

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YÜKSEK RÖLATİVİSTİK HIZLARDA
AĞIR İYON ÇARPIŞMALARI SONUCU
MÜON ÇİFTİ ÜRETİMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nihal Gözlüklüoğlu Karakuş

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Mühendisliği Programı

OCAK 2015

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YÜKSEK RÖLATİVİSTİK HIZLARDA
AĞIR İYON ÇARPIŞMALARI SONUCU
MÜON ÇİFTİ ÜRETİMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Nihal Gözlüklüoğlu Karakuş
509111117**

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Cem GÜÇLÜ

OCAK 2015

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509111117 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Nihal Gözlüklüoğlu Karakuş**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **“YÜKSEK RÖLATİVİSTİK HIZLARDA AĞIR İYON ÇARPIŞMALARI SONUCU MÜON ÇİFTİ ÜRETİMİ ”** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof.Dr. Mehmet Cem GÜÇLÜ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof.Dr. Mehmet Cem GÜÇLÜ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç.Dr. Kerem CANKOÇAK
İstanbul Teknik Üniversitesi

Yrd.Doç.Dr. Cem ÖZEN
Kadir Has Üniversitesi

Teslim Tarihi : **15 Aralık 2014**
Savunma Tarihi : **19 - 24 Ocak 2015**

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans Tez çalışmam boyunca bilgi ve birikimleri ile bana yol gösteren ve desteğini esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet Cem GÜÇLÜ'ye, çalışma süresince her konuda bilgileri ile yardımcı olup, değerli zamanını ayıran hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Melek YILMAZ ŞENGÜL'e, tez çalışmam süresince manevi desteğini esirgemeyen eşim Barış Karakuş' a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ocak 2015

Nihal Gözlüklüoğlu Karakuş
Fizik Mühendisliği

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ.....	v
KISALTMALAR	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET.....	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
2. PARÇACIK HIZLANDIRICILAR.....	3
2.1 Large Hadron Collider (LHC).....	3
2.2 Rölativistik Ağır İyon Çarpıştırıcısı (RHIC).....	4
3. DIRAC DALGA DENKLEMİ.....	7
3.1 Dirac Denklemi Ve Çözümü	7
3.2 Serbest Parçacık Çözümleri	9
3.3 Dirac Ve Feynman Negatif Enerji Çözümü Yorumları.....	11
4. KUANTUM ALANI.....	15
4.1 Lagrange-Hamilton Formu.....	15
5. LEPTON ÇİFTİ ÜRETİMİ	19
5.1 Pertürbatif Terimlerin Elde Edilmesi	19
5.2 Tesir Kesitlerinin Hesaplanması	21
5.3 Tesir Kesitinin Çarpışma Parametresine Bağlılığı	24
6. FORM FAKTÖRÜ HESAPLAMALARI.....	29
6.1 Nükleer Boyut ve Şekil	29
6.2 Gausyen Dağılım.....	30
6.3 Düzgün Dağılım	32
6.4 Wood-Saxon (Fermi) Dağılım	33
7. LEPTON ÇİFTLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI	35
7.1 Parçacıkların Momentum ve Enerji İfadeleri	35
7.2 Lepton Çiftlerinin Karşılaştırılması	36
8. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	49

KAYNAKLAR.....	53
EKLER.....	55
ÖZGEÇMİŞ.....	67

KISALTMALAR

RHIC : Relativistic Heavy Ion Collider (Rölativistik Ağır İyon Çarpıştırıcısı)

LHC : Large-Hadron Collider (Büyük Hadron Çarpıştırıcısı)

QCD : Quantum Chromodynamic

QED : Quantum Electrodynamics

$\mu\text{-}\mu^+$: Müon-antimüon

$\tau\text{-}\tau^+$: Tau-antitau

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

- Çizelge 7.1 :** RHIC enerjisinde form faktörlerin etkisiyle hesaplanan müonla elektron tesir kesitleri, burada $f = 1$ ile gösterilen tesir kesiti Gausyen Dağılıma, $f = 2$ ile gösterilen tesir kesiti Düzgün Dağılıma ve $f = 3$ ile gösterilentesir kesiti Wood-Saxon Dağılıma sahip altın çekirdeğine aittir 36
- Çizelge 7.2 :** LHC enerjisinde form faktörlerin etkisiyle hesaplanan müonla elektron tesir kesitleri, burada $f = 1$ ile gösterilen tesir kesiti Gausyen Dağılıma, $f = 2$ ile gösterilen tesir kesiti Düzgün Dağılıma ve $f = 3$ ile gösterilentesir kesiti Wood-Saxon Dağılıma sahip altın çekirdeğine aittir 37
- Çizelge 8.1 :** RHIC enerjisinde, Wood-Saxon form faktörünün etkisi ile hesaplanmış müon çifti tesir kesitinin diğer teorik hesaplamalar ile karşılaştırılması..... 51
- Çizelge 8.2 :** LHC enerjisinde, Wood-Saxon form faktörünün etkisi ile hesaplanmış müon çifti tesir kesitinin diğer teorik hesaplamalar ile karşılaştırılması 51

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1 : LHC Tünel içerisindeki görünümü.....	4
Şekil 2.2 : CMS Algılayıcı.....	4
Şekil 2.3 : RHIC ikiz hızlandırıcılar	5
Şekil 3.1 : Dirac denizinde bir elektron-pozitron çiftinin oluşumu	11
Şekil 3.2a : Feynmann Diyagramları.....	12
Şekil 3.2b : Feynmann Diyagramları.....	12
Şekil 5.1 : Rölativistik hızlarda çarpışan iki ağır iyonun şematik gösterimi	22
Şekil 5.2 : RHIC enerjisindeki elektron-pozitron ve müon-antimüon çifti oluşma . olasılıklarının çarpışma parametresine bağlılığı.....	27
Şekil 6.1 : Gausyen yük dağılımı.....	31
Şekil 6.2 : Düzgün yük dağılımı	32
Şekil 6.3 : Wood-Saxon yük dağılımı.....	33
Şekil 6.4 : Fermi dağılımından elde edilen monopol ve dipol terimlerin gerçekçi yaklaşım ile karşılaştırılması	34
Şekil 7.1 : RHIC enerjisinde, müon çiftinin diferansiyel tesir kesidinin enerjisine göre değişimi üzerine form faktörleri etkisi	38
Şekil 7.2 : RHIC enerjisinde, müon çifti tesir kesitinin, hareketi doğrultusuna dik bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi	38
Şekil 7.3 : RHIC enerjisinde, müon çifti diferansiyel tesir kesitinin, hareketi	39
Şekil 7.4 : RHIC enerjisinde, müon çifti diferansiyel tesir kesitinin hızlılığın	40
Şekil 7.5 : LHC enerjisinde, müon çifti parçacığı tesir kesitinin, hareketi	41
doğrultusuna dik bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine . form faktörlerinin etkisi.....	41

Şekil 7.6	: LHC enerjisinde, müon çifti parçacığı tesir kesitinin enerjisine göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi	42
Şekil 7.7	: LHC enerjisinde, müon çifti parçacığı tesir kesitinin, hareket doğrultusundaki bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.....	42
Şekil 7.8	: LHC enerjisinde, müon çifti parçacığının hızlılığın (rapidity) fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesiti üzerine form faktörlerinin etkisi.....	43
Şekil 7.9	: RHIC enerjisinde, tau ve müon çifti parçacıklarının tesir kesitinin enerjisine göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.....	44
Şekil 7.10	: RHIC enerjisinde, tau ve müon çifti parçacıklarının tesir kesitinin, hareketi doğrultusuna dik bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi	45
Şekil 7.11	: RHIC enerjisinde, tau ve müon çifti parçacıklarının tesir kesitinin, hareketi doğrultusundaki bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi	45
Şekil 7.12	: RHIC enerjisinde, tau ve müon çifti parçacıklarının hızlılığın (rapidity) fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesiti üzerine form faktörlerinin etkisi.....	46
Şekil 7.13	: RHIC enerjisinde, elektron ve müon çifti parçacıklarının hızlılığın (rapidity) fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesiti üzerine form faktörlerinin etkisi.....	47

YÜKSEK RÖLATİVİSTİK HIZLARDA AĞIR İYON ÇARPIŞMALARI SONUCU MÜON ÇİFTİ ÜRETİMİ

ÖZET

Parçacık fiziği en temel düzeyde maddenin neden yapıldığını incelemektedir. Atomaltı ölçekte madde çok küçük kitleler ile bu küçük kitleler arasındaki geniş boşlukların birleşiminden oluşur. Temel parçacıkların kütle, spin, elektrik yükü gibi özelliklerine bağlı olarak pek çok çeşitleri bulunmaktadır. Parçacık fiziğinin yanıtlamaya çalıştığı diğer önemli soru ise bu temel parçacıkların birbirleri ile nasıl etkileştiğidir. Bilim insanları bu farklı özelliklerdeki temel parçacıkları ve aralarındaki etkileşimleri inceleyebilmek amacıyla dünyanın pek çok yerinde hızlandırıcılar kurmuşlardır. Günümüzde bu hızlandırıcılardan en çok yararlanılanlarından biri Brookhaven National Laboratory'de bulunan Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC), diğeri ise İsviçre'de bulunan Large Hadron Collider (LHC) hızlandırıcılarıdır. Hızlandırıcılarda ivme kazanan temel parçacıklar rölativistik hızlara ulaşmaktadır. RHIC'te tamamen iyonize edilmiş ağır atomlar kütle merkezi referans çerçevesinde 100 GeV enerji ile LHC'de ise tamamen iyonize edilmiş ağır atomlar kütle merkezi referans çerçevesinde nükleon başına 3400 GeV enerji ile çarpıştırılmaktadır. Bu yeni kuşak hızlandırıcılarda nükleer maddeyi yüksek sıcaklık ve yüksek yoğunluklarda incelemek mümkün olmuştur.

Bu çalışmadaki amaç, ultra rölativistik ağır iyonların çevresel (peripheral) çarpışmaları sonucu oluşan ağır lepton çiftlerinden müon - antimüonun tesir kesidini hesaplanmak ve diğer lepton çiftleri olan elektron-pozitron ve tau-antitau ile farklarını incelemektir. Ağır iyonlar ultra rölativistik hızlarda çevresel (peripheral) çarpışmalar yaptıklarında Lorentz boyca kısalmasına uğrarlar ve uçlarında çok şiddetli elektromanyetik alanlar oluşur. Bu alanlardan çok sayıda lepton çiftinin elektromanyetik olarak üretimi gerçekleşir. Bu olaylar bütünü Kuantum Elektrodinamiği kapsamında ele alınmaktadır. Daha önce yapılan çalışmalarda, serbest ve bağlı elektron-pozitron çiftlerinin tesir kesitleri düşük merteye kuantum elektrodinamik yani ikinci derece Feynman diyagramları kullanılarak hesaplanmıştır. Oluşan elektron-pozitron çiftlerinin Compton dalgaboyu çekirdek boyutlarından çok büyük olduğu için çekirdek form faktör etkisi ihmal edilebilmiştir. Ancak bu çalışmada, ağır leptonların Compton dalga boyları, çekirdeğin boyutundan küçük olduğu için "çekirdek form faktörleri" hesaplamalara dahil edilmiştir. Bir elektronun Compton dalga boyu yaklaşık $\lambda_c = 386$ fm mertebesindedir. Fakat müonun dalgaboyu 1.86 fm ve taunun dalgaboyu 0.11fm civarındadır. Ağır iyonların çaplarının yaklaşık 15 fm civarında olduğu göz önüne alınırsa, oluşan ağır leptonların iyon çekirdeği ile etkileşeceği ve çekirdeğin içinde zaman geçireceği öngörülebilir. Bu çalışmada özellikle müon- antimüon çiftlerinin oluşumu ile ilgili daha kapsamlı bir bilgiye sahip olmak amaçlanmıştır.

MUON PAIR PRODUCTION FROM ULTRA RELATIVISTIC HEAVY ION COLLISIONS

SUMMARY

The traditional goal of particle physics, in response to Newton's challenge, has been to identify what appear to be structureless units of matter and to understand the nature of the forces acting between them. Stated thus, the enterprise has a two-fold aspect, matter on the hand, forces on the other. The expectation is that the smallest units of matter should interact in the simplest way or, that there is a deep connection between the basic units of matter and the basic forces. To develop this relation Quantum fields are described [1].

High energy nuclear physics studies the behaviour of nuclear matter in energy regimes typical of high energy. The primary focus of this field is the study of heavy-ion collisions, as compared to lower atomic mass atoms in other particle accelerators. At sufficient collision energies, these types of collisions are theorized to produce the quark-gluon plasma. In peripheral nuclear collisions at high energies one expects to obtain information on the electromagnetic production of leptons and mesons which are not accessible in electron-positron colliders due to their much smaller luminosities.

The first heavy ion collisions at modestly relativistic conditions were undertaken at the Lawrence Berkeley National Laboratory, at Berkeley, USA, and at the Joint Institute for Nuclear Research, in Dubna, USSR. At the LBL, a transport line was built to carry heavy ions from the heavy ion accelerator HILAC to the Bevatron. The energy scale at the level of 1-2 GeV per nucleon attained initially yields compressed nuclear matter at few times normal nuclear density. The demonstration of the possibility of studying the properties of compressed and excited nuclear matter motivated research programs at much higher energies in accelerators available at BNL and CERN with relativistic beams targeting fixed target. The first collider experiments started in 1999 at RHIC and LHC begun colliding heavy ions at one order of magnitude higher energy in 2010.

Currently, high-energy physics experiments are being conducted at Brookhaven National Laboratory's Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) and in CERN's new Large Hadron Collider. The four primary experiments at RHIC study collisions of highly relativistic nuclei. Unlike fixed target experiments, collider experiments steer two accelerated beams of ions toward each other at (in the case of RHIC) fixed interaction regions. At RHIC, ions can be accelerated from 100 GeV/nucleon to 250 GeV/nucleon. Since each colliding ion possesses this energy moving in opposite directions, the maximum energy of the collisions can achieve a center of mass collision energy of 200 GeV/nucleon for gold and 500 GeV/nucleon for protons. The high-energy nuclear physics experiments at CERN use the ALICE (A Large Ion Collider Experiment) detector, which is designed to create Pb-Pb nuclei collisions at a center of mass energy of 2.76 TeV per nucleon pair.

QED fields is one of the oldest and well understood field theory. In this study we examine for strong electromagnetic fields which produce lepton pairs. The subject in this study is original in a way that QED will be tested for the strong electromagnetic fields. QED works very well for weak electromagnetic fields; however it is not clearly understood for strong electromagnetic fields. Heavy ions can be accelerated

up to the 3.5 TeV per nucleon energies, and the electromagnetic fields of the heavy ions reach extremely high values and from this field various particles are produced. Therefore calculated cross section values will be compared with experimental results and strong QED will be tested. The main goal is to understand the process of lepton pair production and to investigate what happened to matter shortly after the big-bang.

Another aim is this study to understand Form Factors effect at high energy collisions. A form factor is introduced in scattering problems to account for the spatial extent of the scatterer. The probability amplitude for a point-like scatterer is modified by a form factor, which takes into account the spatial extent and shape of the target. The scattering probability is expressed as a product of the probability for a point-like target multiplied by the square of the form factor. For example, in electron scattering at low energies, the cross section for a scattering from a point-like target is given by Rutherford scattering formula. If the target has a finite spatial extent, the cross section can be divided into, two factors, the Rutherford cross section and the form factor squared. In Coulomb scattering, the particular property of the spatial extent sampled is the charge distribution $\rho(r)$ for the object. Form factors are more general than just in nuclear physics, where measurements give information about charge distributions of nuclei. The form factors measured for electron scattering from nucleus gave some of the first evidence that they were composed of sub-structure. Form factors or structure factors, also arise in the scattering of X-rays from materials and allow the structure of the material to be deduced. At the mathematical form, form factors are really Fourier transforms.

In this study various form factors are examined. They are taken different values for different charge distributions. Three types of them are common in literature and they are examined in this study. When form factors are applied, energy and momentum values are changing for lepton pairs. Muon-antimuon pairs is main subject in this study. Form factors are applied muon-antimuon pair and also tau-antitau, electron-positron pairs. And also form factor effects are compared for each lepton pair.

When nucleus has Gaussian type of charge distribution, form factor takes the name of Gaussian Form Factor. Gaussian distribution is an exponential function because of that Gaussian Form Factor has much more effect on lepton pairs than other types of form factors.

The electrostatic potential energy, for an electron in a spherically symmetric charge distribution is a well known expression. Outside the nucleus, this expression reduces to the same potential as a point nucleus. For a homogeneous distribution within a nuclear radius R , the electrostatic potential can be calculated. There is a discontinuity in the charge distribution at the nuclear boundary leading to a discontinuity in the second derivative of the potential at $r = R$. This charge distribution defines the Uniform Form Factor.

The two parameter Fermi model gives a realistic description of the nuclear distribution and at the same time provides considerable flexibility in the analysis. For vanishing skin thickness in the formula, Fermi form reduces to the homogeneous distribution. The shape of the Fermi distribution is identical to that of the Wood-Saxon potential. The analogy between the nuclear distribution and potential is related to the short-range character of the strong interaction, which hold the nucleus together. Fermi distribution makes it possible to obtain good approximation for realistic behavior.

If we consider the radius of nucleus and Compton wavelength of the electron, it can be seen that electron wavelength is much more bigger than the atomic radius of nucleus. So they don't interact with each other. On the other hand tau and muon have smaller wavelength than the radius of nucleus and one can expected that interaction will occur. Applying form factors to the muon-antimuon and tau-antitau pairs it's possible to obtain more realistic results.

1. GİRİŞ

Ultra rölativistik ağır iyonların çarpışmaları pek çok teorik ve deneysel çalışmaya temel teşkil etmiştir. Rölativistik Ağır İyon Çarpıştırıcısı'nda (Relativistic Heavy Ion Collider-RHIC) 100 GeV enerjide ve Büyük Hadron Çarpıştırıcısı'nda (Large Hadron Collider-LHC) 3400 GeV enerjide tamamen iyonize olmuş ağır iyonlar kütle merkezi referans çerçevesinde çarpıştırılmaktadır. Bu deneylerin yapılmasındaki amaçlardan biri evrenin oluşumu sırasında ilk birkaç mikrosaniyelik zaman aralığındaki koşulları yeniden yaratabilmektir. Bu süreçte maddenin kuark-gluon plazması içerisindeki etkileşimlerinden elektron-pozitron, müon-antimüon gibi lepton çiftlerinin oluştuğu görülmüştür. QCD (Quantum Chromo Dynamics) çerçevesinde incelenen bu olay, ağır iyonların merkezsel çarpışmalar ile lepton çiftleri üretmesini açıklamaktadır [1].

Rölativistik ağır iyonların çevresel (peripheral) çarpışmalar yapması sonucu ise yine lepton çiftleri oluşumunu gözlemlemek mümkündür. Ancak çevresel yada uzaktan olarak adlandırılan bu çarpışmalarda elektron-pozitron, müon-antimüon gibi lepton çifti üretim süreci farklıdır. Elektromanyetik alanların etkileşmesi ile paraçacık üretiminin sözkonusu olduğu bu süreçler QED (Quantum Electrodynamics) çerçevesinde incelenir. Tamamen iyonize olmuş altın (Au) ve kurşun (Pb) gibi ağır çekirdekler ultra-rölativistik hızlara ulaştıklarında bu iyonların elektromanyetik alanları hızları ile orantılı olarak büyür [2]. Rölativistik hızlarda çarpışan ağır iyonlar Lorentz boyca kısalmasına uğramaktadır. Lorentz boyca kısalmasına uğrayan bu ağır iyonların etrafında kuvvetli elektromanyetik alanlar oluşur. Ağır iyon çarpışmaları sonucu kuvvetli elektromanyetik alanların oluşması, ayrıca α ince yapı sabiti ve Z çekirdeğin yükü olmak üzere $Z\alpha$ çarpım değerinin büyük olması çok sayıda foton alışverişi gerçekleşmesini sağlamaktadır. Ağır iyon çarpışmaları ile oluşan lepton çiftlerinin tesir kesitleri ikinci merteye Feynman diyagramları ile hesaplanacaktır. Bu yöntemde, pertürbasyon serilerindeki en düşük mertebeli sıfırdan farklı terimlerin iki ara fotonlu diyagramları temsil ettiği ve bu terimlerin elektromanyetik lepton çifti oluşumunu açıkladığı düşünülmektedir [3].

