

**BAZI KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN HAREKETLİ EN KÜÇÜK
KARELER COLLOCATION METODU
İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

Ayşe Gül KAPLAN
Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Şubat 2015

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Ayşe Gül Kaplan'ın “Bazı Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Hareketli En Küçük Kareler Collocation Metodu İle Sayısal Çözümleri” başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki **Doktora** tezi 03.02.2015 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı - Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç. Dr. Yılmaz DERELİ	
Üye	: Prof. Dr. İdris DAĞ	
Üye	: Prof. Dr. Cem YÜCE	
Üye	: Doç. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU	
Üye	: Doç. Dr. Dursun IRK	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HAREKETLİ EN KÜÇÜK KARELER COLLOCATION METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Ayşe Gül KAPLAN

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yılmaz DERELİ

2015, 118 Sayfa

Bilim ve mühendisliğin pek çok alanında ortaya çıkan problemleri modellemek için genellikle lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler kullanılır. Bu denklemler öncelikle analitik olarak çözülmeye çalışılır. Fakat bu denklemlerin bir çoğu için ya analitik çözüm mevcut değil ya da analitik çözümü bulmak kolay değildir. Bu nedenle böyle denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde edebilmek için sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Bu tip denklemlerin çözümünde kullanılabilen çok sayıda sayısal yöntem vardır. Bugüne kadar yaygın olarak kullanılan bazı sayısal yöntemler incelendiğinde bu yöntemler üzerinde modelleme eksiklikleri ve çözüm süreçlerinin zorluğu gibi bazı eksiklikler tespit edilmiştir. Son yıllarda yapılan çalışmalar sonucunda ağsız yöntemler olarak bilinen ve yukarıda değinilen eksikliklere olumlu cevaplar verebilen yöntemler geliştirilmiştir. Hareketli En Küçük Kareler Collocation yöntemi de bir ağsız yöntemdir.

Bu çalışmada Hareketli En Küçük Kareler Collocation metodu kullanılarak EW, MEW, GEW, NLS ve Fisher denklemlerinin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Metodun geçerliliğini göstermek amacıyla her bir denklem için çeşitli test problemleri kullanılarak sayısal çözümler elde edilmiştir. EW, MEW ve GEW denklemlerinin analitik çözümü bilinen tek solitary dalga hareketi test problemi için L_2 , L_∞ hata normları ve noktasal yakınsama oranları ile her bir test problemi için kütle, enerji, momentum korunumlarının değerleri hesaplanmıştır. NLS denkleminin analitik çözümü bilinen tek soliton çözümü için L_2 , L_∞ hata normları ve noktasal yakınsama oranları ile her bir test problemi için korunumların değerleri hesaplanmıştır. Fisher denkleminin analitik çözümü bilinen üçüncü test problemi için L_2 , L_∞ hata normları ve noktasal yakınsama oranları ile çözüm bölgesi üzerindeki bazı bölüntü noktalarında mutlak hatalar hesaplanmıştır. Ayrıca bütün denklemlerin test problemleri için elde edilen sayısal çözümlerin grafikleri gösterilmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlar analitik sonuçlarla ve literatürdeki bazı sayısal sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu denklemlerin her biri için Hareketli En Küçük Kareler Collocation metodu ile elde edilen fark denklemlerinin matris metoduyla kararlılık analizi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: HEKC Metodu, EW Denklemi, MEW Denklemi, GEW Denklemi
NLS Denklemi, Fisher Denklemi

ABSTRACT
PhD Thesis
NUMERICAL SOLUTIONS OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL
EQUATIONS WITH MOVING LEAST SQUARE COLLOCATION METHOD
Ayşe Gül KAPLAN
Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program
Supervisor: Doç. Dr. Yılmaz DERELİ
2015, 118 Pages

Nonlinear partial differential equations are generally used for modelling problems arising in many areas of science and engineering. These equations are first tried to solve analytically. Analytical solution of many these equations is not either available or easy to find. Therefore numerical methods are used to obtain approximate solutions to these equations. There are many numerical methods which can be used to solve this type equations. Some deficiencies are determined on these methods such as the difficulty of the solution process and modeling deficiencies when commonly used some numerical methods are examined. As a result of studies in recent years meshless methods have been developed which can give favorable answers to the above mentioned deficiencies. Moving Least Squares Collocation method is a meshless method.

In this study, numerical solutions of EW, MEW, GEW, NLS and Fisher's equations were obtained by using moving least square collocation method. To show the accuracy of the method, numerical solutions were obtained for every equations using various test problems. For the single solitary wave motion whose analytical solution was known, L_2 , L_∞ error norms and pointwise rates of convergence were calculated also mass, energy, momentum invariants were calculated for every test problems of EW, MEW and GEW. For the single soliton solution of NLS equation whose analytical solution was known L_2 , L_∞ error norms and pointwise rates of convergence were calculated also invariants were calculated for every test problems. L_2 , L_∞ error norms and pointwise rates of convergence were calculated also absolute errors at some nodal points over the solution domain were calculated for third test problems of Fisher's equation whose analytical solution was known. Also graphs of the obtained numerical solutions for every test problems were shown. The obtained numerical results were compared with analytical results and numerical results of some earlier papers in the literature. Stability analysis of difference equations were done by applying the Moving Least Squares Collocation method for each these equations.

Keywords: MLSC Method, EW Equation, MEW Equation, GEW Equation,
NLS Equation, Fisher's Equation

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamın her safhasında değerli bilgileriyle beni yönlendiren danışman hocam Doç. Dr. Yılmaz DERELİ'ye, doktora öğrenimimde maddi destek veren Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na, varlıklarıyla bana güç veren eşim Yusuf Alper KAPLAN ve kızım Azra Nur KAPLAN'a, her zaman ilgi ve desteğini yanımda hissettiğim aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayşe Gül KAPLAN
Şubat 2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Soliton ve Solitary Dalgalar	3
2.2. Hareketli En Küçük Kareler Yaklaşımı	5
2.3. Collocation Metodu	11
2.4. Sonlu Fark Yaklaşımları	12
2.5. Kararlılık Analizi İçin Matris Metodu	14
3. EW DENKLEMİNİN HEKC METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ	16
3.1. EW Denkleminin Ayrıştırılması	16
3.2. HEKC Metodunun EW Denklemine Uygulanması	17
3.3. Test Problemleri	20
3.3.1. Tek Solitary Dalga Hareketi	21
3.3.2. İki Solitary Dalga Etkileşimi	24
3.3.3. Üç Solitary Dalga Etkileşimi	25
3.3.4. Maxwell Başlangıç Koşulu	27
3.3.5. Wave Undulation	29
3.4. Kararlılık Analizi	33

4. MEW DENKLEMİNİN HEKC METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ	38
4.1. MEW Denklemine Ayrıştırılması	38
4.2. HEKC Metodunun MEW Denklemine Uygulanması	39
4.3. Test Problemleri	41
4.3.1. Tek Solitary Dalga Hareketi	41
4.3.2. İki Solitary Dalga Etkileşimi	45
4.3.3. Üç Solitary Dalga Etkileşimi	46
4.3.4. Maxwell Başlangıç Koşulu	48
4.4. Kararlılık Analizi	51
5. GEW DENKLEMİNİN HEKC METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ	56
5.1. GEW Denklemine Ayrıştırılması	56
5.2. HEKC Metodunun GEW Denklemine Uygulanması	57
5.3. Test Problemleri	59
5.3.1. Tek Solitary Dalga Hareketi	60
5.3.2. İki Solitary Dalga Etkileşimi	62
5.3.3. Maxwell Başlangıç Koşulu	64
5.4. Kararlılık Analizi	67
6. NLS DENKLEMİNİN HEKC METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ	73
6.1. NLS Denklemine Ayrıştırılması	73
6.2. HEKC Metodunun NLS Denklemine Uygulanması	75
6.3. Test Problemleri	79
6.3.1. Tek Soliton Çözümü	79
6.3.2. Çarpışan İki Solitonun Etkileşimi	81
6.4. Kararlılık Analizi	83
7. FİSHER DENKLEMİNİN HEKC METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ	87
7.1. Fisher Denklemine Ayrıştırılması	87
7.2. HEKC Metodunun Fisher Denklemine Uygulanması	88
7.3. Test Problemleri	90
7.3.1. 1. Test Problemi	90
7.3.2. 2. Test Problemi	93
7.3.3. 3. Test Problemi	95
7.4. Kararlılık Analizi	97

ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1. Basit bir dalga profili	3
3.2. Katsayılar matrisinin yapısı	23
3.3. 0.3 genlikli solitary dalga profilleri	23
3.4. 0.09 genlikli solitary dalga profilleri	24
3.5. İki solitary dalganın etkileşimi	25
3.6. Üç solitary dalganın $t = 0$ ve $t = 15$ zamanlarında etkileşimi . .	27
3.7. Üç solitary dalganın $t = 5$ ve $t = 10$ zamanlarında etkileşimi . .	27
3.8. Maxwell başlangıç koşulu ile dalga oluşumu	28
3.9. $d = 2$ için $t = 0$ zamanındaki çözümün grafiği	30
3.10. $d = 2$ için $t = 400$ zamanındaki ardışık dalgalar	30
3.11. $d = 2$ için $t = 800$ zamanındaki ardışık dalgalar	31
3.12. $d = 5$ için $t = 0$ zamanındaki çözümün grafiği	31
3.13. $d = 5$ için $t = 400$ zamanındaki ardışık dalgalar	32
3.14. $d = 5$ için $t = 800$ zamanındaki ardışık dalgalar	32
3.15. $\hat{Q}$ matrisinin özdeğerlerinin modüllerinin grafiği	37
3.16. Kararlılık koşulunun grafiği	37
4.17. $A=0.25$ için tek solitary dalga hareketi	43
4.18. $A=0.5$ için tek solitary dalga hareketi	44
4.19. $A=1$ için tek solitary dalga hareketi	44
4.20. İki solitary dalganın etkileşimi	46
4.21. Üç solitary dalganın $t = 0$ ve $t = 200$ zamanlarında etkileşimi . .	47
4.22. Üç solitary dalganın $t = 30$ ve $t = 100$ zamanlarında etkileşimi .	48
4.23. $t = 0$ anındaki çözümün grafiği	49
4.24. $\mu = 0.5$ için $t = 12.5$ anındaki çözümün grafiği	49
4.25. $\mu = 0.1$ için $t = 12.5$ anındaki çözümün grafiği	50
4.26. $\mu = 0.05$ için $t = 12.5$ anındaki çözümün grafiği	50
4.27. $\mu = 0.02$ için $t = 12.5$ anındaki çözümün grafiği	51
4.28. $\bar{Q}$ matrisinin özdeğerlerinin modüllerinin grafiği	54
4.29. Kararlılık koşulunun grafiği	55
5.30. $p = 3$ için solitary dalga profilleri	61
5.31. $p = 4$ için solitary dalga profilleri	62
5.32. $p = 3$ için iki solitary dalganın etkileşimi	63
5.33. $p = 4$ için iki solitary dalganın etkileşimi	64
5.34. $p = 3$ için $\mu = 0.1$ alınarak $t = 12$ zamanında elde edilen çözümün grafiği	65

5.35. $p = 3$ için $\mu = 0.05$ alınarak $t = 12$ zamanında elde edilen çözümün grafiği	66
5.36. $p = 4$ için $\mu = 0.1$ alınarak $t = 12$ zamanında elde edilen çözümün grafiği	66
5.37. $p = 4$ için $\mu = 0.05$ alınarak $t = 12$ zamanında elde edilen çözümün grafiği	67
5.38. $p = 3$ için $\tilde{Q}$ matrisinin özdeğerlerinin modüllerinin grafiği . . .	70
5.39. $p = 3$ için kararlılık koşulunun grafiği	71
5.40. $p = 4$ için $\tilde{Q}$ matrisinin özdeğerlerinin modüllerinin grafiği . . .	71
5.41. $p = 4$ için kararlılık koşulunun grafiği	72
6.42. Katsayılar matrisinin yapısı	80
6.43. Tek soliton simülasyonu	81
6.44. İki solitonun etkileşimi	82
6.45. $\tilde{Q}$ matrisinin özdeğerlerinin modüllerinin grafiği	86
6.46. Zarf çözüm için kararlılık koşulunun grafiği	86
7.47. $\rho = 2000$ için farklı zamanlardaki çözümlerin grafikleri	92
7.48. $\rho = 5000$ için farklı zamanlardaki çözümlerin grafikleri	92
7.49. $\rho = 10000$ için farklı zamanlardaki çözümlerin grafikleri	93
7.50. $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ zamanlarında elde edilen çözümlerin grafikleri	94
7.51. $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ zamanlarında elde edilen çözümlerin grafikleri .	94
7.52. $t = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$ zamanlarında elde edilen çözümlerin grafikleri	95
7.53. $t = 1, 2, 3, 4, 5$ zamanlarında elde edilen çözümlerin grafikleri . .	97
7.54. $\tilde{Q}$ matrisinin özdeğerlerinin modüllerinin grafiği	100
7.55. Kararlılık koşulunun grafiği	100

ÇİZELGELER DİZİNİ

3.1. $d = 0.1$ için $t = 80$ zamanında tek solitary dalga hareketi için korunumlar ve hata normları	22
3.2. $d = 0.03$ için $t = 80$ zamanında tek solitary dalga hareketi için korunumlar ve hata normları	22
3.3. $d = 0.1, t = 80, h = 0.15$ için hata normları ve noktasal yakınsama oranları	22
3.4. $t = 30$ zamanında iki solitary dalga etkileşimi için korunumlar .	25
3.5. $t = 15$ zamanında üç solitary dalga etkileşimi için korunumlar .	26
3.6. Maxwell başlangıç koşulu için korunumlar	28
3.7. $d = 2$ için korunumlar	29
3.8. $d = 5$ için korunumlar	30
4.9. $A = 0.25, A = 0.5$ ve $A = 1$ genlikli tek solitary dalga hareketleri için $t = 20$ zamanında oluşan korunumlar ve hata normları .	43
4.10. $A = 0.25, h = 0.1, t = 20$ için hata normları ve noktasal yakınsama oranları	43
4.11. $t = 60$ zamanında iki solitary dalga etkileşimi için korunumlar .	46
4.12. $t = 200$ zamanında üç solitary dalga etkileşimi için korunumlar .	47
4.13. Maxwell başlangıç koşulu için korunumlar	49
5.14. $p = 3$ için $t = 20$ zamanında tek solitary dalga hareketi için korunumlar ve hata normları	60
5.15. $p = 4$ için $t = 20$ zamanında tek solitary dalga hareketi için korunumlar ve hata normları	61
5.16. $p = 3, t = 20, h = 0.1$ için hata normları ve noktasal yakınsama oranları	61
5.17. $p = 4, t = 20, h = 0.1$ için hata normları ve noktasal yakınsama oranları	61
5.18. $p = 3$ için $t = 100$ zamanında hesaplanan korunumlar	63
5.19. $p = 4$ için $t = 120$ zamanında hesaplanan korunumlar	63
5.20. $p = 3$ için $t = 12$ zamanında hesaplanan korunumlar	65
5.21. $p = 4$ için $t = 12$ zamanında hesaplanan korunumlar	65
6.22. $t = 2.5$ zamanında tek soliton için korunumlar ve hata normları	80
6.23. $t = 2.5, h = 0.1$ için hata normları ve noktasal yakınsama oranları	80
6.24. $t = 6$ zamanında çarpışan iki soliton için korunumlar	82
7.25. $\rho = 10000$ için $t = 0.0035$ zamanında elde edilen çözümler	91
7.26. $t = 2$ zamanında elde edilen sayısal çözümler	96
7.27. $t = 4$ zamanında elde edilen sayısal çözümler	96

7.28. $t = 5$, $h = 1$ için hata normları ve noktasal yakınsama oranları . 97

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

*	: Bileşen bileşene çarpım
h	: Konum adımı uzunluğu
Δt	: Zaman adımı uzunluğu
HEK	: Hareketli En Küçük Kareler
HEKC	: Hareketli En Küçük Kareler Collocation
EW	: Equal Width Wave
MEW	: Modified Equal Width Wave
GEW	: Generalized Equal Width Wave
NLS	: Nonlinear Schrödinger

1 GİRİŞ

Ağsız yöntem, tanımlanan alanda ağ yapısı oluşturmadan sistemin aritmetik denklemlerini kuran ve bu denklemleri çözerek bilinmeyenleri elde etmeye yarayan, iterasyon gerektiren çözümler için çok uygun bir yöntemdir. Ağsız yöntemlerde çözüm bölgesinin modellenmesi ve çözüm aşamasına geçilebilmesi için modelleme aşamasında düğümler kullanılmakta ve düğümler arasında herhangi bir bağın oluşturulmasına ihtiyaç duyulmamaktadır [1].

Ağsız yöntemler ilk olarak 1977 yılında Lucy [2], Gingold ve Monaghan [3] tarafından düzgün parçacık hidrodinamiği metodu ile geliştirilmeye başlanmıştır. Bu metot astrofizik ve akışkanlar dinamiği alanlarında kullanılmıştır. Nayroles ve ark. [4] 1992 yılında difüze eleman yöntemini geliştirmişlerdir. Libersky ve ark. [5] 1993 yılında düz parçacık hidrodinamiği metodunu katı mekaniği problemlerine uygulamışlardır. Belytschko ve ark. [6] 1994 yılında eleman bağımsız galerkin metodunu geliştirmişlerdir. Melenk ve Babuska [7] 1996 yılında sonlu elemanlar çözüm sürecine benzeyen birimsel parçacık sonlu elemanlar yöntemini geliştirmiştir. Atluri ve Zhu [8] 1998 yılında yaptıkları çalışmada sayısal integrasyon işleminde hücre yapısı gerektirmeyen gerçek yapıda ağsız yöntem geliştirmişlerdir. Bu metotta alışılmış şekil ve ağırlık fonksiyonları yerine Petrov-Galerkin formülasyonunu kullanmışlardır. İlerleyen tarihlerde farklı metotlar geliştirilmiştir. Bu metotlardan bazıları; Yumuşatılmış Parçacık Hidrodinamiği Metodu, Yeniden Üretilen Çekirdek Parçacığı Metodu, Radial Taban Fonksiyonlu Collocation Metodu, Ağsız Çekirdek Tabanlı Çizgiler Metodu, Hareketli En Küçük Kareler Collocation (HEKC) Metodudur [9].

HEKC metodunun temelini oluşturan Hareketli En Küçük Kareler (HEK) yaklaşımı 1981 yılında Lancaster ve Salkauskas [10] tarafından yüzey konstrüksiyonu amacıyla kullanılıp geliştirilmiştir. Günümüzde de bu yaklaşım şekil fonksiyonlarının türetilmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Nayroles ve ark. [4] 1992 yılında, ilk olarak Difüze Eleman Metodunda HEK yaklaşımıyla elde ettikleri şekil fonksiyonlarını kullanmışlardır. Birçok metotta da, şekil fonksiyonlarının türetilmesinde bu yaklaşım kullanılmaktadır. Bu metotlardan bazıları Eleman Bağımsız Galerkin Metodu, Ağsız Yerel Petrov Galerkin Metodu ve HEKC Metodudur.

Bu tezde Equal Width Wave (EW), Modified Equal Width Wave (MEW), Generalized Equal Width Wave (GEW), Nonlinear Schrödinger (NLS) ve Fisher denklemlerinin HEKC metodu ile sayısal çözümleri araştırılmıştır. Kullanılan metodun etkinliğini göstermek amacıyla bu denklemler için farklı test problemleri ile çalışılmıştır.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, soliton ve solitary dalgalar hakkında bilgiler verilip, sonrasında HEK yaklaşımı, collocation metodu, sonlu fark yaklaşımları ve kararlılık analizi için kullanılan matris metodu anlatılmıştır.

Üçüncü bölümde EW denkleminin HEKC metodu ile sayısal çözümleri elde edilmiştir. Tek solitary dalga hareketi, iki solitary dalga etkileşimi, üç solitary dalga etkileşimi, maxwell başlangıç koşulu ve wave undulation test problemleri kullanılarak metodun etkinliği gösterilmiştir. Sonrasında EW denklemi için HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılık analizi yapılmıştır.

Dördüncü bölümde MEW denkleminin HEKC metodu ile sayısal çözümleri elde edilmiştir. Tek solitary dalga hareketi, iki solitary dalga etkileşimi, üç solitary dalga etkileşimi ve maxwell başlangıç koşulu test problemleri kullanılarak metodun etkinliği gösterilmiştir. Sonrasında MEW denklemi için HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılık analizi yapılmıştır.

Beşinci bölümde GEW denkleminin HEKC metodu ile sayısal çözümleri elde edilmiştir. Tek solitary dalga hareketi, iki solitary dalga etkileşimi ve maxwell başlangıç koşulu test problemleri kullanılarak metodun etkinliği gösterilmiştir. Sonrasında GEW denklemi için HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılık analizi yapılmıştır.

Altıncı bölümde NLS denkleminin HEKC metodu ile sayısal çözümleri elde edilmiştir. Tek soliton çözümü ve çarpışan iki solitonun etkileşimi test problemleri kullanılarak metodun etkinliği gösterilmiştir. Sonrasında NLS denklemi için HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılık analizi yapılmıştır.

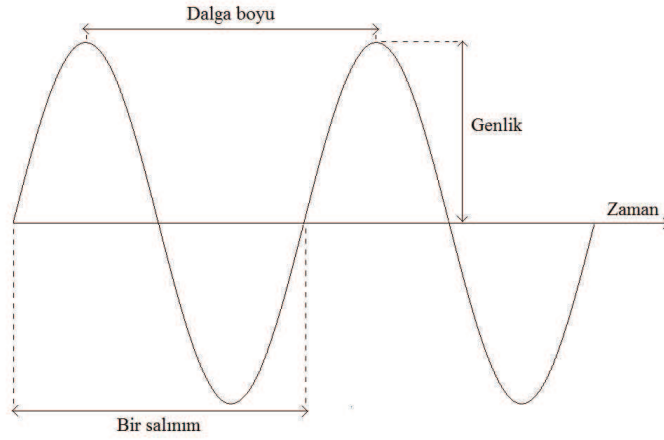
Yedinci bölümde Fisher denkleminin HEKC metodu ile sayısal çözümleri elde edilmiştir. Üç test problemi kullanılarak metodun etkinliği gösterilmiştir. Sonrasında Fisher denklemi için HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılık analizi yapılmıştır.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar verilecektir.

2.1 Soliton ve Solitary Dalgalar

Dalga, bir fizik terimi olarak bir ortamda veya boşlukta yayılan ve sıklıkla enerjinin taşınmasına yol açan titreşime verilen isimdir. Basit bir dalga profili aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.1. Basit bir dalga profili

Solitonlar, sahip oldukları şekli ve hızı koruyarak yayılan ve herhangi bir etkileşim anından sonrada bu özellikleri korumaya devam eden lineer olmayan dalgalardır [11]. Şeklini ve hızını koruyor olması, her alandan birçok bilim adamının solitonlar üzerine çalışmalar yapmasına neden olmuş ve böylece Soliton teorisi doğmuştur. Bu teori matematiğin birçok alanıyla ilişkili olmakla beraber fizik, kimya ve biyoloji alanlarında da birçok uygulamaya sahiptir. Solitonlar günümüz teknolojisi için oldukça önemli bir yere sahiptir. Herhangi bir sinyal iletiminde, sinyalin en az kayıpla ve yeterli büyüklükte hedefe ulaşabilmesi önemlidir. Ancak normal sinyallerin durumları değişebilir ve genişliklerinde farklılıklar olabilir. Solitonlar ise yapısı gereği genişliklerini ve hızlarını değiştirmeden sabit tutabildiklerinden taşınan sinyalde herhangi bir kayıp olmaksızın, büyük miktardaki bilgi binlerce kilometre boyunca taşınabilmektedir. Bu nedenle solitonlar elektronik ve telekomünikasyon alanlarında oldukça sık çalışılmaktadır.

Solitary dalgalar da şekil ve hızları değişmeksizin yayılan lineer olmayan dalgalardır. Solitary dalgalar etkileşim sonrası özelliklerini korumaya çalışan dalgalar oldukları için solitonlara benzeyen dalgalar olarak tanımlanmaktadır. Solitary dalgaların belgeli ilk gözlemleri 1834'te İskoç mühendis John Scott Rusell tarafından yapılmıştır [12]. *"Russell bir çift atla birlikte dar bir kanal boyunca sürüklenen bir botu izlemeye başladı. Russell at sırtında botu takip etti ve şaşırtıcı bir olayı gözlemledi: Bot aniden durduğunda bir eğri dalga bottan ayrılıyor ve oldukça iyi bir hızla, tek geniş bir yükselti şeklinde ilerliyordu. Solitary dalga, kanal boyunca şeklinde ve hızında bir değişme olmaksızın ilerledi, bilim adamı at sırtında dalgayı takibe devam etti, fakat saatte yaklaşık 8-9 mil hızla ilerleyen dalgayı 2 mil sonra kaybetti"* [13]. İskoç bilim adamı, oldukça önemli bir doğa olayını gözlemlediğine inanmış ve Dalganın aktarımı olarak isimlendirdiği çalışmaya devam edebilmek için bahçesinde deneysel bir su havuzu inşa ettirmiştir [14]. Bu havuzda su tankları oluşturmuş ve su tanklarının bir ucuna ağırlık bırakarak solitary dalgaları elde edebilmek için deneyler yapmıştır. Bu deneyler sonucunda solitary dalgaların özellikleri hakkında aşağıdaki önemli bilgilere ulaşmıştır [15]:

- i) Solitary dalgalar $h \operatorname{sech}^2(k(x - vt))$ şeklindedir.
- ii) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalga üretir.
- iii) Normal dalgaların aksine solitary dalgalar asla birleşmezler. Bu nedenle büyük genliğe sahip bir solitary dalga ile küçük genliğe sahip bir solitary dalga çarpıştıktan sonra, iki solitary dalga birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar ise ya düzleşmeye başlar ya da dikleşerek sönecek şekilde hareket ederler.
- iv) g yerçekimi ivmesi olmak üzere, h yüksekliğine sahip olan ve d derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalga $v = \sqrt{g(d + h)}$ ile verilen bir hıza sahiptir. Bir solitary dalganın hızı genliği ile doğru orantılı olduğundan büyük genlikli bir solitary dalga küçük genlikli bir solitary dalgaya göre daha hızlı hareket eder.

O yıllarda Russel'in sonuçları deneysel olarak kalmış ve bir denklemin çözümü olarak solitary dalgalar elde edilememiştir. Bununla birlikte, bir denklemin çözümünü veren solitary dalga problemleri yıllarca araştırmalara konu olmuştur. 1895'te Hollandalı iki matematikçi Korteweg ve deVries tarafından

John Scott Russell'ın gözlemi yani solitary dalgaların varlığı ispatlanmış ve elde ettikleri denklem Korteweg-deVries (KdV) denklemi olarak kabul görmüştür [16]. Bu gelişmelerden sonra solitary dalgalar pek çok alanda kullanılmıştır. Örneğin; solitary dalgalar biyoloji alanında sinir sistemindeki uyarı iletimini açıklamak için kullanılmıştır. Hidrodinamik alanında solitary dalga modelleri; dalgaların gemi ve deniz inşaatlarına etkilerinin saptanması, sualtı akustik çalışmaları, elektromanyetik dalgaların deniz yüzeyinden yansımaları, kıyı hattını tehdit eden tsunamilerin modellenmesi ve erken uyarı çalışmaları için akla ilk gelen yöntemlerdir. Plazma fiziğinde ise optik iletişim teknolojisi önemli ölçüde ışığın ve dolayısıyla bilginin solitary dalgalar şeklinde iletilmesi fikrine dayanmaktadır.

2.2 Hareketli En Küçük Kareler Yaklaşımı

HEKC metodunun temelini oluşturan HEK yaklaşımı şekil fonksiyonlarının oluşturulmasında kullanılmaktadır. $u_i = u(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ noktaları $u(\mathbf{x})$ fonksiyonunun x_i noktalarındaki gerçek değerleri, $u^h(\mathbf{x})$ fonksiyonu da $u(\mathbf{x})$ fonksiyonunun hareketli en küçük kareler yaklaşımı olmak üzere; $u^h(\mathbf{x})$ fonksiyonu

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklemde

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (p_0(\mathbf{x}) \quad p_1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad p_m(\mathbf{x})) \quad (2.2)$$

şeklinde olup $p_j(\mathbf{x})$, $j = 0, 1, \dots, m$ taban fonksiyonları,

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = (a_0(\mathbf{x}) \quad a_1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad a_m(\mathbf{x})) \quad (2.3)$$

de $a_j(\mathbf{x})$, $j = 0, 1, \dots, m$ taban fonksiyonlarının katsayılarını içeren bir vektördür.

Bir boyutlu problemler için hareketli en küçük kareler yaklaşımı

$$\begin{aligned}
u^h(\mathbf{x}) &= a_0 \quad \text{Sabit Yaklaşım} \\
u^h(\mathbf{x}) &= a_0 + a_1x \quad \text{Lineer Yaklaşım} \\
u^h(\mathbf{x}) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \text{Kuadratik Yaklaşım} \\
u^h(\mathbf{x}) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad \text{Kübik Yaklaşım} \\
u^h(\mathbf{x}) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \quad \text{Kuartik Yaklaşım}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde olabilir. Burada daha yüksek dereceden polinom yaklaşımları da kullanılabilir.

HEK yaklaşımında ağırlık fonksiyonları rezidü denkleminin ağırlıklandırılması işleminde kullanılmaktadır. Her düğüm etrafında bir destek oluşturan ağırlık fonksiyonu, destek bölgesi içinde $\omega_i(\mathbf{x}) > 0$, destek bölgesi dışında $\omega_i(\mathbf{x}) = 0$ olacak şekilde seçilmelidir. Bu destek bölgelerinin kesişimi düğümler arasındaki bağlantıyı sağlar.

(2.1) denkleminde amaç u_i gerçek değerleri ile $u^h(\mathbf{x}_i)$ yaklaşık değerleri arasındaki farkı minimum yapan $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ katsayı vektörünü bulmaktır. Bu ise aşağıda tanımlanmış ağırlıklı rezidü denklemi olan $J(\mathbf{x})$ in minimize edilmesiyle bulunur.

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N \omega_i(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i]^2 \\
&= \omega_1(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(x_1) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_1]^2 + \omega_2(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(x_2) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_2]^2 + \\
&\quad \cdots + \omega_N(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(x_N) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_N]^2 \\
&= \omega_1(\mathbf{x}) \{ [p_0(x_1) p_1(x_1) \cdots p_m(x_1)] [a_0(\mathbf{x}) a_1(\mathbf{x}) \cdots a_m(\mathbf{x})]^T - u_1 \}^2 \\
&\quad + \omega_2(\mathbf{x}) \{ [p_0(x_2) p_1(x_2) \cdots p_m(x_2)] [a_0(\mathbf{x}) a_1(\mathbf{x}) \cdots a_m(\mathbf{x})]^T - u_2 \}^2 + \\
&\quad \cdots + \omega_N(\mathbf{x}) \{ [p_0(x_N) p_1(x_N) \cdots p_m(x_N)] [a_0(\mathbf{x}) a_1(\mathbf{x}) \cdots a_m(\mathbf{x})]^T - u_N \}^2 \\
&= \omega_1(\mathbf{x}) [p_0(x_1)a_0(\mathbf{x}) + p_1(x_1)a_1(\mathbf{x}) + \cdots + p_m(x_1)a_m(\mathbf{x}) - u_1]^2 \\
&\quad + \omega_2(\mathbf{x}) [p_0(x_2)a_0(\mathbf{x}) + p_1(x_2)a_1(\mathbf{x}) + \cdots + p_m(x_2)a_m(\mathbf{x}) - u_2]^2 + \\
&\quad \cdots + \omega_N(\mathbf{x}) [p_0(x_N)a_0(\mathbf{x}) + p_1(x_N)a_1(\mathbf{x}) + \cdots + p_m(x_N)a_m(\mathbf{x}) - u_N]^2
\end{aligned} \tag{2.5}$$

(2.5) denkleminde bilinmeyen $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ vektörünü bulabilmek için $J(\mathbf{x})$ in sırasıyla $a_0(\mathbf{x}), a_1(\mathbf{x}), \cdots, a_m(\mathbf{x})$ 'e göre kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlenir. Yani

$$\frac{\partial J}{\partial a_j} = 0, \quad j = \overline{0, m} \tag{2.6}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
c_1 &= p_0(x_1)a_0(\mathbf{x}) + p_1(x_1)a_1(\mathbf{x}) + \cdots + p_m(x_1)a_m(\mathbf{x}) - u_1 \\
c_2 &= p_0(x_2)a_0(\mathbf{x}) + p_1(x_2)a_1(\mathbf{x}) + \cdots + p_m(x_2)a_m(\mathbf{x}) - u_2 \\
&\vdots \\
c_N &= p_0(x_N)a_0(\mathbf{x}) + p_1(x_N)a_1(\mathbf{x}) + \cdots + p_m(x_N)a_m(\mathbf{x}) - u_N
\end{aligned} \tag{2.7}$$

olmak üzere $J(\mathbf{x})$ 'in sırasıyla $a_0(\mathbf{x}), a_1(\mathbf{x}), \dots, a_m(\mathbf{x})$ 'e göre kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned}
\omega_1(\mathbf{x})c_1p_0(x_1) + \omega_2(\mathbf{x})c_2p_0(x_2) + \cdots + \omega_N(\mathbf{x})c_Np_0(x_N) &= 0 \\
\omega_1(\mathbf{x})c_1p_1(x_1) + \omega_2(\mathbf{x})c_2p_1(x_2) + \cdots + \omega_N(\mathbf{x})c_Np_1(x_N) &= 0 \\
&\vdots \\
\omega_1(\mathbf{x})c_1p_m(x_1) + \omega_2(\mathbf{x})c_2p_m(x_2) + \cdots + \omega_N(\mathbf{x})c_Np_m(x_N) &= 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

sistemi elde edilir. (2.8) sistemi matris formunda

$$\begin{bmatrix} \omega_1(\mathbf{x})p_0(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_0(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_0(x_N) \\ \omega_1(\mathbf{x})p_1(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_1(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1(\mathbf{x})p_m(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_m(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_m(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

şeklinde yazılır. (2.7) de verilen eşitlikler matris biçiminde yazılıp düzenlenirse

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0(x_1) & p_1(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_0(x_2) & p_1(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0(x_N) & p_1(x_N) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0(\mathbf{x}) \\ a_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ a_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Bu eşitlik (2.9) sisteminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \omega_1(\mathbf{x})p_0(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_0(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_0(x_N) \\ \omega_1(\mathbf{x})p_1(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_1(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1(\mathbf{x})p_m(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_m(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_m(x_N) \end{bmatrix} \cdot \\
& \begin{bmatrix} p_0(x_1) & p_1(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_0(x_2) & p_1(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0(x_N) & p_1(x_N) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0(\mathbf{x}) \\ a_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ a_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \quad (2.10) \\
& \begin{bmatrix} \omega_1(\mathbf{x})p_0(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_0(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_0(x_N) \\ \omega_1(\mathbf{x})p_1(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_1(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1(\mathbf{x})p_m(x_1) & \omega_2(\mathbf{x})p_m(x_2) & \cdots & \omega_N(\mathbf{x})p_m(x_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

sistemi elde edilir. (2.10) sistemi daha açık olarak

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} p_0(x_1) & p_0(x_2) & \cdots & p_0(x_N) \\ p_1(x_1) & p_1(x_2) & \cdots & p_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(x_1) & p_m(x_2) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2(\mathbf{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \cdot \\
& \begin{bmatrix} p_0(x_1) & p_1(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_0(x_2) & p_1(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0(x_N) & p_1(x_N) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0(\mathbf{x}) \\ a_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ a_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} p_0(x_1) & p_0(x_2) & \cdots & p_0(x_N) \\ p_1(x_1) & p_1(x_2) & \cdots & p_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(x_1) & p_m(x_2) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2(\mathbf{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (2.11)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} p_0(x_1) & p_0(x_2) & \cdots & p_0(x_N) \\ p_1(x_1) & p_1(x_2) & \cdots & p_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(x_1) & p_m(x_2) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \omega_1(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2(\mathbf{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_0(x_1) & p_1(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_0(x_2) & p_1(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0(x_N) & p_1(x_N) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_0(\mathbf{x}) \\ a_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ a_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

olmak üzere (2.11) sistemi

$$\mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{u} \quad (2.12)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan (2.12) eşitliğinde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \mathbf{P}^T \mathbf{W} \end{aligned} \quad (2.13)$$

olmak üzere

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (2.14)$$

denklemini elde edilir. Buradan

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (2.15)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik (2.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (2.16)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

denirse

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) u_i \quad (2.18)$$

ifadesine ulaşılır. (2.18) denkleminde

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x})[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})]_{ji} \quad (2.19)$$

şeklindedir. $\phi_i(\mathbf{x})$ fonksiyonunun x 'e göre birinci ve ikinci türevleri zincir kuralı ile

$$\begin{aligned} \phi'_i &= \sum_{j=0}^m [p'_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{ji} + p_j((\mathbf{A}^{-1})'\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}')_{ji}] \\ \phi''_i &= \sum_{j=0}^m [p''_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{ji} + 2p'_j((\mathbf{A}^{-1})''\mathbf{B})_{ji} + 2p'_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}')_{ji} \\ &\quad + 2p_j(\mathbf{A}^{-1})'\mathbf{B}')_{ji} + p_j((\mathbf{A}^{-1})''\mathbf{B})_{ji} + p_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}'')_{ji}] \end{aligned} \quad (2.20)$$

şeklinde hesaplanır [6]. Burada $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$ olup

$$(\mathbf{A}^{-1})' = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1} \quad (2.21)$$

şeklindedir.

