

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**ORTOGONAL VE BİORTOGONAL POLİNOMLARI İÇEREN
BAZI LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM
ÖZELLİKLERİ**

Gürhan İÇÖZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2014**

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

10/09/2014

Gürhan İÇÖZ

ÖZET

Doktora Tezi

ORTOGONAL VE BİORTOGONAL POLİNOMLARI İÇEREN BAZI LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Gürhan İÇÖZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, öncelikle lineer pozitif operatörler tanıtılacak ve bu operatörlerin temel özellikleri incelenecektir. Süreklilik modülünün tanımı verilecek ve sağladığı bazı özellikler ispatlanacaktır. Daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve q -analizde sadece ihtiyacımız olan tanımlar verilecektir. Ayrıca lineer pozitif operatörlerin önemine değinilecek, Bernstein'ın Weierstrass problemi için verdiği teorem hatırlatılacak ve Korovkin teoremi ifade ve ispat edilecektir.

Üçüncü bölümde, Konhauser polinomlarını içeren lineer pozitif operatörler tanıtılacak ve Kantorovich tipli bir integral genelleştirilmesi verilecektir. Korovkin teoreminin koşullarının gerçekleştiği gösterilecektir. Ayrıca bu operatörlerin yakınsama hızları, süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar ve Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla hesaplanacaktır. Bu operatörlerin r -inci basamaktan genelleştirilmesi verilecek ve bu genelleştirilmiş operatörün yakınsama hızı, süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar yardımıyla elde edilecektir. Daha sonra Konhauser polinomlarını içeren lineer pozitif operatörlerin diferensiyel denklemlere uygulanması verilecektir.

Dördüncü bölümde ise q -Laguerre polinomlarını içeren lineer pozitif operatörlerin Kantorovich tipli genelleştirilmesi verilecektir. Öncelikle operatör oluşturulacak sonra Korovkin teoreminin bu operatör için de gerçekleştiği ispat edilecektir. Daha sonraki kısımda ise, operatörün yaklaşım hızı birinci ve ikinci basamaktan süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla hesaplanacaktır.

Beşinci bölümde, tezde elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Eylül 2014, 76 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lineer pozitif operatörler, Konhauser polinomları, Laguerre polinomları, süreklilik modülü, ikinci basamaktan süreklilik modülü, Lipschitz sınıfı, Peetre K-fonksiyoneli, q -analizi, Jackson integrali, Riemann tipli q -integral

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

APPROXIMATION PROPERTIES OF SOME LINEAR POSITIVE OPERATORS INCLUDING ORTHOGONAL AND BIORTHOGONAL POLYNOMIALS

Gürhan İÇÖZ

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In chapter 2, we give some basic definitions and elementary properties about linear and positive operators. We recall the definition of modulus of continuity and prove some elementary properties. Moreover, we give some basic definitions needed in the next sections and give the definitions related to q -integers. Also, we mention the importance of linear and positive operators. We state Weierstrass theorem given by Bernstein and Korovkin's theorem and give the proofs.

In chapter 3, we define linear and positive operators including Konhauser polynomials and give a Kantorovich type integral generalization of the operator including Konhauser polynomials. We show that they are verified the conditions of Korovkin's theorem. Also, we studied on estimation of the rate of convergence in terms of modulus of continuity, Lipschitz class functions and Peetre's K -functional. We introduce r -th order generalization of the operators and estimate the rate of convergences via modulus of continuity and Lipschitz class function. At the end of the section, we give an application to functional differential equations via linear and positive operators including Konhauser polynomials.

In chapter 4, we introduce a Kantorovich type generalization of the operator including q -Laguerre polynomials. Firstly, we construct the operator and then, we prove the Korovkin's theorem for the operator. In the last section, we estimate the rate of convergence via classical and second order modulus of continuity and Lipschitz class functions.

In the last chapter, the results obtained in the thesis have been discussed.

September 2014, 76 pages

Key Words: Linear positive operators, Konhauser polynomials, Laguerre polynomials, modulus of continuity, second order modulus of continuity, Lipschitz class, Peetre's K -functional, q -calculus, Jackson integral, Riemann type q -integral

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşmasında beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek çalışmamın ilerlemesinde katkıda bulunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL'a (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı), Tez İzleme Komitesi üyeleri sayın hocalarım Prof. Dr. Abdullah ALTIN'a (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı) ve Prof. Dr. Ogün DOĞRU'ya (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü) toplantılarda yapmış oldukları olumlu yönlendirmeleri ve destekleri için, lisansüstü eğitimime beraber başlayıp beraber bitirdiğim, pek çok şey paylaştığım ve bilim hayatında hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen değerli kardeşim Dr. Serhan VARMA'ya (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), bildiklerini paylaşmaktan hiçbir zaman çekinmeyen ve herkesin sorusuna bir çözüm bulma konusunda uzman olan sevgili dostum Yrd. Doç. Dr. Sezgin SUCU'ya (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı) ve son olarak doktora eğitimim boyunca yanımda olduğu gibi çalışmalarım süresince de fedakarlıklar göstererek beni destekleyen canım eşim Esra KESEN İÇÖZ'e en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Bu tez "TÜBİTAK-2211 Yurt İçi Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir.

Gürhan İÇÖZ

Ankara, Eylül 2014

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler	4
2.2 Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri	5
2.3 Süreklilik Modülü	8
2.4 Kullanılacak Olan Diğer Tanımlar	11
2.5 q -Analizinin Özellikleri	14
2.6 Lineer Pozitif Operatörlerin Önemi	17
2.7 P.P. Korovkin Teoremi	22
3. KONHAUSER POLİNOMLARINI İÇEREN LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN ve KANTOROVICH TIPLI GENELLEŞTİRİLMESİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ	26
3.1 Giriş	26
3.2 Operatörün Oluşturulması	27
3.3 L_n Operatörünün Yaklaşım Özellikleri	29
3.4 L_n Operatörünün Yaklaşım Hızı	33
3.5 L_n Operatörünün r -inci Basamaktan Genelleştirilmesi	38
3.6 L_n Operatörünün Fonksiyonel Diferensiyel Denkleme Uygulanması	41
3.7 L_n Operatörünün Kantorovich Tipli İntegral Genelleştirilmesi	42
3.8 L_n^* Operatörünün Yaklaşım Özellikleri	43
3.9 L_n^* Operatörünün Yaklaşım Hızı	45
3.10 L_n^* Operatörünün r – inci Basamaktan Genelleştirilmesi	50
4. q -LAGUERRE POLİNOMLARINI İÇEREN LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN KANTOROVICH TIPLI GENELLEŞTİRİLMESİ	55
4.1 Giriş	55
4.2 Operatörün Oluşturulması	57
4.3 L_n^* Operatörünün Yaklaşım Özellikleri	58
4.4 L_n^* Operatörünün Yaklaşım Hızı	62
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	70
KAYNAKLAR	72
ÖZGEÇMİŞ	76

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$B(X)$	X kümesi üzerinde tanımlı, reel değerli ve sınırlı fonksiyonların kümesi
$C(X)$	X kümesi üzerinde tanımlı, reel değerli, sınırlı ve sürekli fonksiyonların kümesi
$\ f\ _{C[a,b]}$	$C[a,b]$ sürekli fonksiyon uzayında norm ($\ f\ _{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} f(x) $)
$\ f\ _{C^2[a,b]}$	$\ f\ _{C^2[a,b]} = \ f\ _{C[a,b]} + \ f'\ _{C[a,b]} + \ f''\ _{C[a,b]}$
$L_n^{(\alpha)}(x; q)$	α -ıncı basamaktan q -Laguerre polinomu
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\omega_2(f; \delta)$	f fonksiyonunun ikinci basamaktan süreklilik modülü
$K(f; t)$	f fonksiyonunun Peetre K-fonksiyoneli
$B(x, y)$	Beta fonksiyonu
$Y_v^{(n)}(x; k)$	Konhauser polinomu
$F_n(x, t)$	Konhauser polinomları için bir doğurucu fonksiyon

1. GİRİŞ

Analizin bir alanı olan yaklaşım teorisi temelde, fonksiyonlara daha basit ve kolay hesaplanabilen fonksiyonlar ile yaklaşmaktır. Bu fonksiyonlar genelde iyi bilinen polinomlar veya rasyonel fonksiyonlardır.

Reel değişkenli fonksiyonların yaklaşım teorisinin temeli, Weierstrass tarafından 1885 yılında verilen teoremdir.

Weierstrass teoremi, $[a, b]$ sonlu aralığında sürekli bir f fonksiyonu için, f ye $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsak olacak şekilde bir cebirsel n -inci dereceden polinomun var olduğunu ifade eder.

Weierstrass'ın bu teoreminin ispatı birçok yazar tarafından yapılmıştır. 1912 yılında Bernstein, yaklaşılmak istenen $f \in C[0, 1]$ fonksiyonuna $[0, 1]$ üzerinde düzgün yakınsak olan

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1])$$

şeklindeki cebirsel polinomların bir $B_n(f; x)$ dizisini oluşturarak Weierstrass teoreminin basit ve güzel bir ispatını vermiştir. Bu düzgün yakınsama probleminden sonra, yaklaşım hızı problemi ortaya çıkmıştır. $B_n(f; x)$ Bernstein polinomları $C[0, 1]$ uzayında lineer pozitif operatörler sınıfındandır (Bernstein 1912). Bu problemin çözümü süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ve Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla incelenmiştir.

1951 yılında Popoviciu, 1952'de Bohman ve 1953'de Korovkin, birbirinden bağımsız olarak, basit ve kolay uygulanabilen bir yöntem geliştirdiler. Bu yöntemle göre, lineer pozitif A_n operatörlerinin bir dizisinin $[a, b]$ kompakt aralığında f sürekli fonksiyon-

nuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, sadece üç tane $e_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2$ fonksiyonu için $A_n(e^k)$ dizisinin e_k fonksiyonuna düzgün yakınsak olmasıdır. Yani, kompakt aralıkta sürekli olan fonksiyonlara polinomlar ile yaklaşımda bazı lineer pozitif operatör dizileri kullanılabilir.

Bir lineer pozitif operatörün r -inci basamaktan bir genelleştirilmesi ilk olarak 1993 yılında Kirov ve Popova tarafından verilmiştir. Kirov ve Popova bir operatörün r -inci basamaktan genelleştirilmesi ile bu operatör arasında eşitsizlik elde ederek genelleştirilme operatörünün yaklaşım hızını kolayca hesaplamıştır. Böylece diğer matematikçiler de bu kolaylık sayesinde diğer operatörlerin genelleştirilmelerinin yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir.

Kantorovich 1930'da, klasik Bernstein operatörlerinin bir integral genelleşmesini, $f \in L_1([0, 1])$ için

$$(K_m f)(x) = (m+1) \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \int_{k/m+1}^{k+1/m+1} f(t) dt$$

biçiminde tanımlamıştır. Bu genelleştirilme, lineer pozitif operatörlerden integral tipli operatörler tanımlamak adına temel olma özelliği taşımaktadır. Birçok matematikçi, Kantorovich'in bu genelleştirilmesinden sonra başka integral genelleştirilmeleri tanımlamış ve yaklaşım hızlarını hesaplamışlardır.

Lineer pozitif operatörlerin diğer bir genelleştirilmesi, q -teori ile ilgilidir. Yaklaşım teorisinde q -genelleşme kavramı ilk kez, Lupuş tarafından Bernstein polinomlarına uygulanmıştır (Lupuş 1987). Daha sonra Phillips, q -Bernstein polinomlarının yaklaşım özelliklerini çalışmıştır (Phillips 1996). Bu çalışmalarda, q -Bernstein polinomları ile yaklaşımda elde edilen sonuçların, klasik lineer pozitif operatör dizilerine göre daha iyi olduğu görülmektedir.

Son zamanlarda, q -analizinin gösterim ve yöntemleri kullanılarak, lineer pozitif operatör dizilerinin q -genelleşmesi tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Bunlara örnek olarak Meyer-König-Zeller operatörlerinin q -genelleşmesi Trif tarafından tanımlanmış ve yaklaşım özelliklerini incelenmiştir (Trif 2000). Doğru (2006) yılında, q -Balázs-Szabados operatörlerini tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini araştırmıştır. Aral ve Gupta (2006)'da, Szász-Mirakyan operatörlerinin q -genelleşmesini vererek yaklaşım özelliklerine ilişkin sonuçlar elde etmişlerdir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 2.1.1 X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa buna X uzayında bir operatördür denir ve $L(f; x) = g(x)$ biçiminde gösterilir.

Burada $L(f; x) = L(f(t); x)$ olmak üzere L operatörü f fonksiyonunun bağlı olduğu t değişkenine göre uygulanmaktadır. Sonuç ise x değişkenine bağlı bir fonksiyondur. Bundan dolayı x değişkeni L işleminde sabit gibidir ve $L(f(x); x) = f(x)L(1; x)$ yazılabilir.

X uzayı lineer bir uzay olduğunda lineer operatörün tanımı yapılabilir.

Tanım 2.1.2 X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere,

$$L : X \rightarrow Y$$

şeklindeki L operatörünü gözönüne alalım. Eğer $\forall f, g \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f + \beta g; x) = \alpha L(f; x) + \beta L(g; x)$$

koşulu sağlanıyorsa o taktirde L operatörüne *lineer operatör* denir.

Tanım 2.1.3 Eğer bir L operatörü pozitif değerli fonksiyonu yine pozitif değerli bir fonksiyona dönüştürüyor ise yani, f bir fonksiyon ve L bir operatör olmak üzere

$$f \geq 0 \text{ iken } L(f; x) \geq 0$$

oluyor ise L operatörüne *pozitif operatör* denir.

Hem lineerlik hem de pozitiflik şartını sağlayan operatöre *lineer pozitif operatör* denir.

Uyarı 2.1.1 $f \leq 0$ iken $L(f; x) \leq 0$ gerçekleşir mi?

Kabul edelim ki $f \leq 0$ olsun. Bu durumda

$$-f \geq 0$$

elde edilir. L operatörü pozitif olduğundan

$$L(-f; x) \geq 0$$

bulunur. L operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$-L(f; x) \geq 0 \text{ ise } L(f; x) \leq 0$$

elde edilir. Yani istenilen özelliğin gerçekleştiği görülmüş olur.

2.2 Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

Lemma 2.2.1 Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani;

$$f \leq g \text{ ise } L(f) \leq L(g)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki $f \leq g$ olsun. Bu durumda $g - f \geq 0$ olacağından ve L operatörü pozitif olduğundan

$$L(g - f) \geq 0 \tag{2.1}$$

yazılabilir. Diğer taraftan L operatörü lineer olduğundan

$$L(g - f) = L(g) - L(f)$$

elde edilir. Bunun (2.1) de kullanılmasıyla

$$L(g - f) = L(g) - L(f) \geq 0 \text{ ise } L(f) \leq L(g)$$

bulunur.

Lemma 2.2.2 L bir lineer pozitif operatör ise o taktirde;

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Keyfi bir f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{2.2}$$

dir. L operatörünün lineerliğinden, monoton artanlığından ve de (2.2.2) den

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|) \tag{2.3}$$

yazılabilir. Bu ise

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

olduğunu gösterir.

Tanım 2.2.1 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n(x)$ 'e bir *fonksiyon dizisi* denir ve (f_n) ile gösterilir.

Tanım 2.2.2 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $L_n(f; x)$ 'e bir *operatör dizisi* denir ve (L_n) ile

gösterilir.

Tanım 2.2.3 Kapalı bir $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a, b]$ *fonksiyon uzayı* denir. Bu uzaydaki norm,

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Burada

1. $\forall f, g \in C[a, b]$ için $f + g \in C[a, b]$
2. $\forall f, g \in C[a, b]$ için $f + g = g + f$
3. $\forall f, g, h \in C[a, b]$ için $(f + g) + h = f + (g + h)$
4. $\forall f \in C[a, b]$ için $\exists \theta$ vardır ki $f + \theta = \theta + f = f$
5. $\forall f \in C[a, b]$ için $\exists f_1$ vardır ki $f + f_1 = f_1 + f = \theta$
6. $\forall f \in C[a, b]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda f \in C[a, b]$
7. $\forall f \in C[a, b]$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$
8. $\forall f \in C[a, b]$ için $1.f = f$
9. $\forall f \in C[a, b]$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$
10. $\forall f, g \in C[a, b]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$
11. $\forall f \in C[a, b]$ için $\|f\| \geq 0$
12. $\forall f \in C[a, b]$ için $\|f\| = 0 \iff f = 0$
13. $\forall f \in C[a, b]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
14. $\forall f, g \in C[a, b]$ için $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

koşulları sağlandığından $C[a, b]$ *Lineer Normlu Uzay*dır.

Tanım 2.2.4 (f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna $C[a, b]$ lineer normlu uzayında düzgün yakınsak olması için, $\forall x \in [a, b]$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

olmasıdır. Daha açık olarak ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitliğinin sağlanması demektir.

2.3 Süreklilik Modülü

$f \in C[a, b]$ olsun. $\forall \delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)| \quad (2.4)$$

ile tanımlanan $\omega(f; \delta)$ ifadesine f fonksiyonunun *süreklilik modülü* denir (Bkz. örneğin Altomare ve Campiti 1994).