Ultra rölativistik ağır iyon çarpışmalarında lepton çifti üretimi, kuark gluon plazma halinin madde olarak tanımladığımız şekle bozunumunun nasıl olduğunu

inceleyebilme şansı vermektedir. Lepton çiftlerinin elektromanyetik olarak üretiminin kuark gluon plazma fazından gelen sinyalleri gizlediği düşünülmektedir. Bu nedenle elektromanyetik alandan lepton çifti üretiminin daha kapsamlı olarak incelenmesi, kuark gluon plazma durumunun incelenmesinde de yol gösterici olmaktadır.

Bu çalışma kapsamında ağır leptonlardan olan müon-antimüon oluşumunun tesir kesitleri QED Feynman diyagramları yardımı ile hesaplanmıştır. Elde edilen tesir kesiti ifadeleri 8 yada 10 boyutlu integraller şeklinde olduğundan analitik olarak çözümleri mümkün olmamaktadır. Bu sebeple nümerik olarak çözümleri gerekli olmuştur. Burada FORTRAN kodları kullanılarak ve Monte Carlo yöntemi ile bu integraller çözülmüştür.

Ağır lepton çiftleri olan müon-antimon ve tau-antitau'nun Compton dalga boyları çekirdeğin boyutundan küçük olduğu için aralarında etkileşmeler gerçekleşmektedir. Bu etkileşmeler form faktörü kavramıyla incelenmiş olup ağır lepton çiftlerinin farklı form faktörleri ve farklı enerjilerdeki davranışları birbirleri ile karşılaştırılmıştır. Çalışma, form faktörlerinin müon-antimüon için incelenmesi ve bu çiftin diğer lepton çiftleri ile karşılaştırılması açısından özgün değer taşımaktadır.

QED, daha önce zayıf elektromanyetik alanlar için incelenmiş olup başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Ancak QED'nin kuvvetli elektromanyetik alanlardaki davranışları hakkında halen kapsamlı açıklamalar bulunmamaktadır. Bu çalışma ile QED'nin kuvvetli elektromanyetik alanlardaki davranışının incelenmesine katkıda bulunmak amaçlanmaktadır.

2. PARÇACIK HIZLANDIRICILAR

2.1 Large Hadron Collider (LHC)

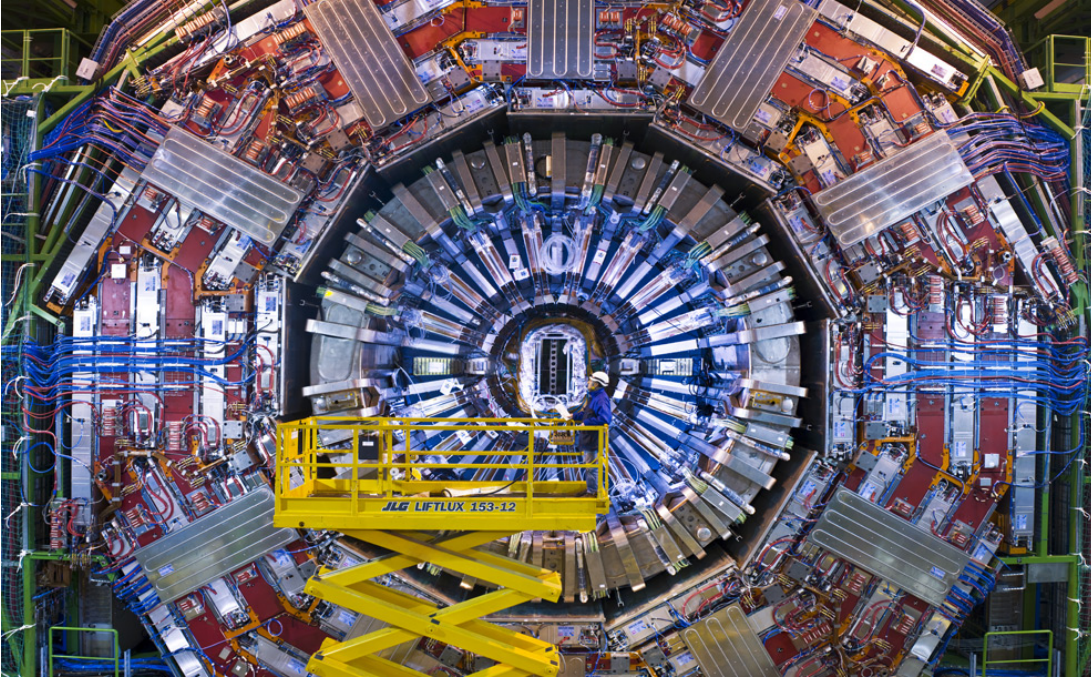
Büyük Hadron Çarpıştırıcısı 2008 yılında İsviçre CERN'de kurulmuştur. İsviçre-Fransa sınırında yerin 100 metre altında ve çevresi 27 km olan LEP (Large Electron-Positron Collider) tüneline devreye girmiştir. LHC dünyanın en büyük ve en güçlü parçacık çarpıştırıcısıdır. Kurulmasındaki amaç, fizikçilerin, parçacık fiziği ve yüksek enerji fiziği ile ilgili geliştirdiği teorileri test etmektir. Özellikle Higgs bozonunun varlığı yada yokluğunu test edebilmek ve süpersimetri teorileri tarafından öngörülen yeni parçacık ailelerinin varlığını araştırabilmek hedeflenmiştir. LHC'den 2013 yılında alınan veriler ile Higgs bozonunun tahmin edilen yapısı ile eşleşen bir parçacık bulunduğu teyit edilmiştir. LHC de 7 farklı dedektörden her biri farklı bir araştırmayı yapabilmek için tasarlanmıştır.

LHC de Higgs bozonunun yapısına benzer bir yapının dedekte edilmesinin dışında kuark-gluon plazma içerisinde oluşan bazı kompozit parçacıklar da tespit edilmiştir. Ayrıca, çok nadir olarak gözlenen B_s mezonunun iki müona bozunumu ilk kez gözlemlenmiştir ($B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$). Bu gözlem süpersimetri için büyük bir test olmuştur.

LHC kurulumu için 100 farklı ülkeden 10,000'ni aşkın mühendis ve bilim insanının yanı sıra pek çok üniversite ve laboratuvar görev aldı. LHC'de 2010 yılında 3.5 TeV enerjiye ve 2011-2012 yıllarında 4 TeV enerjiye ulaşılmıştır. Proton-proton çarpışmaları ana mod olmakla birlikte 2013 yılında protonlar kurşun (Pb) çekirdekleri ile çarpıştırılmış ve 2010-2011-2013 yıllarında kurşun-kurşun çekirdeklerinin çarpışmaları gerçekleşmiştir. LHC şu an geliştirilmek amacıyla kapatılmıştır ve 2015 başlarında 6.5 TeV enerjide yeniden çalışmaya başlaması hedeflenmektedir.



Şekil 2.1: LHC tüneli içerisindeki görünümü.



Şekil 2.2: CMS algılayıcı.

2.2 Rölativistik Ağır İyon Çarpıştırıcısı (RHIC)

RHIC, rölativistik ağır iyon çarpışması gerçekleştiren iki hızlandırıcıdan biri ve spin polarize proton çarpıştıran tek hızlandırıcıdır. Upton, New York'ta Brookhaven Ulusal Laboratuvarı'nda bulunmaktadır. RHIC'te yapılan çalışmaları uluslararası takımlar gerçekleştirmektedir. Yapılan çalışmalar, rölativistik hızlarda çarpıştırılan ağır iyonlar sayesinde Büyük Patlamadan hemen sonraki evrenin ilk durumlarında

maddenin yapısı hakkında fizikçilere fikir vermiş, ayrıca polarize spinli protonların çarpıştırılması sayesinde protonun spin yapısı keşfedilmiştir.

RHIC, şu anda dünyadaki ikinci en büyük ağır iyon çarpıştırıcısıdır. 2010 yılında LHC de ağır kurşun iyonları RHIC'ten daha yüksek enerjilerde çarpıştırılmıştır.

2010 yılında RHIC'te çalışan fizikçiler 345 MeV enerjide çarpıştırılan altın (Au) iyonlarının ulaştığı sıcaklığı ölçmüş ve bu sıcaklıkta "normal madde" nin bozunarak akışkan kuark-gluon plazmanın oluşmuş olduğunu bildirmişlerdir.



Şekil 2.3: RHIC ikiz hızlandırıcılar.

3. DIRAC DALGA DENKLEMİ

Durgun kütle enerjisinden çok daha yüksek enerjilerde gerçekleştirilen deneyleri açıklamak için rölativistik olmayan Schrödinger denklemi yeterli olmamaktadır. Bu bölümde rölativistik dalga denklemlerinden olan Dirac [spin (1/2) parçacıklar için] denkleminin çözümleri ve Feynman negatif enerji yorumları ele alınacaktır.

3.1 Dirac Denklemi Ve Çözümü

Rölativistik dalga denklemi oluşturabilmek için doğru bir rölativistik enerji-momentum ilişkisi yazılmalıdır. Bunun için öncelikle uzay ve zaman bileşenlerini içeren dört vektör momentum tanımlanır [1].

$$p^\mu = (E, p) \quad (3.1)$$

$$p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - p^2 = m^2 \quad (3.2)$$

Denklem (3.1) yeniden yazılarak enerjinin karesi ifadesi elde edilir.

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (3.3)$$

Enerji ve momentum operatörler ile tanımlanabilir.

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} ; \quad p \rightarrow -i \nabla \quad (3.4)$$

(3.4) denkleminde enerji ve momentum ifadeleri operatörler cinsinden yazılabilir.

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 t^2} = (-\nabla^2 + m^2) \phi \quad (3.5)$$

Klein-Gordon denklemi (3.5) elde edilmiş olur. Denklemden görülen $\phi(x,t)$ skaler dalga fonksiyonudur. Klein-Gordon denklemi spin-0 bozonları tanımlamak için uygundur. Bu denklem enerji eşitliği için yeniden yazıldığında enerjinin negatif değerli çözümünün ihmal edilemeyeceği görülür.

$$E = \pm(p^2 + m^2)^{1/2} \quad (3.6)$$

Klein-Gordon denklemi negatif enerji çözümünün yanı sıra negatif olasılıklar da barındırmaktadır. Dirac, negatif olasılık problemini çözebilmek ve $\rho \geq 0$ olasılık yoğunluğunu elde edilmek için, $\frac{\partial}{\partial t}$ terimini içeren lineer bir denklem önermiştir.

$$\frac{i\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = \left[-i \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + \beta m \right] \Psi(x,t) \quad (3.7)$$

$$\frac{i\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = [-i\alpha\nabla + \beta m] \Psi(x,t) \quad (3.8)$$

(3.7) denklemi Dirac denklemidir. Bu denklem oluşturulduktan sonra, amaç α ve β ifadelerini tanımlayabilmektir. Bu tanımlamaların sağlanabilmesi için, rölativistik dalga mekaniğinin ihtiyaçları göz önüne alınmalıdır, yani yeni tanımlanacak eşitlik Klein-Gordon denkleminin çözümünü sağlamalı ayrıca Lorentz dönüşümleri altında eşdeğişken olmalıdır [1].

$$-\frac{\partial^2\Psi}{\partial^2 t^2} = (-\nabla^2 + m^2) \Psi \quad (3.9)$$

$$\frac{i\partial\Psi}{\partial t} = (-i\nabla.\alpha + \beta m) \Psi \quad (3.10)$$

(3.9) ve (3.10) ile verilen denklemler düzenlenebilir.

$$\left(\frac{i\partial}{\partial t} \right)^2 \Psi = (-i\alpha\nabla + \beta m)(-i\alpha\nabla + \beta m)\Psi \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{i\partial}{\partial t} \right)^2 \Psi = -\sum \frac{\partial^2}{(\partial x')^2} + m^2 \Psi \quad (3.12)$$

Yapılan dönüşümler ile (3.11) ve (3.12) eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerde bulunan α ve β klasik komüte eden nicelikler değildir. Dolayısı ile α ve β için aşağıda belirtilen özellikler geçerli olur.

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, (i = 1, 2, 3) \quad (3.13)$$

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0, i \neq j \quad (3.14)$$

Bu özellikler (3.10) nolu denkleme uygulanarak çözüm yapılır. Ayrıca burada

$(\alpha_i)^2 = (\beta)^2 = 1$ olduğu unutulmamalıdır. Böylece α ve β için geleneksel seçimler yapılabilir, Dirac koşulları için mümkün en küçük boyutlu matrisler 4×4 boyutlu olmaktadır.

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$\sigma_i, 2 \times 2$ Pauli matrisidir. Pauli matrislerinin varlığı, Dirac çözümünün spini ($1/2$) olan parçacıklar için uygun olduğunu gösterir. 1 ise 2×2 uniter matrisi ifade etmektedir.

3.2 Serbest Parçacık Çözümleri

Dirac Hamiltonyeni 4×4 bir matris içermektedir. Bu sebeple Dirac dalga fonksiyonu ψ 'nin dört bileşenli kolon vektörü (Dirac spinör) olarak ele alınması gerekli olur.

$$\psi = \chi. (\text{düzlem dalga}) \quad (3.16)$$

Dirac denkleminin çözümleri için dalga fonksiyonu daha açık bir şekilde yazılabilir.

$$\psi = w e^{-ip \cdot x} \quad (3.17)$$

w dört bileşenli spinör, $p^\mu = (E, p)$ dört vektör momentumudur. Böylece düzlem dalga tanımlanmış olur. Bu düzlem dalga ifadesi Dirac denkleminde yerine yazılır.

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i \alpha \cdot \nabla + \beta m) \psi \quad (3.18)$$

w spinör bileşenlerine ayrılır.

$$w = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Böylece matris denklemi oluşturabilir.

$$E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m1 & \sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & -m1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

(3.20) denklemi iki kısma ayrılarak yazılabilir.

$$(E - m)\phi = \sigma \cdot p \chi \quad (3.21)$$

$$(E + m)\chi = \sigma \cdot p \phi \quad (3.22)$$

Matris denklemi çözüldüğünde dört bileşenli spinör elde edilir.

$$w = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\sigma \cdot p}{E + m} \phi \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Denklem (3.22)'den elde edilen χ ifadesi (3.21) denkleminde yerleştirilir ve $(\sigma \cdot p) = p^2 1$ özelliğini de göz önünde bulundurulursa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$(E - m)(E + m)\phi = p^2 \phi \quad (3.24)$$

(3.24) eşitliği ile ifade edilen çözüm Klein-Gordon denkleminde olduğu gibi pozitif ve negatif enerji değerlerini barındırır. Ancak Dirac denklemi, olasılık yoğunluğunun negatif değer alması problemini çözmüştür [1].

$$\rho = \psi^\dagger(x) \psi(x) \quad (3.25)$$

$\psi^\dagger$ ifadesi ψ 'nin Hermitsel konjugesidir. (3.25) denklemi bileşenler cinsinden yazılabilir.

$$\rho = \begin{pmatrix} \psi_1^* \psi_2^* \psi_3^* \psi_4^* \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Olasılık yoğunluğu bileşenler cinsinden tanımlandıktan sonra, olasılık yoğunluğu için toplam yazılır.

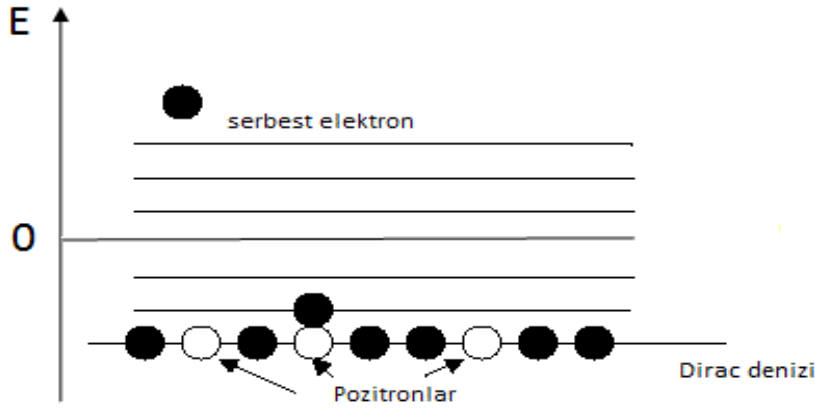
$$\rho = \sum_{a=1}^4 |\psi_a|^2 > 0 \quad (3.27)$$

Böylece ρ skaler yoğunluğunun pozitif değer aldığı görülmektedir.

Dirac çözümü negatif enerji sorununu giderememiş olsa da olasılık yoğunluğunu pozitif kılarak probleme kısmi bir çözüm getirmekte ve bu yönüyle Klein-Gordon çözümünden farklılık göstermektedir.

3.3 Dirac Ve Feynman Negatif Enerji Çözümü Yorumları

Dirac çözümü pozitif olasılık sağlamış ancak negatif enerji çözümlerini ortadan kaldırmamıştır. Bu sebeple Dirac negatif enerji çözümlerine yeni bir yorum getirmiştir. $E = 0$ enerji düzeyinde pozitif ve negatif enerji değerleri simetriktr. Dirac "vakum durumu"nın negatif enerjili elektronlardan oluştuğunu ifade etmiştir. Vakumda negatif enerjili bir elektronun yokluğunda, normal vakuma göre bir boşluk olur. Bu boşluk elektronun pozitif enerjili ve pozitif yüklü haline karşılık gelir. Bu ifade, teorik fizikte "antiparçacık" olarak tanımlanır. Böylelikle Dirac çözümü anlamlı hale gelir. Eğer negatif enerjili bir durumdaki elektron uyarılıp pozitif enerjili hale gelirse bir pozitif enerjili elektron ve vakumda pozitif enerjili pozitron boşluğu oluşur. Bu fiziksel olarak elektron-pozitron (e^+e^-) çiftinin oluşumuna karşılıktır. Dirac negatif enerji çözümleri spin(1/2) olan parçacıkları yani fermiyonları tanımlar. Ancak spini sıfır olan parçacıklara yani bozonlara uygulanamaz. Bozonlar Pauli Dışlama prensibinin dışında kalan parçacıklardır [1].

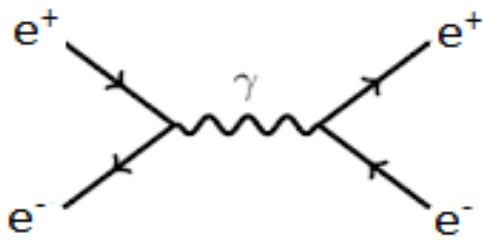


3.1: Dirac denizinde elektron pozitron çifti oluşumu.

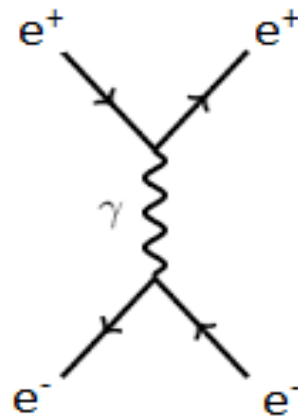
Dirac yorumu spin-0 olan parçacıklara (bozonlara) uygulanamadığından Feynman her iki durumu da kapsayan (spini(1/2) ve spini 0 olan durumları) bir yorum getirmiştir.

Bu yorum negatif enerji çözümlerini , bozonlar için uygun olmayan Dirac denizi ile açıklamaz.