$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T\mathbf{W}\mathbf{P}$ olduğundan bu matris $(m+1) \times (m+1)$ tipinde olup moment matrisi olarak adlandırılır. $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ matrisinin genel hali

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \omega_1(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^m & x_1^{m+1} & \cdots & x_1^{2m} \end{bmatrix} + \omega_2(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^m \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^m & x_2^{m+1} & \cdots & x_2^{2m} \end{bmatrix} \\ &\quad + \cdots + \omega_N(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} 1 & x_N & \cdots & x_N^m \\ x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_N^m & x_N^{m+1} & \cdots & x_N^{2m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu matrisin terslenebilir olması için $N \geq (m+1)$ olmalıdır [8].

(2.19) eşitliğiyle verilen $\phi_i(\mathbf{x})$ ler şekil fonksiyonları olup ağırlık fonksiyonları şekil fonksiyonlarının hassasiyetini önemli ölçüde etkilemektedir. Bu yüzden ağırlık fonksiyonunun seçilimi önemlidir. En çok kullanılan ağırlık fonksiyonlarından biri Gaussian ağırlık fonksiyonudur ve bu çalışmadaki tüm test problemlerinde bu fonksiyon kullanılmıştır.

Gaussian ağırlık fonksiyonu

$$\omega_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{d_i}{c_i}\right)^2} - e^{-\left(\frac{r_i}{c_i}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{r_i}{c_i}\right)^2}} & 0 \leq d_i \leq r_i \\ 0 & d_i > r_i \end{cases} \quad (2.22)$$

şeklindedir. Bu ifadede yer alan r_i parametresi destek bölgesinin büyüklüğü; $d_i = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$ ifadesi incelenen $\mathbf{x}$ noktası ile $\mathbf{x}_i$ düğüm noktası arasındaki mesafe, c_i ise şekil parametresidir. Bu çalışmadaki tüm test problemlerinde destek bölgesinin büyüklüğü $r_i = 2mh$ olarak alınmıştır.

2.3 Collocation Metodu

Collocation metodundaki ana fikir, bilinmeyen $u(x, t)$ fonksiyonuna şekil fonksiyonları ve değerleri daha sonra hesaplanacak olan katsayıların cebirsel birleşimi olarak yaklaşılmasıdır.

$$\begin{aligned} Lu(x, t) &= f(x), & x \in \Omega, & \quad t \in [0, T] \\ Bu(x, t) &= g(x), & x \in \partial\Omega, & \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (2.23)$$

biçimindeki bir kısmi diferansiyel denklem ele alınsın. Burada L kısmi diferansiyel operatör, B ise sınır noktalarındaki fonksiyon değerleridir. (2.23) denkleminin genel çözümü $u(x, t)$ ve çözüm bölgesi de $[a, b]$ olmak üzere $[a, b]$ aralığı $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ şeklinde N eşit parçaya bölünsün. $\{x_k\}_{k=1}^N$ $\Omega \cup \partial\Omega$ da collocation noktaları olmak üzere $\{x_k\}_{k=1}^{N_1}$ iç bölgedeki noktalar, $\{x_k\}_{k=N_1+1}^N$ sınırdaki noktalardır. Bu durumda $u(x, t)$ fonksiyonuna

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \lambda_i \quad (2.24)$$

şeklinde bir yaklaşım yapılır. Burada $\phi_i(x)$ ler şekil fonksiyonları, λ_i ler de her bir zaman adımında hesaplanması gereken sabitlerdir. (2.24) eşitliği (2.23)

denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N (L\phi_i)(x_k)\lambda_i &= f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, N_1 \\ \sum_{i=1}^N (B\phi_i)(x_k)\lambda_i &= f(x_k), \quad k = N_1 + 1, \dots, N\end{aligned}\tag{2.25}$$

sistemi elde edilir. Bu sistem çözülerek λ_i değerleri hesaplanır.

2.4 Sonlu Fark Yaklaşımları

İki değişkenli fonksiyonlar için sonlu fark yaklaşımları Taylor serisi yardımıyla elde edilir. N , M pozitif tamsayılar

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad k = \frac{d-c}{M}$$

ve bölüntü noktaları

$$\begin{aligned}x_i &= a + (i-1)h, \quad i = \overline{1, N} \\ y_j &= c + (j-1)k, \quad j = \overline{1, M}\end{aligned}\tag{2.26}$$

olsun. Bu durumda $U(x, y)$ fonksiyonu ve kısmi türevleri tanım bölgesi üzerinde sürekli olmak üzere $U(x_i + h, y_j)$, $U(x_i - h, y_j)$, $U(x_i, y_j + k)$ ve $U(x_i, y_j - k)$ ifadelerinin (x_i, y_j) noktasındaki Taylor seri açılımları

$$U(x_i + h, y_j) = U(x_i, y_j) + hU_x(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!}U_{xx}(x_i, y_j) + \frac{h^3}{3!}U_{xxx}(x_i, y_j) + \dots\tag{2.27}$$

$$U(x_i - h, y_j) = U(x_i, y_j) - hU_x(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!}U_{xx}(x_i, y_j) - \frac{h^3}{3!}U_{xxx}(x_i, y_j) + \dots\tag{2.28}$$

$$U(x_i, y_j + k) = U(x_i, y_j) + kU_y(x_i, y_j) + \frac{k^2}{2!}U_{yy}(x_i, y_j) + \frac{k^3}{3!}U_{yyy}(x_i, y_j) + \dots\tag{2.29}$$

$$U(x_i, y_j - k) = U(x_i, y_j) - kU_y(x_i, y_j) + \frac{k^2}{2!}U_{yy}(x_i, y_j) - \frac{k^3}{3!}U_{yyy}(x_i, y_j) + \dots\tag{2.30}$$

şeklindedir. Buradan (2.27)-(2.28) eşitlikleri sırasıyla

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U(x_i + h, y_j) - U(x_i, y_j)}{h} - \frac{h}{2!}U_{xx}(x_i, y_j) - \frac{h^2}{3!}U_{xxx}(x_i, y_j) + \dots \quad (2.31)$$

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U(x_i, y_j) - U(x_i - h, y_j)}{h} + \frac{h}{2!}U_{xx}(x_i, y_j) - \frac{h^2}{3!}U_{xxx}(x_i, y_j) + \dots \quad (2.32)$$

şeklinde yazılabileceğinden $U(x_i, y_j)$ ifadesinin (x_i, y_j) noktasındaki x değişkenine göre birinci türevi

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U(x_i + h, y_j) - U(x_i, y_j)}{h} + \mathcal{O}(h) = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (2.33)$$

veya

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U(x_i, y_j) - U(x_i - h, y_j)}{h} + \mathcal{O}(h) = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (2.34)$$

formunda yaklaşık olarak bulunur. Bu yaklaşımlar ise sırasıyla ileri ve geri sonlu fark yaklaşımları olarak adlandırılır. Her iki yaklaşımda da görüldüğü gibi seri belli bir yerden kesilmiştir. Dolayısıyla bu kesme işlemi sebebiyle bir hata oluşacaktır. Oluşan hatalar, serinin kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilir ve $\mathcal{O}(\cdot)$ ile gösterilir.

(2.28) eşitliği (2.27) eşitliğinden çıkarılıp düzenlenirse

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U(x_i + h, y_j) - U(x_i - h, y_j)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.35)$$

şeklinde x değişkenine göre birinci türev için merkezi sonlu fark yaklaşımı bulunur. Benzer şekilde (2.29)-(2.30) eşitlikleri kullanılarak $U(x_i, y_j)$ ifadesinin (x_i, y_j) noktasındaki y değişkenine göre birinci türevi için ileri, geri ve merkezi sonlu fark yaklaşımları sırasıyla

$$\begin{aligned} U_y(x_i, y_j) &= \frac{U(x_i, y_j + k) - U(x_i, y_j)}{k} + \mathcal{O}(k) = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} + \mathcal{O}(k) \\ U_y(x_i, y_j) &= \frac{U(x_i, y_j) - U(x_i, y_j - k)}{k} + \mathcal{O}(k) = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{k} + \mathcal{O}(k) \\ U_y(x_i, y_j) &= \frac{U(x_i, y_j + k) - U(x_i, y_j - k)}{2k} + \mathcal{O}(k^2) = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2k} + \mathcal{O}(k^2) \end{aligned} \quad (2.36)$$

formunda bulunur. $U(x_i, y_j)$ ifadesinin (x_i, y_j) noktasındaki x ve y değişkenlerine

göre ikinci ve üçüncü türevi için sonlu fark yaklaşımları da benzer şekilde elde edilir.

Bu çalışmadaki bütün kısmi türevli diferansiyel denklemleri ayrıştırmak için Crank-Nicolson metodu kullanılmıştır. Zamana göre ikinci dereceden olan bu metotta aşağıdaki eşitliklerin kullanılması önerilmiştir [17].

$$\begin{aligned}
U_t &\approx \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \\
U &= \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \\
U_x &= \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} \\
U_{xx} &= \frac{U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n}{2} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.37}$$

(2.37) deki eşitliklerden görüldüğü gibi zamana göre türev için ileri sonlu fark yaklaşımı kullanılırken, kalan terimlerde şimdiki ve bir sonraki zaman adımındaki değerlerin ortalamaları alınmıştır. Zamana göre türev için geri veya merkezi sonlu fark yaklaşımları da kullanılabilir.

2.5 Kararlılık Analizi İçin Matris Metodu

n ve $(n + 1)$ -inci adımlardaki bir sonlu fark denklemi

$$AU^{n+1} = BU^n + d_n \tag{2.38}$$

şeklinde yazılabilir. Burada A ve B , $N \times N$ tipinde matrisler, U^{n+1} elemanları $U_1^{n+1}, U_2^{n+1}, \dots, U_N^{n+1}$ olan sütun vektörü, d_n ise bilinen sınır değerlerinden ve sıfırlardan oluşan sütun vektörüdür. A terslenebilir bir matris ise $A^{-1}B = C$ ve $A^{-1}d_n = f_n$ olmak üzere

$$U^{n+1} = CU^n + f_n \tag{2.39}$$

denklemi bulunur. $\tilde{U}$, U vektörüne bir yaklaşım ise

$$\tilde{U}^{n+1} = C\tilde{U}^n + f_n \tag{2.40}$$

şeklinde yazılabilir. n . adımdaki hata

$$e_N^n = U_N^n - \tilde{U}_N^n \quad (2.41)$$

şeklinde tanımlansın. $e^n = [e_1^n, e_2^n, \dots, e_N^n]^T$ olmak üzere (2.40) ifadesi (2.39) ifadesinden çıkarılırsa

$$e^{n+1} = Ce^n \quad (2.42)$$

denklemini elde edilir. Buradan

$$e^n = Ce^{n-1} = C^2e^{n-2} = \dots = C^n e^0 \quad (2.43)$$

bulunur. Burada $e^0 = [e_1^0, e_2^0, \dots, e_N^0]^T$ başlangıç hatasıdır. O halde

$$e^{n+1} = C^{n+1}e^0 \quad (2.44)$$

eşitliği elde edilir. Burada $n \rightarrow \infty$ a giderken $e^{n+1} \rightarrow 0$ olması için $C^{n+1} \rightarrow 0$ olmalıdır. C matrisi köşegenleştirilebilir bir matris olmak üzere

$$C = PDP^{-1} \quad (2.45)$$

$$C^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1} \quad (2.46)$$

şeklinde yazılabilir. Burada P ve P^{-1} matrisleri C matrisinin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerinden oluştuğu için $C^{n+1} \rightarrow 0$ olması ancak $D^{n+1} \rightarrow 0$ olması ile mümkündür. Bunun içinde $\lambda_i^{n+1} \rightarrow 0$, $i = \overline{1, N}$ olması gerekir. Bu ise $|\lambda_i| \leq 1$, $i = \overline{1, N}$ olması ile mümkündür.

3 EW DENKLEMİNİN HEKC METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Lineer olmayan dağınk dalgalar, sığ su dalgaları gibi fiziksel olaylarda önemli bir rol oynamaktadır. EW denklemi lineer olmayan dağınk dalga denklemlerinin önemli bir modelidir [18].

Lineer olmayan EW denklemi aşağıdaki formdadır:

$$U_t + UU_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (3.47)$$

Burada μ pozitif bir parametre, x ve t alt indisleri sırasıyla konuma ve zamana göre türevleri, $U(x, t)$ ise x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyondur. EW denklemi için $x \rightarrow \mp\infty$ iken $U \rightarrow 0$ olan fiziksel şartlarının yerine sayısal hesaplama yapabilmek için aşağıdaki başlangıç ve sınır koşulları kullanılmıştır:

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.48)$$

$$U(a, t) = \alpha, \quad U(b, t) = \beta, \quad t \geq 0 \quad (3.49)$$

Literatürde pek çok yöntem kullanılarak bu denklemin sayısal çözümleri araştırılmıştır. Bu yöntemlerden bazıları şunlardır: kübik B-spline sonlu elemanlar kullanılarak Galerkin metodu [19], kuadratik B-spline Galerkin sonlu elemanlar metodu ve konum-ayrıştırması tekniği [20], kuadratik B-spline sonlu elemanlar kullanılarak lumped Galerkin metodu [21], kuintik B-spline collocation metodu [22], lineer sonlu elemanlar kullanılarak Galerkin metodu [23], en küçük kareler metodu [24], Galerkin kuartik B-spline sonlu elemanlar metodu-diferansiyel quadrature metodu-radial taban fonksiyonlu ağsız metot [25], Chebyshev polinomlarına dayanan spectral metot [26], Septic B-spline collocation metodu [27], Ağsız çekirdek tabanlı çizgiler metodu [28].

3.1 EW Denkleminin Ayrıştırılması

EW denklemine Crank-Nicolson metodu uygulanırsa;

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{(UU_x)^{n+1} + (UU_x)^n}{2} - \mu \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{\Delta t} = 0 \quad (3.50)$$

denklemini elde edilir. Burada $U^n = U(x, t^n)$ ve Δt de zaman adımı olup $t^n = t^{n-1} + \Delta t$ şeklindedir. (3.50) denkleminde lineer olmayan $(UU_x)^{n+1}$ teri-

mini lineerleştirmek için Rubin ve Graves [29] tarafından verilen aşağıdaki lineerleştirme metodu kullanılırsa

$$(UU_x)^{n+1} \approx U_x^n U^{n+1} + U^n U_x^{n+1} - U^n U_x^n \quad (3.51)$$

(3.50) eşitliği

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{U_x^n U^{n+1} + U^n U_x^{n+1}}{2} - \mu \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{\Delta t} = 0 \quad (3.52)$$

şeklinde olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(U_x^n U^{n+1} + U^n U_x^{n+1}) - \mu U_{xx}^{n+1} = U^n - \mu U_{xx}^n \quad (3.53)$$

ayrıştırılmış denklemi elde edilir.

3.2 HEKC Metodunun EW Denklemine Uygulanması

HEKC metodunun gereği olarak U fonksiyonunun n . ve $(n+1)$. adımındaki yaklaşık çözümlerine

$$U^n = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^n, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.54)$$

$$U^{n+1} = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.55)$$

şeklinde yaklaşımları yapılır. Bu yaklaşımların x 'e göre birinci ve ikinci türevleri de

$$U_x^n = \sum_{i=1}^N \phi_i'(\mathbf{x}_k) u_i^n, \quad U_x^{n+1} = \sum_{i=1}^N \phi_i'(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.56)$$

$$U_{xx}^n = \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}_k) u_i^n, \quad U_{xx}^{n+1} = \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.57)$$

şeklinde olur.

(3.54) ve (3.55) deki yaklaşımlar matris formunda

$$\begin{aligned} U^n &= \hat{A}u^n \\ U^{n+1} &= \hat{A}u^{n+1} \end{aligned} \quad (3.58)$$

şeklinde, (3.56) ve (3.57) deki yaklaşımlar ise matris formunda

$$\begin{aligned} U_x^n &= \hat{B}u^n \\ U_x^{n+1} &= \hat{B}u^{n+1} \end{aligned} \quad (3.59)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \hat{A} &= [\phi_i(\mathbf{x}_k) : i, k = \overline{1, N}], \\ \hat{B} &= [\phi'_i(\mathbf{x}_k) : i = \overline{1, N}, k = \overline{2, N-1}], \\ u^n &= [u_1^n, u_2^n, \dots, u_N^n]^T, \\ u^{n+1} &= [u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_N^{n+1}]^T \end{aligned} \quad (3.60)$$

şeklinde. Burada B matrisi sınır koşullarının uygulanmış halidir.

(3.54)-(3.57) de yapılan yaklaşımlar (3.53) denkleminde yerine yazılırsa bu denklem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\sum_{i=1}^N \phi'_i(\mathbf{x}_k) u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} + \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \phi'_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} \right) \\ - \mu \sum_{i=1}^N \phi''_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^n - \mu \sum_{i=1}^N \phi''_i(\mathbf{x}_k) u_i^n, \quad k = 2, \dots, N-1 \\ \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} = \alpha, \quad k = 1 \\ \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} = \beta, \quad k = N \end{aligned} \quad (3.61)$$

şekline gelir. Burada $\phi_i(\mathbf{x}_k)$ şekil fonksiyonları yerine (2.19) denkleminde verilen eşitlik yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} \\
& + \frac{\Delta t}{2} \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} \right] \\
& + \frac{\Delta t}{2} \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' u_i^{n+1} \right] \\
& - \mu \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)'' u_i^{n+1} = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^n
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$-\mu \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)'' u_i^n, \quad k = 2, \dots, N-1$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} = \alpha, \quad k = 1$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} = \beta, \quad k = N$$

şeklinde bir sistem elde edilir. Bu sistem gösterim kolaylığı açısından

$$\begin{aligned}
G_0 &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \\
G_1 &= \frac{\Delta t}{2} \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \right] \\
G_2 &= \frac{\Delta t}{2} \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' \right] \\
G_3 &= -\mu \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)''
\end{aligned}$$

olmak üzere $i = 1, 2, \dots, N$ için

$$\begin{aligned}
G_0 u_i^{n+1} &= \alpha, & k &= 1 \\
(G_0 + G_1 + G_2 + G_3) u_i^{n+1} &= (G_0 + G_3) u_i^n, & k &= 2, \dots, N-1 \\
G_0 u_i^{n+1} &= \beta, & k &= N
\end{aligned} \tag{3.63}$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu sistem çözülerek hesaplanan u_i^{n+1} ler (3.55) denkleminde yerine yazılırsa $(n + 1)$. adımdaki U sayısal çözümü bulunur. HEKC metodunun MEW, GEW ve Fisher denklemlerine uygulaması da benzer şekildedir.

EW denklemi için HEKC metodu ile bulunan sayısal sonuçlar aşağıdaki program algoritmasıyla elde edilmiştir.

Algoritma

Algoritma aşağıdaki sırayla çalışır:

1. $[a, b]$ tanım bölgesinden N tane düğüm belirlenir.
2. m, r_i, c_i ve Δt parametreleri belirlenir.
3. $n := 0$ alınır.
4. (3.48) başlangıç koşulu kullanılarak (3.54) denkleminde u_i^n bilinmeyenleri ve U^n başlangıç çözümü bulunur.
5. $n := n + 1$ alınır.
6. (3.63) sistemi kullanılarak u_i^{n+1} değerleri hesaplanır.
7. (3.55) denklemi kullanılarak U^{n+1} yaklaşık çözümü elde edilir.
8. $n\Delta t = T$ olana kadar iterasyona devam edilir.

3.3 Test Problemleri

Bu bölümde, HEKC metodunun doğruluğunu ve geçerliliğini göstermek için beş test problemi ile çalışılmıştır. Bu test problemleri için C_1, C_2, C_3 korunum kanunları ile analitik sonucu bilinen test problemi için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak literatürde yer alan bazı sayısal sonuçlarla karşılaştırılmaları yapılmıştır. Ayrıca analitik sonucu bilinen test problemi için verilen metodun zamana göre noktasal yakınsama oranları belirlenmiştir.

EW denkleminin sırasıyla kütle, momentum ve enerji korunumları

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U dx, \quad C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (U^2 + \mu U_x^2) dx, \quad C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} U^3 dx \quad (3.64)$$

şeklinde hesaplanır [30].

L_2 ve L_∞ hata normları ise analitik ve sayısal çözümler arasındaki farklar kullanılarak hesaplanmıştır ve

$$\begin{aligned} L_2 &= \|U^{\text{analitik}} - U^{\text{sayısal}}\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=1}^N |U_j^{\text{analitik}} - U_j^{\text{sayısal}}|^2} \\ L_\infty &= \|U^{\text{analitik}} - U^{\text{sayısal}}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |U_j^{\text{analitik}} - U_j^{\text{sayısal}}| \end{aligned} \quad (3.65)$$

şeklindedir.

Zamana göre noktasal yakınsama oranı aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$YO = \frac{\log_{10}(\|U - U_{\Delta t_i}\| / \|U - U_{\Delta t_{i+1}}\|)}{\log_{10}(\Delta t_i / \Delta t_{i+1})} \quad (3.66)$$

Burada U analitik çözüm, $U_{\Delta t_i}$ ise Δt_i zaman adımındaki sayısal çözümdür.

3.3.1 Tek Solitary Dalga Hareketi

EW denkleminin solitary dalga çözümü

$$U(x, t) = 3d \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - vt]), \quad k = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}, \quad v = d \quad (3.67)$$

şeklindedir. Burada k dalganın genişliğini, v dalganın hızını, $3d$ ise dalganın genliğini göstermektedir. Bu çözüm; başlangıçta tepe noktası x_0 üzerinde bulunan sağa doğru v sabit hızıyla hareket eden $3d$ genliğinde tek solitary dalgayı temsil eder. Burada $U(x, 0) = 3d \operatorname{sech}^2(k[x - x_0])$ başlangıç koşulu ile $U(a, t) = U(b, t) = 0$ sınır koşulları kullanılmıştır. Tek solitary dalga hareketi $0 \leq t \leq 80$ zaman aralığında $0 \leq x \leq 30$ tanım aralığında $\mu = 1$, $d = 0.1$, $d = 0.03$ ve $x_0 = 10$ parametreleri için çözülmüştür. Ayrıca hesaplamalarda taban polinomunun derecesi $m = 4$ alınmıştır.

C_1 , C_2 , C_3 korunumlarının analitik değerleri

$$C_1 = \frac{6d}{k}, \quad C_2 = \frac{12d^2}{k} + \frac{48kd^2\mu}{5}, \quad C_3 = \frac{144d^3}{5k} \quad (3.68)$$

şeklinde hesaplanmıştır [19]. Bu eşitlikler kullanılarak $d = 0.1$ için

$$C_1 = 1.2, \quad C_2 = 0.288, \quad C_3 = 0.0576 \quad (3.69)$$

$d = 0.03$ için

$$C_1 = 0.36, \quad C_2 = 0.02592, \quad C_3 = 0.00155 \quad (3.70)$$

değerleri elde edilir.

Sayısal sonuçlar Şekil 3.2 den de görüldüğü gibi 201×201 tane matris girdisinden 3175 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matrisin girdilerinin yaklaşık %8'i kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır.

Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2 de $d = 0.1$ ve $d = 0.03$ için $t = 80$ zamanında hesaplanan C_1, C_2, C_3 korunumları ile L_2, L_∞ hata normları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar [25] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çizelge 3.3 de farklı zaman adımlarında L_2, L_∞ hata normları ile noktasal yakınsama oranları hesaplanmıştır. Hesaplamalar $d = 0.1$ için $t = 80$ zamanında konum adımı $h = 0.15$ sabit tutularak yapılmıştır. Çizelge 3.3 den Δt azaldıkça hata normlarının küçüldüğü ve yakınsama oranlarının 2 civarında olduğu görülmüştür. Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 te ise sırasıyla 0.3 ve 0.09 genlikli dalgaların $t = 0, t = 40$ ve $t = 80$ zamanlarında elde edilen çözümlerinin grafikleri verilmiştir.

Çizelge 3.1. $d = 0.1$ için $t = 80$ zamanında tek solitary dalga hareketi için korunumlar ve hata normları

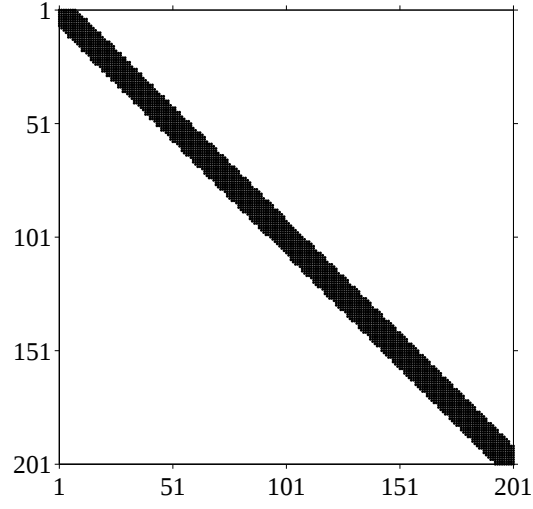
Metot	h	Δt	C_1	C_2	C_3	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
HEKC	0.15	0.05	1.19998	0.28799	0.05759	0.37790	0.21114
[25]	0.15	0.05	1.20003	0.28801	0.05761	0.31198	0.20296

Çizelge 3.2. $d = 0.03$ için $t = 80$ zamanında tek solitary dalga hareketi için korunumlar ve hata normları

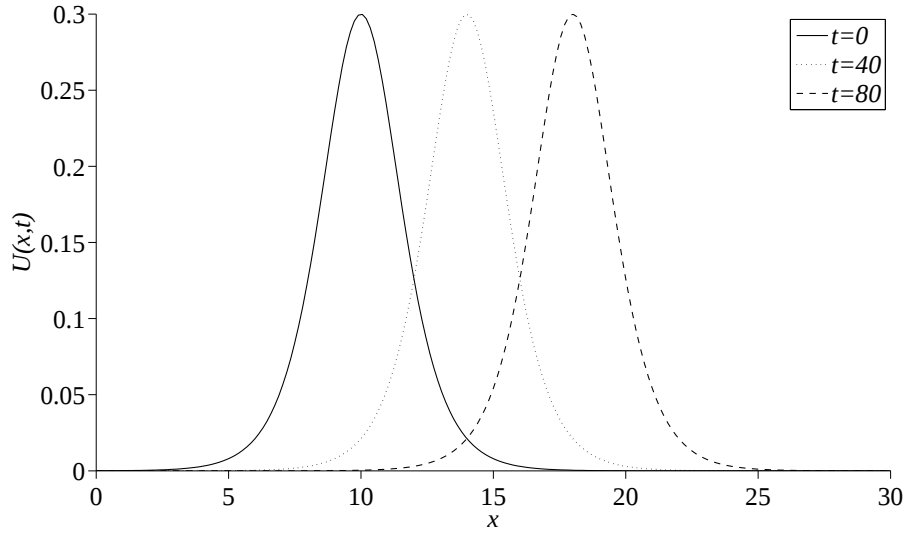
Metot	h	Δt	C_1	C_2	C_3	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
HEKC	0.15	0.05	0.35999	0.02591	0.00155	0.031752	0.023020
[25]	0.15	0.05	0.36000	0.02592	0.00156	0.07598	0.04911

Çizelge 3.3. $d = 0.1, t = 80, h = 0.15$ için hata normları ve noktasal yakınsama oranları

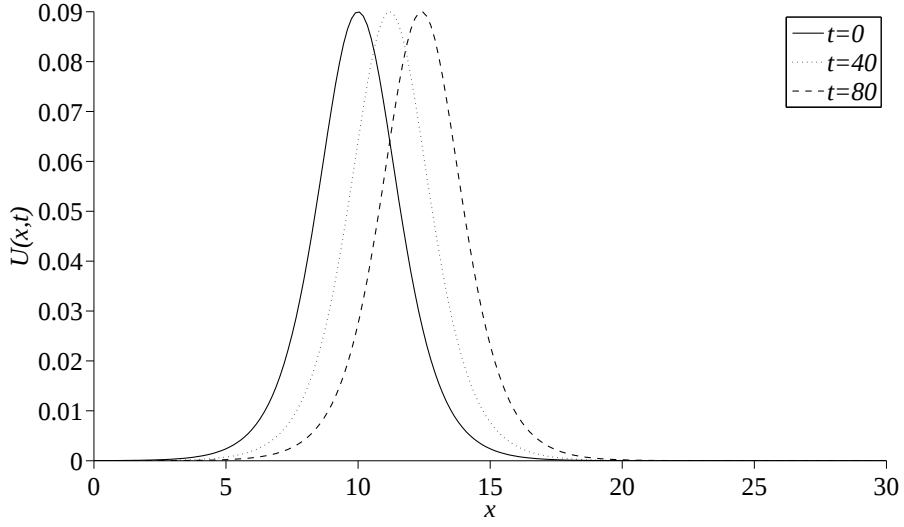
Δt	L_2	$YO(L_2)$	L_∞	$YO(L_\infty)$
1	0.017038	—	0.0097169	—
0.5	0.0044399	1.9401	0.0019395	2.3248
0.25	0.00090169	2.2998	0.00055564	1.8034
0.1	0.00015103	1.9500	0.000096127	1.9147
0.05	0.000037790	1.9987	0.000021114	2.1867



Şekil 3.2. Katsayılar matrisinin yapısı



Şekil 3.3. 0.3 genlikli solitary dalga profilleri



Şekil 3.4. 0.09 genlikli solitary dalga profilleri

3.3.2 İki Solitary Dalga Etkileşimi

İki solitary dalga etkileşimi

$$\begin{aligned} U(x, 0) &= U_1 + U_2 \\ U_j &= 3A_j \operatorname{sech}^2(k_j(x - \tilde{x}_j - A_j)), \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.71)$$

başlangıç koşulu ve $U(0, t) = U(80, t) = 0$ sınır koşulları kullanılarak çalışılmıştır. $\mu = 1$, $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.5$, $\tilde{x}_1 = 10$, $\tilde{x}_2 = 25$, $A_1 = 1.5$, $A_2 = 0.75$ parametre değerleri seçilmiş ve program $t = 30$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. Ayrıca hesaplamalarda taban polinomunun derecesi $m = 5$ alınmıştır.

Korunumların analitik değerleri

$$\begin{aligned} C_1 &= 12(A_1 + A_2) = 27 \\ C_2 &= 28.8(A_1^2 + A_2^2) = 81 \\ C_3 &= 57.6(A_1^3 + A_2^3) = 218.7 \end{aligned} \quad (3.72)$$

şeklindedir [22].