Lemma 2.3.1 Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar (Bkz. örneğin Altomare ve Campiti 1994):

- (i). $\omega(f; \delta) \geq 0$
- (ii). $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$
- (iii). $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f; m\delta) \leq m \omega(f; \delta)$
- (iv). $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (1 + \lambda) \omega(f; \delta)$
- (v). $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$
- (vi). $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$
- (vii). $|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega(f; \delta)$.

İspat.

(i). Tanım gereğince, süreklilik modülü mutlak değerin supremumu olduğundan ispat açıktır.

(ii). $\delta_1 \leq \delta_2$ için $|t - x| \leq \delta_2$ bölgesinin $|t - x| \leq \delta_1$ bölgesinden daha büyük olduğu açıktır. Bölge büyüdüğü taktirde, alınan supremumda büyüdüğünden ispat açıktır.

(iii). Süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq m\delta}} |f(t) - f(x)|$$

yazılabilir. $|t - x| \leq m\delta$ için $t = x + mh$ seçilmesiyle $|h| \leq \delta$ elde edilir. O taktirde

$$\omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)|$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan

$$\sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)| = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} \left| \sum_{k=0}^{m-1} [f(x + (k+1)h) - f(x + kh)] \right|$$

olup, sağ tarafa üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + (k+1)h) - f(x + kh)| \\ &\leq \omega(f; \delta) + \dots + \omega(f; \delta) \\ &= m \omega(f; \delta) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv). $\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmı $[\lambda]$ ile gösterilirse bu durumda $[\lambda] < \lambda < [\lambda] + 1$ eşitsizliğinin geçerli olduğu açıktır. Şimdi bu eşitsizlikten ve (ii) de ispatlanan $\omega(f; \delta)$ nın azalmayan fonksiyon olmasını kullanarak

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq \omega(f; ([\lambda] + 1)\delta)$$

eşitsizliği yazılabilir. $[\lambda]$ pozitif bir tamsayı olduğundan üstteki eşitsizliğin sağ

tarafına (iii) özelliği uygulanabilir. Bu durumda

$$\omega(f; ([\lambda] + 1) \delta) \leq ([\lambda] + 1) \omega(f; \delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ için $[\lambda] + 1 \leq \lambda + 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\omega(f; ([\lambda] + 1) \delta) \leq (\lambda + 1) \omega(f; \delta)$$

olur. Sonuç olarak

$$\omega(f; \lambda \delta) \leq (\lambda + 1) \omega(f; \delta)$$

elde edilir ki, bu ise ispatı tamamlar.

(v). $|t - x| \leq \delta$ eşitsizliğindeki $\delta \rightarrow 0$ olması $t \rightarrow x$ olması anlamına gelir. f fonksiyonu sürekli olduğundan, süreklilik tanımına göre $t \rightarrow x$ için $|f(t) - f(x)| \rightarrow 0$ olduğundan ispat açıktır.

(vi). $\omega(f; \delta)$ ifadesinde $\delta = |t - x|$ seçilirse

$$\omega(f; |t - x|) = \sup_{x \in [a, b]} |f(t) - f(x)|$$

elde edilir. O halde $|f(t) - f(x)|$ lerin supremumu $\omega(f; |t - x|)$ olacağından, $|f(t) - f(x)|$ ifadesi $\omega(f; |t - x|)$ den küçük kalacaktır. Bu ise istenilendir.

(vii). (vi) özelliğinden

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|) = \omega\left(f; \frac{|t - x|}{\delta} \delta\right)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte (iv) özelliği kullanılırsa

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta)$$

bulunur ki bu ise ispatı tamamlar.

2.4 Kullanılacak Olan Diğer Tanımlar

Tanım 2.4.1 Toplam için *Cauchy-Schwarz eşitsizliği*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\zeta_i \eta_i| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\zeta_k)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{\infty} (\eta_l)^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlıdır (Cauchy, Bunyakovsky, Schwarz).

Tanım 2.4.2 Her $t, x \in I \subset \mathbb{R}$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq M |t - x|^\alpha$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna $Lip_M(\alpha)$ ($0 < \alpha \leq 1$) *Lipschitz sınıfındandır* denir (Lipschitz 1864).

Tanım 2.4.3 Toplam için *Hölder eşitsizliği* $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\zeta_i \eta_i| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\zeta_k)^p \right)^{1/p} \left(\sum_{l=1}^{\infty} (\eta_l)^q \right)^{1/q}$$

şeklinde tanımlıdır (Rogers 1888, Hölder 1889).

Tanım 2.4.4 $C^2[0, b]$ uzayı, f , f' ve f'' fonksiyonlarının $[0, b]$ kapalı aralığında sürekli olduğu uzayı belirtmektedir.

$C^2[0, b]$ uzayındaki norm

$$\|f\|_{C^2[0, b]} := \|f\|_{C[0, b]} + \|f'\|_{C[0, b]} + \|f''\|_{C[0, b]}$$

ile tanımlanmaktadır (Bleimann vd. 1980).

Tanım 2.4.5 Sürekli fonksiyonlar uzayındaki *Peetre K-fonksiyoneli*

$$K(f, \delta) = \inf_{g \in C^2[0, b]} \left\{ \|f - g\|_{C[0, b]} + \delta \|g\|_{C^2[0, b]} \right\}$$

ile tanımlıdır (Bleimann vd. 1980).

Tanım 2.4.6 (İntegral için Jensen Eşitsizliği) Reel eksende Φ konveks ve f negatif olmayan reel değerli Lebesgue integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\Phi\left(\int_a^b f(x) dx\right) \leq \int_a^b \Phi((b-a)f(x)) \frac{1}{b-a} dx$$

sağlanır (Wheeden ve Zygmund 1977).

Tanım 2.4.7 (İntegral için Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\int |\zeta_i \eta_i| \leq \left(\int (\zeta_k)^p \right)^{1/p} \left(\int (\eta_l)^q \right)^{1/q}$$

şeklinde tanımlıdır (Hölder 1889).

Tanım 2.4.8 (İntegral için Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

$$\int |\zeta_i \eta_i| \leq \left(\int (\zeta_k)^2 \right)^{1/2} \left(\int (\eta_l)^2 \right)^{1/2}$$

şeklindedir (Hardy vd. 1952).

Tanım 2.4.9 $f \in C[0, b]$ fonksiyonunun *ikinci basamaktan süreklilik modülü*

$$\omega_2(f; \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{x, x+2h \in [0, b]} |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)|$$

ile tanımlanmaktadır (DeVore ve Lorentz 1993).

Tanım 2.4.10 *Gama fonksiyonu*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

olarak tanımlıdır (Euler 1730). $\Gamma(x) = (x-1)!$ ($x > 0$, $\Gamma(0) = 1$) özelliğine sahiptir.

Tanım 2.4.11 $\operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0$ için *Beta fonksiyonu*

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Euler 1730). Beta fonksiyonu $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ özelliğini gerçekler.

Lemma 2.4.1 Sabit bir $C > 0$ sayısı için

$$K_2(f; \delta) \leq C\omega_2\left(f; \sqrt{\delta}\right)$$

dir (DeVore ve Lorentz 1993).

Tanım 2.4.12 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\omega(x)$, I da tanımlı pozitif bir fonksiyon olsun. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m \neq n$ olmak üzere

$$(\phi_n, \phi_m) = \int_I \omega(x) \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0$$

oluyorsa $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ polinom sistemine I aralığında $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre *ortogonal*dir denir.

Lemma 2.4.2 $I \subset \mathbb{R}$ aralığında $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ polinom sisteminin $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olması için gerek ve yeter koşul,

$$\int_I \phi_n(x) \omega(x) x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

ifadesinin gerçeklenmesidir.

Tanım 2.4.13 $F(x, t)$ iki değişkenli fonksiyonu değişkenlerden birine göre örneğin t ye göre,

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x) t^n$$

biçiminde bir Taylor serisine açılıyor ise $F(x, t)$ fonksiyonuna $\{\phi_n(x)\}$ fonksiyonlar cümlesinin *doğurucu fonksiyonu* denir. Burada c_n ler x ve t den bağımsız olup n nin fonksiyonudur.

Tanım 2.4.14 $r(x)$ ve $s(x)$ sırasıyla x e göre $h > 0$ ve $k > 0$ ıncı dereceden reel değerli polinomlar olsunlar. $R_m(x)$ ve $S_n(x)$ de sırasıyla $r(x)$ ve $s(x)$ e göre m -yinci ve n -yinci dereceden polinomları gösterebilirler. Bu durumda $R_m(x)$ ve $S_n(x)$ sırasıyla x e göre mh -ıncı ve nk -yıncı dereceden polinomlar olurlar. $r(x)$ ve $s(x)$ polinomlarına *temel polinomlar* denir.

Tanım 2.4.15 $m, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere eğer

$$J_{m,n} = \int_a^b \rho(x) R_m(x) S_n(x) dx = \begin{cases} 0 & ; m \neq n \\ \neq 0 & ; m = n \end{cases}$$

ise, $[R_m(x)]$ ve $[S_n(x)]$ polinom kümelerine, (a, b) aralığı üzerinde, $\rho(x)$ uygun ağırlık fonksiyonuna ve $r(x)$ ve $s(x)$ temel polinomlarına göre *biortogonal*dir denir.

2.5 q -Analizinin Özellikleri

Tanım 2.5.1 Bir f fonksiyonunun q -diferensiyeli $d_q f(x)$ ile gösterilir ve

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x)$$

şeklinde tanımlanır (Andrews vd. 1999).

Tanım 2.5.2 $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ olmak üzere bir f fonksiyonunun q -türevi $D_q f(x)$ ile gösterilir ve

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

ile tanımlanır (Andrews vd. 1999). Eğer f türevlenebilirse $\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x) = f'(x)$ dir.

Keyfi a ve b sabitleri için, q -türev

$$D_q(af(x) + bg(x)) = aD_q f(x) + bD_q g(x)$$

özelliğine sahiptir.

Tanım 2.5.3 Her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $q \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere k nın q -analoğu

$$[k] = [k]_q := \begin{cases} (1 - q^k) / (1 - q) & ; q \neq 1 \\ k & ; q = 1 \end{cases} \quad \text{ve } [0] := 0$$

şeklinde tanımlıdır (Andrews vd. 1999).

Tanım 2.5.4 Her $k \in \mathbb{N}$ ve $q \in \mathbb{R}^+$ için $k!$ in q -analoğu (q -faktöriyeli)

$$[k]! = [k]_q! := \begin{cases} [1][2] \dots [k] & ; k \geq 1 \\ 1 & ; k = 0 \end{cases}$$

şeklindedir (Andrews vd. 1999).

Lemma 2.5.1 $0 \leq k \leq n$ tamsayıları için, q -binom katsayıları

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-k]! [k]!}$$

biciminde tanımlanmaktadır (Andrews vd. 1999).

İspat. Andrews vd. 1999 yılındaki çalışmalarında, q -analizi teorisinden

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1 - q^{n+1-k})(1 - q^{n+2-k}) \dots (1 - q^n)}{(1 - q^k)(1 - q^{k-1}) \dots (1 - q)}$$

olduğunu göstermişlerdir. Burada pay ve payda $(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^{n-k})$ ile çarpılırsa

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^{n-k})(1 - q^{n-k+1})(1 - q^{n-k+2}) \dots (1 - q^n)}{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^{n-k})(1 - q) \dots (1 - q^{k-1})(1 - q^k)}$$

elde edilir. *Tanım 2.5.3* den

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[1][2] \dots [n-k][n-k+1] \dots [n]}{[1][2] \dots [n-k][1][2] \dots [k]}$$

olduğu görülür. *Tanım 2.5.4* dikkate alınır

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

q -binom katsayılarında $q \rightarrow 1$ durumunda $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ klasik binom katsayıları elde edilir.

Tanım 2.5.5 Negatif olmayan herhangi k ve n tamsayıları için $0 \leq k \leq n$ olması durumunda, q -Pochhammer sembolü

$$[(n)_k] := [n][n+1][n+2] \dots [n+k-1]$$

şeklindedir (Andrews vd. 1999).

Tanım 2.5.6 f reel değerli bir fonksiyon, $0 < a < b$ ve $0 < q < 1$ olsun. f fonksiyonunun $[0, a]$ ve $[a, b]$ genel aralığında q -Jackson integrali (Thomae 1869,

Jackson 1910) sırasıyla

$$\int_0^a f(t) d_q t = (1-q) a \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j a) q^j$$

ve

$$\int_a^b f(t) d_q t = \int_0^b f(t) d_q t - \int_0^a f(t) d_q t$$

şeklindedir.

Tanım 2.5.7 $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $0 < a < b$ ile $0 < q < 1$ olmak üzere *Riemann tipli q -integral*

$$\int_a^b f(t) d_q^R t = (1-q)(b-a) \sum_{j=0}^{\infty} f(a + (b-a)q^j) q^j$$

ile tanımlanmaktadır (Marinković vd. 2008).

2.6 Lineer Pozitif Operatörlerin Önemi

Çağdaş fonksiyonel analiz ve fonksiyonlar teorisinde yer alan lineer pozitif operatörlerle yaklaşım konusu son elli yıl içinde ortaya çıkmış bir araştırma alanıdır.

Alman Matematikçi Weierstrass 1885 yılında sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığını ispatlamıştır. 1912 yılında ise Rus Matematikçi S. N. Bernstein bu polinomun, $x \in [0, 1]$ için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (2.5)$$

şeklinde olduğunu ispatlamıştır.

Bernstein'in bu ispatını vermeden önce kullanacağımız bazı ifadeleri ve ispatlarını verelim.

Lemma 2.6.1 (2.5) ile tanımlanan Bernstein operatörleri için

$$B_n(1; x) = 1 \quad (2.6)$$

$$B_n(t; x) = x \quad (2.7)$$

$$B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \quad (2.8)$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. Binom açılımından

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

olup, bu açılımda $a = x$ ve $b = 1 - x$ alınırsa

$$B_n(1; x) = 1$$

bulunur. Bu ise (2.6) eşitsizliğini verir. (2.5) eşitliğinde $f(t) = t$ alınırsa

$$\begin{aligned} B_n(t; x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Binom açılımından

$$B_n(t; x) = x$$

bulunur ki bu ise (2.7) nin ispatını tamamlar. Son olarak (2.5) eşitliğinde $f(t) = t^2$

alırsa

$$\begin{aligned}
B_n(t^2; x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n} + \frac{1}{n} \right) \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
B_n(t^2; x) &= \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{x^2(n-1)}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-k-2} \\
&\quad + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1}
\end{aligned}$$

olup Binom açılımından

$$B_n(t^2; x) = \frac{x^2(n-1)}{n} + \frac{x}{n} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

bulunur. Bu ise (2.8) eşitliğini verir.

Teorem 2.6.1 (S. N. Bernstein, 1912) (2.5) ile tanımlı Bernstein polinomu $[0, 1]$ aralığında sürekli olan f fonksiyonuna aynı aralıkta düzgün yakınsaktır.

İspat. (2.5) ve (2.6) den

$$|B_n(f; x) - f(x)| = \left| \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right|$$

bulunur. $x \in [0, 1]$ olduğundan $\binom{n}{k} x^k \geq 0$ ve $(1-x)^{n-k} \geq 0$ dır. Üçgen eşitsizliğin-

den

$$\begin{aligned}
|B_n(f; x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

yazılabilir. f fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \delta \text{ iken } \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \varepsilon$$

dur. O takdirde

$$\begin{aligned}
|B_n(f; x) - f(x)| &\leq \varepsilon \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

elde edilir. f sınırlı olduğundan $\forall x \in [0, 1]$ için öyle bir $M > 0$ vardır ki $|f(x)| < M$

dir. O halde

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + |f(x)| < 2M$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
|B_n(f; x) - f(x)| &\leq \varepsilon \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad + 2M \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \varepsilon \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad + 2M \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

bulunur. (2.6) den

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (2.9)$$

dır. Diğer taraftan

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta \text{ iken } \frac{\left(\frac{k}{n} - x\right)^2}{\delta^2} > 1 \quad (2.10)$$

yazılabilir. (2.10), (2.9) de kullanılırsa

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olur. Burada $x \in [0, 1]$ ve δ yeterince küçük olduğundan $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$ iken $0 \leq k \leq n$ elde edilir. O takdirde

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

yazılabilir. Dolayısıyla (2.6), (2.7) ve (2.8) den

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{n\delta^2} [x - x^2]$$

bulunur. $x \in [0, 1]$ olduğundan $\max_x \{x - x^2\} = \frac{1}{4}$ dür. O halde yukarıdaki eşitsizliğin her iki yanının $x \in [0, 1]$ için maksimumu alınır

$$\|B_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}$$

olur. Bu ise

$$\|B_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olması demektir.

Bohman (1951) ve P. P. Korovkin (1953)'te sonlu kapalı aralıktaki sürekli fonksiyonlara yakınsama koşullarına ilişkin aşağıdaki teoremi vermiştir.

