

OCAK 2015

YÜKSEK LİSANS - MATEMATİK

DİLAN KILIÇ

T.C

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FREUD TİPİ AĞIRLIK FONKSİYONLARINA GÖRE
GAUSS İNTEGRASYON METOTLARININ
OLUŞTURULMASI VE BU METOTLARIN YÜKSEK
SALINIMLI İNTEGRALLERE UYGULANMASI

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİLAN KILIÇ

OCAK 2015

**Freud Tipi Ağırlık Fonksiyonlarına Göre Gauss
İntegrasyon Metotlarının Oluşturulması ve Bu Metotların
Yüksek Salınımlı İntegrallere Uygulanması**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç.Dr. Ali İhsan HASÇELİK

Dilan KILIÇ

Ocak 2015

© 2015 [Dilan KILIÇ]

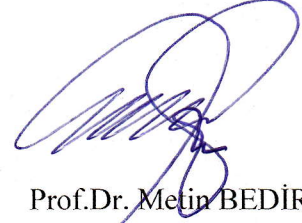
T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Freud Tipi Ağırlık Fonksiyonlarına Göre Gauss İntegrasyon Metotlarının Oluşturulması ve Bu Metotların Yüksek Salınlı İntegrallere Uygulanması

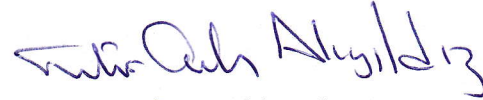
Öğrencinin, Adı Soyadı: Dilan KILIÇ

Tez Savunma Tarihi: 05.01.2015

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

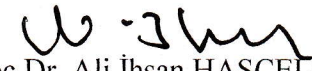

Prof.Dr. Metin BEDİR
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.


Prof.Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.


Doç.Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

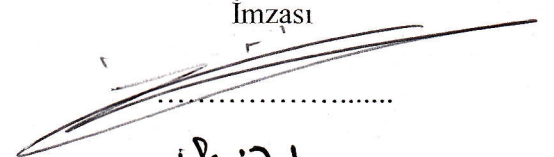
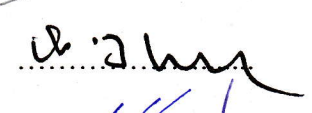
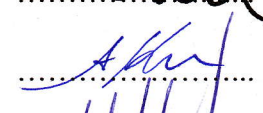
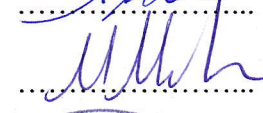
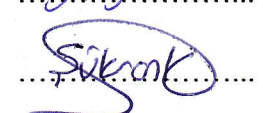
Prof.Dr. İbrahim H. GÜZELBEY

Doç.Dr. Ali İhsan HASÇELİK

Doç.Dr. Abdullah KABLAN

Y.Doç.Dr. Mine Menekşe YILMAZ

Y.Doç.Dr. Şükran UYGUN

İmzası






İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Dilan KILIÇ

ÖZET

FREUD TİPİ AĞIRLIK FONKSİYONLARINA GÖRE GAUSS İNTEGRASYON METOTLARININ OLUŞTURULMASI VE BU METOTLARIN YÜKSEK SALINIMLI İNTEGRALLERE UYGULANMASI

KILIÇ, Dilan

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK

Ocak 2015, 39 sayfa

Yüksek salınlı integraller doğa bilimleri, mühendislik, tıp gibi alanlarında açığa çıkan problemlerin çözümlerinde gerekmektedir. Bu yüzden bu integralleri yaklaşık olarak hesaplayabilmek için çeşitli nümerik metotlar önerilmiş veya varolan metotlar modifiye edilmiştir. Bu nümerik metotlardan biri de asimtotik mertebesi en yüksek olan Hızlı Düşüş Metodudur. Ancak durağan noktaya sahip integrallerde bu metodun uygulanması, r tamsayı olmak üzere $w_r(x)=\exp(-x^r)$ Freud tipi ağırlık fonksiyonlarına göre Gauss integrasyon metotlarının oluşturulmasını gerektirmektedir. Maalesef, Freud tipi bir ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal polinomları analitik olarak elde etmenin bir yolu henüz bulunamamıştır.

Bu çalışmada, Freud tipi ağırlık fonksiyonlarına göre ortogonal polinomların üç terimli yineleme bağıntılarındaki katsayılar nümerik olarak elde edilmiş, daha sonra da bu katsayılarla oluşturulan Jacobi matrisleri yardımı ile Gauss integrasyon metotları oluşturulmuştur. Oluşturulan bu metotlar seçilen bazı yüksek salınlı integrallere uygulanmış ve çok iyi sonuç verdikleri gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yüksek Salınlı İntegraller, Gauss İntegrasyon Metotları, Hızlı Düşüş Metodu, Ortogonal Polinomlar, Üç Terimli Yineleme Bağıntısı, Jacobi matrisi, Chebyshev Algoritması.

ABSTRACT

CONSTRUCTION OF GAUSS INTEGRATION METHODS WITH RESPECT TO FREUD –TYPE WEIGHT FUNCTIONS AND APPLICATION OF THESE METHODS TO HIGHLY OSCILLATORY INTEGRALS

KILIÇ, Dilan

M.Sc.Thesis, Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Prof. Ali İhsan HASÇELİK

January 2015, 39 pages

Highly oscillatory integrals arise in many applications in science, engineering, and medicine. Therefore, various methods have been proposed for numerically computing these integrals. One of these methods is the so called numerical steepest descent method, which has the highest asymptotic order. However when there is a stationary point in the interval of integration this method requires the construction of Gauss rules relative to a Freud weight function $w_r(x) = \exp(-x^r)$, where r is a positive integer. Construction of these rules requires the calculation of coefficients in the three-term recurrence relations of orthogonal polynomials with respect to w_r , because these coefficients can not be obtained analytically.

In this thesis, the recurrence coefficients are obtained numerically by using the Chebyshev algorithm. These coefficients are used to form the Jacobi matrix, from which the nodes and weights of the desired Gauss rules are easily obtained. The Gauss rules obtained in this way were used to compute some selected highly oscillatory integrals. Numerical results show that the new Gauss rules are stable, very efficient, and give high accurate results.

Key Words: Highly Oscillatory Integrals, Gauss Integration Methods, The Numerical Steepest Descent Method, Orthogonal Polynomials, Three-Term Recurrence Relation, Jacobi Matrix, Chebyshev Algorithm.

Çok kıymetli aileme.....

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK 'e ve bugüne kadar destekleriyle her zaman yanımda olan aileme sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	v
ABSTRACT	vi
TABLolar LİSTESİ	xi
ŞEKİLLER LİSTESİ	xii
SEMBOLLER LİSTESİ	xiii
BÖLÜM 1: GİRİŞ	1
BÖLÜM 2: NÜMERİK İNTEGRASYON METOTLARI	4
2.1 Filon Metodu	4
2.2 Levin Metodu	5
2.3 Asimtotik Metot	7
BÖLÜM 3: GAUSS İNTEGRASYON KURALLARI	8
3.1 Gauss İntegrasyon Kurallarının Oluşturulması	8
3.2 Ağırlıkların Hesaplanması	13
3.3 Gauss Legendre İntegrasyon kuralı	14
3.4 Gauss Laguerre İntegrasyon kuralı	15
3.5 Gauss Hermite İntegrasyon kuralı	17
3.6 Gauss Chebyshev İntegrasyon kuralı	18
3.7 Matrisler Kullanılarak İntegrasyon Noktaları ve Ağırlıkların Hesaplanması	20
BÖLÜM 4: HIZLI DÜŞÜŞ METODU İLE FREUD TİPİ AĞIRLIK FONKSİYONLARINA GÖRE GAUSS İNTEGRASYON METOTLARININ OLUŞTURULMASI VE BU METOTLARIN YÜKSEK SALINIMLI İNTEGRALLERE UYGULANMASI.....	22
4.1 Hızlı Düşüş (Dik İniş) Metodu.....	22
4.2 Hızlı Düşüş (Dik İniş) Metodu İle Freud Tipi Ağırlık Fonksiyonlarına Göre Gauss İntegrasyon Metotlarının Oluşturulması ve Bu Metotların Yüksek Salınlı İntegrallere Uygulanması	23

4.2.1 Katsayıların Momentler Yoluyla Elde Edilmesi	23
BÖLÜM 5: SONUÇLAR	37
KAYNAKLAR	38

TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 3.1 Bazı ağırlık fonksiyonları ve ilgili ortogonal polinomlar.....	8
Tablo 4.1 $W(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre Chebyshev	
Algoritması kullanılarak oluşturulan a_n ve b_n katsayıları.....	26
Tablo 4.2 $W(x) = e^{-x^3}$ ağırlık fonksiyonuna göre Chebyshev	
Algoritması kullanılarak oluşturulan a_n ve b_n katsayıları.....	27
Tablo 4.3 $W(x) = e^{-x^4}$ ağırlık fonksiyonuna göre Chebyshev	
Algoritması kullanılarak oluşturulan a_n ve b_n katsayıları	28
Tablo 4.4 $r = 2$ için hata miktarı.....	35
Tablo 4.5 $r = 3$ için hata miktarı.....	35
Tablo 4.6 $r = 4$ için hata miktarı.....	36

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 $[-1,1]$ aralığında $\sin(100x)$ ' in grafiği.....	2
Şekil 1.2 $[-1/5,1/5]$ aralığında $\sin(1000x)$ ' in grafiği.....	2
Şekil 4.1 Hızlı düşüş metodu için bir kontur.....	29
Şekil 4.2 $f[(i/1000)^{(1/5)} * t]$ fonksiyonunun reel kısmının grafiği.....	33
Şekil 4.3 $f[(i/1000)^{(1/5)} * t]$ fonksiyonunun sanal kısmının grafiği.....	34

SEMBOLLER LİSTESİ

$e^{i\omega g(x)}$	Salınımlı İntegralin Salınım Çekirdeği
$Q_s^F[f]$	Filon Metodu
$Q_s^L[f]$	Levin Metodu
$Q_s^A[f]$	Asimtotik Metot
μ_k	k. moment
π_n	Derecesi n ve n den düşük polinomların kümesi
$\tilde{\pi}_n$	Derecesi n olan monik polinomların kümesi
$L_2[a, b]$	Karesi integrallenebilen fonksiyon uzayı
φ_i	Ortogonal Polinom
$L_i(x)$	i. Lagrange Polinomu
$R_n(f)$	Hata terimi
P_n	Legendre Polinomu
w_i	Gauss İntegrasyon Metodu için ağırlık katsayısı
L_n^α	Laguerre Polinomu
H_n	Hermit Polinomu
T_n	Chebyshev Polinomu
J_n	Jacobi Matrisi
Δ_n	Hankel Determinatı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

$$\int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)}dx \quad (1.1)$$

biçimindeki integraller doğa bilimleri, mühendislik, ve tıp gibi alanlardaki bazı problemlerin çözümünde önemli rol oynar. Genel olarak, g : faz fonksiyonu, f : genlik fonksiyonu, $\omega \gg 1$ sayısı da frekans olarak isimlendirilir. Bu tür integrallere salınımlı integraller denir. ω çok büyük olduğu zaman bu integrallerin klasik integrasyon metotları ile hesaplanması milyonlarca fonksiyon hesabı gerektirir.