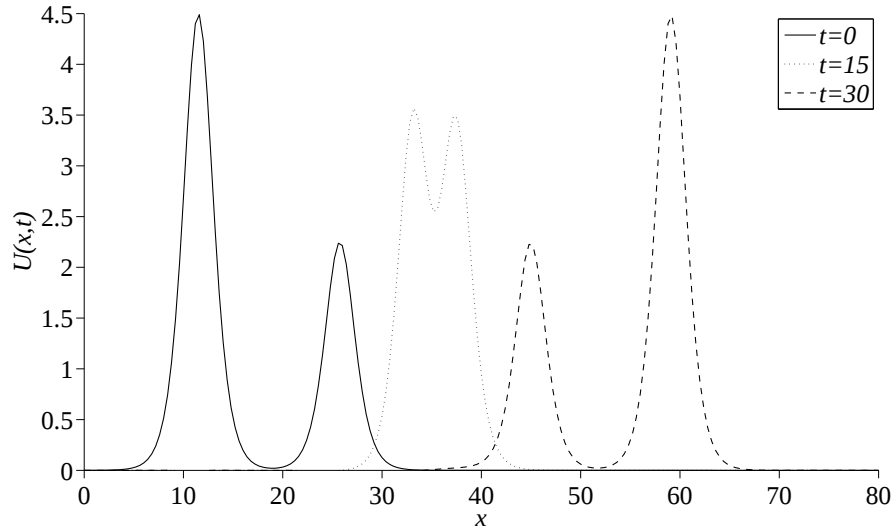
Sayısal sonuçlar 201×201 tane matris girdisinden 3751 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matrisin girdilerinin yaklaşık %9'u kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır.

Çizelge 3.4 te $t = 30$ zamanında hesaplanan C_1 , C_2 , C_3 korunumları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar [25] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Şekil 3.5 de ise $t = 0$, $t = 15$ ve $t = 30$ zamanlarında elde edilen çözümlerin

grafikleri verilmiştir. Şekil 3.5 den de görüldüğü gibi iki solitary dalga etkileşiminde, başlangıç koşulu grafiğe aktarıldığında büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalganın solunda yer aldığı, zaman ilerledikçe büyük genlikli dalganın daha hızlı ilerlemesinden dolayı küçük genlikli dalgayı yakalayarak etkileşimi başlattığı ve iki dalganın tek bir dalga gibi olduğu görülmüştür. Sonuçta ise dalgaların birbirinden tamamen ayrılarak büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgayı geçtiği ve her iki dalganın da ilk genliklerine tekrar döndükleri gözlenmiştir.

Çizelge 3.4. $t = 30$ zamanında iki solitary dalga etkileşimi için korunumlar

Metot	h	Δt	C_1	C_2	C_3
HEKC	0.4	0.1	27.00000	80.99937	218.70001
[25]	0.1	0.1	27.00024	81.00140	218.70694



Şekil 3.5. İki solitary dalganın etkileşimi

3.3.3 Üç Solitary Dalga Etkileşimi

Üç solitary dalga etkileşimi

$$\begin{aligned}
 U(x, 0) &= U_1 + U_2 + U_3 \\
 U_j &= 3A_j \operatorname{sech}^2(k_j(x - \tilde{x}_j - A_j)), \quad j = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

başlangıç koşulu ile verilmiştir [22]. $\mu = 1$, $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.5$, $k_3 = 0.5$, $\tilde{x}_1 = 10$, $\tilde{x}_2 = 25$, $\tilde{x}_3 = 35$, $A_1 = 4.5$, $A_2 = 1.5$, $A_3 = 0.5$ parametre değerleri

ve $U(0, t) = U(100, t) = 0$ sınır koşulları kullanılmıştır. Bu parametrelerin kullanılmasıyla genliği en büyük olan dalga en sola, genliği en küçük olan dalga ise en sağa yerleştirilmiş ve program $t = 15$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. Ayrıca hesaplamalarda taban polinomunun derecesi $m = 5$ alınmıştır.

Korunumların analitik değerleri

$$\begin{aligned} C_1 &= 12(A_1 + A_2 + A_3) = 78 \\ C_2 &= 28.8(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) = 655.2 \\ C_3 &= 57.6(A_1^3 + A_2^3 + A_3^3) = 5450.4 \end{aligned} \tag{3.74}$$

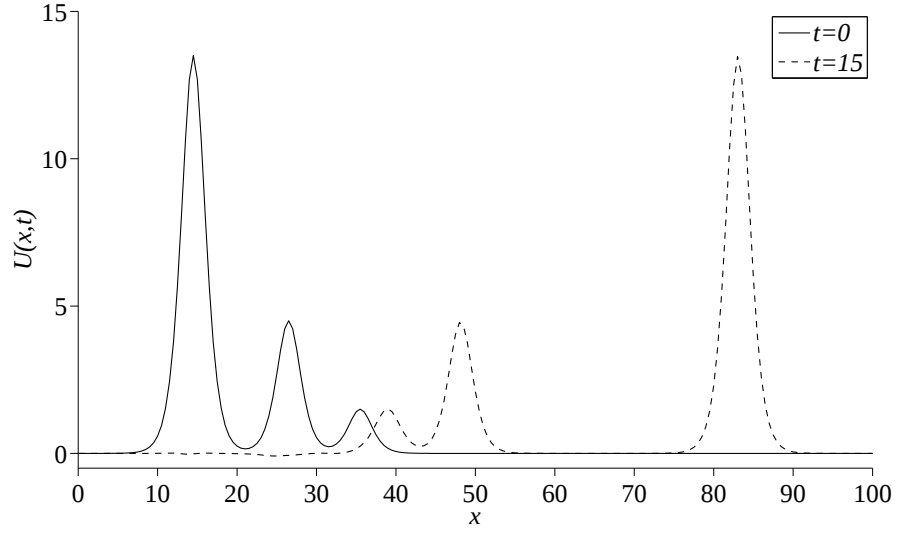
şeklindedir [22].

Sayısal sonuçlar 201×201 tane matris girdisinden 3729 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matrisin girdilerinin yaklaşık %9'u kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır.

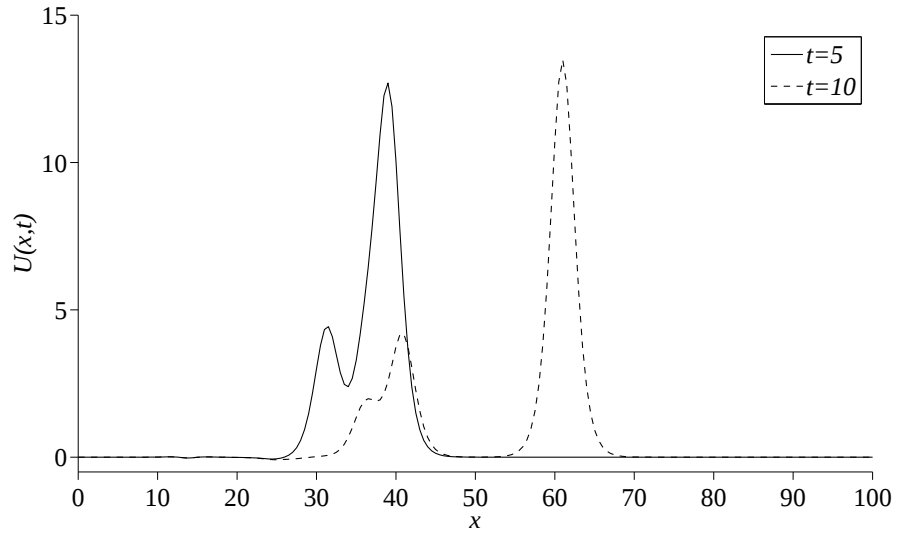
Çizelge 3.5 de $t = 15$ zamanında hesaplanan C_1 , C_2 , C_3 korunumları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Şekil 3.6 ve Şekil 3.7 de ise üç solitary dalganın farklı zamanlarda elde edilen çözümlerinin grafikleri verilmiştir. Bir solitary dalganın hızı genliği ile doğru orantılı olduğundan Şekil 3.6 ve Şekil 3.7 den de görüldüğü gibi genliği en büyük olan dalga diğer iki dalgaya göre daha hızlı ilerlemiştir. Bu yüzden zaman ilerledikçe en soldaki dalganın diğer iki dalgayı, ortadaki dalganın ise en sağdaki dalgayı geçtiği gözlenmiş ve sonuçta ise bütün dalgaların ilk genliklerine tekrar döndükleri görülmüştür.

Çizelge 3.5. $t = 15$ zamanında üç solitary dalga etkileşimi için korunumlar

Metot	h	Δt	C_1	C_2	C_3
HEKC	0.5	0.1	77.99999	655.22801	5450.89548



Şekil 3.6. Üç solitary dalganın $t = 0$ ve $t = 15$ zamanlarında etkileşimi



Şekil 3.7. Üç solitary dalganın $t = 5$ ve $t = 10$ zamanlarında etkileşimi

3.3.4 Maxwell Başlangıç Koşulu

Bu bölümde EW denkleminin

$$U(x, 0) = 0.05 \exp(-(x - x_0)^2/25) \quad (3.75)$$

Maxwell başlangıç koşulu altında dalga oluşumu çözümü çalışılmıştır. Sınır koşulları $U(0, t) = U(50, t) = 0$ seçilerek $x_0 = 20$ parametre değeri için $t = 500$

anında dalganın oluşumu izlenmiştir. Ayrıca hesaplamalarda taban polinomu-
nun derecesi $m = 4$ alınmıştır.

Sayısal sonuçlar 201×201 tane matris girdisinden 2959 tanesi kullanılarak
elde edilmiştir. Böylelikle matrisin girdilerinin yaklaşık %7'si kullanılmış, diğer
girdiler sıfır olarak alınmıştır.

Maxwell başlangıç koşulu için korunumların başlangıç anındaki analitik
değerleri

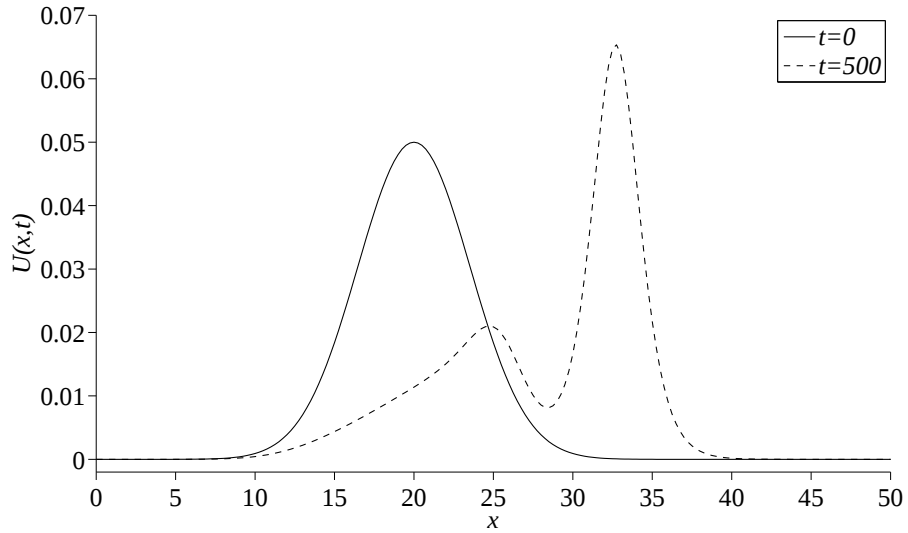
$$\begin{aligned} C_1 &= 0.443113 \\ C_2 &= 0.016293 \\ C_3 &= 0.000639 \end{aligned} \tag{3.76}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

Çizelge 3.6 da $t = 500$ zamanında hesaplanan C_1 , C_2 , C_3 korunumları
listelenmiştir. Şekil 3.8 de ise $t = 500$ zamanında elde edilen çözümün grafiği
verilmiştir. Burada zaman ilerledikçe başlangıçtaki dalganın orjinal formunu
bozarak ardışık dalgalar ürettiği gözlenmiştir.

Çizelge 3.6. Maxwell başlangıç koşulu için korunumlar

Metot	h	Δt	C_1	C_2	C_3
HEKC	0.25	1	0.443113	0.016294	0.000639



Şekil 3.8. Maxwell başlangıç koşulu ile dalga oluşumu

3.3.5 Wave Undulation

Bu bölümde EW denkleminin

$$U(x, 0) = \frac{U_0}{2} \left(1 - \tanh \left(\frac{x - x_c}{d} \right) \right) \quad (3.77)$$

başlangıç koşulu altında çözümü çalışılmıştır. Buradaki $U(x, 0)$, $t = 0$ zamanındaki durgun su yüzeyinin üstündeki suyun yükseltisini, d durgun su ve derin su arasındaki eğimi, U_0 su yüzeyindeki ilave yükseltiyi, $x = x_c$ noktası ise büyüklüğü U_0 olan su seviyesindeki değişimin merkezini gösterir. Böylece durgun su bölgenin sağında yer alır ve $U = 0$ yüzeyinden U_0 ilave yükseltisinde suyun sahip olduğu akış soldan durgun suyun içine doğru hareket eder. Bu test probleminde $U_0 = 0.1$, $\mu = 0.16666667$, $x_c = 0$, $d = 2$, $d = 5$ parametre değerleri ve $U(-20, t) = U_0$, $U(50, t) = 0$ sınır koşulları kullanılarak program $t = 800$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. Ayrıca hesaplamalarda taban polinomunun derecesi $m = 4$ alınmıştır.

Sayısal sonuçlar 351×351 tane matris girdisinden 5483 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matrisin girdilerinin yaklaşık %4'ü kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır.

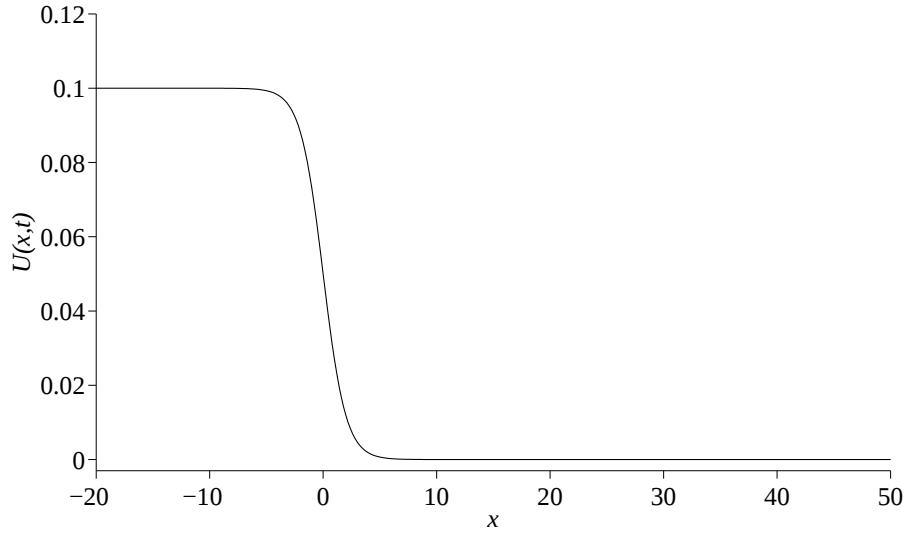
Çizelge 3.7 ve Çizelge 3.8 de $d = 2$, $d = 5$ değerleri için $t = 0$, $t = 400$, $t = 800$ zamanlarında hesaplanan C_1 , C_2 , C_3 korunumları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar [25] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Şekil 3.9 ve Şekil 3.12 de $d = 2$, $d = 5$ değerleri için $t = 0$ başlangıç anında elde edilen çözümlerin grafikleri verilmiştir. Diğer şekillerde ise $d = 2$ ve $d = 5$ değerleri için sırasıyla $t = 400$, $t = 800$ zamanlarında elde edilen çözümlerin grafikleri verilmiştir. Bu grafiklerden de görüldüğü gibi $d = 2$ eğiminin kullanılmasıyla elde edilen ardışık dalgaların $d = 5$ eğiminin kullanılmasıyla elde edilen ardışık dalgalara göre daha fazla olduğu gözlenmiştir.

Çizelge 3.7. $d = 2$ için korunumlar

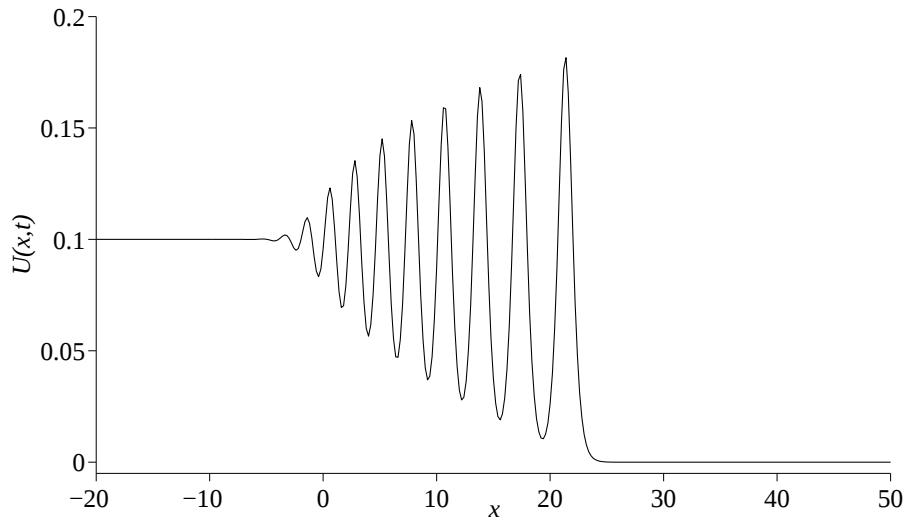
Metot	h	Δt	t	C_1	C_2	C_3
HEKC	0.2	0.1	0	2.01000	0.19127	0.01860
HEKC	0.2	0.1	400	4.01000	0.45808	0.04866
HEKC	0.2	0.1	800	6.00997	0.72491	0.07874
[25]	0.2	1	0	2.00999	0.19127	0.01860
[25]	0.2	1	400	4.00850	0.45183	0.04877
[25]	0.2	1	800	6.00689	0.71137	0.07898

Çizelge 3.8. $d = 5$ için korunumlar

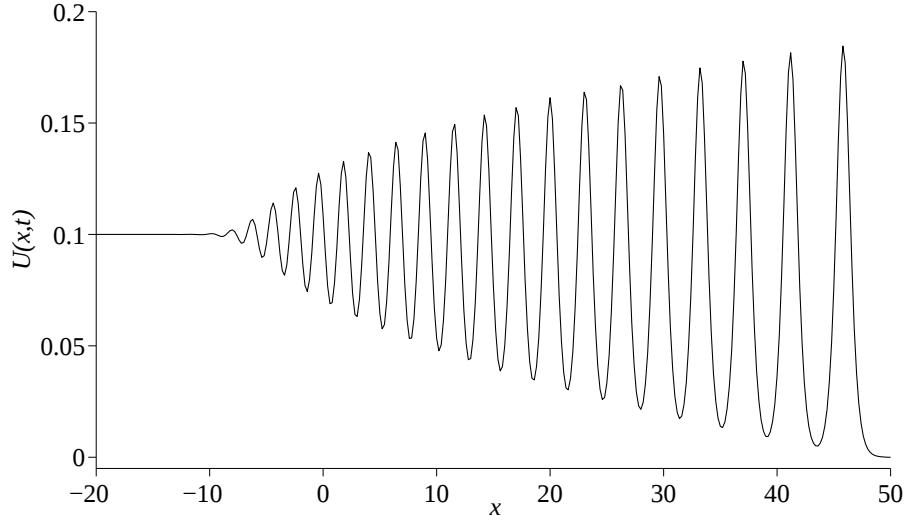
Metot	h	Δt	t	C_1	C_2	C_3
HEKC	0.2	0.1	0	2.01008	0.17612	0.01635
HEKC	0.2	0.1	400	4.01008	0.44289	0.04639
HEKC	0.2	0.1	800	6.01008	0.70972	0.07647
[25]	0.2	1	0	2.01008	0.17612	0.01635
[25]	0.2	1	400	4.00881	0.43822	0.04647
[25]	0.2	1	800	6.00731	0.69778	0.07668



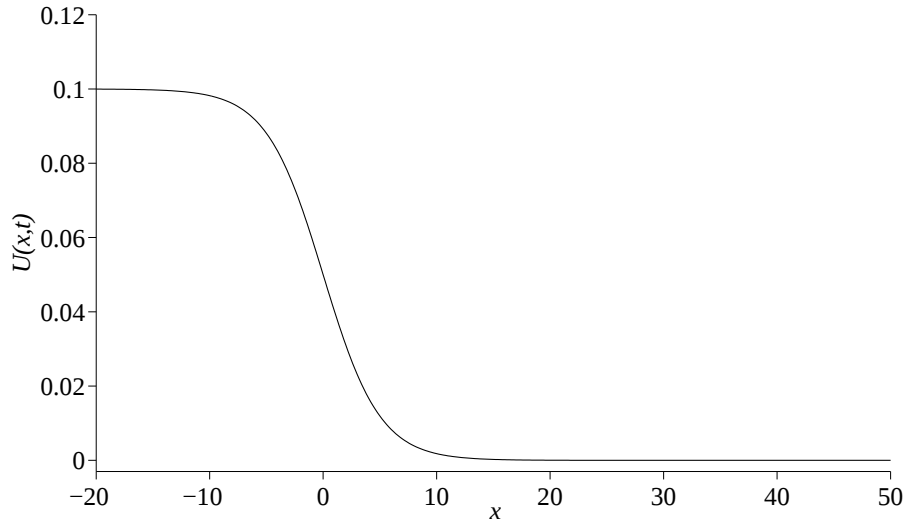
Şekil 3.9. $d = 2$ için $t = 0$ zamanındaki çözümün grafiği



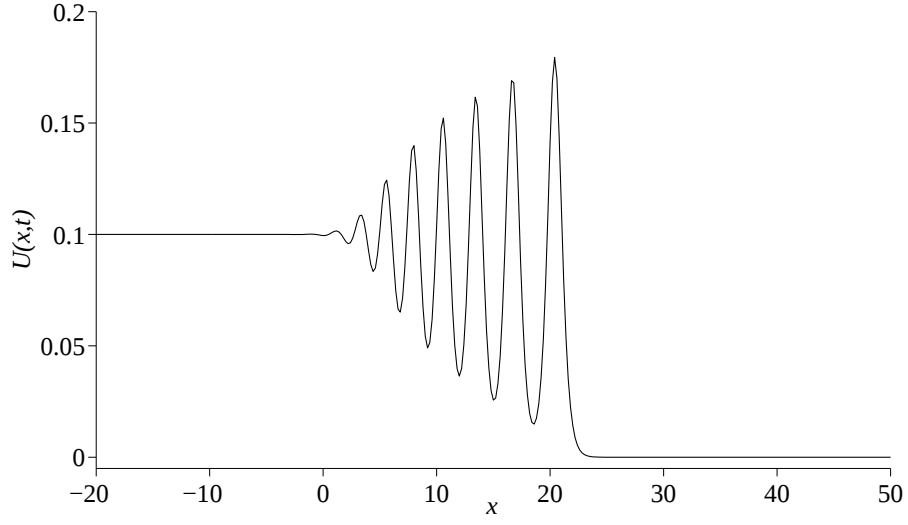
Şekil 3.10. $d = 2$ için $t = 400$ zamanındaki ardışık dalgalar



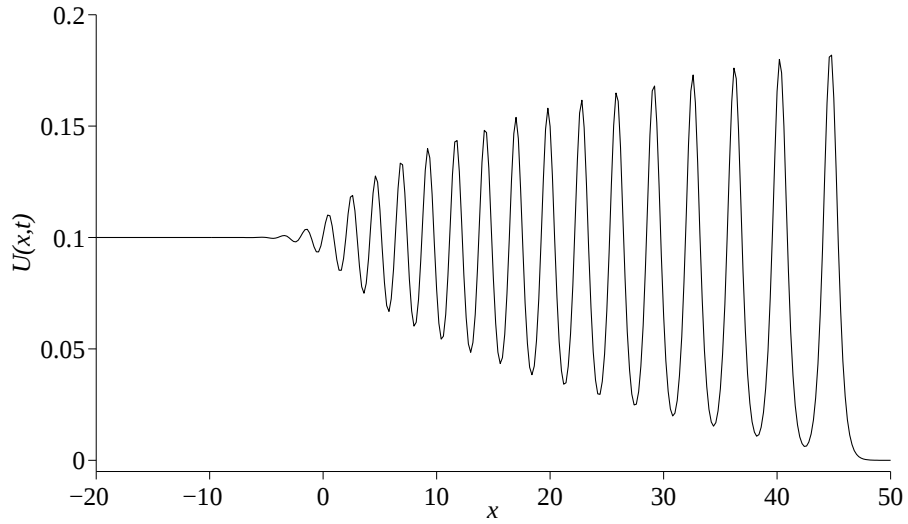
Şekil 3.11. $d = 2$ için $t = 800$ zamanındaki ardışık dalgalar



Şekil 3.12. $d = 5$ için $t = 0$ zamanındaki çözümün grafiği



Şekil 3.13. $d = 5$ için $t = 400$ zamanındaki ardışık dalgalar



Şekil 3.14. $d = 5$ için $t = 800$ zamanındaki ardışık dalgalar

Korunum sabitlerinin zamana göre deęiřimi analitik olarak

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{d}{dt}C_1 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} U dx \approx U_0 + \frac{1}{2}U_0^2 = 5 \times 10^{-3} \\
M_2 &= \frac{d}{dt}C_2 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (U^2 + \mu U_x^2) dx \approx \frac{2}{3}U_0^3 = 6.66667 \times 10^{-4} \\
M_3 &= \frac{d}{dt}C_3 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} U^3 dx \approx \frac{3}{4}U_0^4 = 7.5 \times 10^{-5}
\end{aligned} \tag{3.78}$$

şeklinde verilmiştir [31]. Sayısal korunum sabitlerinin zamana göre deęiřimi ise $d = 2$ için Çizelge 3.7 den;

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{6.00997 - 2.01000}{800} = 4.9999 \times 10^{-3} \\
M_2 &= \frac{0.72491 - 0.19127}{800} = 6.67 \times 10^{-4} \\
M_3 &= \frac{0.07874 - 0.01860}{800} = 7.51 \times 10^{-5}
\end{aligned} \tag{3.79}$$

$d = 5$ için Çizelge 3.8 den;

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{6.01008 - 2.01008}{800} = 5 \times 10^{-3} \\
M_2 &= \frac{0.70972 - 0.17612}{800} = 6.67 \times 10^{-4} \\
M_3 &= \frac{0.07647 - 0.01635}{800} = 7.51 \times 10^{-5}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

olarak hesaplanmıştır. Hesaplamalardan görüldüğü gibi sayısal korunum sabitlerinin zamana göre değişimleri analitik sonuçlarla uyumludur.

3.4 Kararlılık Analizi

Bu bölümde matris metodu kullanılarak EW denklemi için HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılık analizi yapılmıştır.

(3.61) denklemi;

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= [\phi_i(x_k) : i, k = \overline{1, N}] \\
\hat{B} &= [\phi'_i(x_k) : i = \overline{1, N}, \quad k = \overline{2, N-1}] \\
\hat{C} &= [\phi''_i(x_k) : i = \overline{1, N}, \quad k = \overline{2, N-1}] \\
\hat{D} &= U_x^n * \hat{A} \\
\hat{E} &= U^n * \hat{B}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

olmak üzere

$$\left[\hat{A} - \mu \hat{C} + \frac{\Delta t}{2} (\hat{D} + \hat{E}) \right] u^{n+1} = \left[\hat{A} - \mu \hat{C} \right] u^n \tag{3.82}$$

şeklinde yazılabilir. (3.58) de verilen eşitliklerden

$$\begin{aligned}
U^n &= \hat{A} u^n \\
U^{n+1} &= \hat{A} u^{n+1}
\end{aligned} \tag{3.83}$$

olduğundan (3.82) denklemi

$$\left[(\hat{A} - \mu \hat{C}) \hat{A}^{-1} + \frac{\Delta t}{2} (\hat{D} + \hat{E}) \hat{A}^{-1} \right] U^{n+1} = \left[(\hat{A} - \mu \hat{C}) \hat{A}^{-1} \right] U^n \tag{3.84}$$

şekline gelir. Burada

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta t}{2} \hat{D} \hat{A}^{-1} &= \frac{\Delta t}{2} U_x^n * \hat{A} \hat{A}^{-1} \\
&= \frac{\Delta t}{2} \hat{B} u^n * I \\
&= \frac{\Delta t}{2} (\hat{B} \hat{A}^{-1}) U^n * I \\
&= \frac{\Delta t}{2} U^n * \hat{B} \hat{A}^{-1} \\
&= \frac{\Delta t}{2} \hat{E} \hat{A}^{-1}
\end{aligned} \tag{3.85}$$

olduğundan (3.84) denklemi

$$\left[(\hat{A} - \mu \hat{C}) \hat{A}^{-1} + 2 \frac{\Delta t}{2} \hat{E} \hat{A}^{-1} \right] U^{n+1} = \left[(\hat{A} - \mu \hat{C}) \hat{A}^{-1} \right] U^n \tag{3.86}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned}\hat{H} &= (\hat{A} - \mu\hat{C})\hat{A}^{-1} \\ \hat{K} &= \frac{1}{2}\hat{E}\hat{A}^{-1}\end{aligned}\tag{3.87}$$

olmak üzere (3.86) denklemi

$$\left[\hat{H} + 2\Delta t\hat{K}\right]U^{n+1} = \left[\hat{H}\right]U^n\tag{3.88}$$

şeklinde olur. O halde (3.88) denklemi

$$U^{n+1} = \left[\hat{H} + 2\Delta t\hat{K}\right]^{-1}\left[\hat{H}\right]U^n\tag{3.89}$$

şeklinde yazılırsa

$$\hat{Q} = \left[\hat{H} + 2\Delta t\hat{K}\right]^{-1}\left[\hat{H}\right]\tag{3.90}$$

olmak üzere

$$e^{n+1} = \hat{Q}e^n\tag{3.91}$$

hata denklemi elde edilir. HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlı olması için $\rho(\hat{Q}) = \max\{|\lambda_{\hat{Q}}| : \lambda_{\hat{Q}} \text{ özdeğer}\} \leq 1$ olmalıdır.

O halde $\lambda_{\hat{H}}$; $\hat{H}$ matrisinin özdeğeri, $\lambda_{\hat{K}}$; $\hat{K}$ matrisinin özdeğeri olmak üzere

$$\left|\frac{\lambda_{\hat{H}}}{\lambda_{\hat{H}} + 2\Delta t\lambda_{\hat{K}}}\right| \leq 1\tag{3.92}$$

koşulunun sağlanması gerekir [32].

1. durum: $\lambda_{\hat{H}}$ ve $\lambda_{\hat{K}}$ kompleks olsun. $\lambda_{\hat{H}} = a_{\hat{H}} + ib_{\hat{H}}$, $\lambda_{\hat{K}} = a_{\hat{K}} + ib_{\hat{K}}$ olmak üzere (3.92) eşitsizliği

$$\left|\frac{a_{\hat{H}} + ib_{\hat{H}}}{a_{\hat{H}} + ib_{\hat{H}} + 2\Delta t(a_{\hat{K}} + ib_{\hat{K}})}\right| \leq 1\tag{3.93}$$

şeklinde yazılır. Burada reel ve sanal kısımlar düzenlenirse

$$\left|\frac{a_{\hat{H}} + ib_{\hat{H}}}{(a_{\hat{H}} + 2\Delta ta_{\hat{K}}) + i(b_{\hat{H}} + 2\Delta tb_{\hat{K}})}\right| \leq 1\tag{3.94}$$

eşitsizliği elde edilir. Bir kompleks sayının modülünün tanımı gereği (3.94) eşitsizliği

$$\sqrt{\frac{(a_{\hat{H}})^2 + (b_{\hat{H}})^2}{(a_{\hat{H}} + 2\Delta t a_{\hat{K}})^2 + (b_{\hat{H}} + 2\Delta t b_{\hat{K}})^2}} \leq 1 \quad (3.95)$$

şeklinde olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılsa

$$\sqrt{\frac{a_{\hat{H}}^2 + b_{\hat{H}}^2}{a_{\hat{H}}^2 + b_{\hat{H}}^2 + 4\Delta t^2 a_{\hat{K}}^2 + 4\Delta t^2 b_{\hat{K}}^2 + 4\Delta t(a_{\hat{H}}a_{\hat{K}} + b_{\hat{H}}b_{\hat{K}})}} \leq 1 \quad (3.96)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağlanması için

$$a_{\hat{H}}a_{\hat{K}} + b_{\hat{H}}b_{\hat{K}} + \Delta t(a_{\hat{K}}^2 + b_{\hat{K}}^2) \geq 0 \quad (3.97)$$

olmalıdır.