Feynman, temel olarak iki kavram tanımlamıştır. Bu kavramlardan biri negatif enerjili parçacık çözümlerinin zamanda geriye doğru yayılım göstermesi diğeri ise pozitif enerjili antiparçacık çözümlerinin zamanda ileriye doğru yayılım göstermesidir [1]. Kuantum elektrodinamiğinde sıklıkla kullanılan iki adet Feynman diagramı bulunmaktadır. Bu diagramlar aşağıdaki şekillerde gösterilmektedir.



Şekil 3.2.a): Elektron-pozitron çifti.



Şekil 3.2.b): Elektron saçılması.

Şekil (3.2.a) çift yokoluşu ve sonrasında yeniden çift oluşumunu göstermektedir. Ara süreçte görülen foton, gerçek fotonu temsil eder. Şekil (3.2.b)'de ise sanal foton aracılığı ile elektron ve pozitronun etkileştiği saçılma süreci görülmektedir.

Feynman yorumu pozitif enerji çözümleri için aşağıdaki gibi ele alınmıştır [1].

$$p^0 = +(p^2 + m^2) = E > 0 \quad (3.28)$$

$$p^0 = +m, p^0 = 0 \quad (3.29)$$

eşitlikleri elde edilir. Durgun haldeki, pozitif enerjili parçacık için yeni bir denklem oluşturulur.

$$m \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m1 & \sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & -m1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$$\phi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ spin yukarı (spin up)} \quad (3.31)$$

$$\phi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ spin aşağı (spin down)} \quad (3.32)$$

Elde edilen son çözümlerle de Dirac denkleminin spin(1/2) olan parçacıkları tanımladığı görülmektedir. Momentumu sıfırdan farklı olan pozitif enerjili parçacık için spinörler bulunabilir.

$$p \neq 0 ;$$

$$E = +(p^2 + m^2)^{1/2} = p^0 \quad (3.33)$$

$$w^{1,2} = \left(\frac{1}{\sigma p} \right) \phi^{1,2} \quad (3.34)$$

(3.34) denklemi ile pozitif enerjili spinör elde edilmiş olur. Negatif enerjili spinörü elde etmek için durgun enerji negatif olarak tanımlanır.

$$p^0 = -(p^2 + m^2) = -E \quad (3.35)$$

$$p^0 = -m, p = 0 \quad (3.36)$$

$$-m \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m1 & 0 \\ 0 & -m1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

(3.37) denkleminin çözümü ile negatif enerjili spinörler elde edilir.

$$w^{3,4} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot p}{E + m} \chi^{1,2} \\ \chi^{1,2} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

$$\chi^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \chi^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

(3.39) denklemi negatif enerjili spinörler için yazılmıştır. Burada dikkat edilmesi gerekli bir diğer nokta "spin yukarı" durumunun yokluğunun "spin aşağı" durumunun varlığına karşılık gelmesidir. Bu ifadenin fiziksel anlamı her parçacığın bir karşıt parçacığı vardır şeklinde yorumlanır.

4. KUANTUM ALANI

4.1 Lagrange-Hamilton Formu

Parçacıkları ve alanları , klasik ve kuantum mekaniksel özellikleri ile tanımlayarak, matematiksel olarak doğru sonuçlar verebilecek bir çalışma alanı gerekli olmuştur. Aslında böyle bir formalizm daha öncede mevcuttu . Bu klasik mekanikte var olan ve Lagrange terimleri ile ifade edilebilen Hamilton prensibidir.

Lagranjyen formülasyonu , Newton mekaniğinden oldukça farklıdır. Lagrange yada Newton bakış açısıyla klasik mekaniksel bir sistemde çözüm yapılabilir ve aynı sonuçlar bulunur. Ancak Newton mekaniği hareket denklemlerini esas alırken , Lagrange kuvvetlerin potansiyellerini esas alır. Lagrange, parçacığın tüm yollar arasından en uygun (en kısa) olanı tercih edeceğini kabul eder ve böylece S hareket integrali yazılabilir [1].

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (4.1)$$

$$L = T - V \quad (4.2)$$

(4.1) denkleminde minimum (haraketi) S'yi bulabilmek için aşağıdaki yol izlenir.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}(t) dt \quad (4.3)$$

$$\delta \dot{q}(t) = d \left(\frac{\delta q(t)}{dt} \right) \quad (4.4)$$

(4.4) eşitliği (4.3) denklemine yerleştirilir.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta q(t) \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right) \right] dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right] \quad (4.5)$$

(4.5) eşitliğinde minimum yolu hesaplayabilmek için t_1 ile başlayıp t_2 ile biten tüm yollar üzerinden integral alınır. Bu integral işlemi yapılmadan önce aşağıda (4.6) ile gösterilen eşitlik tanımlanmalıdır.

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (4.6)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta q(t) \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right] = 0 \quad (4.7)$$

(4.7) eşitliğinde $\delta q(t)$ 'ye keyfi bir değer verilir.

$$\left[\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right] = 0 \quad (4.8)$$

(4.8) ile ifade edilen Euler-Lagrange hareket denklemi elde edilir.

Buraya kadar klasik mekanikte mevcut olan Euler-Lagrange denkleminin elde edilmesine değinildi. Şimdi ise Lagrange- Hamilton yaklaşımının alanlar için nasıl kullanıldığına değinelecektir. Bunun için öncelikle sonlu sistemin limiti alınarak sürekli sistem haline getirilmesi gerekmektedir.

$$\{q_r(t); r=1,2,\dots,N\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \phi(x,t) \quad (4.9)$$

N serbestlik derecesi ve x yerdeğiştirmeyi ifade etmektedir. $N \rightarrow \infty$ üzerinden limit alınırsa her x noktası sonsuz serbestlik derecesine sahip sürekli bir nokta olacaktır. Bu aşamadan sonra Lagrange yoğunluğu tanımlanmaktadır.

$$L = \int \ell dx \quad (4.10)$$

$$\ell = \ell \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \dot{\phi} \right) \quad (4.11)$$

(4.8) denkleminde (4.10)'daki langranjyen yoğunluğu yerleştirilir.

$$\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \quad (4.12)$$

Böylece Euler- Lagrange alan denklemi (4.12) elde edilmiş olur. Euler -Lagrange alan denklemi rölativistik formda yazılabilir [1].

$$\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad ; \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (4.13)$$

Buradaki önemli nokta, elektromanyetik etkileşimin teorisinin içine nasıl katılacağıdır. Kuantum mekaniğindeki "gauge (ayar) prensibi" genel (uzay zamandan bağımsız) U(1) faz değişmezinden, yerel U(1) (uzay zamana bağlı) faz değişmezine geçiş sağlar. Yerel değişmezler elektromanyetizma için oldukça önemlidir, ayrıca temel parçacıklar arasındaki etkileşimi anlamamızı sağlar. Kuantum alan teorisinde de aynı prensip geçerli olup elektromanyetik etkileşimlerin şekillenmesini sağlamaktadır..

Etkileşimsiz durumda, Dirac alanında Lagranjyen U(1) transformasyonu altında değişmez özelliğe özelliğe sahiptir. Bu özellik "genel değişmezlik" olarak tanımlanır. Elektromanyetik etkileşimi tanımlayabilmek için genel değişmez yerel değişmeze dönüştürülür. Ayrıca Dirac Lagranjyen'inin yerel U(1) faz transformasyonu altında değişmez olduğu bilinmektedir.

$$L_D = \bar{\Psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi \quad (4.14)$$

Lagranjyene aşağıdaki eşitliklerde verilen ayar dönüşümleri uygulanır.

$$\Psi(x,t) \rightarrow \Psi'(x,t) = e^{-ie \cdot x} \Psi(x,t) \quad (4.15)$$

$$\partial_\mu \rightarrow \hat{D}^\mu = \partial^\mu + ie \hat{A}^\mu \quad (4.16)$$

$$\hat{A}^\mu \rightarrow \hat{A}'^\mu = \hat{A}^\mu + \partial^\mu \hat{X} \quad (4.17)$$

Bu dönüşümler altında Lagranjyen bir etkileşim terimi kazanır.

$$L_D \rightarrow L_D + L_{\text{int}} \quad (4.18)$$

$$L_{\text{int}} = -e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \hat{A}^\mu \quad (4.19)$$

QED Lagranjyen;

$$L_{QED} = L_{\text{LEPTON}} + L_{\text{MAXWELL}} + L_{\text{INT}} \quad (4.20)$$

$$L_{QED} = \bar{\Psi}(\hat{\partial} - m_e)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu \quad (4.21)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.22)$$

$F_{\mu\nu} \rightarrow$ elektromanyetik alan tensörü

$\Psi \rightarrow$ lepton çifti için dalga fonksiyonu

$A_\mu \rightarrow$ elektromanyetik dört vektör potansiyel

5. LEPTON ÇİFTİ ÜRETİMİ

5.1 Pertürbatif Terimlerin Elde Edilmesi

Bu çalışma boyunca amaçlanan, lepton çifti oluşumunu yarı klasik formalizm kullanarak açıklayabilmektir. Potansiyeller için kaynak akımlar, iki ağır iyonun yük dağılımıdır. Lepton çifti için yarı klasik Lagranjyen yoğunluğu ise bir önceki bölümde elde edilmişti.

$$L_{\text{int}}(x) = -\bar{\Psi}(x)\gamma_{\mu}\Psi(x)A^{\mu}(x) \quad (5.1)$$

Eşitlik (5.1) ile verilen Lagranjyen yoğunluğu üç temel kabulle Schrödinger resmindeki hareket denklemlerinin elde edilmesini sağlar [2].

i) Çok sayıda elektronun zamana bağlı durumunu temsil etmek için $\Phi(t)$ kullanılarak, yarı klasik hareket yazılır;

$$S = \int d^4 \langle \Phi(x) | L_0 + L_{\text{int}} | \Phi(x) \rangle \quad (5.2)$$

Denklemdaki L_0 ise etkileşimsiz Lagranjyendir;

$$L_0 = \bar{\Psi}(x)(\gamma_{\mu}i\partial^{\mu} - m)\Psi(x) \quad (5.3)$$

eşitliği ile belirtilen etkileşimsiz fermiyon Lagranjyendir.

ii) Başlangıç vektörünün $|0\rangle$, Slater determinantını tanımladığı kabul edilir.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\Phi(t)\rangle \rightarrow |0\rangle \quad (5.4)$$

Çift oluşumunun yalnızca vakum durumunun dışında olduğunu kabul edersek ve $|0\rangle$ vakum (boşluk) durumu olarak seçersek (5.4) eşitliği için bir referans durumu tanımlamış oluruz. Böylece tek parçacık durumları için χ_q^+ ve χ_q^- , tam ve ortonormal bir sete karşılık gelen başlangıç Hamiltonyeni aşağıdaki koşulları sağlar [2].

$$H_0 \left| \chi_q^{(\pm)} \right\rangle = E_q^{(\pm)} \left| \chi_q^{(\pm)} \right\rangle \quad (5.5)$$

$$E_q^{(\pm)} = \pm (m + q^2)^{1/2} \quad (5.6)$$

$$H_0 = \alpha \cdot p + m_0 \quad (5.7)$$

$$\sum_q \left| \chi_q^+ \right\rangle \left\langle \chi_q^+ \right| + \left| \chi_q^- \right\rangle \left\langle \chi_q^- \right| = 1 \quad (5.8)$$

Burada $\left| \chi^+ \right\rangle$ tek paraçacık ve $\left| \chi^- \right\rangle$ tek antiparaçacık durumunu göstermektedir.

iii) Eşitlik (5.4) 'deki durumların zamanla değişiminden sorumlu olan operatörlerin üniter olduğu kabul edilir.

$$\left| \Phi(t) \right\rangle = (K, -\infty) \quad (5.9)$$

$$K^+ K = K K^+ \quad (5.10)$$

(5.10) denkleminle gösterilen birimsel operatör zamanla evrilme operatörüdür.

Haraket denklemi aşağıda görüldüğü gibi yazılabilir.

$$H(x)K(t, t') = i\partial_t K(t, t') \quad (5.11)$$

Denklem (5.11)'de tanımlanan Hamilton ifadesi aşağıdaki eşitliklerde daha açık şekilde yazılmıştır.

$$H(x) = H_0(x) + V(x) \quad (5.12)$$

$$H_0(x) = -i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \gamma_0 m \quad (5.13)$$

$$V(x) = -\vec{\alpha}\vec{A}(x) + A_0(x) \quad (5.14)$$

Yukarıdaki kabullenmeler yapıldıktan sonra sürecin her aşaması (5.11) denkleminin çözümünden elde edilebilir. Bu pertürbatif çözümler H_{int} terimi için seriye açılır. Lagranjyenin etkileşim terimini kazanmış olması Hamiltonyeninde etkileşim terimine sahip olacağının bir göstergesidir.

$$\begin{aligned}
K(t, \infty) = & K(t_0, -\infty) + (-i) \int_{-\infty}^t d\tau K_0(t, \tau) V(\tau) K_0(\tau, -\infty) \\
& + (-i)^2 \int_{-\infty}^t d\tau' \int_{-\infty}^t d\tau K_0(t, \tau) V(\tau') K_0(\tau', -\infty) + \dots
\end{aligned} \tag{5.15}$$

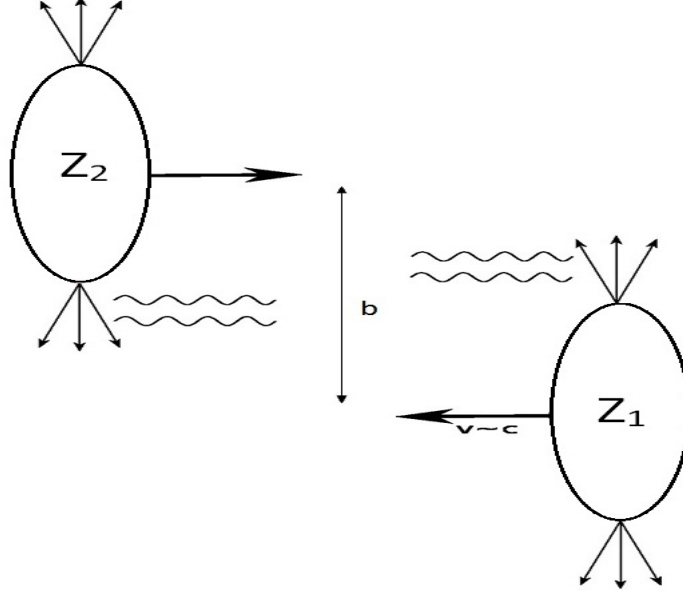
Böylece en düşük mertebeli terim elde edilir [2].

$$K_0(t, t') = \exp[-iH_0(t - t')] \tag{5.16}$$

Denklem (5.15) ilk terimlerinden gelecek katkı sıfırdır ve çözümlerinde enerji ve momentum korunmaz. Bu nedenle çözümler ikinci dereceden terimlere indirgenir. Evrimleşme operatörünün seriye açılması ile Schrödinger çerçevesinden , etkileşim çerçevesine geçmek mümkün olmuştur. Ağır iyonların çevresel çarpışmalar ile lepton çifti üretimi incelenirken kullanılması gerekli çerçeve , etkileşim çerçevesidir.

Parçacıkların, alanlar ile etkileşmesi sonucunda saçılma veya yeni parçacıkların yaratılması gibi süreçler meydana gelir. Bu süreçlerle ilgili Lagranjyen yoğunluğu ise önceki bölümlerde elde edilmişti. Özetlenecek olursa, bu bölümde elektromanyetik çift oluşum sürecinin hareket denklemleri yazılmıştır. Euler-Lagrange denklemine, bir önceki bölümde elde edilen son Lagranjyen yoğunluğu ifadesi yazılarak çözüm yapılmıştır.

5.2 Tesir Kesitlerinin Hesaplanması



Şekil 5.1: Rölativistik hızlarda çarpışan iki ağır iyonun şematik gösterimi.

Rölativistik zıt yönlü v hızları ile çarpışan iki ağır iyonun yörüngeleri düz ve saçılma parametresi b olarak ifade edilir. Burada $\hbar = m = e = c = 1$ olarak alınır. Ağır iyonlar kütle merkezi referans sisteminde hareket etmektedir.

Durgun sistemde $(0, b/2, 0)$ konumundaki çekirdeğin dört vektör potansiyeli sadece skaler potansiyel (Coulomb potansiyeli) cinsinden yazılır.

$$A'_0 = \frac{-Ze}{x'^2 + \left[y'^2 + \frac{b^2}{4}\right] + z'^2}, \quad \vec{A}' = 0 \quad (5.17)$$

Denklem (5.17) üzerine Fourier dönüşümleri uygulanır böylece potansiyeller momentum uzayında yazılır. Bu potansiyeller Lorentz dönüşümleri yardımı ile çarpışma sistemine genelleştirilir. Sistemin toplam potansiyeli iki çekirdekten gelen potansiyel katkılarının toplanması ile elde edilir.

$$A'' = A''(1) + A''(2) \quad (5.18)$$

(1) numaralı çekirdeğin momentum uzayında vektör potansiyelinin sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$A_0(1) = -8\pi^2 z \gamma^2 \frac{\delta(q_0 - \beta q_z)}{q_z^2 + \gamma^2(q_x^2 + q_y^2)} \exp\left[i \vec{q}_\perp \cdot \frac{\vec{b}}{2}\right] \quad (5.19)$$

$$A^z(1) = v A^0(1) \quad (5.20)$$

$$A^x(1) = A^y(1) = 0 \quad (5.21)$$

Yukarıdaki denklemlerin çıkarılışı için [3] nolu kaynaktan yararlanılmıştır. Burada γ Lorentz faktörüdür.

$b \rightarrow -b$ ve $v \rightarrow -v$ dönüşümleri uygulanırsa, diğer çekirdeğin potansiyelide aynı yöntemle elde edilebilir.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_0(0, t) K(t, -t) |0\rangle \quad (5.22)$$

Etkileşim çerçevesinde vakum durumunun zamanla evrilmeSİ eşitlik (5.22) ile gösterilmiştir. Bu tanımlamalar yapıldıktan sonra toplam tesir kesiti yazılabilir.

$$\sigma = \int d^2 b N(b) \quad (5.23)$$

Eşitlik (5.23) ise toplam tesir kesiti ifadesidir. [3]

Tesir kesiti S geçiş matrisi cinsinden yazılabilir.

$$\sigma = \int d^2 b \sum_{k>0} \sum_{q<0} \left| \langle \chi_k^+ | S | \chi_q^- \rangle \right|^2 \quad (5.24)$$

k üzerinden alınan toplam Dirac denizinde bulunmayan durumların toplamını, q üzerinden alınan toplam ise Dirac denizindeki durumların toplamını gösterir. $|q\rangle = |\chi_q^{(-)}\rangle$ antiparçacığın durum vektörü, $|k\rangle = |\chi_k^{(+)}\rangle$ parçacığın durum vektörüdür. Pertürbasyon serisinin S matrisi cinsinden yazılması mümkündür.

$$\begin{aligned} \langle \chi_k^+ | S | \chi_q^- \rangle &= (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \langle \chi_k^+ | K_0(0, \infty) K_0(\infty, \tau) \left[\begin{array}{c} V_1(\tau) K_0(\tau, \tau') V_2(\tau') + \\ V_2(\tau) K_0(\tau, \tau') V_1(\tau') \end{array} \right] \\ &\quad \times K_0(\tau', -\infty) K_0(-\infty, 0) | \chi_q^{(-)} \rangle \end{aligned} \quad (5.25)$$

Böylece toplam tesir kesiti yeniden yazılabilir.

$$\sigma = \frac{1}{4v^2} \sum_{\sigma_k, \sigma_q} \int \frac{d^3 k d^3 q d^2 p_{\perp}}{(2\pi)^8} \times \left| A^{(+)}(k, q: p_{\perp}) + A^{(-)}(k, q: k_{\perp} + q_{\perp} - p_{\perp}) \right|^2 \quad (5.26)$$

5.3 Tesir Kesitinin Çarpışma Parametresine Bağlılığı

Müon çifti üretiminde, diferansiyel tesir kesitinin çarpışma parametresine bağlılığı söz konusudur.

$$\frac{d\sigma}{db} = \frac{1}{4v^2} \sum_{\sigma_k, \sigma_q} \int \frac{d^3 k d^3 q d^2 p_{\perp} d^2 p'_{\perp}}{(2\pi)^9} b J_0(b \left| \vec{p}_{\perp} - \vec{p}'_{\perp} \right|) \quad (5.27)$$

Eşitlik (5.27) ile ifade edilen diferansiyel tesir kesiti için tüm çarpışma parametreleri üzerinden analitik olarak integral alınır.

$$\sigma = \frac{1}{4\beta^2} \sum_{\sigma_k, \sigma_q} \int \frac{d^3 k d^3 q d^2 p_{\perp}}{(2\pi)^8} \times \left| A^{(+)}(k, q: \vec{p}_{\perp}) + A^{(-)}(k, q: \vec{k}_{\perp} - \vec{p}_{\perp}) \right|^2 \quad (5.28)$$

denklemi elde edilmiş olur. Çarpışma parametresine bağlı diferansiyel tesir kesitinin daha ayrıntılı incelenmesi (EK A)'da verilmiştir.