Örnek olarak, $g(x) = x$ alalım. Bu durumda

$$e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \sin \omega x$$

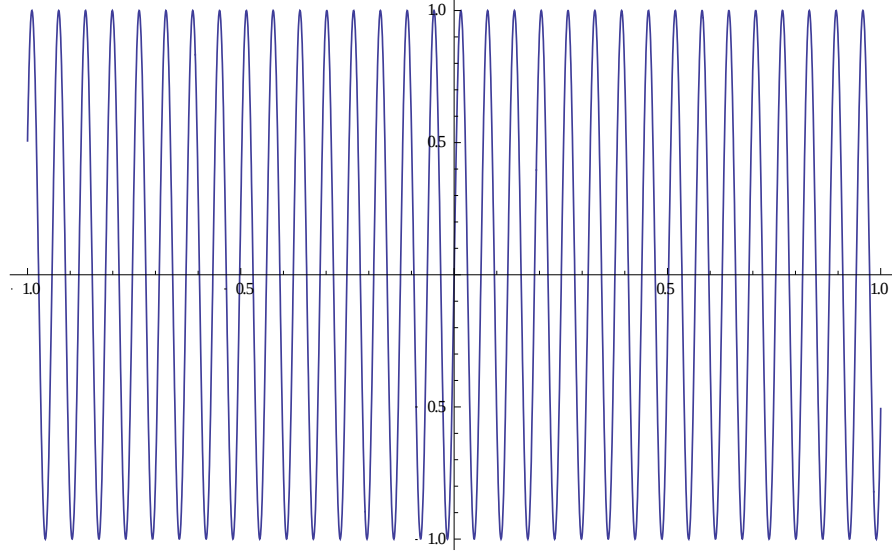
özdeşliğinden bu fonksiyonun reel ve sanal kısmının kökleri

$$\sin \omega x = 0 \Rightarrow \omega x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\omega}$$

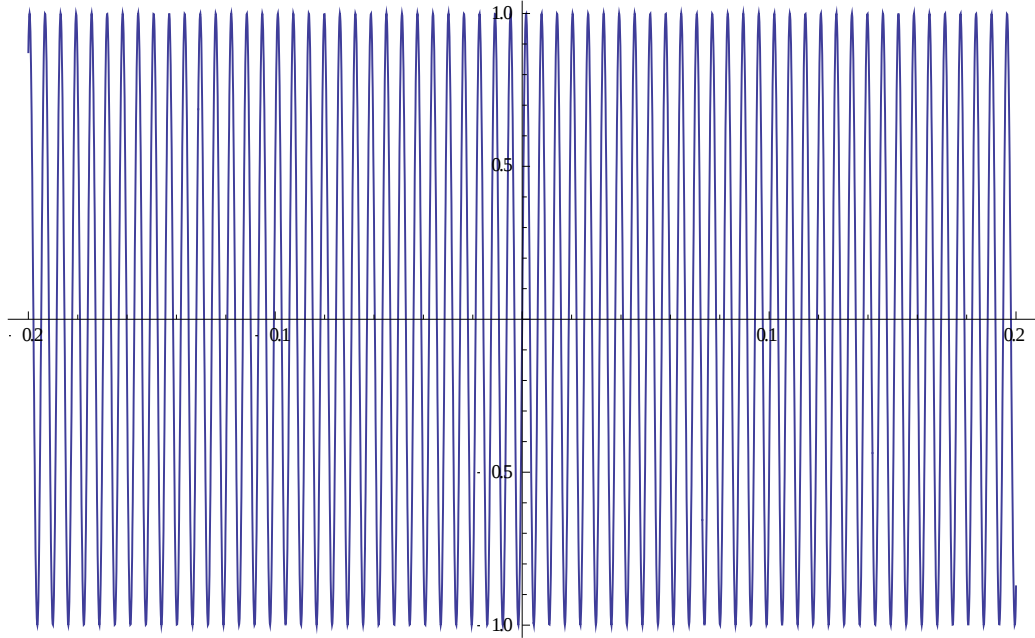
ve

$$\cos \omega x = 0 \Rightarrow x = \frac{(2k-1)\pi}{2\omega},$$

elde edilir. Kökler arasındaki mesafe her iki durumda da $d = \pi/\omega$ dir. Dolayısıyla, fonksiyonun yukarıdaki reel ve sanal kısımları ω çok büyük olduğu zaman aşağıdaki grafiklerde de görüldüğü gibi x eksenini bir çok noktada keser. Şekil 1.1 ve Şekil 1.2 ω büyüdükçe salınım sayısının da arttığını gösterir.



Şekil 1.1: $[-1,1]$ aralığında $\sin(100x)$ ' in grafiği



Şekil 1.2: $[-1/5, 1/5]$ aralığında $\sin(1000x)$ ' in grafiği

Genel bir faz fonksiyonu verildiğinde, integrandın çok salınımlı olmasından dolayı Gauss-Legendre, Newton-Cotes, Clenshaw-Curtis gibi klasik metotlar bu tür integrallerin hesabı için ekonomik değildir. Bu yüzden (1.1) integralini ekonomik olarak hesaplayabilmek için günümüze kadar bir çok çalışma yapılmış ve önemli metotlar geliştirilmiştir; bu metotlar için [1-12] ve bunların içindeki referanslara bakılabilir.

Bölüm 2 de yüksek salınlı integrallerin hesaplanmasında çok kullanılan bazı metotlar özetlenecektir.

Bölüm 3 de Gauss integrasyon kurallarının (ya da metotlarının) oluşturulmasından, ağırlıkların hesaplanmasından, Gauss Legendre, Gauss Laguerre, Gauss Hermite ve Gauss Chebyshev integrasyon kurallarından bahsedilecektir.

Bölüm 4 de ise salınlı integrallerin hesabı için daha etkili ve ekonomik bir metot olan, integrand fonksiyonunu çevreleyen uygun bir kontur seçme yöntemini kullanan *Hızlı Düşüş (Dik İniş) Metodu* ayrıntılı olarak ele alınacaktır. Ayrıca, aynı bölümde, durağan noktaya sahip salınlı integrallerde bu metodu uygulamak için r tamsayı olmak üzere $w_r(x) = e^{(-x^r)}$ Freud tipi ağırlık fonksiyonlarına göre Gauss integrasyon metotları oluşturulacaktır. Bunun için öncelikle ortogonal polinomların üç terimli yineleme bağıntısındaki yineleme katsayıları Mathematica [13] ile nümerik olarak elde edilecek, bu katsayılarla elde edilen Jacobi matrisleri yardımı ile de Gauss integrasyon metotları oluşturulacaktır. Daha sonra bu metotlar bazı yüksek salınlı integrallere uygulanacaktır.

BÖLÜM 2

NÜMERİK İNTEGRASYON METOTLARI

$$I[f] = \int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx \quad (2.1)$$

integralini göz önüne alalım. Bir önceki bölümde salınımlı integrallerin hesabında etkili bazı metotların kullanıldığından bahsedilmişti. Aşağıda bunlardan bazıları verilmiştir.

2.1 Filon Metodu: ([1-4,14,15])

Bu metot $f(x)$ fonksiyonuna $P_n(x)$ interpolasyon polinomu gibi bir polinomla yaklaşmayı esas almıştır. $f(x)$ fonksiyonunu bu $P_n(x)$ polinomuyla yer değiştirelim. Yani

$$f(x) \cong P_n(x)$$

olsun.

$$I[f] = \int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx \cong \int_a^b P_n(x) e^{i\omega g(x)} dx$$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

olmak üzere bu polinom (2.1) integralinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^b (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) e^{i\omega g(x)} dx \\ &= a_0 \int_a^b e^{i\omega g(x)} dx + a_1 \int_a^b x e^{i\omega g(x)} dx + \dots + a_n \int_a^b x^n e^{i\omega g(x)} dx \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\mu(k) = a_k \int_a^b x^k e^{i\omega g(x)} dx, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

k . momenttir. Eğer bu momentleri biliyorsak verilen integral alınır.

$P_n(x)$, $f(x)$ fonksiyonu için uç noktaların ve uç noktalardaki türevlerin de dahil edilerek elde edildiği n . dereceden Hermit interpolasyon polinomu olsun. $s = \min\{\eta_0, \eta_m\}$ ise bu durumda Filon metodunun (asimtotik) hatası

$$I[f] - Q_s^F[f] = O\left(\frac{1}{\omega^{s+1}}\right), \quad \omega \rightarrow \infty$$

olarak verilir, [2,5,14].

Bu ifadeden, ω ve s büyüdükçe Filon metodunun daha iyi sonuç verdiği görülür.

Filon metodundaki sıkıntı şudur:

Örneğin, $g(x) = x$ için integrali hesaplamak kolaydır. Kısmi integrasyondan bulunur. Fakat genel bir $g(x)$ için integrali hesaplamak çok zordur. Bu da momentlerin bulunmasını zorlaştırır. Bu yüzden başka metotların varlığına ihtiyaç duyulur. Bunlardan biri de aşağıda verilen Levin metodudur.

2.2 Levin Metodu: ([2,5,6,16,17])

Yine (2.1) integralini göz önüne alalım. Eğer,

$$(F(x)e^{i\omega g(x)})' = f(x)e^{i\omega g(x)}$$

eşitliğini sağlayan bir $F(x)$ fonksiyonu bulabilseydik

$$\int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)} dx = \int_a^b (F(x)e^{i\omega g(x)})' dx = F(b).e^{i\omega g(b)} - F(a).e^{i\omega g(a)}$$

elde edilirdi, dolayısıyla verilen integrali hesaplamış olacaktık. Ancak böyle bir $F(x)$ in bulunması analitik olarak mümkün değildir. Bu yüzden

$$F'(x)e^{i\omega g(x)} + i\omega g'(x)e^{i\omega g(x)}F(x) = f(x)e^{i\omega g(x)}$$

veya

$$F'(x) + i\omega g'(x)F(x) = f(x) \quad (2.2)$$

için kollokasyon metodu kullanılarak $F(x)$ için bir yaklaşık $v(x)$ fonksiyonu bulunur:

$$F(x) \cong v(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$$

(2.2) denkleminde $F(x) = v(x)$ yerine yazarsak, $a \leq x_0 \leq x_1 \dots \leq x_m \leq b$, $m \leq n$ noktaları kullanılarak

$$\sum_{k=0}^n k c_k x_i^{k-1} + i\omega g'(x_i) \sum_{k=0}^n c_k x_i^k = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$$

elde edilir. Bu lineer cebirsel denklem sisteminden c_k lar belirlenir. Buradan

$$v(b).e^{i\omega g(b)} - v(a).e^{i\omega g(a)} = \int_a^b (f(x)e^{i\omega g(x)})dx$$

elde edilir. Dolayısıyla verilen integrale yaklaşık değer bulmuş oluruz. Bunun genelleştirilmiş hali, (2.2) denkleminde $F(x)$ yerine $v(x)$ alınıp elde edilen denklemde her iki tarafın s . dereceden türevleri alınıp x yerine x_j yazılırsa

$$\left[\frac{d^s}{dx^s} (v'(x) + i\omega g'(x)v(x)) \right]_{x=x_j} = \left[\frac{d^s}{dx^s} f(x) \right]_{x=x_j}, s = 0, 1, \dots, n_j - 1,$$

elde edilir. Burada $\eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_m = n + 1$ olmak üzere η_j 'ler pozitif tamsayılardır. $n = m$ ise bu metot *Levin (kollokasyon) metodu*, η_j 'lerden en az biri birden büyük alınırsa, *Levin tipi* bir metot olarak adlandırılır.