2.durum: $\lambda_{\hat{H}}$ ve $\lambda_{\hat{K}}$ reel olsun. O halde

$$\left| \frac{\lambda_{\hat{H}}}{\lambda_{\hat{H}} + 2\Delta t \lambda_{\hat{K}}} \right| \leq 1 \quad (3.98)$$

eşitsizliğinden

$$-1 \leq \frac{\lambda_{\hat{H}}}{\lambda_{\hat{H}} + 2\Delta t \lambda_{\hat{K}}} \leq 1 \quad (3.99)$$

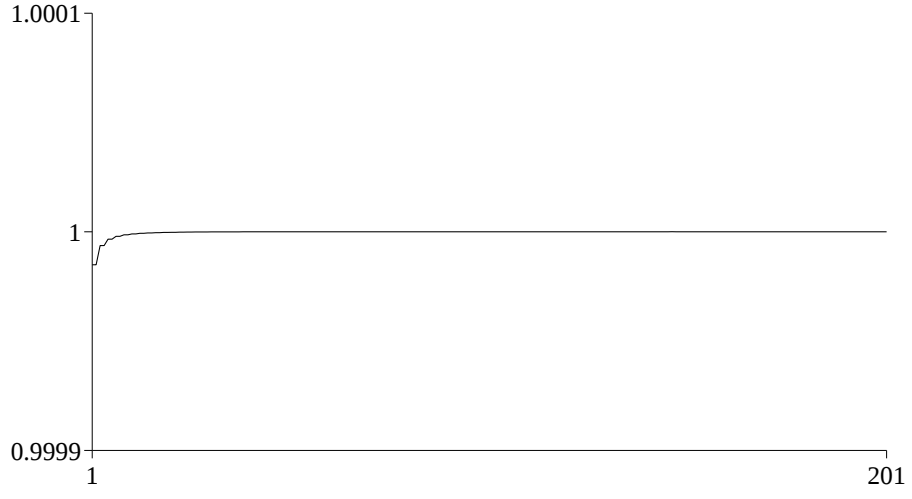
elde edilir. Bu eşitsizlik çözülrse

$$\lambda_{\hat{H}} + \Delta t \lambda_{\hat{K}} \geq 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_{\hat{K}} \geq 0 \quad (3.100)$$

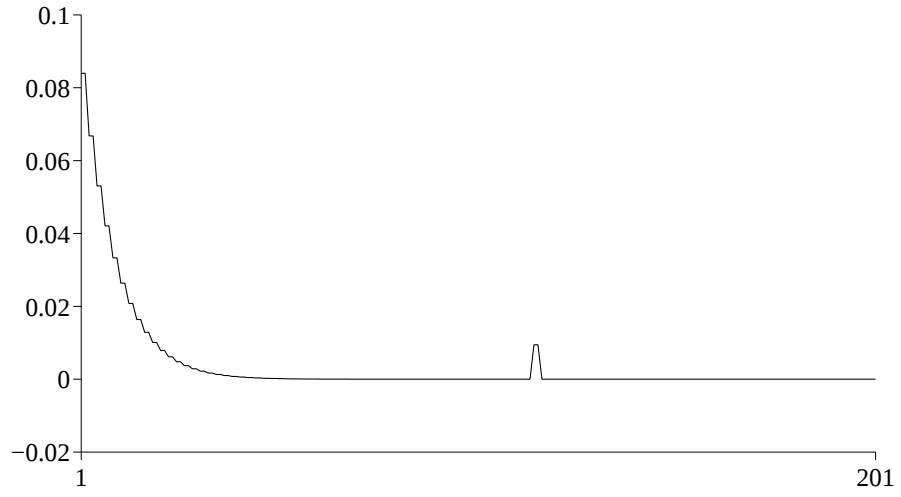
bulunur.

O halde EW denklemi için HEKC metodu ile elde edilen fark denklemi koşullu kararlıdır.

EW denkleminin analitik sonucu bilinen tek solitary dalga hareketi için HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılığı test edilmiştir. $d = 0.1$ için EW denkleminin tek solitary dalga hareketi için $\hat{Q}$ matrisinin özdeğerleri hesaplanmıştır. Özdeğerler kompleks olduğundan Şekil 3.15 de özdeğerlerin modülleri verilmiştir. Şekil 3.16 da ise (3.97) de verilen kararlılık koşulu grafiğe aktarılmıştır. Şekil 3.15-3.16 dan görüldüğü gibi EW denkleminin tek solitary dalga hareketi için koşullu kararlılık sağlanmıştır.



Şekil 3.15. $\hat{Q}$ matrisinin özdeğerlerinin modüllerinin grafiği



Şekil 3.16. Kararlılık koşulunun grafiği

4 MEW DENKLEMİNİN HEKC METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

MEW denklemi lineer olmayan dağınk dalgı denklemlerinin önemli bir modelidir [18].

Lineer olmayan MEW denklemi aşğıdaki formdadır:

$$U_t + 3U^2U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (4.101)$$

Burada μ pozitif bir parametre, x ve t alt indisleri sırasıyla konuma ve zamana göre türevleri, $U(x, t)$ ise x ve t bağımsız değışkenlerine bağı bir fonksiyondur. MEW denklemi için $x \rightarrow \mp\infty$ iken $U \rightarrow 0$ olan fiziksel şartlarının yerine sayısal hesaplama yapabilmek için aşğıdaki başlangıç ve sınır koşulları kullanılmıştır:

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (4.102)$$

$$U(a, t) = \alpha, \quad U(b, t) = \beta, \quad t \geq 0 \quad (4.103)$$

Literatürde bazı yöntemler kullanılarak bu denklemin sayısal çözümleri araştırılmıştır. Bu yöntemlerden bazıları şunlardır: kuintik B-spline sonlu elemanlar kullanılarak Petrov-Galerkin metodu [33], radial basis fonksiyon collocation metodu [34], tanh ve sine-cosine metotları [35], kuintik B-spline collocation metodu [36], lineerleştirilmiş sonlu elemanlar metodu [37], değışimsel iterasyon metodu [38], kuadratik B-spline kullanılarak lumped Galerkin metodu [39].

4.1 MEW Denkleminin Ayrıştırılması

MEW denklemine Crank-Nicolson metodu uygulanırsa;

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{3}{2}((U^2U_x)^{n+1} + (U^2U_x)^n) - \mu \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{\Delta t} = 0 \quad (4.104)$$

denklemi elde edilir. Burada $U^n = U(x, t^n)$ ve Δt de zaman adımı olup $t^n = t^{n-1} + \Delta t$ şeklindedir. (4.104) denkleminde lineer olmayan $(U^2U_x)^{n+1}$ terimini lineerleştirmek için Rubin ve Graves [29] tarafından (3.51) eşitliğı ile verilen lineerleştirme metodu kullanılırsa

$$(U^2U_x)^{n+1} \approx 2U^nU_x^nU^{n+1} + (U^n)^2U_x^{n+1} - 2(U^n)^2U_x^n \quad (4.105)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (4.104) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U^{n+1} + \frac{3}{2}\Delta t(2U^n U_x^n U^{n+1} + (U^n)^2 U_x^{n+1}) - \mu U_{xx}^{n+1} = U^n + \frac{3}{2}\Delta t(U^n)^2 U_x^n - \mu U_{xx}^n \quad (4.106)$$

ayrıştırılmış denklemini elde edilir.

4.2 HEKC Metodunun MEW Denklemine Uygulanması

(3.54)-(3.57) de yapılan yaklaşımlar (4.106) denkleminde yerine yazılırsa bu denklem

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} + \frac{3}{2}\Delta t \left(2 \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \phi'_i(\mathbf{x}_k) u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} \right) \\ & + \frac{3}{2}\Delta t \left(\left(\sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^n \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^N \phi'_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} \right) \\ & - \mu \sum_{i=1}^N \phi''_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^n + \frac{3}{2}\Delta t \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^n \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^N \phi'_i(\mathbf{x}_k) u_i^n \\ & - \mu \sum_{i=1}^N \phi''_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1}, \quad k = 2, \dots, N-1 \\ & \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} = \alpha, \quad k = 1 \\ & \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} = \beta, \quad k = N \end{aligned} \quad (4.107)$$

şekline gelir. Burada $\phi_i(\mathbf{x})$ şekil fonksiyonları yerine (2.19) denkleminde verilen eşitlik yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} \\
& + \frac{3}{2} \Delta t \left[2 \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' u_i^n \right] \\
& \quad \cdot \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} \right] \\
& + \frac{3}{2} \Delta t \left[\left(\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^n \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' u_i^{n+1} \right] \\
& - \mu \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)'' u_i^{n+1} = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^n \\
& \hspace{25em} (4.108) \\
& + \frac{3}{2} \Delta t \left[\left(\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^n \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' u_i^n \right] \\
& - \mu \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)'' u_i^n, \quad k = 2, \dots, N-1 \\
& \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} = \alpha, \quad k = 1 \\
& \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} = \beta, \quad k = N
\end{aligned}$$

şeklinde bir sistem elde edilir. Bu sistem gösterim kolaylığı açısından

$$\begin{aligned}
K_0 &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \\
K_1 &= 3\Delta t \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' u_i^n \right] \\
& \quad \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)
\end{aligned}$$

$$K_2 = \frac{3}{2} \Delta t \left[\left(\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^n \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' \right]$$

$$K_3 = -\mu \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)''$$

olmak üzere $i = 1, 2, \dots, N$ için

$$K_0 u_i^{n+1} = \alpha, \quad k = 1$$

$$(K_0 + K_1 + K_2 + K_3) u_i^{n+1} = (K_0 + K_2 + K_3) u_i^n, \quad k = 2, \dots, N-1 \quad (4.109)$$

$$K_0 u_i^{n+1} = \beta, \quad k = N$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu sistem çözülerek hesaplanan u_i^{n+1} ler (3.55) denkleminde yerine yazılırsa $(n+1)$. adımdaki U sayısal çözümü bulunur.

4.3 Test Problemleri

Bu bölümde, HEKC metodunun doğruluğunu ve geçerliliğini göstermek için dört test problemi ile çalışılmıştır. Bu test problemleri için C_1 , C_2 , C_3 korunum kanunları ile analitik sonucu bilinen test problemi için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak literatürde yer alan bazı sayısal sonuçlarla karşılaştırılmaları yapılmıştır. Ayrıca analitik sonucu bilinen test problemi için verilen metodun zamana göre noktasal yakınsama oranları belirlenmiştir.

MEW denkleminin sırasıyla kütle, momentum ve enerji korunumları

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U dx, \quad C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (U^2 + \mu U_x^2) dx, \quad C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} U^4 dx \quad (4.110)$$

şeklinde hesaplanır [33].

L_2 ve L_∞ hata normları ile noktasal yakınsama oranları sırasıyla (3.65) ve (3.66) da verilen eşitliklerle hesaplanmıştır.

4.3.1 Tek Solitary Dalga Hareketi

MEW denkleminin solitary dalga çözümü

$$U(x, t) = A \operatorname{sech}(k[x - vt - x_0]), \quad k = \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \quad v = \frac{A^2}{2} \quad (4.111)$$

şeklindedir. Burada k dalganın genişliğini, v dalganın hızını, A ise dalganın genliğini göstermektedir. Bu çözüm; başlangıçta tepe noktası x_0 üzerinde bulunan, sağa doğru v sabit hızıyla hareket eden tek solitary dalgayı temsil eder. Burada $U(x, 0) = A \operatorname{sech}(k[x - x_0])$ başlangıç koşulu ile $U(0, t) = U(70, t) = 0$ sınır koşulları kullanılmıştır. Tek solitary dalga hareketi $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığında $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $A = 0.25, 0.5, 1$ parametreleri için çözülmüştür. Ayrıca hesaplamalarda taban polinomunun derecesi $m = 4$ alınmıştır.

C_1, C_2, C_3 korunumları analitik olarak

$$C_1 = \frac{A\pi}{k}, \quad C_2 = \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3}, \quad C_3 = \frac{4A^4}{3k} \quad (4.112)$$

şeklindedir [33]. Bu eşitlikler kullanılarak

$A = 0.25$ için

$$C_1 = 0.785398, \quad C_2 = 0.166666, \quad C_3 = 0.005208 \quad (4.113)$$

$A = 0.5$ için

$$C_1 = 1.570796, \quad C_2 = 0.666666, \quad C_3 = 0.083333 \quad (4.114)$$

$A = 1$ için

$$C_1 = 3.141592, \quad C_2 = 2.666666, \quad C_3 = 1.333333 \quad (4.115)$$

değerleri elde edilir.

Sayısal sonuçlar 701×701 tane matris girdisinden 11141 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matrisin girdilerinin yaklaşık %2'si kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır.

Çizelge 4.9 da $A = 0.25$, $A = 0.5$ ve $A = 1$ için $t = 20$ zamanında hesaplanan C_1, C_2, C_3 korunumları ile L_2, L_∞ hata normları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar [33] ve [34] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çizelge 4.10 da farklı zaman adımlarında L_2, L_∞ hata normları ile noktasal yakınsama oranları hesaplanmıştır. Hesaplamalar $A = 0.25$ için $t = 20$ zamanında konum adımı $h = 0.1$ sabit tutularak yapılmıştır. Çizelge 4.10 dan Δt azaldıkça hata normlarının küçüldüğü ve yakınsama oranlarının 2 civarında olduğu görülmüştür. Şekil 4.17, Şekil 4.18 ve Şekil 4.19 da ise farklı genliklerdeki dalgaların $t = 0$, $t = 10$ ve $t = 20$ zamanlarında elde edilen çözümlerinin

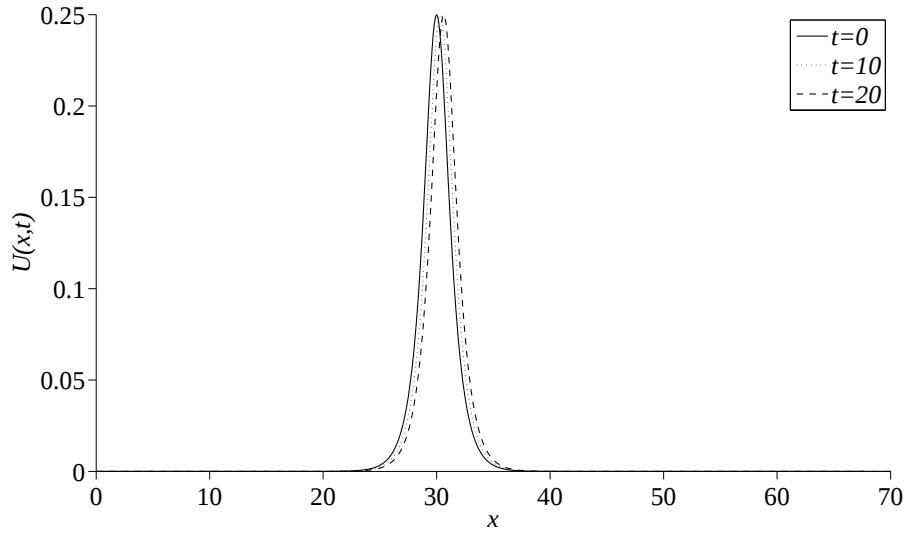
grafikleri verilmiştir.

Çizelge 4.9. $A = 0.25$, $A = 0.5$ ve $A = 1$ genlikli tek solitary dalga hareketleri için $t = 20$ zamanında oluşan korunumlar ve hata normları

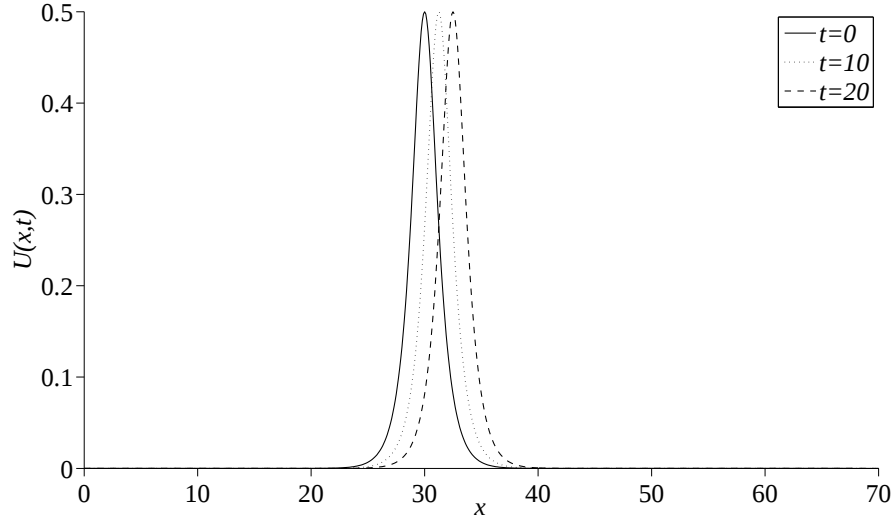
Metot	A	h	Δt	C_1	C_2	C_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
HEKC	0.25	0.1	0.05	0.785398	0.166665	0.005208	0.003616	0.002516
[33]	0.25	0.1	0.05	0.78539	0.16667	0.00521	0.00345	0.00203
[34]	0.25	0.2	0.05	0.785384	0.166661	0.005208	0.005504	0.003695
HEKC	0.5	0.1	0.05	1.570796	0.666661	0.083333	0.039900	0.025243
[33]	0.5	0.1	0.05	1.57078	0.66666	0.08333	0.01172	0.00852
[34]	0.5	0.2	0.05	1.570766	0.666646	0.083328	0.031869	0.024765
HEKC	1	0.1	0.05	3.141592	2.666629	1.333315	1.961623	1.222435
[33]	1	0.1	0.05	3.14165	2.66676	1.33343	0.14465	0.08360
[34]	1	0.2	0.05	3.141465	2.666466	1.333133	2.049882	1.292407

Çizelge 4.10. $A = 0.25$, $h = 0.1$, $t = 20$ için hata normları ve noktasal yakınsama oranları

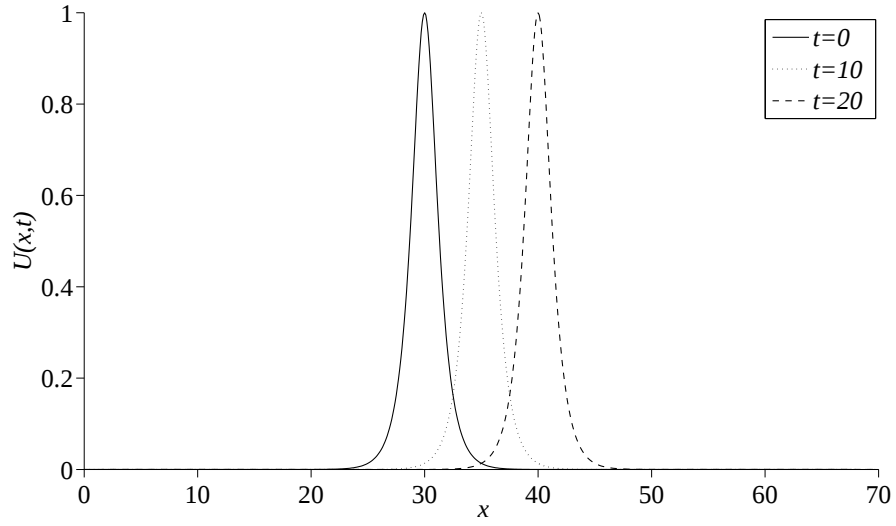
Δt	L_2	$YO(L_2)$	L_∞	$YO(L_\infty)$
1	0.0019801	—	0.0010351	—
0.5	0.00041192	2.2651	0.00027333	1.9210
0.25	0.000090864	2.1805	0.000069483	1.9759
0.1	0.000014449	2.0067	0.000011144	1.9973
0.05	0.0000036160	1.9985	0.0000025160	2.1470



Şekil 4.17. $A=0.25$ için tek solitary dalga hareketi



Şekil 4.18. $A=0.5$ için tek solitary dalga hareketi



Şekil 4.19. $A=1$ için tek solitary dalga hareketi

4.3.2 İki Solitary Dalga Etkileşimi

İki solitary dalga etkileşimi

$$\begin{aligned} U(x, 0) &= U_1 + U_2 \\ U_j &= A_j \operatorname{sech}(k_j(x - \tilde{x}_j)), \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.116)$$

başlangıç koşulu ve $U(0, t) = U(80, t) = 0$ sınır koşulları kullanılarak çalışılmıştır. $\mu = 1$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $\tilde{x}_1 = 15$, $\tilde{x}_2 = 30$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$ parametre değerleri seçilmiştir ve program $t = 60$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. Ayrıca hesaplamalarda taban polinomunun derecesi $m = 5$ alınmıştır.

Korunumların analitik değerleri

$$\begin{aligned} C_1 &= \pi(A_1 + A_2) = 4.7123889 \\ C_2 &= \frac{8}{3}(A_1^2 + A_2^2) = 3.3333333 \\ C_3 &= \frac{4}{3}(A_1^4 + A_2^4) = 1.4166667 \end{aligned} \quad (4.117)$$

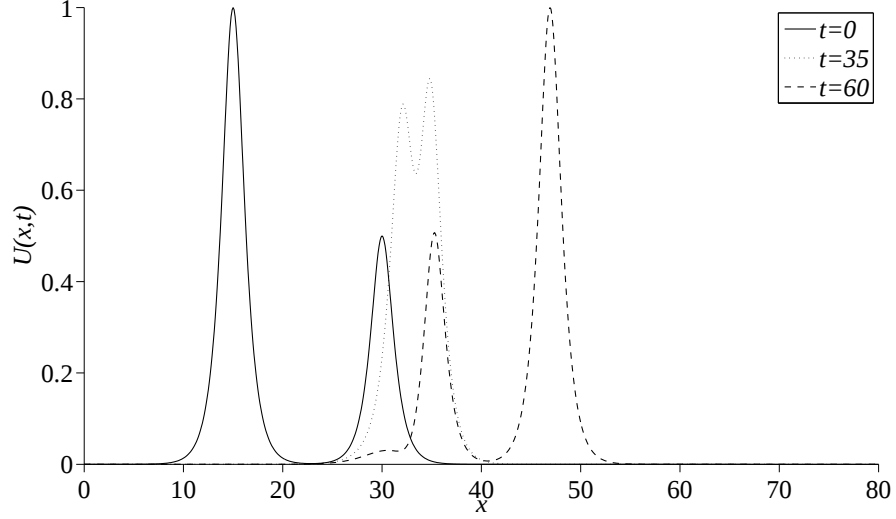
şeklindedir [40].

Sayısal sonuçlar 801×801 tane matris girdisinden 15163 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matrisin girdilerinin yaklaşık %2'si kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır.

Çizelge 4.11 de $t = 60$ zamanında hesaplanan C_1 , C_2 , C_3 korunumları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar [34] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Şekil 4.20 de ise $t = 0$, $t = 35$ ve $t = 60$ zamanlarında elde edilen dalga çözümlerinin grafikleri verilmiştir. Şekil 4.20 den görüldüğü gibi başlangıçta genliği büyük olan dalga genliği küçük olan dalganın soluna, tepe noktaları ise sırasıyla $x = 15$ ve $x = 30$ noktalarına yerleştirilmiştir. Zaman ilerledikçe büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgayı yakalayarak etkileşimi başlattığı ve iki dalganın tek bir dalga gibi olduğu görülmüştür. Etkileşim tamamlandıktan sonra ise dalgaların birbirinden tamamen ayrılarak büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgayı geçtiği gözlenmiştir.

Çizelge 4.11. $t = 60$ zamanında iki solitary dalga etkileşimi için korunumlar

Metot	h	Δt	C_1	C_2	C_3
HEKC	0.1	0.025	4.712389	3.333330	1.416664
[34]	0.2	0.1	4.7123601	3.3328128	1.4161525



Şekil 4.20. İki solitary dalganın etkileşimi

4.3.3 Üç Solitary Dalga Etkileşimi

Üç solitary dalga etkileşimi

$$\begin{aligned}
 U(x, 0) &= U_1 + U_2 + U_3 \\
 U_j &= A_j \operatorname{sech}(k_j(x - \tilde{x}_j)), \quad j = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{4.118}$$

başlangıç koşulu ile verilmiştir. $\mu = 1$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $\tilde{x}_1 = 15$, $\tilde{x}_2 = 30$, $\tilde{x}_3 = 45$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $A_3 = 0.25$ değerleri ve $U(0, t) = U(140, t) = 0$ sınır koşulları kullanılmıştır. Bu test probleminde genliği 1 olan dalganın tepe noktası $x_1 = 15$, genliği 0.5 olan dalganın tepe noktası $x_2 = 30$, genliği 0.25 olan dalganın tepe noktası ise $x_3 = 45$ noktasına yerleştirilmiş ve program $t = 200$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. Ayrıca hesaplamalarda taban polinomunun derecesi $m = 4$ alınmıştır.

Korunumların analitik değerleri

$$\begin{aligned} C_1 &= 12(A_1 + A_2 + A_3) = 5.4977871 \\ C_2 &= 28.8(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) = 3.5 \\ C_3 &= 57.6(A_1^4 + A_2^4 + A_3^4) = 1.421875 \end{aligned} \quad (4.119)$$

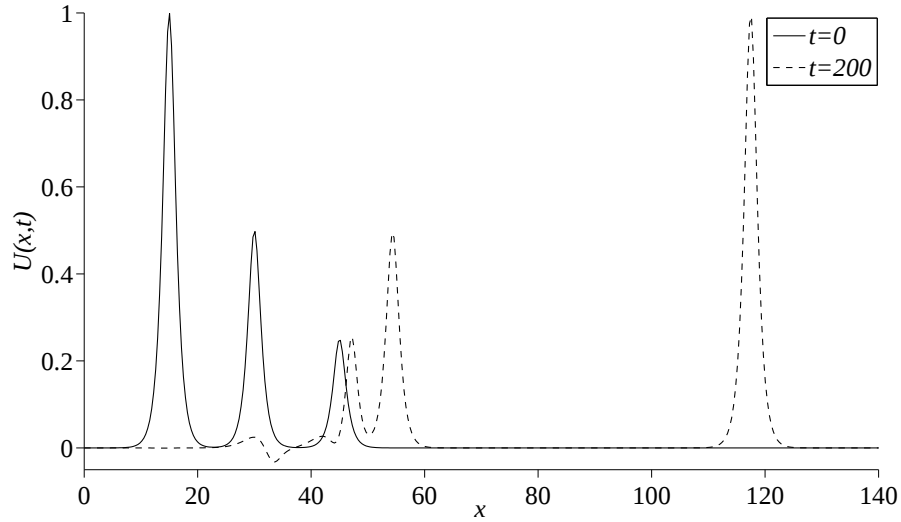
şeklindedir [40].

Sayısal sonuçlar 401×401 tane matris girdisinden 6397 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matrisin girdilerinin yaklaşık %4'ü kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır.

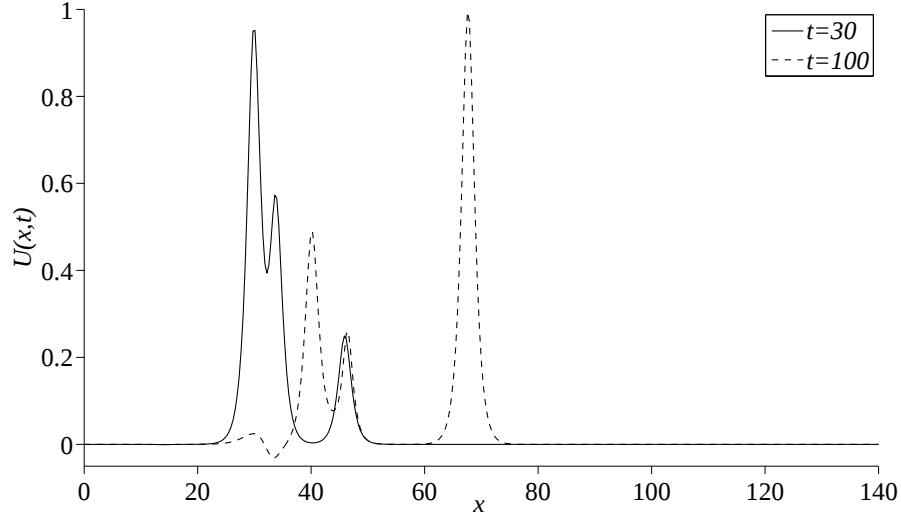
Çizelge 4.12 de $t = 200$ zamanında oluşan C_1 , C_2 , C_3 korunumları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar [34] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Şekil 4.21 ve Şekil 4.22 de ise üç solitary dalganın farklı zamanlarda etkileşimlerini gösteren grafikler verilmiştir. Üç solitary dalga etkileşimi, iki solitary dalga etkileşimine benzer olarak gerçekleşmiştir.

Çizelge 4.12. $t = 200$ zamanında üç solitary dalga etkileşimi için korunumlar

Metot	h	Δt	C_1	C_2	C_3
HEKC	0.35	0.1	5.4979768	3.4952444	1.4204596
[34]	0.35	0.1	5.4977770	3.4986334	1.4205386



Şekil 4.21. Üç solitary dalganın $t = 0$ ve $t = 200$ zamanlarında etkileşimi



Şekil 4.22. Üç solitary dalganın $t = 30$ ve $t = 100$ zamanlarında etkileşimi

4.3.4 Maxwell Başlangıç Koşulu

Bu bölümde MEW denkleminin

$$U(x, 0) = \exp(-x^2) \quad (4.120)$$

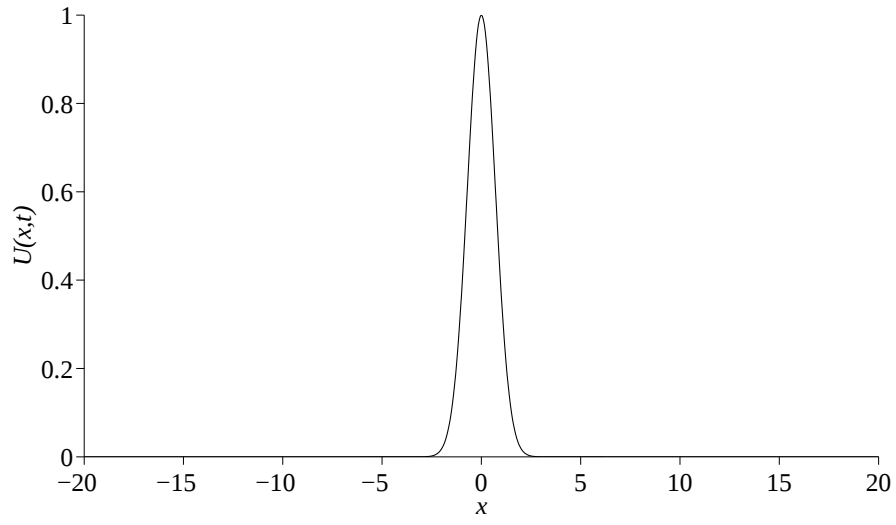
başlangıç koşulu altında dalga oluşumu çözümü çalışılmıştır. Sınır koşulları $U(-20, t) = U(20, t) = 0$ olarak seçilerek $t = 12.5$ anında dalganın oluşumu izlenmiştir. Ayrıca hesaplamalarda taban polinomunun derecesi $m = 4$ alınmıştır.

Sayısal sonuçlar 801×801 tane matris girdisinden 12577 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matrisin girdilerinin yaklaşık %2'si kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır.

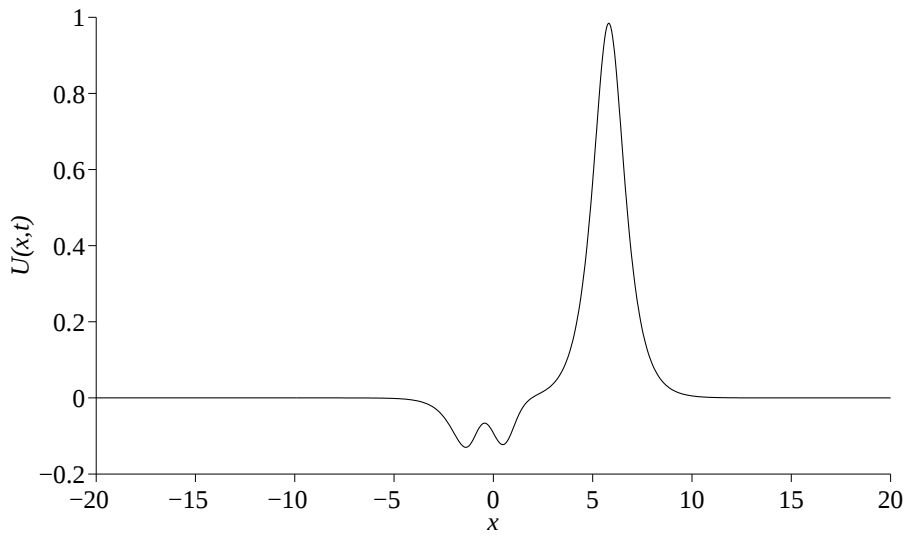
Çizelge 4.13 de μ nün farklı değerleri için $t = 12.5$ zamanında hesaplanan C_1 , C_2 , C_3 korunumları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar [33] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Şekil 4.23 te başlangıç anında elde edilen çözümün grafiği, Şekil 4.24, Şekil 4.25, Şekil 4.26, Şekil 4.27 de ise sırasıyla $\mu = 0.5$, $\mu = 0.1$, $\mu = 0.05$, $\mu = 0.02$ değerleri için $t = 12.5$ zamanında elde edilen çözümlerin grafikleri verilmiştir. Bu grafiklerden de görüldüğü gibi μ nün değerlerinin küçültülmesiyle maxwell başlangıç koşulu altında oluşan dalga sayısının arttığı gözlenmiştir.

