

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**UZAY EĞRİLERİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ VE
SİNGÜLERİTELERİ ÜZERİNE**

Erdem KOCAKUŞAKLI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2014**

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

18/07/2014

Erdem KOCAKUŞAKLI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

UZAY EĞRİLERİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ VE SİNGÜLERİTELERİ ÜZERİNE

Erdem KOCAKUŞAKLI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İsmail GÖK

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezde gerekli olan bazı kavramlar, tanımlar, teoremler ve kaynak özetleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Öklid uzayında Frenet çatısına göre eğrilerin uzaklık fonksiyonları, singülerlik dereceleri ve fonksiyonların katlanmaları tanımlanmıştır. Ayrıca eğri ve küresel Darboux göstergesi kullanılarak elde edilen rektifiyan açılabilir ile rektifiyan Gauss yüzeyleri verilmiştir. Bu yüzey ve eğrilerin singülerlik derecesi bakımından yerel olarak denk olduğu eğri ve yüzeyler elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, 1. tip ve 2. tip Bishop çatılarına göre eğrilerin yükseklik fonksiyonları singülerlik dereceleri ve fonksiyonların katlanmaları tanımlanmıştır. Dahası eğrilerin bu çatılara göre küresel Darboux göstergeleri ve eğri yardımıyla elde edilen dual, rektifiyan açılabilir ve Gauss yüzeyleri bulunmuştur. Bu yüzey ve eğrilerin singülerlik dereceleri bakımından yerel olarak denk olduğu eğri ve yüzeyler gösterilmiştir. Ayrıca elde ettiğimiz teorik bilgiler örnekler ile desteklenmiştir. Bishop çatılarına göre eğrilerin küresel Darboux göstergeleri ve eğri yardımıyla elde edilen yüzeyler şekilleri ile birlikte verilmiştir.

Tezin beşinci ve son bölümü tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Temmuz 2014, 108 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eğrilerin singüleriteleri, yükseklik fonksiyonu, katlanmalar, küresel Darboux göstergesi, rektifiyan açılabilir yüzey, rektifiyan Gauss yüzey.

ABSTRACT

Master Thesis

ON THE DIFFERENTIAL GEOMETRIES AND SINGULARITIES OF THE SPACE CURVES

Erdem KOCAKUŞAKLI

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İsmail GÖK

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter contains some notions, definitions, theorems and abstracts of source which are needed in the thesis.

In the third chapter, height function of curves, degree of singularities and unfolding of functions are defined according to Frenet frame in Euclidean space. Also, by using curve and its spherical Darboux image, Rectifying developable and rectifying Gauss surfaces are given curves and surfaces are obtained which these curves and surfaces with regard to singularities degrees are equal.

In the fourth chapter, height function of curves, degree of singularities and unfolding of functions are defined according to Bishop and type-2 Bishop frames. Moreover, by using curve and its spherical Darboux image dual, rectifying developable and rectifying Gauss surfaces are founded. Curves and surfaces are showed which these curves and surfaces with regard to singularities degrees are equal these. Also theoretical informations supposed by examples of curves. According to Bishop frames spherical Darboux image of curves and surfaces obtained by curves are given with their figures.

In the fifth and last chapter is devoted to section of discussion and conclusion.

July 2014, 108 pages

Key Words: Singularities of curves, height function, unfoldings, spherical Darboux image, rectifying developable surface, rectifying Gauss surface.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşmasında beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek çalışmanın ilerlemesinde katkıda bulunan danışman hocam Sayın Doç. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı) e, fikirleri ve sorularıyla beni yönlendiren Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı) ile Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı) ye çok teşekkür ederim. Son olarak hayatımın her aşamasında yanımda oldukları gibi çalışmalarım süresince de fedakarlıklar göstererek beni destekleyen aileme en içten duygularıyla minnettar olduğumu belirtmek isterim.

Erdem KOCAKUŞAKLI

Ankara, Temmuz 2014

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE KONU ÖZETLERİ.....	3
3. FRENET ÇATISINA GÖRE EĞRİLERİN SİNGÜLERİTELERİ	29
3.1 Uzay Eğrisi Üzerindeki Sürekli Fonksiyon Aileleri.....	34
3.2 Helisler ve Bir Eğrinin Teğetler Göstergesi.....	44
3.3 Bir Değişkenli Fonksiyonların Katlanmaları.....	46
3.4 Singülerite Derecelerine Göre d , RG Yüzeyi Ve RD Yüzeyinin Sınıflandırılması.....	55
4. BİSHOP VE BİSHOP TYPE-2 ÇATISINA GÖRE EĞRİLERİN SİNGÜLERİTELERİ.....	57
4.1 Uzay Eğrisilerinin Geometrik Değişmezi ve Yükseklik Fonksiyonları.....	61
4.2 Versal Katlanmalar.....	71
4.3 Singülerite Derecelerine Göre d ve BDU nun Sınıflandırılması	74
4.4 2.Tip Bishop Çatısına Göre Fonksiyon Ailelerinin Singüleriteleri.....	82
4.5 Singülerite Derecelerine Göre N_1, N_2, ζ_1 ve ζ_2 Göstergelerinin Sınıflandırılması.....	96
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	106
KAYNAKLAR.....	107
ÖZGEÇMİŞ.....	108

SİMGELER DİZİNİ

H	Harmonik eğrilik fonksiyonu
$\widehat{H}$	Türetilmiş harmonik eğrilik fonksiyonu
$\mathfrak{D}_F$	Zarf cümlesi
$\mathfrak{B}_F$	Ayrışım cümlesi
$\mathfrak{R}_F$	Sırt cümlesi
$\mathfrak{S}_F$	Singülerite cümlesi
f_d	Karesel uzaklık fonksiyonu
f_h	Destek fonksiyonu
$\mathbf{H}$	Yükseklik fonksiyonu
$\widetilde{\mathbf{H}}$	Genişletilmiş yükseklik fonksiyonu
F_x	n-parametrelili 1-değişkenli fonksiyon
F_s	1-parametrelili n-değişkenli fonksiyon
$J^k(F)$	F fonksiyonunun k. dereceden jeti
A_k	k. dereceden singülerite
$D(s)$	Darboux vektörü
$\widetilde{D}(s)$	Modifiye Darboux vektörü
$d(s)$	Küresel Darboux göstergesi
RD	Rektifiyan açılabilir yüzey
RG	Rektifiyan Gauss yüzeyi
$F(s, u) = f_u(s)$	Binormal yönlendirmeli uzaklık fonksiyonu
$G(s, u) = g_u(s)$	Teğet yönlendirmeli uzaklık fonksiyonu
$\rho(s)$	Geometrik invariant fonksiyonu
BRD	Bishop rektifiyan açılabilir yüzey
BDU	Bishop dual yüzeyi
$\mathbb{H}$	Bishop yükseklik fonksiyonu
$\widetilde{\mathbb{H}}$	Genişletilmiş Bishop yükseklik fonksiyonu
H_{N_1}	N_1 yönlendirmeli yükseklik fonksiyonu
H_{N_2}	N_2 yönlendirmeli yükseklik fonksiyonu
H_{ζ_1}	ζ_1 yönlendirmeli yükseklik fonksiyonu
H_{ζ_2}	ζ_2 yönlendirmeli yükseklik fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	1. dereceden değme.....	13
Şekil 2.2	2. dereceden değme.....	14
Şekil 2.3	3. dereceden değme.....	14
Şekil 2.4	4. dereceden değme.....	14
Şekil 3.1	Darboux vektörü.....	30
Şekil 3.2	Adi Cusp cümlesi.....	33
Şekil 3.3	Cuspidal edge cümlesi.....	33
Şekil 3.4	Swallow tail cümlesi.....	34
Şekil 4.1	Bishop çatısı.....	58
Şekil 4.2	2. tip Bishop çatısı.....	59
Şekil 4.3	$\gamma(s)$ eğrisi.....	76
Şekil 4.4	$\gamma(s)$ eğrisinin Bishop Darboux göstergesi.....	78
Şekil 4.5	$\gamma(s)$ eğrisinin RG yüzeyi ve Darboux göstergesi.....	79
Şekil 4.6	$\gamma(s)$ eğrisinin Bishop Dual yüzeyi.....	80
Şekil 4.7	$\beta(s)$ helis eğrisi.....	80
Şekil 4.8	$\beta(s)$ eğrisinin Bishop Gaus yüzeyi ve Darboux göstergesi.....	82
Şekil 4.9	$\beta(s)$ eğrisinin Bishop Dual yüzeyi.....	82
Şekil 4.10	$\alpha(s)$ helis eğrisi.....	98
Şekil 4.11	$\alpha(s)$ eğrisinin N_1 küresel göstergesi.....	99
Şekil 4.12	$\alpha(s)$ eğrisinin N_2 küresel göstergesi.....	99
Şekil 4.13	$\alpha(s)$ eğrisinin ζ_1 küresel göstergesi.....	101
Şekil 4.14	$\alpha(s)$ eğrisinin ζ_2 küresel göstergesi.....	101
Şekil 4.15	$\psi(s)$ eğrisi.....	102
Şekil 4.16	$\psi(s)$ eğrisinin N_1 ve N_2 küresel göstergeleri.....	104
Şekil 4.17	$\psi(s)$ eğrisinin ζ_1 küresel göstergesi.....	105
Şekil 4.18	$\psi(s)$ eğrisinin ζ_2 küresel göstergesi.....	105

1. GİRİŞ

Uzay eğrilerinin diferensiyel geometrisi üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Eğrilerin singüleriteleri ile ilgili çalışmalar da çok eskiye dayanmaktadır. Bu teori ile ilgili temel kavramlar, J. W. Bruce ve P. J. Giblin'in "Curves and Singularities" isimli kitabında ve Uribe Vargas'ın doktora tezinde geniş olarak yer almaktadır.

J. W. Bruce ve P. J. Giblin eğrilerin singüleritelerini elde etmekte yararlı olabilecek yükseklik ve uzaklık fonksiyonlarını tanımlamıştır. Bu fonksiyon aileleri yardımıyla eğriler tarafından oluşturulan cümlelerin noktasal olarak daha kolay karakterize edilebilen cümlelere denk geldiğini belirlemekte kullanılan önemli sonuç ve teoremler vermişlerdir.

Lorentz uzayında eğrilerin dayanak fonksiyonları, karesel uzaklık fonksiyonları ve singüleriteleri Tevfik Şahin' in yüksek lisans çalışmasında ele alınmıştır. Bu çalışmada kompleks Frenet çatısı tanımlanmış ve bu çatı yardımıyla eğrilerin singüleriteleri ile ilgili karakterizasyonlar verilmiştir.

Izumiya ve arkadaşları "The Rectifying Developable and the Spherical Darboux Image of a Space Curve" adlı makalesinde eğrilerin küresel Darboux göstergesini ve eğriler yardımıyla tanımlanan rektifiyan açılabilir yüzey ile rektifiyan Gauss yüzeylerini elde etmiştir. Ayrıca bu eğri ve yüzeylerin singülerite dereceleri yardımıyla lokal olarak denk olduğu eğri ve yüzey ailelerini elde etmişlerdir.

H. Liu ve D. Pei makalelerinde de Öklid uzayında 1. tip ve 2. tip Bishop çatılarına göre eğrilerin küresel darboux göstergesi, Bishop rektifiyan açılabilir yüzeyi, Bishop Gauss yüzeyi ve Bishop dual yüzeyi tanımlanmıştır. Dahası bu eğri ve yüzey ailelerinin singülerite dereceleri ile katlanmaları esas alınarak lokal olarak denk olduğu eğri ve yüzeyler örneklerle ifade edilmiştir.

Bu çalışmada yukarıda bahsedilen çalışmalardan yararlanarak Öklid uzayında Frenet

çatısına, 1. tip ve 2. tip Bishop çatılarına göre eğrilerin singülerlik derecelerine bağlı olarak elde edilen Darboux vektörü ve eğri tarafından oluşturulan Darboux göstergesi, Bishop rektifiyan açılabilir yüzeyi, Bishop Gauss yüzeyi ve Bishop dual yüzeyinin noktasal olarak karşılık geldiği eğri ve yüzeylerin neler olacağı gösterildi. Ayrıca verilen eğriler yardımıyla küresel Darboux göstergesi ve yukarıda bahsedilen yüzeylerin şekilleri çizilmiş, singülerlik derecelerine göre karşılık geldiği cümleleri açıkça ifade edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE KAYNAK ÖZETLERİ

Tanım 2.1 (Topoloji) X bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bir koneksiyonu τ olsun. τ koneksiyonu

i) $X, \emptyset \in \tau$,

ii) $\forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$,

iii) $A_i \in \tau, i \in I, \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

önergelerini doğrularsa τ cümlesine, X üzerinde bir **topolojidir** denir

(Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.2 (Topolojik uzay) Bir X cümlesi ve üzerindeki τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir **topolojik uzay** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.3 (Homeomorfizm) X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Sürekli

$$f : X \rightarrow Y$$

fonksiyonunun f^{-1} inversi mevcut ve sürekli ise f dönüşümüne X den Y ye bir **homeomorfizm** veya **topolojik dönüşüm** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.4 (Reel iç çarpım uzayı) $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde V bir vektör uzayı olmak üzere, $\forall v, w \in V$ için V vektör uzayında

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \rightarrow \langle, \rangle (v, w) = \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$$

iç çarpım fonksiyonu tanımlanabilirse, V vektör uzayına **iç çarpım uzayı** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.5 (Öklid uzayı) n boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olmak üzere, V ile birleştirilmiş bir A afin uzayına **Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir (Hacısalıhoğlu

2000).

Tanım 2.6 (Standart iç çarpım) E^n n boyutlu Öklid uzayında

$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in E^n$ için

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlanan simetrik, bi-lineer ve pozitif tanımlı $\langle, \rangle$ fonksiyonuna **standart iç çarpım** veya **Öklid iç çarpımı** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.7 (Norm) E^n n boyutlu Öklid uzayında

$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ için

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona x **vektörünün normu** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.8 (Vektörel çarpım) E^3 3 boyutlu Öklid uzayında

$\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in E^3$ için Öklid vektörel çarpımı

$$x \times y = (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_3 y_1 - y_3 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.9 (C^k sınıfı) E^n Öklid uzanda açık alt cümle U olmak üzere $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun k . mertebeden bütün kısmi türevleri mevcut ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k **sınıfından** (k . **sınıftan**) **diferensiyellenebilirdir** denir. Özel olarak f sadece sürekli ise **C^0 sınıfındandır** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

$$C^k(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ fonksiyonu } C^k \text{ sınıfından ve } k \text{ sonlu}\}$$

$$C^\infty(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f \in C^k(U, \mathbb{R}), k \in \mathbb{N}\}$$

Tanım 2.10 (Eğri) $I, \mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^{n+1}$ biçiminde C^∞ sınıfından bir α dönüşümüne, E^{n+1} **uzayı içinde bir eğri** denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.11 (Diferensiyellenebilir eğri) M bir C^∞ manifold ve $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subseteq E^{n+1}$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise α dönüşümüne M üzerinde **diferensiyellenebilir eğri** denir (Do Carmo 1976).

Tanım 2.12 (Regüler eğri) $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayı üzerinde bir eğri $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü ile verilsin. Burada $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_n(s))$ olmak üzere eğer $\gamma'_1(s) = \gamma'_2(s) = \dots = \gamma'_n(s) = 0$ olacak şekilde $s \in I$ değeri mevcut değilse $\gamma(s)$ eğrisine **regüler eğri** denir (Bruce ve Giblin 1992).

Tanım 2.13 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayı üzerinde bir eğri $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü ile verilsin.

$$\gamma'(s) = (\gamma'_1(s), \gamma'_2(s), \dots, \gamma'_n(s))$$

şeklinde verilen ifade γ **eğrisinin s noktasındaki hız vektörü** olarak adlandırılır (Bruce ve Giblin 1992).

Tanım 2.14 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlı γ eğrisi verilsin. $\|\gamma'(s)\|$ uzunluğuna γ **eğrisinin s noktasındaki hızı** denir. Eğer $\forall s \in I$ için $\|\gamma'(s)\| = 1$ sağlanıyorsa γ eğrisine **birim hızlı eğri** denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir (Bruce ve Giblin 1992).

Tanım 2.15 (Difeomorfizm) U ve V , $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayının açık alt cümleleri olmak üzere $\varphi : U \rightarrow V$ fonksiyonu homeomorfizm ve φ ile φ^{-1} fonksiyonlarının ikisi de diferensiyellenebilir ise φ fonksiyonuna bir **difeomorfizm** denir. U cümlesinden V cümlesine bir difeomorfizm varsa U cümlesi, V cümlesine **difeomorftur** denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.16 (Lokal difeomorfizm) S_1 ve S_2 regüler yüzeyler olmak üzere $\varphi : U \subset S_1 \rightarrow S_2$ şeklinde tanımlı φ dönüşümü verilsin. Eğer p nin bir $V \subset U$ açık komşuluğu üzerinde $\varphi(V) \subset S_2$ açık cümlesi için φ dönüşümünün V ye kısıtlanması olan $\varphi|_V$ dönüşümü bir difeomorfizm ise φ dönüşümüne $p \in U$ noktasında bir **lokal difeomorfizm** denir (Do Carmo 1976).

Tanım 2.17 (İzomorfizm) V ve W iki vektör uzayı olmak üzere

$$L : V \rightarrow W$$

lineer dönüşümü birebir ve üzerine ise bu L dönüşümüne **izomorfizma** denir. Bu takdirde V ve W uzaylarınada **izomorf uzaylar** denir (Çallıalp 2008).

Önerme 2.18 S_1 ve S_2 regüler yüzeyler ve $U \subset S_1$ in bir açık cümlesinde $\varphi : U \subset S_1 \rightarrow S_2$ diferensiyellenebilir dönüşümü verilsin. φ dönüşümünün $p \in U$ noktasındaki diferensiyeli $d\varphi_p$ bir izomorfizm ise o zaman φ dönüşümü p noktasında lokal difeomorfizmdir (Do Carmo 1976).