İntegrasyon aralığında durağan nokta yoksa Levin metodunun (asimtotik) hatası

$$I[f] - Q_s^L[f] \sim O\left(\frac{1}{\omega^{s+1}}\right), \quad \omega \rightarrow \infty, s = \min\{\eta_0, \eta_m\}$$

olarak verilir, (detaylı bilgi için, bakınız [1,5,6,15]).

Bu metottaki sıkıntı sistemin çözümüne türevi dahil etmesek bile ω ya bağlı olarak sistemin kondisyon sayısı çok büyük olabilir. ω büyüdükçe kondisyon sayısı küçülür.

Bu metotta daha iyi bir yaklaşım elde etmek için daha büyük sistemleri çözmek gerekir. Bu da zahmetli ve pahalı bir iştir. Bu yüzden yine başka metotların varlığına ihtiyaç duyulur. Bunlardan biri de aşağıda verilen Asimtotik metottur.

2.3 Asimtotik Metot: ([1])

(2.1) integrale $[a, b]$ aralığında $g'(x) \neq 0$ olmak üzere kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_a^b \underbrace{\frac{f(x)}{i\omega g'(x)}}_{Q_0^A[f]} \underbrace{\frac{d}{dx}[e^{i\omega g(x)}]}_{\text{hata terimi}} dx = \underbrace{\frac{f(x)}{i\omega g'(x)} e^{i\omega g(x)} \Big|_a^b}_{\text{tekrar kısmi integrasyon uygulanır}} - \underbrace{\int_a^b \left(\frac{f(x)}{i\omega g'(x)} \right)' \cdot e^{i\omega g(x)} dx}_{\text{hata terimi}}$$

elde edilir. Tekrar tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$Q_s^A[f] = - \sum_{m=1}^s \frac{1}{(-i\omega)^m} \left\{ \frac{e^{-i\omega g(b)}}{g'(b)} \sigma_{m-1}[f](b) - \frac{e^{-i\omega g(a)}}{g'(a)} \sigma_{m-1}[f](a) \right\} \quad (2.3)$$

elde edilir. Burada

$$\sigma_0[f](x) = f[x], \quad \sigma_{k+1}[f](x) = \frac{d}{dx} \frac{\sigma_k[f](x)}{g'(x)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Asimtotik metodun hatası

$$I[f] - Q_s^A[f] = O\left(\frac{1}{\omega^{s+1}}\right), \quad \omega \rightarrow \infty$$

olarak verilir.

Bu metot türevlerin alınmasını gerektirdiğinden çok zaman alır ve zahmetlidir. Bu da metodun dezavantajıdır. Bir diğer metot da 4. Bölümde ayrıntılı olarak ele alacağımız *Hızlı Düşüş (Dik İniş) Metodudur*.

BÖLÜM 3

GAUSS İNTEGRASYON KURALLARI

3.1 Gauss İntegrasyon Kurallarının Oluşturulması

$W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$I(f) = \int_a^b W(x)f(x)dx \quad (3.1.1)$$

şeklindeki bir integrali göz önüne alalım. Buradaki $[a, b]$ aralığı $[a, \infty]$, $[-\infty, b]$, veya $[-\infty, \infty]$ şeklinde de olabilir.

Ağırlık fonksiyonu $[a, b]$ aralığında aşağıdaki şartları sağlasın:

1 $W(x) \geq 0, \forall x \in [a, b],$

2 $\int_a^b W(x)dx > 0,$

3 Tüm momentler $\mu_k = \int_a^b W(x)dx, k = 0, 1, \dots$ vardır ve sınırlıdır.

Bazı ağırlık fonksiyonları ve ilgili ortogonal polinomlar Tablo 3.1 de verilmiştir.

Tablo 3.1: Bazı ağırlık fonksiyonları ve ilgili ortogonal polinomlar

[a,b] aralığı	Ağırlık Fonksiyonu	İlgili Ortogonal Polinom
[-1,1]	$W(x) \equiv 1$	$P_n(x)$: Legendre Polinomları
[-1,1]	$W(x) \equiv (1 - x^2)^{-1/2}$	$T_n(x)$: Chebyshev Polinomları
[0,∞]	$W(x) \equiv e^{-x}$	$L_n(x)$: Laguerre Polinomları
[-∞,∞]	$W(x) \equiv e^{-x^2}$	$H_n(x)$: Hermite Polinomları

Genel olarak bir integrasyon metodu

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$\int_a^b W(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) = I_y(f), \quad x_i \in [a, b], \quad w_i \in \mathbb{R} \quad (3.1.2)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadedeki w_i değerleri ağırlıklar olarak adlandırılır.

Şimdi, daha sonra kullanılacak olan bazı ön bilgileri verelim.

$$\tilde{\pi}_n = \{p \mid p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0\} \quad (3.1.3)$$

Burada $\tilde{\pi}_n$ derecesi n olan monik polinomlarının kümesidir ve $0 \notin \tilde{\pi}_k$ dır.

Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı

$$L_2[a, b] = \left\{ f \mid \int_a^b W(x)|f(x)|^2 dx \right\} < \infty$$

üzerinde bir iç çarpım

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b W(x)f(x)g(x)dx$$

şeklinde olmak üzere bu uzay üzerindeki doğal norm

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left[\int_a^b W(x)[f(x)]^2 dx \right]^{1/2}$$

biçiminde tanımlanır. $\forall f, g \in L_2[a, b]$ fonksiyonu için $\langle f, g \rangle = 0$ şartı sağlanırsa bu kümeye ortogonal küme ya da dik küme denir. Bu kümenin elemanlarının normu bire eşitse ortonormal küme denir. Gramm-Schmidt yöntemi ile ortogonal bir küme elde edilebilir.

Teorem 3.1.1. (GRAMM-SCHMİDT) $L_2[a, b]$ uzayında

$$\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle_W = \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = \|\varphi_k\|^2 \delta_{ik}, \quad (i, k = 0, 1, \dots)$$

şartlarını sağlayan $\varphi_i \in \tilde{\pi}_j, j = 0,1,2, \dots$, (ortogonal) polinomları vardır ve tektir. Bu polinomlar:

$$\begin{aligned}\varphi_{-1}(x) &= 0, \\ \varphi_0(x) &= 1, \\ \varphi_{i+1}(x) &= (x - a_i)\varphi_i(x) - b_i\varphi_{i-1}(x), \quad i = 0,1, \dots, \\ a_i &= \frac{\langle x\varphi_i, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}, \quad b_{i+1} = \frac{\langle \varphi_{i+1}, \varphi_{i+1} \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}, \quad i = 0,1, \dots\end{aligned}\tag{3.1.4}$$

bağıntılarından elde edilebilir. Burada b_0 herhangi bir reel sayıdır.[18,19]

Aşağıdaki teoremden verilen

$$\pi_n = \{p \mid p(x) = a_n x^n + \dots + a_0\}$$

derecesi n ve n den düşük polinomların kümesidir. π_n ve $\tilde{\pi}_n$ kümelerini karıştırmamak gerekir.

Teorem 3.1.2. $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ rastgele alınan noktalar olsun. O zaman her $p \in \pi_{n-1}$ için

$$\int_a^b W(x)p(x)dx = \sum_{i=1}^n p(x_i) \int_a^b W(x)L_i(x)dx$$

eşitliği sağlanır. Burada $L_i(x), i = 1,2, \dots, n$, verilen apsis noktalarına karşılık gelen Lagrange polinomlarıdır.

İspat: $p \in \pi_{n-1}$ olduğundan

$$p(x) = p(x_1)L_1(x) + p(x_2)L_2(x) + \dots + p(x_n)L_n(x)$$

sağlanır. Her iki taraf $W(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre çarpılıp $[a,b]$ aralığında integrali alınırsa istenen elde edilir. [18,19,20]

Teorem 3.1.3. $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ noktaları $L_2[a,b]$ uzayı için Gramm-Schmidt veya başka bir yolla elde edilen n -inci ortogonal polinom $\varphi_n(x)$ in kökleri ise her $p \in \pi_{2n-1}$ için

$$\int_a^b W(x)p(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i p(x_i), \quad w_i = \int_a^b W(x)L_i(x)dx, \quad (3.1.5)$$

eşitliği sağlanır. Derecesi $2n$ olan (interpolasyona dayalı) n nokta integrasyon kuralı yoktur.

İspat: $p \in \pi_{2n-1}$ olduğundan

$$p(x) = \varphi_n(x)q(x) + r(x), \quad q, r \in \pi_{n-1}$$

olacak şekilde q ve r polinomları vardır. $r \in \pi_{n-1}$ olduğundan $x_1, x_2, \dots, x_n$ değerleri için $L_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, Lagrange polinomları kullanılarak,

$$r(x) = \sum_{i=1}^n r(x_i)L_i(x)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla Teorem 3.1.3 kullanılarak,

$$\begin{aligned} \int_a^b W(x)p(x)dx &= \int_a^b W(x)[\varphi_n(x)q(x) + r(x)]dx \\ &= \int_a^b W(x)r(x)dx = \int_a^b W(x) \left(\sum_{i=1}^n r(x_i)L_i(x) \right) dx \\ &= \int_a^b W(x) \left(\sum_{i=1}^n p(x_i)L_i(x) \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^n p(x_i) \left(\int_a^b W(x)L_i(x)dx \right) = \sum_{i=1}^n p(x_i)w_i \end{aligned}$$

elde edilir.

Teoremin ikinci kısmının ispatı için

$$p(x) = \prod_{i=1}^n (x - \tilde{x}_i)^2 \in \pi_{2n}$$

polinomunu göz önüne alalım ve bu polinomun hatasız integrallenebildiğini varsayalım. Burada $\tilde{x}_i$ değerleri φ_n ortogonal polinomunun kökleri ya da $[a, b]$

aralığında başka noktalar olabilir. Bu durumda

$$0 < \int_a^b W(x)p(\tilde{x}_i)dx = \sum_{i=1}^n p(\tilde{x}_i)\tilde{w}_i = 0$$

çelişkisi elde edilir. [19,20]

Tanım 3.1.1. $\{x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ noktaları n -inci ortogonal polinomun kökleri olmak üzere

$$\int_a^b W(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), w_i = \int_a^b W(x)L_i(x)dx, \quad (3.1.6)$$

olarak tanımlanan integrasyon kuralına n -inci dereceden **Gauss integrasyon kuralı** denir.

Lemma 3.1.1. $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)\}$ ortogonal polinomları ve farklı t_i değerleri için

$$A = [\varphi_i(t_j)]_{n \times n} = \begin{bmatrix} \varphi_0(t_0) & \varphi_0(t_1) & \dots & \varphi_0(t_{n-1}) \\ \varphi_1(t_0) & \varphi_1(t_1) & \dots & \varphi_1(t_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n-1}(t_0) & \varphi_{n-1}(t_1) & \dots & \varphi_{n-1}(t_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (3.1.7)$$

matrisi tekil değildir.