Çizelge 4.13. Maxwell başlangıç koşulu için korunumlar

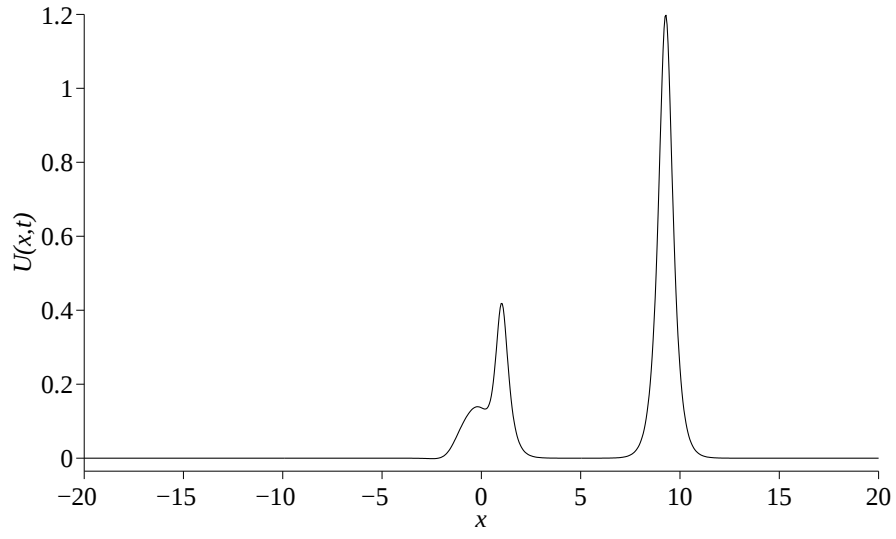
Metot	μ	h	Δt	C_1	C_2	C_3
HEKC	0.5	0.05	0.01	1.77245	1.87996	0.88622
[33]	0.5	0.05	0.01	1.77243	1.87988	0.88614
HEKC	0.1	0.05	0.01	1.77248	1.37876	0.88650
[33]	0.1	0.05	0.01	1.77246	1.37867	0.88629
HEKC	0.05	0.05	0.01	1.77256	1.31631	0.88723
[33]	0.05	0.05	0.01	1.77246	1.31599	0.88633
HEKC	0.02	0.05	0.01	1.77309	1.27949	0.89069
[33]	0.02	0.05	0.01	1.77246	1.26585	0.88659



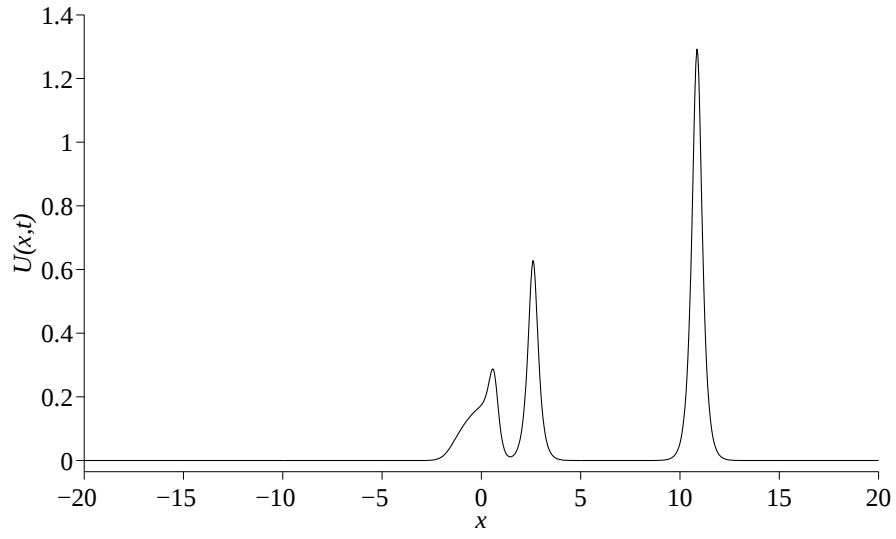
Şekil 4.23. $t = 0$ anındaki çözümün grafiği



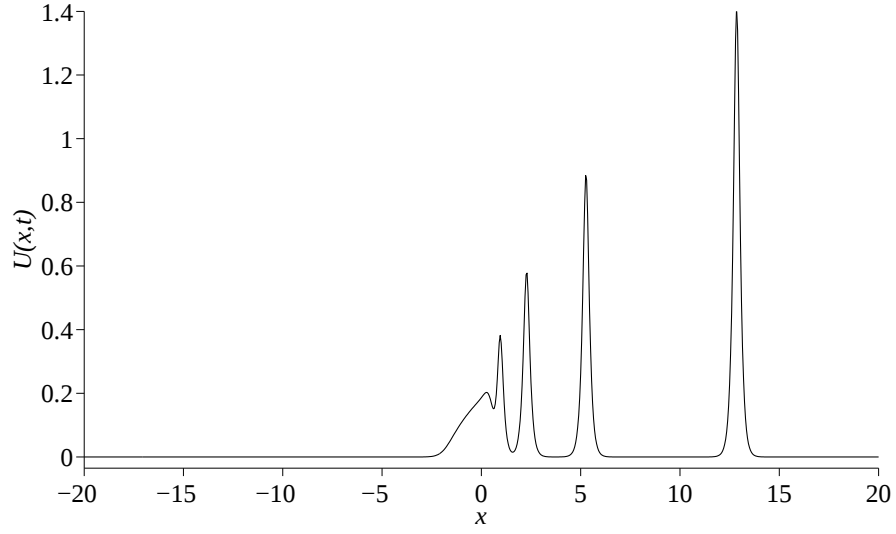
Şekil 4.24. $\mu = 0.5$ için $t = 12.5$ anındaki çözümün grafiği



Şekil 4.25. $\mu = 0.1$ için $t = 12.5$ anındaki çözümün grafiği



Şekil 4.26. $\mu = 0.05$ için $t = 12.5$ anındaki çözümün grafiği



Şekil 4.27. $\mu = 0.02$ için $t = 12.5$ anındaki çözümün grafiği

4.4 Kararlılık Analizi

Bu bölümde matris metodu kullanılarak MEW denklemi için HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılık analizi yapılmıştır.

(4.107) denklemi

$$\begin{aligned}
 \bar{A} &= [\phi_i(x_k) : i, k = \overline{1, N}] \\
 \bar{B} &= [\phi'_i(x_k) : i = \overline{1, N}, \quad k = \overline{2, N-1}] \\
 \bar{C} &= [\phi''_i(x_k) : i = \overline{1, N}, \quad k = \overline{2, N-1}] \\
 \bar{D} &= 2U^n * U_x^n * \bar{A} \\
 \bar{E} &= (U^n)^2 * \bar{B}
 \end{aligned} \tag{4.121}$$

olmak üzere

$$\left[\bar{A} - \mu \bar{C} + 3 \frac{\Delta t}{2} (\bar{E} + \bar{D}) \right] u^{n+1} = \left[\bar{A} - \mu \bar{C} + 3 \frac{\Delta t}{2} \bar{E} \right] u^n \tag{4.122}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
 U^n &= \bar{A} u^n \\
 U^{n+1} &= \bar{A} u^{n+1}
 \end{aligned} \tag{4.123}$$

olduğundan (4.122) denklemi

$$\left[(\bar{A} - \mu\bar{C})\bar{A}^{-1} + 3\frac{\Delta t}{2}(\bar{E} + \bar{D})\bar{A}^{-1} \right] U^{n+1} = \left[(\bar{A} - \mu\bar{C})\bar{A}^{-1} + 3\frac{\Delta t}{2}\bar{E}\bar{A}^{-1} \right] U^n \quad (4.124)$$

şekline gelir. Burada

$$\begin{aligned} 3\frac{\Delta t}{2}\bar{D}\bar{A}^{-1} &= 3\frac{\Delta t}{2}2U^n * U_x^n * \bar{A}\bar{A}^{-1} \\ &= 3\Delta t U^n * (\bar{B}u^n) * I \\ &= 3\Delta t U^n * (\bar{B}\bar{A}^{-1})U^n * I \\ &= 3\Delta t (U^n)^2 * \bar{B}\bar{A}^{-1} \\ &= 3\Delta t \bar{E}\bar{A}^{-1} \end{aligned} \quad (4.125)$$

olduğundan (4.124) denklemi

$$\left[(\bar{A} - \mu\bar{C})\bar{A}^{-1} + 9\frac{\Delta t}{2}\bar{E}\bar{A}^{-1} \right] U^{n+1} = \left[(\bar{A} - \mu\bar{C})\bar{A}^{-1} + 3\frac{\Delta t}{2}\bar{E}\bar{A}^{-1} \right] U^n \quad (4.126)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \bar{H} &= (\bar{A} - \mu\bar{C})\bar{A}^{-1} \\ \bar{K} &= \frac{3}{2}\bar{E}\bar{A}^{-1} \end{aligned} \quad (4.127)$$

olmak üzere (4.126) denklemi

$$\left[\bar{H} + 3\Delta t\bar{K} \right] U^{n+1} = \left[\bar{H} + \Delta t\bar{K} \right] U^n \quad (4.128)$$

şeklinde olur. O halde (4.128) denklemi

$$U^{n+1} = \left[\bar{H} + 3\Delta t\bar{K} \right]^{-1} \left[\bar{H} + \Delta t\bar{K} \right] U^n \quad (4.129)$$

şeklinde yazılırsa

$$\bar{Q} = \left[\bar{H} + 3\Delta t\bar{K} \right]^{-1} \left[\bar{H} + \Delta t\bar{K} \right] \quad (4.130)$$

olmak üzere

$$e^{n+1} = \bar{Q}e^n \quad (4.131)$$

hata denklemi elde edilir. HEKC metodu ile elde edilen sonlu fark denkleminin

kararlı olması için $\rho(\bar{Q}) \leq 1$ olmalıdır. Bu koşulun sağlanması için de $\lambda_{\bar{H}}$ $\bar{H}$ matrisinin özdeğeri, $\lambda_{\bar{K}}$ $\bar{K}$ matrisinin özdeğeri olmak üzere

$$\left| \frac{\lambda_{\bar{H}} + \Delta t \lambda_{\bar{K}}}{\lambda_{\bar{H}} + 3\Delta t \lambda_{\bar{K}}} \right| \leq 1 \quad (4.132)$$

koşulunun sağlanması gerekir.

1. durum: $\lambda_{\bar{H}}$ ve $\lambda_{\bar{K}}$ kompleks olsun. $\lambda_{\bar{H}} = a_{\bar{H}} + ib_{\bar{H}}$, $\lambda_{\bar{K}} = a_{\bar{K}} + ib_{\bar{K}}$ olmak üzere (4.132) eşitsizliği

$$\left| \frac{a_{\bar{H}} + ib_{\bar{H}} + \Delta t(a_{\bar{K}} + ib_{\bar{K}})}{a_{\bar{H}} + ib_{\bar{H}} + 3\Delta t(a_{\bar{K}} + ib_{\bar{K}})} \right| \leq 1 \quad (4.133)$$

şeklinde yazılır. Burada reel ve sanal kısımlar düzenlenirse

$$\left| \frac{(a_{\bar{H}} + \Delta t a_{\bar{K}}) + i(b_{\bar{H}} + \Delta t b_{\bar{K}})}{(a_{\bar{H}} + 3\Delta t a_{\bar{K}}) + i(b_{\bar{H}} + 3\Delta t b_{\bar{K}})} \right| \leq 1 \quad (4.134)$$

eşitsizliği elde edilir. Bir kompleks sayının modülünün tanımı gereği (4.134) eşitsizliği

$$\sqrt{\frac{(a_{\bar{H}} + \Delta t a_{\bar{K}})^2 + (b_{\bar{H}} + \Delta t b_{\bar{K}})^2}{(a_{\bar{H}} + 3\Delta t a_{\bar{K}})^2 + (b_{\bar{H}} + 3\Delta t b_{\bar{K}})^2}} \leq 1 \quad (4.135)$$

şeklinde olur. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$\sqrt{\frac{a_{\bar{H}}^2 + b_{\bar{H}}^2 + \Delta t^2 a_{\bar{K}}^2 + \Delta t^2 b_{\bar{K}}^2 + 2\Delta t(a_{\bar{H}}a_{\bar{K}} + b_{\bar{H}}b_{\bar{K}})}{a_{\bar{H}}^2 + b_{\bar{H}}^2 + 9\Delta t^2 a_{\bar{K}}^2 + 9\Delta t^2 b_{\bar{K}}^2 + 6\Delta t(a_{\bar{H}}a_{\bar{K}} + b_{\bar{H}}b_{\bar{K}})}} \leq 1 \quad (4.136)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağlanması için

$$a_{\bar{H}}a_{\bar{K}} + b_{\bar{H}}b_{\bar{K}} + 2\Delta t(a_{\bar{K}}^2 + b_{\bar{K}}^2) \geq 0 \quad (4.137)$$

olmalıdır.

2.durum: $\lambda_{\bar{H}}$ ve $\lambda_{\bar{K}}$ reel olsun. O halde (4.132) eşitsizliğinden

$$-1 \leq \frac{\lambda_{\bar{H}} + \Delta t \lambda_{\bar{K}}}{\lambda_{\bar{H}} + 3\Delta t \lambda_{\bar{K}}} \leq 1 \quad (4.138)$$

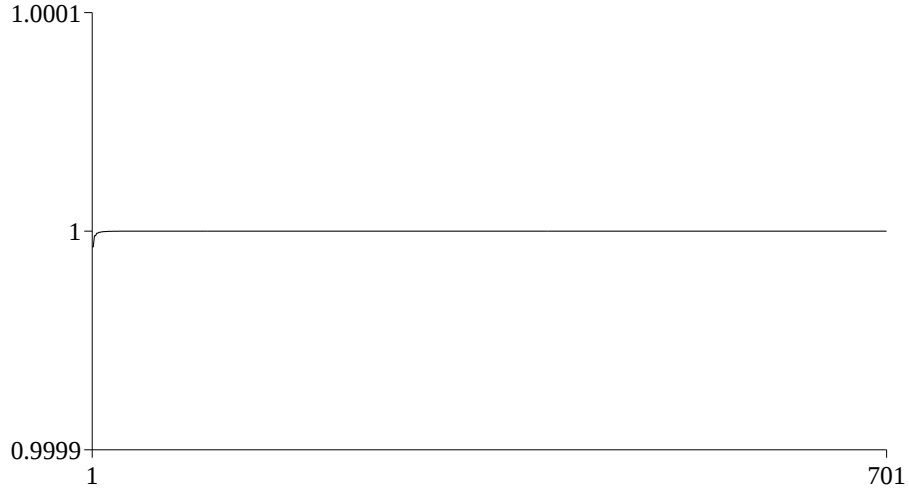
elde edilir. Bu eşitsizliğin çözülmesiyle

$$\lambda_{\bar{H}} + 2\Delta t \lambda_{\bar{K}} \geq 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_{\bar{K}} \geq 0 \quad (4.139)$$

bulunur.

O halde MEW denklemi için HEKC metodu ile elde edilen fark denklemi koşullu kararlıdır.

MEW denkleminin analitik sonucu bilinen tek solitary dalga hareketi için HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılığı test edilmiştir. $A = 0.25$ için MEW denkleminin tek solitary dalga hareketi için $\bar{Q}$ matrisinin özdeğerleri hesaplanmıştır. Özdeğerler kompleks olduğundan Şekil 4.28 de özdeğerlerin modülleri verilmiştir. Şekil 4.29 da ise (4.137) de verilen kararlılık koşulu grafiğe aktarılmıştır. Şekil 4.28-4.29 dan görüldüğü gibi MEW denkleminin tek solitary dalga hareketi için koşullu kararlılık sağlanmıştır.



Şekil 4.28. $\bar{Q}$ matrisinin özdeğerlerinin modüllerinin grafiği



Şekil 4.29. Kararlılık koşulunun grafiği

5 GEW DENKLEMİNİN HEKC METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

GEW denklemi lineer olmayan dağılık dalga denklemlerinin önemli bir modelidir [18].

Lineer olmayan GEW denklemi aşağıdaki formdadır:

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (5.140)$$

Burada ε , μ , p pozitif sabitler, x ve t sırasıyla konuma ve zamana göre türevleri, $U(x, t)$ ise x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyondur. GEW denklemi için $x \rightarrow \mp\infty$ iken $U \rightarrow 0$ olan fiziksel şartlarının yerine sayısal hesaplama yapabilmek için aşağıdaki başlangıç ve sınır koşulları kullanılmıştır:

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (5.141)$$

$$U(a, t) = \alpha, \quad U(b, t) = \beta \quad t \geq 0 \quad (5.142)$$

Literatürde bazı yöntemler kullanılarak bu denklemin sayısal çözümleri araştırılmıştır. Bu yöntemler şunlardır: kuadratik B-spline collocation metodu [40], Petrov-Galerkin metodu [41], kübik B-spline collocation metodu [42].

5.1 GEW Denkleminin Ayırıştırılması

GEW denkleminde Crank-Nicolson metodu uygulanırsa;

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \varepsilon \frac{(U^p U_x)^{n+1} + (U^p U_x)^n}{2} - \mu \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{\Delta t} = 0 \quad (5.143)$$

denklemi elde edilir. Burada $U^n = U(x, t^n)$ ve Δt de zaman adımı olup $t^n = t^{n-1} + \Delta t$ şeklindedir. (5.143) denkleminde lineer olmayan $(U^p U_x)^{n+1}$ terimini lineerleştirmek için aşağıdaki Taylor seri açılımı kullanılırsa

$$(U^p U_x)^{n+1} \approx (U^p)^n U_x^{n+1} + p(U^{p-1})^n U_x^n U^{n+1} - p(U^p)^n U_x^n \quad (5.144)$$

(5.143) nolu denklem

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \varepsilon \frac{(U^p)^n U_x^{n+1} + p(U^{p-1})^n U_x^n U^{n+1} + (1-p)(U^p)^n U_x^n}{2} - \mu \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{\Delta t} = 0 \quad (5.145)$$

şeklinde olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2} \Delta t ((U^p)^n U_x^{n+1} + p(U^{p-1})^n U_x^n U^{n+1}) - \mu U_{xx}^{n+1} = U^n - \frac{\varepsilon}{2} \Delta t (1-p)(U^p)^n U_x^n - \mu U_{xx}^n \quad (5.146)$$

ayrıştırılmış denklemi elde edilir.

5.2 HEKC Metodunun GEW Denklemine Uygulanması

(3.54)-(3.57) de yapılan yaklaşımlar (5.146) denkleminde yerine yazılırsa bu denklem

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2} \Delta t \sum_{i=1}^N \phi_i^p(\mathbf{x}_k) u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \phi_i'(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \Delta t p \sum_{i=1}^N \phi_i^{p-1}(\mathbf{x}_k) u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \phi_i'(\mathbf{x}_k) u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} \\ & - \mu \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^n - \frac{\varepsilon}{2} \Delta t (1-p) \sum_{i=1}^N \phi_i^p(\mathbf{x}_k) u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \phi_i'(\mathbf{x}_k) u_i^n \\ & - \mu \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}_k) u_i^n, \quad k = 2, \dots, N-1 \\ & \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} = \alpha, \quad k = 1 \\ & \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} = \beta, \quad k = N \end{aligned} \quad (5.147)$$

şekline gelir. Burada $\phi_i(\mathbf{x})$ şekil fonksiyonları yerine (2.19) denkleminde verilen eşitlik yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} \\
& + \frac{\varepsilon}{2} \Delta t \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)^p u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' u_i^{n+1} \right] \\
& + \frac{\varepsilon}{2} \Delta t p \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)^{p-1} u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' u_i^n \right. \\
& \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} \left. \right] - \mu \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)'' u_i^{n+1} \\
& = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^n \tag{5.148} \\
& - \frac{\varepsilon}{2} \Delta t (1-p) \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)^p u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' u_i^n \right] \\
& - \mu \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)'' u_i^n, \quad k = 2, \dots, N-1 \\
& \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} = \alpha, \quad k = 1 \\
& \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} = \beta, \quad k = N
\end{aligned}$$

şeklinde bir sistem elde edilir. Bu sistem gösterim kolaylığı açısından

$$\begin{aligned}
L_0 &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \\
L_1 &= \frac{\varepsilon}{2} \Delta t \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)^p u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2 &= \frac{\varepsilon}{2} \Delta t p \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)^{p-1} u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)' u_i^n \\
&\quad \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \\
L_3 &= -\mu \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)''
\end{aligned}$$

olmak üzere $i = 1, 2, \dots, N$ için

$$L_0 u_i^{n+1} = \alpha, \quad k = 1$$

$$(L_0 + L_1 + L_2 + L_3) u_i^{n+1} = (L_0 - (1-p)L_1 + L_3) u_i^n, \quad k = 2, \dots, N-1 \quad (5.149)$$

$$L_0 u_i^{n+1} = \beta, \quad k = N$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu sistem çözülerek hesaplanan u_i^{n+1} ler (3.55) denkleminde yerine yazılırsa $(n+1)$. adımdaki U sayısal çözümü bulunur.

5.3 Test Problemleri

Bu bölümde, HEKC metodunun doğruluğunu ve geçerliliğini göstermek için üç test problemi ile çalışılmıştır. Bu test problemleri için C_1 , C_2 , C_3 korunum kanunları ile analitik sonucu bilinen test problemi için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak literatürde yer alan bazı sayısal sonuçlarla karşılaştırılmaları yapılmıştır. Ayrıca analitik sonucu bilinen test problemi için verilen metodun zamana göre noktasal yakınsama oranları belirlenmiştir.

GEW denkleminin sırasıyla kütle, momentum ve enerji korunumları

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U dx, \quad C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (U^2 + \mu U_x^2) dx, \quad C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} U^{p+2} dx \quad (5.150)$$

şeklinde hesaplanır [40, 42].

L_2 ve L_∞ hata normları ile noktasal yakınsama oranları sırasıyla (3.65) ve (3.66) da verilen eşitliklerle hesaplanmıştır.

5.3.1 Tek Solitary Dalga Hareketi

GEW denkleminin solitary dalga çözümü

$$U(x, t) = \sqrt[p]{\frac{\nu(p+1)(p+2)}{2\varepsilon} \operatorname{sech}^2\left(\frac{p}{2\sqrt{\mu}}[x - vt - x_0]\right)} \quad (5.151)$$

şeklindedir. Burada v dalganın hızını, $\sqrt[p]{\frac{\nu(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}}$ dalganın genliğini, $\frac{p}{2\sqrt{\mu}}$ ise dalganın genişliğini göstermektedir. Tek solitary dalga hareketi $p = 3$ ve $p = 4$ alınarak $0 \leq t \leq 20$ zaman periyodunda $0 \leq x \leq 80$ tanım aralığında $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ parametreleri için çözülmüştür. $p = 3$ için dalganın hızı $v = 0.3$, $p = 4$ için dalganın hızı $v = 0.2$ alınmıştır. Ayrıca hesaplamalarda taban polinomunun derecesi $p = 3$ için $m = 3$ ve $p = 4$ için $m = 5$ alınmıştır.

Sayısal sonuçlar $p = 3$ için 801×801 tane matris girdisinden 9483 tanesi, $p = 4$ için 801×801 tane matris girdisinden 15163 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle $p = 3$ için matrisin girdilerinin yaklaşık %1'i, $p = 4$ için ise matrisin girdilerinin yaklaşık %2'si kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır.

Çizelge 5.14 ve Çizelge 5.15 de sırasıyla $p = 3$, $p = 4$ için $t = 20$ zamanında hesaplanan C_1 , C_2 , C_3 korunumları ile L_2 , L_∞ hata normları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar [41] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çizelge 5.16 ve Çizelge 5.17 de ise sırasıyla $p = 3$, $p = 4$ için farklı zaman adımlarında L_2 , L_∞ hata normları ile noktasal yakınsama oranları hesaplanmıştır. Hesaplamalar $t = 20$ zamanında konum adımı $h = 0.1$ sabit tutularak yapılmıştır. Çizelge 5.16 ve Çizelge 5.17 den Δt azaldıkça hata normlarının küçüldüğü ve yakınsama oranlarının genel olarak 2 civarında olduğu görülmüştür. Şekil 5.30 ve Şekil 5.31 de sırasıyla $p = 3$, $p = 4$ için $t = 0$, $t = 10$ ve $t = 20$ zamanlarında elde edilen çözümlerin grafikleri verilmiştir.

Çizelge 5.14. $p = 3$ için $t = 20$ zamanında tek solitary dalga hareketi için korunumlar ve hata normları

Metot	h	Δt	C_1	C_2	C_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
HEKC	0.1	0.1	2.80436	2.46379	0.98548	2.63447	1.81729
[41]	0.1	0.2	2.80436	2.46389	0.98556	4.84271	3.70926

Çizelge 5.15. $p = 4$ için $t = 20$ zamanında tek solitary dalga hareketi için korunumlar ve hata normları

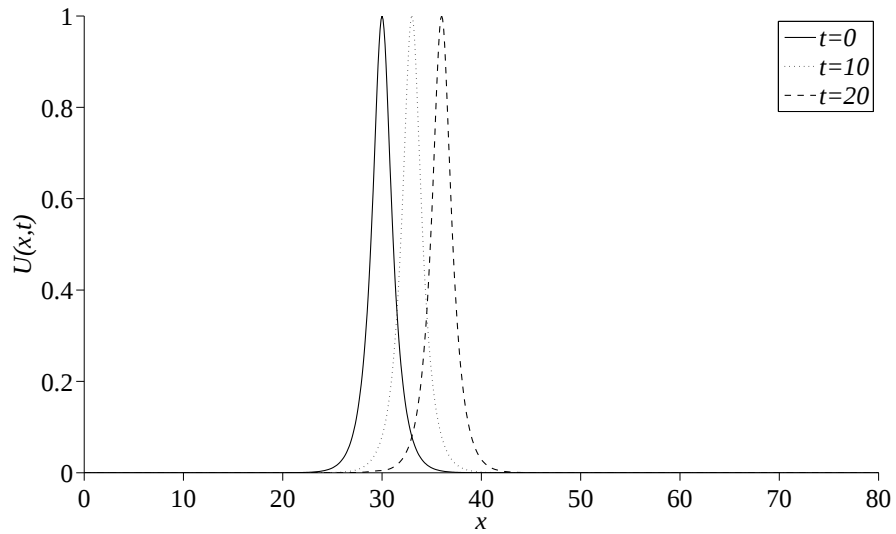
Metot	h	Δt	C_1	C_2	C_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
HEKC	0.1	0.1	2.62205	2.35615	0.785351	1.43293	1.21912
[41]	0.1	0.2	2.62206	2.35615	0.785344	2.30499	1.88285

Çizelge 5.16. $p = 3$, $t = 20$, $h = 0.1$ için hata normları ve noktasal yakınsama oranları

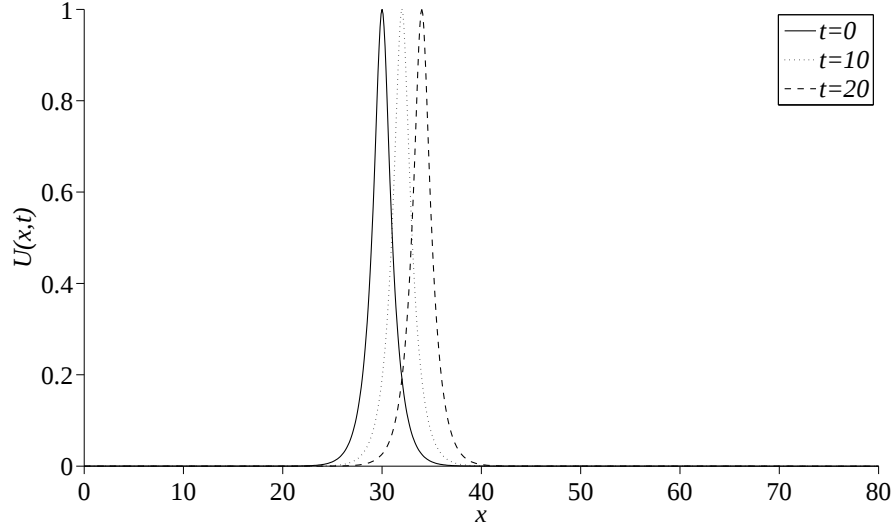
Δt	L_2	$YO(L_2)$	L_∞	$YO(L_\infty)$
2	0.97880	—	0.65025	—
1	0.37639	1.3787	0.25871	1.3296
0.5	0.094274	1.9869	0.065701	1.9773
0.25	0.02006	2.2325	0.014581	2.1718
0.1	0.0026344	2.2155	0.0018172	2.2726

Çizelge 5.17. $p = 4$, $t = 20$, $h = 0.1$ için hata normları ve noktasal yakınsama oranları

Δt	L_2	$YO(L_2)$	L_∞	$YO(L_\infty)$
2	0.63625	—	0.45698	—
1	0.21038	1.5965	0.15469	1.5627
0.5	0.049357	2.0916	0.037720	2.0359
0.25	0.0094743	2.3811	0.0080807	2.2227
0.1	0.0014329	2.0614	0.0012191	2.0641



Şekil 5.30. $p = 3$ için solitary dalga profilleri



Şekil 5.31. $p = 4$ için solitary dalga profilleri

5.3.2 İki Solitary Dalga Etkileşimi

İki solitary dalga etkileşimi

$$U(x, 0) = \sum_{j=1}^2 \sqrt[p]{\frac{\nu_j(p+1)(p+2)}{2\varepsilon} \operatorname{sech}^2\left(\frac{p}{2\sqrt{\mu}}[x - \tilde{x}_j]\right)} \quad (5.152)$$

başlangıç koşulu ve $U(0, t) = U(80, t) = 0$ sınır koşulları kullanılarak çalışılmıştır. $\mu = 1$, $\varepsilon = 3$, $\tilde{x}_1 = 15$, $\tilde{x}_2 = 30$ parametre değerleri seçilmiştir. Bunlara ek olarak $p = 3$ için $0 \leq t \leq 100$ zaman aralığında $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.0375$ değerleri, $p = 4$ için $0 \leq t \leq 120$ zaman aralığında $\nu_1 = 0.2$, $\nu_2 = 1/80$ değerleri alınmıştır. Ayrıca hesaplamalarda $p = 3$ ve $p = 4$ için taban polinomunun derecesi $m = 5$ alınmıştır.

Sayısal sonuçlar 801×801 tane matris girdisinden 15163 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matrisin girdilerinin yaklaşık %2'si kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır.

Çizelge 5.18 de $p = 3$ için $t = 100$ zamanında, Çizelge 5.19 da ise $p = 4$ için $t = 120$ zamanında hesaplanan C_1 , C_2 , C_3 korunumları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar [41] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Şekil 5.32 ve Şekil 5.33 de ise sırasıyla $p = 3$, $p = 4$ için farklı zamanlarda elde edilen çözümlerin grafikleri verilmiştir. Bu grafiklerden görüldüğü gibi başlangıçta genliği büyük olan dalga genliği küçük olan dalganın soluna tepe noktaları sırasıyla $\tilde{x}_1 = 15$ ve $\tilde{x}_2 = 30$ noktalarına yerleştirilmiştir. Zaman ilerledikçe büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgayı yakalayarak etkileşimi başlattığı,

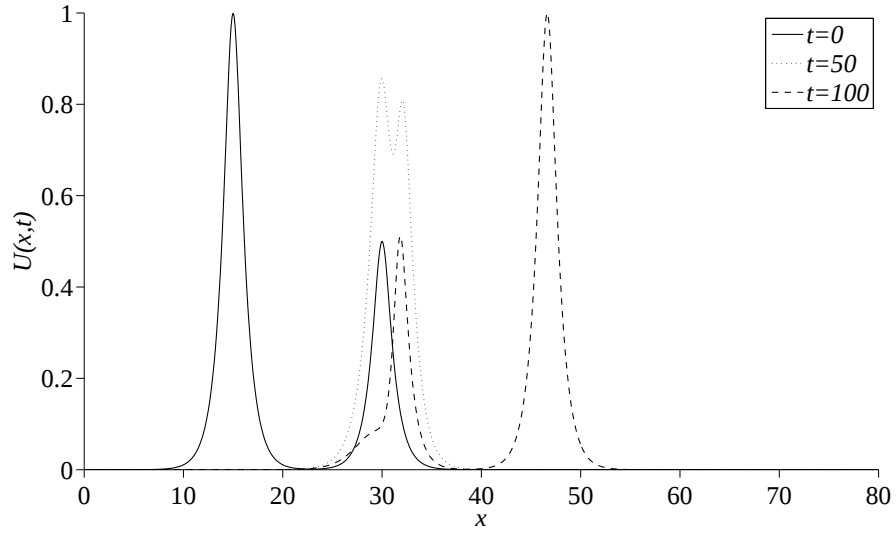
etkileşim tamamlandıktan sonra ise dalgaların birbirinden tamamen ayrılarak büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgayı geçtiği gözlenmiştir.

Çizelge 5.18. $p = 3$ için $t = 100$ zamanında hesaplanan korunumlar

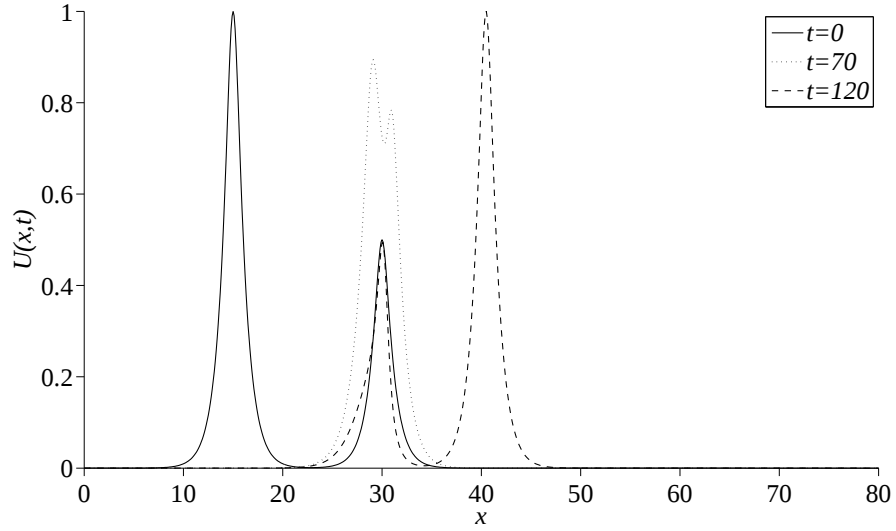
Metot	h	Δt	C_1	C_2	C_3
HEKC	0.1	0.025	4.20654	3.07989	1.01636
[41]	0.1	0.025	4.20655	3.07972	1.01634

Çizelge 5.19. $p = 4$ için $t = 120$ zamanında hesaplanan korunumlar

Metot	h	Δt	C_1	C_2	C_3
HEKC	0.1	0.025	3.93309	2.94526	0.79766
[41]	0.1	0.025	3.93308	2.94511	0.79761



Şekil 5.32. $p = 3$ için iki solitary dalganın etkileşimi



Şekil 5.33. $p = 4$ için iki solitary dalganın etkileşimi

5.3.3 Maxwell Başlangıç Koşulu

Bu bölümde GEW denkleminin

$$U(x, 0) = \exp(-(x - 20)^2) \quad (5.153)$$

başlangıç koşulu altında dalga oluşumu çözümü çalışılmıştır. Sayısal hesaplamalar $0 \leq x \leq 40$ tanım aralığında $0 \leq t \leq 12$ zaman aralığında gerçekleştirilmiştir. Ayrıca hesaplamalarda $p = 3$ ve $p = 4$ için taban polinomunun derecesi $m = 7$ alınmıştır.

Sayısal sonuçlar 801×801 tane matris girdisinden 22283 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matrisin girdilerinin yaklaşık %3'ü kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır.