Çarpışma parametresine bağlı olarak tesir kesidinin hesaplanması zor olduğundan bugüne kadar yapılan pek çok çalışmada bu hesaplamadan kaçınılmıştır. Hesaplamanın zorluğunun nedeni ise $j_0(qb)$ fonksiyonunun hızlı salınım (osillation) yapan bir fonksiyon oluşudur.

Fonksiyonun hızlı salınım yapması özellikle büyük saçılma parametrelerinde hesaplamayı zorlaştırmaktadır. Daha önce yapılan çalışmalarda uygulanan bir yöntem, Monte Carlo tekniklerine $d^2 p'_{\perp}$ integralini ekleyerek, (5.27) eşitliğindeki integrasyonun doğrudan hesaplanmaya çalışılmasıdır. Bu hesaplamayı gerçekleştirebilmek için 100 milyon Monte Carlo noktası denenmiş ve böylelikle küçük çarpışma parametreleri için ölçülebilir doğrulukta sonuçlar elde edilmiştir. Ancak büyük çarpışma parametrelerinde bir yaklaşıklığa ulaşamamıştır [4].

Bu zorluğun üstesinden gelebilmek için integral denklem (5.29)'de gösterilen şekilde bölünmüştür.

$$\frac{d\sigma}{db} = \int_0^{\infty} dq qb J_0(qb) F(q) \quad (5.29)$$

$F(q)$ burada dokuz katlı bir integraldır .

$$\begin{aligned} & \left\{ F\left[\frac{1}{2}(\vec{Q}-\vec{q}); w_1\right] F\left[-\vec{K}; w_2\right] \tau_{kq}\left[\vec{k}_{\perp}-\frac{1}{2}(\vec{Q}-\vec{q}); +v\right] \right. \\ & \left. + F\left[\frac{1}{2}(\vec{Q}-\vec{q}); w_1\right] F\left[-\vec{K}; w_2\right] \tau_{kq}\left[\vec{k}_{\perp}-\vec{Q}; -v\right] \right\} \\ & \left\{ F\left[\frac{1}{2}(\vec{Q}+\vec{q}); w_1\right] F\left[-\vec{q}-\vec{K}; w_2\right] \tau_{kq}\left[\vec{k}_{\perp}-\frac{1}{2}(\vec{Q}+\vec{q}); +v\right] \right. \\ & \left. + F\left[\frac{1}{2}(\vec{Q}+\vec{q}); w_1\right] F\left[-\vec{q}-\vec{K}; w_2\right] \tau_{kq}\left[\vec{k}_{\perp}+\vec{q}-\vec{K}; -v\right] \right\} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Eşitlik (5.29) için değişken dönüşümleri yapılır.

$$\vec{p}_{\perp} = \vec{k}_{\perp} - \frac{1}{2}(\vec{Q}-\vec{q}) \quad (5.31)$$

$$\vec{q}_{\perp} = \vec{k}_{\perp} - \frac{1}{2}(\vec{Q}-\vec{q}) + \vec{K} \quad (5.32)$$

$$\vec{p}_{\perp}' = \vec{k}_{\perp} - \frac{1}{2}(\vec{Q}+\vec{q}) \quad (5.33)$$

Ayrıca $F(q)$ fonksiyonunun hesaplanması için Monte Carlo tekniği (EK.C) kullanılarak, denklem (5.30)'daki dokuz katlı integrali çözmek mümkün olabilmıştır. Bu hesaplamaların sonucu aşağıdaki formül elde edilir.

$$F(q) = F(0)e^{-aq} = \sigma_T e^{-aq} \quad (5.34)$$

Ref [4]'te, $F(q)$ fonksiyonunun eğimi hesaplanmış ve sabit olduğu görülmüştür. Ayrıca eğimin değerinin ağır iyonların yükünden ve enerjisinden bağımsız olduğu ve yaklaşık olarak $1.35 \lambda_C$ 'ye, yani elektronun indirgenmiş Compton dalgaboyuna eşit olduğu görülmüştür. Bu referansa bağlı kalarak aynı hesaplama müon için de yapılmıştır. Müonun indirgenmiş Compton dalgaboyu $\lambda_{C,\mu} = 1/m_{\mu} = 1,868$ fm

olarak bulunur. Hesaplanmış olan $F(q)$ değeri ilgili denklemde yerine konularak yeniden diferansiyel tesir kesiti hesaplanır.

$$\frac{d\sigma}{db} = F(0) \int_0^\infty dq qb J_0(qb) e^{-aq} = \sigma_T \frac{ab}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \quad (5.35)$$

(5.35) eşitliği ile diferansiyel tesir kesiti ifadesi elde edilir. Bu eşitlik sayesinde müon çifti üretim olasılığı için düşük mertebe pertürbasyon sonuçları gibi fonksiyonları hesaplamak kolaylaşır.[4]

Çift oluşum olasılığı için denklem (5.35)'dan yararlanılabilir.

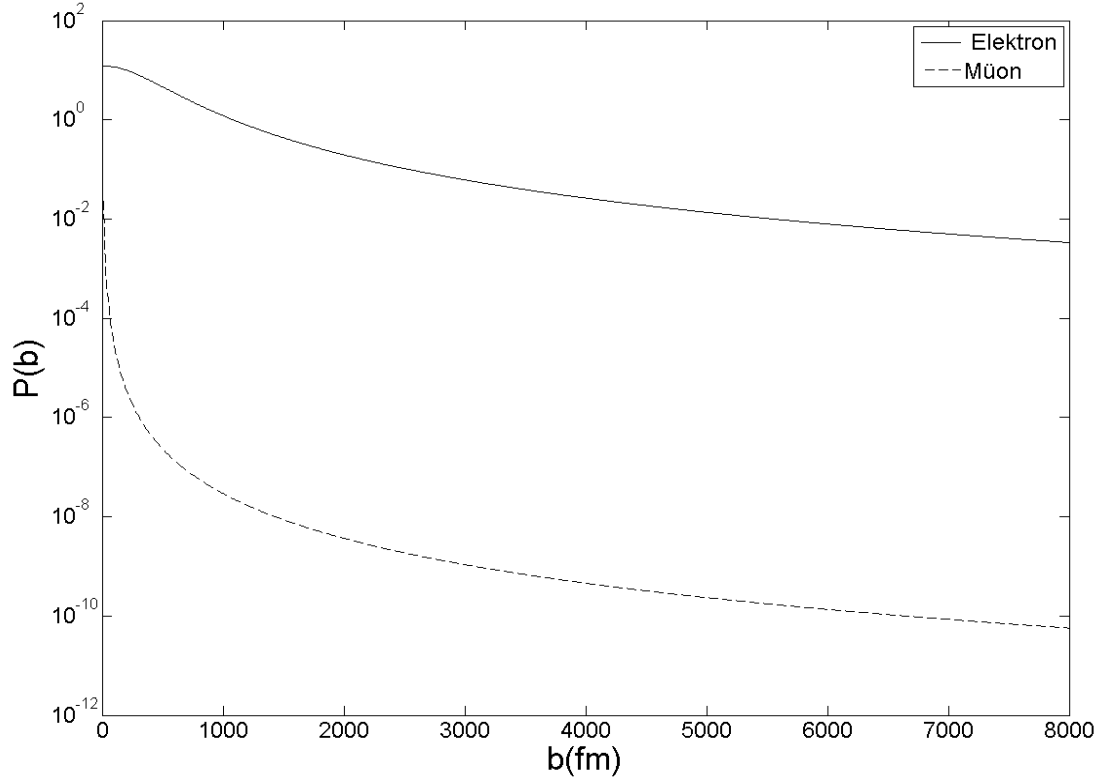
$$P(b) = \frac{1}{2\pi b} \frac{d\sigma}{db} = \frac{1}{2\pi b} \sigma_T \frac{ab}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\pi} \sigma_T \frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \quad (5.36)$$

Burada σ_T , toplam tesir kesitini ifade etmektedir.

$$P_{e^+e^-}(b) = \frac{282 \times 10^6}{(271545,21 + b^2)^{3/2}} \quad (5.37)$$

$$P_{\mu^+\mu^-}(b) = \frac{29.31}{(6.35 + b^2)^{3/2}} \quad (5.38)$$

(5.37) elektron-pozitron çifti için ve (5.38) müon-antimüon çifti için RHIC enerjisinde hesaplanmış olasılık değerleridir. Olasılığın hesaplanması ile ilgili daha ayrıntılı işlemler (Ek.B)'de verilmiştir.



Şekil 5.2: RHIC enerjisinde elektron-pozitron ve müon-antimüon çifti oluşma olasılıklarının çarpışma parametresine bağlılığı.

Yukarıdaki grafikte lepton çifti oluşma olasılığının çarpışma parametresine bağlılığı görülmektedir. Büyük çarpışma parametrelerinin daha zayıf alanlar oluşturduğu söylenebilir. Buna bağlı olarak çarpışma parametresinin değeri arttıkça lepton çifti oluşma olasılığı da azalmaktadır. Ayrıca elektron-pozitron çifti üretilme olasılığı, müon-antimüondan daha fazladır. Elektronun daha hafif bir parçacık oluşu bu sonucu öngörülebilir kılar.

Bu bölüme kadar tesir kesitinin nasıl elde edileceği ve tesir kesitinin çarpışma parametresine bağlılığı ele alındı. Ağır iyonların çevresel çarpışmaları, günümüze kadar pek çok bilimsel çalışmada incelenmiştir. Bu konular , gelecek bölümlerde ele alınacak olan, form faktörü ve lepton çifti üretiminin form faktörüne bağlılığının daha iyi açıklanabilmesi için bu konulara değinilmiştir.

6. FORM FAKTÖRÜ HESAPLAMALARI

6.1 Nükleer Boyut ve Şekil

Rutherford saçılma formülünde, hedef çekirdeğe yönlendirilmiş α parçacıklarının enerji değerleri arttıkça ana formülden sapmalar görülür. Bunun nedeni Rutherford saçılmasında çekirdeğin noktasal bir parçacık olarak kabul edilmiş olmasıdır. Ancak gerçekte çekirdek 10^{-15} mertebesinde yarıçapa sahip bir yapıdır. Çekirdeğin yük yoğunluğu $\rho(r)$ ise kuantum mekaniksel olarak ele alınır [5].

$$\rho(r) = Ze|\Psi|^2 \quad (6.1)$$

(6.1) formülü çekirdeğin yük yoğunluğunu ifade eder. Burada Z atom numarası Ψ ise protonun dalga fonksiyonudur. Dolayısı ile dalga fonksiyonunun olasılık yoğunluğu bir protonun olasılık yoğunluğudur.

Atomik form faktörü, izole edilmiş bir atomun saçılma genliğinin bir ölçüsüdür. Tüm form faktörlerinin ortak özellikleri uzaysal yoğunluk dağılımlarının Fourier Transformasyonunu içermesidir. Yani form faktörü için uzaysal yük dağılımının bir Fourier Transformasyonudur denebilir. Form faktörünün genel ifadesi yük yoğunluğuna bağlıdır ve aşağıda gösterilen denklem ile ifade edilmektedir [6].

$$F(q^2) = \frac{1}{Ze} \int e^{-i\frac{q \cdot r}{\hbar}} \rho(r) d\tau \quad (6.2)$$

Küresel simetriye sahip dağılımlar için, form faktörü ifadesi daha basit bir hal almaktadır [6].

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \int r \rho(r) \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) dr \quad (6.3)$$

Form faktörleri, nükleonların noktasal parçacıklardan ne kadar farklı olduğunun bir ölçüsüdür. Form faktörleri nükleonların (proton, nötron) içerisindeki elektrik yüklerinin ve akımının uzaysal dağılımını tanımlar, bu nedenle iç yapıyla ilgili

olduklarını söylemek mümkündür. Form faktörleri, nükleonlar için temel gözlenebilir niceliklerdendir ve evrendeki maddeyi nükleonların oluşturduğu düşünülürse iç yapılarının anlaşılmasının önemi kavranabilir.

Bu çalışmada, çevresel ağır iyon çarpışmaları sonucu oluşan müon-antimüon çiftine farklı form faktörleri, LHC ve RHIC enerjilerinde uygulanmıştır. Böylece müon-antimüon çiftinin farklı form faktörleri ve farklı enerjilerdeki davranışları incelenmiştir. Ayrıca farklı form faktörü uygulamaları altında müon-antimüon çifti ile tau-antitau çifti karşılaştırılmıştır.

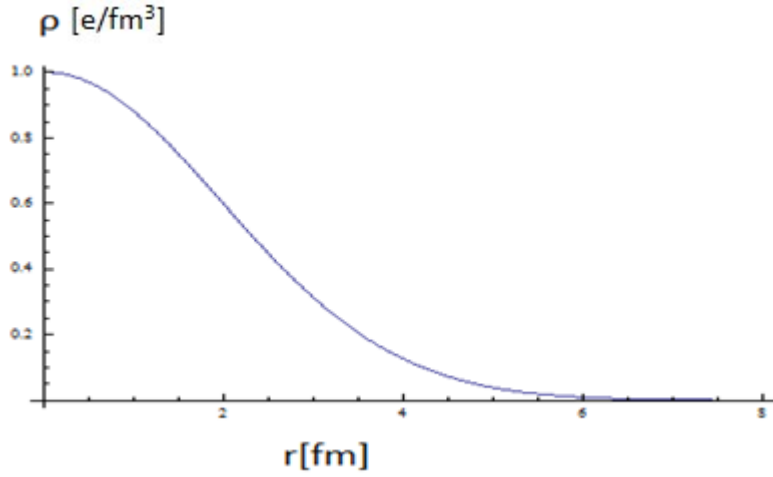
Literatürde Farklı yük dağılımları için farklı form faktörleri mevcuttur. Bu çalışmada incelenen form faktörleri, çekirdeğin yük dağılımının Gausyen, Düzgün ve Wood-Saxon (Fermi) dağılıma sahip olduğu durumları kapsamaktadır [7]. Bu form faktörü çeşitlerinin değişik enerjilerde ve değişik parçacık çiftleri için kıyaslanmaları bu çalışmaya özgün bir değer katmaktadır.

6.2 Gausyen Dağılım

Elektron saçılması deneylerinden elde edilen veriler incelendiğinde çekirdeğin yoğunluğunun farklı değerler alabildiği gözlenmiştir. Elektronların çekirdekten sapması çekirdeğin yük yoğunluğu hakkında bilgi vermektedir. Öncelikle çekirdeğin yük yoğunluğunun Gausyen dağılıma sahip olduğu durumu inceleyelim [8].

$$\rho = Ze \left(\frac{a^2}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{a^2 r^2}{2} \right] \sin(qr) r dr \quad (6.4)$$

Gausyen dağılımda sahip yük yoğunluğu ifadesi üstel bir fonksiyon olarak verilmiştir. Buna bağlı olarak hesaplanacak form faktörü de üstel bir fonksiyon olacaktır. Gausyen dağılıma bağlı form faktörünün lepton çiftleri üzerindeki etkisi üstel fonksiyon barındırması sebebiyle daha belirgin olmaktadır.



Şekil 6.1: Gausyen yük dağılımı.

(6.4)'te eşitliğindeki formülü ile verilen yük dağılımı Gausyen Dağılımı ifade etmektedir ve buna bağlı olarak form faktörünün elde edilebilmesi için aşağıdaki işlemler gerçekleştirilir.

$$F(q^2) = 4\pi \left(\frac{a^2}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{\hbar}{q} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{a^2 \alpha^2}{2} \right] \sin(qr) r dr \quad (6.5)$$

$$\alpha = qr, \quad dr = \frac{d\alpha}{q}, \quad a = 2.30 / 4 \ln(3) \quad (6.6)$$

(6.6) ile ifade edilen değerler (6.5) denkleminde yerleştirilir.

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \frac{4\pi\hbar}{q^3} \left(\frac{a^2}{2\pi} \right)^{3/2} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{a^2 \alpha^2}{2q^2} \right] \sin(\alpha) \alpha d\alpha \\ &= \frac{4\pi\hbar}{q^2} \left(\frac{a^2}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{\exp \left[-\frac{q^2}{2a^2} \right] \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{\frac{a^2}{q^2}} q^4}{a^4} \\ F(q^2) &= \exp \left[\frac{-q^2}{2a^2 \hbar^2} \right] \end{aligned} \quad (6.7)$$

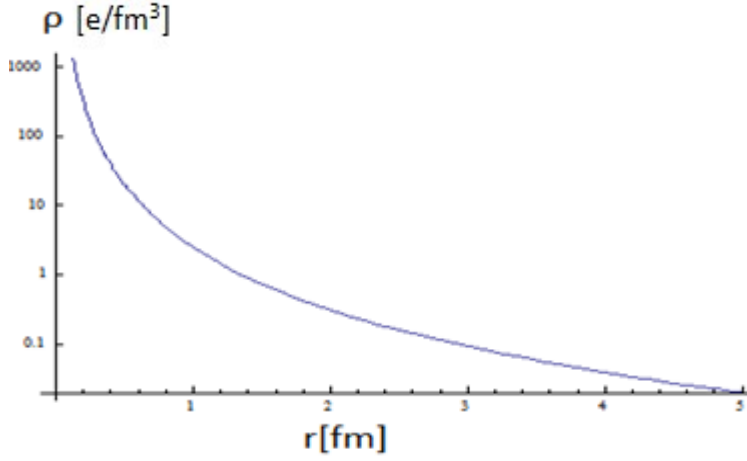
Böylece (6.7) denklemi ile Gausyen Dağılım için form faktörü elde edilmiş olur.

6.3 Düzgün Dağılım

R yarıçaplı düzgün yüklenmiş bir çekirdek için yük dağılımı aşağıdaki denklemlerde gösterilmiştir.

$$\rho(r) = \frac{3Ze}{4\pi r^3} \quad , \quad R < r \quad (6.8)$$

$$= 0 \quad , \quad r > R \quad (6.9)$$



Şekil 6.2: Düzgün yük dağılımı.

Düzgün yük dağılımına bağlı olarak form faktörü aşağıdaki şekilde hesaplanır.