İspat: İspat için bkz. [19,20]

Teorem 3.1.4. Eğer her $p \in \pi_{2n-1}$ için

$$\int_a^b W(x)p(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i p(x_i) \quad (3.1.8)$$

eşitliği sağlanırsa, o zaman $x_1, x_2, \dots, x_n$ değerleri $\varphi_n(x)$ ortogonal polinomunun kökleridir ve ağırlıkları $w_i = \int_a^b W(x)L_i(x)dx, i = 1, 2, \dots, n$ eşitliklerini sağlar.

İspat: İspat için bkz. [19,20]

Teorem 3.1.5. $f \in \mathbb{C}^{2n}[a, b]$ ise n -nokta Gauss integrasyon kuralı ve bir $\xi \in (a, b)$ değeri için

$$R_n(f) = \frac{1}{A_n^2} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}$$

hata terimi olmak üzere

$$\int_a^b W(x)f(x)dx - \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) = \frac{1}{A_n^2} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \quad (3.1.9)$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$\{\varphi_n | \varphi_n(x) = A_n x_n + \dots, A_n \neq 0, n = 0, 1, \dots, k\}$$

$L_2[a, b]$ uzayında ortogonal bir kümedir.

İspat: İspat için bkz. [19,20]

3.2 Ağırlıkların Hesaplanması

Bundan önceki kısımda ağırlıklar için

$$w_i = \int_a^b W(x)L_i(x)dx = \int_a^b \left(W(x) \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) dx \quad (3.2.1)$$

eşitliği verilmişti. Bu eşitlik

$$\frac{\varphi_n(x)}{A_n(x - x_i)} = \prod_{j=1, j \neq i}^n (x - x_j) \quad (3.2.2)$$

bağıntısı kullanılarak, $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$w_i = \int_a^b W(x) \left[\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_n'(x_i)(x - x_i)} \right] dx = \frac{1}{\varphi_n'(x_i)} \int_a^b W(x) \frac{\varphi_n(x)}{x - x_i} dx \quad (3.2.3)$$

şeklinde de yazılabilir. $p(x) = \varphi_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$ alıp (3.1.8) deki ifadede yerine yazarsak

$$\int_a^b W(x)\varphi_k(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i \varphi_k(x_i), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikler sistemi, matrisler kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_0(x_2) & \dots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

Ağırlıklar yukarıdaki bağıntılarından herhangi birisi kullanılarak hesaplanabilir. Fakat bu bağıntılar büyük n değerleri için pratik olarak kullanılmaya elverişli değildir. Bu yüzden ağırlıkların hesaplanmasını kolaylaştıran

$$w_i = - \left(\frac{A_{n+1}}{A_n} \right) \frac{\varphi_n(x_i) \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle}{\varphi_{n+1}(x_i) \varphi_n'(x_i)} \quad (3.2.5)$$

formülünü kullanabiliriz [20]. Burada $\{x_i\}$ değerleri $\varphi_n(x) = A_n x_n + \dots$ ortogonal polinomların kökleridir.

3.3 Gauss-Legendre İntegrasyon Kuralı ([19,20])

Bu integrasyon kuralı $[-1,1]$ aralığında $W(x) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre oluşturulur. n . dereceden $P_n(x)$ Legendre polinomunun kökleri integrasyon noktalarıdır. Legendre polinomları

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (3.3.1)$$

Rodrigues formülünden elde edilebilir.

Teorem 3.1.1 deki (3.1.4) ifadesi kullanılarak $\varphi_n(x)$ ortogonal polinomları ile Legendre Polinomları arasında

$$\varphi_n(x) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} P_n(x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.3.2)$$

bağıntısı sağlanır. Ayrıca $P_n(x)$ Legendre Polinomu ,

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] + n(n+1)P_n = 0, \quad (-1 < x < 1) \quad (3.3.3)$$

diferansiyel denkleminde ve

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (3.3.4)$$

yineleme bağıntısına sahiptir. $P_n(x)$ Legendre Polinomunun normu

$$\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n \rangle = \int_{-1}^1 |P_n(x)|^2 dx = \frac{2}{2n+1} \quad (3.3.5)$$

ifadesinden elde edilir ve üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}}$$

şeklindedir. Bazı türev bağıntıları ise aşağıdaki şekildedir:

$$(x^2-1)P'_n(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (3.3.6)$$

$$(n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) \quad (3.3.7)$$

$$P'_{n+1}(x) = P'_{n-1}(x) + (2n+1)P_n(x) \quad (3.3.8)$$

(3.3.4) ve (3.3.6) bağıntıları kullanılırsa

$$P_{n+1}(x_i) = \frac{(x_i^2-1)P'_n(x_i)}{n+1} \quad (3.3.9)$$

elde edilir. Bu ifadedeki x_i değerleri $P_n(x)$ polinomunun kökleridir.

(3.3.5) ve (3.3.9), (3.2.5) ifadesindeki formülde yerine yazılıp düzenlenirse Gauss Legendre integrasyon metodunun ağırlıkları için

$$w_i = \frac{2}{(x_i^2-1)[P'_n(x_i)]^2} = \frac{2(1-x_i^2)}{[nP_{n-1}(x_i)]^2} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.10)$$

formülü elde edilir [20].

3.4 Gauss-Laguerre İntegrasyon kuralı ([19,20])

Bu integrasyon kuralı $[0, \infty]$ aralığında ($\alpha > -1, m = 0, 1, \dots$) olmak üzere $W(x) = x^\alpha e^{-x}$, ağırlık fonksiyonuna göre oluşturulur. n . dereceden $L_n^\alpha(x)$ Laguerre polinomunun kökleri integrasyon noktalarıdır. Laguerre polinomları

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} f(x) dx$$

biçimindeki integrallerin hesaplanmasında önemli rol oynarlar. Bu polinomlar

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^\alpha e^{-x}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\alpha} e^{-x}], (n = 0, 1, \dots) \quad (3.4.1)$$

Rodrigues formülünden elde edilebilir.

Teorem 3.1.1 deki (3.1.4) ifadesi kullanılarak $\varphi_n(x)$ ortogonal polinomları ile Laguerre Polinomları arasında

$$\varphi_n(x) = \frac{n!}{(-1)^n} L_n^\alpha(x) \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.4.2)$$

bağıntısı sağlanır. Ayrıca Laguerre polinomları

$$\frac{d}{dx} \left[x^{\alpha+1} e^{-x} \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} \right] + n e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) = 0 \quad (3.4.3)$$

diferansiyel denkleminde ve

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) = (2n+\alpha+1-x)L_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) \quad (3.4.4)$$

yineleme bağıntısına sahiptir. Laguerre polinomlarının normu

$$\|L_n^\alpha\|^2 = \langle L_n^\alpha, L_n^\alpha \rangle = \int_0^\infty e^{-x} |L_n^\alpha(x)|^2 dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \quad (3.4.5)$$

eşitliğinden elde edilir ve üretic fonksiyonu

$$(1-t)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{xt}{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} t^n L_n^\alpha(x) \quad (3.4.6)$$

şeklindedir. (3.4.5) ifadesindeki $\Gamma(x)$, Gamma fonksiyonunu gösterir. Bu fonksiyon

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(n+1) = n!$$

özelliklerine sahiptir. $L_n^\alpha(x)$ de $\alpha = 0$ için bu polinom Klasik Laguerre Polinomları adını alır. Laguerre Polinomlarının yukarıda yazdığımız özellikleri $\alpha = 0$ alınırsa Klasik Laguerre Polinomları için de geçerli olur. Laguerre Polinomları ile ilgili bazı bağıntılar

$$x \frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = n L_n^\alpha(x) - (n+\alpha) L_{n-1}^\alpha(x) \quad (3.4.7)$$

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = \frac{d}{dx} L_{n-1}^\alpha(x) - L_{n-1}^\alpha(x) \quad (3.4.8)$$

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = L_{n-1}^{\alpha+1}(x) = \frac{1}{x} [L_n^\alpha(x) - (n + \alpha) L_{n-1}^\alpha(x)] \quad (3.4.9)$$

şeklindedir. Laguerre Polinomunun yukarıda verilen özellikleri Gauss Laguerre integrasyon kuralının ağırlıklarını hesaplamaya yarayan

$$w_i = \frac{\Gamma(n + \alpha) x_i}{n! (n + \alpha) [L_{n-1}^\alpha(x_i)]^2} \quad (3.4.10a)$$

$$= \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) x_i}{n! (n + 1)^2 [L_{n+1}^\alpha(x_i)]^2}, (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.4.10b)$$

formülünün elde edilmesi için yeterlidir. Bu ifadedeki x_i değerleri $L_n^\alpha(x)$ polinomunun kökleridir. [20]

3.5 Gauss-Hermite İntegrasyon Kuralı ([19,20])

Bu integrasyon kuralı $[-\infty, \infty]$ aralığında $W(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre oluşturulur. n . dereceden $H_n(x)$ Hermite polinomunun kökleri integrasyon noktalarıdır. Hermite polinomları

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx$$

biçimindeki integrallerin hesaplanmasında önemli rol oynarlar. Bu polinomlar

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5.1)$$

Rodrigues formülünden elde edilebilir.

Teorem 3.1.1 deki (3.1.4) ifadesi kullanılarak $\varphi_n(x)$ ortogonal polinomları

ile Hermite Polinomları arasında

$$\varphi_n(x) = 2^{-n} H_n(x) \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.5.2)$$

bağıntısı sağlanır. Ayrıca Hermite polinomları

$$H_n''(x) = 2x H_n'(x) - 2n H_n(x) \quad (3.5.3)$$

diferansiyel denkleminde ve

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (3.5.4)$$

yineleme bağıntısına sahiptir. Hermite polinomlarının normu

$$\|H_n\|^2 = \langle H_n, H_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} |H_n(x)|^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (3.5.5)$$

eşitliğinden elde edilir ve üreteç fonksiyonu

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \quad (3.5.6)$$

şeklindedir.

Hermite polinomlarının diğer bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

$$H'_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x) \quad (3.5.7)$$

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \quad (3.5.8)$$

Gauss Hermit integrasyon kuralı için ağırlıklar aşağıdaki formülden elde edilebilir. [20]

$$w_k = -\frac{A_{n+1}}{A_n} \frac{\langle H_n, H_n \rangle}{H_{n+1}(x_i)H'_n(x_i)} = \frac{2^{n-1}n!\sqrt{\pi}}{n^2[H_{n-1}(x_i)]^2} \quad (3.5.9)$$

Burada bu ifadedeki x_i değerleri $H_n(x_i)$ polinomunun kökleridir.

3.6 Gauss-Chebyshev İntegrasyon Kuralı ([19,20])

Bu integrasyon kuralı $[-1,1]$ aralığında $W(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre oluşturulur. n . dereceden $T_n(x)$ Chebyshev polinomunun kökleri integrasyon noktalarıdır. Chebyshev polinomları

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

biçimindeki integrallerin hesaplanmasında önemli rol oynarlar. Bu polinomlar

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-1/2} \quad (3.6.1)$$

Rodrigues formülünden elde edilebilir.

Teorem 3.1.1 deki (3.1.4) ifadesi kullanılarak $\varphi_n(x)$ ortogonal polinomları ile

Chebyshev Polinomları arasında

$$\varphi_n(x) = 2^{1-n} T_n(x) \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.6.2)$$

bağıntısı sağlanır. Ayrıca Chebyshev polinomları

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0 \quad (3.6.3)$$

diferansiyel denkleminde ve

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (3.6.4)$$

yineleme bağıntısına sahiptir. Chebyshev polinomlarının normu

$$\|T_n\|^2 = \langle T_n, T_n \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} |T_n(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \pi \quad (3.6.5)$$

eşitliğinden elde edilir ve üretic fonksiyonu

$$\frac{1-xt}{1-xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n \quad (3.6.6)$$

şeklindedir.