2.7 P. P. Korovkin Teoremi $f \in C[a, b]$ ve tüm reel ekseninde sınırlı

$$|f(x)| < M_f \quad (2.11)$$

olsun. Eğer $L_n(f; x)$ lineer pozitif operatör dizisi $\forall x \in [a, b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^i; x) - x^i\|_{C[a, b]} = 0 \quad (i = 0, 1, 2)$$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda $[a, b]$ aralığında her $f \in C[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[a, b]} = 0$$

dir (Korovkin 1953).

İspat. Kabul edelim ki $f \in C[a, b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımından dolayı

$$|t - x| \leq \delta \text{ iken } |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

dir. $|t - x| > \delta$ olduğunda ise (2.11) den ve üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \quad (2.12)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$|t - x| > \delta \text{ iken } \frac{(t - x)^2}{\delta^2} > 1 \quad (2.13)$$

sağlanır. (2.12) ve (2.13) den

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M_f \leq 2M_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} |t - x| &\leq \delta \text{ iken } |f(t) - f(x)| < \varepsilon \\ |t - x| &> \delta \text{ iken } |f(t) - f(x)| \leq 2M_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2} \quad (2.14)$$

dir. Eğer (L_n) operatör dizisinin $i = 0, 1, 2$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^i; x) - x^i\|_{C[a, b]} = 0$ koşullarını sağlandığı gösterilirse ispat tamamlanır.

L_n operatörünün lineerlik özelliğinden

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| = |L_n((f(t) - f(x)); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)|$$

dir. Burada üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq |L_n((f(t) - f(x)); x)| + |f(x)| |L_n(1; x) - 1|$$

yazılabilir. Diğer taraftan lineer pozitif operatörler monoton artan ve

$$f(t) - f(x) \leq |f(t) - f(x)|$$

özelliğini sağlayacağından

$$|L_n((f(t) - f(x)); x)| \leq |L_n(|f(t) - f(x)|; x)|$$

olur. L_n operatörü pozitif olduğundan ve $|f(t) - f(x)| \geq 0$ eşitsizliği gerçektendiğinden

$$|L_n(|f(t) - f(x)|; x)| = L_n(|f(t) - f(x)|; x)$$

dir. O halde

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |(L_n(1; x) - 1)|$$

olduğu gösterilmiş olur. (2.11) den

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + M_f |(L_n(1; x) - 1)|$$

yazılabilir. L_n operatörü monoton artan olduğundan, (2.14) ün kullanılması ile

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n\left(\varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x\right) + M_f |(L_n(1; x) - 1)| \quad (2.15)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} L_n\left(\varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} L_n((t-x)^2; x) \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [(L_n(t^2; x) - x^2) \\ &\quad + 2x(x - L_n(t; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1)] \end{aligned}$$

yazılabilir. Son bulunan ifadenin (2.15) de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &\leq \varepsilon L_n(1; x) + M_f |(L_n(1; x) - 1)| \\ &\quad + \frac{2M_f}{\delta^2} [(L_n(t^2; x) - x^2) \\ &\quad + 2x(x - L_n(t; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1)] \quad (2.16) \end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin koşullarının (2.16) da kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

bulunur. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |L_n(f(t); x) - f(x)| = 0$$

dır.

Görüldüğü gibi Korovkin teoremi bu konudaki çalışmalara büyük katkı sağlamıştır. Verilen operatörün belirli test fonksiyonları için düzgün yakınsaklığın gerçekleşmesi, sonlu aralıkta sürekli bütün fonksiyonların bu operatör yardımıyla düzgün yakınsamasının söylenmesine yetmektedir.

3. KONHAUSER POLİNOMLARINI İÇEREN LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN ve KANTOROVICH TİPLİ GENELLEŞTİRİLMESİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, ilk olarak Konhauser polinomları tanıtılacaktır ve bu polinomların sağladığı bir rekürans formülü verilecektir. Sonraki kısımda, operatörün kurulması sürecinde hangi operatörlerin kullanıldığı gösterilecektir ve Konhauser polinomlarını içeren lineer pozitif operatör oluşturulacaktır. Üçüncü kısımda, operatörün Korovkin teoreminin koşullarını sağladığı gösterilecektir. Dördüncü kısımda, operatörün fonksiyona yaklaşma hızı süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar ve Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla hesaplanacaktır. Beşinci kısımda, operatörün r -inci genelleştirilmesi tanımlanacaktır ve L_n operatörü yardımıyla $L_n^{[r]}$ genelleştirilmiş operatörün yaklaşım hızı hesaplanılacaktır. Sonraki kısımda, L_n operatörünün bir fonksiyonel diferensiyel denklemi sağladığı ispat edilecektir. Yedinci bölümde, L_n operatörünün Kantorovich tipli bir integral genelleştirilmesi tanımlanacaktır. Sekizinci kısımda, operatörün Korovkin teoremini gerçeklediği gösterilecektir. Dokuzuncu kısımda, L_n^* operatörünün f fonksiyonuna yaklaşım hızı, sırasıyla, süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ve Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla hesaplanacaktır. Son kısımda, L_n^* operatörünün r -inci genelleştirilmesi tanımlanacak ve r -inci genelleştirilme olan $L_n^{*[r]}$ operatörünün f fonksiyona yaklaşım hızı L_n^* operatörünün yardımı ile hesaplanacaktır.

3.1 Giriş

J. D. E. Konhauser, 1965 yılında biortogonal polinomların teorisini vermiştir. 1967 yılında ise, $\nu \in \mathbb{N}$ olmak üzere klasik $L_\nu^{(n)}(x)$ Laguerre polinomları yardımıyla $Y_\nu^{(n)}(x; k)$ ve $Z_\nu^{(n)}(x; k)$ ($n > -1$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$)

$$Y_\nu^{(n)}(x; 1) = Z_\nu^{(n)}(x; 1) = L_\nu^{(n)}(x)$$

eşitliğini sağlayan biortogonal polinom çiftini tanımlamıştır. Burada $Y_\nu^{(n)}(x; k)$

$$Y_\nu^{(n)}(x; k) = \frac{1}{\nu!} \sum_{i=0}^{\nu} \frac{x^i}{i!} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} \left(\frac{j+n+1}{k} \right)_\nu \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlı olup, aynı zamanda Konhauser polinomu olarak da adlandırılır. $Y_v^{(n)}(x; k)$ Konhauser polinomları için bir doğurucu fonksiyon (Carlitz 1968)

$$(1-t)^{-(n+1)/k} \exp \left\{ -x \left[(1-t)^{-1/k} - 1 \right] \right\} = \sum_{v=0}^{\infty} Y_v^{(n)}(x; k) t^v, \quad n > 0 \quad (3.2)$$

şeklinededir. Burada $t \in (-\infty, 0]$ için $Y_v^{(n)}(t; k) \geq 0$ dır. $Y_v^{(n)}(t; k)$ Konhauser polinomunun gerçekleştiği bir rekürans formülü (Srivastava 1982)

$$tY_{v-1}^{(n+1)}(t; k) = (k(v-1) + n + 1) Y_{v-1}^{(n)}(t; k) - kvY_v^{(n)}(t; k) \quad (3.3)$$

şeklinededir ve burada $v \in \mathbb{Z}^-$ için $Y_v^{(n)}(t; k) = 0$ dır.

3.2 Operatörün Oluşturulması

Meyer-König ve Zeller (MKZ) operatörü, 1960 yılında Meyer-König ve Zeller tarafından, $x \in [0, 1)$ için

$$M_n(f; x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n+1}\right) \binom{n+k}{k} x^k \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

M_n operatöründe $\frac{k}{k+n+1}$ yerine $\frac{k}{k+n}$ alınırsa, operatör Cheney and Sharma (1964) tarafından tanımlanan

$$M_n^*(f; x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n}\right) \binom{n+k}{k} x^k \quad (3.5)$$

Bernstein kuvvet serisine döner. Bu operatörler hakkında birçok çalışma vardır. Bunlardan bazıları Müller'in (1967), Sikkema'nın (1970), Lupaş ve Müller'in (1970),

Becker ve Nessel'in (1978), Khan'ın (1989) ve son olarak Abel'in (1995) yaptığı çalışmalardır. Son zamanlarda bu operatörlerin bazı genelleştirilmesi Doğru (1998) ve Agratini (2001) tarafından incelenmiştir.

Cheney ve Sharma, aynı yılda $L_k^{(n)}(0) = \binom{n+k}{k}$ olduğunu dikkate alarak, $x \in [0, 1]$ ve $t \in (-\infty, 0]$ için, M_n^* operatörünün bir genelleşmesi olan

$$P_n(f; x) = \exp\left(\frac{tx}{1-x}\right) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n}\right) L_k^{(n)}(t) x^k (1-x)^{n+1} \quad (3.6)$$

operatörünü tanımlamışlardır. Burada, $L_k^{(n)}(x)$ Laguerre polinomları olup

$$L_k^{(n)}(x) = \frac{(n+k)!}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \frac{x^j}{(j+n)!} \quad (3.7)$$

açık ifadesine sahiptir. Kolayca görülmektedir ki, (3.6) ile tanımlı olan P_n operatörü, $t = 0$ için (3.5) ile verilen M_n^* operatörünü verir.

Bu bölümde, (3.1) de tanımlanan olan $Y_v^{(n)}(x; k)$ Konhauser polinomlarını içeren

$$(L_n f)(x, t; k) = \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{kv}{k(v-1) + n + 1}\right) Y_v^{(n)}(t; k) x^v \quad (3.8)$$

lineer pozitif operatörü incelenecektir. Burada $x \in [0, 1)$, $t \in (-\infty, 0]$ ve $k < n+1$ şeklindedir. Carlitz (1968), $Y_v^{(n)}(t; k)$ Konhauser polinomları için bir doğurucu fonksiyonu

$$F_n(x, t) = \sum_{v=0}^{\infty} Y_v^{(n)}(t; k) x^v, \quad n > 0 \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada $F_n(x, t)$ lerin açık ifadesi

$$F_n(x, t) = (1-x)^{-\frac{n+1}{k}} \exp\left\{-t \left[(1-x)^{-\frac{1}{k}} - 1\right]\right\} \quad (3.10)$$

şeklindedir ve $t \in (-\infty, 0]$ için $Y_v^{(n)}(t; k) \geq 0$ dir.

(3.8) ile tanımlanan L_n operatörünün pozitif ve lineer olduğu kolayca görülebilir.

(3.8) ile tanımlanan L_n operatöründe $k = 1$ alınır, (3.6) ile tanımlanan P_n operatörü elde edilir. (3.8) operatöründe $k = 1$ ve $t = 0$ alınması durumunda ise (3.5) ile tanımlı M_n^* operatörü elde edilir. Yani, L_n operatörü özel durumlarda P_n ve M_n^* operatörlerini vermektedir. O halde L_n operatörü (3.5) ve (3.6) ile tanımlanan operatörleri de içine alan daha geniş bir operatördür.

3.3 L_n Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda, L_n operatörünün Korovkin teoreminin koşullarını gerçekleştirdiği gösterilecektir.

Teorem 3.3.1 Eğer f fonksiyonu $[0, b]$ ($0 < b < 1$) aralığında sürekli, $x \in [0, b]$ ve $\frac{|t|}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) sağlanıyorsa bu durumda $[0, b]$ aralığında $L_n f$ operatörü f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

İspat. L_n operatörünün lineer ve pozitif olduğu kullanılır ve (3.9) eşitliği dikkate alınır, $f(s) = e_0(s) = 1$ ($e_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \dots$) için

$$(L_n e_0)(x, t; k) = \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} Y_v^{(n)}(t; k) x^v = 1 \quad (3.11)$$

elde edilir.

$f(s) = e_1(s) = s$ alınır ve (3.3) ile verilen rekürans formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} (L_n e_1)(x, t; k) &= \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{kv}{k(v-1) + n + 1} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \\ &= \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=1}^{\infty} \left(Y_{v-1}^{(n)}(t; k) - \frac{t}{k(v-1) + n + 1} Y_{v-1}^{(n+1)}(t; k) \right) x^v \end{aligned} \quad (3.12)$$

eşitliği elde edilir. $t \in (-\infty, 0]$ olduğu gözönüne alınır

$$\frac{t}{F_n(x, t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{k(v-1) + n + 1} Y_{v-1}^{(n+1)}(t; k) x^v \leq 0$$

eşitsizliğinin doğru olduğu görülür. O halde, (3.12) eşitliğinde yukarıdaki eşitsizlik kullanılırsa

$$\begin{aligned} (L_n e_1)(x, t; k) &\geq \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=1}^{\infty} Y_{v-1}^{(n)}(t; k) x^v \\ &= \frac{x}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \end{aligned}$$

elde edilir. (3.9) eşitliği, yukarıdaki eşitsizlikte dikkate alınır

$$x \leq (L_n e_1)(x, t; k) \quad (3.13)$$

bulunur. Diğer taraftan, (3.12) eşitliğinden

$$(L_n e_1)(x, t; k) = x - \frac{tx}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{kv + n + 1} Y_v^{(n+1)}(t; k) x^v$$

yazılabileceği görülebilir. (3.10) eşitliğinden $F_{n+1}(x, t) = (1-x)^{-1/k} F_n(x, t)$ sağlandığı ve $\frac{1}{kv + n + 1} \leq \frac{1}{n}$ eşitsizliğinin doğru olduğu gözönüne alınır

$$(L_n e_1)(x, t; k) - x \leq -\frac{tx}{n(1-x)^{1/k} F_{n+1}(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} Y_v^{(n+1)}(t; k) x^v$$

elde edilir. (3.2) eşitliğinden

$$(L_n e_1)(x, t; k) - x \leq -\frac{tx}{n} (1-x)^{-1/k}$$

bulunur. Şimdi, yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın mutlak değeri alınır ve $x \in [0, b]$ için $(1-x)^{-1/k} \leq \frac{1}{1-b}$ eşitsizliği yerine yazılırsa

$$|(L_n e_1)(x, t; k) - x| \leq \frac{|t|x}{n(1-b)} \quad (3.14)$$

olur. (3.14) eşitsizliğinin her iki tarafının $[0, b]$ üzerinden maksimumu alınırsa

$$\|(L_n e_1)(x, t; k) - x\|_{C[0, b]} \leq \frac{|t| b}{n(1-b)} \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.13) ile (3.15) birlikte düşünülürse

$$0 \leq \|(L_n e_1)(x, t; k) - x\|_{C[0, b]} \leq \frac{|t| b}{n(1-b)} \quad (3.16)$$

bulunur.

Son olarak $f(s) = e_2(s) = s^2$ alınırsa, (3.8) ile tanımlanan L_n operatörünün tanımından

$$(L_n e_2)(x, t; k) = \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{kv}{k(v-1) + n + 1} \right)^2 Y_v^{(n)}(t; k) x^v \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.3) rekürans formülü iki kez kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left(\frac{vk}{k(v-1) + n + 1} \right)^2 Y_v^{(n)}(t; k) &= \frac{k(v-2) + n + 1}{k(v-1) + n + 1} Y_{v-2}^{(n)}(t; k) - \frac{t}{k(v-1) + n + 1} Y_{v-2}^{(n+1)}(t; k) \\ &+ \frac{k}{k(v-1) + n + 1} Y_{v-1}^{(n)}(t; k) - \frac{tkv}{(k(v-1) + n + 1)^2} Y_{v-1}^{(n+1)}(t; k) \end{aligned} \quad (3.18)$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Bu eşitlik (3.17) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (L_n e_2)(x, t; k) - x^2 &= \left[\frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{k(v-2) + n + 1}{k(v-1) + n + 1} Y_{v-2}^{(n)}(t; k) x^v - x^2 \right] \\ &- \frac{t}{F_n(x, t)} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{k(v-1) + n + 1} Y_{v-2}^{(n+1)}(t; k) x^v \\ &+ \frac{k}{F_n(x, t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{k(v-1) + n + 1} Y_{v-1}^{(n)}(t; k) x^v \\ &- \frac{kt}{F_n(x, t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{(k(v-1) + n + 1)^2} Y_{v-1}^{(n+1)}(t; k) x^v \end{aligned} \quad (3.19)$$

dört toplamdan oluşan eşitlik bulunur. $\frac{kv+n+1}{k(v+1)+n+1} < 1$ eşitsizliği ve (3.9) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{k(v-2) + n + 1}{k(v-1) + n + 1} Y_{v-2}^{(n)}(t; k) x^v - x^2 &< \frac{x^2}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} Y_v^{(n)}(t; k) x^v - x^2 \\ &= x^2 - x^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde edilir. $\frac{1}{k(v+1)+n+1} < \frac{1}{n}$ eşitsizliği, (3.10) eşitliğinden $\frac{F_{n+1}(x, t)}{F_n(x, t)} = (1-x)^{-1/k}$ ve (3.9) eşitliliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{-t}{F_n(x, t)} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{k(v-1)+n+1} Y_{v-2}^{(n+1)}(t; k) x^v &< \frac{-tx^2}{n(1-x)^{1/k} F_{n+1}(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} Y_v^{(n+1)}(t; k) x^v \\ &= -\frac{tx^2}{n(1-x)^{1/k}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

olur. Benzer şekilde, $\frac{1}{kv+n+1} < \frac{1}{n}$ eşitsizliği ve (3.9) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{k}{F_n(x, t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{k(v-1) + n + 1} Y_{v-1}^{(n)}(t; k) x^v &< \frac{kx}{nF_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \\ &= \frac{kx}{n} \end{aligned} \quad (3.22)$$

bulunur. Son olarak $\frac{v}{(kv+n+1)^2} < \frac{1}{n}$ eşitsizliği, $\frac{F_{n+1}(x, t)}{F_n(x, t)} = (1-x)^{-1/k}$ ve (3.9) eşitlikleri kullanılacak olursa

$$\begin{aligned} \frac{-kt}{F_n(x, t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{(k(v-1)+n+1)^2} Y_{v-1}^{(n+1)}(t; k) x^v &< \frac{-ktx}{n(1-x)^{1/k} F_{n+1}(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} Y_v^{(n+1)}(t; k) x^v \\ &= -\frac{ktx}{n(1-x)^{1/k}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.20), (3.21), (3.22) ve (3.23) eşitsizlikleri (3.19) eşitliğinde yazılırsa

$$(L_n e_2)(x, t; k) - x^2 < -\frac{tx^2}{n(1-x)^{1/k}} + \frac{kx}{n} - \frac{ktx}{n(1-x)^{1/k}} \quad (3.24)$$

eşitsizliği bulunur. (3.24) eşitsizliğinin her iki tarafın mutlak değeri alındıktan sonra,