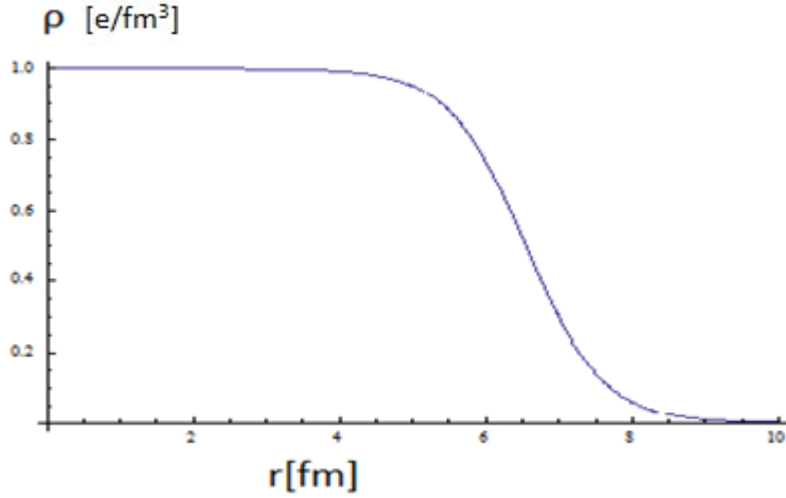
$$\begin{aligned} F(q^2) &= \frac{4\pi}{Ze q} \int \rho(r) r \sin(qr) dr = \frac{3}{qR^3} \int_0^R r \sin(qr) dr \\ &= \frac{3\hbar}{qR^3} \left(\left[\frac{r}{q} \cos(qr) \right]_0^R - \int_0^R \frac{\cos(qr)}{q} dr \right) \\ &= \frac{3\hbar}{qR^3} \left(\frac{R}{q} \cos(qR) - \frac{\sin(qR)}{q^2} \right) \\ F(q^2) &= 3 \left(\frac{\hbar}{qR} \right)^3 (qR \cos(qr) - \sin(qr)) \end{aligned} \quad (6.10)$$

6.4 Wood-Saxon (Fermi) Dağılımı

Fermi modeli yük dağılımının gerçekçi bir yaklaşımıdır ve bu nedenle analiz yapılırken farkedilir bir kolaylık sağlar. Fermi yük dağılımı (6.11) eşitliği ile tanımlanır.

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-c)/a}} \quad (6.11)$$

Burada c yarı yoğunluk yarıçapı ve a kabuk kalınlığı t ile ilişkilidir. $t = (4 \ln 3a)$ 'dır. a değeri 0.524 fm alınır. $R = c$ alınırsa, Fermi dağılımı homojen dağılıma indirgenebilir. Fermi dağılımının şekli Wood-Saxon potansiyeline benzediği için Wood-Saxon Dağılımı olarakta adlandırılır [9]. Fermi dağılımının form faktörü ifadesine yerleştirilip analitik olarak çözülmesi zor olduğundan form faktörü denklemi seriye açılarak çözülebilir. Bu çözüm yolu Ek (D) 'de verilmiştir. Çözümün sonucu olarak monopol ve dipol form faktörü ifadeleri bulunabilmektedir.



Şekil 6.3: Wood-Saxon yük dağılımı.

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int_0^\infty \frac{4\pi}{q} \rho(r) \sin qr dr = \int_0^\infty \frac{4\pi}{qr} \rho(r) \sin(qr) r^2 dr \\ &= 1 - \frac{q^2}{3!} \langle r^2 \rangle + \frac{q^4}{5!} \langle r^4 \rangle - \dots [7] \end{aligned} \quad (6.12)$$

Form faktörü ifadesinin seri açılımı elde edildikten sonra seride dönüşüm uygulanır.

$$\Lambda = \frac{6}{\sqrt{\langle r^2 \rangle}} \rightarrow \langle r^2 \rangle = \frac{6}{\Lambda^2} \quad (6.13)$$

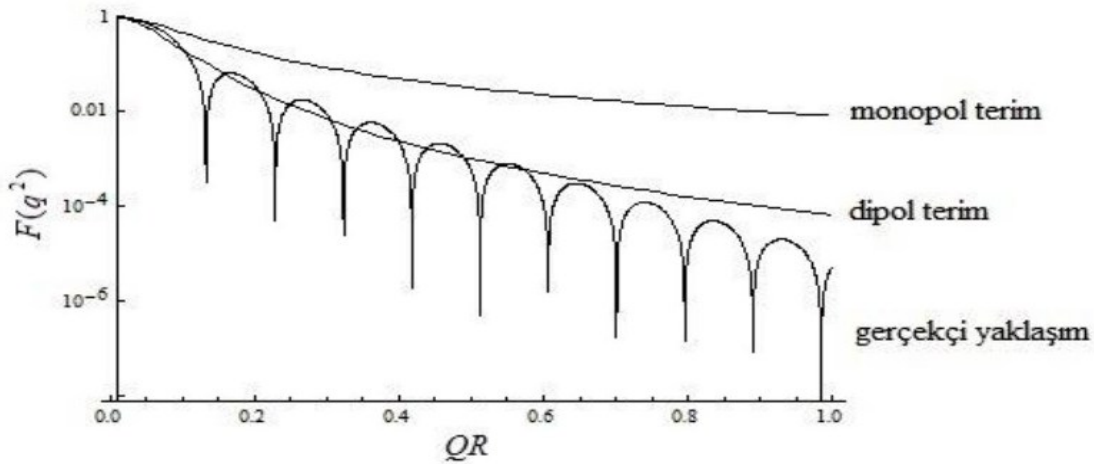
(6.13) dönüşümü seriye uygulandığında Form faktörü ifadesinin son hali aşağıdaki şekli alır.

$$F(q^2) = 1 - \frac{q^2}{6} \frac{6}{\Lambda^2} + \dots = 1 - \frac{q^2}{\Lambda^2} + \dots = 1 - \frac{1}{1 + \frac{q^2}{\Lambda^2}} + \dots \quad (6.14)$$

Böylece form faktörü serisinden monopol ve dipol terimler elde edilmiş olur.

$$F(q^2) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2} \text{ (monopol terim)} \quad (6.15)$$

$$F(q^2) = \left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2} \right)^2 \text{ (dipol terim)} \quad (6.16)$$



Şekil 6.4: Fermi dağılımın gerçekçi yaklaşım ile karşılaştırılması.

Fermi dağılımına bağlı olarak elde edilen form faktörünün, monopol ve dipol terimlerinin gerçekçi davranış ile karşılaştırıldığı Şekil 6.4 'te dipol terimin gerçeğe en yakın davranışı sergilediği görülmektedir. Bu sebeple Wood-Saxon dağılım gerçeğe en yakın dağılım olarak kabul edilmektedir.

7. LEPTON ÇİFTLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

7.1 Parçacıkların Momentum ve Enerji İfadeleri

Parçacık fiziğinde, pseudorapidity, η , parçacığın çarpışma doğrultusundaki eksenine ile olan açısının uzaysal koordinatlarını tanımlamak amacı ile kullanılır.

$$\eta = -\ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (7.1)$$

Burada θ parçacığın üç vektör momentumu p ile çarpışma doğrultusundaki ekseninin pozitif yönünün yapmış olduğu açıdır. Pseudorapidity değişkeni, momentum terimleri cinsinden ifade edilebilir.

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|p| + p_L}{|p| - p_L} \right) = \operatorname{arctanh} \left(\frac{p_L}{|p|} \right) \quad (7.2)$$

Burada p_L , momentumun boylamsal bileşenidir (çarpışma doğrultusu boyunca momentum, aynı zamanda p_z olarak ifade edilir). Parçacık rölativistik hızlarda hareket ettiğinde yada parçacığın kütlesi ihmal edilebilir olduğu durumlarda $m \ll p \Rightarrow E \approx p \Rightarrow \eta \approx y$ yaklaşıklığı yapılabilir, bu limitte parçacığın tek enerjisi momentumundan kaynaklanan enerjidir ve böylece pseudorapidity, rapidity tanımına yaklaşmış olur ve rapidity tanımı ağır iyon çarpışmaları için daha genel bir tanımdır. Parçacık çiftinin çarpışma sonrasındaki enerjisi p_0 ile temsil edilir.

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_L}{E - p_L} \right) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{p_0 + p_z}{p_0 - p_z} \right] \quad (7.3)$$

Ağır iyon çarpışmalarında rapidity yada pseudorapidity, kutupsal açı θ ya tercih edilir. Çünkü rapiditynin bir fonksiyonu olarak parçacık üretimi sabittir. Bunun sebebi ise rapidity veya pseudorapidity farklarının Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalmasıdır ve bu özellik neden kutupsal açının seçilmediğini

açıklamaktadır. Yani Δy yada $\Delta \eta$ farkları ölçüldüğünde belirli bir referans çerçevesi seçmek gerekmez.

Çarpışma sonrasında, parçacık çiftlerinin boylamsal momentumunun yanısıra, çarpışma doğrultusuna dik, p_t ile ifade edilen enine momentum değeri de bulunmaktadır. Enerji ve momentumlar arasındaki ilişki aşağıdaki denklemede gösterilmiştir.

$$p_0 = \sqrt{p_z^2 + p_t^2 + 1} \quad (7.4)$$

7.2 Lepton Çiftlerinin Karşılaştırılması

Bu bölümde ,RHIC ve LHC enerjilerinde, ağır iyonların çevresel çarpışmaları sonucu oluşan lepton çiftlerinin, farklı form faktörleri altındaki diferansiyel tesir kesitleri ile toplam tesir kesitleri ele alınmış ve bu tesir kesitleri farklı lepton çiftleri için birbirleri ile karşılaştırılmıştır. Aşağıda gösterilen Çizelge 7.1 'de, RHIC enerjisinde Au+Au iyonlarının çarpıştırılması sonucu oluşan müon-antimüon ve elektron-pozitron parçacık çiftlerinin tesir kesitleri görülmektedir.

Çizelge 7.1: RHIC enerjisinde, form faktörlerin etkisi ile hesaplanan tau ve muon tesir kesitleri, burada $f = 1$ ile gösterilen tesir kesiti Gausyen Dağılıma, $f = 2$ ile gösterilen tesir kesiti Düzgün Dağılıma ve $f = 3$ ile gösterilen tesir kesiti Wood-Saxon Dağılıma sahip altın çekirdeğine aittir.

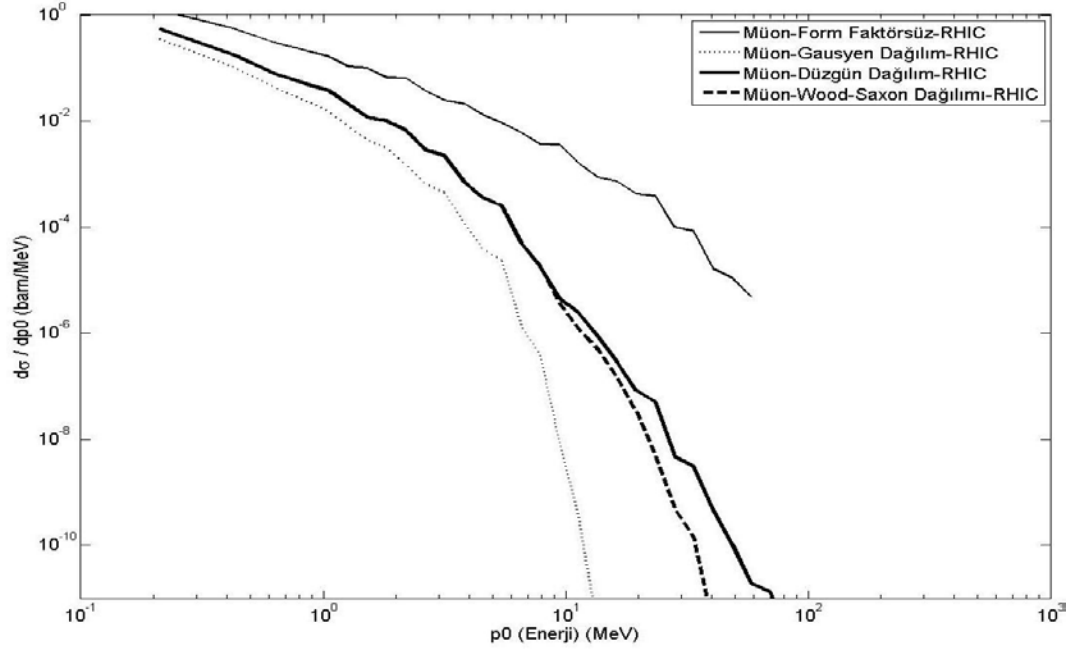
	$\sigma_{f=0}(\text{barn})$	$\sigma_{f=1}(\text{barn})$	$\sigma_{f=2}(\text{barn})$	$\sigma_{f=3}(\text{barn})$
Elektron	3.6253×10^4	3.6262×10^4	3.6345×10^4	3.6198×10^4
Müon	7.3100×10^{-1}	1.1766×10^{-1}	2.0152×10^{-1}	2.0387×10^{-1}

Çizelge 7.2'de ise Pb+Pb iyonlarının 3400 GeV enerjide çarpışması sonucu oluşan elektron-pozitron ve müon -antimuon çiftlerinin toplam tesir kesitlerinin form faktörüne göre değişimleri bulunmaktadır. Çizelge 7.2 ve Çizelge 7.1 ile farklı iki lepton çifti için farklı enerjilerde karşılaştırma yapmak mümkün olmuştur.

Çizelge 7.2: LHC enerjisinde, form faktörlerin etkisi ile hesaplanan tau ve muon tesir kesitleri, burada $f = 1$ ile gösterilen tesir kesiti Gaussyen Dağılıma, $f = 2$ ile gösterilen tesir kesiti Düzgün Dağılıma ve $f = 3$ ile gösterilen tesir kesiti Wood-Saxon Dağılıma sahip altın çekirdeğine aittir.

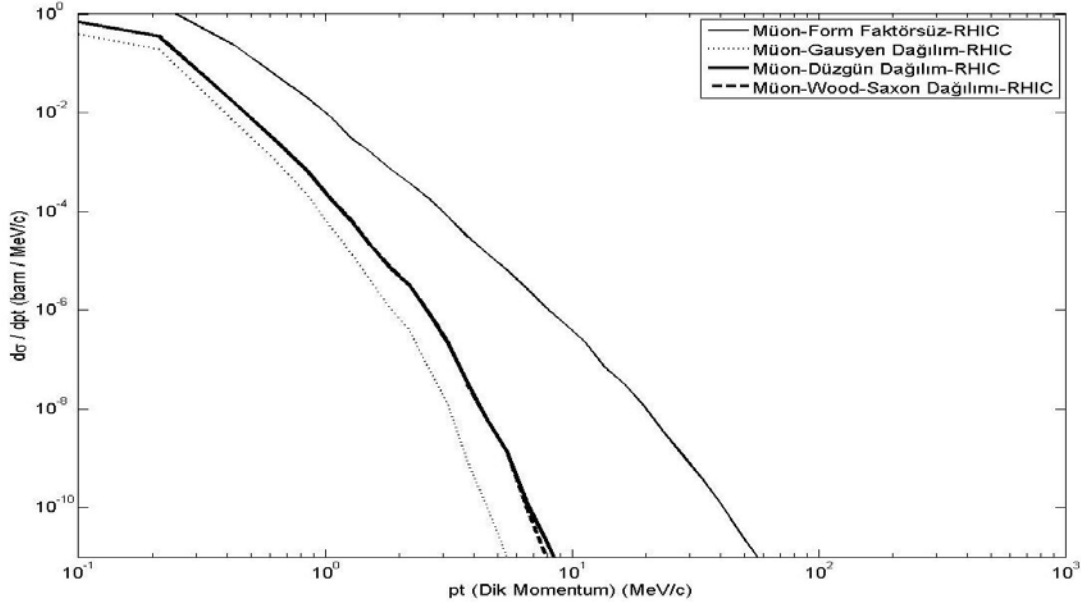
	$\sigma_{f=0}$ (barn)	$\sigma_{f=1}$ (barn)	$\sigma_{f=2}$ (barn)	$\sigma_{f=3}$ (barn)
Elektron	2.4596×10^5	2.4545×10^5	2.4616×10^5	2.4576×10^5
Müon	5.2924	2.1086	2.7189	2.7265

Çizelge 7.1 ve 7.2 'de elektron ve müon paraçacık çiftlerinin tesir kesitlerinin, farklı form faktörleri uygulandığında almış olduğu değerler görülmektedir. Elektronu, RHIC ve LHC enerjilerinde farklı form faktörleri etki ettirilmiştir. Elektronun, form faktörü uygulandığı durumlardaki toplam tesir kesiti ile uygulanmadığı durumdaki toplam tesir kesiti değerleri karşılaştırıldığında, aradaki farkın ihmal edilebilir ölçüde küçük olduğu görülmektedir. Bu nedenle elektrona form faktörü uygulanmasının bir değişiklik meydana getirmeyeceği söylenebilir. Ancak müon paraçacık çiftine RHIC ve LHC enerjilerinde, farklı form faktörleri uygulandığında toplam tesir kesiti değerleri değişmiştir. Form faktörü uygulandığı durumlarda müonun tesir kesiti daha düşük değerler almıştır ve bu değerlerin gerçeğe daha yakın olan tesir kesitleri olduğu düşünülmektedir. Form faktörleri , parçacıkların noktasal olmaktan ne kadar uzak olduklarının bir ölçüsü idi. Ağır iyonların noktasal parçacıktan farklı olan iç yapıları mevcuttur. Bu nedenle oluşan lepton çiftleri ile etkileşmesi beklenen bir sonuçtur. Ağır iyonların, elektron- pozitron çifti ile etkileşmemesinin sebebi ise daha öncede belirtildiği gibi elektronun Compton dalgaboyunun çekirdeğin boyutlarına göre oldukça büyük olmasıdır. Ağır iyonların çarpışması sonucu oluşan tau-antitau parçacık çifti de çekirdekle etkileşmektedir çünkü Compton dalgaboyu ağır iyonların çekirdek yarıçaplarından daha küçüktür.



Şekil 7.1: RHIC enerjisinde, müon çiftinin diferansiyel tesir kesidinin enerjisine göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.

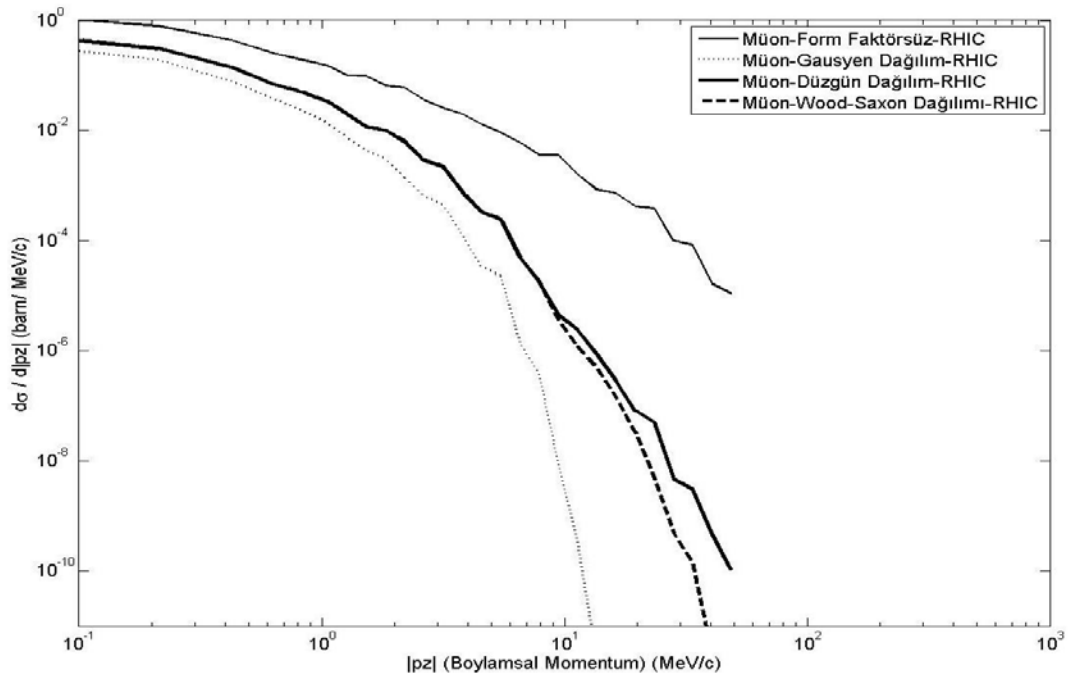
Oluşan müon çiftinin enerjisi p_0 ile ifade edilmektedir. Şekil 7.1'deki grafikte p_0 enerjisinin form faktörü uygulanmadığı durumda daha uzun zaman korunduğu ancak form faktörü etki ettiğinde enerjisini daha hızlı kaybettiği görülmektedir.