Tanım 2.19 Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.20 $M \subset E^{n+1}$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\Psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$, için;

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$$

olmak üzere, Ψ den elde edilen $\{T, N_1, \dots, N_{r-1}\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r -ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{T(m), N_1(m), \dots, N_{r-1}(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki **Serret-Frenet r -ayaklısı** denir. Herbir T ve $N_i, 1 \leq i \leq r-1$, vektörlerine de Serret-Frenet vektör alanı adı verilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Özel Hal: $n = 3$ olmak üzere, E^3 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet 2-ayaklısı ve Frenet 3-ayaklısı elde edilebilir. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ve $s \in I$ **yay-parametresi** olmak üzere,

$$\begin{aligned}\vec{T}(s) &= \alpha'(s) \quad , \quad \alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds} \\ \vec{N}(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \\ \vec{B}(s) &= \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)\end{aligned}$$

dir. Böylece, $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ sistemi, $\alpha(s)$ noktasında, M eğrisinin Frenet 3-ayaklısıdır (Hacısalıhoğlu 2000).

Teorem 2.21 $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ ise

$$\begin{aligned}\vec{T}(s) &= \frac{\dot{\alpha}(s)}{\|\dot{\alpha}(s)\|} \quad , \quad \dot{\alpha}(s) = \frac{d\alpha}{ds} \\ \vec{N}(s) &= \vec{B}(s) \times \vec{T}(s) \\ \vec{B}(s) &= \frac{\dot{\alpha}(s) \times \ddot{\alpha}(s)}{\|\dot{\alpha}(s) \times \ddot{\alpha}(s)\|}\end{aligned}$$

dir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.22 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

şeklinde s yay parametresi ile tanımlı $\gamma(s)$ eğrisi verilsin. $\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds}$ olmak üzere $\gamma'(s)$ yi $T(s)$ ile gösterelim. $T(s)$ şeklinde gösterilen fonksiyona $\gamma(s)$ noktasında γ eğrisinin birim teğet vektör alanı denir. γ eğrisinin eğriligi $\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$ ile tanımlanır. Eğer $\kappa(s) \neq 0$ ise $\gamma(s)$ noktasında γ eğrisinin $N(s)$ birim asli normal vektöründe $\gamma''(s) = \kappa(s)N(s)$ ile verilir. $B(s) = T(s) \times N(s)$ birim vektörüne, $\gamma(s)$ noktasında γ eğrisinin birim binormal vektörü denir. Böylece Frenet-Serret formülü aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s) \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned}$$

Burada $\tau(s)$, $\gamma(s)$ noktasında γ eğrisinin torsiyonudur (Izumiya ve Takeuchi 2002).

Tanım 2.23 (Küresel eğri): Bir küre üzerinde yatan eğriye **küresel eğri** adı verilir (Bruce ve Giblin 1992).

Tanım 2.24 (Eğrilik ekseni ve merkezi) $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklinde s yay parametresi ile tanımlı $\gamma(s)$ eğrisi verilsin. $\gamma(s)$ eğrisinin s_0 noktasındaki $\gamma(s_0)$ ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri olan

$$\bar{\alpha} = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}N(s_0) + \lambda B(s_0)$$

doğrusuna $\gamma(s)$ eğrisinin s_0 noktasındaki **eğrilik ekseni** denir. Eğrilik ekseni üzerindeki $C(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}N(s_0)$ noktasma $\gamma(s)$ eğrisinin $m = \alpha(s_0)$ noktasındaki **eğrilik merkezi** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.25 (Teğetler göstergesi) E^3 3–boyutlu Öklid uzayında bir α eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere, $\overrightarrow{PQ} = T$ alındığında P noktası α eğrisi çizerken, Q noktasının birim küre üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin **teğetler göstergesi** adı verilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.26 (Harmonik eğrilik) $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklinde s yay parametresi ile tanımlı $\gamma(s)$ eğrisi verilsin. $\gamma(s)$ eğrisinin eğrilik ve torsiyonu $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H & : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s & \rightarrow H(s) = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna, $\gamma(s)$ eğrisinin **harmonik eğrilik fonksiyonu** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Ayrıca $\gamma(s)$ eğrisinin torsiyonu $\tau(s) \neq 0$ olmak üzere H yardımıyla tanımlanan bir fonksiyon

$$\begin{aligned} \hat{H} & : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s & \rightarrow \hat{H}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)(s) \end{aligned}$$

şeklinde gösterilecektir.

Önerme 2.27 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri ve $H(s)$ bu eğrinin harmonik eğrilik fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} H'(s) &= \frac{\kappa\tau' - \tau\kappa'}{\kappa^2}, \\ H''(s) &= \frac{\tau''\kappa^2 - \tau\kappa''\kappa - 2\kappa\kappa'\tau' + 2\tau(\kappa')^2}{\kappa^3}, \\ H'''(s) &= \frac{-\kappa^2\tau\kappa''' - 3\kappa^2\tau'\kappa'' + \kappa^3\tau''' + 6\tau\kappa\kappa'\kappa'' - 3\kappa^2\kappa'\tau'' + 6\kappa(\kappa')^2\tau' - 6\tau(\kappa')^3}{\kappa^4} \end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.28 (Helis) $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler bir eğri olsun. γ eğrisinin her noktasındaki teğet vektör alanları, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa γ eğrisine bir **genel helis** denir. $\gamma(s)$ eğrisinin genel helis olması için gerek ve yeter şart $H(s)$ şeklinde verilen ifadenin sabit olmasıdır. Eğer κ ve τ sıfırdan farklı sabitler ise helise **daireesel helis** denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.29 (Oskülatör düzlem) $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler bir eğri olsun. γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B\}$ olmak üzere $Sp\{T, N\}$ vektör uzayı ile birleşen $\gamma(s)$ noktasındaki afin altuzay **oskülatör düzlemdir** ve bu düzlemin denklemi P düzlemdeki herhangi bir nokta olmak üzere $\det(T, N, \overrightarrow{\gamma(s)P}) = 0$ şeklinde elde edilir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.30 (Normal düzlem) $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler bir eğri olsun. γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B\}$ olmak üzere $Sp\{N, B\}$ vektör uzayı ile birleşen $\gamma(s)$ noktasındaki afin altuzay **normal düzlemdir** ve bu düzlemin denklemi P düzlemdeki herhangi bir nokta olmak üzere $\det(N, B, \overrightarrow{\gamma(s)P}) = 0$ şeklinde elde edilir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.31 (Rektifiyan düzlem) $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler bir eğri olsun. γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B\}$ olmak üzere $Sp\{T, B\}$ vektör uzayı ile birleşen $\gamma(s)$ noktasındaki afin altuzay **rektifiyan düzlemdir** ve bu düzlemin denklemi P düzlemdeki herhangi bir nokta olmak üzere $\det(T, B, \overrightarrow{\gamma(s)P}) = 0$ şeklinde elde edilir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.32 $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayında sabit p ve u noktaları yardımıyla verilen

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonları için $F(x) = 0$ olan noktaların cümlesi olarak $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayının bazı alt cümlelerini tanımlayalım.

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, F(x) = \|x - u\|^2 - \|u - p\|^2 \quad (2.1)$$

fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyonun çekirdek cümlesinin

$$\text{Çek}F = F^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$$

şeklinde olacağı açıktır.

(i) $n = 2$ olması halinde; (2.1) eşitliği ile verilen fonksiyon $\mathbb{R}^2$ düzleminde sabit u ve p noktaları için $\|u - p\|^2 = r^2$ alınarak

$$F(x) = \|x - u\|^2 - r^2$$

şeklinde yazılabilir. Böylece F fonksiyonunun çekirdek cümlesi

$$\begin{aligned} \text{Çek}F &= F^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : F(x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - u\|^2 = r^2\} \end{aligned}$$

olup $\mathbb{R}^2$ düzleminde u merkezli ve r yarıçaplı bir çember belirtir.

(ii) $n = 3$ olması halinde; $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında sabit u ve p noktaları için $\|x - p\|^2 = r^2$ alınarak $F(x) = \|x - u\|^2 - r^2$ fonksiyonunun çekirdek cümlesi

$$\begin{aligned} \text{Çek}F &= F^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : F(x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - u\|^2 = r^2\} \end{aligned}$$

olup $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında u merkezli r yarıçaplı bir küre belirtir.

(iii) $n > 3$ olması halinde; F fonksiyonunun çekirdek cümlesi $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayında u merkezli r yarıçaplı bir hiperküre ($(n - 1)$ küre) belirtir (Bruce ve Giblin 1992).

Tanım 2.33 $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayında sabit bir p noktası ve sabit bir $\vec{u}$ vektörü

yardımla reel değerli bir

$$G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad G(x) = \langle (x - p), \vec{u} \rangle \quad (2.2)$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu G fonksiyonunun çekirdek cümlesi

$$\text{Çek}G = G^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : G(x) = 0\}$$

şeklindedir.

(i) $n = 2$ ise; G fonksiyonunun çekirdek cümlesi

$$\begin{aligned} \text{Çek}G &= G^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : G(x) = \langle (x - p), \vec{u} \rangle = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : px \perp \vec{u}\} \end{aligned}$$

olup $\mathbb{R}^2$ düzleminde sabit p noktasından geçen ve $\vec{u}$ vektörüne dik olan doğruyu belirtir.

(ii) $n = 3$ ise; G fonksiyonunun çekirdek cümlesi

$$\begin{aligned} \text{Çek}G &= G^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : G(x) = \langle (x - p), \vec{u} \rangle = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 : \vec{px} \perp \vec{u}\} \end{aligned}$$

olup $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında sabit p noktasından geçen ve normal vektörü $\vec{u}$ olan düzlem belirtir.

(iii) $n > 3$ ise; G fonksiyonunun çekirdek cümlesi $\mathbb{R}^n$ uzayında sabit p noktasından geçen ve normal vektörü $\vec{u}$ olan bir hiperdüzlem belirtir (Bruce ve Giblin 1992).

Sonuç 2.34 Çember (küre, hiperküre) ve doğru (düzlem, hiperdüzlem), sırasıyla, yukarıda tanımlanan F ve G fonksiyonlarının çekirdek cümleleridir (Şahin 2005).

Aşağıda $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayında herhangi bir γ eğrisiyle bir F fonksiyonunun çekirdek cümlesinin arakesit noktalarındaki durumunu inceleyeceğiz. Bu incelememizi değme kavramı yardımıyla açıklayacağız. Bu nedenle $\{0\}$ orijin noktasını F fonksiyonu için regüler değer olarak kabul edeceğiz.

Tanım 2.35 $I \subset \mathbb{R}$ cümlesi bir açık aralık olmak üzere $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayında

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_n(s))$$

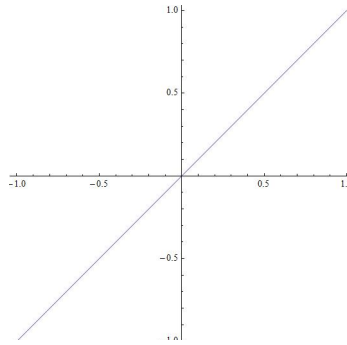
bir eğri ve $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$\begin{aligned} g &= F \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(s) = (F \circ \gamma)(s) \\ &= F(\gamma(s)) = F(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_n(s)) \end{aligned}$$

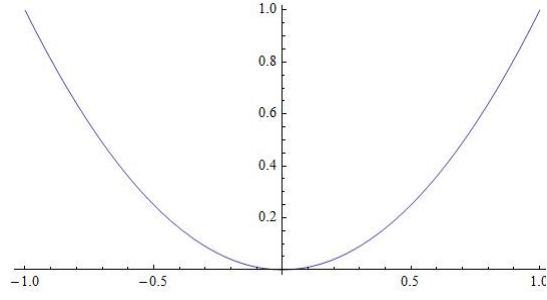
şeklinde tanımlanan bileşke fonksiyonu eğer $s = s_0$ noktasında

$$g(s_0) = g'(s_0) = g''(s_0) = \dots = g^{(k-1)}(s_0) = 0, \quad g^{(k)}(s_0) \neq 0 \quad (2.3)$$

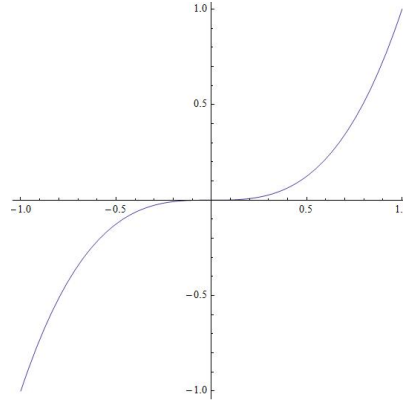
koşullarını sağlıyorsa $s = s_0$ için (ya da $p = \gamma(s_0)$ noktasında) γ eğrisi ve $\text{Çek}F$ cümlesi **k. dereceden değmeye sahiptirler** denir (Bruce ve Giblin 1992).



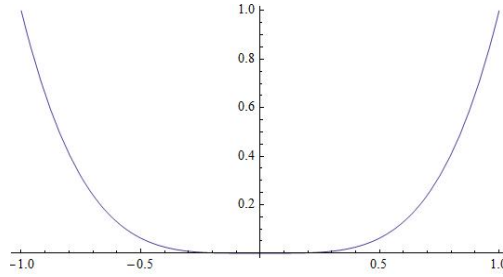
Şekil 2.1 $s=0$ noktasında 1. dereceden değme



Şekil 2.2 $s=0$ noktasında 2. dereceden değme



Şekil 2.3 $s=0$ noktasında 3. dereceden değme



Şekil 2.4 $s=0$ noktasında 4. dereceden değme

Örnek 2.36 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ eğrisi ve $f(x, y) = y^2 - x - \frac{1}{2}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $(-\frac{1}{2}, 0)$ noktasında eğri ile ∇f cümlesinin 4. dereceden değmeye sahip olduğunu gösterelim. $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ çemberi s parametresi ile $\gamma(s) = (\frac{1}{2} \cos s, \frac{1}{2} \sin s)$ şeklinde ifade edilebilir. $(-\frac{1}{2}, 0)$ noktası için $\gamma(\pi) = (-\frac{1}{2}, 0)$ olduğundan $s_0 = \pi$

parametresi göz önüne alınmalıdır.

$$\begin{aligned}
g &= (f \circ \gamma)(s) = f(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \frac{1}{4} \sin^2 s - \frac{1}{2} \cos^2 s - \frac{1}{2} \\
g'(s) &= \frac{1}{2} \sin s \cos s + \frac{1}{2} \sin s = \frac{1}{4} \sin 2s + \frac{1}{2} \sin s \\
g''(s) &= \frac{1}{2} \cos 2s + \frac{1}{2} \cos s \\
g'''(s) &= -\sin 2s - \frac{1}{2} \sin s \\
g^{(iv)}(s) &= -2 \cos 2s - \frac{1}{2} \cos s \\
g(\pi) &= g'(\pi) = g''(\pi) = g'''(\pi) = 0, g^{(iv)}(\pi) = -\frac{3}{2} \neq 0
\end{aligned}$$

olduğundan dolayı γ eğrisi $(-\frac{1}{2}, 0)$ noktasında *Çekf* cümlesi ile 4. dereceden değmeye sahiptir.

Tanım 2.37 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ regüler bir eğri olsun.

(a) $u \in \mathbb{R}^n$ sabit bir nokta olmak üzere

$$f_d : I \rightarrow \mathbb{R}, f_d(s) = \|\gamma(s) - u\|^2 = \langle \gamma(s) - u, \gamma(s) - u \rangle \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona, γ eğrisinin u noktasından olan **karesel uzaklık fonksiyonu** denir (Bruce ve Giblin 1992).

(b) $\vec{u}, \mathbb{R}^n$ reel vektör uzayında sabit bir birim vektör olmak üzere;

$$f_h : I \rightarrow \mathbb{R}, f_h(t) = \langle \gamma(t), \vec{u} \rangle \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlı f_h fonksiyonuna; γ eğrisinin $\vec{u}$ vektörü yönündeki **dayanak (yükseklik veya destek) fonksiyonu** denir (Bruce ve Giblin 1992).

Bu fonksiyonlar bölümün başında (2.1) ve (2.2) denklemleriyle verilen fonksiyonlarda, sırasıyla, x yerine $\gamma(s)$ yazıldıktan sonra, sabit kısım atılarak elde edilmişlerdir. Yani;

$$F(x) = \|x - u\|^2 - \|u - p\|^2$$

eşitliğinde x yerine $\gamma(s)$ yazılıp, $\|u - p\|^2$ sabit sayısı atıldığında elde edeceğimiz

fonksiyon (2.4) formülü ile verilen karesel uzaklık fonksiyonu olacaktır.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F & : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \rightarrow & \quad \mathbb{R} \\ (s, (x_1, x_2, \dots, x_n)) & \rightarrow & F(s, x_1, x_2, \dots, x_n) & = F(s, x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

diferensiyellenebilir fonksiyonu verilsin. F fonksiyonu yardımı ile iki fonksiyon ailesi tanımlayalım. Birincisi;

$$\begin{aligned} F_x & : \quad \mathbb{R} & \rightarrow & \quad \mathbb{R} \\ s & \rightarrow & F_x(s) & = F(s, x) \end{aligned} \quad (2.7)$$

şeklinde 1-değişkenli, n-parametrelili fonksiyon ailesi, ikincisi ise;

$$\begin{aligned} F_s & : \quad \mathbb{R}^n & \rightarrow & \quad \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \rightarrow & F_s(x_1, x_2, \dots, x_n) & = F(s, x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

şeklindeki bir n-değişkenli, 1-parametrelili fonksiyon ailesidir.

Tanım 2.38

$$\begin{aligned} F & : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \rightarrow & \quad \mathbb{R} \\ (s, (x_1, x_2, \dots, x_n)) & \rightarrow & F(s, x_1, x_2, \dots, x_n) & = F(s, x) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere

$$\mathfrak{D}_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : F = \frac{\partial F}{\partial s} = 0, s \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlı cümleye, F fonksiyonlar ailesinin **zarf (diskriminant) cümlesi** denir (Bruce ve Giblin 1992).

Örnek 2.39 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F(s, x) = s^3 + x_1 s + x_2$$

diferensiyellenebilir fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonlar ailesinin zarfı

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_F &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : F = \frac{\partial F}{\partial s} = 0, s \in \mathbb{R} \right\} \\ \mathfrak{D}_F &= \left\{ x : s^3 + x_1 s + x_2 = 3s^2 + x_1 = 0, s \in \mathbb{R} \right\} \\ \mathfrak{D}_F &= \left\{ x : x_1 = -3s^2, x_2 = 2s^3, s \in \mathbb{R} \right\} \\ \mathfrak{D}_F &= \left\{ x : 4x_1^3 + 27x_2^2 = 0 \right\}\end{aligned}$$

cümlesidir (Bruce ve Giblin 1992).

