Ames, W.F.**, 1965, Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Volume I, Academic Press, New York, 511 p.
- Ames, W.F.**, 1972, Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Volume II, Academic Press, New York, 305 p.
- Atangana, A.**, 2015, On the stability and convergence of the time-fractional variable order telegraph equation, *Journal of Computational Physics*, doi: 10.1016/j.jcp.2014.12.043, 11 p.
- Baldwin, D., Göktaş, Ü., Hereman, W., Hong, L., Martino, R.S. and Miller, J.C.**, 2004, Symbolic computation of exact solutions expressible in hyperbolic and elliptic functions for nonlinear PDEs, *Journal of Symbolic Computation*, 37: 669-705 pp.
- Baleanu, D., Machado, J.A.T. and Luo, A.**, 2012, Fractional Dynamics and Control, Springer, New York, 310 p.
- Bekir, A., Aksoy, E. and Cevikel, A.C.**, 2014, Exact solutions of nonlinear time fractional partial differential equations by sub-equation method, *Mathematical Methods in Applied Sciences*, doi: 10.1002/mma.3260, 6 p.
- Belgacem, F.B.M., Bulut, H., Baskonus, H.M. and Akturk, T.**, 2014, Mathematical analysis of the generalized Benjamin and Burger-Kdv equations via the extended trial equation method, *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 16: 91-100 pp.
- Benjamin, R.T., Bona, J.L. and Mahony, J.J.**, 1972, Model equations for long waves in non-linear dispersive systems, *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, 272: 47-78 pp.
- Bhutani, O.P. and Moussa, M.H.M.**, 1994, On the generalized forms of exact solutions to the Liouville equation via direct approach, *International Journal of Engineering Science*, 32(12): 1965-1969 pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Boyd, J.P.**, 1986, An analytical and numerical study of the two-dimensional Bratu equation, *Journal of Scientific Computing*, 1: 183-206 pp.
- Bulut, H. and Kılıç, B.**, 2013, Exact solutions for some fractional nonlinear partial differential equations via Kudryashov method, *e-Journal of New World Sciences Academy NWSA-Physical Sciences*, 3A0063, 8,(1): 24-31 pp.
- Bulut, H., Baskonus, H.M. and Pandır, Y.**, 2013, The modified trial equation method for fractional wave equation and time fractional generalized burgers equation, *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 636802, doi: 10.1155/2013/636802, 8 p.
- Bulut, H. and Pandır, Y.**, 2013, Modified trial equation method to the nonlinear fractional Sharma–Tasso–Olevers equation, *International Journal of Modeling and Optimization*, 3(4): 353-357 pp.
- Caputo, M.**, 1967, Linear model of dissipation whose Q is almost frequency dependent II, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 13: 529-539 pp.
- Cox S. J., Hutzler S., Murphy J., Phelan R., Verbist G. and Weaire D.**, 2002, Applications and generalizations of the foam drainage equation. mathematical, *Physical and Engineering Sciences*, 456: 2441-2464 pp.
- Debnath, L.**, 2012, Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Third Edition, Birkhäuser, Boston, 860 p.
- Debnath, L. and Myint-U, T.**, 2007, Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhäuser, Boston, 778 p.
- Du, X.H.**, 2010, An irrational trial equation method and its applications, *Pramana-Journal of Physics*, 75(3): 415-422 pp.
- Du, X.H.**, 2011, A new trial equation method to find the exact traveling wave solutions to nonlinear differential equations, *Fizika A (Zagreb)*, 19 (4): 273-278 pp.
- Ekici, M., Duran, D. and Sonmezoglu, A.**, 2013, Soliton solutions of the Klein-Gordon-Zakharov equation with power law nonlinearity, *ISRN Computational Mathematics*, Article ID 716279, doi:10.1155/2013/716279, 7 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Erbaş, B. and Yusufoglu, E.**, 2009, Exp-function method for constructing exact solutions of Sharma–Tasso–Olver equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, 41: 2326-2330 pp.
- Esen, A., Yagmurlu, N.M. and Tasbozan O.**, 2013, Approximate analytical solution to time-fractional damped burger and Cahn–Allen equations. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 7(5): 1951-1956 pp.