Chebyshev polinomlarının diğer bazı özellikleri aşağıda verilmiştir:

$$T_0(x) \equiv 1, \quad T_n(x) = \cos(ncos^{-1} x), n = 0, 1, \dots \quad (3.6.7)$$

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k}, n = 1, 2, \dots \quad (3.6.8)$$

Yukarıda verilen bağıntılardan Gauss Chebyshev integrasyon kuralı için ağırlıklar

$$w_k = -\frac{\pi}{T_{n+1}(x_k)T_n'(x_k)}, k = 1, 2, \dots, n \quad (3.6.9)$$

olarak bulunur. (3.6.7) kullanılarak $T_n(x)$ polinomunun kökleri bulunur.

$$T_n(x) = \cos(ncos^{-1} x) = 0 \Rightarrow x_k = \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right], k = 1, 2, \dots, n.$$

ve bu değerler (3.6.9) eşitliğinde yerine konursa,

$$T'_n(x_k) = \frac{(-1)^{k+1}n}{\sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right]}, \quad T_{n+1}(x_k) = (-1)^k \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right]$$

olduğundan, Gauss Chebyshev integrasyon kuralının ağırlıkları

$$w_k = \frac{\pi}{n}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.6.10)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla, Gauss Chebyshev kuralı aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f \left(\cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) + E(f) \quad (3.6.11)$$

. Burada $E(f)$ hatayı gösterir.

3.7 Matrisler Kullanılarak İntegrasyon Noktaları ve Ağırlıkların Hesaplanması

Bundan önceki kısımlarda bahsettiğimiz Gauss integrasyon kuralları ortogonal polinomlar kullanılarak oluşturuldu. İntegrasyon apsileri olarak kullanılan değerler, φ_n ortogonal polinomların kökleri olarak bahsedilmişti. Bu kökler ya hazır olarak mevcuttur ya da bu köklerin hesaplanmasına yarayan ve bu polinomlar için özel olarak geliştirilmiş çok iyi programlar kullanılarak bulunmaktadır.

Teorem 3.7.1 $a_k, b_k > 0$ olmak üzere $\{ \varphi_k | k = 0, 1, \dots, n \}$

$$\begin{aligned} \varphi_{-1}(x) &= 0, \\ \varphi_0(x) &= 1, \\ \varphi_{k+1}(x) &= (x - a_k)\varphi_k(x) - b_k\varphi_{k-1}(x), k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

yineleme bağıntısı ile elde edilen ortogonal polinomlar ve

$$J_n = \begin{bmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & 0 & & \\ \sqrt{b_1} & a_n & \sqrt{b_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \sqrt{b_{n-2}} & a_{n-2} & \sqrt{b_{n-1}} \\ & & 0 & \sqrt{b_{n-1}} & a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.7.2)$$

simetrik üç köşegenli Jacobi Matrisi olmak üzere $\{ \varphi_k | k = 0, 1, \dots, n \}$ polinomlarına dayalı Gauss integrasyon kuralının integrasyon noktaları J_n matrisinin özdeğerlerine eşittir. [19]

Matriste kullanılan a_k, b_k katsayıları daha önce Teorem 3.1.1 de (3.1.4) eşitliğinde verilmişti. Ayrıca

$$v_i = [v_{i1} \ v_{i2} \ \dots \ v_{in}]^T$$

J_n Jacobi matrisinin x_i özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü ise, w_i ağırlığı J_n 'nin normalize edilmiş i 'ninci özvektörünün birinci bileşeninin karesi ile μ_0 momentinin çarpımına eşittir. Yani,

$$w_i = \mu_0 \frac{(v_{i1})^2}{v_i^T v_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7.3)$$

[21,22] . Burada, bundan sonraki bölümde bahsedeceğimiz momentler

$$\mu_k = \int_a^b W(x) x^k dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.7.4)$$

(3.7.1) ifadesindeki b_0 'ı μ_0 olarak alabiliriz.

BÖLÜM 4

HIZLI DÜŞÜŞ METODU İLE FREUD TİPİ AĞIRLIK FONKSİYONLARINA GÖRE GAUSS İNTEGRASYON METOTLARININ OLUŞTURULMASI VE BU METOTLARIN YÜKSEK SALINIMLI İNTEGRALLERE UYGULANMASI

4.1 Hızlı Düşüş (Dik İniş) Metodu: ([23])

$$\int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx, \quad (0 \leq a < b < \infty)$$

integralini göz önüne alalım.

Burada $g(x) = (x - a)^m$, $m=1,2,\dots$, alacağız. Bu integrale $(x - a) = u$ değişken değişimi yaparsak

$$\int_0^{b-a} f(u + a) e^{i\omega u^m} du$$

integrali elde edilir. Bu integrali de $a = 0$ alarak aşağıdaki şekilde düşünebiliriz:

$$I = \int_0^b f(x) e^{i\omega x^m} dx \quad (4.1.1)$$

Şimdi (4.1.1) de $x^m = t$ değişken değişimi yapılırsa

$$\int_0^{b^m} f\left(t^{\frac{1}{m}}\right) e^{i\omega t} \frac{1}{m} t^{\frac{1}{m}-1} dt \quad (4.1.2)$$

elde edilir.

Yukarıda tanımlanan integraller salınımlı integrallerdir. İntegrallerdeki salınım $e^{i\omega g(x)}$ fonksiyonundan kaynaklanmaktadır. Amacımız bu salınımı ortadan kaldırmaktır. *Hızlı Düşüş (Dik İniş) Metoduyla* bu mümkündür.

Hızlı Düşüş Metodu genel olarak yüksek salınlı integraller için geliştirilmiş bir metottur. İntegrallerdeki salınımı ya ortadan kaldırır ya da azaltır. Bu metod integrallerin hesaplanmasında etkili ve ekonomik, aynı zamanda nümerik olarak stabil (kararlı) bir metottur.

4.2. Hızlı Düşüş (Dik İniş) Metodu İle Freud Tipi Ağırlık Fonksiyonlarına Göre Gauss İntegrasyon Metotlarının Oluşturulması ve Bu Metotların Yüksek Salınlı İntegrallere Uygulanması:

$$W(x) = e^{-x^m} \quad (4.2.1)$$

ağırlık fonksiyonunu göz önüne alalım. Asıl problemimiz bu ağırlık fonksiyonuna göre Gauss integrasyon metodu nasıl oluşturulur? $[0, \infty]$ aralığında bu ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal polinomları analitik olarak elde etmenin bir yolu henüz bulunamamıştır. Bu yüzden öncelikle 3.bölümde Teorem 3.1.1 de verilen a_n ve b_n yineleme katsayılarının nümerik olarak hesaplanması gerekmektedir. Bu katsayılar bazı yöntemlerle elde edilebilir. Bunlardan biri de bu katsayıların momentler yoluyla elde edilmesidir. Bu yöntem ve bu yöntemi kullanma gerekçeleri aşağıda verilmiştir.

4.2.1 Katsayıların Momentler Yoluyla Elde Edilmesi

Hankel determinanı

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-2} \end{vmatrix}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada μ_k bir önceki bölümde de belirttiğimiz gibi

$$\mu_k = \int_a^b W(x)x^k dx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \mu_0 > 0$$

olarak tanımlanır. Δ'_n, Δ_{n+1} Hankel determinantının sondan bir önceki sütunun ve son satırın çıkarılmasıyla elde edilen determinant olarak tanımlansın [19] :

$$\Delta'_0 = 0, \quad \Delta'_1 = \mu_1, \quad \Delta'_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-2} & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n-1} & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-3} & \mu_{2n-1} \end{vmatrix} \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.2.3)$$

Şimdi (4.2.2) ve (4.2.3) ifadelerindeki determinantları göz önüne alarak aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 4.1 $\tilde{\pi}_n(x)$ n . dereceden monik ortogonal polinomu aşağıdaki gibi determinant yoluyla elde edilebilir.[19]

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & t & \dots & t^n \end{vmatrix} = t^n - \frac{\Delta'_n}{\Delta_n} t^{n-1} + \dots, n = 1, 2, \dots \quad (4.2.4)$$

İspat: İspat için bkz. [19]

Aşağıdaki teorem yukarıda tanımlanan determinantlar ile a_n ve b_n katsayılarının hesaplanabildiği gösterir.

Teorem 4.2 $\tilde{\pi}_n$ monik ortogonal polinomu için yineleme katsayıları aşağıdaki şekildedir.

$$a_n = \frac{\Delta'_{n+1}}{\Delta_{n+1}} - \frac{\Delta'_n}{\Delta_n}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.5)$$

$$b_n = \frac{\Delta_{n+1}\Delta_{n-1}}{\Delta_n^2}, n = 1, 2, \dots \quad (4.2.6)$$

İspat: İspat için bkz. [19]

Yukarıda verilen (4.2.5) ve (4.2.6) formülleri yineleme katsayılarını hesaplamada tavsiye edilmez. Çünkü bu katsayıları hesaplamak için ya Laplace açılımı yapmak gerekir ya da L alt üçgensel U üst üçgensel matris olmak üzere LU ayrışımını kullanmak gerekir. Bu da çok fazla işlem gerektirir ve stabil değildir. Bu yüzden Gautschi, modifiye edilmiş Chebyshev algoritmasının kullanılmasını tavsiye eder.

Bu Chebyshev algoritması aşağıda verilmiştir.

Chebyshev algoritması ([19, 20])

$$\begin{aligned} a_0 &= \mu_1/\mu_0, \quad b_0 = \mu_0 \\ \sigma_{-1,j} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n-2 \\ \sigma_{0,j} &= \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, 2n-1 \end{aligned}$$

For $k = 1, 2, \dots, n-1$ do

$$\begin{aligned} \sigma_{k,j} &= \sigma_{k-1,j+1} - a_{k-1}\sigma_{k-1,j} - b_{k-1}\sigma_{k-2,j}, \quad j = k, k+1, \dots, 2n-k-1 \\ a_k &= \sigma_{k,k+1}/\sigma_{k,k} - \sigma_{k-1,k}/\sigma_{k-1,k-1} \\ b_k &= \sigma_{k,k}/\sigma_{k-1,k-1} \end{aligned}$$

Bu algoritma daha ekonomiktir ve daha az işlem gerektirir. Fakat bu algoritma da tam olarak stabil değildir. Bu yüzden Chebyshev algoritmasındaki momentlerin ya sembolik olarak ya da çok yüksek duyarlılıkla hesaplanması gerekmektedir. Bizim şansımızdan, Freud tipi ağırlık fonksiyonları için momentler sembolik olarak, Gamma fonksiyonu cinsinden, elde edilebilmektedir:

$$\mu_k = \int_a^b x^k e^{-x^m} dx = \frac{1}{m} \Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right), \quad k = 0, 1, \dots$$

Aşağıdaki Tablo 4.1, Tablo 4.2 ve Tablo 4.3’de $W_m(x) = \exp(-x^m)$, $m = 2, 3, 4$, ağırlık fonksiyonlarına göre Chebyshev Algoritmasında 150 basamak duyarlılık kullanarak elde edilen a_n ve b_n yineleme katsayıları verilmiştir. Benzer şekilde m ’nin başka değerleri için de bu katsayılar hesaplanabilir.