Şekil 7.2: RHIC enerjisinde, müon çifti diferansiyel tesir kesitinin, hareketi doğrultusuna dik bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.

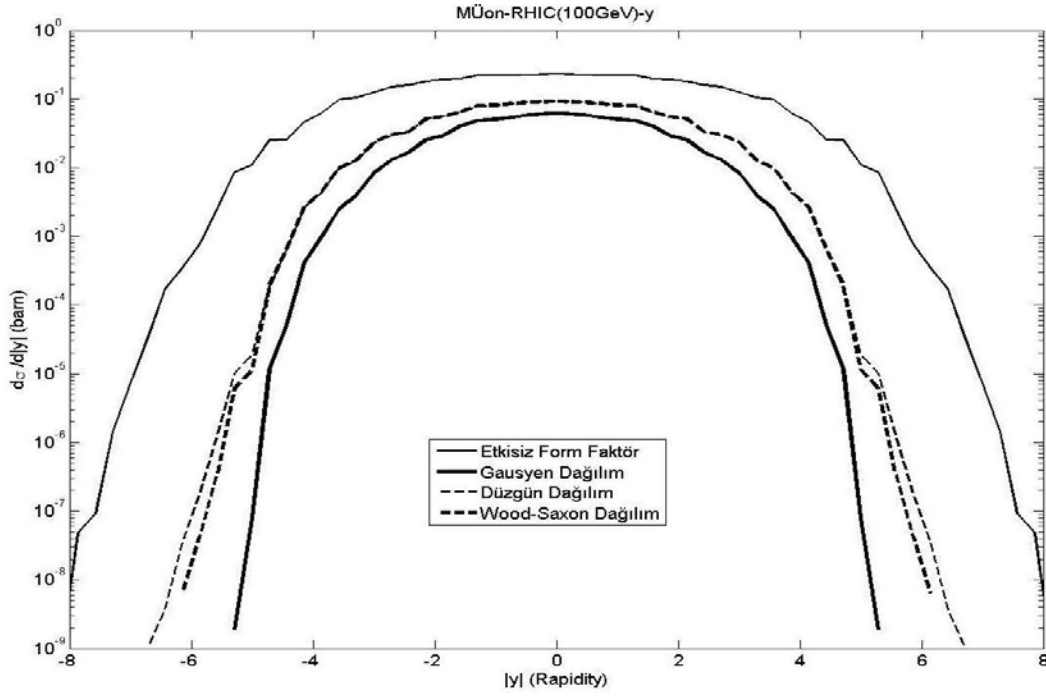
Çarpışma doğrultusuna dik momentumun (p_t), diferansiyel tesir kesitine göre değişimini gösteren Şekil 7.2'de, form faktörleri etkideğinde çarpışma doğrultusuna

dik momentumun daha hızlı bir şekilde azaldığı görülür. Form faktörlerinin uygulanmadığı durumlarda diferansiyel tesir kesiti daha büyük bir değer almıştır , buna bağlı olarak form faktörsüz durumlarda müon parçacık çiftlerinin oluşma olasılığının daha fazla olduğu düşünülebilir. Form faktörünün, Düzgün Dağılım ve Wood-Saxon Dağılım'da yaklaşık olarak aynı etkiyi yaptığı, Gausyen Dağılımda ise diferansiyel tesir kesitini ve momentum değerini daha hızlı bir şekilde azalttığı görül mektedir. Bunun nedeni Gausyen Dağılımın üstel olarak azalan bir fonksiyon olmasıdır.



Şekil 7.3: RHIC enerjisinde, müon çifti diferansiyel tesir kesitinin, hareketi doğrultusundaki bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.

Diferansiyel tesir kesitinin, boylamsal (çarpışma doğrultusunda) momentumun (p_z), göre değişimini gösteren Şekil 7.3'te form faktörlerinin etki etmediği durumda parçacık çifti oluşum olasılığının daha fazla olduğu ve çarpışma doğrultusundaki momentum değerinin korunma şansının daha yüksek olduğu söylenebilir. Çarpışma doğrultusuna dik momentum değeri, çarpışma doğrultusundaki momentuma göre daha hızlı bir şekilde azalır çünkü ağır iyonların çevresel çarpışması sırasında momentumun yönelimi genellikle çarpışma doğrultusuna paralel olacak şekildedir. Ancak daha az bir miktarı çarpışma doğrultusuna dik olacak şekilde yönelim gösterir.

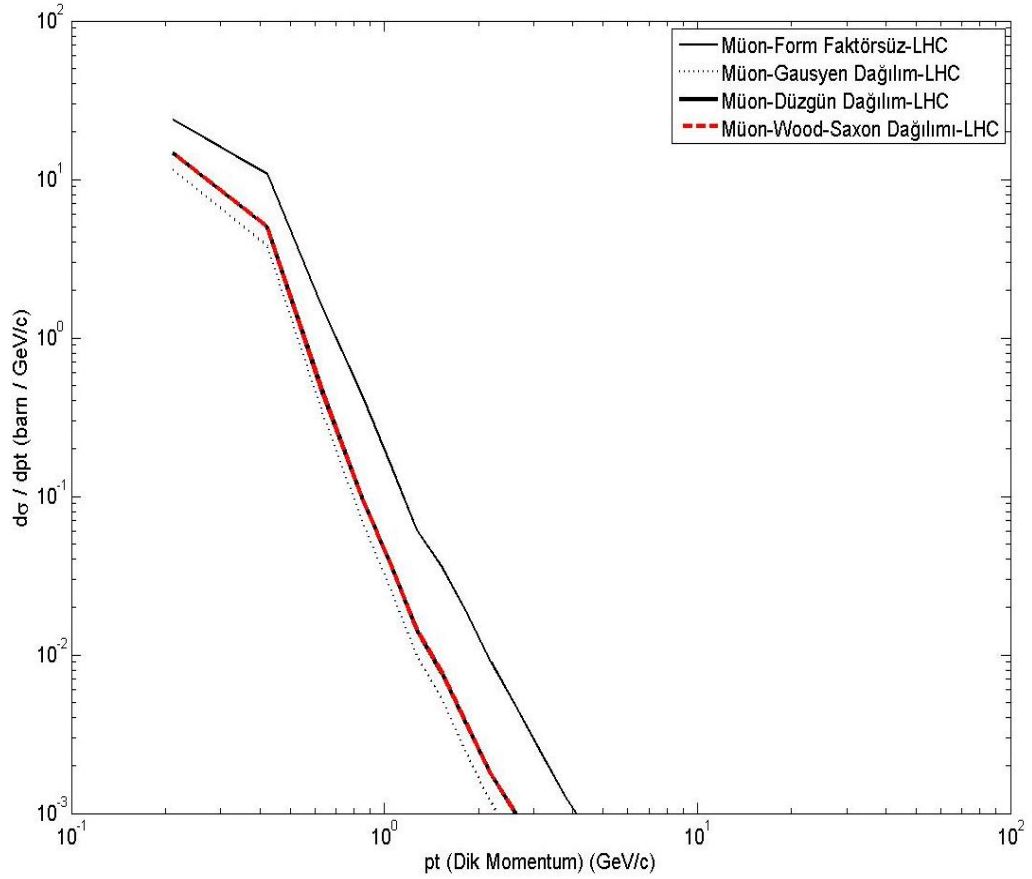


Şekil 7.4: RHIC enerjisinde, müon çifti diferansiyel tesir kesitinin hızlılığın (rapidity) göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.

Rapidity, (y) parçacıkların çarpışma doğrultusundan saçılmalarının uzaysal bir dağılımıdır ve çarpışma doğrultusuna göre simetrik bir saçılıma göstermektedir. Bu sebeple grafiğin yatay eksen simetriktir, üretilen parçacıklar simetrik olarak aşağı ve yukarı saçılırlar. Şekil 7.4'te rapiditynin, diferansiyel tesir kesitine göre grafiği görülmektedir. Form faktörünün uygulanması diferansiyel tesir kesiti değerini azaltmıştır.

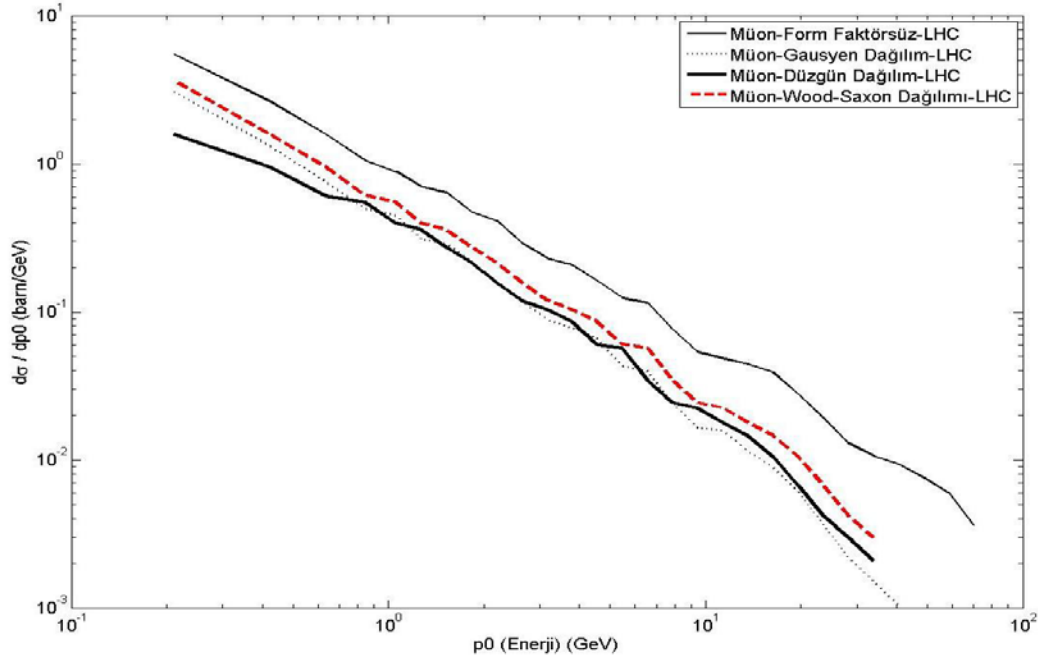
$$y = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{p_0 + p_z}{p_0 - p_z} \right] \quad (7.5)$$

(7.5) formülü göz önünde bulundurulacak olursa rapiditynin sıfır değerini aldığı durumda oluşan parçacıkların çarpışma doğrultusuna dik yönde hareket ettiği , rapiditynin $\pm \infty$ değerini alması durumunda ise oluşan parçacıkların çarpışma doğrultusunda hareket ettiği düşünülebilir [10]. Böylece, rapidity çarpışma sonucu oluşan parçacıkların hareket doğrultusu hakkında bilgi verir.

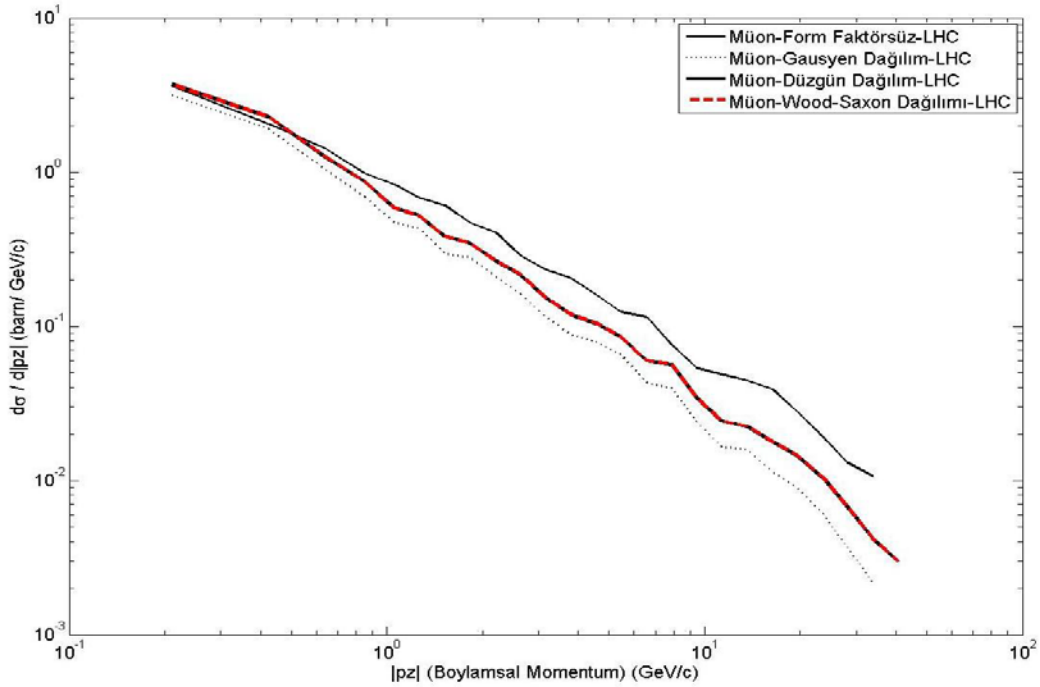


Şekil 7.5: LHC enerjisinde, müon çifti parçacığı tesir kesitinin, hareketi doğrultusuna dik bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.

LHC enerjisinde, müon parçacık çiftinin diferansiyel tesir kesitinin, çarpışma doğrultusuna dik momentuma (p_t), göre değişimini gösteren Şekil 7.5 incelenecek olursa, LHC enerjisinde de müon çiftinin form faktörsüz durumda oluşma olasılığının daha yüksek olduğu ve dik momentum değerinin daha büyük olduğu görülür. Form faktörüne, Düzgün Dağılım ve Wood-Saxon Dağılım uygulandığında, form faktörlerinin müon çifti üzerindeki etkileri örtüşmüştür. Gausyen dağılıma sahip form faktörünün etkisi diğerlerinden daha fazladır. Bunun nedeni daha öncede belirtildiği gibi Gausyen dağılımın üstel bir fonksiyon olmasıdır. LHC enerjisindeki müonun çarpışma doğrultusuna dik momentumu, RHIC enerjisindeki göre daha fazla olmaktadır. Bunun nedeni, çarpışma sırasında kazanılan enerjinin momentum bileşenlerine aktarılmasıdır. Enerji ne kadar artarsa toplam momentum değeri dolayısı ile çarpışma doğrultusuna dik yöndeki momentum değeri de o kadar artacaktır.



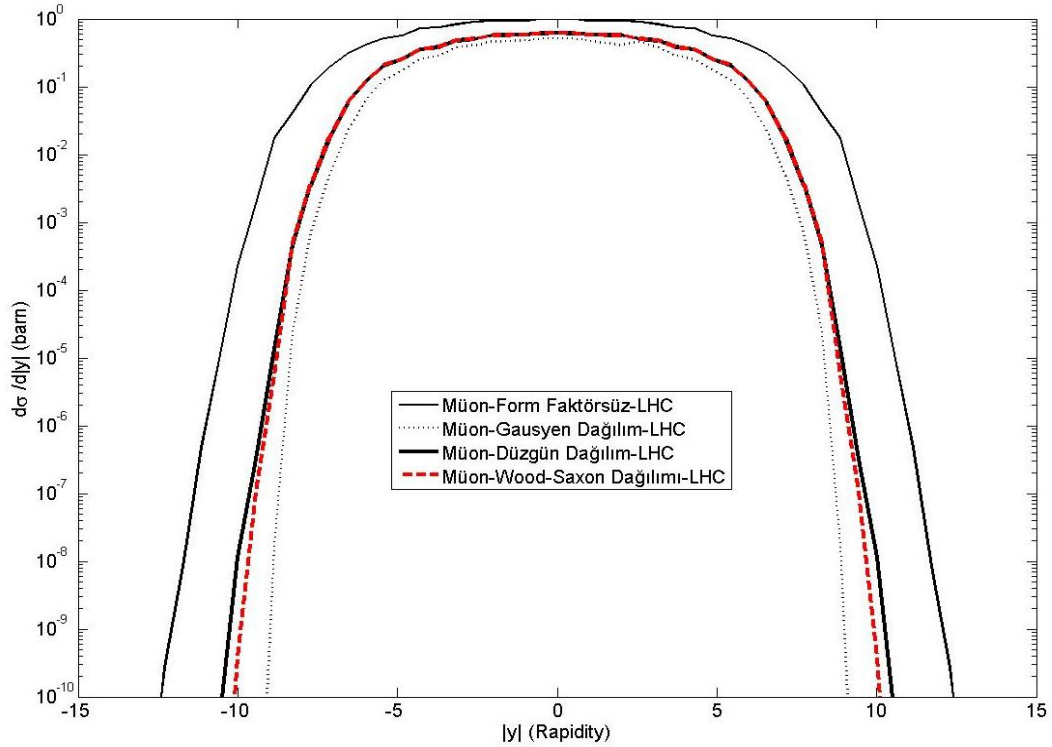
Şekil 7.6: LHC enerjisinde,müon çifti parçacığı tesir kesitinin enerjisine göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.



Şekil 7.7: LHC enerjisinde, müon çifti parçacığı tesir kesitinin, hareket doğrultusundaki bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.

LHC enerjisinde oluşan müon çiftinin, diferansiyel tesir kesitinin enerjisine göre değişimin görüldüğü Şekil 7.6 'da form faktörsüz durumda çift oluşum olasılığının daha fazla olduğu ve oluşan parçacıkların enerjilerini daha uzun süre koruduğu söylenebilir.

LHC enerjisinde, müon parçacık çiftinin diferansiyel tesir kesitinin, boylamsal momentuma (çarpışma doğrultusunda momentum) (p_z), göre değişimini gösteren Şekil (7.7) ele alınacak olursa, müon çiftinin form faktörsüz durumda oluşma olasılığının daha yüksek olduğu görülür. Müon çiftine, Düzgün Dağılım ve Wood-Saxon Dağılım uygulandığında yine birbiri ile örtüşen davranışlar sergilediği söylenebilir. Gausyen Dağılımın uygulanması ise boylamsal momentumu daha hızlı bir şekilde azaltmıştır.

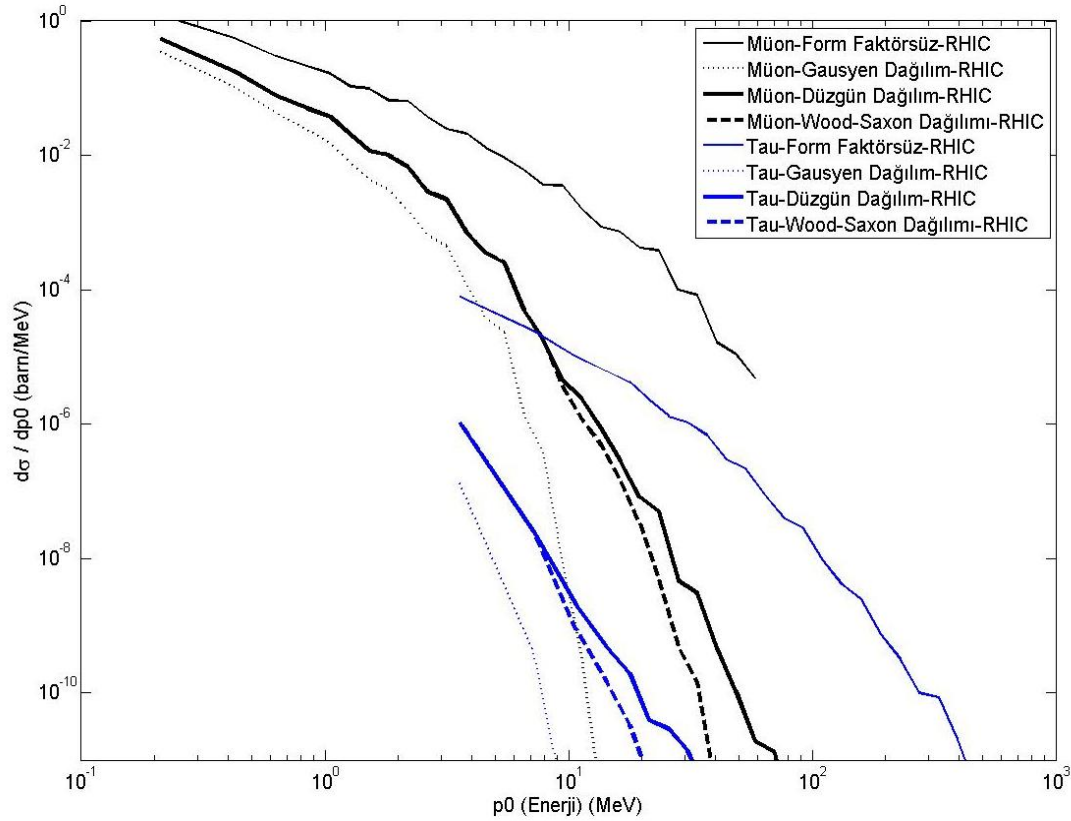


Şekil 7.8: LHC enerjisinde, müon çifti parçacığının hızlılığın (rapidity) fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesiti üzerine form faktörlerinin etkisi.