$x \in [0, b]$ aralığı üzerinden maksimumu alınır

$$\|(L_n e_2)(x, t; k) - x^2\|_{C[0, b]} < \frac{1}{n} \left(\frac{|t| b^2}{1-b} + kb + \frac{k|t| b}{1-b} \right) \quad (3.25)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$s^2 = (s - x)^2 + 2xs - x^2$$

açılımına L_n operatörü uygulanırsa

$$(L_n e_2)(x, t; k) - x^2 = (L_n(e_1 - x)^2)(x, t; k) + 2x(L_n(e_1 - x))(x, t; k)$$

eşitliği bulunur. L_n operatörünün pozitifliği, $x \in [0, b]$ ve (3.13) eşitsizliği kullanılırsa

$$(L_n e_2)(x, t; k) - x^2 \geq 0 \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.25) ve (3.26) dan

$$0 \leq \|(L_n e_2)(x, t; k) - x^2\|_{C[0, b]} < \frac{1}{n} \left(\frac{|t| b^2}{1-b} + kb + \frac{k|t| b}{1-b} \right) \quad (3.27)$$

yazılabilir. (3.11), (3.16) ve (3.27) den, Korovkin teoreminin koşullarının gerçekleştiği görülür. Dolayısıyla $f \in C[0, b]$ için $L_n f$ operatörü f fonksiyonuna $[0, b]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

3.4 L_n Operatörünün Yaklaşım Hızı

(3.8) ile verilen $L_n f$ lineer pozitif operatörünün f fonksiyonuna yaklaşım hızı üç farklı yolla hesaplanacaktır. Öncelikle $L_n f$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşım hızını süreklilik modülü yardımıyla hesaplayalım.

Teorem 3.4.1 Her $f \in C[0, b]$ ve $\frac{|t|}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) için

$$\|(L_n f)(x, t; k) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq \left(1 + \sqrt{3B}\right) \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

dir. Burada $B = maks \left\{ kb, \frac{k|t|b}{1-b}, \frac{3|t|b^2}{1-b} \right\}$ şeklindedir.

İspat. $f \in C[0, b]$ olsun. L_n operatörünün lineerlik ve monoton özellikleri ile birlikte, (3.11) eşitliği ve *Lemma* 2.3.1 in (vii)-inci maddesi gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} |(L_n f)(x, t; k) - f(x)| &\leq (L_n |f(s) - f(x)|)(x, t; k) \\ &\leq \left(L_n \left[\omega(f; \delta) \left(1 + \frac{|s-x|}{\delta} \right) \right] \right)(x, t; k) \\ &\leq \omega(f; \delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} (L_n |e_1 - x|)(x, t; k) \right\} \quad (3.28) \end{aligned}$$

bulunur. $L_n |e_1 - x|$ için, *Tanım* 2.4.1 ile tanımlı olan Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılır ve (3.9) eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} (L_n |e_1 - x|)(x, t; k) &= \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left| \frac{kv}{k(v-1) + n + 1} - x \right| Y_v^{(n)}(t; k) x^v \\ &\leq \left(\frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{kv}{k(v-1) + n + 1} - x \right)^2 Y_v^{(n)}(t; k) x^v \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{kv}{k(v-1) + n + 1} - x \right)^2 Y_v^{(n)}(t; k) x^v \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{(L_n (e_1 - x)^2)(x, t; k)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (3.28) de yerine yazılırsa

$$|(L_n f)(x, t; k) - f(x)| \leq \omega(f; \delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{(L_n (e_1 - x)^2)(x, t; k)} \right\} \quad (3.29)$$

olur. $x \in [0, b]$ için

$$(L_n(e_1 - x)^2)(x, t; k) \leq |(L_n e_2)(x, t; k) - x^2| + 2x |(L_n e_1)(x, t; k) - x|$$

yazılabileceği kolaylıkla görülebilir. Her iki tarafın $[0, b]$ üzerinden maksimumu alınırsa

$$\max_{x \in [0, b]} (L_n(e_1 - x)^2)(x, t; k) \leq \|(L_n e_2)(x, t; k) - x^2\|_{C[0, b]} + 2b \|(L_n e_1)(x, t; k) - x\|_{C[0, b]}$$

bulunur. Burada (3.16) ve (3.27) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\max_{x \in [0, b]} (L_n(e_1 - x)^2)(x, t; k) \leq \frac{1}{n} \left(\frac{3|t|b^2}{1-b} + kb + \frac{k|t|b}{1-b} \right) \quad (3.30)$$

elde edilir. $B = \max \left\{ kb, \frac{k|t|b}{1-b}, \frac{3|t|b^2}{1-b} \right\}$ alınır, $\delta = \delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ seçilir ve (3.29) de yerlerine yazılırsa

$$\|(L_n f)(x, t; k) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq (1 + \sqrt{3B}) \omega(f; \delta_n)$$

bulunur ki bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi de Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar yardımıyla $L_n f$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşma hızını hesaplayalım.

Teorem 3.4.2 Her $f \in Lip_M(\alpha)$ ve $\frac{|t|}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olmak üzere

$$\|(L_n f)(x, t; k) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq M (3B)^{\alpha/2} n^{-\alpha/2}$$

dir. Burada B , Teorem 3.4.1 de tanımlandığı gibidir.

İspat. $f \in Lip_M(\alpha)$ ($0 < \alpha \leq 1$) olsun. L_n operatörünün lineerlik, monotonluk

özelliklerinden ve *Tanım 2.4.2* de verilen Lipschitz sınıfı tanımından

$$(L_n f)(x, t; k) - f(x) \leq \frac{M}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left| \frac{kv}{k(v-1) + n + 1} - x \right|^{\alpha} Y_v^{(n)}(t; k) x^v$$

elde edilir. $p = \frac{2}{\alpha}$ ve $q = \frac{2}{2-\alpha}$ için *Tanım 2.4.3* ile verilen Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} (L_n f)(x, t; k) - f(x) &\leq M \left(\frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{kv}{k(v-1) + n + 1} - x \right)^2 Y_v^{(n)}(t; k) x^v \right)^{\alpha/2} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \right)^{(2-\alpha)/2} \\ &= M \left(\frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{kv}{k(v-1) + n + 1} - x \right)^2 Y_v^{(n)}(t; k) x^v \right)^{\alpha/2} \\ &= M \sqrt{[(L_n(e_1 - x)^2)(x, t; k)]^{\alpha}} \end{aligned}$$

bulunur. *Teorem 3.4.1* deki işlemler tekrarlanırsa

$$\|(L_n f)(x, t; k) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq M (3B)^{\alpha/2} n^{-\alpha/2}$$

elde edilir.

Son olarak Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla $L_n f$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşım hızını hesaplayalım.

Teorem 3.4.3 $f \in C[0, b]$ ve $\frac{|t|}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ise, bu durumda

$$\|(L_n f)(x, t; k) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq 2K(f, \delta_n^*)$$

dir. Burada

$$\delta_n^* = \left[\frac{|t|b}{2n(1-b)} + \frac{1}{4n} \left(\frac{3|t|b^2}{1-b} + kb + \frac{k|t|b}{1-b} \right) \right]$$

şeklindedir.

İspat. $g \in C^2[0, b]$ olsun. O taktirde $g(s)$ fonksiyonunun x noktasındaki Taylor açılımı

$$g(s) = g(x) + (s-x)g'(x) + (s-x)^2 \frac{g''(x)}{2}$$

dir. L_n operatörü, yukarıdaki eşitliğin her iki tarafına uygulanır ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$|(L_n g)(x, t; k) - g(x)| \leq |(L_n(e_1 - x))(x, t; k)| |g'(x)| + \frac{1}{2} |(L_n(e_1 - x)^2)(x, t; k)| |g''(x)|$$

olur. Her iki tarafın $[0, b]$ üzerinden maksimumu alınır ve (3.16) ile (3.30) kullanılırsa

$$\|(L_n g)(x, t; k) - g(x)\|_{C[0, b]} \leq \frac{|t|b}{n(1-b)} \|g'\|_{C[0, b]} + \frac{1}{2n} \left(\frac{3|t|b^2}{1-b} + kb + \frac{k|t|b}{1-b} \right) \|g''\|_{C[0, b]}$$

bulunur. Tanım 2.4.4 ile verilen $C^2[0, b]$ uzayında norm tanımı dikkate alınır

$$\|(L_n g)(x, t; k) - g(x)\|_{C[0, b]} \leq \left[\frac{|t|b}{n(1-b)} + \frac{1}{2n} \left(\frac{3|t|b^2}{1-b} + kb + \frac{k|t|b}{1-b} \right) \right] \|g\|_{C^2[0, b]} \quad (3.31)$$

elde edilir. Diğer taraftan, L_n lineer ve monoton operatör olduğundan

$$\begin{aligned} |(L_n f)(x, t; k) - f(x)| &= |(L_n f)(x, t; k) - (L_n g)(x, t; k) + (L_n g)(x, t; k) - g(x) \\ &\quad + g(x) - f(x)| \\ &\leq |(L_n(f - g))(x, t; k)| + |f(x) - g(x)| \\ &\quad + |(L_n g)(x, t; k) - g(x)| \end{aligned}$$

yazılabilir. Her iki tarafın $[0, b]$ üzerinden maksimumu alınır ve (3.11) gözönünde bulundurulursa

$$\|(L_n f)(x, t; k) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq 2 \|f - g\|_{C[0, b]} + \|(L_n g)(x, t; k) - g(x)\|_{C[0, b]}$$

olur. (3.31) eşitsizliği yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \|(L_n f)(x, t; k) - f(x)\|_{C[0, b]} &\leq 2 \left\{ \|f - g\|_{C[0, b]} + \left[\frac{|t| b}{2n(1-b)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4n} \left(\frac{3|t| b^2}{1-b} + kb + \frac{k|t| b}{1-b} \right) \right] \|g\|_{C^2[0, b]} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafının $g \in C^2[0, b]$ için infimumu alınır ve

$$\delta_n^* = \left[\frac{|t| b}{2n(1-b)} + \frac{1}{4n} \left(\frac{3|t| b^2}{1-b} + kb + \frac{k|t| b}{1-b} \right) \right]$$

seçilirse ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 3.4.1 Bu kısımda verilen üç teoremden elde edilen δ_n ve δ_n^* ifadelerinin $n \rightarrow \infty$ durumunda $\delta_n, \delta_n^* \rightarrow 0$ olacağına dikkat edilmelidir.

3.5 L_n Operatörünün r -inci Basamaktan Genelleştirilmesi

Bu bölümde (3.8) ile verilen L_n operatörünün r -inci basamaktan genelleştirilmesi verilecektir. $f \in C^r[0, b]$, $r = 0, 1, 2, \dots$ and $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere L_n operatörünün r -inci genelleştirilmesi

$$(L_n^{[r]} f)(x, t; k) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{i=0}^r f^{(i)}\left(\frac{kv}{k(v-1)+n+1}\right) \frac{\left(x - \frac{kv}{k(v-1)+n+1}\right)^i}{i!} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \quad (3.32)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $C^r[0, b]$ ($0 < b < 1$ ve $r = 0, 1, 2, \dots$) ile f fonksiyonunun r -inci türevlerinin sürekli olduğu uzay gösterilmektedir. Özel olarak (3.32) ile tanımlanan operatörde $r = 0$ alınırsa (3.8) ile verilen operatör elde edilir.

Şimdi, $L_n^{[r]}$ lineer pozitif operatörü ile L_n lineer pozitif operatörü arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.5.1 $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ ve $f \in C^r[0, b]$ ($r = 0, 1, \dots$) ise, bu durumda

$$\| (L_n^{[r]} f)(x, t; k) - f(x) \|_{C[0, b]} \leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha + r} B(\alpha, r) \| (L_n |e_1 - x|^{\alpha+r})(x, t; k) \|_{C[0, b]} \quad (3.33)$$

dir. Burada $B(\alpha, r)$ Beta fonksiyonu ve $r, n \in \mathbb{N}$ dir.

İspat. (3.32) ile verilen $L_n^{[r]}$ operatörünün tanımından

$$\begin{aligned} f(x) - (L_n^{[r]} f)(x, t; k) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[f(x) - \sum_{i=0}^r f^{(i)} \left(\frac{kv}{k(v-1)+n+1} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\left(x - \frac{kv}{k(v-1)+n+1} \right)^i}{i!} \right] Y_v^{(n)}(t; k) x^v \end{aligned} \quad (3.34)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte serinin içindeki ilk ifade için, Taylor integral formülünden (Kirov ve Popova 1993)

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{i=0}^r f^{(i)} \left(\frac{kv}{k(v-1)+n+1} \right) \frac{\left(x - \frac{kv}{k(v-1)+n+1} \right)^i}{i!} &= \frac{\left(x - \frac{kv}{k(v-1)+n+1} \right)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-z)^{r-1} \\ &\quad \times \left[f^{(r)} \left(\frac{kv}{k(v-1)+n+1} + z \left(x - \frac{kv}{k(v-1)+n+1} \right) \right) - f^{(r)} \left(\frac{kv}{k(v-1)+n+1} \right) \right] dz \end{aligned} \quad (3.35)$$

bulunur. $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ olduğundan, yukarıdaki integralin içindeki ifade

$$\begin{aligned} \left| f^{(r)} \left(\frac{kv}{k(v-1)+n+1} + z \left(x - \frac{kv}{k(v-1)+n+1} \right) \right) - f^{(r)} \left(\frac{kv}{k(v-1)+n+1} \right) \right| \\ \leq M z^\alpha \left| x - \frac{kv}{k(v-1)+n+1} \right|^\alpha \end{aligned} \quad (3.36)$$

eşitsizliğini gerçekler. Beta fonksiyonunun tanımından

$$\int_0^1 z^\alpha (1-z)^{r-1} dz = B(1+\alpha, r) = \frac{\alpha}{\alpha + r} B(\alpha, r) \quad (3.37)$$

yazılabilir. (3.36) ve (3.37), (3.35) de yerlerine yazılırsa

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^r f^{(i)} \left(\frac{kv}{k(v-1)+n+1} \right) \frac{\left(x - \frac{kv}{k(v-1)+n+1} \right)^i}{i!} \right| \leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \left| x - \frac{kv}{k(v-1)+n+1} \right|^{\alpha+r} \quad (3.38)$$

sonucuna ulaşılır. (3.34) ve (3.38) birlikte düşünülürse

$$|f(x) - (L_n^{[r]} f)(x, t; k)| \leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) (L_n |e_1 - x|^{\alpha+r})(x, t; k) \quad (3.39)$$

bulunur. (3.39) eşitsizliğinin her iki tarafının $[0, b]$ üzerinden maksimumu alınırsa (3.33) elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

$g \in C[0, b]$ fonksiyonu için

$$g(s) = |s - x|^{\alpha+r} \quad (3.40)$$

şeklinde tanımlansın. $s = x$ alındığı taktirde $g(x) = 0$ olacağı göz önüne alınırsa, bu durumda L_n operatörü her $g \in C[0, b]$ fonksiyonu için Korovkin teoremini sağlayacağından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(L_n g)(x, t; k) - g(x)\|_{C[0, b]} = 0$$

olduğu görülür. *Teorem 3.5.1* in hipotezleri gözönüne alınırsa, (3.33) eşitsizliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(L_n^{[r]} f)(x, t; k) - f(x)\|_{C[0, b]} = 0$$

elde edilir.

Şimdi de $L_n^{[r]} f$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşma hızını L_n operatörünün yardımı ile hesaplayalım.

Sonuç 3.5.1 $f \in C^r[0, b]$ ve $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ ise, bu durumda

$$\|(L_n^{[r]} f)(x, t; k) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) (1 + \sqrt{3B}) \omega\left(g; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

dir. Burada g fonksiyonu (3.40) şeklinde tanımlanmaktadır.