Tablo 4.1: $W(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre Chebyshev Algoritması kullanılarak oluşturulan a_n ve b_n katsayıları.

N	a_n	b_n
1	0.5641895835477562869480794515	0.8862269254527580136490837416
2	0.9884253928468002854870633587	0.1816901138162093284622324732
3	1.2859676193639399602827887260	0.3413251289594391985641717805
4	1.5247208440801153035130022763	0.5049621529880016319357511554
5	1.7301922743094392567715613980	0.6702641946396190856785083910
6	1.9134998431431025707186744531	0.8361704992803110155488235278
7	2.0806203364008332248176222241	1.0023478510110108422245382000
8	2.2352283805046391496583172950	1.1686711647442727438147851444
9	2.3797824435046374209405350458	1.3350829222423353579798779421
10	2.5160256434438664097634179698	1.5015525993447618438952914329
11	2.6452479250569531803261722004	1.6680623621881161688454808264
12	2.7684359535042559069132735915	1.8346010527937676419913598361
13	2.8863645940326945692708674993	2.0011613185512137843317104169
14	2.9996556533536035386906268743	2.1677381117632644853481959563
15	3.1088171759249201516926963722	2.3343278495405013980184823375
16	3.2142706360711282274489138373	2.5009279171337026699543207674
17	3.3163702970830873659208156975	2.6675363609572020882810741328
18	3.4154173324133389445368691110	2.8341516916678327579204958902
19	3.5116703446156295154051050586	3.0007727537827190275850360767
20	3.6053533459055664302954823302	3.1673986369644268117575670619
21	3.6966619115045907999685939739	3.3340286142031102452513292626
22	3.7857679927002249484946054222	3.5006620978281146517242161825
23	3.8728237301852214895392359107	3.6672986076183948893640172548
24	3.9579645104229992917022032498	3.8339377472958318506146765426
25	4.0413114410343916384468670119	4.0005791869361956805814791529
26	4.1229733747796281836030272921	4.1672226496283331945572198098
27	4.2030485788720019526602771862	4.3338679012299504436044302625
28	4.2816261227682035852100860580	4.5005147424120943373511796426
29	4.3587870403898888525030682138	4.6671630024168257031595689610
30	4.4346053100412971727359268038	4.8338125341123277420267271402
31	4.509148685807793332742999188	5.0004632100412028349661109390
32	4.5824794070596267694605327867	5.1671149192366474464102065450
33	4.6546548072209951034250254583	5.3337675646378040182685821144
34	4.7257278387550172210545015603	5.5004210609766768917210652224
35	4.7957475280435453272958093455	5.6670753330391570642955682952
36	4.8647593712768612584458606016	5.8337303142250673602328783217
37	4.9328056804434948602898732480	6.0003859453488901957077630057
38	4.9999258868996881314362460126	6.1670421736354994723181628945
39	5.0661568087079578163326913880	6.3336989518748675754822847768
40	5.1315328868942965193196920906	6.5003562377071329380351548164

Tablo 4.2: $W(x) = e^{-x^3}$ ağırlık fonksiyonuna göre Chebyshev Algoritması kullanılarak oluşturulan a_n ve b_n katsayıları.

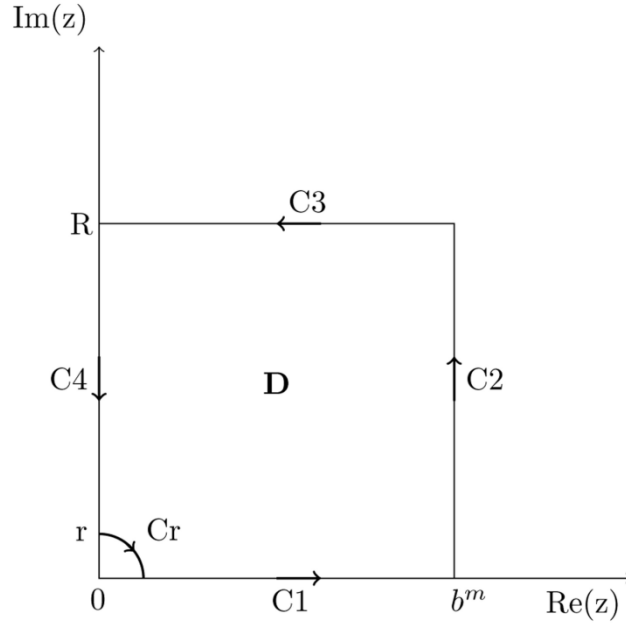
N	a_n	b_n
1	0.5054680881560892780320687454	0.8929795115692492112185643136
2	0.7226348664833369136115949228	0.1177841857632231864536460668
3	0.8692882757695939617175301639	0.1697400428612904305233044907
4	0.9749922051523184735146230639	0.2181674313917282684498784132
5	1.0611698144195765789639875732	0.2628303463419099355990119707
6	1.1351119261170298708945447590	0.3042143899457009645271017938
7	1.2004347677717856082662605025	0.3430590355702954101407095887
8	1.2592936519456071245968346064	0.3798748839163785458933575769
9	1.3130898807554168480269835636	0.4150201477139501999281028813
10	1.3627924506244114151019190572	0.4487573835433915654532292920
11	1.4091030992819566485213497291	0.4812855572606512482672935996
12	1.4525484726755266305505258000	0.512759661166688810592784725
13	1.4935352085725111723524419292	0.5433032520097659153985868508
14	1.5323846590914736712001734528	0.5730167576776715109021153834
15	1.5693557379424343643277851540	0.6019831630206301079400346122
16	1.6046604955043460034394741410	0.6302720150349986348356848980
17	1.6384750570513262020646309672	0.6579423158085268102505150556
18	1.6709475019934206493075226966	0.6850446584837777832019631525
19	1.7022036653732748948851537550	0.7116228350819671235574493365
20	1.7323514920163192587959729113	0.7377150676438892099574683201
21	1.7614843599411278944323189480	0.7633549653885194071672751065
22	1.7896836552598686011526193035	0.7885722790606476256467779573
23	1.8170207940047283169206117366	0.8133935027639770778931449865
24	1.8435588288855982291404916355	0.8378423594575769778955116056
25	1.8693537401547435849412321019	0.8619401965582968038212592863
26	1.8944554829872121478593413473	0.8857063112598238521655051111
27	1.9189088450079165692997669935	0.9091582203070667486452114565
28	1.9427541542117511537121344868	0.9323118854387871595746921815
29	1.9660278678431228735744557626	0.9551819031252129452409241969
30	1.9887630657066679067660484260	0.9777816653066255024361221927
31	2.0109898661170686275588551558	1.0001234963959086036599282729
32	2.0327357787459252440068063495	1.0222187707123455093611930673
33	2.0540260056283937457286732634	1.0440780136736938652308540743
34	2.0748836992988052749599186167	1.0657109894232372943541355820
35	2.0953301852523293787989636807	1.0871267770608308312347968405
36	2.1153851545487862718411963674	1.1083338372474325967251584279
37	2.1350668312900374970798054025	1.1293400706358236186168156321
38	2.1543921188440694053802016534	1.1501528693272423743378423652
39	2.1733767280049305088171257938	1.1707791623502936677842498745
40	2.1920352897290754271949820804	1.1912254559939736324179292269

Tablo 4.3: $W(x) = e^{-x^4}$ ağırlık fonksiyonuna göre Chebyshev Algoritması kullanılarak oluşturulan a_n ve b_n katsayıları.

N	a_n	b_n
1	0.4888705337234618988157677341	0.9064024770554770779826712889
2	0.6281864152227862924132726436	0.0989947212905798668158138413
3	0.7274984625289988637169403174	0.1236039149049104327632550544
4	0.7931666776785689060242193269	0.1484325533683921157398724010
5	0.8455006807036930418281097581	0.1703757731250912724536811376
6	0.8894738573267510645084357972	0.1899364316665824053764347701
7	0.9276872000259162318560618216	0.2077433494291553857453961582
8	0.9616566441600093848686402921	0.2241800698275304382736451115
9	0.9923472468677555466578381608	0.2395143884145004569658076166
10	1.0204171215207083426109177749	0.2539387299518882122030356437
11	1.0463372701512168195744403145	0.2675961332509920947426699442
12	1.0704575902650673656445958368	0.2805961111403854034359953670
13	1.0930458350503219779451998474	0.2930245928556083880919017849
14	1.1143119096302551334691215337	0.3049504133652210091027412234
15	1.1344237100022280517221623979	0.3164296927495724287526563601
16	1.1535178319357899849026415328	0.3275088806325776980161770377
17	1.1717070362388493988536105866	0.3382269282753490514094565830
18	1.1890855902011758356039020745	0.3486168739558260813447846862
19	1.2057331762846359415299617644	0.3587070235290072637319542732
20	1.2217178089736984982893863013	0.3685218452626110390446247932
21	1.2370980493338568790374311591	0.3780826588887837773169857883
22	1.2519247122938861248267761067	0.3874081737416843383703354526
23	1.2662422009683794310866758780	0.396514914406449195745727221
24	1.2800895623911959874184536082	0.4054175612813254714430691702
25	1.2935013321592688828156370164	0.4141292259173105550354914401
26	1.3065082170504410547556928482	0.4226616757524033541201759048
27	1.3191376518033485778204347068	0.4310255191442368715101338943
28	1.3314142571083574229523768849	0.4392303589372393244981178828
29	1.3433602192753623498315522060	0.4472849208574414584100579688
30	1.3549956072375764123584335675	0.4551971615946791407831879677
31	1.3663386389969644140292540095	0.4629743603620474463576235393
32	1.3774059069596455612524378098	0.4706231969151305354917554380
33	1.3882125696011830242338143975	0.4781498183981312578307253688
34	1.3987725153686710336067690314	0.4855598969104856668566348336
35	1.4090985035455914420943597859	0.4928586793199494722057993566
36	1.4192022858878477708677650809	0.5000510305604267931076716841
37	1.4290947121207110513437709255	0.5071414714258735794296437187
38	1.4387858218192631640039610532	0.5141342116913076742339103771
39	1.4482849247441745112363436509	0.5210331792477300445646003220
40	1.4576006713440198665086629425	0.5278420458216459156910837519

Şimdi (4.1.1) ifadesindeki integrale Hızlı Düşüş Metodunu uygulayalım. Öncelikle bir kontur (kapalı eğri) belirlememiz gerekir.

Aşağıdaki Şekil 4.1 hızlı düşüş metodu için bir kontur belirtmektedir.



Şekil 4.1. Hızlı düşüş metodu için bir kontur

Şimdi yukarıdaki şekli düşünelim. C , D bölgesini sınırlayan

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_r$$

kapalı eğrisi (kontur) olsun. Burada

$$C_1 : \gamma_1(t) = t, \quad r \leq t \leq b^m$$

$$C_2 : \gamma_2(t) = b^m + it, \quad 0 \leq t \leq R$$

$$C_3 : \gamma_3(t) = t + iR, \quad 0 \leq t \leq b^m$$

$$C_4 : \gamma_4(t) = it, \quad r \leq t \leq R$$

$$C_r : \gamma_r(t) = re^{it}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

dir. C_1, C_2, C_3, C_4, C_r kapalı bir bölge oluşturduğundan bu eğriler boyunca aynı yönde alınan integrallerin toplamı *Cauchy-Goursat* teoreminden sıfır olur. Bu teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.3 (Cauchy-Goursat, [24, s. 151]) : Eğer $f(z)$ basit bağlantılı kapalı bir C eğrisi üzerindeki ve bu eğrinin sınırladığı bölgedeki her noktada analitik ise

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

dır.