- Fan, E.G.**, 2000, Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, *Physics Letters A*, 277(4-5): 212-218 pp.
- Fan, E.G.**, 2002, Traveling wave solutions for nonlinear equations using symbolic computation, *Computers and Mathematics with Applications*, 43: 671-680 pp.
- Fan, E.G.**, 2003, Uniformly constructing a series of explicit exact solutions to nonlinear equations in mathematical physics, *Chaos, Solitons and Fractals* 16: 819-839 pp.
- Feng, Z.**, 2002, The first integral method to study the Burgers-KdV equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(2): 343-349 pp.
- Golmankhaneh, A., Golmankhaneh, A.K. and Baleanu, D.**, 2011, On nonlinear fractional Klein–Gordon equation, *Advances in Fractional Signals and System*, 91(3): 446-451 pp.
- Gurefe, Y., Misirli, E., Pandir, Y., Sonmezoglu, A. and Ekici, M.**, 2014, New exact solutions of the Davey–Stewartson equation with power-law nonlinearity, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, doi: 10.1007/s40840-014-0075-z, 12 p.
- Gurefe, Y., Sonmezoglu, A. and Misirli, E.**, 2011, Application of the trial equation method for solving some nonlinear evolution equations arising in mathematical physics, *Pramana - Journal of Physics*, 77(6): 1023-1029 pp.
- Gurefe, Y., Sonmezoglu, A. and Misirli, E.**, 2012, Application of an irrational trial equation method to high-dimensional nonlinear evolution equations, *Journal of Advanced Mathematical Studies*, 5(1): 41-47 pp.
- He, J.H. and Abdou, M.A.**, 2007, New periodic solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method, *Chaos, Solitons and Fractals*, 34: 1421-1429 pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- He, J.H. and Wu, X.H.**, 2006, Exp-function method for nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, 30: 700-708 pp.
- Hirota, R.**, 1971, Exact solution of the Korteweg—de Vries equation for multiple collisions of solitons, *Physical Review Letters*, 27(18): 1192-1194 pp.
- Hirota, R.**, 1973, Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation, *Journal of Mathematical Physics*, 14(7): 805-809 pp.
- Hirota, R. and Satsuma, J.**, 1981, Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries equation, *Physics Letters A*, 85(8-9): 407-408 pp.
- Jawad, A.J.M., Petkovic, M.D. and Biswas, A.**, 2010, Modified simple equation method for nonlinear evolution equations, *Applied Mathematics and Computation*, 217: 869-877 pp.
- Jumarie, G.**, 2006, Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of non differentiable functions further results, *Computers and Mathematics with Applications*, 51(9-10): 1367-1376 pp.
- Jumarie, G.**, 2007, Fractional Hamilton-Jacobi equation for the optimal control of nonrandom fractional dynamics with fractional cost function, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 23(1-2): 215-228 pp.
- Jumarie, G.**, 2009, Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann-Liouville derivative for non-differentiable functions, *Applied Mathematics Letters*, 22(3): 378-385 pp.
- Kabir, M.M.**, 2011, Analytic solutions for generalized forms of the nonlinear heat conduction equation, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12: 2681-2691 pp.
- Khan, K. and Akbar, M.A.**, 2013, Exact and solitary wave solutions for the Tzitzeica-Dodd-Bullough and the modified KdV–Zakharov–Kuznetsov equations using the modified simple equation method, *Ain Shams Engineering Journal*, 4: 903-909 pp.
- Kilbas, A.A., Srivastava, H.M and Trujillo, J.J.**, 2006, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, 540 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Kudryashov, N.A.**, 2012, One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17: 2248-2253 pp.
- Kutluay, S., Esen, A. and Tasbozan, O.**, 2010, The (G'/G) expansion method for some nonlinear evolution equations, *Applied Mathematics and Computation*, 217: 384-391 pp.