Tanım 2.40

$$\begin{aligned}F : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s, (x_1, x_2, \dots, x_n)) &\rightarrow F(s, x_1, x_2, \dots, x_n) = F(s, x)\end{aligned}$$

diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere

$$\mathfrak{R}_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : F = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0, s \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlı cümleye F fonksiyonlar ailesinin **sırt (regresyon) cümlesi** denir (Bruce ve Giblin 1992).

Örnek 2.41 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F(s, x) = s^3 + x_1 s + x_2$$

diferensiyellenebilir fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonlar ailesinin sırt

cümlesi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_F &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : F = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0, s \in \mathbb{R} \right\} \\
\mathfrak{R}_F &= \left\{ x : s^3 + x_1 s + x_2 = 3s^2 + x_1 = 6s = 0, s \in \mathbb{R} \right\} \\
\mathfrak{R}_F &= \left\{ x : x_1 = -3s^2, x_2 = 2s^3, s = 0 \right\} \\
\mathfrak{R}_F &= \{ x : x = (0, 0) \}
\end{aligned}$$

şeklindedir (Bruce ve Giblin 1992).

Tanım 2.42

$$\begin{aligned}
F : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\
(s, (x_1, x_2, \dots, x_n)) &\rightarrow F(s, x_1, x_2, \dots, x_n) = F(s, x)
\end{aligned}$$

diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere

$$\mathfrak{S}_F = \left\{ (s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \frac{\partial F}{\partial s} = 0 \right\} \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlı cümleye F fonksiyonlar ailesinin (s, x) noktasındaki **singülerite cümlesi** denir (Bruce ve Giblin 1992).

Örnek 2.43 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F(s, x) = s^3 + x_1 s + x_2$$

diferensiyellenebilir fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonlar ailesinin singülerite cümlesi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_F &= \left\{ (s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : \frac{\partial F}{\partial s} = 0, s \in \mathbb{R} \right\} \\
\mathfrak{S}_F &= \left\{ (s, x) : 3s^2 + x_1 = 0, s \in \mathbb{R} \right\} \\
\mathfrak{S}_F &= \left\{ (s, x) : x_1 = -3s^2, x_2, s \in \mathbb{R} \right\} \\
\mathfrak{S}_F &= \left\{ (s, -3s^2, x_2) : x_2, s \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Tanım 2.44

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s, (x_1, x_2, \dots, x_n)) &\rightarrow F(s, x_1, x_2, \dots, x_n) = F(s, x) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere

$$\mathfrak{B}_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0, \quad s \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlı cümleye F fonksiyonlar ailesinin (s, x) noktasındaki **ayrışım (bifurcation) cümlesi** denir (Bruce ve Giblin 1992).

Örnek 2.45 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(s, x) = \frac{1}{5}s^5 + \frac{1}{3}x_1s^3 + \frac{1}{2}x_2s^2 + x_3s$$

diferensiyellenebilir fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonlar ailesinin ayrışım cümlesi

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_F &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0, \quad s \in \mathbb{R} \right\} \\ \mathfrak{B}_F &= \left\{ x : s^4 + x_1s^2 + x_2s + x_3 = 4s^3 + 2x_1s + x_2 = 0, \quad s \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Örnek 2.46 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(s, x) = \frac{1}{4}s^4 + \frac{1}{2}x_1s^2 + x_2s$$

diferensiyellenebilir fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonlar ailesinin ayrışım

cümlesi

$$\mathfrak{B}_F = \{x : s^3 + x_1s + x_2 = 3s^2 + x_1 = 0, s \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathfrak{B}_F = \{x : x_1 = -3s^2, x_2 = 2s^3, s \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathfrak{B}_F = \{x : 4x_1^3 + 27x_2^2 = 0\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.47 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s, (x_1, x_2, \dots, x_n)) &\rightarrow F(s, x_1, x_2, \dots, x_n) = F(s, x) \end{aligned}$$

fonksiyonlar ailesi için bir $s = s_0$ noktasında

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \dots = \frac{\partial^k F}{\partial s^k} = 0, \frac{\partial^{k+1} F}{\partial s^{k+1}} \neq 0 \quad (2.13)$$

özelği sağlanıyorsa; F fonksiyonu $s = s_0$ noktasında A_k **singülerliğine sahiptir** denir.

Eğer bu fonksiyon ailesi için yalnızca

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \dots = \frac{\partial^k F}{\partial s^k} = 0 \quad (2.14)$$

olduğu biliniyorsa F fonksiyonu $s = s_0$ noktasında **en az** A_k singülerliğine sahiptir denir (Bruce ve Giblin 1992).

Örnek 2.48

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, F(s, x) = s^4 + x_1s^2 + x_2s + x_3 \text{ fonksiyonu için}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s} &= 4s^3 + 2sx_1 + x_2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 12s^2 + 2x_1, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial s^3} = 24s, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial s^4} = 24 \\ \vec{0} &= (0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \text{ olmak üzere} \\ \frac{\partial F}{\partial s}(\vec{0}) &= \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(\vec{0}) = \frac{\partial^3 F}{\partial s^3}(\vec{0}) = 0 \text{ ve } \frac{\partial^4 F}{\partial s^4}(\vec{0}) = 24 \neq 0\end{aligned}$$

olduğundan dolayı $F(s, x)$ fonksiyonu $(0, 0, 0, 0)$ noktasında A_3 singülerdir (Bruce ve Giblin 1992).

Tanım 2.49

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

birim hızlı bir eğri olsun. Düzlemde birim vektörlerin cümlesi S^1 olmak üzere γ eğrisinin (2.5) ile verilen dayanak fonksiyonu;

$$\mathbf{H} : I \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{H}(s, \vec{x}) = \langle \gamma(s), \vec{x} \rangle$$

şeklinde ifade edilsin. Bu durumda bir $\tilde{\mathbf{H}}$ fonksiyonu da;

$$\tilde{\mathbf{H}} : I \times S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{\mathbf{H}}(s, \vec{x}, v) = \mathbf{H}(s, \vec{x}) - v = \langle \gamma(s), \vec{x} \rangle - v \quad (2.15)$$

şeklinde. Bu $\tilde{\mathbf{H}}$ fonksiyonunun zarfına γ düzlemsel eğrisinin **duali** denir (Bruce ve Giblin 1992).

Tanım 2.50

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

birim hızlı bir eğri ve S^2 cümlesi de $\mathbb{R}^3$ uzayında birim vektörlerin cümlesi olsun.

$$\tilde{\mathbf{H}} : I \times S^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{\mathbf{H}}(s, \vec{u}, v) = \mathbf{H}(s, \vec{u}) - v = \langle \gamma(s), \vec{u} \rangle - v \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun zarfı için

$$\tilde{\mathbf{H}} = 0 \text{ ve } \frac{d\tilde{\mathbf{H}}}{ds} = 0 \text{ olması gerektiğinden}$$

$$\langle \gamma(t_0), \vec{u} \rangle = v \text{ ve } \langle T, \vec{u} \rangle = 0$$

olur. Bu durumda $\tilde{\mathbf{H}} = 0$ eşitliği, $\mathbb{R}^3$ uzayında normal vektörü $\vec{u}$ olan bir düzlem belirtir. $\gamma(s_0)$ noktası da bu düzlem üzerindedir. Yani bu düzlem γ eğrisinin $\gamma(s_0)$ noktasındaki teğet düzlemidir. $T(s_0)$ teğet vektörüne dik olan $\vec{u}$ vektörünün belirlediği düzlem ise, γ eğrisinin $\gamma(s_0)$ noktasındaki normal düzlemidir. $(\vec{u}, v)$ ikilisi teğet düzlemi belirler.

γ eğrisinin yönlendirilmiş teğet düzlemlerinin cümlesine, γ eğrisinin **duali** denir ve

$$\{(\vec{u}, v) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} : \langle \gamma(s), \vec{u} \rangle = v, \langle T, \vec{u} \rangle = 0\} \quad (2.17)$$

şeklinde gösterilir (Bruce ve Giblin 1992).

Fonksiyonların singülerliklerini incelemek bazen güç hatta olanaksız olabilir. Bu durumda fonksiyonlar yerine bunlarla aynı tip singülerliğe sahip olan daha basit fonksiyonlarla çalışılabilir. Bunun içinde fonksiyonlar arasında bir eşdeğerlik tanımlanır.

Tanım 2.51 U_i , $i = 1, 2$ reel sayılar cümlesinde iki açık altcümle olmak üzere;

$$\begin{aligned} f_i &: U_i \rightarrow \mathbb{R} \\ s_i &\rightarrow f_i(s_i) \end{aligned}$$

diferensiyelenebilir fonksiyonlar olsun. Burada bu fonksiyonlar s_i noktalarının bir komşuluğunda tanımlanmaktadır.

$$h : V_1 \rightarrow V_2$$

fonksiyonu bir difeomorfizm ve $\forall t \in V_1$ için

$$h(s_1) = s_2, \quad f_1(s) = f_2(h(s)) - c$$

olacak şekilde $s_i \in V_i$ olan $V_i \subset U_i$ açık komşulukları ve bir $c \in \mathbb{R}$ sayısı varsa; s_1 noktası komşuluğunda f_1 fonksiyonu, s_2 noktası komşuluğunda f_2 fonksiyonuna

eşdeğerdirler (veya sağ eşdeğerdirler) denir. (Bruce ve Giblin 1992).

Fonksiyonlar arasındaki eşdeğerliği belirleme kriteri için aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.52

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s_0 &\rightarrow f(s_0) \end{aligned}$$

bir diferensiyellenebilir (düzgün) fonksiyon ve $k \geq 0$ bir tamsayı olsun. Eğer $1 \leq p \leq k$ olan tüm p sayıları için;

$$f^{(p)}(s_0) = 0, \quad f^{(k+1)}(s_0) \neq 0$$

ise s_0 noktası komşuluğundaki f fonksiyonu $\{0\}$ noktası komşuluğundaki

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(s) = \pm s^{k+1}$$

fonksiyonuna eşdeğerdir (Bruce ve Giblin 1992).

Tanım 2.53

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s_0 &\rightarrow f(s_0) \end{aligned}$$

bir diferensiyellenebilir fonksiyonunun bir s_0 noktası komşuluğundaki Taylor serisi;

$$\begin{aligned} f(s) &= f(s_0) + (s - s_0)f'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}f''(s_0) \\ &+ \dots + \frac{(s - s_0)^n}{n!}f^{(n)}(s_0) + \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

şeklindedir. Burada s yerine $s + s_0$ yazılırsa;

$$f(s + s_0) = f(s_0) + sf'(s_0) + \frac{(s)^2}{2!}f''(s_0) + \dots + \frac{(s)^n}{n!}f^{(n)}(s_0) + \dots$$

almak bazı bakımlardan daha uygundur. $k \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere;

$$k \geq 1, \quad J^k f(s_0) = s f'(s_0) + \frac{(s)^2}{2!} f''(s_0) + \dots + \frac{(s)^k}{k!} f^{(k)}(s_0) \quad (2.19)$$

polinomuna f fonksiyonunun s_0 noktasındaki **k – jeti** denir (Bruce ve Giblin 1992).

Örnek 2.54 $f(s) = 3 + 2s - s^3$ fonksiyonunun $s_0 = 1$ için $k - jeti$:

$$\begin{aligned} f'(s) &= 2 - 3s^2 & f'(1) &= -1 \\ f''(s) &= -6s & f''(1) &= -6 \\ f'''(s) &= -6 & f'''(1) &= -6 \\ f^{(p)}(s) &= 0 \quad (p \geq 4) & f^{(p)}(1) &= 0 \\ J^k f(1) &= s f'(1) + \frac{(s)^2}{2!} f''(1) + \frac{(s)^3}{3!} f'''(1) \\ J^k f(1) &= s(-1) + \frac{(s)^2}{2}(-6) + \frac{(s)^3}{6}(-6) \\ J^k f(1) &= -s - 3s^2 - s^3 \end{aligned}$$

Tanım 2.55

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (s_0, x_0) &\rightarrow F(s_0, x_0) \end{aligned}$$

şeklinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu F fonksiyonunun (2.7) ve (2.8) eşitliklerindeki gibi iki fonksiyon ailesi belirttiğini biliyoruz. Buna göre ilk fonksiyon ailesi

(i)

$$\begin{aligned} F_x &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow f(s) = F_x(s) = F(s, (x_1, x_2, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

şeklindeki ve bu fonksiyona bir n -parametrelilik, 1-değişkenli bir fonksiyon ailesi olarak,

(ii) ikinci fonksiyon ailesi de

$$\begin{aligned} F_s &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow f(s) = F_s(x) = F(s, (x_1, x_2, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

şeklinde olup 1-parametrelili, n-değişkenli bir fonksiyon ailesi olarak düşünülebilir.

Eğer

$$\begin{aligned} F_x &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow f(s) = F_x(s) = F(s, (x_1, x_2, \dots, x_n)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

şeklinde yazarsak F fonksiyonuna $F_x = f$ fonksiyonunun **n -parametrelili katlanması** denir (Bruce ve Giblin 1992).

Buna göre aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.56 Bir s_0 noktasında A_k singülerliğine sahip olan her

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s_0 &\rightarrow f(s_0) \end{aligned}$$

fonksiyonu bu s_0 noktasının komşuluğunda

$$g(s) = \pm s^{k+1}$$

fonksiyonlarından birine eşdeğerdir (indirgenebilir).

İspat : (2.13) eşitliği ve Teorem (2.50) yardımıyla ispat kolayca yapılır.

F fonksiyonunun (p) -versal katlanmasını belirlemeye yarayan matris kriterini ifade etmek için aşağıdaki sonucu verelim:

Sonuç 2.57 F fonksiyonu (2.6) eşitliği ile yukarıda tanımlandığı gibi bir fonksiyon ve $F_x = f$ fonksiyonu da s_0 noktası komşuluğunda A_k singülerliğine sahip olan bir

fonksiyon ailesi olsun ($k \geq 1$). $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ fonksiyonlarının $(k-1)$. dereceden jetleri;

$$J^{k-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(s, x_0)\right)(x_0) = \alpha_{1i}s + \alpha_{2i}s^2 + \alpha_{(k-1)i}s^{(k-1)}, i = 1, \dots, n$$

olmak üzere; F fonksiyonunun $F_x = f$ fonksiyon ailesinin bir (p) -versal katlanması olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ fonksiyonlarının $(k-1)$. dereceden jetlerinin oluşturduğu lineer denklem sisteminin, $((k-1) \times n)$ tipindeki $\alpha = (\alpha_{ij})$ katsayılar matrisinin rankının $(k-1)$ sayısına eşit olmasıdır (Bruce ve Giblin 1992).

Örnek 2.58

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(s, x) = \frac{1}{4}s^4 + \frac{1}{2}x_1s^2 + x_2s \text{ fonksiyonu, } F_x = f(s) = \frac{1}{4}s^4$$

fonksiyonunun (p) versal katlanmasıdır. $f(s) = \frac{1}{4}s^4$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{4}s^4, \quad f'(s) = s^3, \quad f''(s) = 3s^2, \quad f'''(s) = 6s, \quad f^{(iv)}(s) = 6 \\ f'(0) &= f''(0) = f'''(0) = 0 \text{ ve } f^{(iv)}(0) = 6 \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $f(s)$, A_3 singülerdir. Burada $k = 3$ ve $n = 3$ tür.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{s^2}{2}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = s$$

$$\begin{aligned} J^2\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(s, 0)\right) &= 0.s + \frac{1}{2}.s^2 \\ J^2\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(s, 0)\right) &= 1.s + 0.s^2 \end{aligned}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{ve } \text{rank} \alpha = 2 \text{ dir.}$$

(Bruce ve Giblin 1992).

Ayrıca F versal katlanması için de matris kriterini aşağıdaki sonuçta ifade edebiliriz:

Sonuç 2.59 F fonksiyonu (2.6) eşitliği ile yukarıda tanımlandığı gibi bir fonksiyon ve $F_x = f$ fonksiyonu da s_0 noktası komşuluğunda A_k singülerliğine sahip olan bir fonksiyon ailesi olsun ($k \geq 1$). $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ fonksiyonlarının $(k-1)$. dereceden jetleri;

$$J^{k-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(s, x_0)\right)(x_0) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}s + \alpha_{2i}s^2 + \alpha_{(k-1)i}s^{(k-1)}, i = 1, \dots, n$$

olmak üzere; F fonksiyonunun versal katlanması olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ fonksiyonlarının $(k-1)$. dereceden jetlerinin oluşturduğu lineer denklem sisteminin, $(k \times n)$ tipindeki $\alpha = (\alpha_{ij})$ katsayılar matrisinin maksimum ranka sahip olması, yani $\text{Rank} \alpha = k$ olmasıdır ($j = 1, \dots, k-1, i = 1, \dots, n$) (Bruce ve Giblin 1992).

Örnek 2.60

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(t, x) = s^4 + x_1s^2 + x_2s + x_3 \text{ fonksiyonu, } F_x = f(s) = s^4$$

fonksiyonunun versal katlanmasıdır. $f(s) = s^4$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} f(s) &= s^4, f'(s) = 4s^3, f''(s) = 12s^2, f'''(s) = 24s, f^{(v)}(s) = 24 \\ f'(0) &= f''(0) = f'''(0) = 0 \text{ ve } f^{(v)}(0) = 24 \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $f(s)$, A_3 singülerlerdir. Burada $k = 3$ ve $n = 3$ tür.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = s^2, \frac{\partial F}{\partial x_2} = s, \frac{\partial F}{\partial x_3} = 1$$

$$\begin{aligned} J^3\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(s, 0)\right) &= 0.1 + 0.s + 1.s^2 \\ J^3\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(s, 0)\right) &= 0.1 + 1.s + 0.s^2 \\ J^3\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}(s, 0)\right) &= 1.1 + 0.s + 0.s^2 \end{aligned}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{ve } Rank \alpha = 3 \text{ tür.}$$

(Bruce ve Giblin 1992).