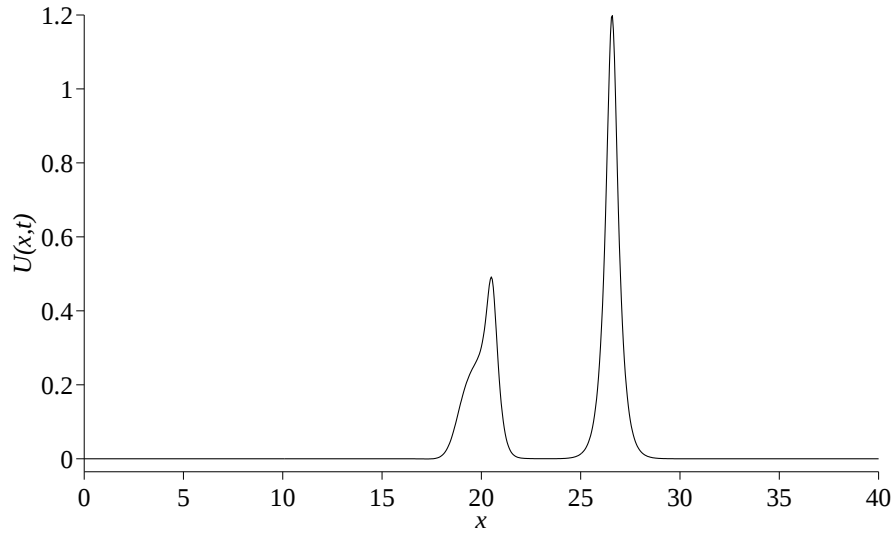
Çizelge 5.20 ve Çizelge 5.21 de sırasıyla $p = 3$, $p = 4$ için $\mu = 0.1, 0.05$ değerlerinde $t = 12$ zamanında hesaplanan C_1 , C_2 , C_3 korunumları listelenmiş, elde edilen sonuçlar [41] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Şekil 5.34 ve Şekil 5.35 de $p = 3$ için sırasıyla $\mu = 0.1$ ve $\mu = 0.05$ değerlerinde $t = 12$ zamanında elde edilen çözümlerin grafikleri, Şekil 5.36 ve Şekil 5.37 de ise $p = 4$ için sırasıyla $\mu = 0.1$ ve $\mu = 0.05$ değerlerinde $t = 12$ zamanında elde edilen çözümlerin grafikleri verilmiştir.

Çizelge 5.20. $p = 3$ için $t = 12$ zamanında hesaplanan korunumlar

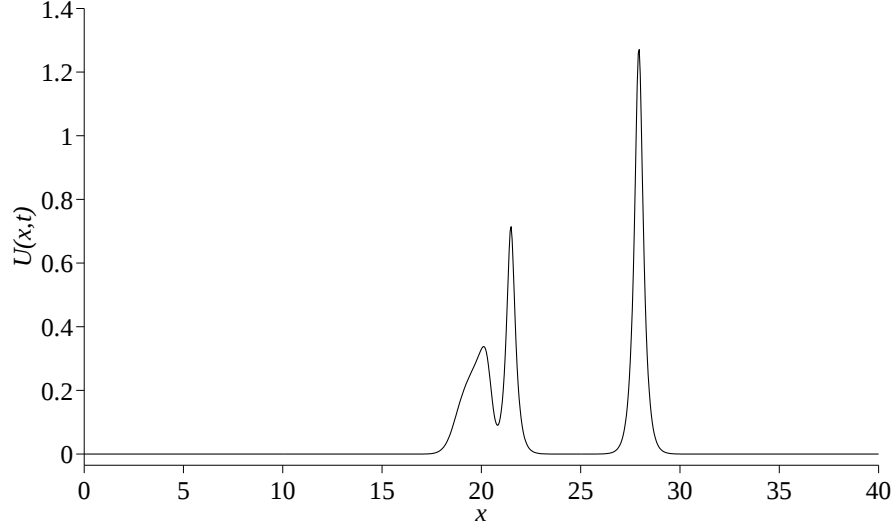
Metot	μ	h	Δt	C_1	C_2	C_3
HEKC	0.1	0.05	0.01	1.7724	1.3786	0.7927
[41]	0.1	0.05	0.01	1.7724	1.3787	0.7926
HEKC	0.05	0.05	0.01	1.7724	1.3160	0.7927
[41]	0.05	0.05	0.01	1.7724	1.3156	0.7922

Çizelge 5.21. $p = 4$ için $t = 12$ zamanında hesaplanan korunumlar

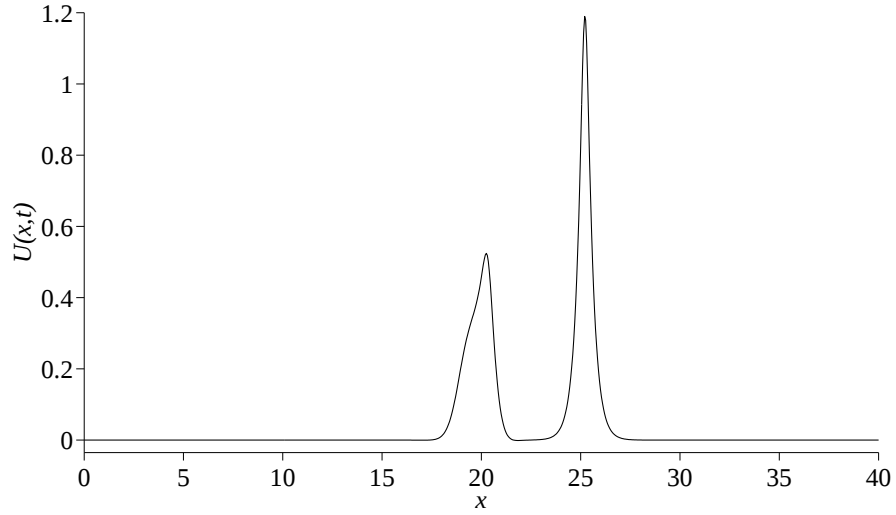
Metot	μ	h	Δt	C_1	C_2	C_3
HEKC	0.1	0.05	0.01	1.7724	1.3787	0.7236
[41]	0.1	0.05	0.01	1.7734	1.3836	0.7224
HEKC	0.05	0.05	0.01	1.7724	1.3161	0.7236
[41]	0.05	0.05	0.01	1.7724	1.3177	0.7245



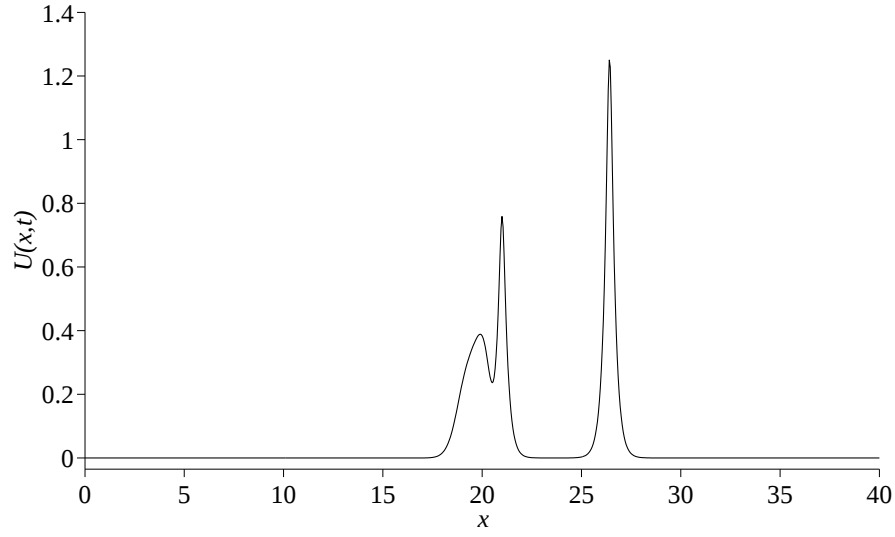
Şekil 5.34. $p = 3$ için $\mu = 0.1$ alınarak $t = 12$ zamanında elde edilen çözümün grafiği



Şekil 5.35. $p = 3$ için $\mu = 0.05$ alınarak $t = 12$ zamanında elde edilen çözümün grafiği



Şekil 5.36. $p = 4$ için $\mu = 0.1$ alınarak $t = 12$ zamanında elde edilen çözümün grafiği



Şekil 5.37. $p = 4$ için $\mu = 0.05$ alınarak $t = 12$ zamanında elde edilen çözümün grafiği

5.4 Kararlılık Analizi

Bu bölümde matris metodu kullanılarak GEW denklemi için HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılık analizi yapılmıştır.

(5.147) denklemi;

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} &= [\phi_i(x_k) : i, k = \overline{1, N}] \\
 \tilde{B} &= [\phi'_i(x_k) : i = \overline{1, N}, \quad k = \overline{2, N-1}] \\
 \tilde{C} &= [\phi''_i(x_k) : i = \overline{1, N}, \quad k = \overline{2, N-1}] \\
 \tilde{D} &= p(U^n)^{p-1} * U_x^n * \tilde{A} \\
 \tilde{E} &= (U^n)^p * \tilde{B}
 \end{aligned} \tag{5.154}$$

olmak üzere

$$\left[\tilde{A} - \mu \tilde{C} + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} (\tilde{D} + \tilde{E}) \right] u^{n+1} = \left[\tilde{A} - \mu \tilde{C} - \varepsilon \frac{\Delta t}{2} (1-p) \tilde{E} \right] u^n \tag{5.155}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
 U^n &= \tilde{A} u^n \\
 U^{n+1} &= \tilde{A} u^{n+1}
 \end{aligned} \tag{5.156}$$

olduğundan (5.155) denklemi

$$\left[(\tilde{A} - \mu\tilde{C})\tilde{A}^{-1} + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} (\tilde{D} + \tilde{E})\tilde{A}^{-1} \right] U^{n+1} = \left[(\tilde{A} - \mu\tilde{C})\tilde{A}^{-1} - \varepsilon \frac{\Delta t}{2} (1-p)\tilde{E}\tilde{A}^{-1} \right] U^n \quad (5.157)$$

şeklinde olur. Burada

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \tilde{D}\tilde{A}^{-1} &= \varepsilon \frac{\Delta t}{2} p(U^n)^{p-1} * U_x^n * \tilde{A}\tilde{A}^{-1} \\ &= \varepsilon \frac{\Delta t}{2} p(U^n)^{p-1} * (\tilde{B}u^n) * I \\ &= \varepsilon \frac{\Delta t}{2} p(U^n)^{p-1} * (\tilde{B}\tilde{A}^{-1})U^n * I \\ &= \varepsilon \frac{\Delta t}{2} p(U^n)^p * \tilde{B}\tilde{A}^{-1} \\ &= \varepsilon \frac{\Delta t}{2} p\tilde{E}\tilde{A}^{-1} \end{aligned} \quad (5.158)$$

olduğundan (5.157) denklemi

$$\left[(\tilde{A} - \mu\tilde{C})\tilde{A}^{-1} + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} (1+p)\tilde{E}\tilde{A}^{-1} \right] U^{n+1} = \left[(\tilde{A} - \mu\tilde{C})\tilde{A}^{-1} - \varepsilon \frac{\Delta t}{2} (1-p)\tilde{E}\tilde{A}^{-1} \right] U^n \quad (5.159)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= (\tilde{A} - \mu\tilde{C})\tilde{A}^{-1} \\ \tilde{K} &= \frac{\varepsilon}{2} \tilde{E}\tilde{A}^{-1} \end{aligned} \quad (5.160)$$

olmak üzere (5.159) denklemi

$$\left[\tilde{H} + (1+p)\Delta t\tilde{K} \right] U^{n+1} = \left[\tilde{H} - (1-p)\Delta t\tilde{K} \right] U^n \quad (5.161)$$

şeklinde olur. O halde (5.161) denklemi

$$U^{n+1} = \left[\tilde{H} + (1+p)\Delta t\tilde{K} \right]^{-1} \left[\tilde{H} - (1-p)\Delta t\tilde{K} \right] U^n \quad (5.162)$$

şeklinde yazılırsa

$$\tilde{Q} = \left[\tilde{H} + (1+p)\Delta t\tilde{K} \right]^{-1} \left[\tilde{H} - (1-p)\Delta t\tilde{K} \right] \quad (5.163)$$

olmak üzere

$$e^{n+1} = \tilde{Q}e^n \quad (5.164)$$

hata denklemi elde edilir. HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlı olması için $\rho(\tilde{Q}) \leq 1$ olmalıdır. Bunun için de $\lambda_{\tilde{H}}$ $\tilde{H}$ matrisinin özdeğeri, $\lambda_{\tilde{K}}$ $\tilde{K}$ matrisinin özdeğeri olmak üzere

$$\left| \frac{\lambda_{\tilde{H}} - (1-p)\Delta t \lambda_{\tilde{K}}}{\lambda_{\tilde{H}} + (1+p)\Delta t \lambda_{\tilde{K}}} \right| \leq 1 \quad (5.165)$$

koşulunun sağlanması gerekir.

1. durum: $\lambda_{\tilde{H}}$ ve $\lambda_{\tilde{K}}$ kompleks olsun. $\lambda_{\tilde{H}} = a_{\tilde{H}} + ib_{\tilde{H}}$, $\lambda_{\tilde{K}} = a_{\tilde{K}} + ib_{\tilde{K}}$ olmak üzere (5.165) eşitsizliği

$$\left| \frac{a_{\tilde{H}} + ib_{\tilde{H}} - (1-p)\Delta t(a_{\tilde{K}} + ib_{\tilde{K}})}{a_{\tilde{H}} + ib_{\tilde{H}} + (1+p)\Delta t(a_{\tilde{K}} + ib_{\tilde{K}})} \right| \leq 1 \quad (5.166)$$

şeklinde yazılır. Burada reel ve sanal kısımlar düzenlenirse

$$\left| \frac{(a_{\tilde{H}} - (1-p)\Delta t a_{\tilde{K}}) + i(b_{\tilde{H}} - (1-p)\Delta t b_{\tilde{K}})}{(a_{\tilde{H}} + (1+p)\Delta t a_{\tilde{K}}) + i(b_{\tilde{H}} + (1+p)\Delta t b_{\tilde{K}})} \right| \leq 1 \quad (5.167)$$

eşitsizliği bulunur. Bir kompleks sayının modülünün tanımı gereği eşitsizlik

$$\sqrt{\frac{(a_{\tilde{H}} - (1-p)\Delta t a_{\tilde{K}})^2 + (b_{\tilde{H}} - (1-p)\Delta t b_{\tilde{K}})^2}{(a_{\tilde{H}} + (1+p)\Delta t a_{\tilde{K}})^2 + (b_{\tilde{H}} + (1+p)\Delta t b_{\tilde{K}})^2}} \leq 1 \quad (5.168)$$

şeklinde olur. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$\sqrt{\frac{a_{\tilde{H}}^2 + b_{\tilde{H}}^2 + (1-p)^2 \Delta t^2 (a_{\tilde{K}}^2 + b_{\tilde{K}}^2) - 2(1-p)\Delta t(a_{\tilde{H}}a_{\tilde{K}} + b_{\tilde{H}}b_{\tilde{K}})}{a_{\tilde{H}}^2 + b_{\tilde{H}}^2 + (1+p)^2 \Delta t^2 (a_{\tilde{K}}^2 + b_{\tilde{K}}^2) + 2(1+p)\Delta t(a_{\tilde{H}}a_{\tilde{K}} + b_{\tilde{H}}b_{\tilde{K}})}} \leq 1 \quad (5.169)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağlanması için

$$a_{\tilde{H}}a_{\tilde{K}} + b_{\tilde{H}}b_{\tilde{K}} + p\Delta t(a_{\tilde{K}}^2 + b_{\tilde{K}}^2) \geq 0 \quad (5.170)$$

olmalıdır.

2.durum: $\lambda_{\tilde{H}}$ ve $\lambda_{\tilde{K}}$ reel olsun. O halde (5.165) eşitsizliğinden

$$-1 \leq \frac{\lambda_{\tilde{H}} - (1-p)\Delta t \lambda_{\tilde{K}}}{\lambda_{\tilde{H}} + (1+p)\Delta t \lambda_{\tilde{K}}} \leq 1 \quad (5.171)$$

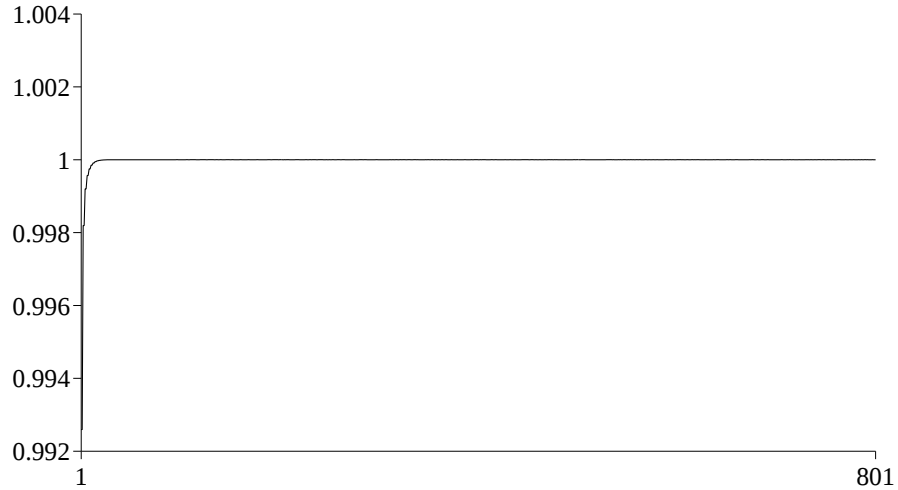
elde edilir. Bu eşitsizlik çözülürse

$$\lambda_{\tilde{H}} + p\Delta t \lambda_{\tilde{K}} \geq 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_{\tilde{K}} \geq 0 \quad (5.172)$$

bulunur.

O halde GEW denklemi için HEKC metodu ile elde edilen fark denklemi koşullu kararlıdır.

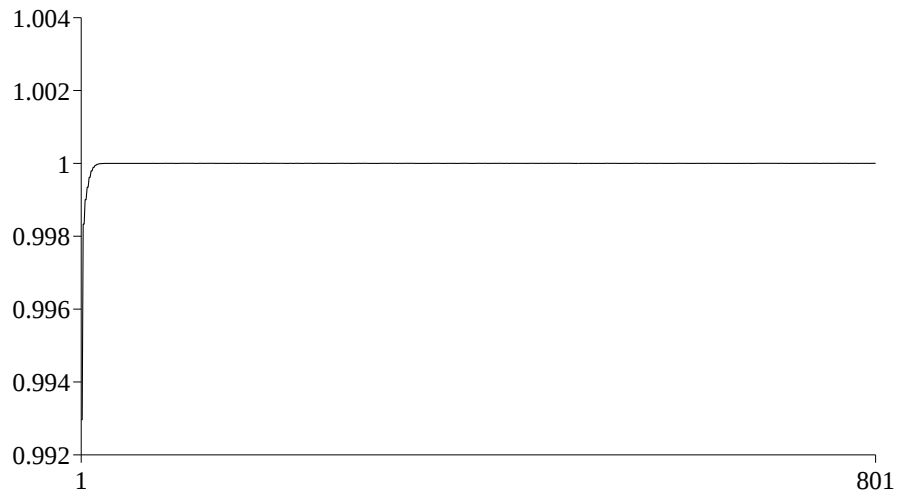
GEW denkleminin analitik sonucu bilinen tek solitary dalga hareketi için HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılığı test edilmiştir. $p = 3$ ve $p = 4$ için GEW denkleminin tek solitary dalga hareketi için $\tilde{Q}$ matrisinin özdeğerleri hesaplanmıştır. Özdeğerler kompleks olduğundan Şekil 5.38 ve Şekil 5.40 da özdeğerlerin modülleri verilmiştir. Şekil 5.39 ve Şekil 5.41 de ise sırasıyla $p = 3$ ve $p = 4$ için (5.170) de verilen kararlılık koşulu grafiğe aktarılmıştır. Şekil 5.38-5.41 den görüldüğü gibi GEW denkleminin tek solitary dalga hareketi için koşullu kararlılık sağlanmıştır.



Şekil 5.38. $p = 3$ için $\tilde{Q}$ matrisinin özdeğerlerinin modüllerinin grafiği



Şekil 5.39. $p = 3$ için kararlılık koşulunun grafiği



Şekil 5.40. $p = 4$ için $\tilde{Q}$ matrisinin özdeğerlerinin modüllerinin grafiği



Şekil 5.41. $p = 4$ için kararlılık koşulunun grafiği

6 NLS DENKLEMİNİN HEKC METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi başlangıçta tek bir dalganın kendi kendine modülasyonunu tanımlamak için gösterilmiştir [43]. Daha sonra bu denklem; optik titreşimlerin yayılması, süperiletkenlik, lineer olmayan optik, sudaki dalgalar, plazmadaki dalgalar, lazer titreşimlerindeki kendi kendine odaklanma etkileri gibi çeşitli fiziksel olayların modellenmesinde kullanılmıştır. NLS denklemi aşağıdaki formdadır:

$$iU_t + U_{xx} + q|U|^2U = 0 \quad (6.173)$$

NLS denklemi için $x \rightarrow \mp\infty$ iken $U \rightarrow 0$ olan fiziksel şartlarının yerine sayısal hesaplama yapabilmek için aşağıdaki başlangıç ve sınır koşulları kullanılmıştır:

$$U(x, 0) = g(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (6.174)$$

$$U(a, t) = U(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (6.175)$$

Burada $U(x, t)$ kompleks değerli bir fonksiyon, $i = \sqrt{-1}$, $q \geq 0$ gerçel bir parametre, x ve t alt indisleri ise sırasıyla konuma ve zamana göre türevleri göstermektedir.

Literatürde bazı yöntemler kullanılarak bu denklemin sayısal çözümleri araştırılmıştır. Bu yöntemlerden bazıları şunlardır: kübik B-spline sonlu elemanlar metodu [44], sonlu farklar metodu [45], radial tabanlı collocation metodu [46], spline fonksiyonlar ile Galerkin metot [47], kuadratik B-spline sonlu elemanlar metodu [48], ağırsız çekirdek tabanlı çizgiler metodu [49].

6.1 NLS Denkleminin Ayrıştırılması

$U(x, t)$ kompleks fonksiyonu, $r(x, t)$ ve $s(x, t)$ reel fonksiyonlar olmak üzere

$$U(x, t) = r(x, t) + is(x, t) \quad (6.176)$$

şeklinde reel ve sanal kısımlarına ayrılabilir. Burada

$$U_t = r_t + is_t, \quad U_{xx} = r_{xx} + is_{xx}, \quad |U| = \sqrt{r^2 + s^2} \quad (6.177)$$

olup bu ifadeler (6.173) denkleminde yerine yazılırsa

$$i(r_t + is_t) + r_{xx} + is_{xx} + q(r^2 + s^2)(r + is) = 0 \quad (6.178)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin sıfıra eşit olması için reel ve sanal kısımlarının ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerektiğinden (6.173) denklemini

$$\begin{aligned} s_t - r_{xx} - q(r^2 + s^2)r &= 0 \\ r_t + s_{xx} + q(r^2 + s^2)s &= 0 \end{aligned} \quad (6.179)$$

formunda bir denklem sistemine dönüşür. Bu sistemin başlangıç ve sınır koşulları, $g_r(x)$ ve $g_s(x)$ sırasıyla $g(x)$ fonksiyonunun reel ve sanal kısımları olmak üzere;

$$r(x, 0) = g_r(x), \quad s(x, 0) = g_s(x), \quad x \in [a, b] \quad (6.180)$$

$$r(a, t) = r(b, t) = 0, \quad s(a, t) = s(b, t) = 0 \quad (6.181)$$

şeklinde. (6.179) denklem sistemine Crank-Nicolson metodu uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \frac{s^{n+1} - s^n}{\Delta t} - \frac{r_{xx}^{n+1} + r_{xx}^n}{2} - q \left(\left(\frac{r^{n+1} + r^n}{2} \right)^2 + \left(\frac{s^{n+1} + s^n}{2} \right)^2 \right) \left(\frac{r^{n+1} + r^n}{2} \right) &= 0 \\ \frac{r^{n+1} - r^n}{\Delta t} + \frac{s_{xx}^{n+1} + s_{xx}^n}{2} + q \left(\left(\frac{r^{n+1} + r^n}{2} \right)^2 + \left(\frac{s^{n+1} + s^n}{2} \right)^2 \right) \left(\frac{s^{n+1} + s^n}{2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (6.182)$$

elde edilir. Burada $r^n = r(x, t^n)$, $s^n = s(x, t^n)$ ve Δt de zaman adımı olup $t^n = t^{n-1} + \Delta t$ şeklindedir. Bu denklem sisteminde lineer olmayan terimleri lineerleştirmek için (6.179) denklem sisteminde

$$\begin{aligned} s_t &= r_{xx} + q(r^2 + s^2)r \\ r_t &= -s_{xx} - q(r^2 + s^2)s \end{aligned} \quad (6.183)$$

olmak üzere s_t ve r_t ye ileri sonlu fark yaklaşımı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{s^{n+1} - s^n}{\Delta t} &\approx r_{xx}^n + q((r^n)^2 + (s^n)^2)r^n \\ \frac{r^{n+1} - r^n}{\Delta t} &\approx -s_{xx}^n - q((r^n)^2 + (s^n)^2)s^n \end{aligned} \quad (6.184)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} s^{n+1} &\approx s^n + \Delta t r_{xx}^n + \Delta t q((r^n)^2 + (s^n)^2) r^n \\ r^{n+1} &\approx r^n - \Delta t s_{xx}^n - \Delta t q((r^n)^2 + (s^n)^2) s^n \end{aligned} \quad (6.185)$$

bulunur. O halde [46] da yapıldığı gibi

$$\begin{aligned} r^* &\approx r^n - \Delta t (s_{xx}^n + \Delta t q((r^n)^2 + (s^n)^2) s^n) \\ s^* &\approx s^n + \Delta t (r_{xx}^n + \Delta t q((r^n)^2 + (s^n)^2) r^n) \\ \lambda &= q\left(\left(\frac{r^* + r^n}{2}\right)^2 + \left(\frac{s^* + s^n}{2}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (6.186)$$

olmak üzere (6.182) denklem sistemi

$$\begin{aligned} \frac{s^{n+1} - s^n}{\Delta t} - \frac{r_{xx}^{n+1} + r_{xx}^n}{2} - \lambda \left(\frac{r^{n+1} + r^n}{2}\right) &= 0 \\ \frac{r^{n+1} - r^n}{\Delta t} + \frac{s_{xx}^{n+1} + s_{xx}^n}{2} + \lambda \left(\frac{s^{n+1} + s^n}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (6.187)$$

şeklinde yazılır. Buradan da gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} 2s^{n+1} - \Delta t r_{xx}^{n+1} - \Delta t \lambda r^{n+1} &= 2s^n + \Delta t r_{xx}^n + \Delta t \lambda r^n \\ 2r^{n+1} + \Delta t s_{xx}^{n+1} + \Delta t \lambda s^{n+1} &= 2r^n - \Delta t s_{xx}^n - \Delta t \lambda s^n \end{aligned} \quad (6.188)$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

6.2 HEKC Metodunun NLS Denkleminde Uygulanması

HEKC metodunun gereği olarak r ve s fonksiyonlarının n . ve $(n+1)$. adımdaki çözümlerine

$$r^n = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \tilde{r}_i^n, \quad s^n = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \tilde{s}_i^n \quad (6.189)$$

$$r^{n+1} = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \tilde{r}_i^{n+1}, \quad s^{n+1} = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \tilde{s}_i^{n+1} \quad (6.190)$$

şeklinde yaklaşımları yapılır. Bu yaklaşımların ikinci türevleri de

$$r_{xx}^n = \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}) \tilde{r}_i^n, \quad s_{xx}^n = \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}) \tilde{s}_i^n \quad (6.191)$$

$$r_{xx}^{n+1} = \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}) \tilde{r}_i^{n+1}, \quad s_{xx}^{n+1} = \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}) \tilde{s}_i^{n+1} \quad (6.192)$$

şeklinde olur. (6.189) daki yaklaşımlar matris formunda

$$r^n = \dot{A} \tilde{r}^n, \quad s^n = \dot{A} \tilde{s}^n \quad (6.193)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\dot{A} = [\phi_i(x_k) : i, k = \overline{1, N}], \quad \tilde{r}^n = [\tilde{r}_1^n, \tilde{r}_2^n, \dots, \tilde{r}_N^n]^T, \quad \tilde{s}^n = [\tilde{s}_1^n, \tilde{s}_2^n, \dots, \tilde{s}_N^n]^T \quad (6.194)$$

şeklindedir. (6.189)-(6.192) de yapılan yaklaşımlar (6.188) denklem sisteminde yerine yazılırsa bu denklem sistemi

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \tilde{s}_i^{n+1} - \Delta t \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}_k) \tilde{r}_i^{n+1} - \Delta t \lambda \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \tilde{r}_i^{n+1} \\ &= 2 \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \tilde{s}_i^n + \Delta t \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}_k) \tilde{r}_i^n + \Delta t \lambda \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \tilde{r}_i^n \\ & 2 \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \tilde{r}_i^{n+1} + \Delta t \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}_k) \tilde{s}_i^{n+1} + \Delta t \lambda \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \tilde{s}_i^{n+1} \\ &= 2 \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \tilde{r}_i^n - \Delta t \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}_k) \tilde{s}_i^n \\ & - \Delta t \lambda \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \tilde{s}_i^n \quad k = 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (6.195)$$

$$\sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \tilde{r}_i^{n+1} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \tilde{s}_i^{n+1} = 0, \quad k = 1$$

$$\sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \tilde{r}_i^{n+1} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) \tilde{s}_i^{n+1} = 0, \quad k = N$$

şekline gelir. Burada $\phi_i(\mathbf{x})$ şekil fonksiyonları yerine (2.19) denkleminde verilen eşitlik yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \tilde{s}_i^{n+1} - \Delta t \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)'' \tilde{r}_i^{n+1} \\
& - \Delta t \lambda \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \tilde{r}_i^{n+1} = 2 \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \tilde{s}_i^n \\
& + \Delta t \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)'' \tilde{r}_i^n + \Delta t \lambda \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \tilde{r}_i^n \\
& 2 \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \tilde{r}_i^{n+1} + \Delta t \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)'' \tilde{s}_i^{n+1} \\
& + \Delta t \lambda \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \tilde{s}_i^{n+1} = 2 \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \tilde{r}_i^n \\
& - \Delta t \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)'' \tilde{s}_i^n \quad (6.196)
\end{aligned}$$

$$- \Delta t \lambda \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \tilde{s}_i^n, \quad k = 2, \dots, N-1$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \tilde{r}_i^{n+1} = 0, \quad k = 1$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \tilde{s}_i^{n+1} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \tilde{r}_i^{n+1} = 0, \quad k = N$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \tilde{s}_i^{n+1} = 0$$

şeklinde bir sistem elde edilir. Bu sistem gösterim kolaylığı açısından

$$\begin{aligned}
M_0 &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \\
M_1 &= \Delta t \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)'' + \lambda \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \right]
\end{aligned}$$

olmak üzere $i = 1, 2, \dots, N$ için

$$\begin{aligned}
M_0 \tilde{r}_i^{n+1} &= 0 \\
M_0 \tilde{s}_i^{n+1} &= 0 \quad , \quad k = 1 \\
\\
2M_0 \tilde{s}_i^{n+1} - M_1 \tilde{r}_i^{n+1} &= 2M_0 \tilde{s}_i^n + M_1 \tilde{r}_i^n \\
2M_0 \tilde{r}_i^{n+1} + M_1 \tilde{s}_i^{n+1} &= 2M_0 \tilde{r}_i^n - M_1 \tilde{s}_i^n \quad , \quad k = 2, \dots, N-1 \quad (6.197) \\
\\
M_0 \tilde{r}_i^{n+1} &= 0 \\
M_0 \tilde{s}_i^{n+1} &= 0 \quad , \quad k = N
\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu sistem çözülerek hesaplanan $\tilde{r}_i^{n+1}$ ve $\tilde{s}_i^{n+1}$ ler (6.190) da yerlerine yazılırsa $(n+1)$. adımdaki r ve s nümerik çözümleri bulunur. Buradan $|U| = \sqrt{r^2 + s^2}$ hesaplanarak $(n+1)$. adımdaki U zarf çözümü elde edilir.

Bu çalışmada NLS denklemleri için HEKC metodu ile bulunan sayısal sonuçlar aşağıdaki program algoritmasıyla elde edilmiştir.

Algoritma

Algoritma aşağıdaki sırayla çalışır:

1. $[a, b]$ tanım bölgesinden N tane düğüm belirlenir.
2. m, r_i, c_i ve Δt parametreleri belirlenir.
3. $n := 0$ alınır.
4. (6.180) daki başlangıç koşulları kullanılarak (6.189) daki denklemlerden $\tilde{r}_i^n, \tilde{s}_i^n$ bilinmeyenleri ve r^n, s^n başlangıç çözümleri bulunur.
4. $n := n + 1$ alınır.
5. (6.197) sistemi kullanılarak $\tilde{r}_i^{n+1}$ ve $\tilde{s}_i^{n+1}$ değerleri hesaplanır.
6. (6.190) eşitlikleri kullanılarak r^{n+1} ve s^{n+1} yaklaşık çözümleri bulunur.
7. $|U^{n+1}| = \sqrt{(r^{n+1})^2 + (s^{n+1})^2}$ hesaplanarak $(n+1)$. adımdaki U zarf çözümü elde edilir.
8. $n\Delta t = T$ olana kadar iterasyona devam edilir.

6.3 Test Problemleri

Bu bölümde, HEKC metodunun doğruluğunu ve geçerliliğini göstermek için iki test problemi ile çalışılmıştır. Bu test problemleri için C_1 , C_2 korunum kanunları ile analitik sonucu bilinen test problemi için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak literatürde yer alan bazı sayısal sonuçlarla karşılaştırılmaları yapılmıştır. Ayrıca analitik sonucu bilinen test problemi için verilen metodun zamana göre noktasal yakınsama oranları belirlenmiştir.