- Li, Y.**, 2014a, Application of trial equation method for solving the Benjamin-Ono equation, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2: 45-49 pp.
- Li, Y.**, 2014b, Trial equation method for solving the improved Boussinesq equation, *Advances in Pure Mathematics*, 4: 47-52 pp.
- Li, W. and Zhao, Y.M.**, 2012, Exact Solutions for a BBM(m,n) Equation with Generalized Evolution, *Applied Mathematical Sciences*, 6(27): 1325-1334 pp.
- Liu, C.S.**, 2005a, Trial equation method and its applications to nonlinear evolution equations, *Acta Physica Sinica*, (54): 2505-2510 pp. (In Chinese)
- Liu, C.S.**, 2005b, Using trial equation method to solve the exact solutions for two kinds of KdV equations with variable coefficients, *Acta Physica Sinica*, 54: 4506-4510 pp. (In Chinese)
- Liu, C.S.**, 2005c, Exact travelling wave solutions for (1+1)-dimensional dispersive long wave equation, *Chinese Physics*, 14: 1710-1715 pp.
- Liu, C.S.**, 2006a, Trial equation method to nonlinear evolution equations with rank inhomogeneous: Mathematical discussions and its applications. *Communications in Theoretical Physics*, 45(2): 219-223 pp.
- Liu, C.S.**, 2006b, A new trial equation method and its applications. *Communications in Theoretical Physics*, 45(3): 395-397 pp.
- Liu, C.S.**, 2006c, Direct integral method, complete discrimination system for polynomial and applications to classifications of all single traveling wave solutions to nonlinear differential equations: A survey, arXiv: nlin/0609058v1, 33 p.
- Liu, C.S.**, 2010, Applications of complete discrimination system for polynomial for classifications of traveling wave solutions to nonlinear differential equations, *Computer Physics Communications*, 181: 317-324 pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Liu, C.S.**, 2011, Trial equation method based on symmetry and applications to nonlinear equations arising in mathematical physics, *Foundations of Physics*, 41(5): 793-804 pp.
- Liu, S., Fu, Z., Liu, S. and Zhao, Q.**, 2001, Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations, *Physics Letters A*, 289: 69-74 pp.
- Liu, Y.**, 2011, Exact solutions to nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients, *Applied Mathematics and Computation*, 217: 5866-5869 pp.
- Lu, B.**, 2012a, The first integral method for some time fractional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 395: 684-693 pp.
- Lu, B.**, 2012b, Bäcklund transformation of fractional Riccati equation and its applications to nonlinear fractional partial differential equations, *Physics Letters A*, 376: 2045-2048 pp.
- Ma, W.X. and Fuchssteiner, B.**, 1996, Explicit and exact solutions to a Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 31: 329-338 pp.
- Ma, W.X., Wu, H. Y. and He, J. S.**, 2007, Partial differential equations possessing Frobenius integrable decompositions, *Physics Letters A*, 364: 29-32 pp.
- Malfliet, W.**, 1992, Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, *American Journal of Physics*, 60(7): 650-654 pp.
- Malfliet, W.**, 1996, The tanh method: I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations, *Physica Scripta*, 54: 563-568 pp.
- Mısırlı, E. and Gurefe, Y.**, 2011, Exp-function method for solving nonlinear evolution equations, *Mathematical and Computational Applications*, 16(1): 258-266 pp.
- Mirzazadeh, M. and Eslami, M.**, 2012, Exact solutions of the Kudryashov-Sinelshchikov equation and nonlinear telegraph equation via the first integral method, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 17(4): 481-488 pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Odabasi, M. and Misirli, E.,** 2014, Application of the extended trial equation method to the nonlinear evolution equations, *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 2(1): 28-33 pp.
- Oliver, P.J.,** 1993, Applications of Lie Group to Differential Equations, Springer, New York, 513 p.
- Pandir, Y., Gurefe, Y., Kadak, U. and Misirli, E.,** 2012, Classification of exact solutions for some nonlinear partial differential equations with generalized evolution, *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 478531, doi:10.1155/2012/478531, 16 p.