3. FRENET ÇATISINA GÖRE EĞRİLERİN SİNGÜLERİTELERİ

Tanım 3.1 Birim hızlı her $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için eğri üzerindeki bir P noktası eğriyi çizerken $\{T, N, B\}$ vektörleri değişirler. Dolayısıyla küresel göstergeler oluşurlar. Eğrinin, $\{T, N, B\}$ üç ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında bir ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin bu s parametresine karşılık gelen $\gamma(s)$ noktasındaki **Darboux (ani dönme) eksen**i denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$D(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$$

olup, eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki **Darboux vektörü** adını alır. Ayrıca

$$D(s) = N(s) \times N'(s) = \begin{vmatrix} T & N & B \\ 0 & 1 & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \end{vmatrix}$$

olduğu ve

$$T'(s) = D(s) \times T(s)$$

$$N'(s) = D(s) \times N(s)$$

$$B'(s) = D(s) \times B(s)$$

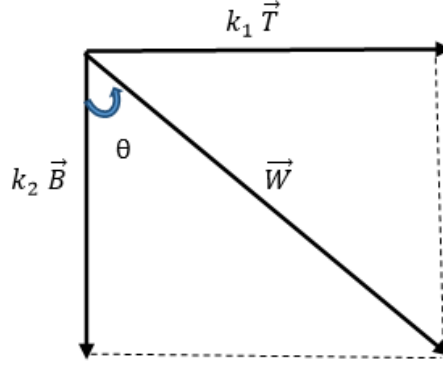
eşitliklerinin sağlandığı kolayca hesaplanabilir.

$B(s)$ ile $D(s)$ Darboux vektörü arasındaki açı θ ile gösterilmek üzere

$$\kappa = \|D(s)\| \cdot \cos \theta$$

$$\tau = \|D(s)\| \cdot \sin \theta$$

olacağı açıktır (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Darboux vektörü

Yukarıda ki şekilde $k_1 = \kappa$ ve $k_2 = \tau$ olmak üzere $D(s)$ Darboux vektörü yönündeki birim vektör $d(s)$ ise $\|D(s)\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} > 0$ olmak üzere

$$d(s) = \frac{\tau(s)}{\|D(s)\|} T(s) + \frac{\kappa(s)}{\|D(s)\|} B(s)$$

eşitliğine γ eğrisinin **Darboux göstergesi** veya γ eğrisinin **küresel Darboux göstergesi** adı verilir.

Şekil 3.1 yardımıyla $\frac{\tau(s)}{\|D(s)\|} = \sin \theta$ ve $\frac{\kappa(s)}{\|D(s)\|} = \cos \theta$ olduğu gözönüne alınırsa

$$d = \sin \theta T(s) + \cos \theta B(s)$$

olur (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 3.2 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere γ eğrisi boyunca, $\tilde{D}(s) = H(s)T(s) + B(s)$ olarak tanımlanan vektör alanına, γ eğrisinin **genelleştirilmiş (modifiye) Darboux vektör alanı** denir (Izumiya ve Takeuchi 2002).

Tanım 3.3 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere γ eğrisi boyunca, $\tilde{\tilde{D}}(s) = T(s) + \hat{H}(s)B(s)$ olarak tanımlanan vektör alanına, γ eğrisinin **2. tip genelleştirilmiş (modifiye) Darboux vektör alanı** diyeceğiz.

Tanım 3.4 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\}$ diferensiyellenebilir dönüşümleri verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} F(\gamma, \delta) &: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, u) &\rightarrow F(\gamma, \delta)(s, u) = \gamma(s) + u\delta(s) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında bir regle yüzey olarak adlandırılır. Burada γ eğrisine regle yüzeyin **dayanak eğrisi** ve δ eğrisine de regle yüzeyin **doğrultmanı** adı verilir (Izumiya ve Takeuchi 2002).

Tanım 3.5 $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında

$$\begin{aligned} F(\gamma, \delta) &: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, u) &\rightarrow F(\gamma, \delta)(s, u) = \gamma(s) + u\delta(s) \end{aligned}$$

regle yüzeyinin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise verilen regle yüzeye **açılabilir regle yüzey** denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 3.6 $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında

$$\begin{aligned} F(\gamma, \delta) &: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, u) &\rightarrow F(\gamma, \delta)(s, u) = \gamma(s) + u\delta(s) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan regle yüzeyin doğrultman vektörü $\tilde{D}(s) = H(s)T(s) + B(s)$ olarak alınırsa elde edilen

$$RD(\gamma) = F(\gamma, \tilde{D})(s, u) = \gamma(s) + u\tilde{D}(s)$$

regle yüzeyine γ eğrisinin **RD (rektifiyan açılabilir) yüzeyi** denir (Izumiya ve Takeuchi 2002).

Tanım 3.7 $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında

$$\begin{aligned} F(\gamma, \delta) &: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, u) &\rightarrow F(\gamma, \delta)(s, u) = \gamma(s) + u\delta(s) \end{aligned}$$

şeklinde verilen regle yüzeyin doğrultman vektörü $N(s)$ olarak alınırse elde edilen

$$F(\gamma, N)(s, u) = \gamma(s) + uN(s)$$

regle yüzeyine γ eğrisinin **asli normal yüzeyi** denir (Izumiya ve Takeuchi 2002).

Tanım 3.8 $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında

$$\begin{aligned} F(\gamma, \delta) &: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, u) &\rightarrow F(\gamma, \delta)(s, u) = \gamma(s) + u\delta(s) \end{aligned}$$

şeklinde verilen regle yüzeyin doğrultman vektörü $T(s)$ olarak alınırse

$$RG(\gamma) = F(\gamma, T)(s, u) = \gamma(s) + uT(s)$$

regle yüzeyine, γ eğrisinin **RG (rektifiyan Gauss) yüzeyi** denir (Izumiya ve Takeuchi 2002).

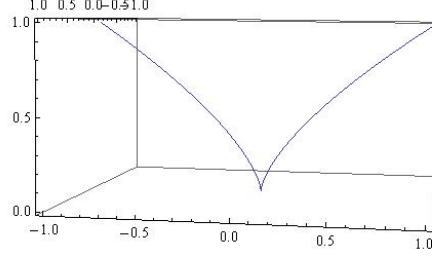
Tanım 3.9 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\kappa(s) \neq 0$ olacak şekilde $H'(s)$ sabit bir fonksiyon ise γ eğrisine **konikal geodezik eğri** denir. Burada $H(s)$, γ eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonudur (Hacısalıhoğlu 2000).

Bundan sonraki bölümlerde Rektifiyan Gauss yüzeyinden RG yüzeyi, $\gamma(s)$ eğrisinin Rektifiyan açılabilir yüzeyinden de RD yüzeyi olarak sözedilecektir.

Tanım 3.10 (Cusp) $\mathbb{R}^2$ reel vektör uzayında

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 = x_2^3\}$$

şeklinde tanımlı cümle **adi anlamda cuspların cümlesi** olarak ifade edilir (Izumiya vd. 1998).

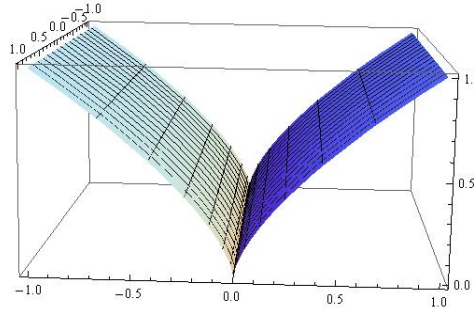


Şekil 3.2 Adi cusp

Tanım 3.11 (Cuspidal edge) Adi anlamda cuspların cümlesi C ile $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesinin kartezyen çarpımı tarafından oluşturulan

$$C \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 = x_2^3\} \times \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı cümleye de **cuspidal edge yüzeyi** denir (Izumiya vd. 1998).

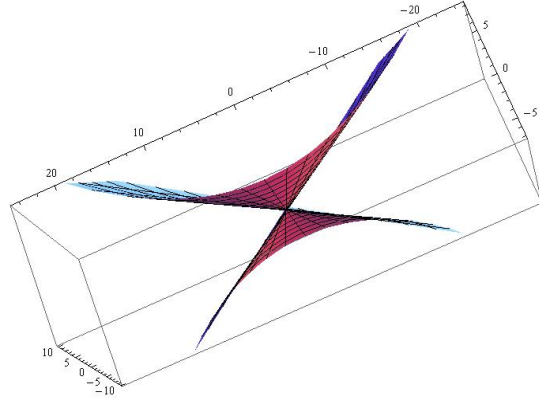


Şekil 3.3 Cuspidal edge

Tanım 3.12 (Swallow tail) $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında

$$SW = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 3u^4 + u^2v, x_2 = 4u^3 + 2uv, x_3 = v\}$$

şeklinde tanımlı cümleye SW (**swallow tail**) **yüzeyi** denir (Izumiya vd. 1998).



Şekil 3.4 Swallow tail

3.1 Uzay Eğrisi Üzerindeki Sürekli Fonksiyon Aileleri

Bu bölümde d Darboux küresel gösterge eğrisi ile $RG(\gamma)$ ve $RD(\gamma)$ yüzeylerinin singüleritelerini çalışmak için faydalı olacak bir uzay eğrisi üzerinde tanımlanan iki farklı fonksiyon ailesi tanımlayacağız.

Tanım 3.1.1 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrilikleri sıfır olmayan birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğrinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olmak üzere

$$F : I \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(s, u) = \langle \gamma(s) - u, B(s) \rangle = \det(T(s) \ N(s) \ \gamma(s) - u) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan döntüşüm $\gamma(s)$ üzerinde **binormal yönlendirmeli uzaklık fonksiyonu** olarak adlandırılır (Izumiya vd. 1998).

Burada herhangi bir $u \in \mathbb{R}^3$ için $F(s, u) = f_u(s)$ notasyonunu kullanacağız.

Önerme 3.1.2 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrilikleri sıfır olmayan birim hızlı bir eğri ve bu eğrinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olsun.

(1) $f'_u(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\gamma(s) - u \in Sp\{T(s), B(s)\}$ olmasıdır.

(2) $f'_u(s) = f''_u(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\gamma(s) - u = \mu(H(s)T(s) + B(s))$ olmasıdır.

(3) $f'_u(s) = f''_u(s) = f'''_u(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\gamma(s) - u = \frac{1}{H'(s)}(H(s)T(s) + B(s))$ ve $H'(s) \neq 0$ sağlanmasıdır.

(4) $f'_u(s) = f''_u(s) = f'''_u(s) = f_u^{(4)}(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\gamma(s) - u = \frac{1}{H'(s)}(H(s)T(s) + B(s))$, $H'(s) \neq 0$ ve $H''(s) = 0$ sağlanmasıdır.

(5) $f'_u(s) = f''_u(s) = f'''_u(s) = f_u^{(4)}(s) = f_u^{(5)}(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\gamma(s) - u = \frac{1}{H'(s)}(H(s)T(s) + B(s))$, $H'(s) \neq 0$, $H''(s) = 0$ ve $H'''(s) = 0$ sağlanmasıdır (Izumiya vd. 1998).

İspat: (1) (3.1) denkleminde eşitliğin her iki yanının s parametresine göre diferensiyeli alınır ve Serret Frenet formülleri kullanılırsa

$$f'_u(s) = -\tau \langle \gamma(s) - u, N(s) \rangle \quad (3.2)$$

olur. Bu durumda $f'_u(s) = 0$ ise $\tau \neq 0$ olduğundan $\langle \gamma(s) - u, N(s) \rangle = 0$ yani $\gamma(s) - u \in Sp\{T(s), B(s)\}$ olur.

O halde

$$\gamma(s) - u = \nu T(s) + \mu B(s) \quad (3.3)$$

olacak şekilde $\nu, \mu : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vardır.

(2) Kabul edelim ki $f'_u(s) = f''_u(s) = 0$ olsun. (3.2) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve Serret Frenet formülleri kullanılırsa

$$f''_u(s) = \kappa \tau \langle \gamma(s) - u, T(s) \rangle - \tau^2 \langle \gamma(s) - u, B(s) \rangle \quad (3.4)$$

eşitliği elde edilir. $f_u''(s) = 0$ ve (3.3) eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$\kappa\tau < \nu T(s) + \mu B(s), T(s) > -\tau^2 < \nu T(s) + \mu B(s), B(s) > = 0$$

olur ve buradan $\kappa\tau\nu - \tau^2\mu = 0$ olur. Son denklemden elde edilen $\nu = H(s)\mu$ eşitliği (3.3) denkleminde gözönüne alınırsa

$$\gamma(s) - u = \mu(H(s)T(s) + B(s)) \quad (3.5)$$

eşitliği elde edilir.

(3) Kabul edelim ki; $f_u'(s) = f_u''(s) = f_u'''(s) = 0$ olsun. (3.4) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$f_u'''(s) = (\kappa'\tau + \kappa\tau') < \gamma(s) - u, T(s) > -2\tau\tau' < \gamma(s) - u, B(s) > + \kappa\tau \quad (3.6)$$

olur. $f_u'''(s) = 0$ ve (3.5) eşitlikleri birlikte göz önüne alınırsa

$$(\kappa'\tau + \kappa\tau') < \mu(H(s)T(s) + B(s)), T(s) > -2\tau\tau' < \mu(H(s)T(s) + B(s)), B(s) > + \kappa\tau = 0$$

ve buradan

$$(\kappa'\tau + \kappa\tau') < \mu(H(s)T(s) + B(s)), T(s) > -2\tau\tau' < \mu(H(s)T(s) + B(s)), B(s) > + \kappa\tau = 0$$

elde edilir. O halde

$\mu \frac{\tau}{\kappa} (\kappa\tau' - \tau\kappa') = \kappa\tau$ ve buradan da Önerme 2.27 yardımıyla $H'(s) \neq 0$ olmak üzere $\mu = \frac{1}{H'(s)}$ olarak bulunur. $\mu = \frac{1}{H'(s)}$ eşitliği (3.5) denkleminde göz önüne alınırsa

$$\gamma(s) - u = \frac{1}{H'(s)} (H(s)T(s) + B(s)), \quad H'(s) \neq 0 \quad (3.7)$$

olur.

(4) Kabul edelim ki; $f'_u(s) = f''_u(s) = f'''_u(s) = f^{(4)}_u(s) = 0$ olsun. (3.6) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınırsa

$$\begin{aligned} f^{(4)}_u(s) &= (\kappa'\tau + \kappa\tau')' < \gamma(s) - u, T(s) > \\ -(2(\tau')^2 + 2\tau\tau'') &< \gamma(s) - u, B(s) > + 2(\kappa'\tau + \kappa\tau') \end{aligned} \quad (3.8)$$

olur. $f^{(4)}_u(s) = 0$ ve (3.7) eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\kappa'\tau + \kappa\tau')' &< \frac{1}{H'(s)}(H(s)T(s) + B(s)), T(s) > \\ -(2(\tau')^2 + 2\tau\tau'') &< \frac{1}{H'(s)}(H(s)T(s) + B(s)), B(s) > + 2(\kappa'\tau + \kappa\tau') = 0 \end{aligned}$$

dır. Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} -\tau(\tau''\kappa^2 - \tau\kappa''\kappa - 2\kappa\kappa'\tau' + 2\tau(\kappa')^2) &= 0 \\ -\tau\kappa^3\left(\frac{\tau''\kappa^2 - \tau\kappa''\kappa - 2\kappa\kappa'\tau' + 2\tau(\kappa')^2}{\kappa^3}\right) &= 0 \end{aligned}$$

ve Önerme 2.27 yardımıyla $-\tau\kappa^3 H''(s) = 0$ olur. $\kappa \neq 0$ ve $\tau \neq 0$ olduğundan $H''(s) = 0$ elde edilir.

(5) Kabul edelim ki $f'_u(s) = f''_u(s) = f'''_u(s) = f^{(4)}_u(s) = f^{(5)}_u(s) = 0$ olsun. (3.8) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve düzenlenirse

$$f^{(5)}_u(s) = (\kappa'\tau + \kappa\tau')'' < \gamma(s) - u, T(s) > + 3(\kappa'\tau + \kappa\tau')' - (\tau^2)''' < \gamma(s) - u, B(s) > \quad (3.9)$$

olur. $f^{(5)}_u(s) = 0$ ve (3.7) eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$\kappa\tau^2\kappa''' + 3\kappa\tau\tau'\kappa'' - \kappa^2\tau\tau''' - 3\kappa^2\tau'\tau'' - 3\tau^2\kappa'\kappa'' + 3\tau'(\kappa\tau\kappa'' + 2\kappa\kappa'\tau' - 2\tau(\kappa')^2) = 0 \quad (3.10)$$

dır. (4) gereğince $H''(s) = 0$ olduğundan

$$\tau''\kappa^2 - \tau\kappa\kappa'' - 2\kappa\kappa'\tau' + 2\tau(\kappa')^2 = 0 \quad (3.11)$$

eşitliğinin sağlandığını biliyoruz. (3.11) eşitliği (3.10) denkleminde gözönüne alınırsa

$$\kappa\tau^2\kappa''' + 3\kappa\tau\tau'\kappa'' - \kappa^2\tau\tau''' - 3\tau^2\kappa'\kappa'' = 0$$

olur. Bu eşitlik $(-\frac{\kappa}{\tau})$ ile çarpılırsa

$$-\kappa^2\tau\kappa''' - 3\kappa^2\tau'\kappa'' + \kappa^3\tau''' + 3\tau\kappa\kappa'\kappa'' = 0 \quad (3.12)$$

elde edilir. (3.12) eşitliğine $(3\kappa\kappa'\kappa''\tau - 3\kappa^2\kappa'\tau'' + 6\kappa(\kappa')^2\tau' - 6\tau(\kappa')^3)$ ifadesi eklenip çıkartılırsa

$$\begin{aligned} & -\kappa^2\tau\kappa''' - 3\kappa^2\tau'\kappa'' + \kappa^3\tau''' + 3\tau\kappa\kappa'\kappa'' \\ & + (3\kappa\kappa'\kappa''\tau - 3\kappa^2\kappa'\tau'' + 6\kappa(\kappa')^2\tau' - 6\tau(\kappa')^3) \\ & - (3\kappa\kappa'\kappa''\tau - 3\kappa^2\kappa'\tau'' + 6\kappa(\kappa')^2\tau' - 6\tau(\kappa')^3) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca buradan gerekli düzenlemeler yapılır ve (3.11) denklemi ile Önerme 2.27 birlikte göz önüne alınırsa

$$\kappa^4 H'''(s) - (3\kappa\kappa'\kappa''\tau - 3\kappa^2\kappa'\tau'' + 6\kappa(\kappa')^2\tau' - 6\tau(\kappa')^3) = 0,$$

$$\kappa^4 H'''(s) - [3\kappa'(\kappa\kappa''\tau - \kappa^2\tau'' + 2\kappa\kappa'\tau') - 6\tau(\kappa')^3] = 0,$$

$$\kappa^4 H'''(s) = 0$$

olur. $\kappa \neq 0$ olduğundan $H'''(s) = 0$ olmak zorundadır.

Önerme 3.1.3 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrilikleri sıfır olmayan birim hızlı bir eğri ve bu eğrinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olsun.