NLS denklemi

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |U|^2 dx, \quad C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (|U_x|^2 - (1/2)q|U|^4) dx \quad (6.198)$$

korunumlarına sahiptir [50].

L_2 ve L_∞ hata normları ile noktasal yakınsama oranları sırasıyla (3.65) ve (3.66) da verilen eşitliklerle hesaplanmıştır.

6.3.1 Tek Soliton Çözümü

NLS denkleminin analitik tek soliton çözümü

$$U(x, t) = \alpha \sqrt{\frac{2}{q}} \exp i \left\{ \frac{1}{2} Sx - \frac{1}{4} (S^2 - \alpha^2) t \right\} \text{sech} \alpha (x - St) \quad (6.199)$$

şeklinde [44]. Burada S , α ya bağlı soliton hızıdır. Bu test problemi $0 \leq t \leq 2.5$ zaman aralığında $-20 \leq x \leq 20$ tanım aralığında $q = 2$, $S = 4$ ve $\alpha = 1$ parametreleri için çözülmüştür. Bu parametreler kullanılarak

$$|U| = \text{sech}(x - 4t) \quad (6.200)$$

zarf soliton çözümü elde edilir. Bu çözüm sabit 4 hızında değişmeden sağa doğru hareket eden tek solitonu temsil eder.

Korunumların analitik değerleri $C_1 = 2$, $C_2 = 7.33333$ şeklinde hesaplanmıştır. Ayrıca hesaplamalarda taban polinomunun derecesi $m = 5$ alınmıştır.

Sayısal sonuçlar Şekil 6.42 den görüldüğü gibi 802×802 tane matris girdisinden 30244 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matrisin girdilerinin yaklaşık %5'i kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır.

Çizelge 6.22 de $t = 2.5$ zamanında hesaplanan C_1 , C_2 korunumları ile L_2 ,

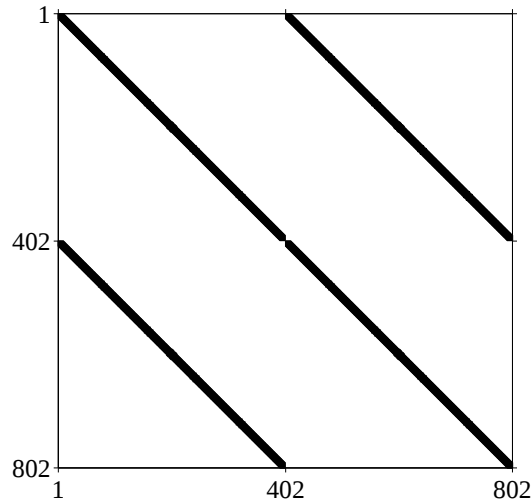
L_∞ hata normları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar [46] ve [49] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çizelge 6.23 de farklı zaman adımlarında L_2 , L_∞ hata normları ile noktasal yakınsama oranları hesaplanmıştır. Hesaplamalar $t = 2.5$ zamanında konum adımı $h = 0.1$ sabit tutularak yapılmıştır. Çizelge 6.23 den Δt azaldıkça hata normlarının küçüldüğü ve yakınsama oranlarının 2 ye yaklaştığı görülmüştür. Şekil 6.43 de ise $t = 0$ ve $t = 2.5$ zamanlarında elde edilen çözümlerin grafikleri verilmiştir.

Çizelge 6.22. $t = 2.5$ zamanında tek soliton için korunumlar ve hata normları

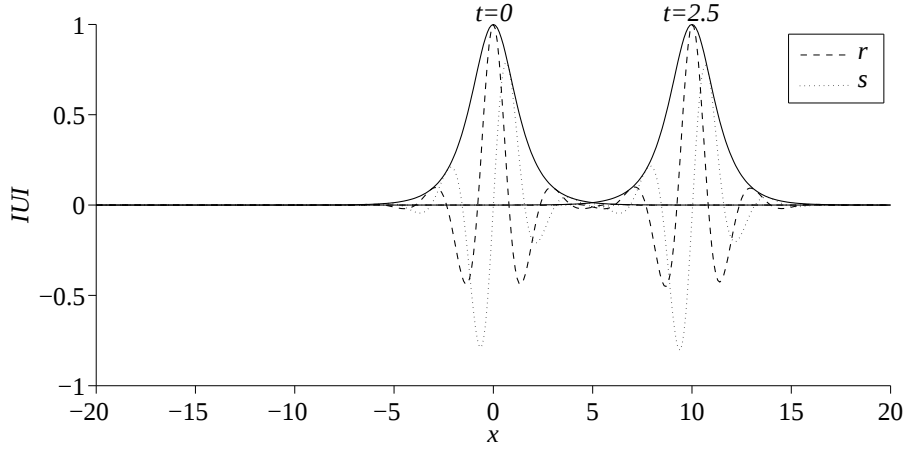
Metot	h	Δt	C_1	C_2	L_2	L_∞
HEKC	0.1	0.01	1.99999	7.33337	0.00054	0.00029
[46]	0.3125	0.001	1.99990	7.33317	0.00004	0.00002
[49]	0.3125	0.02	2.00000	7.33332	0.00020	0.00022

Çizelge 6.23. $t = 2.5$, $h = 0.1$ için hata normları ve noktasal yakınsama oranları

Δt	L_2	$YO(L_2)$	L_∞	$YO(L_\infty)$
0.05	0.10791	—	0.067307	—
0.025	0.0076696	3.8145	0.0042034	4.0011
0.01	0.00054124	2.8933	0.00029244	2.9088
0.005	0.00014106	1.9399	0.000090799	1.6873



Şekil 6.42. Katsayılar matrisinin yapısı



Şekil 6.43. Tek soliton simülasyonu

6.3.2 Çarpışan İki Solitonun Etkileşimi

Çarpışan iki solitonun etkileşimi

$$U(x, 0) = U_1(x, 0) + U_2(x, 0)$$

$$U_j = \alpha_j \sqrt{\frac{2}{q}} \exp i \left\{ \frac{1}{2} S_j (x - x_j) \right\} \text{sech} \alpha_j (x - x_j), \quad j = 1, 2 \quad (6.201)$$

başlangıç koşulu altında $0 \leq t \leq 6$ zaman aralığında $-20 \leq x \leq 20$ tanım aralığında $q = 2$, $S_1 = 4$, $\alpha_1 = 1$, $x_1 = -10$, $\alpha_2 = 1$, $S_2 = -4$, $x_2 = 10$ parametreleri için çözülmüştür. Bu başlangıç koşulu genlikleri aynı olan tepe noktaları sırasıyla $x_1 = -10$ ve $x_2 = 10$ a yerleştirilmiş eşit hızlı iki solitonu temsil eder.

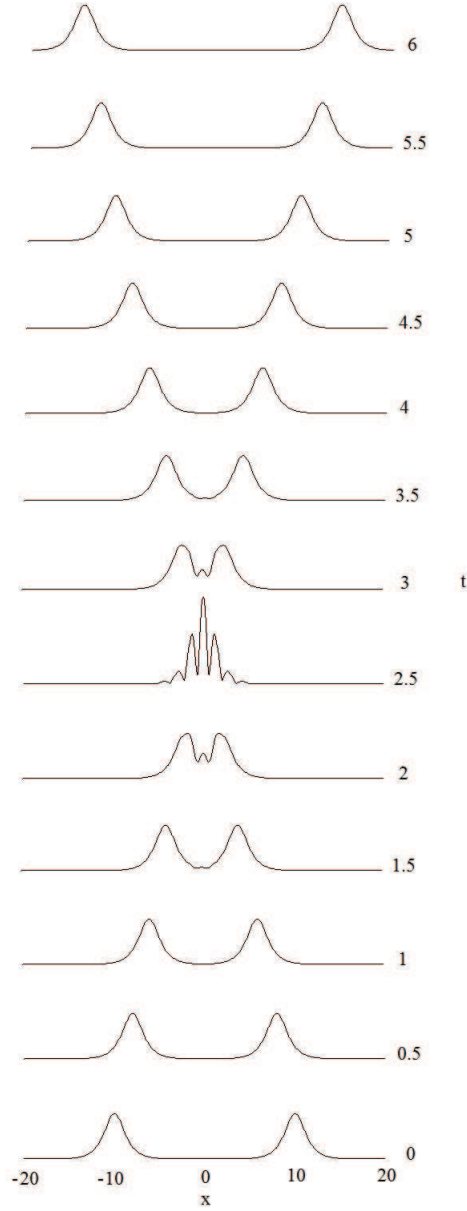
Korunumların analitik değerleri $C_1 = 4$ ve $C_2 = 14.666666$ şeklinde hesaplanmıştır. Ayrıca hesaplamalarda taban polinomunun derecesi $m = 5$ alınmıştır.

Sayısal sonuçlar 802×802 tane matris girdisinden 30244 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matrisin girdilerinin yaklaşık %5'i kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır.

Çizelge 6.24 de $t = 6$ zamanında hesaplanan C_1 , C_2 korunumları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar [46] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Şekil 6.44 de ise $t = 0$ dan $t = 6$ ya kadar farklı zamanlarda elde edilen çözümlerin grafikleri verilmiştir. Şekil 6.44 den de görüldüğü gibi bu iki soliton zıt yönde ilerleyerek çarpışırlar. Daha sonra birbirlerinden ayrılarak zaman içinde orjinal şekillerini geri kazanırlar.

Çizelge 6.24. $t = 6$ zamanında çarpışan iki soliton için korunumlar

Metot	h	Δt	C_1	C_2
HEKC	0.1	0.01	3.99999	14.66715
[46]	0.4	0.001	4.00040	14.66846



Şekil 6.44. İki solitonun etkileşimi

6.4 Kararlılık Analizi

Bu bölümde matris metodu kullanılarak NLS denklemi için HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılık analizi yapılmıştır.

(6.195) sistemi;

$$\begin{aligned}
\dot{A} &= [\phi_i(x_k) : i, k = \overline{1, N}] \\
\dot{B} &= [\phi_i''(x_k) : i = \overline{1, N}, \quad k = \overline{2, N-1}] \\
r^n &= \dot{A} \tilde{r}^n \\
s^n &= \dot{A} \tilde{s}^n \\
w^n &= \check{A} \xi^n
\end{aligned} \tag{6.202}$$

$$\check{A} = \left[\begin{array}{c|c} \dot{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \dot{A} \end{array} \right], \quad \xi^n = \begin{bmatrix} \tilde{r}^n \\ \tilde{s}^n \end{bmatrix}, \quad w^n = \begin{bmatrix} r^n \\ s^n \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
-\Delta t(\dot{B} + \lambda \dot{A}) \tilde{r}^{n+1} + 2\dot{A} \tilde{s}^{n+1} &= \Delta t(\dot{B} + \lambda \dot{A}) \tilde{r}^n + 2\dot{A} \tilde{s}^n \\
2\dot{A} \tilde{r}^{n+1} + \Delta t(\dot{B} + \lambda \dot{A}) \tilde{s}^{n+1} &= 2\dot{A} \tilde{r}^n - \Delta t(\dot{B} + \lambda \dot{A}) \tilde{s}^n
\end{aligned} \tag{6.203}$$

şeklinde yazılabilir. Bu sistem matris formunda

$$\begin{bmatrix} -\Delta t(\dot{B} + \lambda \dot{A}) & 2\dot{A} \\ 2\dot{A} & \Delta t(\dot{B} + \lambda \dot{A}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r}^{n+1} \\ \tilde{s}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta t(\dot{B} + \lambda \dot{A}) & 2\dot{A} \\ 2\dot{A} & -\Delta t(\dot{B} + \lambda \dot{A}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r}^n \\ \tilde{s}^n \end{bmatrix} \tag{6.204}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\dot{E} = \dot{B} + \lambda \dot{A}$ denirse bu sistem

$$\begin{bmatrix} -\Delta t \dot{E} & 2\dot{A} \\ 2\dot{A} & \Delta t \dot{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r}^{n+1} \\ \tilde{s}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta t \dot{E} & 2\dot{A} \\ 2\dot{A} & -\Delta t \dot{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r}^n \\ \tilde{s}^n \end{bmatrix} \tag{6.205}$$

şeklinde olur. Bu sistemi tek bir denklem şeklinde yazabilmek için

$$\begin{bmatrix} -\Delta t \dot{E} & 2\dot{A} \\ 2\dot{A} & \Delta t \dot{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta t \dot{E} & 0 \\ 0 & \Delta t \dot{E} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2\dot{A} \\ 2\dot{A} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\Delta t \dot{E} & 0 \\ 0 & \Delta t \dot{E} \end{bmatrix} = \Delta t \begin{bmatrix} -\dot{E} & 0 \\ 0 & \dot{E} \end{bmatrix}$$

$$\check{E} = \begin{bmatrix} -\dot{E} & 0 \\ 0 & \dot{E} \end{bmatrix}, \quad \check{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2\dot{A} \\ 2\dot{A} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde düzenlemeler yapılırsa (6.205) sistemi

$$(\Delta t \check{E} + \check{F})\xi^{n+1} = (-\Delta t \check{E} + \check{F})\xi^n \quad (6.206)$$

şeklinde olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} w^n &= \check{A}\xi^n \\ w^{n+1} &= \check{A}\xi^{n+1} \end{aligned} \quad (6.207)$$

olup bu eşitlikler (6.206) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$[\Delta t \check{E} \check{A}^{-1} + \check{F} \check{A}^{-1}]w^{n+1} = [-\Delta t \check{E} \check{A}^{-1} + \check{F} \check{A}^{-1}]w^n \quad (6.208)$$

denklemini bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \check{H} &= \check{E} \check{A}^{-1} \\ \check{K} &= \check{F} \check{A}^{-1} \end{aligned} \quad (6.209)$$

denirse

$$[\Delta t \check{H} + \check{K}]w^{n+1} = [-\Delta t \check{H} + \check{K}]w^n \quad (6.210)$$

denklemini elde edilir. O halde

$$w^{n+1} = [\Delta t \check{H} + \check{K}]^{-1} [-\Delta t \check{H} + \check{K}]w^n \quad (6.211)$$

şeklinde yazılırsa

$$\check{Q} = [\Delta t \check{H} + \check{K}]^{-1} [-\Delta t \check{H} + \check{K}] \quad (6.212)$$

olmak üzere

$$e^{n+1} = \check{Q}e^n \quad (6.213)$$

hata denklemini elde edilir. Buradan HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlı olması için $\rho(\check{Q}) \leq 1$ olmalıdır. Bunun için de $\lambda_{\check{H}}$ $\check{H}$ matrisinin özdeğeri, $\lambda_{\check{K}}$ $\check{K}$ matrisinin özdeğeri olmak üzere

$$\left| \frac{-\Delta t \lambda_{\check{H}} + \lambda_{\check{K}}}{\Delta t \lambda_{\check{H}} + \lambda_{\check{K}}} \right| \leq 1 \quad (6.214)$$

koşulunun sağlanması gerekir.

1. durum: $\lambda_{\tilde{H}}$ ve $\lambda_{\tilde{K}}$ kompleks olsun. $\lambda_{\tilde{H}} = a_{\tilde{H}} + ib_{\tilde{H}}$, $\lambda_{\tilde{K}} = a_{\tilde{K}} + ib_{\tilde{K}}$ olmak üzere (6.214) eşitsizliği

$$\left| \frac{-\Delta t(a_{\tilde{H}} + ib_{\tilde{H}}) + a_{\tilde{K}} + ib_{\tilde{K}}}{\Delta t(a_{\tilde{H}} + ib_{\tilde{H}}) + a_{\tilde{K}} + ib_{\tilde{K}}} \right| \leq 1 \quad (6.215)$$

şeklinde yazılır. Burada reel ve sanal kısımlar düzenlenirse

$$\left| \frac{(-\Delta ta_{\tilde{H}} + a_{\tilde{K}}) + i(-\Delta tb_{\tilde{H}} + b_{\tilde{K}})}{(\Delta ta_{\tilde{H}} + a_{\tilde{K}}) + i(\Delta tb_{\tilde{H}} + b_{\tilde{K}})} \right| \leq 1 \quad (6.216)$$

eşitsizliği elde edilir. Bir kompleks sayının modülünün tanımı gereği (6.216) eşitsizliği

$$\sqrt{\frac{(-\Delta ta_{\tilde{H}} + a_{\tilde{K}})^2 + (-\Delta tb_{\tilde{H}} + b_{\tilde{K}})^2}{(\Delta ta_{\tilde{H}} + a_{\tilde{K}})^2 + (\Delta tb_{\tilde{H}} + b_{\tilde{K}})^2}} \leq 1 \quad (6.217)$$

şeklinde olur. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$\sqrt{\frac{\Delta t^2 a_{\tilde{H}}^2 + a_{\tilde{K}}^2 + \Delta t^2 b_{\tilde{H}}^2 + b_{\tilde{K}}^2 - 2\Delta t(a_{\tilde{H}}a_{\tilde{K}} + b_{\tilde{H}}b_{\tilde{K}})}{\Delta t^2 a_{\tilde{H}}^2 + a_{\tilde{K}}^2 + \Delta t^2 b_{\tilde{H}}^2 + b_{\tilde{K}}^2 + 2\Delta t(a_{\tilde{H}}a_{\tilde{K}} + b_{\tilde{H}}b_{\tilde{K}})}} \leq 1 \quad (6.218)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağlanması için

$$a_{\tilde{H}}a_{\tilde{K}} + b_{\tilde{H}}b_{\tilde{K}} \geq 0 \quad (6.219)$$

olmalıdır.

2. durum: $\lambda_{\tilde{H}}$ ve $\lambda_{\tilde{K}}$ reel olsun. (6.214) eşitsizliğinden

$$-1 \leq \frac{-\Delta t\lambda_{\tilde{H}} + \lambda_{\tilde{K}}}{\Delta t\lambda_{\tilde{H}} + \lambda_{\tilde{K}}} \leq 1 \quad (6.220)$$

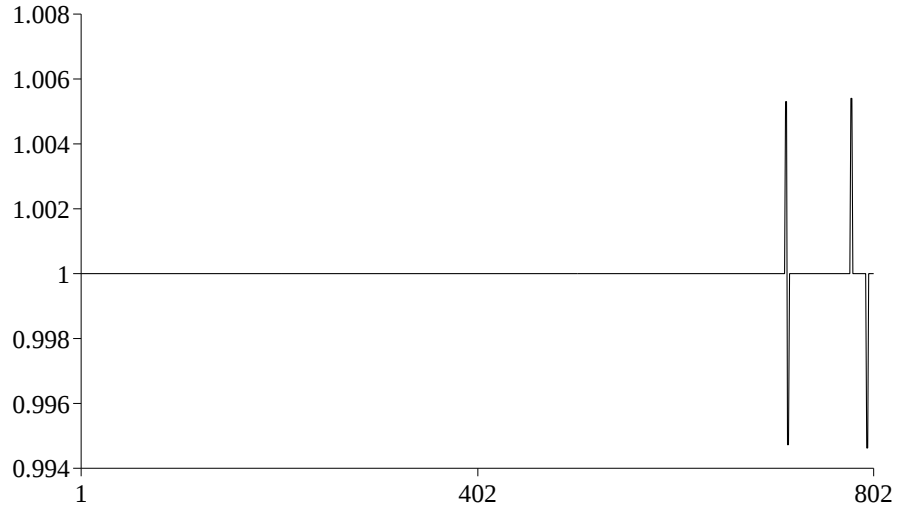
elde edilir. Bu eşitsizlik çözülrse

$$\lambda_{\tilde{H}} \geq 0, \quad \lambda_{\tilde{K}} \geq 0 \quad (6.221)$$

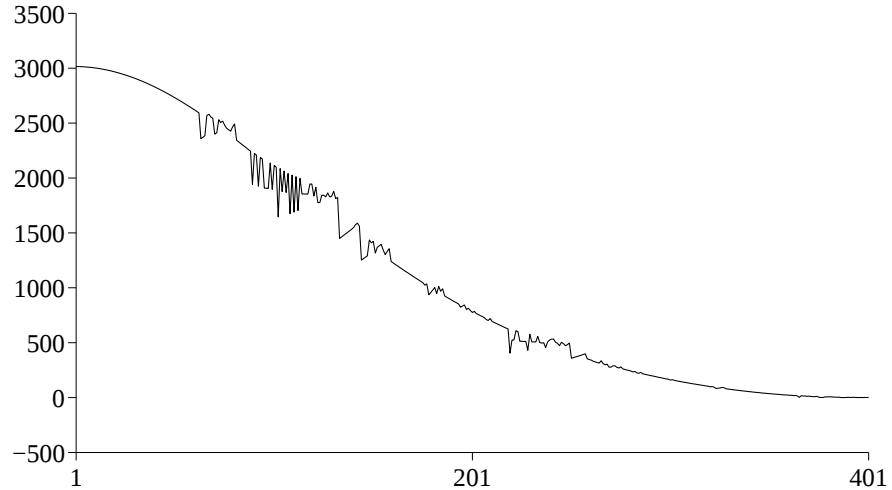
bulunur.

O halde NLS denklemi için HEKC metodu ile elde edilen fark denklemi koşullu karardır.

NLS denkleminin analitik sonucu bilinen tek soliton çözümü için HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılığı test edilmiştir. NLS denkleminin tek soliton çözümü için $\tilde{Q}$ matrisinin özdeğerleri hesaplanmıştır. Özdeğerler kompleks olduğundan Şekil 6.45 de özdeğerlerin modülleri verilmiştir. Şekil 6.46 da ise (6.219) de verilen kararlılık koşulu zarf çözüm için grafiğe aktarılmıştır. Şekil 6.45-6.46 dan görüldüğü gibi NLS denkleminin tek soliton çözümü için 10^{-3} hatayla koşullu kararlılık sağlanmıştır.



Şekil 6.45. $\tilde{Q}$ matrisinin özdeğerlerinin modüllerinin grafiği



Şekil 6.46. Zarf çözüm için kararlılık koşulunun grafiği

7 FİŞER DENKLEMİNİN HEKC METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Reaksiyon-difüzyon denklemleri genellikle kimyasal reaksiyonları, biyolojik sistemleri, popülasyon dinamiğini ve nükleer reaktör fiziğini modellemek için kullanılır. Popülasyon biyolojisinde baskın türlerin yayılmasını modelleyen lineer olmayan bir boyutlu reaksiyon-difüzyon denklemi

$$U_t = \nu U_{xx} + \rho f(U), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0 \quad (7.222)$$

şeklinindedir. Burada $U(x, t)$; x konumunda t zamanında popülasyon yoğunluğunu, ν difüzyon katsayısını, ρ reaksiyon faktörünü, $f(U)$ fonksiyonu ise popülasyonun büyümesini modelleyen reaksiyon terimini göstermektedir. $f(U)$ fonksiyonunun farklı seçimleri için reaksiyon-difüzyon denklemlerinin farklı durumları ortaya çıkar. $f(U) = U(1 - U)$ seçilimi için (7.222) denklemi

$$U_t = \nu U_{xx} + \rho U(1 - U) \quad (7.223)$$

şekline gelir. Bu denklem ilk defa Fisher [51] tarafından kullanıldığı için Fisher denklemi olarak bilinir. Fisher, bu denklemi sonsuz uzunluktaki habitatta mutant bir genin yayılmasını tanımlamak için kullanmıştır.

Literatürde bazı yöntemler kullanılarak Fisher denkleminin sayısal çözümleri araştırılmıştır. Bu yöntemlerden bazıları şunlardır: pseudospektral yaklaşımı [52], Petrov-Galerkin sonlu elemanlar metodu [53], sinc collocation metodu [54], kübik B-spline collocation metodu [55], kuartik B-spline Galerkin metodu [56].

7.1 Fisher Denkleminin Ayrıştırılması

Fisher denklemine Crank-Nicolson metodu uygulanırsa;

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = \nu \frac{U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n}{2} + \rho \frac{U^{n+1} + U^n}{2} - \rho \frac{(U^2)^{n+1} + (U^2)^n}{2} \quad (7.224)$$

denklemi elde edilir. Burada $U^n = U(x, t^n)$ ve Δt de zaman adımı olup $t^n = t^{n-1} + \Delta t$ şeklindedir. (7.224) denkleminde lineer olmayan $(U^2)^{n+1}$ terimini lineerleştirmek için Rubin ve Graves [29] tarafından (3.51) eşitliği ile

verilen lineerleştirme metodu kullanılırsa

$$(U^2)^{n+1} \approx 2U^n U^{n+1} - (U^n)^2 \quad (7.225)$$

eşitliği elde edilir. (7.225) eşitliği (7.224) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U^{n+1} - \rho \frac{\Delta t}{2} U^{n+1} + \rho \Delta t U^n U^{n+1} - \nu \frac{\Delta t}{2} U_{xx}^{n+1} = U^n + \rho \frac{\Delta t}{2} U^n + \nu \frac{\Delta t}{2} U_{xx}^n \quad (7.226)$$

ayrıştırılmış denklemini elde edilir.

7.2 HEKC Metodunun Fisher Denklemine Uygulanması

(3.54)-(3.57) de yapılan yaklaşımlar (7.226) denkleminde yerine yazılırsa bu denklem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} - \rho \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} + \rho \Delta t \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} \\ - \nu \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^n + \rho \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^n \\ + \nu \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i''(\mathbf{x}_k) u_i^n, \quad k = 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (7.227)$$

$$\sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} = \alpha, \quad k = 1$$

$$\sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_k) u_i^{n+1} = \beta, \quad k = N$$

şekline gelir. Burada $\phi_i(\mathbf{x})$ şekil fonksiyonları yerine (2.19) denkleminde verilen eşitlik yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} - \rho \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} \\
& + \rho \Delta t \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} \\
& - \nu \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)'' u_i^{n+1} = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^n \\
& + \rho \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^n \quad (7.228) \\
& + \nu \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)'' u_i^n, \quad k = 2, \dots, N-1 \\
& \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} = \alpha, \quad k = 1 \\
& \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^{n+1} = \beta, \quad k = N
\end{aligned}$$

şeklinde bir sistem elde edilir. Bu sistem gösterim kolaylığı açısından

$$\begin{aligned}
N_0 &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \\
N_1 &= -\rho \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \\
N_2 &= \rho \Delta t \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) u_i^n \cdot \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right) \\
N_3 &= -\nu \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}_k) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)]_{ji} \right)''
\end{aligned}$$

olmak üzere $i = 1, 2, \dots, N$ için

$$\begin{aligned}
N_0 u_i^{n+1} &= \alpha, & k &= 1 \\
(N_0 + N_1 + N_2 + N_3) u_i^{n+1} &= (N_0 - N_1 - N_3) u_i^n, & k &= 2, \dots, N-1 \\
N_0 u_i^{n+1} &= \beta, & k &= N
\end{aligned} \tag{7.229}$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu sistem çözülerek hesaplanan u_i^{n+1} ler (3.55) denkleminde yerine yazılırsa $(n+1)$. adımdaki U sayısal çözümü bulunur.

7.3 Test Problemleri

Bu bölümde, HEKC metodunun doğruluğunu ve geçerliliğini göstermek için üç test problemi ile çalışılmıştır. 3. test problemi için L_2 ve L_∞ hata normları ile verilen metodun zamana göre noktasal yakınsama oranları belirlenmiştir.

L_2 ve L_∞ hata normları ile noktasal yakınsama oranları sırasıyla (3.65) ve (3.66) da verilen eşitliklerle hesaplanmıştır.

7.3.1 1. Test Problemi

Fisher denkleminin modifiye formu

$$U(x, t) = U_{xx} + \rho U(1 - U), \quad \rho \geq 1 \tag{7.230}$$

şeklindedir. Bu denklemin başlangıç ve sınır koşulları ise

$$\begin{aligned}
U(x, 0) &= U_0(x) \quad , \quad x \in [-\infty, \infty] \\
\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x, t) &= 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U(x, t) = 0
\end{aligned} \tag{7.231}$$

şeklinde verilmiştir. (7.230) denkleminin verilen başlangıç ve sınır koşullarına uyan analitik çözümü

$$U(x, t) = \frac{1}{\left[1 + \exp\left((\sqrt{\rho/6})x - (5\rho/6)t\right) \right]^2} \tag{7.232}$$

şeklinde verilmiştir [57]. Bu denklemin sayısal çözümü $-0.2 \leq x \leq 0.8$ tanım aralığında, ρ terimi sırasıyla 2000, 5000, 10000 alınarak elde edilmiştir. Sayısal hesaplamalarda $\rho = 2000, 5000$ için bölüntü noktalarının sayısı 41,

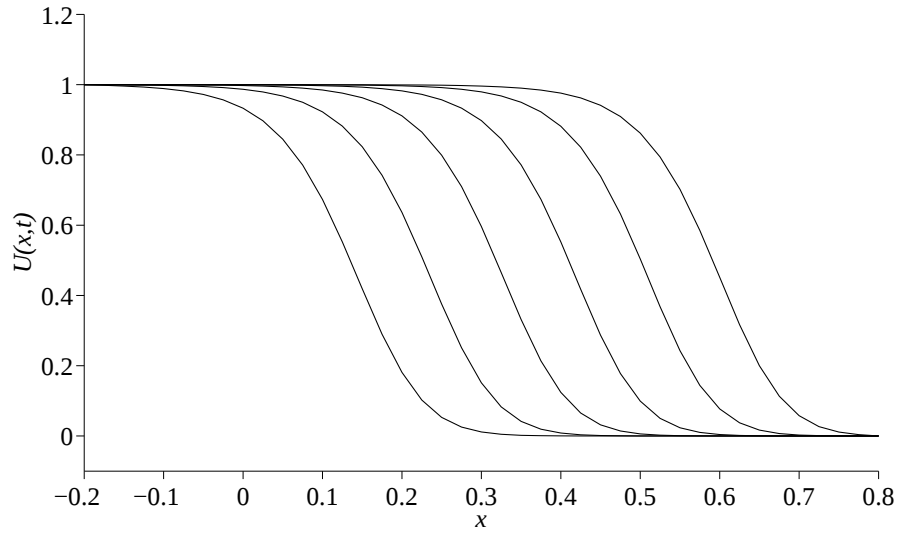
$\Delta t = 0.0001$, $\rho = 10000$ için ise bölüntü noktalarının sayısı 121, $\Delta t = 0.00001$ olarak alınmıştır. Ayrıca hesaplamalarda taban polinomunun derecesi $m = 4$ alınmıştır.

Sayısal sonuçlar $\rho = 2000, 5000$ için 41×41 tane matris girdisinden 571 tanesi, $\rho = 10000$ için ise 121×121 tane matris girdisinden 1901 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matrisin girdilerinin $\rho = 2000, 5000$ için yaklaşık %5'i, $\rho = 10000$ için ise yaklaşık %13'ü kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır.

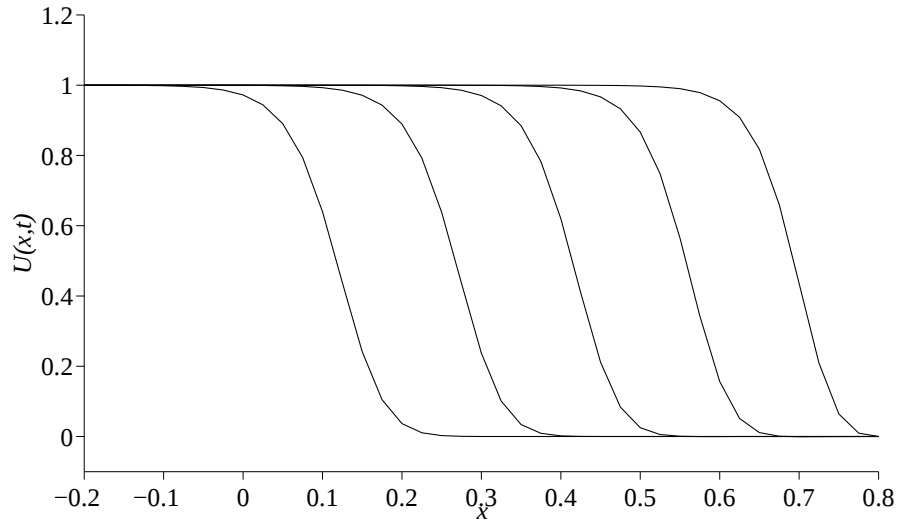
Çizelge 7.25 de $\rho = 10000$ için $t = 0.0035$ zamanında, farklı bölüntü noktalarında elde edilen sayısal çözümler verilmiş, bu sonuçlar tam çözüm ve [55] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Şekil 7.47 de $\rho = 2000$ için $t = 0.002, 0.003, 0.004, 0.005, 0.006, 0.007$ zamanlarında elde edilen çözümlerin grafikleri, Şekil 7.48 de $\rho = 5000$ için $t = 0.001, 0.002, 0.003, 0.004, 0.005$ zamanlarında elde edilen çözümlerin grafikleri ve Şekil 7.49 da ise $\rho = 10000$ için $t = 0.001, 0.0015, 0.002, 0.0025, 0.003, 0.0035$ zamanlarında elde edilen çözümlerin grafikleri verilmiştir.