- Pandir, Y., Gurefe, Y. and Misirli, E.,** 2013a, The extended trial equation method for some time fractional differential equations, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 491359, doi: 10.1155/2013/491359, 13 p.
- Pandir, Y., Gurefe, Y. and Misirli, E.,** 2013b, New exact solutions of the time-fractional nonlinear dispersive KdV equation, *International Journal of Modeling and Optimization*, 3(4): 349-352 pp.
- Pandit, S., Kumar, M. and Tiwari, S.,** 2015, Numerical simulation of second-order hyperbolic telegraph type equations with variable coefficients, *Computer Physics Communications*, 187: 83-90 pp.
- Podlubny, I.,** 1999, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, USA, 340 p.
- Scott, A.,** 1970, Active and Nonlinear Wave Propagation in Electronics, Wiley, New York, 304 p.
- Sneddon, I.N.,** 1957, Elements of Partial Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 327 p.
- Stoker, J.J.,** 1957, Water Waves: The Mathematical Theory with Applications, Wiley-Interscience, New York, 600 p.
- Wang, D.S. and Li, H.,** 2008, Single and multi-solitary wave solutions to a class of nonlinear evolution equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 343:273-198 pp.
- Wang, M.L.,** 1995, Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations, *Physics Letters A*, 199: 169-172 pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Wang, M.L.**, 1996, Exact solutions for a compound KdV-Burgers equation, *Physics Letters A*, 213: 279-287 pp.
- Wang, M., Li, X. and Zhang, J.**, 2008, The (G'/G) expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Physics Letters A*, 372(4): 417-423 pp.
- Wazwaz, A.M.**, 2004, A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations, *Mathematical and Computer Modelling*, 40: 499-508 pp.
- Wazwaz, A.M.**, 2005a, The tanh and the sine-cosine methods for a reliable treatment of the modified equal width equation and its variants, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 11: 148-160 pp.
- Wazwaz, A.M.**, 2005b, The tanh method for generalized forms of nonlinear heat conduction and Burgers-Fisher equations, *Applied Mathematics and Computation*, 169: 321-338 pp.
- Wazwaz, A.M.**, 2008, The tanh method for travelling wave solutions to the Zhiber-Shabat equation and other related equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13: 584-592 pp.
- Taghizadeh, N., Mirzazadeh, M., Rahimian, M. and Akbari, M.**, 2013, Application of the simplest equation method to some time-fractional partial differential equations, *Ain Shams Engineering Journal*, 4: 897-902 pp.
- Triki, H. and Ismail, M.S.**, 2010, Soliton solutions of a BBM(m,n) equation with generalized evolution, *Applied Mathematics and Computation*, 217: 48-54 pp.
- Yang, L., Hou, X.R. and Zeng, Z.B.**, 1996, A complete discrimination system for polynomials, *Science in China (Series E)*, 39(6): 628-646 pp.
- Younis, M., Rehman, H. and Iftikhar, M.**, 2014, Travelling wave solutions to some time-space nonlinear evolution equations, *Applied Mathematics and Computation*, 249: 81-88 pp.
- Yusufoğlu, E.**, 2008, The variational iteration method for studying the Klein-Gordon equation, *Applied Mathematics Letters*, 21: 669-674 pp.
- Zhaou, Y., Wang, M. and Wang, Y.**, 2003, Periodic wave solutions to a coupled KdV equations with variable coefficients, *Physics Letters A*, 308: 31-36 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Özlük Bilgileri

Adı-Soyadı : Meryem ODABAŞI

Doğum Tarihi: 08.10.1984

Doğum Yeri : İzmir

İletişim : meryem.odabasi@ege.edu.tr

Öğrenim Durumu

Lise : İzmir Atatürk Lisesi (1998-2002)

Lisans : Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (2002-2006)

Yüksek Lisans: Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı (2006-2008)

Doktora : Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı (2009-)

Burslar

TÜBİTAK-BİDEB tarafından verilen Yurtiçi Yüksek Lisans Bursu (2006-2008) ve Yurtiçi Doktora Bursu (2009-2013)