(1) $f'_u(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\gamma(s) - u \in Sp\{T(s), B(s)\}$ olmasıdır.

(2) $f'_u(s) = f''_u(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\gamma(s) - u = \sigma(T(s) + \widehat{H}(s)B(s))$ olmasıdır.

(3) $f'_u(s) = f''_u(s) = f'''_u(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\gamma(s) - u = \frac{-\kappa}{\widehat{H}'(s)}(T(s) + \widehat{H}(s)B(s))$ ve $\widehat{H}'(s) \neq 0$ sağlanmasıdır.

(4) $f'_u(s) = f''_u(s) = f'''_u(s) = f_u^{(4)}(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$\gamma(s) - u = \frac{-\kappa}{\hat{H}'(s)}(T(s) + \hat{H}(s)B(s))$, $\hat{H}'(s) \neq 0$ ve $\hat{H}''(s) = 0$ sağlanmasıdır.

(5) $f'_u(s) = f''_u(s) = f'''_u(s) = f^{(4)}_u(s) = f^{(5)}_u(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$\gamma(s) - u = \frac{-\kappa}{\hat{H}'(s)}(T(s) + \hat{H}(s)B(s))$, $\hat{H}'(s) \neq 0$, $\hat{H}''(s) = 0$ ve $\hat{H}'''(s) = 0$ sağlanmasıdır.

İspat: İspatı Önerme 3.1.2 nin ispatı ile benzer şekilde gösterilebilir.

Ayrıca I üzerinde normal doğrultulu uzaklık fonksiyonu tanımlayalım.

$$\tilde{\mathcal{H}} : I \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{\mathcal{H}}(s, u) = \langle \gamma(s) - u, N(s) \rangle$$

Tanımdan $\tilde{\mathcal{H}}^{-1}(0)$, γ eğrisi boyunca rektifiyan düzlemlerin 1-parametrelili ailesini verir. Bu yüzden γ eğrisinin rektifiyan açılabilirliği $\tilde{\mathcal{H}}$ dönüşümünün zarf (diskriminant) cümlesidir. Önerme 3.1.2 nin ispatı için eğer F yerine $\tilde{\mathcal{H}}$ dönüşümünü gözönüne alırsak hesaplamalar kolaylaşır fakat singüleritelerin sınıflandırılması için $\tilde{\mathcal{H}}$ dönüşümünün (p) versalitesini ispatlamalıyız. Bu da F nin versalitesini ispatlamaktan çok daha zordur. Bu yüzden F binormal yönlendirmeli uzaklık fonksiyonu tercih edilmiştir.

Tanım 3.1.4

$$G : I \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$G(s, v) = \langle T(s), v \rangle \quad (3.13)$$

G yi $\gamma(s)$ üzerindeki **teğetsel yükseklik fonksiyonu** olarak isimlendireceğiz. Burada $g_v(s) = G(s, v)$ notasyonunu kullanacağız (Izumiya vd. 1998).

Önerme 3.1.5 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrilikleri sıfır olmayan birim hızlı bir eğri ve bu eğrinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olsun.

(1) $g'_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sayıları için $v = \lambda T(s) + \mu B(s)$ olacak şekilde birim vektörü vardır.

(2) $g'_v(s) = g''_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + H^2(s)}}(H(s)T(s) + B(s)) \text{ olmasıdır.}$$

(3) $g'_v(s) = g''_v(s) = g'''_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + H^2(s)}}(H(s)T(s) + B(s)), H'(s) = 0 \text{ sağlanmasıdır.}$$

(4) $g'_v(s) = g''_v(s) = g'''_v(s) = g_v^{(4)}(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + H^2(s)}}(H(s)T(s) + B(s)), H'(s) = H''(s) = 0 \text{ sağlanmasıdır.}$$

(5) $g'_v(s) = g''_v(s) = g'''_v(s) = g_v^{(4)}(s) = g_v^{(5)}(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + H^2(s)}}(H(s)T(s) + B(s)), H'(s) = H''(s) = H'''(s) = 0 \text{ sağlanmasıdır}$$

(Izumiya vd. 1998).

İspat: (1) (3.13) denkleminde eşitliğin her iki yanının s parametresine göre diferensiyeli alınır ve Serret Frenet formülleri kullanılırsa

$$g'_v(s) = \kappa < N(s), v > \quad (3.14)$$

olur. Bu durumda $g'_u(s) = 0$ ise $\kappa \neq 0$ olduğundan $< N(s), v > = 0$, yani;

$$v = \lambda T(s) + \mu B(s) \quad (3.15)$$

olacak şekilde λ ve μ reel sayıları vardır. Ayrıca $v \in S^2$ olduğundan dolayı $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ sağlanır.

(2) Kabul edelim ki; $g'_v(s) = g''_v(s) = 0$ olsun. (3.14) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve Serret Frenet formülleri kullanılırsa

$$g''_u(s) = \kappa' < N(s), v > - \kappa^2 < T(s), v > + \kappa \tau < B(s), v > \quad (3.16)$$

eşitliği elde edilir. $g''_u(s) = 0$ ve (3.15) eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned} \kappa' &< N(s), \lambda T(s) + \mu B(s) > - \kappa^2 < T(s), \lambda T(s) + \mu B(s) > \\ + \kappa \tau &< B(s), \lambda T(s) + \mu B(s) > = 0 \end{aligned}$$

ve gerekli düzenlemeler yardımıyla

$$-\lambda\kappa^2 + \mu\kappa\tau = 0$$

olur. Buradan $\lambda = H\mu$ elde edilir. Ayrıca $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ sağlanacağından $\mu = \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}$ olarak bulunur. Sonuç olarak $\mu = \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}$ eşitliği (3.15) denkleminde gözönüne alınarak

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} (H(s)T(s) + B(s)) \quad (3.17)$$

olduğu elde edilir.

(3) Kabul edelim ki; $g'_v(s) = g''_v(s) = g'''_v(s) = 0$ olsun. (3.16) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g'''_u(s) = (-2\kappa\kappa') < T(s), v > + (\kappa\tau)' < B(s), v > \quad (3.18)$$

olur. $g'''_u(s) = 0$ ve (3.17) eşitlikleri birlikte gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} (-2\kappa\kappa') &< T(s), \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} (H(s)T(s) + B(s)) > \\ + (\kappa\tau)' &< B(s), \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} (H(s)T(s) + B(s)) > = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\mu(\tau'\kappa - \kappa'\tau) = 0$ ve buradan da Önerme 2.27 yardımıyla

$\mu\kappa^2 H' = 0$ olarak bulunur. $\mu \neq 0$ ve $\kappa \neq 0$ olduğundan $H'(s) = 0$ elde edilir.

(4) Kabul edelim ki; $g'_v(s) = g''_v(s) = g'''_v(s) = g^{(4)}_v(s) = 0$ olsun. (3.18) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve düzenlenirse

$$g^{(4)}_u(s) = -2((\kappa')^2 + \kappa\kappa'') < T(s), v > + (\kappa\tau)'' < B(s), v > \quad (3.19)$$

olur. $g_u^{(4)}(s) = 0$ ve (3.17) eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$\frac{\kappa^3}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \left(\frac{-2\tau(\kappa')^2 - \tau\kappa\kappa'' + 2\kappa\kappa'\tau' + \kappa^2\tau''}{\kappa^3} \right) = 0 \quad (3.20)$$

olur.

(3.20) eşitliğinin pay kısmına $(4\kappa\kappa'\tau' + 4\tau(\kappa')^2)$ ifadesi eklenip çıkartılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa^3}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \left(\frac{2\tau(\kappa')^2 - \tau\kappa\kappa'' - 2\kappa\kappa'\tau' + \kappa^2\tau''}{\kappa^3} \right) \\ & + \frac{\kappa^3}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \frac{4\kappa\kappa'\tau' - 4\tau(\kappa')^2}{\kappa^3} = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

elde edilir. (3.21) denklemini ve Önerme 2.27 yardımıyla

$$\frac{\kappa^3}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} H''(s) + \frac{\kappa^3}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \frac{4\kappa'(\kappa\tau' - \tau(\kappa')^2)}{\kappa^3} = 0$$

ve buradan da

$$\frac{\kappa^3}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} H''(s) + \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} H'(s) = 0$$

elde edilir. Ayrıca (3) den dolayı $H'(s) = 0$ eşitliği dikkate alınırsa $\kappa \neq 0$ olduğu için $H''(s) = 0$ olmak zorundadır.

(5) Kabul edelim ki $g'_v(s) = g''_v(s) = g'''_u(s) = g_u^{(4)}(s) = g_u^{(5)}(s) = 0$ olsun. (3.19)

denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve gerekli düzenlemeler yapırsa

$$g_u^{(5)}(s) = -6(\kappa'\kappa'' - 2\kappa\kappa''') < T(s), v > + (\kappa'''\tau + 3\kappa''\tau' + 3\kappa'\tau'') < B(s), v > \quad (3.22)$$

olur. $g_u^{(5)}(s) = 0$ ve (3.17) eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$\frac{-3\kappa'\kappa''\tau - \kappa\kappa'''\tau + \kappa^2\tau''' + 3\kappa\kappa''\tau' - 3\kappa'(\tau\kappa'' - \kappa\tau'')}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = 0$$

elde edilir.

(4) den $H''(s) = 0$ olduğu bilindiğinden

$$\tau\kappa'' - \kappa\tau'' = \frac{2\tau(\kappa')^2 - 2\kappa\kappa'\tau'}{\kappa} \quad (3.23)$$

eşitliği sağlanır. O halde

$$\frac{-3\kappa\kappa'\kappa''\tau + 3\kappa^2\kappa''\tau' - 6\tau(\kappa')^3 + 6\kappa(\kappa')^2\tau' - \kappa^2\kappa'''\tau + \kappa^3\tau'''}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = 0 \quad (3.24)$$

elde edilir.

(3.24) eşitliğinin pay kısmına $(9\kappa\kappa'\kappa''\tau + 6\kappa^2\kappa''\tau')$ ifadesi eklenip çıkartılır ve Önerme 2.27 gözönüne alınır

$$H'''(s)\frac{\kappa^3}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} + \frac{6\kappa''(\tau'\kappa - \kappa'\tau) - 3\kappa'(\tau\kappa'' - \kappa\tau'')}{\kappa\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = 0$$

ve buradan da

$$H'''(s)\frac{\kappa^3}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} + \frac{6\kappa''\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}H'(s) - \frac{6(\kappa')^2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}H'(s) = 0$$

elde edilir. $\kappa \neq 0$ ve ayrıca (3) den $H'(s) = 0$ olduğundan $H'''(s) = 0$ olarak bulunur.

Önerme 3.1.6 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrilikleri sıfır olmayan birim hızlı bir eğri ve bu eğrinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olsun.

(1) $g'_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sayıları için $v = \lambda T(s) + \mu B(s)$ olacak şekilde birim vektörü vardır.

(2) $g'_v(s) = g''_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \widehat{H}^2(s)}}(T(s) + \widehat{H}(s)B(s)) \text{ olmasıdır.}$$

(3) $g'_v(s) = g''_v(s) = g'''_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \widehat{H}^2(s)}}(T(s) + \widehat{H}(s)B(s)), \widehat{H}'(s) = 0 \text{ sağlanmasıdır.}$$

(4) $g'_v(s) = g''_v(s) = g'''_v(s) = g^{(4)}_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \widehat{H}^2(s)}}(T(s) + \widehat{H}(s)B(s)), \widehat{H}'(s) = \widehat{H}''(s) = 0 \text{ sağlanmasıdır.}$$

(5) $g'_v(s) = g''_v(s) = g'''_v(s) = g_v^{(4)}(s) = g_v^{(5)}(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $v = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \hat{H}^2(s)}}(T(s) + \hat{H}(s)B(s))$, $\hat{H}'(s) = \hat{H}''(s) = \hat{H}'''(s) = 0$ sağlanmasıdır.

İspat: İspatı Önerme 3.1.5 in ispatı ile benzer şekilde gösterilebilir.

3.2 Helisler ve Bir Eğrinin Teğetler Göstergesi

Bu bölümde uzay eğrilerinin RD yüzeyi, d Darboux göstergesi ve RG yüzeyinin geometrik özellikleri ele alınacaktır. Son bölümdeki önermeler tarafından açıkça görülmüyor ki $H'(s)$ fonksiyonu ve $\tilde{D}(s) = H(s)T(s) + B(s)$ Darboux vektörü bu çalışmada önemli bir yer tutmaktadır. Eğer $H'(s) \equiv 0$ ise o zaman $\gamma(s)$ eğrisi helis olur. Birim hızlı regüler $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için birim teğet eğrisi $T : I \rightarrow S^2$, γ eğrisinin teğetler göstergesi olarak adlandırılır. Kolayca hesaplanabilir ki teğetler göstergesi (T) nin geodezik eğriliği H fonksiyonuna eşittir ve γ eğrisinin konikal geodezik eğriliği olarak adlandırılır. Dahası aşağıdaki önerme gerçekleşir.

Önerme 3.2.1 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin helis olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{D}(s)$ modifiye Darboux vektörünün sabit vektör olmasıdır (Izumiya vd. 1998).

İspat: $\tilde{D}(s) = H(s)T(s) + B(s)$ ifadesinin diferensiyeli alınır ve Serret Frenet formülleri kullanılırsa $\tilde{D}'(s) = H'(s)T(s)$ olur. Bu yüzden γ eğrisinin helis olması için gerek ve yeter şart $\tilde{D}'(s) \equiv 0$ olmasıdır. Bu şart $\tilde{D}(s)$ in sabit vektör olmasıyla eşdeğerdir.

Önerme 3.2.2 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir helis eğrisi olsun. Bu durumda

(1) γ eğrisinin teğetler göstergesi $T(s)$, S^2 birim küresi üzerinde çemberdir ve çemberin teğet vektör alanının sabit açı yaptığı sabit doğrultu birim vektör $d(s) = \vec{e}$ tarafından verilir.

(2) γ eğrisinin RD yüzeyi $\gamma(s) + u\vec{e}$ tarafından verilen silindirik yüzeydir (Izumiya vd. 1998)

İspat: (1) $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir helis eğrisi olsun. Bu durumda $\theta(s)$, $T(s)$ ile $\vec{e}$ vektörleri arasındaki açı olmak üzere $\langle \vec{e}, T(s) \rangle = \cos \theta$ dır. Diğer yandan

$\vec{e} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}}(H(s)T(s) + B(s))$ olduğu için $\langle \vec{e}, T(s) \rangle = \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}}$ dır. $H(s)$ sabit olduğundan $\langle \vec{e}, T(s) \rangle$ çarpımı yani $\cos \theta$ sabittir. Bu ise $T(s)$ teğetler göstergesinin S^2 birim küresi üzerinde bir çember belirttiğini ve çemberin teğet vektör alanının sabit açı yaptığı sabit doğrultunun $\vec{e}$ olduğunu gösterir.

(2) İspatı Tanım 3.6 da verilen RD (rektifiyan açılabilir) yüzeyin tanımından açıkça görülmektedir.

Tanım 3.2.3 $\gamma_i : I_i \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 (i = 1, 2)$ regüler eğriler olsun. Eğer $0 \leq p \leq k$ için $\gamma_1^{(p)}(s_0) = \gamma_2^{(p)}(t_0)$ sağlanıyorsa $\gamma_1(s_0)$ ve $\gamma_2(t_0)$ **en az $(k+1)$. dereceden değmeye sahiptir** denir. Ayrıca eğer en az $(k+1)$. dereceden değmeye sahip ve $\gamma_1^{(k+1)}(s_0) \neq \gamma_2^{(k+1)}(t_0)$ sağlanıyorsa $\gamma_1(s_0)$ ve $\gamma_2(t_0)$ eğrileri $(k+1)$. **dereceden değmeye sahiptir** denir (Izumiya vd. 1998).

Harmonik eğrilik fonksiyonunun tanımını kullanarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz

Önerme 3.2.4 Eğer $\gamma_1(s_0)$ ve $\gamma_2(t_0)$ eğrileri $(k+1)$. dereceden değmeye sahipse o zaman $H_{\gamma_1}^{(p)}(s_0) = H_{\gamma_2}^{(p)}(t_0)$ ($0 \leq p \leq k-3$) ve $H_{\gamma_1}^{(k-2)}(s_0) \neq H_{\gamma_2}^{(k-2)}(t_0)$ dır (Izumiya vd. 1998).

Önerme 3.2.5 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrilikleri sıfır olmayan regüler bir eğri olsun. Bu durumda $s_0 \in J \subset I$ açık aralığı ve bir tek $\delta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ dairesel helisi vardır öyleki $\delta(s_0) = \gamma(s_0)$ dır ve γ eğrisi s_0 noktasında en az 4. dereceden değmeye sahiptir. δ dairesel helisine s_0 noktasında γ eğrisinin **oskületör dairesel helisi** denir (Izumiya vd. 1998).

İspat: $\delta(s_0) = \gamma(s_0)$, $\delta'(s_0) = \gamma'(s_0)$, $\delta''(s_0) = \gamma''(s_0)$ ve $\delta'''(s_0) = \gamma'''(s_0)$ başlangıç koşulları altında $\kappa_\delta(s) = \kappa(s_0)$ ve $\tau_\delta(s) = \tau(s_0)$ doğal eşitliklerinin çözümü ile verilir.

3.3 Bir Değişkenli Fonksiyonların Katlanmaları

Teorem 3.3.1 $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (s_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$, s_0 noktasında A_k singülerliğine sahip $f(s)$ fonksiyonunun n parametrelili katlanması olsun.

(1) Kabul edelim ki F , (p) -versal katlanma olsun. Bu durumda aşağıdaki önermelerden biri gerçekleşir.

(a) Eğer $k = 2$ ise o zaman $\mathfrak{B}_F$ cümlesi $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ cümlesine lokal difeomorfiktir.

(b) Eğer $k = 3$ ise o zaman $\mathfrak{B}_F$ cümlesi $C \times \mathbb{R}^{n-2}$ cümlesine lokal difeomorfiktir.

(2) Kabul edelim ki F , versal katlanma olsun. Bu durumda aşağıdakilerden biri gerçekleşir.

(a) Eğer $k = 1$ ise o zaman $\mathfrak{D}_F$ cümlesi, $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ cümlesine lokal difeomorfiktir.

(b) Eğer $k = 2$ ise o zaman $\mathfrak{D}_F$ cümlesi, $C \times \mathbb{R}^{n-2}$ cümlesine lokal difeomorfiktir.