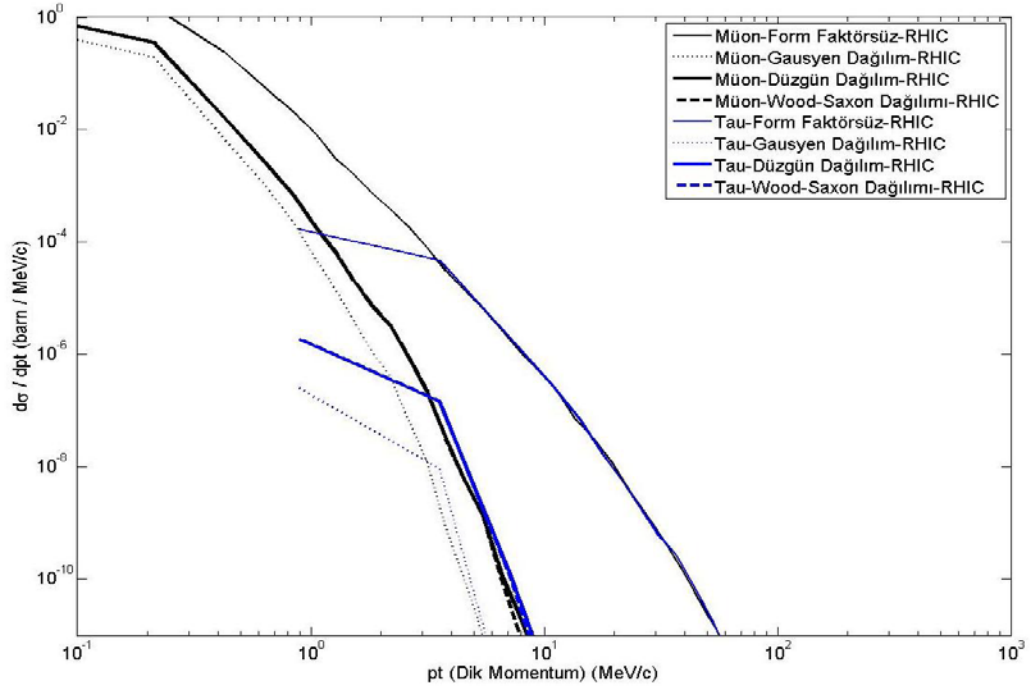
LHC enerjisinde müon parçacık çiftinin , diferansiyel tesir kesitinin rapidity'ye göre değişimini gösteren Şekil 7.8 incelendiğinde, LHC enerjisindeki diğer grafikler ile benzer olarak form faktörsüz durum için parçacık oluşum olasılığının daha fazla olduğu ve Wood-Saxon Dağılım ile Düzgün Dağılımın hemen hemen örtüştüğü söylenebilir.

RHIC enerjisi ile LHC enerjisinde müon parçacık çiftinin davranışları karşılatırılacak olursa, LHC enerjisinde, parçacık çiftinin oluşma olasılığının daha fazla olduğu

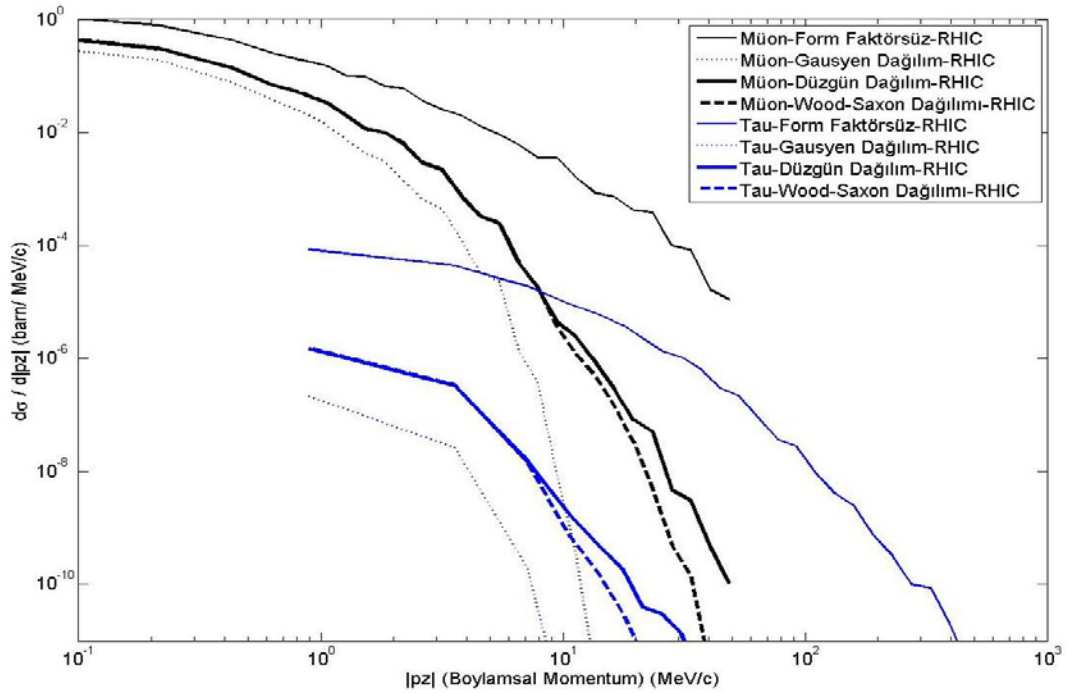
söylenbilir. Ayrıca LHC enerjisinde oluşan müon parçacık çiftlerinin, enerjisinin, çarpışma doğrultusuna dik ve çarpışma doğrultusu boyunca olan momentumlarının daha büyük olduğu görülmektedir. Daha fazla enerji uygulandığında parçacık çiftlerinin enerji ve momentum değerlerinin de buna bağlı olarak artış gösterdiği düşünülebilir. Form faktörlerinin RHIC ve LHC enerjilerinde diferansiyel tesir kesitini yani oluşma olasılığını azalttığı görülmektedir. LHC enerjisinde her form faktörü için rapiditiy değerinin arttığı gözlenir. Bunun nedeni daha yüksek enerjiye sahip parçacıkların uzaysal dağılımının artış göstermesi diğer bir değişle saçılmasının artmış olmasıdır.



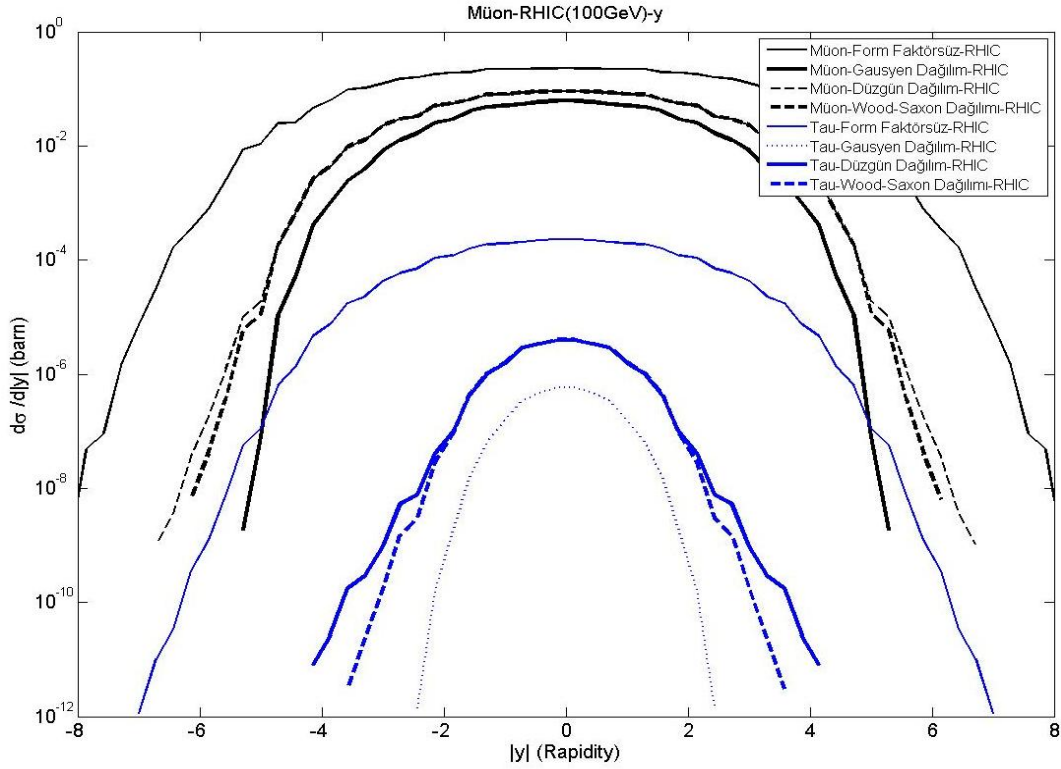
Şekil 7.9: RHIC enerjisinde, tau ve müon çifti parçacıklarının tesir kesitinin enerjisine göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.



Şekil 7.10: RHIC enerjisinde, tau ve müon çifti parçacıklarının tesir kesitinin, hareketi doğrultusuna dik bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.



Şekil 7.11: RHIC enerjisinde, tau ve müon çifti parçacıklarının tesir kesitinin, hareketi doğrultusundaki bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.

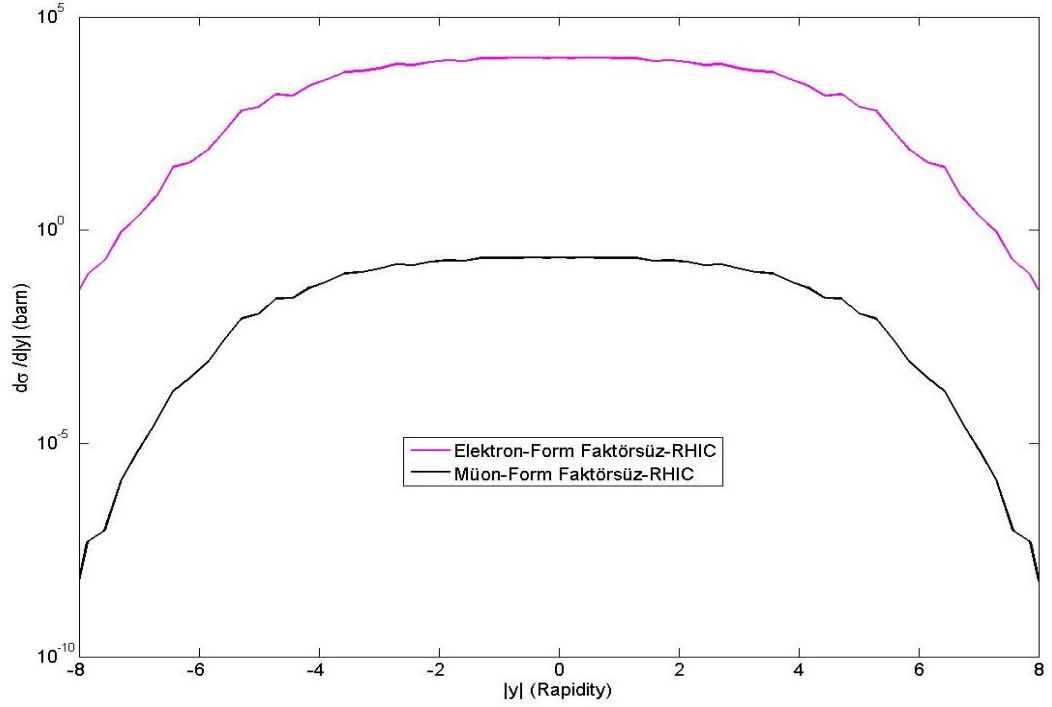


Şekil 7.12: RHIC enerjisinde, tau ve muon çifti parçacıklarının hızlılığın (rapidity) fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesiti üzerine form faktörlerinin etkisi.

RHIC enerjisinde tau ve müon parçacık çiftlerinin diferansiyel tesir kesitlerinin, çarpışma doğrultusundaki momentum, çarpışma doğrultusuna dik momentum, enerji ve rapidity 'ye göre grafikleri incelenmiştir. Tau'nun kütesinin müondan yaklaşık 15 kat büyüktür. Tau'nun, Compton dalga boyu ise müondan küçük olup, çekirdekle etkileşimi daha fazla olmaktadır. Bu nedenle grafiklerde de görüldüğü üzere Tau'nun diferansiyel tesir kesiti daha düşük değerler almıştır ve form faktörü uygulandığında , form faktörsüz duruma göre daha fazla değişim göstermiştir. Rapidity grafiğine bakıldığında ise müonun , tau'ya göre daha fazla saçıldığını söylemek mümkündür. Müonun ,tau'dan 15 kat hafif olduğu düşünülürse saçılmasının daha fazla olmasının nedeni anlaşılabilir.

Çizelge 7.1 ve Çizelge 7.2 'nin incelendiği bölüm hatırlanacak olursa, elektronun tesir kesitinin, LHC ve RHIC enerjilerinde, farklı form faktörleri altında değişiminin ihmal edilebilir ölçüde az olduğu görülmüştü. Bu nedenle elektrona form faktörü

uygulamanın gerekli olmadığı göz önünde bulundurularak Şekil (7.13) form faktörünün olmadığı durumlarda incelenmiştir.



Şekil 7.13: RHIC enerjisinde, elektron ve müon çifti parçacıklarının hızlılığı (rapidity) fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesiti üzerine form faktörlerinin etkisi.

RHIC enerjisindeki, elektron ve müon parçacık çiftlerinin rapidity grafiğine bakıldığında kütlesi çok daha küçük elektron parçacık çiftinin oluşma olasılığının yaklaşık olarak 10^7 kat fazla olduğu görülür.

8. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışma boyunca, LHC enerjisinde hızlandırılan Pb+Pb atomlarının ve RHIC enerjisinde hızlandırılan Au+Au atomlarının yaptığı çevresel çarpışmalar sonucu elektromanyetik alandan parçacık üretimi incelenmiştir. Tesir kesitleri FORTRAN kodları kullanılarak hesaplatılmıştır. Parçacıkların diferansiyel tesir kesitlerinin, enerji momentum ve rapidity değişimlerine göre grafikleri MATLAB'da çizilmiştir.

Lepton çiftlerinin, LHC ve RHIC enerjilerinde, farklı form faktörlerine bağlı davranışları incelenmiştir. Özellikle müon-antimüon çiftinin diğer lepton çiftleri ile aralarındaki benzerlik ve farklılıklar üzerinde durulmuştur. Gaussyen, Normal ve Wood-Saxon dağılımları için elde edilen form faktörleri müon ve tau parçacık çiftlerine uygulanmıştır ve form faktörlerinin varlığında diferansiyel tesir kesitlerinin değiştiği görülmüştür. Bu durumda müon ve tau 'nun form faktörlerinden etkilendiği sonucuna ulaşılmıştır. LHC ve RHIC enerjilerinde elektronun toplam tesir kesitinin, form faktörüne bağlı olarak çok fazla değişmediği görülmüştür. Bu nedenle elektron-pozitron oluşumu incelenirken form faktörüne bağlı bir hesaplama yapılmasına gerek olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Altın atomu için çekirdeğin boyutu $R \approx R_0 A^{1/3} \approx 7 \text{ fm}$, müonun Compton dalgaboyu $\lambda_C^\mu \approx 1,868 \text{ fm}$ ve tau'nun Compton dalgaboyu $\lambda_C^\tau \approx 0.11 \text{ fm}$ 'dir. Ancak elektronun Compton dalgaboyu $\lambda_C^e \approx 386 \text{ fm}$ 'dir. Çekirdeğin yarıçapı ile müon ve tau Compton dalgaboyları kıyaslandığında etkileşimin mümkün olduğu, fakat elektronun Compton dalgaboyunun çekirdeğe kıyasla çok büyük olmasından etkileşmenin olamayacağı anlaşılır ve grafiklerin yorumlanması ile ulaşılan sonuçlar bu yaklaşımın bir sağlaması olmuştur.

LHC ve RHIC enerjilerinde müon-antimüon çiftinin diferansiyel tesir kesitinin, enerjisine, çarpışma doğrultusundaki momentum ve çarpışma doğrultusuna dik momentum değerlerine göre değişimi, Gaussyen, Normal Dağılım ve Wood-Saxon yük dağılımlarına bağlı form faktörleri altında incelenmiştir. RHIC enerjisindeki müonun diferansiyel tesir kesitinin form faktörsüz halinin daha büyük bir değer aldığı, form faktörlerinin etkisinde iken azaldığı görülmüştür. Özet olarak, müonun oluşum olasılığı form faktörlerine bağlı olarak azalmaktadır. Normal Dağılım ve

Wood-Saxon dağılım form faktörlerinin, diferansiyel tesir kesiti üzerindeki etkisi birbirlerine oldukça yakın değerler alırken, Gausyen dağılım form faktörü en düşük diferansiyel tesir kesiti değerini almakta ve enerji, çarpışma doğrultusunda momentum ve çarpışma doğrultusuna dik momentum değerlerini daha hızlı bir şekilde düşürmektedir. RHIC enerjisindeki rapidity grafiğine bakıldığında ise form faktörlerinin etkisiyle yine diferansiyel tesir kesitinin azaldığı görülmüştür.

LHC enerjisindeki müon çiftine, form faktörleri uygulanmış ve RHIC enerjisinde olduğu gibi diferansiyel tesir kesitinin azaldığı gözlenmiştir. Müon çiftinin enerji, çarpışma doğrultusunda momentum ve çarpışma doğrultusuna dik momentum değerlerinin en hızlı azaldığı durum Gausyen form faktörünün uygulandığı durum olmuştur. Rapidity grafiğinde de form faktörlerinin diferansiyel tesir kesitini azaltıcı etkisi gözlenmiştir. LHC enerjisinde oluşan müon parçacık çiftlerinin diferansiyel tesir kesitleri RHIC enerjisine göre daha büyüktür, çarpışma enerjisi arttıkça parçacık çifti oluşum olasılığının ve oluşan parçacık çiftlerinin enerjilerinin arttığı görülmektedir. LHC enerjisindeki müon çiftinin rapidity değerinin yaklaşık kat arttığı görülmüştür, yani daha yüksek enerjilerde çarpışma doğrultusundan saçılmanın arttığı söylenebilir.