Sonuç 3.5.2 $f \in C^r [0, b]$ ve $f^{(r)} \in Lip_M (\alpha)$ ise, bu durumda

$$\| (L_n^{[r]} f) (x, t; k) - f (x) \|_{C[0, b]} \leq \frac{Mb^r}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) (3B)^{\alpha/2} n^{-\alpha/2}$$

dir.

Uyarı 3.5.1 Buradan görülmektedir ki, *Sonuç 3.5.1* ve *Sonuç 3.5.2* ile $L_n^{[r]} f$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşım hızı sırasıyla süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar yardımıyla hesaplanmıştır.

3.6 L_n Operatörünün Fonksiyonel Diferensiyel Denkleme Uygulanması

Bu bölümde (3.8) ile verilen L_n operatörünün bir fonksiyonel diferensiyel denkleme uygulanması üzerinde durulacaktır. Birçok çalışmada (May 1976, Volkov 1978, Alkemade 1984), operatör bir fonksiyonel diferensiyel denkleme uygulanmıştır. Bu uygulama, lineer pozitif operatörlerin de bir diferensiyel denklemi sağlayabileceği sonucu bakımından son derece önemli bir özelliktir.

Şimdi L_n operatörünün sağladığı diferensiyel denklem, aşağıdaki teorem ile verilecektir.

Teorem 3.6.1 $g(s) = \frac{s}{1-s}$ olsun. Her $x \in [0, b]$ ($0 < b < 1$) ve $f \in C[0, b]$ için L_n operatörü

$$x \frac{d}{dx} (L_n f) (x, t; k) = -x \frac{n+1-t(1-x)^{-1/k}}{k(1-x)} (L_n f) (x, t; k) + \frac{n-k+1}{k} (L_n (f.g)) (x, t; k) \quad (3.41)$$

fonksiyonel diferensiyel denklemini sağlar.

İspat. $f \in C[0, b]$ olduğundan (3.8) ile tanımlanan operatörün sağ tarafındaki kuvvet serisi $[0, b]$ aralığında yakınsak olacaktır. Bu durumda bu seri $[0, b]$ de terim

terime türevlenebilir. O halde (3.8) ile tanımlı olan L_n operatörünün x değişkenine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (L_n f)(x, t; k) &= \frac{-\frac{\partial}{\partial x} F_n(x; t)}{F_n^2(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{kv}{k(v-1)+n+1}\right) Y_v^{(n)}(t; k) x^v \\ &\quad + \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} f\left(\frac{kv}{k(v-1)+n+1}\right) Y_v^{(n)}(t; k) v x^{v-1} \end{aligned} \quad (3.42)$$

eşitliği elde edilir. $g(s) = \frac{s}{1-s}$ olduğundan $g\left(\frac{vk}{k(v-1)+n+1}\right) = \frac{vk}{n+1-k}$ bulunur ve (3.10) ile verilen $F_n(x; t)$ tanımından

$$\frac{\partial}{\partial x} F_n(x; t) = \frac{n+1-t(1-x)^{-1/k}}{k(1-x)} F_n(x; t) \quad (3.43)$$

olur. (3.42) eşitliğinin her iki tarafı x değişkeni ile çarpılır, (3.43) ile $g\left(\frac{vk}{k(v-1)+n+1}\right) = \frac{vk}{n+1-k}$ eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x \frac{d}{dx} (L_n f)(x, t; k) &= -x \frac{n+1-t(1-x)^{-1/k}}{k(1-x)F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{vk}{k(v-1)+n+1}\right) Y_v^{(n)}(t; k) x^v \\ &\quad + \frac{n-k+1}{kF_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} (f \cdot g)\left(\frac{vk}{k(v-1)+n+1}\right) Y_v^{(n)}(t; k) x^v \end{aligned}$$

bulunur. (3.8) ile verilen L_n operatörün tanımı dikkate alınır, (3.41) elde edilir ki bu ise ispatı tamamlar.

3.7 L_n Operatörünün Kantorovich Tipli İntegral Genelleştirilmesi

Kantorovich (1930), (2.5) de açık olarak ifade edilen klasik Bernstein operatörlerinin Kantorovich tipli integral genelleşmesini $f \in L_1([0, 1])$ için

$$(K_m f)(x) = (m+1) \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \int_{k/m+1}^{k+1/m+1} f(t) dt$$

biçiminde tanımlamıştır.

(3.8) ile verilen L_n lineer pozitif operatörünün Kantorovich tipli genelleşmesi olan

$$(L_n^* f)(x, t; k) = \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{kv+n+1}{n} \right) Y_v^{(n)}(t; k) x^v \int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} f\left(\frac{u}{k(v-1)+n+1}\right) du \quad (3.44)$$

lineer pozitif operatörü incelenecektir. Burada $x \in [0, 1)$, $t \in (-\infty, 0]$ ve $k < n+1$ şeklindedir.

Ayrıca $M[0, b]$, $[0, b]$ üzerinde ölçülebilir fonksiyonların sınıfını göstermektedir. $f \in M[0, b]$ dir.

L_n^* operatörünün lineer ve pozitif olduğu kolayca görülebilir.

Dikkat edilmelidir ki, L_n^* operatöründe özel seçimlerle M_n^* ve P_n operatörlerinin Kantorovich tipli genelleştirilmeleri elde edilir.

3.8 L_n^* Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda, L_n^* operatörünün Korovkin teoreminin koşullarını gerçeklediği gösterilecektir.

Teorem 3.8.1 Eğer f fonksiyonu $[0, b]$ ($0 < b < 1$) aralığında sürekli, $x \in [0, b]$ ve $\frac{|t|}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) sağlanıyorsa bu durumda $[0, b]$ aralığında $L_n^* f$ operatörü f fonksiyonuna düzgün yakımsaktır.

İspat. L_n^* operatörünün lineerlik ile pozitiflik özellikleri kullanılır ve (3.9) eşitliği dikkate alınır, $f(s) = e_0(s) = 1$ için

$$\begin{aligned} (L_n^* e_0)(x, t; k) &= \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{kv+n+1}{n} \right) Y_v^{(n)}(t; k) x^v \int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} du \\ &= (L_n e_0)(x, t; k) = 1 \end{aligned} \quad (3.45)$$

elde edilir.

(3.44) ile tanımlanan L_n^* operatöründe $f(s) = e_1(s) = s$ alınırsa

$$\begin{aligned}
(L_n^* e_1)(x, t; k) &= \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{kv+n+1}{n} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} \frac{u}{k(v-1)+n+1} du \\
&= \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{kv+n+1}{2n(k(v-1)+n+1)} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \\
&\quad \times \left[\frac{2kvn}{kv+n+1} + \left(\frac{n}{kv+n+1} \right)^2 \right] \\
&= (L_n e_1)(x, t; k) + \frac{1}{2F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{n}{(kv+n+1)(k(v-1)+n+1)} Y_v^{(n)}(t; k) x^v
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\frac{n}{(kv+n+1)(k(v-1)+n+1)} \leq \frac{1}{n}$ olduğu gözönüne alınırsa

$$(L_n^* e_1)(x, t; k) \leq (L_n e_1)(x, t; k) + \frac{1}{2n} (L_n e_0)(x, t; k)$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlikte öncelikle her iki tarafın mutlak değeri alınır sonra $[0, b]$ üzerinden maksimumu alınır ve de (3.11) ile (3.16) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\|(L_n^* e_1)(x, t; k) - x\|_{C[0, b]} \leq \frac{|t|b}{n(1-b)} + \frac{1}{2n} \quad (3.46)$$

elde edilir. Son olarak (3.44) tanımında $f(s) = e_2(s) = s^2$ alınırsa

$$\begin{aligned}
(L_n^* e_2)(x, t; k) &= \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{kv+n+1}{n} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} \left[\frac{u}{k(v-1)+n+1} \right]^2 du \\
&= \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{kv+n+1}{n} \frac{1}{3(k(v-1)+n+1)^2} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \\
&\quad \times \left[3(kv)^2 \frac{n}{kv+n+1} + 3(kv) \left(\frac{n}{kv+n+1} \right)^2 + \left(\frac{n}{kv+n+1} \right)^3 \right] \\
&= (L_n e_2)(x, t; k) + \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{n}{(kv+n+1)(k(v-1)+n+1)} \frac{kv}{k(v-1)+n+1} \\
&\quad \times Y_v^{(n)}(t; k) x^v + \frac{1}{3F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{n}{(kv+n+1)(k(v-1)+n+1)} \right]^2 Y_v^{(n)}(t; k) x^v
\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{n}{(kv+n+1)(k(v-1)+n+1)} \leq \frac{1}{n}$ ve $\left[\frac{n}{(kv+n+1)(k(v-1)+n+1)} \right]^2 \leq \frac{1}{n^2}$ eşitsizlikleri

kullanılırsa

$$(L_n^* e_2)(x, t; k) \leq (L_n e_2)(x, t; k) + \frac{1}{n} (L_n e_1)(x, t; k) + \frac{1}{3n^2} (L_n e_0)(x, t; k)$$

bulunur. Her iki tarafın öncelikle mutlak değeri alınır, daha sonra $[0, b]$ üzerinden maksimumu alınır ve ayrıca (3.11), (3.16) ile (3.27) kullanılırsa

$$\|(L_n^* e_2)(x, t; k) - x^2\|_{C[0, b]} \leq \frac{|t|b}{n(1-b)} \left(k + b + \frac{1}{n}\right) + (k+1) \frac{b}{n} + \frac{1}{3n^2} \quad (3.47)$$

elde edilir. (3.45), (3.46) ve (3.47) den, Korovkin teoreminin koşullarının gerçekleştiği görülür. Dolayısıyla $f \in C[0, b]$ için $L_n^* f$ operatörü f fonksiyonuna $[0, b]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

3.9 L_n^* Operatörünün Yaklaşım Hızı

(3.44) ile tanımlanan $L_n^* f$ lineer pozitif operatörünün f fonksiyonuna yaklaşım hızı üç farklı yolla hesaplanacaktır. Bunlardan ilki olan süreklilik modülü ile yaklaşım hızı aşağıdaki teorem yardımıyla verilecektir.

Teorem 3.9.1 Her $f \in C[0, b]$ ($0 < b < 1$) ve $\frac{|t|}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ise, bu durumda

$$\|(L_n^* f)(x, t; k) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq 2\omega(f; \gamma_n)$$

dir. Burada $\gamma_n = \sqrt{\frac{|t|b}{n(1-b)} \left(k + 3b + \frac{1}{n}\right) + (k+2) \frac{b}{n} + \frac{1}{3n^2}}$ şeklindedir.

İspat. $f \in C[0, b]$ olsun. L_n^* operatörünün lineerlik ile monotonluk özellikleri, (3.45) eşitliği ve Lemma 2.3.1 in (vii) şıkki gözönüne alınır

$$\begin{aligned} |(L_n^* f)(x, t; k) - f(x)| &\leq (L_n^* |f(s) - f(x)|)(x, t; k) \\ &\leq \left(L_n^* \left[\omega(f; \delta) \left(1 + \frac{|s-x|}{\delta} \right) \right] \right)(x, t; k) \\ &\leq \omega(f; \delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} (L_n^* |e_1 - x|)(x, t; k) \right\} \end{aligned} \quad (3.48)$$

bulunur. *Tanım 2.4.8* ile verilen integraller için Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} \left| \frac{u}{k(v-1)+n+1} - x \right| du &\leq \left[\int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} \left(\frac{u}{k(v-1)+n+1} - x \right)^2 du \right]^{1/2} \\
&\times \left[\int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} du \right]^{1/2} \\
&= \left[\int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} \left(\frac{u}{k(v-1)+n+1} - x \right)^2 du \right]^{1/2} \left[\frac{n}{kv+n+1} \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

elde edilir. O takdirde

$$\begin{aligned}
(L_n^* |e_1 - x|)(x, t; k) &\leq \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \sqrt{\frac{kv+n+1}{n}} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \\
&\times \left[\int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} \left(\frac{u}{k(v-1)+n+1} - x \right)^2 du \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Şimdi *Tanım 2.4.1* ile verilen seriler için Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&(L_n^* |e_1 - x|)(x, t; k) \\
&\leq \left[\frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{kv+n+1}{n} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} \left(\frac{u}{k(v-1)+n+1} - x \right)^2 du \right]^{1/2} \\
&\times \left[\frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

elde edilir. O takdirde, yukarıdaki eşitsizlikten

$$(L_n^* |e_1 - x|)(x, t; k) \leq \sqrt{(L_n^* (e_1 - x)^2)(x, t; k)}$$

sağlandığı görülür. Bu eşitsizlik (3.48) de yerine yazılırsa

$$|(L_n^* f)(x, t; k) - f(x)| \leq \omega(f; \delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{(L_n^* (e_1 - x)^2)(x, t; k)} \right\} \quad (3.49)$$

bulunur. $x \in [0, b]$ için

$$(L_n^*(e_1 - x)^2)(x, t; k) \leq |(L_n^*e_2)(x, t; k) - x^2| + 2x |(L_n^*e_1)(x, t; k) - x|$$

yazılabilir. Her iki tarafın $[0, b]$ üzerinden maksimumu alınırsa

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0, b]} (L_n^*(e_1 - x)^2)(x, t; k) &\leq \|(L_n^*e_2)(x, t; k) - x^2\|_{C[0, b]} \\ &\quad + 2b \|(L_n^*e_1)(x, t; k) - x\|_{C[0, b]} \end{aligned}$$

olur. Burada (3.46) ve (3.47) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0, b]} (L_n^*(e_1 - x)^2)(x, t; k) &\leq \frac{|t|b}{n(1-b)} \left(k + b + \frac{1}{n}\right) + (k+1) \frac{b}{n} + \frac{1}{3n^2} \\ &\quad + 2b \left(\frac{|t|b}{n(1-b)} + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{|t|b}{n(1-b)} \left(k + 3b + \frac{1}{n}\right) + (k+2) \frac{b}{n} + \frac{1}{3n^2} \end{aligned} \tag{3.50}$$

elde edilir. (3.50) eşitsizliği (3.49) de yerlerine yazılır ve

$$\delta = \gamma_n = \sqrt{\frac{|t|b}{n(1-b)} \left(k + 3b + \frac{1}{n}\right) + (k+2) \frac{b}{n} + \frac{1}{3n^2}}$$

seçilirse

$$\|(L_n^*f)(x, t; k) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq 2\omega(f; \gamma_n)$$

bulunur ki bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi de Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar yardımıyla L_n^*f operatörünün f fonksiyonuna yaklaşma hızını hesaplayalım.

Teorem 3.9.2 Her $f \in Lip_M(\alpha)$ ve $\frac{|t|}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ise, bu durumda

$$\|(L_n^*f)(x, t; k) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq M\gamma_n^\alpha$$

dir. Burada γ_n , *Teorem 3.9.1* de tanımlandığı gibidir.

İspat. $f \in Lip_M(\alpha)$ ($0 < \alpha \leq 1$) olsun. L_n^* operatörünün lineerlik ile monotonluk özelliği ve *Tanım 2.4.2* ile verilen Lipschitz sınıfı tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} |(L_n^* f)(x, t; k) - f(x)| &\leq (L_n^* |f(t) - f(x)|)(x, t; k) \\ &\leq M (L_n^* |t - x|^\alpha)(x, t; k) \\ &= \frac{M}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{kv+n+1}{n} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \\ &\quad \times \int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} \left| \frac{u}{k(v-1)+n+1} - x \right|^\alpha du \end{aligned}$$

elde edilir. $p = \frac{2}{\alpha}$ ve $q = \frac{2}{2-\alpha}$ olmak üzere *Tanım 2.4.7* ile verilen integraller için Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} \left| \frac{u}{k(v-1)+n+1} - x \right|^\alpha du \\ &\leq \left[\int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} \left(\frac{u}{k(v-1)+n+1} - x \right)^2 du \right]^{\alpha/2} \left[\int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} du \right]^{(2-\alpha)/2} \\ &= \left(\frac{n}{kv+n+1} \right)^{(2-\alpha)/2} \left[\int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} \left(\frac{u}{k(v-1)+n+1} - x \right)^2 du \right]^{\alpha/2} \end{aligned}$$

bulunur. O halde, bu eşitsizlik operatör tanımında yazılırsa

$$\begin{aligned} (L_n^* |t - x|^\alpha)(x, t; k) &\leq \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{kv+n+1}{n} \right]^{\alpha/2} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \\ &\quad \times \left[\int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} \left(\frac{u}{k(v-1)+n+1} - x \right)^2 du \right]^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

olur. Şimdi, $p = \frac{2}{\alpha}$ ve $q = \frac{2}{2-\alpha}$ olmak üzere *Tanım 2.4.3* ile verilen seriler için Hölder eşitsizliği kullanılır, (3.9) eşitliği göz önünde bulundurulur ve (3.44) ile verilen

L_n^* operatör tanımı dikkate alınır

$$\begin{aligned}
(L_n^* |t - x|^\alpha)(x, t; k) &\leq \left[\frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{kv+n+1}{n} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \right. \\
&\quad \times \left. \int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} \left(\frac{u}{k(v-1)+n+1} - x \right)^2 du \right]^{\alpha/2} \\
&\quad \times \left[\frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \right]^{(2-\alpha)/2} \\
&= \left[(L_n^* (e_1 - x)^2)(x, t; k) \right]^{\alpha/2}
\end{aligned}$$

elde edilir. *Teorem 3.9.1* deki benzer işlemler tekrarlanırsa

$$\|(L_n^* f)(x, t; k) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq M \gamma_n^\alpha$$

eşitsizliği bulunur. Burada γ_n , *Teorem 3.9.1* tanımlandığı gibidir.