(c) Eğer $k = 2$ ise o zaman $\mathfrak{D}_F$ cümlesi, $SW \times \mathbb{R}^{n-3}$ cümlesine lokal difeomorfiktir

(Bruce ve Giblin 1992).

Önerme 3.3.2 $G : I \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(s)$ birim hızlı eğrisi üzerindeki teğetsel yükseklik fonksiyonu olsun. Eğer g_{v_0} fonksiyonu s_0 noktasında A_k singülerliğine sahip ise ($k = 2, 3$) G fonksiyonu g_{v_0} fonksiyonunun (p) -versal katlanmasıdır (Izumiya vd. 1998).

İspat: $\gamma(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ ve $\vec{v} = (y_1, y_2, \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2})$ olsun. Tanım 3.1.4 den

$$G(s, \vec{v}) = \langle T(s), \vec{v} \rangle = y_1 x'_1(s) + y_2 x'_2(s) + \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2} x'_3(s) \quad (3.25)$$

olduğu bilinmektedir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y_i} &= x'_i(s) - \frac{y_i x'_3(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} \\ \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial G}{\partial y_i} &= x''_i(s) - \frac{y_i x''_3(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} \\ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial G}{\partial y_i} &= x'''_i(s) - \frac{y_i x'''_3(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

eşitlikleri kolayca hesaplanabilir. $k = 2$ ve $k = 3$ değerleri için 2 farklı durum söz konusudur.

1.Durum: g_{v_0} fonksiyonu A_2 singülerliğine sahipse;

$$y_1 x_1''(s) + y_2 x_2''(s) + \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2} x_3''(s) = 0 \quad (3.27)$$

eşitliği sağlanır. Buradan $\frac{\partial G}{\partial y_i}(s, y)$ fonksiyonunun 1. dereceden jetleri

$$\begin{aligned} J^1\left(\frac{\partial G}{\partial y_1}(s, y_0)\right)(s_0) &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial G}{\partial y_1}(s - s_0) = \alpha_{11}(s - s_0) \\ J^1\left(\frac{\partial G}{\partial y_2}(s, y_0)\right)(s_0) &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial G}{\partial y_2}(s - s_0) = \alpha_{12}(s - s_0) \end{aligned} \quad (3.28)$$

eşitliklerindeki gibi olup (3.26) daki değerler yardımıyla katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} x_1''(s) - \frac{y_1 x_3''(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} & x_2''(s) - \frac{y_2 x_3''(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} \end{bmatrix}_{1 \times 2}$$

şeklinde elde edilir. Burada A matrisinin elemanlarının kareleri toplamına bakılır ve (3.27) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} & \left(x_1''(s) - \frac{y_1 x_3''(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}\right)^2 + \left(x_2''(s) - \frac{y_2 x_3''(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}\right)^2 \\ &= (x_1''(s))^2 + (x_2''(s))^2 + \left(1 + \frac{1}{1 - y_1^2 - y_2^2}\right)(x_3''(s))^2 \neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\text{rank} A = 1$ dir.

2.Durum: g_{v_0} fonksiyonu A_3 singülerliğine sahipse;

$\frac{\partial G}{\partial y_i}(s, y)$ fonksiyonunun 2. dereceden jetleri;

$$\begin{aligned}
J^2\left(\frac{\partial G}{\partial y_1}(s, y_0)\right)(s_0) &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial G}{\partial y_1}(s - s_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial G}{\partial y_1}(s - s_0)^2 \\
&= \alpha_{11}(s - s_0) + \frac{1}{2} \alpha_{21}(s - s_0)^2 \\
J^2\left(\frac{\partial G}{\partial y_2}(s, y_0)\right)(s_0) &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial G}{\partial y_2}(s - s_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial G}{\partial y_2}(s - s_0)^2 \\
&= \alpha_{12}(s - s_0) + \frac{1}{2} \alpha_{22}(s - s_0)^2
\end{aligned} \tag{3.29}$$

eşitliklerindeki gibi olup (3.26) daki değerler yardımıyla katsayılar matrisi

$$B = \begin{bmatrix} x_1''(s) - \frac{y_1 x_3''(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} & x_2''(s) - \frac{y_2 x_3''(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} \\ x_1'''(s) - \frac{y_1 x_3'''(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} & x_2'''(s) - \frac{y_2 x_3'''(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

olarak elde edilir. B matrisinin determinantına bakılır ve hesaplamalar yapılırken

$$\begin{aligned}
\gamma''(s_0) &= \kappa(s)N(s) \\
\gamma'''(s_0) &= -\kappa^2(s)T(s) + \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)\tau(s)B(s)
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile g_{v_0} fonksiyonunun A_3 singülerliğine sahip olduğu göz önüne alınırsa

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + H^2(s_0)}} (H(s_0)T(s_0) + B(s_0)) \tag{3.30}$$

ve

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \frac{1}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} \begin{vmatrix} x_1''(s) & x_2''(s) & x_3''(s) \\ x_1'''(s) & x_2'''(s) & x_3'''(s) \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} \langle \gamma''(s_0) \times \gamma'''(s_0), v \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} (\pm \kappa^2(s_0) \sqrt{\kappa^2(s_0) + \tau^2(s_0)}) \neq 0
\end{aligned}$$

olarak hesaplanıp $\text{rank} B = 2$ olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3.3.3

$$\tilde{G} : I \times S^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{G}(s, \vec{v}, w) = G(s, \vec{v}) - w = \langle T(s), \vec{v} \rangle - w \quad (3.31)$$

ve $\tilde{G}(t, \vec{v}, w) = g_{v,w}$ olmak üzere, eğer g_{v_0, w_0} fonksiyonu s_0 noktasında A_k singülerliğine sahipse ($k = 1, 2, 3$) $\tilde{G}$ fonksiyonu g_{v_0, w_0} fonksiyonunun versal katlanmasıdır (Izumiya vd. 1998).

İspat:

$$\tilde{G}(s, \vec{v}, w) = y_1 x'_1(s) + y_2 x'_2(s) + \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2} x'_3(s) - y_3$$

şeklindedir. O halde $\frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_i}(s, y_0)$ fonksiyonunun 2. dereceden jetleri;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_i}(s_0, y_0) + J^2\left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_i}(s, y_0)\right)(s_0) &= x'_i(s) \pm \frac{y_i x'_3(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} \\ &\quad + (x''_i(s) \pm \frac{y_i x''_3(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}})(s - s_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x'''_i(s) \pm \frac{y_i x'''_3(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}})(s - s_0)^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

şeklinde bulunur. $k = 1$, $k = 2$ ve $k = 3$ değerleri için 3 farklı durum söz konusudur.

1.Durum: g_{v_0, w_0} fonksiyonu A_1 singülerliğine sahipse (3.26) daki değerlerin (3.32) eşitliğinde yerine yazılmasıyla katsayılar matrisi

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} x'_1(s) - \frac{y_1 x'_3(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} & x'_2(s) - \frac{y_2 x'_3(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} & -1 \end{bmatrix}_{1 \times 2}$$

şeklinde elde edilir. Açıkça görülmektedir ki $\text{rank} \mathcal{A} = 1$ dir.

2.Durum: g_{v_0, w_0} fonksiyonu A_2 singülerliğine sahipse (3.26) daki değerlerin (3.32)

eşitliğinde yerine yazılmasıyla katsayılar matrisi;

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} x'_1(s) - \frac{y_1 x'_3(s)}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} & x'_2(s) - \frac{y_2 x'_3(s)}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} & -1 \\ x''_1(s) - \frac{y_1 x''_3(s)}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} & x''_2(s) - \frac{y_2 x''_3(s)}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

şeklinde elde edilir. Önerme 3.3.2 1. Durum'dan dolayı 2. satır 0 dan farklıdır bu yüzden $rank \mathcal{B} = 2$ olarak bulunur.

3.durum: g_{v_0, w_0} fonksiyonu A_3 singülerliğine sahipse (3.26) daki değerlerin (3.32) eşitliğinde yerine yazılmasıyla katsayılar matrisi;

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} x'_1(s) - \frac{y_1 x'_3(s)}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} & x'_2(s) - \frac{y_2 x'_3(s)}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} & -1 \\ x''_1(s) - \frac{y_1 x''_3(s)}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} & x''_2(s) - \frac{y_2 x''_3(s)}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} & 0 \\ x'''_1(s) - \frac{y_1 x'''_3(s)}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} & x'''_2(s) - \frac{y_2 x'''_3(s)}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

şeklinde olup Önerme 3.3.2 2.Durumdan yararlanılarak kolayca gözükmektedir ki $rank \mathcal{C} = 3$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3.3.4 Eğer f_{u_0} fonksiyonu s_0 noktasında A_k singülerliğine sahip ($k = 2, 3, 4$) ise F fonksiyonu f_{u_0} fonksiyonunun versal katlanmasıdır (Izumiya vd. 1998).

İspat: Önerme 3.3.2 ve Önerme 3.3.3 de kullanılan aynı notasyonlar altında

$$E_{ij} = x'_i(s)x''_j(s) - x'_j(s)x''_i(s)$$

şeklinde verilmek üzere

$E(s) = (E_{23}, E_{31}, E_{12})$, olsun. Bu durumda

$$E(s) = \gamma' \times \gamma'' = \kappa(s)B(s)$$

$$E'(s) = -\kappa(s)\tau(s)N(s) + \kappa'(s)B(s),$$

$$E''(s) = \kappa^2(s)\tau(s)T(s) + (-2\kappa'(s)\tau(s) - \kappa(s)\tau'(s))N(s) + (\kappa''(s) - \kappa(s)\tau^2(s))B(s)$$

ve

$$\begin{aligned} E'''(s) = & 2\kappa(s)(2\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s))T(s) \\ & + (-3\kappa''(s)\tau(s) - 3\kappa'(s)\tau'(s) - \kappa(s)\tau''(s) + \kappa^3(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau^3(s))N(s) \\ & + (\kappa'''(s) - 3\kappa'(s)\tau^2(s) - 3\kappa(s)\tau(s)\tau'(s))B(s) \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\kappa'(s)E(s) - \kappa(s)E'(s) = \kappa^2(s)\tau(s)N(s),$$

$$(\kappa'(s)E(s) - \kappa(s)E'(s))' = \kappa'''(s)(\kappa(s)B(s)) - \kappa(s)E'''(s)$$

ve

$$\begin{aligned} (\kappa'(s)E(s) - \kappa(s)E'(s))'' = & (-5\kappa^2(s)\kappa'(s)\tau(s) - 2\kappa^3(s)\tau'(s))T(s) \\ & + (2\kappa(s)\kappa''(s)\tau(s) + 2\{\kappa'(s)\}^2\tau(s) + 4\kappa(s)\kappa'(s)\tau'(s) \\ & - \kappa^2(s)\tau''(s) + \kappa^4(s)\tau(s) + \kappa^2(s)\tau^3(s))N(s) \\ & + (4\kappa(s)\kappa'(s)\tau^2(s) + 3\kappa^2(s)\tau(s)\tau'(s))B(s) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Tanım 3.1.1 den dolayı

$$F(s, u) = \frac{1}{\kappa(s)} \{(x_1(s) - u_1)E_{23} + (x_2(s) - u_2)E_{31} + (x_3(s) - u_3)E_{12}\} \quad (3.33)$$

dır. Aynı zamanda

$$\frac{\partial^r F}{\partial u^r}(s, u) = \left(\frac{\partial^r F}{\partial u_1^r}(s, u), \frac{\partial^r F}{\partial u_2^r}(s, u), \frac{\partial^r F}{\partial u_3^r}(s, u) \right)$$

şeklinde verilecek olursa

$$\frac{\partial F}{\partial u}(s, u) = -\frac{1}{\kappa(s)}E(s),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(s, u) &= \left(-\frac{1}{\kappa(s)}E(s)\right)' \\
&= \frac{1}{\kappa^2(s)}(\kappa'(s)E(s) - \kappa(s)E'(s)),
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial u^3}(s, u) = \left(\frac{1}{\kappa^2(s)}\right)'(\kappa'(s)E(s) - \kappa(s)E'(s)) + \frac{1}{\kappa^2(s)}(\kappa''(s)E(s) - \kappa(s)E''(s))$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 F}{\partial u^4}(s, u) &= \left(\frac{1}{\kappa^2(s)}\right)''(\kappa'(s)E(s) - \kappa(s)E'(s)) + 2\left(\frac{1}{\kappa^2(s)}\right)'(\kappa''(s)E(s) - \kappa(s)E''(s)) \\
&\quad + \frac{1}{\kappa^2(s)}(\kappa'''(s)E(s) + \kappa''(s)E'(s) - \kappa'(s)E''(s) - \kappa(s)E'''(s))
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca $\frac{\partial F}{\partial u_i}(s, u)$ fonksiyonunun 3.dereceden jetleri;

$$J^3\left(\frac{\partial F}{\partial u_i}(s, u_0)\right)(s_0) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_i^2}(s_0, u_0)\right)s + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial u_i^3}(s_0, u_0)\right)s^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^4 F}{\partial u_i^4}(s_0, u_0)\right)s^3$$

dir. $k = 2$, $k = 3$ ve $k = 4$ değerleri için 3 farklı durum söz konusudur.

1.Durum: f_{u_0} fonksiyonu s_0 noktasında A_2 singülerliğine sahipse katsayılar matrisi;

$$P = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u_i^2}(s_0, u_0) \right]_{1 \times 3}$$

şeklindedir ve P matrisi için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial u_i^2}(s_0, u_0) &= \frac{1}{\kappa^2(s)}(\kappa'(s)E(s) - \kappa(s)E'(s)) \\
&= \tau(s_0)N(s_0) \neq 0
\end{aligned}$$

olup bu da P matrisinin rankının 1 olduğu anlamına gelir.

2.Durum: f_{u_0} fonksiyonu s_0 noktasında A_3 singülerliğine sahipse katsayılar matrisi;

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial u_i^2}(s_0, u_0) \\ \frac{\partial^3 F}{\partial u_i^3}(s_0, u_0) \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

şeklindedir.

Hesaplanan değerlerin yerine yazılması ile

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\kappa^2(s_0))}(\kappa'(s_0)E(s_0) - \kappa(s_0)E'(s_0)) \\ (\frac{1}{\kappa^2(s_0)})'(\kappa'(s_0)E(s_0) - \kappa(s_0)E'(s)) + (\kappa''(s_0)E(s_0) - \kappa(s_0)E''(s)) \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

yani

$$Q = \begin{bmatrix} \kappa^2(s_0)\tau(s_0)N(s_0) \\ -\kappa^3(s_0)\tau(s_0)T(s_0) + \kappa^2(s_0)\tau'(s_0)N(s_0) + \kappa^2(s_0)\tau^2(s_0)B(s_0) \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

elde edilir.

Ayrıca Q matrisinin Gram-Schmidt matrisi M matrisi olmak üzere

$$M = \kappa^8(s_0)\tau^2(s_0) \begin{bmatrix} 1 & \tau'(s_0) \\ \tau'(s_0) & \kappa^2(s_0)\tau^2(s_0) + \{\tau'(s_0)\}^2 + \tau^4(s_0) \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

şeklindedir.

M matrisinin determinantı hesaplanırsa

$$\det M = \kappa^8(s_0)\tau^2(s_0)(\kappa^2(s_0) + \tau^2(s_0)) \neq 0$$

olduğu görülür.

Bu yüzden

$$\text{rank} Q = \text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial u_i^2}(s_0, u_0) \\ \frac{\partial^3 F}{\partial u_i^3}(s_0, u_0) \end{bmatrix}_{2 \times 3} = 2$$

dir.

3.Durum: f_{u_0} fonksiyonu s_0 noktasında A_4 singülerliğine sahipse katsayılar matrisi;

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial u_i^2}(s_0, u_0) \\ \frac{\partial^3 F}{\partial u_i^3}(s_0, u_0) \\ \frac{\partial^4 F}{\partial u_i^4}(s_0, u_0) \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

şeklindedir.

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa^2(s_0)}(\kappa'(s_0)E(s_0) - \kappa(s_0)E'(s_0)) \\ (\frac{1}{\kappa^2(s_0)})'(\kappa'(s_0)E(s_0) - \kappa(s_0)E'(s_0)) + \frac{1}{\kappa^2(s_0)}(\kappa''(s_0)E(s_0) - \kappa(s_0)E''(s_0)) \\ \left\{ \begin{array}{l} (\frac{1}{\kappa^2})'''(s_0)(\kappa'(s_0)E(s_0) - \kappa(s_0)E'(s_0)) \\ + 2(\frac{1}{\kappa^2})'(s_0)(\kappa''(s_0)E(s_0) - \kappa(s_0)E''(s_0)) + \\ \frac{1}{\kappa^2(s_0)}(\kappa'''(s_0)E(s_0) + \kappa''(s_0)E'(s_0) - \kappa'(s_0)E''(s_0) - \kappa(s_0)E'''(s_0)) \end{array} \right\} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

olup $\det(R) \neq 0$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned} \det(R) &= \det \begin{bmatrix} (\kappa'(s_0)E(s_0) - \kappa(s_0)E'(s_0)) \\ (\kappa''(s_0)E(s_0) - \kappa(s_0)E''(s_0)) \\ (\kappa'''(s_0)E(s_0) + \kappa''(s_0)E'(s_0) - \kappa'(s_0)E''(s_0) - \kappa(s_0)E'''(s_0)) \end{bmatrix}_{3 \times 3} \\ &= \kappa^6(s_0)\tau^3(s_0)(4\kappa'(s_0)\tau(s_0) + 3\kappa(s_0)\tau'(s_0)) \\ &\quad - \kappa^6(s_0)\tau^3(s_0)(5\kappa'(s_0)\tau(s_0) + 2\kappa(s_0)\tau'(s_0)) \\ &= \kappa^6(s_0)\tau^3(s_0)(\kappa(s_0)\tau'(s_0) - \kappa'(s_0)\tau(s_0)) \neq 0 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu da ispatı tamamlar.

3.4 Singülerite derecelerine göre d küresel Darboux göstergesi, RG yüzeyi ve RD yüzeyinin sınıflandırılması

Teorem 3.4.1 $\text{Imm}_r(S^1, \mathbb{R}^3)$, C^∞ topolojisi ile $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler eğrilerin uzayı olsun ($\kappa \neq 0$ ve $\tau \neq 0$). O zaman $\varphi \subset \text{Imm}_r(S^1, \mathbb{R}^3)$ herhangi bir $\gamma(s) \in \varphi$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (1) Eğer $H'(s) = 0$ ise $s \in S^1$ noktalarının sayısı sonludur.
- (2) Eğer $H'(s) = H''(s) = 0$ ise $s \in S^1$ noktası yoktur.
- (3) Eğer $H''(s) = 0$ ise $s \in S^1$ noktalarının sayısı sonludur.
- (4) Eğer $H''(s) = H'''(s) = 0$ ise $s \in S^1$ noktası yoktur (Izumiya vd. 1998).