RHIC enerjisinde elektron-pozitron ile müon-antimüon parçacık çiftleri karşılaştırılmış ve elektronun diferansiyel tesir kesitinin müondan fazla olduğu görülmüştür. Bunun sonucu olarak, ağır iyon çarpışmalarında elektron-pozitron oluşuma olasılığının, müon-antimüon oluşuma olasılığından daha fazla olduğu söylenebilir. Yine RHIC enerjisinde çift oluşum olasılığının çarpışma parametresine bağlılığı incelenmiştir ve elektron-pozitron çiftinin çarpışma parametresine bağlı oluşum olasılığının müon-antimüondan daha büyük olduğu görülmüştür. Ayrıca tau çiftine form faktörü etkideğinde, tesir kesitinin daha fazla azaldığı görülür. Tau, müondan daha ağır bir parçacıktır ve Compton dalgaboyu müondan daha küçüktür. Bu nedenle form faktörü uygulamasından daha fazla etkilenmektedir.

Müon-antimüon ve tau-antitau parçacıklarına form faktörleri etki ettirilerek hesaplanan enerji, momentum ve rapidity değerlerinin gerçeğe daha yakın olması beklenmektedir. Form faktörlerinin hesaplama katılmasındaki amaç çekirdeğin iç yapısından kaynaklanacak etkileri de göz önünde bulundurarak daha gerçekçi değerler elde etmektir.

Aşağıdaki çizelgelerde, başka makalelerde müon-antimüon için hesaplanmış tesir kesiti değerleri yer almaktadır. Çalışmamız boyunca hesaplanmış olan tesir kesiti değerleri ile yakın olduğu görülmektedir. Çizelgede referans numarası verilmeyen değerler bizim hesaplamış olduğumuz tesir kesitlerini ifade etmektedir. Çizelgeler de hesaplanmış olan tesir kesitleri , lepton çiftlerinin toplam tesir kesiti değerleridir. LHC VE RHIC enerjisinde muon için hesaplanmış teorik tesir kesiti değerleri literatürde mevcuttur. Ancak tau parçacık çifti için hesaplanmış tesir kesitleri daha az bulunmaktadır.

Çizelge 8.1: RHIC enerjisinde, Wood-Saxon form faktörünün etkisi ile hesaplanmış müon çifti tesir kesitinin, diğer teorik hesaplamalar ile karşılaştırılması

Müon	$\sigma(barn)$	$\sigma(barn)$ [12]	$\sigma(barn)$ [10]	$\sigma(barn)$ [2]
RHIC	0.203	0.23	0.209	0.2

Çizelge 8.2: LHC enerjisinde , Wood-Saxon form faktörünün etkisi ile hesaplanmış müon çifti tesir kesitinin diğer teorik hesaplamalar ile karşılaştırılması

Müon	$\sigma(barn)$	$\sigma(barn)$ [12]	$\sigma(barn)$ [10]
LHC	2.7265	2.6	2.46

KAYNAKLAR

- [1] **Aitchison, I. J. R. ve Hey A. J. G.** (1989). Gauge Theories In Particle Physics
- [2] **Bottcher, C. ve Strayer, M. R.** (1989). Coherent Electromagnetic Production Of Mu And Tau Lepton Pairs İn Relativistic Heavy- Collisions
- [3] **Kovankaya G.** (2005). Ağır İyonların Çarpıştırılması Ve Elektron-Pozitron Çift Oluşumu, Master Thesis
- [4] **Yılmaz Şengül, M.** (2011). Rölativistik Ağır İyon Çarpışmaları Sonucu Parçacık Üretimi, I.T.U., Ph.D Thesis
- [5] **Elton, L.R.B.** (1961). Nuclear Size
- [6] **Foster, K.** (2011) Electron Scattering: Form Factors and Nuclear Shapes
- [7] **Blundell,S.A. ve Baird , P.E.G. ve Botham, C.P. ve Palmer,C.W.P. ve Stacey,D.N.ve Woodgate, G. K.** (2000), Finite nuclear charge density distributions in electronic structure calculations for atoms and molecules
- [8] **Klusek-Gaweda , M. ve Szczurek, A.** (2010). Exclusive Muon-Pair Production in Heavy-ion Collisions: Realistic Nucleus Charge Form Factor and Differential Distributions
- [9] **Jentschura ,U.D. ve Serbo ,V.G.** (2009). Nuclear Form Factor ,Validity of the Equivalent Approximation and Coulomb Corrections to Muon Pair Production in Photon-Nucleus and Nucleus-Nucleus Collisions
- [10] **Mercan,Ö.** (2014). Yeni Kuşak Yüksek Enerjili Hizlandiricilerde Elektromanyetik tau çifti üretimi
- [11] **Perdrisat, C. F. ve Punjabi, V. ve Vanderhaeghen,M.** (2008) Nucleon Electromagnetic Form Factors
- [12] **Hencken, K. ve Kuraev, E. A. ve Serbo, V.G.** (2007) Exclusive and inclusive muon pair production in collisions of relativistic nuclei
- [13] **Eichler, J. ve Meyerhof ,W.E.** (1995) Relativistic Atomic Collisions (Academic Press)
- [14] **Güçlü, M. C. ve Wells, J. C. ve UMAR, A.S. ve Strayer, M. R. ve Ernst, D.J.** (1994). Impact-parameter Dependence of Multiple Lepton-Pair Production From Electromagnetic Fields
- [15] **Güçlü,M.C.,** (2009) Electromagnetic interections at RHIC and LHC , Progress Particle and Nuclear Physics
- [16] **Magnus ve Oberhettinger** (1954). Functions of Mathematical Physcis, p. 8.
- [17] **Gustavsson, M. G. H. ve Martensson-Pendrill, A. M.** (1998). ‘Four Decades Of Hyperfine Anomalies’. Advences of Quantum Chemistry

EKLER

EK A: Rölativistik Ağır İyon çarpışmalarında elektromanyetik alandan lepton çifti
 retimi

EK B: Olasılık Hesaplamaları

EK C: Monte Carlo İntegrasyonu

EK D: Wood-Saxon (Fermi Dağılımı) Form Faktörünün Elde Edilmesi

EK A

Rölativistik Ağır İyon Çarpışmalarında elektromanyetik alandan lepton çifti üretimi

Tesir kesitinin toplam değeri aşağıda gösterilmiştir [3].

$$\sigma = \int d^2b \sum_{k>0} \sum_{q<0} \left| \langle \chi_k^+ | S | \chi_q^- \rangle \right|^2 \quad (\text{A.1})$$

ile ifade edilmekte idi.

$$S = S_{12} + S_{21} \quad (\text{A.2})$$

Momentum ara durumlar için iki bileşenden oluşmaktadır. Bunlar iyonun hareketine ve iyonun hareketiyle aynı doğrultuda olan momentum değerleridir. $p = p_{\perp} + p_z$. Feynman diagramlarındaki geçiş matris elemanını elde etmek için aşağıdaki ifdeden yararlanılır.

$$\langle \chi_k^+ | S | \chi_q^- \rangle = \frac{i}{2\pi} \int \frac{d^2 p_{\perp}}{(2\pi)^2} \exp \left\{ i \left[p_{\perp} - \left(\frac{k_{\perp} + q_{\perp}}{2} \right) \right] \cdot b \right\} \times A^{(+)}(k, q; p_{\perp}) \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma = \int d^2b \sum_{k>0} \sum_{q<0} \left| \langle \chi_k^{(+)} | S_{12} | \chi_q^{(-)} \rangle + \langle \chi_k^{(+)} | S_{21} | \chi_q^{(-)} \rangle \right|^2 \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{1}{4v^2} \sum_{k>0} \sum_{q<0} d^2b \left| \int \frac{d^2 p_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{i \left[p_{\perp} - \left(\frac{k_{\perp} + q_{\perp}}{2} \right) \right] b} F(k_{\perp} - p_{\perp}; w_a) F(p_{\perp} - q_{\perp}; w_b) \tau_{kq}(p_{\perp}; v) \right. \\ \left. + \int \frac{d^2 p_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{-i \left[p_{\perp} - \left(\frac{k_{\perp} + q_{\perp}}{2} \right) \right] b} F(k_{\perp} - p_{\perp}; w_b) F(p_{\perp} - q_{\perp}; w_a) \tau_{kq}(p_{\perp}; -v) \right|^2$$

$$A^{(+)}(k, q; p_{\perp}) = F(k_{\perp} - p_{\perp}; w_1) F(p_{\perp} - q_{\perp}; w_2) \times \tau_{kq}(p_{\perp}; v), \quad (\text{A.5})$$

$$A^{(-)}(k, q; p_{\perp}) = F(k_{\perp} - p_{\perp} : w_2) F(p_{\perp} - q_{\perp} : w_1) \times \tau_{kq}(p_{\perp} : -v), \quad (\text{A.6})$$

$$F(k_{\perp} - p_{\perp} : w_a) = \frac{4\pi Z \gamma^2 v^2}{w_a^2 + v^2 \gamma^2 (k_{\perp} - p_{\perp})^2} \quad (\text{A.7})$$

$$F(p_{\perp} - q_{\perp} : w_2) = \frac{4\pi Z \gamma^2 v^2}{w_b^2 + v^2 \gamma^2 (p_{\perp} - q_{\perp})^2} \quad (\text{A.8})$$

$F(q, w)$ momentum uzayında hareket eden ağır iyonların elektromanyetik alanının skaler kısmıdır.

$$F(q, w) = \frac{4\pi Z \gamma^2 \beta^2}{w^2 + \beta^2 \gamma^2 q^2} G_E(q^2) f_Z(q^2), \quad (\text{A.9})$$

$G_E(q^2)$ nükleonun ve $f_Z(q^2)$ nükleusun form faktörleridir [11] ve form faktörü etkileri göz önünde bulundurulmak istendiğinde çarpım yapılarak denkleme katılır. w_1 ve w_2 frekansları foton absorblayan vertekslerin enerji korunumu ile sabitlenmişlerdir.

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{1}{4v^2} \sum_{k>0} \sum_{q<0} \int d^2 b \left| \int \frac{d^2 p_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{i \left[p_{\perp} - \left(\frac{k_{\perp} + q_{\perp}}{2} \right) b \right]} A^{(+)}(k, q; p_{\perp}) \right|^2 + \\ & \frac{1}{4v^2} \sum_{k>0} \sum_{q<0} \int d^2 b \left| \int \frac{d^2 p_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{-i \left[p_{\perp} - \left(\frac{k_{\perp} + q_{\perp}}{2} \right) b \right]} A^{(-)}(k, q; p_{\perp}) \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

EK B

Olasılık Hesaplamaları

$$P(b) = \frac{1}{2\pi} \sigma_T \frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \quad (\text{B.1})$$

Elektron - pozitron çifti oluşumunda olasılığı hesaplayabilmek için;

$a = 1,35\lambda_C^- \rightarrow$ burada a parametresi [4] referansında $F(q)$ fonksiyonun grafiğinin eğiminden elde edilmiş bir sabittir ve elektronun indirgenmiş Compton dalgaboyu $\lambda_C^- = 386 \text{ fm}$ ile orantılı olduğu görülür.

Elektronun σ_T toplam tesir kesiti değeri FORTRAN kodları kullanılarak hazırlanmış programın, RHIC enerjisinde çalıştırılması ile elde edilmiştir.

(1barn=100 fm²) olduğu göz önüne alınarak olasılık ifadesindeki tesir kesiti değeri fm² cinsinden yazılır. Çarpışma parametresi b fm boyutlu bir büyüklüktür.

$$\begin{aligned} P_{e^-e^+}(b) &= \frac{1}{2\pi} [(34000) \times 100] \text{ fm}^2 \times \frac{(1,35 \times 386) \text{ fm}}{\left([(1,35 \times 386)^2 + b^2] \text{ fm}^2 \right)^{3/2}} \\ &= \frac{282.6 \times 10^6}{(271545.21 + b^2)^{3/2}} \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

Müonun indirgenmiş Compton dalga boyu $\lambda_C^{-\mu} = 1.868 \text{ fm}$ 'dir. Müon için $a = 1.35\lambda_C^{-\mu}$ parametresinin değeri yazılmış olur.

$$\begin{aligned}
P_{\mu^-\mu^+}(b) &= \frac{1}{2\pi} [0.73 \times 100] fm^2 \frac{(1.35 \times 1.868) fm}{\left[\left((1.35 \times 1.868)^2 + b^2 \right) fm^2 \right]^{3/2}} \quad \textbf{(B.3)} \\
&= \frac{29.31}{\left(6.35 + b^2 \right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

EK C

Monte Carlo İntegrasyonu

Eşitlik (5.30) ile verilen $F(q)$ fonksiyonu aşağıda gösterilen formdadır [14].

$$F(q) = F_0 \int f(x_1, x_2, \dots, x_8, q) dx_1 dx_2 \dots dx_8 \quad (\text{C.1})$$

Bu koordinalar sekiz boyutlu vektör ile gösterilmektedir.

$$X = \{\xi, \eta, k, \phi_q, \theta_Q, \phi_Q, \theta_K, \phi_K\} \quad (\text{C.2})$$

Bu değişkenler denklem (5.29) 'de bulunan değişkenler ile aşağıda gösterildiği şekilde bağlıdır.

$$\begin{pmatrix} k_z \\ q_z \end{pmatrix} = \gamma e^\xi \begin{pmatrix} \cos \eta \\ \sin \eta \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = a_Q \tan \theta_Q \begin{pmatrix} \cos \phi_Q \\ \sin \phi_Q \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \end{pmatrix} = a_K \tan \theta_K \begin{pmatrix} \cos \phi_K \\ \sin \phi_K \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{pmatrix} q_z \\ q_y \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \cos \phi_q \\ \sin \phi_q \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{pmatrix} k_z \\ k_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

Burada yalnızca sekiz integral için gerekli değişken dönüşümleri bulunmaktadır, kalan integrasyon simetri ile yapılabilir. η, ϕ_Q, ϕ_K ve ϕ_q , 0 ile π aralığında iken, θ_Q, θ_K 0 ile $\pi/2$ aralığındadır. ξ değişkeni k_z ve q_z bir üst limit olarak kullanılmıştır. Skala faktörü a_Q ve a_K ise;

$$a_Q = \omega/\gamma \quad , \quad a_K = \omega/\gamma \quad (\text{C.8})$$

Monte Carlo metodu ile denklem (5.29) bir toplama indirgenir.

$$F(q) = \sum f(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{i8}, q) \Delta^8 x \quad (\text{C.9})$$

Burada $\Delta^8 x$ alt bölgenin hacim elemanıdır. Sonlu bir V hacimi elde etmek için , integral alanı eşit hacim elemanlarına bölünür ;

$$F(q) = \frac{V}{N} \sum f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i8}, q) \quad (\text{C.10})$$

N alt hacim elemanlarının sayısıdır. Ayrıca sonuçlardaki dalgalanmalar kontrol edilebilir ve merkez limit teoremine büyük N değerleri için hata payı ifadesi yazılabilir.

$$\delta^2 = \left\langle \left\langle f^2 \right\rangle - \left\langle f \right\rangle^2 \right\rangle / N \quad (\text{C.11})$$

$$\left\langle f^2 \right\rangle = \frac{1}{N} \sum f^2(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i8}, q) \quad (\text{C.12})$$

$$\left\langle f \right\rangle = \frac{1}{N} \sum f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i8}, q) \quad (\text{C.13})$$

EK D

Wood-Saxon (Fermi Dağılımı) Form Faktörünün Elde Edilmesi

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int_0^\infty \frac{4\pi}{q} \rho(r) \sin qr dr = \int_0^\infty \frac{4\pi}{qr} \rho(r) \sin(qr) r^2 dr \\ &= \int_0^\infty \frac{4\pi}{qr} \rho(r) \left[qr - \frac{\rho r^3}{3!} + \frac{\rho r^5}{5!} - \dots \right] r^2 dr \\ &= \int_0^\infty \rho(r) dV - \int_0^\infty \rho(r) \frac{(qr)^2}{3!} dV + \int_0^\infty \rho(r) \frac{(qr)^4}{5!} dV - \dots \quad (\text{D.1}) \end{aligned}$$

İntegral ifadesinde seriye açma işlemi yapıldıktan sonra form faktörü yazılır

$$F(q^2) = 1 - \frac{q^2}{3!} \langle r^2 \rangle + \frac{q^4}{5!} \langle r^4 \rangle - \dots \quad (\text{D.2})$$

İlk terim hesaplanır [16].

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = -6 \frac{\partial F}{\partial (q^2)} \Big|_{q=0} \quad (\text{D.3})$$

Form faktörünün türevi alındığında aşağıdaki işlem yapılır.

$$F(q^2) = \frac{4\pi\rho_0}{q} \int_0^\infty \frac{r \sin(qr) dr}{1 + e^{((r-R)/a)}} = -\frac{4\pi\rho_0}{q} \cdot \text{Re} \frac{\partial}{\partial q} \int_0^\infty \frac{e^{iqr} dr}{1 + e^{((r-R)/a)}} \quad (\text{D.4})$$

İntegral için değişken dönüşümleri yapılır.

$$x = e^{-r/a} \quad , \quad b = e^{-R/a} \quad , \quad \beta = qa \quad (\text{D.5})$$

Böylece form faktörü elde edilir.

$$F(q^2) = -\frac{4\pi\rho_0 a^3}{b\beta} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^1 x^{-i\beta} (1 + b^{-1}x) dx \quad (\text{D.6})$$

Denklem (D.6) görülen form faktörü hipergeometrik fonksiyon formuna benzemektedir.

$${}_2F_1(a, b; R; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(R-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{R-b-1} (1-zt)^{-a} dt \quad (\text{D.7})$$

Gerekli dönüşümler yapılır.

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; R; z) &= \frac{\Gamma(R)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(R-a)} (-z)^{-a} {}_2F_1(a, 1-R+a; 1-b+a; z^{-1}) \\ &+ \frac{\Gamma(R)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(R-b)} (-z)^{-b} {}_2F_1(b, 1-R+b; 1-a+b; z^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

$$F(q^2) = -\frac{4\pi\rho_0 a^3}{\beta} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{1}{i\beta^2} {}_2F_1(1, i\beta; 1+i\beta; -b) + \frac{\pi b^{-i\beta}}{i \sinh \pi\beta} \right\} \quad (\text{D.9})$$

Hipergeometrik fonksiyon seriye açılarak form faktöründe yerine yazılır.

$$F(q^2) = \frac{4\pi^2 \rho_0 a^3}{(qa)^2 \sinh^2(\pi qa)} [\pi qa \cosh(\pi qa) \sin(qR) - qR \cos(qR) \sinh(\pi qa)]$$

$$+8\pi\rho_0a^3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{ne^{-nR/a}}{[n^2+(qa)^2]^2} \quad (\text{D.10})$$

yarıçapın karesinin ortalama değerini almak için öncelikle denklem sonlu hale getirilmelidir. $q \rightarrow 0$ limitini alırsak ρ_0 ve $\langle r^2 \rangle$ değerini bulunur.

$$\rho_0 = \left\{ \frac{4\pi R}{3} [(\pi a)^2 + R^2] + 8\pi a^3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{-nR/a}}{n^3} \right\}^{-1} \quad (\text{D.11})$$

$$\langle r^2 \rangle = \rho_0 \left\{ \frac{4\pi R}{3} [(\pi a)^2 + R^2] \left[\frac{7}{5} (\pi a)^2 \frac{3}{5} R^2 \right] + 96\pi a^5 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{-nR/a}}{n^5} \right\} \quad (\text{D.12})$$

Denklem (D.12) hesaplandığında ilk terimlerin düştüğü görülmektedir.[16] böylece yarıçapın karesinin ortalama değeri bulunur ve karekökü hesaplanabilir.

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3}{5} \left[1 + \frac{7}{3} \left(\frac{\pi a}{R} \right)^2 \right]} R \quad (\text{D.13})$$

ÖZGEÇMİŞ

Ad : Nihal
Soyad : Gözlüklüoğlu KARAKUŞ
Doğum yeri ve yılı : İstanbul/ Merdivenköy 05.12.1982
E-posta : nihalgozlukluoglu@hotmail.com
Lisans : Kocaeli Üniversitesi Fizik Bölümü
Yüksek Lisans : İTÜ Fizik Mühendisliği