Çizelge 7.25. $\rho = 10000$ için $t = 0.0035$ zamanında elde edilen çözümler

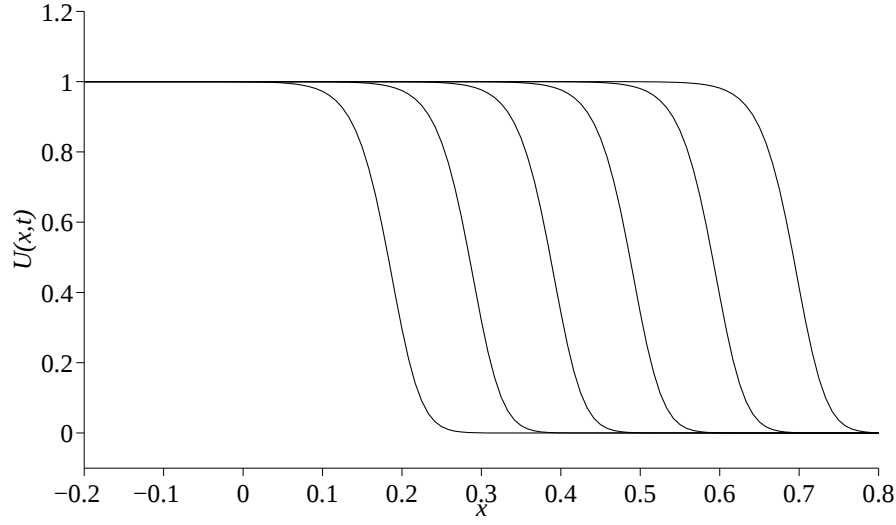
x	Tam Çözüm	HEKC	[55]
-0.2	1.00000	1.00000	1.00000
-0.15	1.00000	1.00000	1.00000
-0.1	1.00000	1.00000	1.00000
-0.05	1.00000	1.00000	1.00000
0.05	1.00000	1.00000	1.00000
0.1	1.00000	1.00000	1.00000
0.15	1.00000	1.00000	1.00000
0.2	1.00000	1.00000	1.00000
0.25	1.00000	1.00000	1.00000
0.3	1.00000	1.00000	1.00000
0.4	1.00000	0.99999	0.99999
0.5	0.99968	0.99969	0.99962
0.55	0.99757	0.99766	0.99703
0.6	0.98154	0.98223	0.97700
0.65	0.87011	0.87468	0.83851
0.7	0.41370	0.42568	0.33612



Şekil 7.47. $\rho = 2000$ için farklı zamanlardaki çözümlerin grafikleri



Şekil 7.48. $\rho = 5000$ için farklı zamanlardaki çözümlerin grafikleri



Şekil 7.49. $\rho = 10000$ için farklı zamanlardaki çözümlerin grafikleri

7.3.2 2. Test Problemi

Fisher denkleminin yapısı

$$U_t = \nu U_{xx} + \rho f(U), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0 \quad (7.233)$$

şeklindedir. Burada $\rho = 1$, $\nu = 0.1$, $f(U) = U(1 - U)$ alınarak

$$U(x, 0) = \begin{cases} e^{10(x+1)}, & x < -1 \\ 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ e^{-10(x-1)}, & x > 1 \end{cases}$$

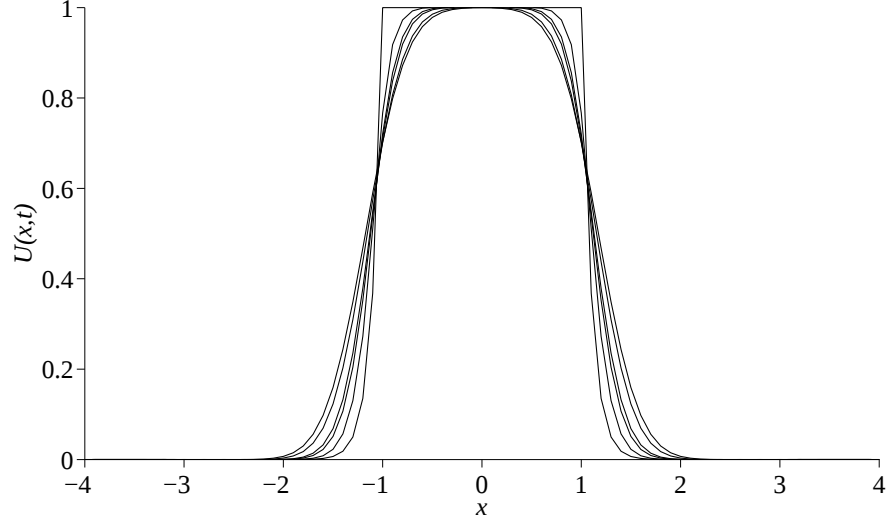
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x, t) = 0$$

başlangıç ve sınır koşulları altında sayısal hesaplamalar yapılmıştır. Hesaplamalarda $[-4, 4]$, $[-6, 6]$ tanım aralıkları için bölüntü noktalarının sayısı 81, $\Delta t = 0.005$, $[-30, 30]$ tanım aralığı için bölüntü noktalarının sayısı 241, $\Delta t = 0.0005$ alınmıştır. Ayrıca hesaplamalarda taban polinomunun derecesi $m = 4$ alınmıştır.

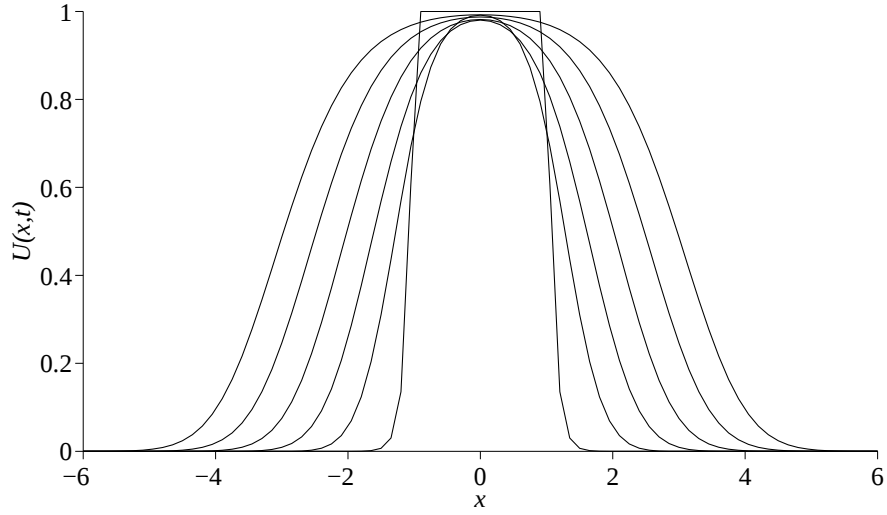
Sayısal sonuçlar $[-4, 4]$ tanım aralığı için 81×81 tane matris girdisinden 1241 tanesi, $[-6, 6]$ tanım aralığı için 81×81 tane matris girdisinden 1215 tanesi, $[-30, 30]$ tanım aralığı için 241×241 tane matris girdisinden 3559 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matrisin girdilerinin $[-4, 4]$, $[-6, 6]$ tanım aralıkları için yaklaşık %19'u, $[-30, 30]$ tanım aralığı için ise yaklaşık

%6'sı kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır.

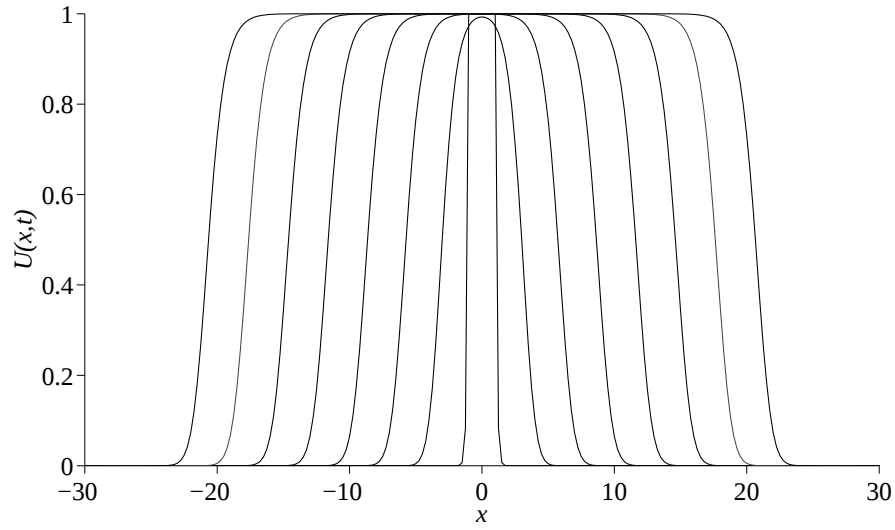
Şekil 7.50, Şekil 7.51, Şekil 7.52 de sırasıyla $[-4, 4]$, $[-6, 6]$, $[-30, 30]$ tanım aralıklarında farklı zaman dilimleri için elde edilen sayısal çözümlerin grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 7.50. $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ zamanlarında elde edilen çözümlerin grafikleri



Şekil 7.51. $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ zamanlarında elde edilen çözümlerin grafikleri



Şekil 7.52. $t = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$ zamanlarında elde edilen çözümlerin grafikleri

7.3.3 3. Test Problemi

Fisher denkleminin

$$U_t = \nu U_{xx} - bu^2 + au, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0 \quad (7.234)$$

formu için başlangıç ve sınır koşulları

$$U(x, 0) = -\frac{1}{4} \frac{a}{b} \left[\frac{1}{\cosh^2} \left(-\sqrt{\frac{a}{24c}} x \right) - 2 \tanh \left(-\sqrt{\frac{a}{24c}} x \right) - 2 \right] \quad (7.235)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, t) = 0.5, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0 \quad (7.236)$$

şeklinde verilmiştir.

(7.234) denkleminin analitik çözümü

$$U(x, t) = -\frac{1}{4} \frac{a}{b} \left[\frac{1}{\cosh^2} \left(\mp \sqrt{\frac{a}{24c}} x + \frac{5a}{12} t \right) - 2 \tanh \left(\mp \sqrt{\frac{a}{24c}} x + \frac{5a}{12} t \right) - 2 \right] \quad (7.237)$$

şeklinde [55]. Hesaplamalar $-30 \leq x \leq 30$ tanım aralığında $0 \leq t \leq 5$ zaman aralığında $h = 1$, $\Delta t = 0.1$, $\nu = 1$, $b = 1$, $a = 0.5$ değerleri için gerçekleştirilmiştir. Ayrıca hesaplamalarda taban polinomunun derecesi $m = 4$ alınmıştır.

Sayısal sonuçlar 61×61 tane matris girdisinden 859 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matrisin girdilerinin yaklaşık %23'ü kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır.

Çizelge 7.26 ve Çizelge 7.27 de sırasıyla $t = 2$, $t = 4$ zamanlarında, farklı bölüntü noktalarında elde edilen sayısal ve tam çözümler gösterilmiştir. Bu çözümler için bazı bölüntü noktalarındaki mutlak hatalar hesaplanarak elde edilen sonuçlar [55] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çizelge 7.28 de farklı zaman adımlarında L_2 , L_∞ hata normları ile noktasal yakınsama oranları hesaplanmıştır. Hesaplamalar $t = 5$ zamanında konum adımı $h = 1$ sabit tutularak yapılmıştır. Çizelge 7.28 den Δt azaldıkça hata normlarının küçüldüğü ve yakınsama oranlarının 2 civarında olduğu görülmüştür. Şekil 7.53 de farklı zamanlarda elde edilen çözümlerin grafikleri gösterilmiştir.

Çizelge 7.26. $t = 2$ zamanında elde edilen sayısal çözümler

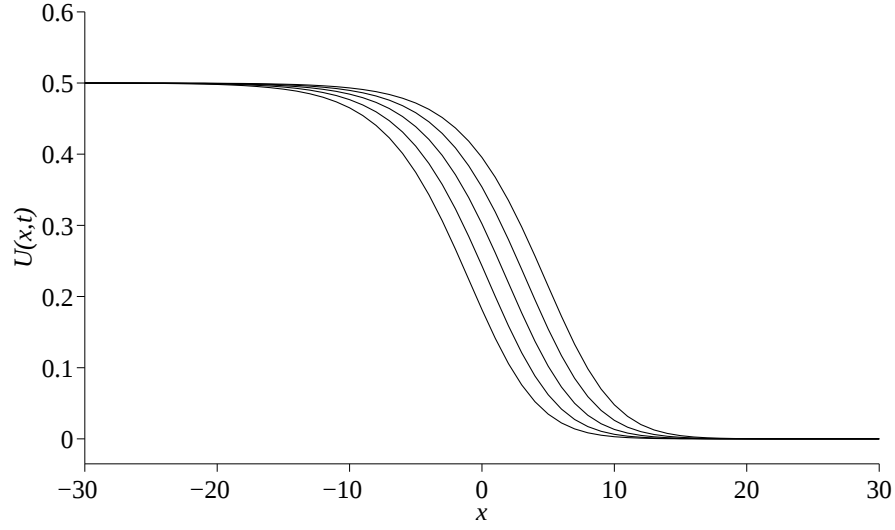
x	Tam Çözüm	HEKC	[55]	[55] Hata	HEKC Hata
-20	0.498651	0.498651	0.498653	1.52e-06	1.77e-07
-16	0.495740	0.495740	0.495745	4.56e-06	5.49e-07
-12	0.486669	0.486670	0.486679	9.42e-06	1.67e-06
-8	0.459477	0.459483	0.459478	2.39e-07	5.51e-06
-4	0.386790	0.386808	0.386742	4.91e-05	1.79e-05
2	0.158849	0.158867	0.159011	1.61e-04	1.79e-05
6	0.041851	0.041866	0.041877	2.54e-05	1.46e-05
10	0.006464	0.006468	0.006426	3.92e-05	4.20e-06
14	0.000755	0.000755	0.000746	9.46e-06	3.65e-07
18	7.91e-05	7.91e-05	7.79e-05	1.23e-06	2.12e-08

Çizelge 7.27. $t = 4$ zamanında elde edilen sayısal çözümler

x	Tam Çözüm	HEKC	[55]	[55] Hata	HEKC Hata
-20	0.499413	0.499413	0.499412	1.35e-06	1.63e-07
-16	0.498142	0.498142	0.498146	4.01e-06	4.83e-07
-12	0.494140	0.494141	0.494149	8.86e-06	1.52e-06
-8	0.481755	0.481760	0.481763	7.28e-06	5.11e-06
-4	0.445397	0.445414	0.445372	2.53e-05	1.71e-05
2	0.279941	0.279988	0.280082	1.41e-04	4.71e-05
6	0.116963	0.117004	0.117196	2.33e-04	4.15e-05
10	0.025974	0.025999	0.025881	9.30e-05	2.53e-05
14	0.003622	0.003626	0.003559	6.29e-05	4.37e-06
18	0.000405	0.000406	0.000395	1.12e-05	3.24e-07

Çizelge 7.28. $t = 5$, $h = 1$ için hata normları ve noktasal yakınsama oranları

Δt	L_2	$YO(L_2)$	L_∞	$YO(L_\infty)$
2	0.10230	—	0.037649	—
1	0.019985	2.35581	0.0067695	2.47549
0.5	0.0048459	2.04408	0.0016412	2.04429
0.25	0.0012029	2.01024	0.00040450	2.02053
0.1	0.00019467	1.98756	0.000061346	2.05843



Şekil 7.53. $t = 1, 2, 3, 4, 5$ zamanlarında elde edilen çözümlerin grafikleri

7.4 Kararlılık Analizi

Bu bölümde matris metodu kullanılarak Fisher denklemi için HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılık analizi yapılmıştır.

(7.227) denklemi

$$\begin{aligned}\check{A} &= [\phi_i(x_k) : i, k = \overline{1, N}] \\ \check{C} &= [\phi''_i(x_k) : i = \overline{1, N}, \quad k = \overline{2, N-1}]\end{aligned}\quad (7.238)$$

olmak üzere

$$\left[\left(1 - \rho \frac{\Delta t}{2}\right) \check{A} + \rho \Delta t U^n \check{A} - \nu \frac{\Delta t}{2} \check{C} \right] u^{n+1} = \left[\left(1 + \rho \frac{\Delta t}{2}\right) \check{A} + \nu \frac{\Delta t}{2} \check{C} \right] u^n \quad (7.239)$$

şeklinde yazılabilir. Burada U^n terimi U fonksiyonunun n . adımdaki bilinen değerleridir.

Diğer yandan

$$\begin{aligned} U^n &= \check{A}u^n \\ U^{n+1} &= \check{A}u^{n+1} \end{aligned} \quad (7.240)$$

olduğundan (7.239) denklemi

$$\left[\left(1 - \rho \frac{\Delta t}{2}\right) \check{A} \check{A}^{-1} + \rho \Delta t U^n \check{A} \check{A}^{-1} - \nu \frac{\Delta t}{2} \check{C} \check{A}^{-1} \right] U^{n+1} = \left[\left(1 + \rho \frac{\Delta t}{2}\right) \check{A} \check{A}^{-1} + \nu \frac{\Delta t}{2} \check{C} \check{A}^{-1} \right] U^n \quad (7.241)$$

şekline gelir. Buradan

$$\left[\left(1 - \rho \frac{\Delta t}{2}\right) I + \rho \Delta t U^n I - \nu \frac{\Delta t}{2} \check{C} \check{A}^{-1} \right] U^{n+1} = \left[\left(1 + \rho \frac{\Delta t}{2}\right) I + \nu \frac{\Delta t}{2} \check{C} \check{A}^{-1} \right] U^n \quad (7.242)$$

denklemi bulunur. Burada $\check{K} = \check{C} \check{A}^{-1}$ denirse (7.242) denklemi

$$\left[\left(1 - \rho \frac{\Delta t}{2} + \rho \Delta t U^n\right) I - \nu \frac{\Delta t}{2} \check{K} \right] U^{n+1} = \left[\left(1 + \rho \frac{\Delta t}{2}\right) I + \nu \frac{\Delta t}{2} \check{K} \right] U^n \quad (7.243)$$

şeklinde olur. O halde

$$\check{Q} = \left[\left(1 - \rho \frac{\Delta t}{2} + \rho \Delta t U^n\right) I - \nu \frac{\Delta t}{2} \check{K} \right]^{-1} \left[\left(1 + \rho \frac{\Delta t}{2}\right) I + \nu \frac{\Delta t}{2} \check{K} \right] \quad (7.244)$$

olmak üzere

$$e^{n+1} = \check{Q}e^n \quad (7.245)$$

hata denklemi elde edilir. HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlı olması için $\rho(\check{Q}) \leq 1$ olmalıdır. O halde $\lambda_{\check{K}}$, $\check{K}$ matrisinin özdeğeri olmak üzere;

$$\left| \frac{1 + \rho \frac{\Delta t}{2} + \nu \frac{\Delta t}{2} \lambda_{\check{K}}}{1 - \rho \frac{\Delta t}{2} + \rho \Delta t U^n - \nu \frac{\Delta t}{2} \lambda_{\check{K}}} \right| \leq 1 \quad (7.246)$$

koşulunun sağlanması gerekir.

1. durum: $\lambda_{\check{K}}$ kompleks olsun. $\lambda_{\check{K}} = a_{\check{K}} + ib_{\check{K}}$ olmak üzere (7.246) eşitsizliği

$$\left| \frac{1 + \rho \frac{\Delta t}{2} + \nu \frac{\Delta t}{2} (a_{\check{K}} + ib_{\check{K}})}{1 - \rho \frac{\Delta t}{2} + \rho \Delta t U^n - \nu \frac{\Delta t}{2} (a_{\check{K}} + ib_{\check{K}})} \right| \leq 1 \quad (7.247)$$

şeklinde olur. Burada reel ve sanal kısımlar düzenlenirse

$$\left| \frac{(1 + \rho \frac{\Delta t}{2} + \nu \frac{\Delta t}{2} a_{\check{K}}) + i(\nu \frac{\Delta t}{2} b_{\check{K}})}{(1 - \rho \frac{\Delta t}{2} + \rho \Delta t U^n - \nu \frac{\Delta t}{2} a_{\check{K}}) - i(\nu \frac{\Delta t}{2} b_{\check{K}})} \right| \leq 1 \quad (7.248)$$

eşitsizliği elde edilir. Bir kompleks sayının modülünün tanımı gereği (7.248) eşitsizliği

$$\sqrt{\frac{(1 + \rho \frac{\Delta t}{2} + \nu \frac{\Delta t}{2} a_{\check{K}})^2 + (\nu \frac{\Delta t}{2} b_{\check{K}})^2}{(1 - \rho \frac{\Delta t}{2} + \rho \Delta t U^n - \nu \frac{\Delta t}{2} a_{\check{K}})^2 + (\nu \frac{\Delta t}{2} b_{\check{K}})^2}} \leq 1 \quad (7.249)$$

şeklinde yazılır. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$\sqrt{\frac{(1 + \rho \frac{\Delta t}{2})^2 + (\nu \frac{\Delta t}{2} a_{\check{K}})^2 + (\nu \frac{\Delta t}{2} b_{\check{K}})^2 + 2(1 + \rho \frac{\Delta t}{2})(\nu \frac{\Delta t}{2} a_{\check{K}})}{(1 - \rho \frac{\Delta t}{2} + \rho \Delta t U^n)^2 + (\nu \frac{\Delta t}{2} a_{\check{K}})^2 + (\nu \frac{\Delta t}{2} b_{\check{K}})^2 - 2(1 - \rho \frac{\Delta t}{2} + \rho \Delta t U^n)(\nu \frac{\Delta t}{2} a_{\check{K}})}} \leq 1 \quad (7.250)$$

eşitsizliği elde edilir. Her iki tarafın karesi alınıp eşitsizlik düzenlenirse

$$2\rho + 2\nu a_{\check{K}} - 2\rho U^n + \rho^2 \Delta t U^n + \rho \nu \Delta t U^n a_{\check{K}} - \rho^2 \Delta t (U^n)^2 \leq 0 \quad (7.251)$$

elde edilir.

2. durum: $\lambda_{\check{K}}$ reel olsun. Bu durumda (7.246) eşitsizliğinden

$$-1 \leq \frac{1 + \rho \frac{\Delta t}{2} + \nu \frac{\Delta t}{2} \lambda_{\check{K}}}{1 - \rho \frac{\Delta t}{2} + \rho \Delta t U^n - \nu \frac{\Delta t}{2} \lambda_{\check{K}}} \leq 1 \quad (7.252)$$

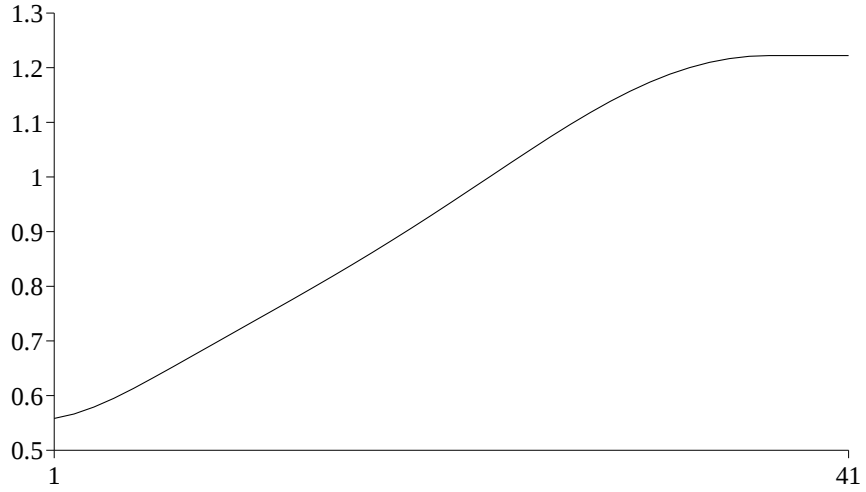
elde edilir. Bu eşitsizlik çözülürse

$$2 + \rho \Delta t U^n \geq 0 \quad \text{ve} \quad \rho \Delta t + \nu \Delta t \lambda_{\check{K}} - \rho \Delta t U^n \leq 0 \quad (7.253)$$

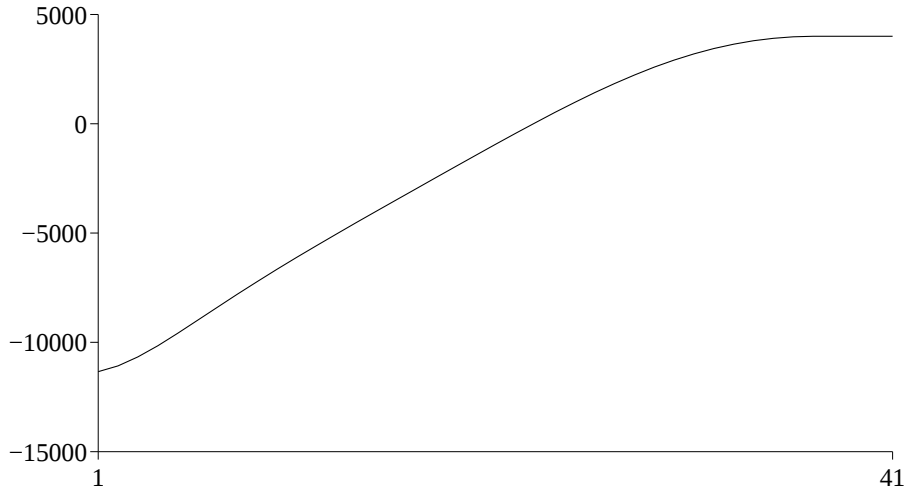
bulunur. O halde Fisher denklemi için HEKC metodu ile elde edilen fark denklemi koşullu kararlıdır.

Fisher denkleminin analitik sonucu bilinen 1. test problemi için HEKC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılığı test edilmiştir. $\rho = 2000$

için $\tilde{Q}$ matrisinin özdeğerleri hesaplanmıştır. Özdeğerler kompleks olduğundan Şekil 7.54 de özdeğerlerin modülleri verilmiştir. Şekil 7.55 de ise (7.251) de verilen kararlılık koşulu grafiğe aktarılmıştır. Şekil 7.54-7.55 den görüldüğü gibi Fisher denkleminin 1. test probleminde $\rho = 2000$ için koşullu kararlılık sağlanmıştır.



Şekil 7.54. $\tilde{Q}$ matrisinin özdeğerlerinin modüllerinin grafiği



Şekil 7.55. Kararlılık koşulunun grafiği

KAYNAKLAR

- [1] Liu, G.R., *Mesh free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press, 2003.
- [2] Lucy, L.B., *A numerical approach to the testing of the fission hypothesis*, Astron. J., **8(12)**, 1013-1024, 1977.
- [3] Gingold, R.A. ve Monaghan, J.J., *Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars*, Monthly Notices R. Astron. Soc., **181**, 375-389, 1977.
- [4] Nayroles, B., Touzot, G. ve Villen, P., *Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements*, Computational Mechanics, **10**, 307-318, 1992.
- [5] Libersky, L.D., Petscheck, A.G., Carney, T.C., Hipp, J.R. ve Allahdadi, F.A., *High strain Lagrangian hydrodynamics*, J. Comput. Phys., **109**, 67-75, 1993.
- [6] Belytschko T., Lu, Y.Y. ve Gu, L., *Element-free Galerkin method*, Int. J. Numer. Methods Eng., **37**, 229-256, 1994.
- [7] Melenk, J.M. ve Babuska, I., *The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications*, Comput. Mech. Engng., **139**, 289-314, 1996.
- [8] Atluri, S.N. ve Zhu, T., *A new meshless local Petrov-Galerkin approach in computational mechanics*, Comp. Mech., **22**, 117-127, 1998.
- [9] Pekedis, M. ve Yıldız, H., *Ağsız Yöntemler ve Sınıflandırılması*, Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, **16(1)**, 1-9, 2010.
- [10] Lancaster, P. ve Salkauskas, K., *Surface generated by moving least square methods*, Mathematics of Computation, **37(155)**, 141-158, 1981.
- [11] Wadati, M., *Introduction to solitons*, Pramana Journal of Physics, **57(5)**, 841-847, 2001.
- [12] Russel, J.S., *Report on waves*, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement Science, 311-390, 1844.

- [13] Koç, A.B., *Soliton dalga çözümlerinin indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metoduyla araştırılması ve diğer nümerik çözümlerle karşılaştırılması*, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 2009.
- [14] Allen, J.E., *The Early History of Solitons (Solitary Waves)*, Phys., **57**, 436-441, 1993.
- [15] Irk, D., *Bazı kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümü*, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2007.
- [16] Korteweg, D.J. ve De Vries, G., *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves*, Philosophical Magazine, **39**, 422-443, 1895.
- [17] Crank, J. ve Nicolson, P., *A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **43**, 50-64, 1947.
- [18] Morrison, P.J., Meiss, J.D. ve Carey, J.R., *Scattering of RLW solitary waves*, Physica, **11D**, 324-336, 1984.
- [19] Gardner, L.R.T. ve Gardner, G.A., *Solitary waves of the equal width wave equation*, J. Comput. Phys., **101**, 218-223, 1992.
- [20] Saka, B., *A finite element method for equal width equation*, Appl. Math. and Comput., **175**, 730-747, 2006.
- [21] Esen, A., *A numerical solution of the equal width wave equation by a lumped Galerkin method*, Appl. Math. and Comput., **168**, 270-282, 2005.
- [22] Raslan, K.R., *A computational method for the equal width equation*, Int. J. Comp. Math., **81**, 63-72, 2004.
- [23] Doğan, A., *Application of Galerkin's method to equal width wave equation*, Appl. Math. and Comput., **160**, 65-76, 2005.
- [24] Zaki, S.I., *A least-squares finite element scheme for the EW equation*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **189**, 587-594, 2000.
- [25] Saka, B., Dağ, İ., Dereli, Y. ve Korkmaz, A., *Three different methods for numerical solution of the EW equation*, Engineering Analysis with Boundary Elements, **32**, 556-566, 2008.

- [26] Ali, A.H.A., *Spectral method for solving the equal width equation based on Chebyshev polynomials*, Nonlinear Dyn., **51**, 59-70, 2008.
- [27] Haq, F., Shah, I.A. ve Ahmad, S., *Septic B-Spline Collocation method for numerical solution of the Equal Width Wave (EW) equation*, Life Sci. J., **10**, 253-260, 2013.
- [28] Dereli, Y. ve Schaback R., *The Meshless Kernel-Based Method of Lines for Solving the Equal Width Equation*, Applied Mathematics and Computation, **219**, 5224-5232, 2013.
- [29] Rubin, S.G. ve Graves, R.A., *Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics*, Nasa TR R-436, Washington, DC, 1975.
- [30] Olver, P.J., *Euler operators and conservation laws of the BBM equation*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **85**, 143-159, 1979.
- [31] Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., Ayoub, F.A. ve Amein, N.K., *Simulations of the EW undular bore*, Commun. Numer. Meth. Eng., **13**, 583-592, 1997.
- [32] Smith, G.D., *Numerical solution of partial differential equations: Finite Difference Methods*, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, Oxford, İngiltere, 85, 1985.
- [33] Zaki, S.I., *Solitary wave interactions for the modified equal width equation*, Comp. Phys. Commun., **126**, 219-231, 2000.
- [34] Dereli, Y., *Radial basis functions method for numerical solution of the modified equal width equation*, International Journal of Computer Mathematics, **87**, 1569-1577, 2010.
- [35] Wazwaz, A.M., *The tanh and sine -cosine methods for a reliable treatment of the modified equal width equation and its variants*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **11**, 148-160, 2006.
- [36] Saka, B., *Algorithms for numerical solution of the modified equal width wave equation using collocation method*, Math. and Comput. Modelling, **45**, 1096-1117, 2007.
- [37] Esen, A. ve Kutluay, S., *Solitary wave solutions of the modified equal width wave equation*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **13**, 1538-1546, 2008.

- [38] Lu, J., *He's variational iteration method for the modified equal width equation*, Chaos Solitons and Fractals, **39**, 2102-2109, 2009.
- [39] Esen, A., *A lumped Galerkin method for the numerical solution of the modified-width wave equation using quadratic B-splines*, Int. Journal of Comp. Math., **83**, 449-459, 2006.
- [40] Evans, D.J. ve Raslan, K.R., *Solitary waves for the generalized equal width (GEW) equation*, Int. J. Comput. Math., **82**, 445-455, 2005.
- [41] Roshan, T., *A Petrov-Galerkin method for solving the generalized equal width equation*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **235**, 1641-1652, 2011.
- [42] Raslan, K.R., *Collocation method using cubic B-spline for the generalized equal width equation*, Int. J. Simul. Process Model, **2**, 37-44, 2006.
- [43] Karpman, V.I. ve Kruskal, E.M., *Modulated waves in non-linear dispersive media*, Soviet Phys JETP, **28**, 277-281, 1969.
- [44] Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., Zaki, S.I. ve Sharawi, Z.E.I., *B-spline finite element studies of the nonlinear Schrödinger equation*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **108**, 303-318, 1993.
- [45] Twizell, E.H., Bratros, A. ve Newby, J.C., *A difference method for solving the cubic Schrödinger equation*, Math. Comput. Simulation, **43**, 67-75, 1997.
- [46] Dereli, Y., Irk, D. ve Dağ, İ., *Soliton solutions for NLS equation using radial basis functions*, Chaos, Solitons and Fractals, **42**, 1227-1233, 2009.
- [47] Tougrigny, Y. ve Morris J.L.L, *An investigation in to the effect of product approximation in the numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation*, J. Comput. Phys., **76**, 103-130, 1988.
- [48] Dağ, İ., *A quadratic B-spline finite element method for solving nonlinear Schrödinger equation*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **174**, 247-258, 1999.
- [49] Dereli, Y., *The meshless kernel-based method of lines for the numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation*, Engineering Analysis with Boundary Elements, **36**, 1416-1423, 2012.

- [50] Zakharov, V.E. ve Shabat, A.B., *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Soviet Phys JETP, **34**, 62-69, 1972.
- [51] Fisher, R.A., *The wave of advance of advantageous genes*, Ann. Eugen., **7**, 355-369, 1936.
- [52] Gazdag, J. ve Canosa J., *Numerical solution of Fisher's equation*, J. Appl. Prob., **11**, 445-457, 1974.
- [53] Tang, S. ve Weber R.O., *Numerical study of Fisher's equation by a Petrov-Galerkin finite element method*, J. Aus. Math. Soc. Sci. B, **33**, 27-38, 1991.
- [54] Al-Khaled, K. ve Sloan, D.M., *Numerical study of Fisher's reaction-diffusion equation by the sinc collocation method*, J. Comput. Appl. Math., **137**, 245-255, 2001.
- [55] Mittal, R.C. ve Arora, G., *Efficient numerical solution of Fisher's equation by using B-spline method*, International Journal of Computer Mathematics, **87**, 3039-3051, 2010.
- [56] Şahin, A., Dağ, I. ve Saka, B., *A B-spline algorithm for the numerical solution of Fisher's equation*, Kybernetes, **37**, 326-342, 2008.
- [57] Ablowitz, M. ve Zepetella, A., *Explicit solution of Fisher's equation for a special wave speed*, Bull. Math. Biol., **41**, 835-840, 1979.