Son olarak, $L_n^* f$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşım hızını, Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla hesaplayalım.

Teorem 3.9.3 Her $f \in C[0, b]$ ve $\frac{|t|}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ise, bu durumda

$$\|(L_n^* f)(x, t; k) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq 2K(f; \gamma_n^*)$$

dır. Burada

$$\gamma_n^* = \frac{3|t|b^2}{n(1-b)} + \frac{(k+1)|t|b}{n(1-b)} + \frac{|t|b}{n^2(1-b)} + \frac{(k+2)b}{n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. $g \in C^2[0, b]$ olsun. g fonksiyonunun Taylor açılımından

$$\begin{aligned}
|(L_n^* g)(x, t; k) - g(x)| &\leq |(L_n^* (t - x))(x, t; k)| |g'(x)| \\
&\quad + |(L_n^* (t - x)^2)(x, t; k)| \frac{|g''(x)|}{2}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

elde edilir. (3.51) eşitsizliğinin her iki tarafının $[0, b]$ üzerinden maksimumu alınır, (3.46) ve (3.50) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|(L_n^* g)(x, t; k) - g(x)\|_{C[0, b]} &\leq \|(L_n^*(t-x))(x, t; k)\|_{C[0, b]} \|g'\|_{C[0, b]} \\
&\quad + \frac{1}{2} \|(L_n^*(t-x)^2)(x, t; k)\|_{C[0, b]} \|g''\|_{C[0, b]} \\
&\leq \left(\frac{|t|b}{n(1-b)} + \frac{1}{2n} \right) \|g'\|_{C[0, b]} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{|t|b}{n(1-b)} \left(k + 3b + \frac{1}{n} \right) + (k+2) \frac{b}{n} + \frac{1}{3n^2} \right\} \|g''\|_{C[0, b]} \\
&\leq \left\{ \frac{3|t|b^2}{n(1-b)} + \frac{(k+1)|t|b}{n(1-b)} + \frac{|t|b}{n^2(1-b)} + \frac{(k+2)b}{n} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} \right\} \|g\|_{C^2[0, b]} \tag{3.52}
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan, L_n^* operatörünün lineerlik, monotonluk özellikleri ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|(L_n^* f)(x, t; k) - f(x)| &\leq |(L_n^*(f-g))(x, t; k)| + |f(x) - g(x)| \\
&\quad + |(L_n^* g)(x, t; k) - g(x)| \tag{3.53}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.53) eşitsizliğinin her iki tarafının $[0, b]$ üzerinden maksimumu alınır ve (3.52) eşitsizliği kullanılırsa

$$\|(L_n^* f)(x, t; k) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq 2 \left\{ \|f(x) - g(x)\|_{C[0, b]} + \gamma_n^* \|g(x)\|_{C^2[0, b]} \right\} \tag{3.54}$$

elde edilir. Son olarak, (3.54) eşitsizliğinin her iki yanının $g \in C^2[0, b]$ üzerinden infimumu alınır ve

$$\gamma_n^* = \frac{3|t|b^2}{n(1-b)} + \frac{(k+1)|t|b}{n(1-b)} + \frac{|t|b}{n^2(1-b)} + \frac{(k+2)b}{n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n}$$

seçilirse ispat tamamlanmış olur.

3.10 L_n^* Operatörünün r -inci Basamaktan Genelleştirilmesi

Bu bölümde (3.44) ile verilen L_n^* operatörünün r -inci basamaktan genelleştirilmesi verilecektir. $f \in C^r[0, b]$, $r = 0, 1, 2, \dots$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere L_n^* operatörünün

r -inci genelleştirilmesi

$$\begin{aligned} \left(L_n^{*[r]} f \right) (x, t; k) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{kv+n+1}{n} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} \sum_{j=0}^r f^{(j)} \left(\frac{u}{k(v-1)+n+1} \right) \\ &\quad \times \frac{\left(x - \frac{u}{k(v-1)+n+1} \right)^j}{j!} du \quad (3.55) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Daha öncede belirtildiği gibi, $C^r[0, b]$ ($0 < b < 1$ ve $r = 0, 1, 2, \dots$) gösterimi ile f fonksiyonunun r -inci türevlerinin sürekli olduğu uzay gösterilmektedir. Özel olarak (3.55) ile tanımlanan $L_n^{*[r]}$ operatöründe $r = 0$ alınırsa (3.44) ile verilen L_n^* operatörü elde edilir.

Şimdi, $L_n^{*[r]}$ ile L_n^* lineer pozitif operatörleri arasındaki bağlantıyı veren aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.10.1 $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ ve $f \in C^r[0, b]$ ise, bu durumda

$$\left\| \left(L_n^{*[r]} f \right) (x, t; k) - f(x) \right\|_{C[0, b]} \leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \left\| (L_n^* |e_1 - x|^{\alpha+r}) (x, t; k) \right\|_{C[0, b]} \quad (3.56)$$

dir. Burada $B(\alpha, r)$ Beta fonksiyonu ve $r, n \in \mathbb{N}$ dir.

İspat. (3.55) ile verilen $L_n^{*[r]}$ operatörünün tanımından

$$\begin{aligned} f(x) - \left(L_n^{*[r]} f \right) (x, t; k) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{kv+n+1}{n} Y_v^{(n)}(t; k) x^v \int_{kv}^{kv+\frac{n}{kv+n+1}} [f(x) - \\ &\quad \times \sum_{j=0}^r f^{(j)} \left(\frac{u}{k(v-1)+n+1} \right) \frac{\left(x - \frac{u}{k(v-1)+n+1} \right)^j}{j!}] du \quad (3.57) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.57) eşitliğinde integralin içindeki ifade için Taylor integral formülü

(Kirov ve Popova 1993) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
f(x) - \sum_{j=0}^r f^{(j)}\left(\frac{u}{k(v-1)+n+1}\right) \frac{\left(x - \frac{u}{k(v-1)+n+1}\right)^j}{j!} &= \frac{\left(x - \frac{u}{k(v-1)+n+1}\right)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-s)^{r-1} \\
&\times \left[f^{(r)}\left(\frac{u}{k(v-1)+n+1} + s\left(x - \frac{u}{k(v-1)+n+1}\right)\right) - f^{(r)}\left(\frac{u}{k(v-1)+n+1}\right) \right] ds
\end{aligned} \tag{3.58}$$

bulunur. (3.58) eşitliğinde integralin içinde bulunan ikinci terim için, $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ olduğunu göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
\left| f^{(r)}\left(\frac{u}{k(v-1)+n+1} + s\left(x - \frac{u}{k(v-1)+n+1}\right)\right) - f^{(r)}\left(\frac{u}{k(v-1)+n+1}\right) \right| \\
\leq Ms^\alpha \left| x - \frac{u}{k(v-1)+n+1} \right|^\alpha
\end{aligned} \tag{3.59}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Beta fonksiyonunun tanımından

$$\int_0^1 s^\alpha (1-s)^{r-1} ds = B(1+\alpha, r) = \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \tag{3.60}$$

yazılabilir. (3.59) ve (3.60), (3.58) de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \sum_{j=0}^r f^{(j)}\left(\frac{u}{k(v-1)+n+1}\right) \frac{\left(x - \frac{u}{k(v-1)+n+1}\right)^j}{j!} \right| \\
\leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \left| x - \frac{u}{k(v-1)+n+1} \right|^{\alpha+r}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

sonucuna ulaşılır. (3.57) ün her iki tarafının mutlak değeri alınır ve (3.61) burada yerine yazılırsa

$$\left| f(x) - \left(L_n^{*[r]} f \right)(x, t; k) \right| \leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) (L_n^* |e_1 - x|^{\alpha+r})(x, t; k) \tag{3.62}$$

bulunur. (3.62) eşitsizliğinin her iki tarafının $[0, b]$ üzerinden maksimumu alınır, (3.56) elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Daha önce kısım 3.5 de, $g \in C[0, b]$ fonksiyonu (3.40) eşitliği ile verilmiştir ve

$$g(s) = |s - x|^{\alpha+r}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Kısım 3.5 de yapılan işlemlere benzer şekilde, $s = x$ alındığı takdirde $g(x) = 0$ olacağı göz önüne alınırsa, bu durumda L_n^* operatörü her $g \in C[0, b]$ fonksiyonu için Korovkin teoremini sağlayacağından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(L_n^* g)(x, t; k) - g(x)\|_{C[0, b]} = 0$$

olduğu görülür. *Teorem 3.10.1* in hipotezleri gözönüne alınırsa (3.56) eşitsizliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(L_n^{*[r]} f \right)(x, t; k) - f(x) \right\|_{C[0, b]} = 0$$

elde edilir.

Şimdi de $L_n^{*[r]} f$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşma hızını L_n^* operatörü yardımıyla hesaplayalım.

Sonuç 3.10.1 $f \in C^r[0, b]$ ve $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ ise, bu durumda

$$\left\| \left(L_n^{*[r]} f \right)(x, t; k) - f(x) \right\|_{C[0, b]} \leq \frac{2M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \omega(g; \gamma_n)$$

dir. Burada g fonksiyonu (3.40) şeklinde tanımlanmaktadır ve

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{|t|b}{n(1-b)} \left(k + 3b + \frac{1}{n} \right) + (k+2) \frac{b}{n} + \frac{1}{3n^2}}$$

şeklindedir.

Sonuç 3.10.2 $f \in C^r[0, b]$ ve $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ ise, bu durumda

$$\left\| \left(L_n^{*[r]} f \right)(x, t; k) - f(x) \right\|_{C[0, b]} \leq \frac{Mb^r}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \gamma_n^\alpha$$

dir. Burada γ_n , *Sonuç* 3.10.1 de tanımlandığı şekildedir.

Uyarı 3.10.1 Buradan görülmektedir ki, *Sonuç* 3.10.1 ve *Sonuç* 3.10.2 ile $L_n^{*[r]}f$ operatörünün f fonksiyonuna sırasıyla süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanmıştır.

4. q-LAGUERRE POLİNOMLARINI İÇEREN LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN KANTOROVICH TİPLİ GENELLEŞMESİ

Bu bölümde ilk olarak, üçüncü bölümde de verdiğimiz ve operatörün kurulmasında zemin teşkil eden operatörlere değinilecektir. Daha sonra ise, q -Laguerre polinomlarını içeren lineer pozitif operatörlerin Kantorovich tipli bir genelleştirilmesi olan $K_{n,q}$ operatörleri tanımlanacaktır. Üçüncü kısımda $K_{n,q}$ operatörlerinin Korovkin teoreminin koşullarını gerçeklediği gösterilecektir. Son kısımda ise, $K_{n,q}f$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşım hızı birinci ile ikinci süreklilik modülleri ve Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar yardımıyla hesaplanacaktır.

4.1 Giriş

1912 yılında S. N. Bernstein, kendi ismini verdiği bilinen Bernstein operatörünü $f \in C[0, 1]$ için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlamıştır. Kantorovich ise 1930 yılında Bernstein operatörlerinin Kantorovich tipli integral genelleştirilmesini $f \in L_1([0, 1])$ için

$$(K_m f)(x) = (m+1) \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \int_{k/m+1}^{k+1/m+1} f(t) dt$$

biçiminde tanımlamıştır. Meyer-König ve Zeller (1960), daha önceki bölümlerde de açık olarak ifade edilen M_n operatörünün tanımını vermiştir. 1964 de ise Cheney ve Sharma, öncelikle MKZ operatöründe değişiklik yaparak M_n^* Bernstein kuvvet serisini tanımlamışlardır ve ardından da Laguerre polinomlarını içeren P_n operatörünü vermişlerdir. Lineer pozitif operatörlerin q -genelleşmesi ilk olarak Phillips (1996) tarafından verilmiştir. Phillips, klasik Bernstein operatörünün q -genelleştirilmesini, n po-

zitif tamsayı, $0 < q \leq 1$ ve $f \in C([0, 1])$ olmak üzere

$$B_{n,q}(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{[k]}{[n]}\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \quad (4.1)$$

vermiştir ve bu operatör için Voronovskaja tipli asimptotik formülü ve yaklaşım hızını elde etmiştir. Trif (2000), Meyer-König ve Zeller operatörünün q -genişlemesi olan

$$M_{n,q}(f; x) = \prod_{j=0}^n (1 - q^j x) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{[k+n]}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} x^k \quad (4.2)$$

operatörünü tanımlamıştır. 2007 yılında ise M. A. Özarslan, P_n operatörlerinin q -genişlemesini

$$P_{n,q}(f; x) = \frac{1}{F_{n,q}(x, t)} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{[k+n]}\right) L_k^{(n)}(t; q) x^k \quad (4.3)$$

olarak tanımlamıştır. Moak (Moak, 1981), q -Laguerre polinomları için doğurucu fonksiyon tanımını

$$\begin{aligned} F_{n,q}(x, t) &= \frac{(xq^{n+1}; q)_{\infty}}{(x; q)_{\infty}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m^2+mn} [-(1-q)xt]^m}{(q; q)_m (xq^{n+1}; q)_m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(n)}(t; q) x^k \quad (\operatorname{Re} \alpha > 1) \end{aligned} \quad (4.4)$$

ile vermiştir ve q -Laguerre polinomlarının açık ifadesi (Jackson 1944, Hahn 1949 ve Moak 1981)

$$L_k^{(n)}(x; q) = \frac{(q^{n+1}; q)_k}{(q; q)_k} \sum_{j=0}^k \frac{(q^{-k}; q)_j q^{\binom{j}{2}} (1-q)^j (q^{n+k+1}x)^j}{(q^{n+1}; q)_j (q; q)_j} \quad (4.5)$$

şeklindedir. Ayrıca $t = 0$ için

$$L_k^{(n)}(0; q) = \frac{(q^{n+1}; q)_k}{(q; q)_k} = \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

ve

$$\frac{1}{F_{n,q}(x, 0)} = \frac{(x; q)_\infty}{(xq^{n+1}; q)_\infty} = \prod_{j=0}^n (1 - q^j x) \quad (4.7)$$

olacağı dikkate alınrsa, (4.6) ve (4.7) den $M_{n,q}(f; x)$ operatörünün $P_{n,q}(f; x)$ nin bir özel durumu olduğu kolayca görülür. Ayrıca

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} P_{n,q}(f; x) = P_n(f; x)$$

dir.

4.2 Operatörün Oluşturulması

Bu bölümde, Özarslan (2007) tarafından tanımlanan $P_{n,q}$ operatörünün Kantorovich tipli genelleştirilmesi olan

$$(K_{n,q}f)(x, t) = \frac{1}{F_{n,q}(x, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} f(t) d_q^R t \right) q^{-k} [n+k] L_k^{(n)}(t; q) x^k \quad (4.8)$$

lineer pozitif operatörü ele alınacaktır. Burada $x \in [0, 1]$, $t \in (-\infty, 0]$, $q \in (0, 1]$, $n > 1$ ve $\{F_{n,q}(x, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, Moak (1981) tarafından verilen ve (4.4) ile tanımlanan q -Laguerre polinomları için doğurucu fonksiyondur.

$K_{n,q}$ operatörü lineer ve pozitifdir.

Tanım 2.5.6 ile verilen $[a, b]$ aralığında f fonksiyonunun q -Jackson integrali, iki sonsuz toplam içermektedir. Bu ise, q -Jackson integralini içeren lineer pozitif operatörlerin yaklaşımının hesaplanmasında kullanılan, bazı integral eşitliklerinin q -analoğunun türevlerini hesaplamada problemler yaratmaktadır. Bu problemleri çözmek üzere Marinković vd. (2008) yeni bir q -integral tanımlamışlardır. Bu integral, Riemann tipli q -integral olarak adlandırılmaktadır ve *Tanım 2.5.7* de açık ifadesi verilmiştir. Klasik q -integral tanımının aksine bu tanım sadece integral aralığındaki noktaları içermektedir. Bu sebeple (4.8) ile tanımlanan operatörde Riemann tipli q -integral tanımı kullanılmıştır.

4.3 $K_{n,q}$ Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda $K_{n,q}$ operatörünün Korovkin teoreminin koşullarını gerçeklediği gösterilecektir.

Teorem 4.3.1 Eğer $f \in C[0, 1]$ ve $\frac{|t|}{[n]} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ise, bu durumda $K_{n,q}f$ operatörü f fonksiyonuna $[0, b]$ ($0 < b < 1$) aralığında düzgün yakınsaktır.