İspat: İspat için bkz. [24]

Tanım 4.1: Bir B bölgesindeki tüm z 'ler için $|f(z)| \leq M e^{\omega_0 |z|}$ sağlayan bir M ve ω_0 sayıları varsa $f(z)$ fonksiyonuna B bölgesinde üstel mertebededir denir.

Teorem 4.4: $f(z)$, $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re}(z) \leq b, \text{Im}(z) > 0\}$ yarı şeridi üzerinde $\{\omega_0, M\}$ sabitleri ile üstel mertebeden ve analitik ise B bölgesindeki her basit bağlantılı kapalı eğri C üzerindeki çevre integrali sıfırdır,

$$\oint_C f(z) e^{i\omega z^m} dz = 0,$$

ve her $\omega > \omega_0$ için

$$\begin{aligned} I &= -\frac{e^{i\omega b^m}}{m} \int_0^\infty f\left(\left(b^m + \frac{i u}{\omega}\right)^{\frac{1}{m}}\right) e^{-u} \left(b^m + \frac{i u}{\omega}\right)^{\frac{1}{m}-1} du \\ &+ \left(\frac{i}{\omega}\right)^{\frac{1}{m}} \int_0^\infty f\left(\left(\frac{i}{\omega}\right)^{\frac{1}{m}} u\right) e^{-u^m} du \end{aligned}$$

sağlanır.

İspat: İntegrandın D bölgesinin kapanışında analitik olduğu gösterilebilir.

Dolayısıyla

$$\oint_C f(z) e^{i\omega z^m} dz = 0$$

olduğu Cauchy-Goursat Teoreminin bir sonucudur.

Şimdi (4.1.1) integralinin yerine (4.1.2) integrali kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= \underbrace{\int_{(c_1)}^r f\left(t^{\frac{1}{m}}\right) e^{i\omega t} \frac{1}{m} t^{\frac{1}{m}-1} dt + \int_{(c_2)}^R f\left((b^m + it)^{\frac{1}{m}}\right) e^{i\omega(b^m + it)} \frac{1}{m} (b^m + it)^{\frac{1}{m}-1} idt}_{I_1} \\
&+ \underbrace{\int_{(c_3)}^0 f\left((t + iR)^{\frac{1}{m}}\right) e^{i\omega(t + iR)} \frac{1}{m} (t + iR)^{\frac{1}{m}-1} dt}_{I_2} + \underbrace{\int_{(c_4)}^r f\left((it)^{\frac{1}{m}}\right) e^{i\omega(it)} \frac{1}{m} (it)^{\frac{1}{m}-1} idt}_{I_3} \\
&+ \underbrace{\int_{(c_r)}^0 f\left((re^{it})^{\frac{1}{m}}\right) e^{i\omega re^{it}} \frac{1}{m} (re^{it})^{\frac{1}{m}-1} ire^{it} dt}_{I_4} \tag{4.2.7}
\end{aligned}$$

elde edilir.

I_1 integrali için

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^R f\left((b^m + it)^{\frac{1}{m}}\right) e^{i\omega(b^m + it)} \frac{1}{m} (b^m + it)^{\frac{1}{m}-1} idt \\
&= \frac{e^{i\omega b^m}}{m} \int_0^\infty f\left((b^m + it)^{\frac{1}{m}}\right) e^{-\omega t} (b^m + it)^{\frac{1}{m}-1} dt
\end{aligned}$$

elde edilir. $\omega t = u$ değişken değişimi yapıp $R \rightarrow \infty$ alınırsa integral

$$I_1 = \frac{e^{i\omega b^m}}{m} \int_0^\infty f\left(\left(b^m + \frac{i u}{\omega}\right)^{\frac{1}{m}}\right) e^{-u} \left(b^m + \frac{i u}{\omega}\right)^{\frac{1}{m}-1} du \tag{4.2.8}$$

biçimine dönüşür.

I_3 integrali için

$$I_3 = \int_R^r f\left((it)^{\frac{1}{m}}\right) e^{i\omega(it)} \frac{1}{m} (it)^{\frac{1}{m}-1} idt = \frac{(i)^{\frac{1}{m}}}{m} \int_R^r f\left((it)^{\frac{1}{m}}\right) e^{-\omega t} (t)^{\frac{1}{m}-1} dt$$

elde edilir. $\omega t = u$ değişken değişimi yapılsa integral

$$I_3 = \frac{1}{m} \left(\frac{i}{\omega}\right)^{\frac{1}{m}} \int_R^r f\left(\left(\frac{i}{\omega}\right)^{\frac{1}{m}} u^{\frac{1}{m}}\right) e^{-u} (u)^{\frac{1}{m}-1} du$$

şeklinde olur. Bu integralde de $u^{\frac{1}{m}} = t$ değişken değişimi yapıp $R \rightarrow \infty$ ve $r \rightarrow 0$ alınırsa integral

$$I_3 = -\left(\frac{i}{\omega}\right)^{\frac{1}{m}} \int_0^\infty f\left(\left(\frac{i}{\omega}\right)^{\frac{1}{m}}.t\right) e^{-t^m} dt \quad (4.2.9)$$

biçimine dönüşür.

I_2 integrali ise $R \rightarrow \infty$ iken 0 a gider. Bu aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{b^m}^0 f\left((t+iR)^{\frac{1}{m}}\right) e^{i\omega(t+iR)} \frac{1}{m} (t+iR)^{\frac{1}{m}-1} dt \right| \\ &= \left| - \int_0^{b^m} f\left((t+iR)^{\frac{1}{m}}\right) e^{i\omega t} e^{-\omega R} \frac{1}{m} (t+iR)^{\frac{1}{m}-1} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{m} e^{-\omega R} \int_0^{b^m} |f\left((t+iR)^{\frac{1}{m}}\right)| |(t+iR)^{\frac{1}{m}-1}| dt \\ &\leq \frac{1}{m} M e^{-\omega R} e^{\omega_0 R + \omega_0 b^m} \int_0^{b^m} |(t+iR)^{\frac{1}{m}-1}| dt \\ &\leq \frac{1}{m} M e^{-\omega R} e^{\omega_0 R} e^{\omega_0 b^m} \int_0^{b^m} |(t+iR)^{\frac{1}{m}-1}| dt \end{aligned}$$

eşitsizliği $R > 1$ için sağlanır. Son integralde, her $R > 1 + b^m$ ve her $t \in [0, b^m]$ için $|(t+iR)^{\frac{1}{m}-1}| < 1$ sağlandığından, I_2 integrali $\omega > \omega_0$ ise $R \rightarrow \infty$ için sıfır olur.

I_4 integrali için

$$\begin{aligned} |I_4| &= \left| - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f((re^{it})^{\frac{1}{m}}) e^{i\omega re^{it}} \frac{1}{m} (re^{it})^{\frac{1}{m}-1} i r e^{it} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{m} e^{\omega r} r^{\frac{1}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f((re^{-it})^{1/m})| dt \end{aligned}$$

elde edilir. f fonksiyonu B bölgesinde analitik olduğundan $r \geq 0$, $\pi/2 \geq t \geq 0$ için t ve r 'ye göre süreklidir. Dolayısıyla, yukarıdaki eşitsizliğin limiti $r \rightarrow 0^+$ için alınırsa integral sıfıra gider.

Yukarıda elde edilen sonuçlar kullanılırsa

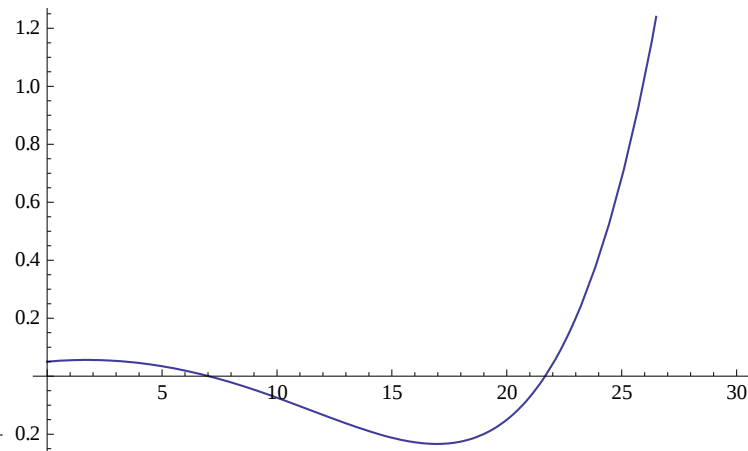
$$\begin{aligned}
& \int_0^{b^m} f\left(u^{\frac{1}{m}}\right) e^{i\omega u} \frac{1}{m} u^{\frac{1}{m}-1} du \\
&= -\frac{e^{iwb^m}}{m} \int_0^\infty f\left(\left(b^m + \frac{i u}{\omega}\right)^{\frac{1}{m}}\right) e^{-u} \left(b^m + \frac{i u}{\omega}\right)^{\frac{1}{m}-1} du \\
&+ \left(\frac{i}{\omega}\right)^{\frac{1}{m}} \int_0^\infty f\left(\left(\frac{i}{\omega}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot u\right) e^{-u^m} du
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

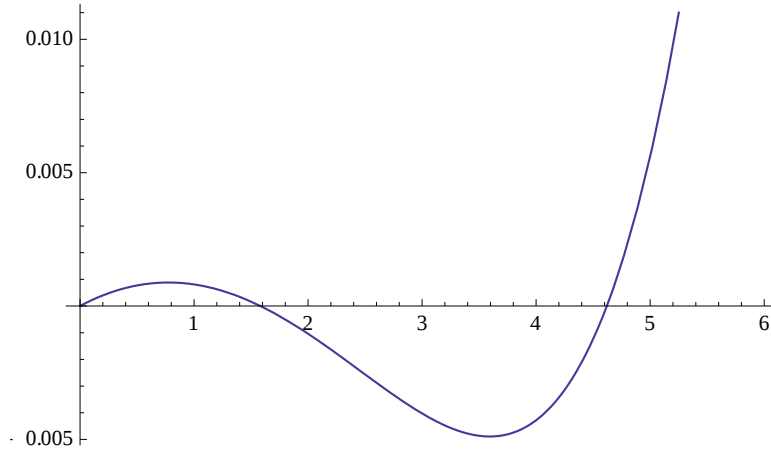
Şimdi salınımlı integralin Hızlı Düşüş Metodu uygulandıktan sonraki grafiğini gösterelim.

Aşağıdaki Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 $f[t] = (t^5 - 4t^2 + 3t + 5)/(t + 100)$,
 $r = 5, \omega = 1000$ için (4.2.9) integralindeki $f[(i/w)^{1/r}t]$ fonksiyonunun sırasıyla reel ve sanal kısmının grafiğini göstermektedir.