Teorem 3.4.2 (Ana Teorem) $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olmak üzere aşağıdaki önermeler sağlanır.

- (1) Darboux göstergesi $d(s_0)$ noktasında C (adi cusp) cümlesine lokal difeomorfiktir $\iff H'(s_0) = 0$ ve $H''(s_0) \neq 0$.
- (2)(a) RG yüzeyi $u_0T(s_0) + B(s_0)$ noktasında $C \times \mathbb{R}$ (cuspidal edge) yüzeyine lokal difeomorfiktir $\iff u_0 = H(s_0)$ ve $H'(s_0) \neq 0$.
- (b) RG yüzeyi $u_0T(s_0) + B(s_0)$ noktasında SW (swallow tail) yüzeyine lokal difeomorfiktir $\iff u_0 = H(s_0)$, $H'(s_0) = 0$ ve $H''(s) \neq 0$.
- (3)(a) RD yüzeyi $\gamma(s_0) + u_0\tilde{D}(s_0)$ noktasında $C \times \mathbb{R}$ (cuspidal edge) yüzeyine lokal difeomorfiktir $\iff H'(s_0) \neq 0$, $H''(s_0) \neq 0$ ve $u_0 = \frac{1}{H'(s_0)}$.
- (b) RD yüzeyi $\gamma(s_0) + u_0\tilde{D}(s_0)$ noktasında SW (swallow tail) yüzeyine lokal difeomorfiktir $\iff H'(s_0) \neq 0$, $H''(s_0) = 0$, $H'''(s_0) \neq 0$ ve $u_0 = \frac{1}{H'(s_0)}$ (Izumiya vd. 1998).

İspat: (1) G fonksiyonu (p)-versal katlanma ve $\mathfrak{B}_G = d$ olduğundan dolayı $n = 2$ ve $k = 3$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılırsa d Darboux göstergesinin s_0 noktasında C (adi cusp) cümlesine lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul $H'(s_0) = 0$ ve $(H)''(s_0) \neq 0$ olmasıdır.

(2)(a) $\tilde{G}$ fonksiyonu versal katlanma ve $\mathfrak{D}_{\tilde{G}} = RG$ yüzeyi olduğundan dolayı $n = 3$ ve $k = 2$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılırsa RG yüzeyinin s_0 noktasında $C \times \mathbb{R}$

(cuspidal edge) yüzeyine lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul

$u_0 = H(s_0)$ ve $H'(s_0) \neq 0$ olmasıdır.

(b) $\tilde{G}$ fonksiyonu versal katlanma ve $\mathfrak{D}_{\tilde{G}} = RG$ yüzeyi olduğundan dolayı $n = 3$ ve $k = 3$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılırsa RG yüzeyinin s_0 noktasında SW (swallow tail) yüzeyine lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul

$u_0 = H(s_0)$, $H'(s_0) = 0$ ve $H''(s) \neq 0$ olmasıdır.

(3)(a) F fonksiyonu versal katlanma ve $\mathfrak{D}_F = RD$ yüzeyi olduğundan dolayı $n = 3$ ve $k = 2$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılırsa RD yüzeyinin s_0 noktasında $C \times \mathbb{R}$ (cuspidal edge) yüzeyine lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul

$H'(s_0) \neq 0$, $H''(s_0) \neq 0$ ve $u_0 = \frac{1}{H'(s_0)}$ olmasıdır.

(b) F fonksiyonu versal katlanma ve $\mathfrak{D}_F = RD$ yüzeyi olduğundan dolayı $n = 3$ ve $k = 3$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılırsa RD yüzeyinin s_0 noktasında SW (swallow tail) yüzeyine lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul

$H'(s_0) \neq 0$, $H''(s_0) = 0$, $H'''(s_0) \neq 0$ ve $u_0 = \frac{1}{H'(s_0)}$ olmasıdır.

Bu da teoremi ispatlar.

4. BISHOP VE 2.TİP BISHOP ÇATISINA GÖRE EĞRİLERİN SİNGÜLERİTELERİ

Frenet çatısı 3 kez diferensiyellenebilir dejenere olmayan eğriler için inşa edilmiştir. Eğri üzerindeki bazı noktalarda eğrilik sıfır olabilir. Yani eğrinin ikinci türevi sıfır olabilir. Bu durumda alternatif bir çatı kullanabiliriz. Eğer eğrinin türevi teğetsel ise eğri boyunca N normal vektör alanı göreceli paralel olan bu alternatif çatıyı oluşturmak için T teğet vektör alanı ve iki göreceli paralel vektör alanını kullanırız. Bu çatı **Bishop çatısı** ya da **T boyunca paralel bir çatı** olarak adlandırılır. İsminin paralel olmasının nedeni normal vektör alanının türevlerinin normal bileşeninin sıfır olmasıdır. Paralel çatının avantajları ve 3 boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı ile karşılaştırılabilir olması Bishop ve Hanson tarafından verilip çalışılmıştır (Bishop 1975).

Çatının ana konsepti bir tek teğet vektörü alınıp ve T ye dik düzlemde türevleri yalnızca T ye bağlı uygun iki baz $\{N_1, N_2\}$ seçilerek oluşturulur.

3 boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısının yay parametrelili bir eğri için denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Frenet çatısı ve paralel çatılar arasındaki ilişki aşağıdaki denklemlerle verilmektedir.

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta(s) & \sin \theta(s) \\ 0 & -\sin \theta(s) & \cos \theta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

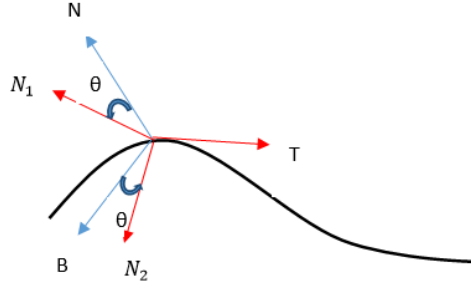
$k_1(s)$ ile $k_2(s)$ fonksiyonları sırasıyla N_1 ve N_2 boyunca temel eğrilikler olarak ad-

landırılır. Ayrıca $\{k_1, k_2\}$ eğrinin değişmezlerinin bir türü olarak düşünülebilir. Burada

$$k_1(s) = \kappa(s) \cos \theta(s)$$

$$k_2(s) = \kappa(s) \sin \theta(s)$$

$\kappa = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$, $\theta(s) = \arctan(\frac{k_2}{k_1})$, $k_1(s) \neq 0$ ve $\tau(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$ yani $\theta = \int \tau(s) ds$ dir.



Şekil 4.1 Bishop çatısı

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\{\zeta_1, \zeta_2, B\}$ bazları kullanılarak elde edilen ve

$$\begin{bmatrix} \zeta_1' \\ \zeta_2' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\varepsilon_1 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ B \end{bmatrix}$$

eşitliklerini sağlayan göreceli paralel çatı da **2. tip Bishop çatısı** olarak adlandırılır.

Frenet çatısı ve paralel çatılar arasındaki ilişki aşağıdaki denklemlerle verilmektedir (Liu ve Pei 2013).

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta(s) & -\cos \theta(s) & 0 \\ \cos \theta(s) & \sin \theta(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ B \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_1(s)$ ve $\varepsilon_2(s)$ fonksiyonları sırasıyla $\zeta_1(s)$ ve $\zeta_2(s)$ boyunca temel eğrilikler olarak

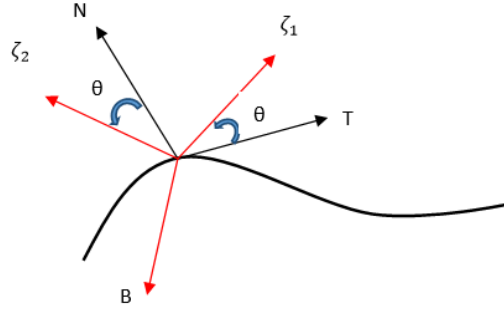
adlandırılır. Burada

$$\varepsilon_1(s) = \langle B', \zeta_1 \rangle \text{ ve } \varepsilon_2(s) = \langle B', \zeta_2 \rangle$$

$$\varepsilon_1(s) = -\tau(s) \cos \theta(s)$$

$$\varepsilon_2(s) = -\tau(s) \sin \theta(s)$$

$$\theta(s) = \arctan\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \varepsilon_1 \neq 0, \tau = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}, \kappa(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}, \theta(s) = \int \kappa(s) ds \text{ dir.}$$



Şekil 4.2 2. tip Bishop çatısı

Tanım 4.1 Birim hızlı her $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için eğri üzerindeki bir P noktası eğriyi çizerken $\{T, N_1, N_2\}$ vektörleri değişirler. Dolayısıyla küresel göstergeler oluşurlar. Eğrinin $\{T, N_1, N_2\}$ üç ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında bir ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin bu s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki **Bishop Darboux eksen**i denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör

$$BD(s) = -k_2(s)N_1(s) + k_1(s)N_2(s)$$

olup eğrinin **Darboux vektörü** adını alır (Izumiya ve Takeuchi 2002).

Tanım 4.2 α birim hızlı regüler eğrisi için $k_1 \neq 0$ olmak üzere α eğrisi boyunca

$$\widetilde{BD}(s) = \frac{k_2(s)}{k_1(s)}N_1(s) - N_2(s)$$

şeklinde tanımlanan vektör alanına **Modifiye Bishop Darboux vektörü** adı verilir. Ayrıca

$$d(s) : I \rightarrow S^2, \quad d(s) = \frac{BD(s)}{\|BD(s)\|}$$

$$d(s) = -\frac{k_1(s)}{\sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)}}\left(\frac{k_2(s)}{k_1(s)}N_1(s) - N_2(s)\right)$$

şeklinde tanımlı vektör alanına α eğrisinin **küresel Bishop Darboux göstergesi** denir (Izumiya ve Takeuchi 2002).

Önerme 4.3 Geometrik invariant fonksiyonu olarak adlandırılan

$$\rho(s) = k_1'(s)k_2(s) - k_1(s)k_2'(s)$$

ifadesinden s ye göre diferensiyel alınarak

$$\begin{aligned} \rho'(s) &= k_1k_2'' - k_2k_1'' , \\ \rho''(s) &= (k_1'''k_2 + k_1''k_2' - k_1'k_2'' - k_2'''k_1) \end{aligned}$$

değerleri hesaplanabilir.

Tanım 4.4 $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında

$$\begin{aligned} F(\gamma, \delta) &: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, u) &\rightarrow F(\gamma, \delta)(s, u) = \gamma(s) + u\delta(s) \end{aligned}$$

şeklinde verilen regle yüzeyin doğrultman vektörü $\widetilde{BD}(s)$ olarak alınırsa, elde edilen

$$BRD_\gamma(s, u) = F(\gamma, \widetilde{BD}(s))(s, u) = \gamma(s) + u\widetilde{BD}(s)$$

regle yüzeyine, γ eğrisinin **BRD** (Bishop rektifiyan açılabilir) **yüzeyi** denir (Izumiya

ve Takeuchi 2002).

Tanım 4.5

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

birim hızlı regüler bir eğri ve S^2 cümlesi de $\mathbb{R}^3$ uzayında birim vektörlerin cümlesi olsun. Tanım 2.50 ile benzer mantıkla γ eğrisinin Bishop duali

$$BDU_\gamma(v, u) = \{(\vec{u}, v) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} : \langle \gamma(t), v \rangle = u, \langle T, v \rangle = 0\}$$

şeklinde tanımlanır (Izumiya ve Takeuchi 2002).

4.1 Uzay Eğrisinin Geometrik Değişmezi ve Bishop Yükseklik Fonksiyonları

Bu bölümde regüler eğrinin geometrik değişmezlerinin çalışılmasında yararlı olacak γ üzerindeki iki farklı fonksiyon ailesini tanıtalım. $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. Şimdi I üzerinde sürekli fonksiyonların bir ailesini tanımlayalım.

Tanım 4.1.1

$$\mathbb{H} : I \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{H}(s, v) = \langle \gamma(s), v \rangle \quad (4.1)$$

$\mathbb{H}$ fonksiyonunu γ eğrisinin **Bishop yükseklik fonksiyonu** olarak adlandıracakız. Herhangi bir $v \in S^2$ için $\mathbb{H}(s, v) = h_v(s)$ gösterimini kullanabiliriz (Izumiya ve Takeuchi 2002).

I üzerinde fonksiyonların bir ailesini daha tanımlayalım.

Tanım 4.1.2

$$\tilde{\mathbb{H}} : I \times S^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{\mathbb{H}}(s, v, u) = \mathbb{H}(s, v) - u = \langle \gamma(s), v \rangle - u \quad (4.2)$$

$\tilde{\mathbb{H}}$ fonksiyonunu γ eğrisinin **genişletilmiş Bishop yükseklik fonksiyonu** olarak adlandıracakız. Burada aşağıda göz önüne alacağımız şartlar altında u değişkeni s ile

v değişkenlerine bağlı olduğundan dolayı $\tilde{\mathbb{H}}(s, v, u) = \tilde{h}_v(s)$ gösterimini kullanabiliriz (Izumiya ve Takeuchi 2002).

O halde aşağıdaki önerme gerçekleşir.

Önerme 4.1.3 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi pozitif $k_1(s)$ eğriliği ile birim hızlı regüler bir eğri olsun. Bu durumda

(A)(1) $h'_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sayıları için $v = \lambda N_1 + \mu N_2$ olacak şekilde birim vektörü vardır.

(2) $h'_v(s) = h''_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $v = \pm d(s)$ olmasıdır.

(3) $h'_v(s) = h''_v(s) = h'''_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $v = \pm d(s)$ ve $\rho(s) = 0$ olmasıdır.

(4) $h'_v(s) = h''_v(s) = h'''_v(s) = h^{(4)}_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $v = \pm d(s)$ ve $\rho(s) = \rho'(s) = 0$ sağlanmasıdır.

(5) $h'_v(s) = h''_v(s) = h'''_v(s) = h^{(4)}_v(s) = h^{(5)}_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $v = \pm d(s)$ ve $\rho(s) = \rho'(s) = \rho''(s) = 0$ sağlanmasıdır.

(B)(1) $\tilde{h}_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $u = \langle \gamma(s), v \rangle$ olmasıdır.

(2) $\tilde{h}_v(s) = \tilde{h}'_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sayıları için $v = \lambda N_1 + \mu N_2$ olacak şekilde birim vektörü vardır ve $u = \langle \gamma(s), v \rangle$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

(3) $\tilde{h}_v(s) = \tilde{h}'_v(s) = \tilde{h}''_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $v = \pm d(s)$ ve $u = \langle \gamma(s), v \rangle$ eşitliklerinin sağlanmasıdır.

(4) $\tilde{h}_v(s) = \tilde{h}'_v(s) = \tilde{h}''_v(s) = \tilde{h}'''_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $v = \pm d(s)$, $u = \langle \gamma(s), v \rangle$ ve $\rho(s) = 0$ olmasıdır.

(5) $\tilde{h}_v(s) = \tilde{h}'_v(s) = \tilde{h}''_v(s) = \tilde{h}'''_v(s) = \tilde{h}^{(4)}_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $v = \pm d(s)$, $u = \langle \gamma(s), v \rangle$ ve $\rho(s) = \rho'(s) = 0$ olmasıdır.

(6) $\tilde{h}_v(s) = \tilde{h}'_v(s) = \tilde{h}''_v(s) = \tilde{h}'''_v(s) = \tilde{h}^{(4)}_v(s) = \tilde{h}^{(5)}_v(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $v = \pm d(s)$, $u = \langle \gamma(s), v \rangle$ ve $\rho(s) = \rho'(s) = \rho''(s) = 0$ sağlanmasıdır (Liu ve Pei 2012).

İspat: (A)(1) (4.1) denkleminde eşitliğin her iki yanının s parametresine göre dife-

rensiyeli alınır ve Bishop çatısının denklemleri kullanılırsa

$$h'_v(s) = \langle T, v \rangle \quad (4.3)$$

olur. Bu durumda $h'_v(s) = 0$ olduğundan

$$v = \lambda N_1 + \mu N_2 \quad (4.4)$$

dir. $v \in S^2$ olduğu bilindiğinden dolayı $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ sağlanacak şekilde λ ve μ reel sayıları mevcuttur.

(2) Kabul edelim ki $h'_v(s) = h''_v(s) = 0$ olsun. (4.3) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve Bishop çatısının denklemleri kullanılırsa

$$h''_v(s) = \langle k_1 N_1 + k_2 N_2, v \rangle \quad (4.5)$$

eşitliği elde edilir. $h''_v(s) = 0$ ve (4.4) eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$\langle k_1 N_1 + k_2 N_2, v \rangle = 0$$

olur ve buradan da (4.4) eşitliği kullanılarak $k_1 \lambda + k_2 \mu = 0$ elde edilir. Ayrıca $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ eşitliği sağlandığından $\mu = \pm \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$ olarak hesaplanır.

Sonuç olarak $\mu = \pm \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$ ve $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ eşitlikleri (4.4) denkleminde gözönüne alınırsa

$$v = \pm \frac{k_1(s)}{\sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)}} \left(\frac{k_2(s)}{k_1(s)} N_1(s) - N_2(s) \right) \quad (4.6)$$

olduğu elde edilir.

(3) Kabul edelim ki $h'_v(s) = h''_v(s) = h'''_v(s) = 0$ olsun. (4.5) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$h'''_v(s) = k'_1 \langle N_1, v \rangle + k'_2 \langle N_2, v \rangle - (k_1^2 + k_2^2) \langle T, v \rangle \quad (4.7)$$

olur. $h_v'''(s) = 0$ ve (4.4) eşitlikleri göz önüne alınırsa $\lambda k_1' + \mu k_2' = 0$ elde edilir.

Ayrıca burada λ ve μ değerlerinin yerine yazılmasıyla

$$\pm \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left(\frac{k_1'(s)k_2(s) - k_1(s)k_2'(s)}{k_1} \right) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\pm \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left(\frac{\rho(s)}{k_1} \right) = 0$$

ve $k_1 \neq 0$ olacağından dolayı $\rho(s) = 0$ sağlanmalıdır.