İspat. $K_{n,q}$ operatörünün lineerlik ile pozitiflik özellikleri kullanılır ve (4.8) ile verilen tanımları dikkate alınır, $f(s) = e_0(s) = 1$ için

$$(K_{n,q}e_0)(x, t) = \frac{1}{F_{n,q}(x, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} d_q^R t \right) q^{-k} [n+k] L_k^{(n)}(t; q) x^k \quad (4.9)$$

elde edilir. Tanım 2.5.7 ile verilen Riemann tipli q -integral tanımından

$$\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} d_q^R t = \frac{q^k}{[n+k]} \quad (4.10)$$

bulunur. (4.10) eşitliği (4.9) de yerine yazılır ve (4.4) ile verilen doğurucu fonksiyon tanımı kullanılırsa

$$(K_{n,q}e_0)(x, t) = 1 \quad (4.11)$$

olur. (4.8) ile verilen $K_{n,q}$ operatöründe $f(s) = e_1(s)$ alınır

$$(K_{n,q}e_1)(x, t) = \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} t d_q^R t \right) q^{-k} [n+k] L_k^{(n)}(t; q) x^k \quad (4.12)$$

elde edilir. Tanım 2.5.7 ile verilen Riemann tipli q -integral tanımından kolaylıkla hesaplanabilir ki

$$\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} t d_q^R t = \frac{q^k}{[n+k]^2} \left([k] + \frac{q^k}{[2]} \right) \quad (4.13)$$

dir. (4.13) eşitliği (4.12) de yerine yazılırsa

$$(K_{n,q}e_1)(x,t) = \frac{1}{F_n(x,t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k]} \left([k] + \frac{q^k}{[2]} \right) L_k^{(n)}(t;q) x^k \quad (4.14)$$

olur. Kolaylıkla görülebilir ki $0 < q \leq 1$ için $q^k \leq 1$ dir ve $[n] \leq [k+n]$ eşitsizliği gerçekleşir. Bu eşitsizlikler (4.14) eşitliğinde yerlerine yazılırsa, (4.3) ile verilen $P_{n,q}$ operatör tanımından

$$(K_{n,q}e_1)(x,t) \leq P_{n,q}(e_1;x) + \frac{1}{[2][n]} P_{n,q}(e_0;x) \quad (4.15)$$

bulunur. Özarslan (2007) tarafından $P_{n,q}$ operatörünün yaklaşım özelliklerini incelemek için elde edilen

$$P_{n,q}(e_0;x) = 1 \quad (4.16)$$

eşitliği ve

$$P_{n,q}(e_1;x) \leq x - \frac{tx}{[n](1-bq^{n+1})} \quad (4.17)$$

eşitsizliği (4.15) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$(K_{n,q}e_1)(x,t) - x \leq -\frac{tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} \quad (4.18)$$

elde edilir. Diğer taraftan, (4.14) eşitliğinden kolaylıkla görülebilir ki

$$(K_{n,q}e_1)(x,t) \geq P_{n,q}(e_1;x) \quad (4.19)$$

dir. Yine Özarslan (2007) tarafından verilen $P_{n,q}(e_1;x) \geq x$ eşitsizliği (4.19) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$(K_{n,q}e_1)(x,t) \geq x \quad (4.20)$$

bulunur. (4.18) ve (4.20) eşitsizliklerinden

$$0 \leq (K_{n,q}e_1)(x,t) - x \leq -\frac{tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} \quad (4.21)$$

olur. (4.21) eşitsizliğinin öncelikle her iki tarafının mutlak değeri ve daha sonra $[0, b]$

üzerinden maksimumu alınırsa

$$\|(K_{n,q}e_1)(x, t) - x\|_{C[0,b]} \leq \frac{|t|b}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} \quad (4.22)$$

elde edilir.

Son olarak (4.8) ile verilen $K_{n,q}$ operatöründe $f(s) = e_2(s)$ alalım. Bu durumda

$$(K_{n,q}e_2)(x, t) = \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} t^2 d_q^R t \right) q^{-k} [n+k] L_k^{(n)}(t; q) x^k \quad (4.23)$$

olur. Tanım 2.5.7 ile verilen Riemann tipli q -integral tanımından kolaylıkla hesaplanabilir ki

$$\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} t^2 d_q^R t = \frac{q^k}{[n+k]^3} \left([k]^2 + \frac{2q^k}{[2]} [k] + \frac{q^{2k}}{[3]} \right) \quad (4.24)$$

dir. (4.24) eşitliği (4.23) de yerine yazılırsa

$$(K_{n,q}e_2)(x, t) = \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k]^2} \left([k]^2 + \frac{2q^k}{[2]} [k] + \frac{q^{2k}}{[3]} \right) L_k^{(n)}(t; q) x^k \quad (4.25)$$

elde edilir. Kolaylıkla görülebilir ki $0 < q \leq 1$ için $q^k \leq 1$ dir ve $[n] \leq [k+n]$ eşitsizliği gerçekleşir. Bu eşitsizlikler (4.25) eşitliğinde yerlerine yazılırsa, (4.3) ile verilen $P_{n,q}$ operatör tanımından

$$(K_{n,q}e_2)(x, t) \leq P_{n,q}(e_2; x) + \frac{2}{[2][n]} P_{n,q}(e_1; x) + \frac{1}{[3][n]^2} P_{n,q}(e_0; x) \quad (4.26)$$

yazılabilir. Özarslan (2007) tarafından verilen

$$P_{n,q}(e_2; x) \leq x^2 - \frac{t(x^2 + x)}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{x}{[n]} \quad (4.27)$$

eşitsizliği, (4.16) ve (4.17) eşitlik ve eşitsizliği, (4.26) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} (K_{n,q}e_2)(x,t) - x^2 &\leq -\frac{t(x^2+x)}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{x}{[n]} + \frac{1}{[3][n]^2} \\ &\quad + \frac{2}{[2][n]} \left(x - \frac{tx}{[n](1-bq^{n+1})} \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$s^2 = (s-x)^2 + 2xs - x^2$$

eşitliğinin her iki yanına $K_{n,q}$ operatörü uygulanırsa

$$(K_{n,q}e_2)(x,t) - x^2 = (K_{n,q}(e_1 - x)^2)(x,t) + 2x(K_{n,q}(e_1 - x))(x,t)$$

olur. (4.21) eşitsizliğinden ve $K_{n,q}$ operatörünün pozitiflik özelliğinden

$$(K_{n,q}e_2)(x,t) - x^2 \geq 0 \quad (4.29)$$

olduğu görülür. (4.28) ve (4.29) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} 0 &\leq (K_{n,q}e_2)(x,t) - x^2 \leq -\frac{t(x^2+x)}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{x}{[n]} + \frac{1}{[3][n]^2} \\ &\quad + \frac{2}{[2][n]} \left(x - \frac{tx}{[n](1-bq^{n+1})} \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.30) eşitsizliğinin önce her iki tarafının mutlak değeri daha sonra ise $[0, b]$ üzerinden maksimumu alınır

$$\begin{aligned} \|(K_{n,q}e_2)(x,t) - x^2\|_{C[0,b]} &\leq \frac{|t|(b^2+b)}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{2|t|b}{[2][n]^2(1-bq^{n+1})} \\ &\quad + \left(1 + \frac{2}{[2]}\right) \frac{b}{[n]} + \frac{1}{[3][n]^2} \end{aligned} \quad (4.31)$$

olur.

Eğer burada, q yerine $\lim_n q_n = 1$ limitini gerçekleyen bir q_n dizisi alınır, (4.11),

(4.22) ve (4.31) den Korovkin teoreminin koşullarının gerçekleştiği görülür. Dolayısıyla $f \in C[0, 1]$ için $K_{n,q}f$ lineer pozitif operatörü f fonksiyonuna $[0, b]$ ($0 < b < 1$) aralığında düzgün yakınsaktır. Bu ise teoremi ispatlar.

4.4 $K_{n,q}$ Operatörünün Yaklaşım Hızı

Bu kısımda, $K_{n,q}f$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşım hızı birinci ve ikinci basamaktan süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla hesaplanacaktır.

$K_{n,q}$ operatörünün yaklaşım hızını süreklilik modülü ile hesaplamadan önce, $K_{n,q}$ operatörünün ikinci momentini elde edelim. $K_{n,q}$ operatörünün lineerlik özelliğinden

$$(K_{n,q}(e_1 - x)^2)(x, t) = (K_{n,q}e_2)(x, t) - x^2 - 2x[(K_{n,q}e_1)(x, t) - x]$$

yazılabilir. Her iki tarafın öncelikle mutlak değeri daha sonra ise $x \in [0, b]$ üzerinden maksimumu alınırsa

$$\begin{aligned} \|(K_{n,q}(e_1 - x)^2)(x, t)\|_{C[0,b]} &\leq \|(K_{n,q}e_2)(x, t) - x^2\|_{C[0,b]} \\ &\quad + 2\|x\|_{C[0,b]}\|(K_{n,q}e_1)(x, t) - x\|_{C[0,b]} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.22) ve (4.31) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|(K_{n,q}(e_1 - x)^2)(x, t)\|_{C[0,b]} &\leq \frac{|t|(3b^2 + b)}{[n](1 - bq^{n+1})} + \frac{2|t|b}{[2][n]^2(1 - bq^{n+1})} \\ &\quad + \left(1 + \frac{4}{[2]}\right) \frac{b}{[n]} + \frac{1}{[3][n]^2} \end{aligned} \quad (4.32)$$

bulunur.

Aşağıdaki teoremda $K_{n,q}f$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşım hızı süreklilik modülü yardımıyla hesaplanacaktır.

Teorem 4.4.1 Her $f \in C[0, b]$ ve $\frac{|t|}{[n]} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ise, bu durumda

$$\|(K_{n,q}f)(x, t) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq 2\omega(f, \mu_n) \quad (4.33)$$

dir. Burada

$$\mu_n = \sqrt{\frac{|t|(3b^2+b)}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{2|t|b}{[2][n]^2(1-bq^{n+1})} + (1 + \frac{4}{[2]})\frac{b}{[n]} + \frac{1}{[3][n]^2}}$$

şeklindedir.

İspat. $f \in C[0, b]$ olsun. $K_{n,q}$ operatörünün lineerlik ile monotonluk özellikleri kullanılır ve Lemma 2.3.1 de verilen (vii)-inci özelliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} |(K_{n,q}f)(x, t) - f(x)| &\leq (K_{n,q}|f(s) - f(x)|)(x, t) \\ &\leq \omega(f, \delta) \left(K_{n,q} \left(1 + \frac{|s-x|}{\delta} \right) \right)(x, t) \\ &= \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} (K_{n,q}|s-x|)(x, t) \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

elde edilir. Dalmanoglu ve Doğru (2010), Riemann tipli q -integralin pozitif operatör olduğunu ve $0 < a < b$, $0 < q < 1$ ve $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ olmak üzere aşağıdaki Hölder eşitsizliğini sağladığını

$$R_q(|fg|; a; b) \leq (R_q(|f|^m; a; b))^{1/m} (R_q(|g|^n; a; b))^{1/n} \quad (4.35)$$

göstermişlerdir. (4.35) eşitsizliğinde $m = 2$ ve $n = 2$ alınırsa

$$\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} |t-x| d_q^R t \leq \left(\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} (t-x)^2 d_q^R t \right)^{1/2} \left(\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} d_q^R t \right)^{1/2} \quad (4.36)$$

elde edilir. Bu durumda

$$(K_{n,q}|s-x|)(x, t) = \frac{1}{F_{n,q}(x, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} |t-x| d_q^R t \right) q^{-k} [n+k] L_k^{(n)}(t; q) x^k$$

ifadesinde (4.36) eşitsizliği ve *Tanım 2.4.1* ile verilen seriler için Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(K_{n,q} |s - x|)(x, t) &\leq \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{n,q}(x, t)} \left(\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} (t - x)^2 d_q^R t \right) q^{-k} [n + k] L_k^{(n)}(t; q) x^k \right]^{1/2} \\
&\times \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{n,q}(x, t)} \left(\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} d_q^R t \right) q^{-k} [n + k] L_k^{(n)}(t; q) x^k \right]^{1/2} \\
&= \left((K_{n,q}(e_1 - x)^2)(x, t) \right)^{1/2} \left((K_{n,q}e_0)(x, t) \right)^{1/2} \quad (4.37)
\end{aligned}$$

olur. (4.11) ve (4.32), (4.37) eşitsizliğinde gözönüne alınırsa

$$(K_{n,q} |s - x|)(x, t) \leq \sqrt{\frac{|t|(3b^2 + b)}{[n](1 - bq^{n+1})} + \frac{2|t|b}{[2][n]^2(1 - bq^{n+1})} + \left(1 + \frac{4}{[2]}\right) \frac{b}{[n]} + \frac{1}{[3][n]^2}} \quad (4.38)$$

yazılabilir. (4.38) eşitsizliği (4.34) de yerine yazılır ve $\delta = \mu_n$ seçilirse, bu durumda teorem ispat edilmiş olur.

Şimdi, $K_{n,q}$ operatörünün yaklaşım hızı, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla hesaplanacaktır.

Teorem 4.4.2 Her $f \in Lip_M(\alpha)$ ve $\frac{|t|}{[n]} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ise, bu durumda

$$\|(K_{n,q}f)(x, t) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq M\mu_n^\alpha \quad (4.39)$$

dir. Burada μ_n , *Teorem 4.4.1* de tanımlandığı gibidir.

İspat. $f \in C[0, b]$ olsun. *Tanım 2.4.2* ile verilen Lipschitz sınıfı tanımı ve $K_{n,q}$ operatörünün lineerlik ile monotonluk özelliğinden

$$\begin{aligned}
|(K_{n,q}f)(x, t) - f(x)| &\leq (K_{n,q} |f(s) - f(x)|)(x, t) \\
&\leq \frac{M}{F_{n,q}(x, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} |t - x|^\alpha d_q^R t \right) q^{-k} \\
&\times [n + k] L_k^{(n)}(t; q) x^k \quad (4.40)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $m = \frac{2}{\alpha}$ ve $n = \frac{2}{2-\alpha}$ olmak üzere (4.35) eşitsizliği dikkate alınrsa, (4.40) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integral

$$\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} |t-x|^\alpha d_q^R t \leq \left(\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} (t-x)^2 d_q^R t \right)^{\alpha/2} \left(\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} d_q^R t \right)^{(2-\alpha)/2} \quad (4.41)$$

şeklinde bulunur. (4.41) eşitsizliği (4.40) da yerine yazılır ve $p = \frac{2}{\alpha}$ ve $q = \frac{2}{2-\alpha}$ olmak üzere *Tanım 2.4.3* ile verilen Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & |(K_{n,q}f)(x,t) - f(x)| \\ & \leq M \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{n,q}(x,t)} \left(\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} (t-x)^2 d_q^R t \right) q^{-k} [n+k] L_k^{(n)}(t;q) x^k \right]^{\alpha/2} \\ & \quad \times \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{n,q}(x,t)} \left(\int_{[k]/[n+k]}^{[k+1]/[n+k]} d_q^R t \right) q^{-k} [n+k] L_k^{(n)}(t;q) x^k \right]^{(2-\alpha)/2} \end{aligned}$$

olur. Buradan, (4.8) ile verilen $K_{n,q}$ operatörün tanımından

$$|(K_{n,q}f)(x,t) - f(x)| \leq M \left((K_{n,q}(e_1 - x)^2)(x,t) \right)^{\alpha/2}$$

yazılabileceği görülür. Eğer (4.32) eşitsizliği kullanılır ve $\delta = \mu_n$, *Teorem 4.4.1* de tanımlandığı şekilde seçilirse ispat tamamlanır.

Şimdi, *Teorem 4.4.3* ün ispatında kullanılacak olan bir lemma verelim. Bunun öncesinde ise *Lemma 4.4.1* de kullanılacak olan $K_{n,q}$ operatörünün yardımıyla verilen

$$(L_{n,q}f)(x,t) = (K_{n,q}f)(x,t) - f\left(x - \frac{tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]}\right) + f(x) \quad (4.42)$$

operatörünü tanımlayalım. Burada $x \in [0,1]$ dir.

Lemma 4.4.1 $g \in C^2[0, 1]$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |(L_{n,q}g)(x, t) - g(x)| &\leq \left\{ \frac{-t(3x^2 + x)}{[n](1 - bq^{n+1})} - \frac{2tx}{[2][n]^2(1 - bq^{n+1})} + \left(1 + \frac{4}{[2]}\right) \frac{x}{[n]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{[3][n]^2} + \left(\frac{-tx}{[n](1 - bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} \right)^2 \right\} \|g''\| \quad (4.43) \end{aligned}$$

dir.