Şekil 4.2: $f[(i/1000)^{(1/5)} * t]$ fonksiyonunun reel kısmının grafiği



Şekil 4.3: $f[(i/1000)^{(1/5)} * t]$ fonksiyonunun sanal kısmının grafiği



Hızlı Düşüş Metodu uygulandıktan sonra oluşan bu grafiklerde salınının 1. bölümde verilen grafiklere göre ne kadar azaldığı görülmektedir. Grafikte sağdaki kısım yukarıya doğru gitmektedir. Yani o kısımdan sonra herhangi bir salınım yoktur. Bu da metodun ne kadar etkili olduğunu gösterir.

Oluşturulan metot için MAHEMATİCA PROGRAMI:

```
(***Yineleme katsayılarının elde edilmesi***)
Timing[n=12;d=100;r=2;c=10;
mu[k_]:=Integrate[t^k*Exp[-t^r],{t,0,Infinity}];
a[0]=N[mu[1]/mu[0],d];
b[0]=N[mu[0],d];
Do[σ[-1,j]=0,{j,1,2*n-2}];
Do[σ[0,j]=mu[j],{j,0,2*n-1}];
For[k=1,k<n,k+=1,
Do[σ[k,j]=σ[k-1,j+1]-a[k-1]*σ[k-1,j]-b[k-1]*σ[k-2,j],
{j,k,2*n-k-1}];
a[k]=N[σ[k,k+1]/σ[k,k]-σ[k-1,k]/σ[k-1,k-1],d];
b[k]=N[σ[k,k]/σ[k-1,k-1],d];]
Do[Print[N[a[j],32]," ",N[b[j],32]],{j,0,n-1}];]

(*Bulunan katsayılarla oluşturulan Gauss metodu *)
m=5;d=32;w=1000;
B=ConstantArray[0,{m,m}];
Do[B[[j,j]]=N[a[j-1],d],{j,1,m}];
Do[B[[j+1,j]]=B[[j,j+1]]=N[Sqrt[b[j]],d],{j,1,m-1}];
{X,U}=N[Eigensystem[B],d];
v[i_]:=U[[i,1]];
P[i_]:=v[i]/Norm[U[[i]],2];
W=ConstantArray[0,{m}];
Do[W[[i]]=P[i]^2,{i,1,m}];
W=mu[0]*W;
```

```

f[t_]=(t^5-4t^2+3t+5)/(t+100);
Result1=(I/w)^(1/r)*(W.f[(I/w)^(1/r)*X])

(* İkinci integralin NIntegrate ile hesaplanması *)
Result2=(-I/r)*w^(-1/r)*Exp[I*w*c^r]*NIntegrate[
f[(c^r+I*t/w)^(1/r)](w*c^r+I*t)^(1/r-1)*Exp[-t],
{t,0,Infinity},PrecisionGoal->d,WorkingPrecision->2d]

Sonuc=Result1+Result2

```

Bu Mathematica programında (4.1.1) deki m yerine r alınmıştır. Bu programın giriş kısmında daha önce bahsettiğimiz ve hesapladığımız yineleme katsayılarının programı da yer almaktadır.

Yukarıdaki Mathematica programında $r = 2, 3, 4$ için oluşturulan integrasyon metodunun nokta sayısı, çalışma duyarlılığı ve bunun sonucundaki hata miktarları sırasıyla aşağıdaki Tablo 4.4 , Tablo 4.5 ve Tablo 4.6 da verilmiştir. Bu tablolardaki hata sayıları programda çalışma duyarlılığı ve nokta sayısı iki kat artırılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak elde edilmiştir.

Ayrıca Mathematicanın NIntegrate komutu ile elde edilen sonuçlar da programdan elde edilen sonuçlarla 30 basamağa kadar aynıdır. Ancak, örnekler göstermiştir ki, NIntegrate komutu direkt olarak verilen integrale uygulandığında ya istenen duyarlılıkta sonuç elde edilememekte ya da hesaplama çok uzun sürmektedir.

Tablo 4.4 $r = 2$ için hata miktarı

n	Çalışma duyarlılığı	Hata Miktarı
3	16	$6.2 \times 10^{-17} - 6.2 \times 10^{-17}i$
5	32	$-3.456 \times 10^{-31} + 3.478 \times 10^{-31}i$

Tablo 4.5 $r = 3$ için hata miktarı

n	Çalışma duyarlılığı	Hata Miktarı
3	16	$-3.363 \times 10^{-14} - 1.9301 \times 10^{-14}i$
6	32	$1.103 \times 10^{-30} + 2.951 \times 10^{-30}i$

Tablo 4.6 $r = 4$ için hata miktarı

n	Çalışma duyarlılığı	Hata Miktarı
3	16	$0. \times 10^{-18} + 0. \times 10^{-18}i$
6	32	$7.3 \times 10^{-32} - 1.79 \times 10^{-31}i$

Yukarıdaki tablolar yorumlanacak olursa örneğin; Tablo 4.4 de Gauss integrasyon metodunun nokta sayısı 5 ve çalışma duyarlılığı 32 basamak alınınca, hata miktarı $-3.456 \times 10^{-31} + 3.478 \times 10^{-31}i$ olarak gelmiştir. Yani integral yaklaşık 31 basamak doğru hesaplanmıştır. Bu da çok iyi bir sonuçtur.

Hızlı Düşüş Metodu uygulanarak oluşan (4.2.8) ve (4.2.9) integrallerinin yukarıdaki Mathematica programında hesabı oldukça kısa sürmüştür. Bu metot uygulanmadan hesaplanan yani NIntegrate ile hesaplanan orijinal (4.1.1) integrali ise bu sürenin çok üstündedir. Örneğin $r = 2$ için bizim programla elde edilen sürenin yaklaşık 16 katı, $r = 3$ için yaklaşık 35 katı ve $r = 4$ için yaklaşık 24 katıdır.

Son olarak, bu çalışmadan esinlenerek tez danışmanım ile beraber, Jacobi tipi tekilliğe sahip ve integrandında mutlak değer fonksiyonu bulunduran yüksek salınımlı integrallerin hızlı düşüş metodu kullanılarak ekonomik olarak hesaplanması ile ilgili bir makale yayınlanmıştır [25].

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

Yapılan bu çalışmada durağan noktaya sahip yüksek salınımlı integrallere Hızlı Düşüş Metodu uygulanmıştır. Bu metodun sonucunu görmek için bir Mathematica programı oluşturulmuş, bu program ile öncelikle Freud tipi ağırlık fonksiyonlarına göre ortogonal polinomların üç terimli yineleme bağıntısındaki yineleme katsayıları hesaplanmış, daha sonra bu katsayılarla oluşturulan Jacobi matrisi yardımı ile Gauss integrasyon metotları elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen yineleme katsayıları, daha sonra benzer formdaki integralleri hesaplamak için, tablolar halinde verilmiştir.

Oluşturulan Gauss integrasyon metotları (4.1.1) formundaki yüksek salınımlı integrallere uygulanmış, Mathematica'da 32 basamak çalışma duyarlılığı ile 30-31 basamak doğrulukta sonuçlar elde edilmiştir. Bu da bu metotların nümerik olarak stabil olduğunu gösterir. Ayrıca, bu metotların zaman ve integrand hesabı açısından da mevcut metotlara göre çok daha ekonomik oldukları görülmüştür.

İlerideki çalışmalarda, tekil noktalara sahip yüksek salınımlı integraller için de bu çalışmadakine benzer Gauss-tipi integrasyon metotlarının elde edilip edilemeyeceği araştırılacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Iserless, A. and Norsett, S.P. (2005). Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives, *Proceedings Royal Soc. A.* 461, 1383-1399.
- [2] Iserles A., Nørsett S.P., Olver S. (2006). Highly oscillatory quadrature: the story so far, in: *Proceedings of ENumath, Santiago de Compostela*, Springer, Berlin, 97–118.
- [3] Flinn E.A. (1960). A modification of Filon’s method of numerical integration, *J. Assoc. Comput. Mach.* 7, 181–184.
- [4] Xiang S. (2007). Efficient Filon-type methods for $\int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)}dx$, *Numer. Math.* 105, 633–658.
- [5] Levin D. (1996). Fast integration of rapidly oscillatory functions, *J. Comput. Appl. Math.* 67, 95–101.
- [6] Olver S. (2006). Moment-free numerical integration of highly oscillatory functions, *IMA. J. Numer. Anal.* 26, 213–227.
- [7] Haşçelik, A.İ. and Kaya, L. (2008). Some Bounds for Certain Highly Oscillatory Integrals, *Appl. Math. Sci.* ,2,187-193.
- [8] Haşçelik, A.İ. (2009). On numerical computation of integrals with integrands of the form $f(x) (\sin \omega/x^r)$ on $[0,1]$, *J. of Comput. Appl. Math.* 223, 399-408.
- [9] Haşçelik, A.İ. (2009). Suitable Gauss and Filon-type methods for oscillatory integrals with an algebraic singularity, *Appl. Numer. Math.* 59, 101–118.
- [10] Gautschi W. (2005). Computing polynomials orthogonal with respect to densely oscillating and exponentially decaying weight functions and related integrals, *J. of Comput. Appl. Math.* 184, 493–504.
- [11] Haşçelik, A.İ. (2013). An asymptotic Filon-type method for infinite range highly oscillatory integrals with exponential kernel, *Appl. Numer. Math.* 63, 1–13.

- [12] Huybrechs D. and Deaño A. (2009). Complex Gaussian quadrature of oscillatory integrals, *Numer. Math.* 112, 197–219.
- [13] Wolfram S. (1999). The Mathematica Book (4th edition), Cambridge Univ.Pr., Cambridge.
- [14] Filon L.N.G. (1928). On a quadrature formula for trigonometric integrals, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 49, 38–47.
- [15] Xiang S. (2007) . Efficient quadrature for highly oscillatory integrals involving critical points, *J. Comput. Appl. Math.* 206, 688–698.
- [16] Levin D. (1982). Procedures for computing one- and two dimensional integrals of functions with rapid irregular oscillations, *Math. Comput.* 38 ,531-538.
- [17] Evans G.A., Chung K.C. (2007) . Evaluating infinite range oscillatory integrals using generalised quadrature methods. *Appl. Numer. Math.* 57, 73–79.
- [18] Bulirsch, R., Stoer, J. (2000). *Introduction to Numerical Analysis*. Berlin Heidelberg: Springer - Verlag.
- [19] Gautschi, W. (2004). *Orthogonal Polynomials Computation and Approximation*, Oxford University Press, New York.
- [20] Haşcelik, A.İ. (2012). Nümerik İntegrasyon, Gaziantep Üniversitesi Matematik Bölümü, <http://ibs.gantep.edu.tr/duyuru/files/articles/numerik-integrasyon5686.pdf>
- [21] Golub G. H. and Welsch J. H. (1969). Calculation of Gauss quadrature rules, *Math. Comp.* 23, 221-230.
- [22] Stoer J. and Bulirsch R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis*, Eng. translation by Bartels R., Gautschi W., and Witzgall C., Springer-Verlag, New York, 3rd edn., 179-180.
- [23] Huybrechs D. and Vandewalle S. (2010). On the evaluation of highly oscillatory integrals by analytic continuation, *SIAM J.Numer.Math.*,60.
- [24] Brown J. W. and Churchill R.V. (2009). *Complex Variables and Applications*, The University of Michigan- Dearborn.
- [25] Haşcelik, A.İ. and Kılıç, D. (2014). Efficient Computation of Class of Singular Oscillatory Integrals by Steepest Descent Method, *Appl. Math. Sci.* 8,1535-1542.