İspat. $L_{n,q}$ operatörünün (4.42) ile verilen tanımı, (4.11) eşitliği ve (4.21) eşitsizliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} (L_{n,q}(s - x))(x, t) &= (K_{n,q}(s - x))(x, t) + \frac{tx}{[n](1 - bq^{n+1})} - \frac{1}{[2][n]} \\ &\leq -\frac{tx}{[n](1 - bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} + \frac{tx}{[n](1 - bq^{n+1})} - \frac{1}{[2][n]} \\ &= 0 \quad (4.44) \end{aligned}$$

elde edilir. $x \in [0, 1]$ ve $g \in C^2[0, 1]$ olduğu gözönüne alınırsa Taylor formülünden

$$g(s) - g(x) = (s - x)g'(x) + \int_x^s (s - u)g''(u) du$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki yanına $L_{n,q}$ operatörü uygulanır ve (4.44) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} (L_{n,q}g)(x, t) - g(x) &= g'(x)(L_{n,q}(s - x))(x, t) \\ &\quad + \left(L_{n,q} \left(\int_x^s (s - u)g''(u) du \right) \right)(x, t) \\ &\leq \left(L_{n,q} \left(\int_x^s (s - u)g''(u) du \right) \right)(x, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(K_{n,q} \left(\int_x^s (s-u) g''(u) du \right) \right) (x, t) \\
&\quad - \int_x^{a_n(x,t)} \left(x - \frac{tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} - u \right) g''(u) du.
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $a_n(x, t) = x - \frac{tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]}$ şeklindedir. (4.8) ile verilen $K_{n,q}$ operatörünün monotonluk özelliğinden

$$\begin{aligned}
|(L_{n,q}g)(x, t) - g(x)| &\leq \left| \int_x^{a_n(x,t)} \left(x - \frac{tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} - u \right) g''(u) du \right| \\
&\quad + \left(K_{n,q} \left| \int_x^s (s-u) g''(u) du \right| \right) (x, t) \tag{4.45}
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan kolayca görülür ki

$$\left| \int_x^s (s-u) g''(u) du \right| \leq (s-x)^2 \|g''\| \tag{4.46}$$

dir. (4.45) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk integrali

$$I := \int_x^{a_n(x,t)} \left(x - \frac{tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} - u \right) g''(u) du$$

ile gösterelim. (4.46) eşitsizliğinden

$$I \leq \left(-\frac{tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} \right)^2 \|g''\| \tag{4.47}$$

yazılabilir. (4.46) ve (4.47) eşitsizlikleri (4.45) de yazılırsa

$$|(L_{n,q}g)(x, t) - g(x)| \leq \left[(K_{n,q}(s-x)^2)(x, t) + \left(\frac{-tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} \right)^2 \right] \|g''\| \tag{4.48}$$

elde edilir. (4.32) eşitsizliği (4.48) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} |(L_{n,q}g)(x,t) - g(x)| \leq & \left\{ \frac{-t(3x^2+x)}{[n](1-bq^{n+1})} - \frac{2tx}{[2][n]^2(1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[3][n]^2} \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{4}{[2]}\right) \frac{x}{[n]} + \left(\frac{-tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} \right)^2 \right\} \|g''\| \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.4.3 Her $f \in C[0,1]$ ve $x \in [0,1]$ ise, bu durumda

$$|(K_{n,q}f)(x,t) - f(x)| \leq C\omega_2\left(f; \sqrt{\mu_n^*(x)}\right) + \omega\left(f; \left| \frac{-tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} \right| \right)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} \mu_n^*(x) = & \frac{-t(3x^2+x)}{[n](1-bq^{n+1})} - \frac{2tx}{[2][n]^2(1-bq^{n+1})} + \left(1 + \frac{4}{[2]}\right) \frac{x}{[n]} \\ & + \frac{1}{[3][n]^2} + \left(\frac{-tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} \right)^2 \end{aligned}$$

şeklindedir ve C ise pozitif bir sabittir.

İspat. (4.42) ile verilen $L_{n,q}$ operatörün tanımından ve (4.11) eşitliğinden

$$|(L_{n,q}f)(x,t)| \leq 3\|f\| \quad (4.49)$$

yazılabilir. (4.43) ve (4.49) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} |(K_{n,q}f)(x,t) - f(x)| \leq & |(L_{n,q}(f-g))(x,t)| + |(f-g)(x)| \\ & + |(L_{n,q}g - g(x))(x,t)| \\ & + \left| f\left(x - \frac{tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]}\right) - f(x) \right| \\ \leq & 4\|f-g\| + |(L_{n,q}g)(x,t) - g(x)| \\ & + \omega\left(f; \left| \frac{-tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} \right| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4 \|f - g\| + \left\{ \frac{-t(3x^2+x)}{[n](1-bq^{n+1})} - \frac{2tx}{[2][n]^2(1-bq^{n+1})} \right. \\
&\quad \left. + \left(1 + \frac{4}{[2]}\right) \frac{x}{[n]} + \frac{1}{[3][n]^2} + \left(\frac{-tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]}\right)^2 \right\} \|g''\| \\
&\quad + \omega \left(f; \left| \frac{-tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} \right| \right) \\
&\leq 4 \|f - g\| + 4\mu_n(x) \|g''\| \\
&\quad + \omega \left(f; \left| \frac{-tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} \right| \right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. $g \in C^2[0, 1]$ üzerinden her iki tarafın infimumu alınır, *Tanım 2.4.5* göz önünde bulundurulur ve *Lemma 2.4.1* ile verilen eşitsizlik kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|(K_{n,q}f)(x, t_0) - f(x)| &\leq 4K_2(f; \mu_n^*(x)) + \omega \left(f; \left| \frac{-tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} \right| \right) \\
&\leq C\omega_2 \left(f; \sqrt{\mu_n^*(x)} \right) + \omega \left(f; \left| \frac{-tx}{[n](1-bq^{n+1})} + \frac{1}{[2][n]} \right| \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada μ_n^* , *Teorem 4.4.3* de ifade edildiği gibidir. Bu ise teoremin ispatlandığını göstermektedir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tezin orjinal olan üçüncü bölümünde, J.D.E. Konhauser (1965) tarafından tanımlanan, klasik Laguerre polinomlarının bir genelleştirilmesi olan ve Konhauser polinomlarını içeren lineer pozitif operatör tanımlanmıştır. Bu operatör Cheney ve Sharma (1964) tarafından verilen, klasik Laguerre polinomlarının bir genelleştirilmesidir. Bu operatörün Korovkin (1953) teoremini gerçekleştirdiği gösterilmiş ve yaklaşım hızı, yaklaşımlar teorisinde en çok kullanılan üç ana modül ile (süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar ve Peetre K -fonksiyoneli) hesaplanmıştır. Daha sonra, ilk olarak Kirov ve Popova (1993) tarafından verilen, operatörün r -inci basamaktan genelleştirilmesi tanımlanmış ve bu genelleştirilmenin de yaklaşım hızı hesaplanmıştır. Böylece görülmüştür ki, bir operatörün r -inci basamaktan genelleştirilmesi elde edilebiliyor ise, bu operatöründe yaklaşım hızı hesaplanabilmektedir. Bu bölümün son kısmında ise, operatörün bir fonksiyonel diferensiyel denklemi sağladığı gösterilmiştir.

Korovkin teoreminin ispatından sonra, Bernstein lineer pozitif operatör dizisinin, birçok genelleştirilmesi yapılmıştır (Meyer-König-Zeller, Szász-Mirakyan, Baskakov, Kantorovich, Durrmeyer, Stancu, Schurer vd.). Bu genelleştirmelerden biri de Kantorovich tipli genelleştirilmedir. Kantorovich tarafından, klasik Bernstein operatörlerinin Kantorovich genelleştirilmesi verilmiştir. Buradan hareketle, üçüncü bölümde tanımlanan Konhauser polinomlarını içeren operatörün Kantorovich tipli genelleştirilmesi verilmiştir.

Lineer pozitif operatörlerin q -genelleşmesi ilk olarak Phillips (1996) tarafından verilmiştir. Trif (2000), Meyer-König ve Zeller operatörünün q -genişlemesini tanımlamıştır. Moak (1981), q -Laguerre polinomları için doğurucu fonksiyon tanımını ve açık ifadesini vermiştir. Özarslan (2007) q -Laguerre polinomlarını içeren lineer pozitif operatörü tanımlamıştır. Bu tezin beşinci bölümünde ise, Özarslan tarafından verilen operatörün Kantorovich tipli integral genelleştirilmesi verilmiştir. Sonraki

kısımda, operatörün yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bu tezin son kısmında ise, operatörün yaklaşım hızı hesaplanmıştır.

Konhauser polinomları, biortogonal polinomdur. Bu polinomlar, doğurucu fonksiyon, rekürans bağıntısı, Rodrigues formülü gibi birçok özelliklere sahiptir. Ortogonal ve biortogonal polinomları içeren lineer pozitif operatörlerle ilgili çalışmalar oldukça azdır. Bu tez bu tip çalışmalar için bir ışık kaynağıdır.

KAYNAKLAR

- Abel, U. 1995. The moments for the Meyer-König and Zeller operators. *J. Approx. Theory*, 82, 352-361.
- Agratini, O. 2001. Korovkin type error estimates for Meyer-König and Zeller operators. *Math. Inequal. Appl.*, 4, 119-126.
- Alkemade, J. A. H. 1984. The second moment for the Meyer-König and Zeller operators. *J. Approx. Theory*, 40, 261-273.
- Al-Salam, W. A. and Verma, A. 1983. q -Konhauser polynomials. *Pac. J. Math.*, 108(1), 1-7.
- Altın, A., Doğru, O. and Özarslan, M. A. 2004. Kantorovich type generalization for certain class of positive linear operators. *WSEAS Trans. Math.*, 3(3), 607-610.
- Altın, A., Doğru, O. and Taşdelen, F. 2005. The generalization of Meyer-König and Zeller operators by generating functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 312, 181-194.
- Andrews, G. E., Askey, R. and Roy, R. 1999. *Special Functions*. Cambridge University Press. 664 p.
- Becker, M. and Nessel, R. J. 1978. A global approximation theorem for Meyer-König and Zeller operators. *Math. Z.*, 160, 195-206.
- Bleimann, G., Butzer, P. L. and Hahn, L. 1980. A Bernstein-Type operator approximating continuous functions on the semi-axis. *Nederl. Akad. Wetensch Indag. Math.*, 42, 255-262.
- Carlitz, L. 1968. A note on certain biorthogonal polynomials. *Pacific J. Math.*, 24, 425-430.
- Cheney, E. W. and Sharma, A. 1964. Bernstein power series. *Canad. J. Math.*, 16, 241-253.
- Dalmanoglu, Ö. and Doğru, O. 2010. Statistical approximation properties of Kantorovich type q -MKZ operators. *Creative Math.&Inf.*, 1(19), 15-24.
- DeVore, R. A. and Lorentz, G. G. 1993. *Constructive Approximation*. Springer-Verlag, 449 p., Berlin.

- Doğru, O. 1998. Approximation order and asymptotic approximation for generalized Meyer-König and Zeller operators. *Math. Balkanica*, 12, 359-368.
- Doğru, O. 2002a. On Bleimann, Butzer and Hahn type generalization of Balazs operators. Dedicated to Professor D. D. Stancu on His 75th Birthday. *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 47, 37-45.
- Doğru, O. 2002b. Weighted approximation properties of Szász-type operators. *Intern. Math. J.*, 2(9), 889-895.
- Doğru, O. and Erkuş-Duman, E. 2009. Korovkin type Error Estimates for positive linear operators involving some special functions. *Turk. J. Math.*, 33, 41-53.
- Doğru, O., Özarslan, M. A. and Taşdelen, F. 2004. On positive operators involving a certain class of generating functions. *Studia Scientiarum Math. Hungaria*, 41(4), 415-429.
- Gadjiev, A. D. and Çakar, Ö. 1999. On uniform approximation by Bleimann, Butzer and Hahn operators on all positive semi-axis. *Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys. Tech. Math. Sci.*, 19, 21-26.
- Gupta, V. and Finta, Z. 2009. On certain q -Durrmeyer type operators. *Appl. Math. Comput.*, 209, 415-420.
- Hahn, W. 1949. Über orthogonal polynome, die q -differenzengleichungen genügen. *Math. Nach.*, 2, 4-34.
- İçöz, G. 2008. Doğurucu fonksiyonlar içeren lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi.
- İçöz, G. 2012. A Kantorovich variant of a new type Bernstein-Stancu polynomials. *Appl. Math. Comput.*, 218(17), 8552-8560.
- İçöz, G. and Mohapatra, R. N. 2013. Approximation properties by q -Durrmeyer-Stancu operators. *Anal. Theo. Appl.*, 29(4), 373-383.
- Jackson, F. H. 1910. q -Difference equations. *Amer. J. Math.*, 32(4), 305-314.
- Jackson, F. H. 1944. Basic double hypergeometric functions (II). *Quart. J. Math. Oxford*, 15, 49-61.
- Kac, V. G. and Cheung, P. 2002. *Quantum Calculus*. Universitext, Springer-

- Verlag, 112 p., New York.
- Khan, M. K. 1989. On the rate of converge of Bernstein power series for functions of bounded variation. *J. Approx. Theory*, 57, 90-103.
- Kirov, G. H. 1992. Approximation with Quasi-Splines. Inst. Physics Publ., 247 p., Bristol (New York).
- Kirov, G. and Popova, L. 1993. A genaralization of the linear positive operators. *Math. Balkanica (N.S.)*, 7(2), 149-162.
- Konhauser, J. D. E. 1965. Some properties of biorthogonal polynomials. *J. Math. Anal. Appl.*, 11(1-3), 242-260.
- Konhauser, J. D. E. 1967. Biorthogonal polynomials suggested by the Laguerre polynomials. *Pacific J. Math.*, 303-314.
- Korovkin, P. P. 1960. Linear operators and approximation theory. Hindustan Publishing Co., 222 p., Delhi.
- Lenze, B. 1990. Bernstein-Baskakov-Kantorovich operators and Lipschitz-type maximal functions. *Approx. Th., Kecskemet, Hungary, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai.*, 58, 469-496.
- Lupaş, A. and Müller, M. W. 1970. Approximation propoities of the M_n -operators. *Aequationes Math.*, 5, 19-37.
- Marinković, S., Rajković, P. and Stanković, M. 2008. The inequalities for some types of q -integrals. *Comput. Math. Appl.*, 56, 2490-2498.
- May, C. P. 1976. Saturation and inverse theorems for combinations of a class of exponential-type operators. *Canad. J. Math.*, 28, 1224-1250.
- Meyer-König, W. and Zeller, K. 1960. Bernsteinsche potenzreihen. *Studia Math.*, 19, 89-94.
- Moak, D. S. 1981. The q -analogue of the Laguerre polynomials. *Journal of Math. Anal. and Appl.*, 81, 20-47.
- Müller, M. W. 1967. Die Folge der Gamma operatoren. Thesis, Technische Hoschule, Stuttgart.
- Özarslan, M. A. 2007. q -Laguerre type linear positive operators. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 44(1), 65-80.
- Phillips, G. M. 1996. On generalized Bernstein polynomials. G. A Watson (eds.),

- Numerical Analysis: A. R. Mitchell 75th Birthday Volume, World Science, Singapore, 263-269.
- Popoviciu, T. 1935. Sur l'approximation Des Fonctions Convexes D'ordre Superieur. *Mathematica (Cluj)*, 10, 49-54.
- Sikkema, P. C. 1970. On the asymptotic approximation with operators of Meyer-König and Zeller. *Indag. Math.*, 32, 428-440.
- Srivastava, H. M. 1982. Some biorthogonal polynomials suggested by the Laguerre polynomials. *Pacific J. Math.*, 98(1), 235-250.
- Sucu, S., İçöz, G. and Varma, S. 2012. On some extensions of Szász operators including Boas-Buck-type polynomials. *Abstr. Appl. Anal.*, Vol 2012, 15 pages.
- Szasz, O. 1950. Generalization of S. Bernstein's Polynomials to The Infinite Interval. *J. Research Nat. Bur. Standards*, 45, 239-244.
- Şekeroğlu, B. 2006. Biortogonal polinomların bazı özellikleri. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi.
- Taşdelen, F. and Erençin, A. 2007. The genaralization of bivariate MKZ operators by multiple generating functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 331, 727-735.
- Thomae, J. 1869. Beiträge zur theorie der durch die Heinesche Reihe. *J. Reine Ang. Math.*, 70, 258-281.
- Totik, V. 1983. Approximation by Meyer-König and Zeller type operators. *Math. Zametki*, 182, 425-446.
- Trif, T. 2000. Meyer-König and Zeller operators based on the q -integers. *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.*, 2(29), 221-229.
- Varma, S. 2008. Biortogonal ve q -Biortogonal polinomlar. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi.
- Varma, S., Sucu, S. and İçöz, G. 2012. Generalization of Szász operators involving Brenke type polynomials. *Comput. Math. Appl.*, 64(2), 121-127.
- Volkov, Yu. I. 1978. Certain positive linear operators. *Math. Zametki*, 23, 363-368.
- Yılmaz, M. 2004. Szász operatörleri ve bir genelleşmesinin yaklaşım ve diferensiyel özellikleri. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gürhan İÇÖZ
Doğum Yeri : Yozgat
Doğum Tarihi : 18.09.1984
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : İncirli Lisesi (Yabancı Dil Ağırlıklı) (1998-2002)
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2002-2006)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2006 – Temmuz 2008)
Doktora : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2008 – Eylül 2014)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (Kasım 2007 – ...)

SCI Yayınlar

İçöz, G., Taşdelen, F. and Varma, S. 2012. On linear positive operators involving biorthogonal polynomial. ARS Combinatoria, Vol. 105, 319-331.

Diğer Yayınlar

İçöz, G., Taşdelen, F. and Doğru, O. 2012. Kantorovich Process of Linear Positive Operators via Biorthogonal Polynomials. J. Inequal. Appl., 3(4), 77-84.
İçöz, G., Varma, S. and Taşdelen, F. 2012. Integral type modification for q -Laguerre polynomials. Bull. Math. Anal. Appl., Vol. 4 Issue 3, 87-98.