(4) Kabul edelim ki $h_v'(s) = h_v''(s) = h_v'''(s) = h_v^{(4)}(s) = 0$ olsun.

(4.7) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve düzenlenirse

$$h_v^{(4)}(s) = (k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2) \langle N_1, v \rangle + (k_2'' - k_2^3 - k_2 k_1^2) \langle N_2, v \rangle - (3k_1 k_1' + 3k_2 k_2') \langle T, v \rangle \quad (4.8)$$

olur. $h_v^{(4)}(s) = 0$ ve (4.8) eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$(k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2) \langle N_1, v \rangle + (k_2'' - k_2^3 - k_2 k_1^2) \langle N_2, v \rangle - (3k_1 k_1' + 3k_2 k_2') \langle T, v \rangle = 0$$

dır. Buradan (4.6) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılır ve Önerme 4.3 gözönüne alınır

$$\pm \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left(\frac{k_1 k_2'' - k_2 k_1''}{k_1} \right) = 0$$

veya

$$\pm \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left(\frac{\rho'(s)}{k_1} \right) = 0$$

elde edilir. $k_1 \neq 0$ olacağından dolayı $\rho'(s) = 0$ olmalıdır.

(5) Kabul edelim ki $h_v'(s) = h_v''(s) = h_v'''(s) = h_v^{(4)}(s) = h_v^{(5)}(s) = 0$ olsun.

(4.7) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve gerekli düzenlemeler

yapılırsa

$$\begin{aligned}
h_v^{(5)}(s) &= (k_1''' - 6k_1^2 k_1' - k_1' k_2^2 - 5k_1 k_2 k_2') < N_1, v > \\
&+ (k_2''' - 6k_2^2 k_2' - k_2' k_1^2 - 5k_1 k_2 k_1') < N_2, v > \\
&+ (k_1^4 + k_2^4 - k_1 k_1'' - k_2 k_2'' + 2k_1^2 k_2^2 - 3(k_1')^2 - 3k_1 k_1'' - 3(k_2')^2 - 3k_2 k_2'') < T, v >
\end{aligned} \tag{4.9}$$

olur. $h_v^{(5)}(s) = 0$, (4.6) ve (4.9) eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$\pm \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left(\frac{(k_1''' k_2 - k_2''' k_1) - (k_1'(s) k_2(s) - k_1(s) k_2'(s))(k_1^2 + k_2^2)}{k_1} \right) = 0$$

elde edilir. Ayrıca Önerme 4.3 den dolayı $\rho''(s) = (k_1''' k_2 + k_1'' k_2' - k_1' k_2'' - k_2'' k_1')$ olup $\rho(s) = 0$ sağlandığından $k_1' k_2 - k_1 k_2' = 0$ yani $\frac{k_1}{k_2} = \frac{k_1'}{k_2'}$ olarak bulunur. Ayrıca

$$k_1'' k_2' - k_1' k_2'' = \left(\frac{k_1'}{k_2'} \right)' (k_2')^2 = \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' (k_2')^2 = 0$$

olduğundan $\rho''(s) = (k_1''' k_2 - k_2''' k_1)$ şeklinde ifade edilebilir

Bu yüzden

$$\pm \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left(\frac{\rho''(s) - \rho(s)(k_1^2 + k_2^2)}{k_1} \right) = 0$$

olduğu elde edilir. $k_1 \neq 0$ ve (3) den dolayı da $\rho(s) = 0$ sağlandığından $\rho''(s) = 0$ elde edilir Bu ise ispatı tamamlar.

(B)(1) Tanım 4.1.2 kullanılarak (A) nın ispatı ile benzer şekilde yapılabileceği kolayca görülmektedir.

Önerme 4.1.4 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı ve pozitif k_1 eğriliği ile tanımlı regüler bir eğri olsun. Bu durumda $\rho(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$v = \pm \frac{k_1(s)}{\sqrt{k_1^2(s) + k_1'^2(s)}} \left(\frac{k_2(s)}{k_1(s)} N_1(s) - N_2(s) \right)$$

vektörünün sabit vektör olmasıdır (Liu ve Pei 2012).

İspat: Kabul edelim ki $\rho(s) = 0$ olsun. (4.6) eşitliğinin diferensiyeli alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$v' = \pm \frac{k_1(k_1'k_2 - k_1k_2')}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}N_1 \pm \frac{k_2(k_1'k_2 - k_1k_2')}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}N_2$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla $\rho(s) = 0$ olduğu için $v' = 0$ yani v sabit vektör alanıdır. Tersine $v' \equiv 0$ olduğu göz önüne alınırsa kolayca görülebilir ki $\rho(s) = 0$ olur. Buda ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.5 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, birim hızlı ve pozitif k_1 eğriliği ile tanımlı regüler bir eğri olsun. O zaman $\rho(s) = 0$ olması için gerek ve yeter şart Bishop Darboux göstergesinin sabit bir dönüşüm olmasıdır (Liu ve Pei 2012).

Yukarıdaki önermeden dolayı açıkça görülmektedir ki $\rho(s) = k_1'k_2 - k_1k_2'$ fonksiyonu özel anlamlar taşımaktadır.

Teorem 4.1.6 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sıfırdan farklı eğrilikleri ile birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda γ eğrisinin B-slant helis olması için gerek ve yeter koşul $(\frac{k_2}{k_1})$ ifadesinin sabit olmasıdır (Bukcu ve Karacan 2009).

Önerme 4.1.7 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ $k_1 \neq 0$ ile birim hızlı regüler bir eğri ve $\rho(s) = 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialar gerçekleşir.

- (1) $\gamma(s)$ eğrisi B-slant helistir.
- (2) $\gamma(s)$ eğrisinin Bishop Darboux göstergesi sabit bir dönüşümdür.
- (3) $\gamma(s)$ eğrisinin Bishop teğetler göstergesi oskülatör düzlemde yatan bir çemberdir.
- (4) $\gamma(s)$ eğrisinin Bishop rektifiyan açılabilir yüzeyi $\gamma(s) + u\vec{e}$ şeklinde verilen silindirik yüzeydir.
- (5) $\gamma(s)$ eğrisinin N_1 Bishop göstergesi S^2 birim küresi üzerinde bir çemberdir ve çemberin teğet vektör alanının sabit açı yaptığı sabit doğrultu $d(s) = \vec{e}$ vektörü

tarafından verilir.

(6) $\gamma(s)$ eğrisinin N_2 Bishop göstergesi S^2 birim küresi üzerinde bir çemberdir ve çemberin teğet vektör alanının sabit açısı yaptığı sabit doğrultu $d(s) = \vec{e}$ vektörü tarafından verilir (Liu ve Pei 2012).

İspat: (1) Kabul edelim ki $\rho(s) = k_1'k_2 - k_1k_2'$ olsun. Bu durumda kolayca gösterebiliriz ki gerekli işlemler yapılarak

$$\left(\frac{k_2(s)}{k_1(s)}\right)' = \frac{k_2'(s)k_1(s) - k_2(s)k_1'(s)}{(k_1)^2(s)} = \frac{-\rho(s)}{(k_1)^2(s)} = 0$$

olur. Bunun anlamı $\frac{k_2(s)}{k_1(s)}$ değerinin sabit olmasıdır. B-slant helisin tanımından dolayı $\gamma(s)$ eğrisi B-slant helistir.

(2) Sonuç 4.1.5. den dolayı ikinci iddia kolay bir şekilde hesaplanır.

(3) $\gamma(s)$ eğrisinin Bishop teğetler göstergesi $\zeta(s_\zeta)$ olsun.

O halde s parametresine göre diferensiyel alınarak

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{ds_\zeta} \frac{ds_\zeta}{ds} = k_1N_1 + k_2N_2$$

elde edilir. Buradan

$$T_\zeta = \frac{k_1N_1 + k_2N_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \text{ ve } \frac{ds_\zeta}{ds} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

dir. Tekrar s parametresine göre diferensiyel alınırsa

$$(\dot{T}_\zeta) = -T + \frac{k_2^3}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' N_1 + \frac{k_1^3}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' N_2$$

elde edilir. Buradan

$$\kappa_\zeta = \left\| (\dot{T}_\zeta) \right\| = \sqrt{1 + \left[\frac{k_2^3}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \right]^2 + \left[\frac{k_1^3}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' \right]^2}$$

ve

$$N_\zeta = \frac{1}{\kappa_\zeta} \left\{ -T + \frac{k_2^3}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' N_1 + \frac{k_1^3}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' N_2 \right\}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca $T_\zeta \times N_\zeta = B_\zeta$ eşitliği kullanılarak

$$B_\zeta = \frac{1}{\kappa_\zeta} \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{k_1^4}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' - \frac{k_2^4}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \right] T \\ - \left[\frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \right] N_1 + \left[\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \right] N_2 \end{array} \right\}$$

olarak elde edilir ve $\tau_\zeta = \langle N'_\zeta, B_\zeta \rangle$ eşitliğinden de

$$\tau_\zeta = \frac{(-k_1 \{3k'_2(k_1k'_1 + k_2k'_2) - (k_1^2 + k_2^2)[k''_2 - k_2(k_1^2 + k_2^2)]\} + k_2 \{3k'_1(k_1k'_1 + k_2k'_2) - (k_1^2 + k_2^2)[k''_1 - k_1(k_1^2 + k_2^2)]\})}{\left[k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' \right]^2 + (k_1^2 + k_2^2)^3}$$

olarak hesaplanır.

$\frac{k_2(s)}{k_1(s)}$ sabit olduğundan dolayı elde edilen $k'_1k_2 = k'_2k_1$ ve $k''_1k_2 = k''_2k_1$ eşitlikleri yardımıyla κ_δ sabit ve $\tau_\delta = 0$ değerleri kolayca hesaplanır. O halde $\gamma(s)$ eğrisinin Bishop teğetler göstergesi $\zeta(s_\zeta)$ oskülatör düzlemde yatan bir çemberdir.

(4) Dördüncü iddia Tanım 4.4 ile verilen BRD (Bishop rektifiyan açılabilir) yüzey tanımından dolayı kolayca görülmektedir.

(5) $\gamma(s)$ eğrisinin N_1 Bishop göstergesi $\delta(s_\delta)$ olsun.

O halde s parametresine göre diferensiyel alınır

$$\delta' = \frac{d\delta}{ds_\delta} \frac{ds_\delta}{ds} = -k_1T$$

elde edilir. Buradan

$$T_\delta = T \text{ ve } \frac{ds_\delta}{ds} = -k_1$$

dir. Tekrar s parametresine göre diferensiyel alınır

$$T'_\delta = (\dot{T}_\delta) \frac{ds_\delta}{ds} = k_1N_1 + k_2N_2$$

$$(\dot{T}_\delta) = -N_1 - \frac{k_2}{k_1}N_2$$

elde edilir. Buradan

$$\kappa_\delta = \left\| (\dot{T}_\delta) \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2}$$

ve

$$N_\delta = -\frac{1}{\kappa_\delta} N_1 - \frac{k_2}{k_1 \kappa_\delta} N_2$$

olarak hesaplanır. Ayrıca $T_\zeta \times N_\zeta = B_\zeta$ eşitliği kullanılarak

$$B_\delta = \frac{k_2}{k_1 \kappa_\delta} N_1 - \frac{1}{\kappa_\delta} N_2$$

olarak elde edilir ve $\tau_\zeta = \langle N'_\zeta, B_\zeta \rangle$ eşitliğinden de

$$\tau_\delta = -\frac{k_1 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}{k_1^2 + k_2^2}$$

dır.

$\frac{k_2(s)}{k_1(s)}$ sabit olduğundan dolayı κ_δ sabit ve $\tau_\delta = 0$ olarak hesaplanır. O halde $\gamma(s)$ eğrisinin N_1 Bishop göstergesi $\delta(s_\delta)$ bir çemberdir ve ayrıca $k_1 > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\alpha(s)$, $N_1(s)$ ile $\vec{e}$ vektörleri arasındaki açı olmak üzere $\langle \vec{e}, N_1(s) \rangle = \cos \alpha$ dır. O halde

$$\vec{e} = -\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left(\frac{k_2}{k_1} N_1 - N_2 \right)$$

olduğundan $\langle \vec{e}, N_1 \rangle = \langle -\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left(\frac{k_2}{k_1} N_1 - N_2 \right), N_1 \rangle = -\frac{\frac{k_2}{k_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2}} = \text{sabit}$

elde edilir.

Bu yüzden $\cos(\alpha(s)) = \langle \vec{e}, N_1(s) \rangle$ sabittir. Bunun anlamı N_1 Bishop göstergesi S^2 birim küresi üzerinde bir çemberdir ve çemberin teğet vektör alanının sabit açı yaptığı sabit doğrultu $d(s) = \vec{e}$ vektörü tarafından verilir.

(6) $\gamma(s)$ eğrisinin N_2 Bishop göstergesi $\psi(s_\psi)$ olsun.

O halde s parametresine göre diferensiyel alınarak

$$\psi' = \frac{d\psi}{ds_\psi} \frac{ds_\psi}{ds} = -k_2 T$$

elde edilir. Buradan

$$T_\psi = T \text{ ve } \frac{ds_\psi}{ds} = -k_2$$

dir. Tekrar s parametresine göre diferensiyel alınırsa

$$T'_\psi = (\dot{T}_\psi) \frac{ds_\psi}{ds} = k_1 N_1 + k_2 N_2$$

$$(\dot{T}_\psi) = -\frac{k_1}{k_2} N_1 - N_2$$

elde edilir. Buradan

$$\kappa_\psi = \left\| (\dot{T}_\psi) \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2}$$

ve

$$N_\psi = -\frac{k_1}{k_2 \kappa_\psi} N_1 - \frac{1}{\kappa_\psi} N_2$$

olarak hesaplanır. Ayrıca $T_\zeta \times N_\zeta = B_\zeta$ eşitliği kullanılarak

$$B_\psi = \frac{1}{\kappa_\psi} N_1 - \frac{k_1}{k_2 \kappa_\psi} N_2$$

olarak elde edilir ve $\tau_\zeta = \langle N'_\zeta, B_\zeta \rangle$ eşitliğinden de

$$\tau_\psi = -\frac{k_2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'}{k_1^2 + k_2^2}$$

dır.

$\frac{k_2(s)}{k_1(s)}$ sabit olduğundan dolayı κ_δ sabit ve $\tau_\delta = 0$ olarak hesaplanır. O halde $\gamma(s)$ eğrisinin N_2 Bishop göstergesi bir çemberdir ve ayrıca $k_1 > 0$ olduğunu kabul edelim.

Bu durumda $\beta(s)$, $N_2(s)$ ile $\vec{e}$ vektörleri arasındaki açı olmak üzere

$\langle \vec{e}, N_2(s) \rangle = \cos \beta$ dır. **(5)** dekiner benzer işlemlerle

$$\cos(\beta(s)) = \langle \vec{e}, N_2(s) \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2}}$$

sabit olarak elde edilir. Bunun anlamı

N_2 Bishop göstergesi S^2 birim küresi üzerinde bir çemberdir ve çemberin teğet vektör alanının sabit açısı yaptığı sabit doğrultu $d(s) = \vec{e}$ vektörü tarafından verilir.

4.2 Versal Katlanmalar

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı pozitif k_1 eğriliği ile tanımlı regüler bir eğri ve $\gamma(s)$ in $\mathbb{H}$ yükseklik fonksiyonunu göz önüne alalım.

Önerme 4.1.3 den $\tilde{\mathbb{H}}(s, v, u)$ nin zarf (diskriminant) cümlesi aşağıdaki gibi verilir.

$$\mathfrak{D}_{\tilde{\mathbb{H}}} = \left\{ \begin{array}{l} (v, u) \in S^2 \times \mathbb{R} : u = \langle \gamma(s), v \rangle, \\ v = \lambda N_1(s) + \mu N_2(s) \mid s \in I, \lambda^2 + \mu^2 = 1, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$H(s, v)$ nin ayrışım (bifurcation) cümlesi de aşağıdaki gibidir.

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{H}} = \left\{ v = \pm \frac{k_1(s)}{\sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)}} \left(\frac{k_2(s)}{k_1(s)} N_1(s) - N_2(s) \right) \right\}$$

O zaman aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 4.2.1 (1) Eğer $h_{v_0}(s)$ fonksiyonu s_0 noktasında A_k singülerliğine sahipse ($k = 2, 3$) $\mathbb{H}(s, v)$ fonksiyonu, $h_{v_0}(s)$ fonksiyonunun (p) -versal katlanmasıdır.

(2) Eğer $\tilde{h}_{v_0}(s)$ fonksiyonu s_0 noktasında A_k singülerliğine sahipse ($k = 2, 3$) $\tilde{\mathbb{H}}(s, v, u)$ fonksiyonu, $\tilde{h}_{v_0}(s)$ fonksiyonunun versal katlanmasıdır (Liu ve Pei 2012).

İspat: **(1)** $\gamma(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, \sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2})$ olsun.

Tanım 4.1.1 deki $\mathbb{H}(s, v)$ fonksiyonunun tanımından dolayı

$$\mathbb{H}(s, v) = x_1(s)v_1 + x_2(s)v_2 + x_3(s)\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}$$

olduğunu biliyoruz. Bu yüzden

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{H}}{dv_i} &= x_i(s) \pm \frac{v_i x_3(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}}, i = 1, 2 \\ \frac{d}{ds} \frac{d\mathbb{H}}{dv_i} &= x'_i(s) \pm \frac{v_i x'_3(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}}, i = 1, 2 \\ \frac{d^2}{ds^2} \frac{d\mathbb{H}}{dv_i} &= x''_i(s) \pm \frac{v_i x''_3(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}}, i = 1, 2\end{aligned}\tag{4.10}$$

eşitlikleri kolayca hesaplanabilir. $k = 2$ ve $k = 3$ değerleri için 2 farklı durum söz konusudur.

1.Durum: h_{v_0} fonksiyonu A_2 singülerliğine sahipse;

$$v_1 x'_1(s) + v_2 x'_2(s) + \sqrt{1-v_1^2-v_2^2} x'_3(s) = 0\tag{4.11}$$

eşitliğinin sağlandığını biliyoruz. Ayrıca $\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v_i}(s, v)$ fonksiyonunun 1. dereceden jet-leri;

$$\begin{aligned}J^1\left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v_1}(s, v_0)\right)(s_0) &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v_1}(s - s_0) = \alpha_{11}(s - s_0) \\ J^1\left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v_2}(s, v_0)\right)(s_0) &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v_2}(s - s_0) = \alpha_{12}(s - s_0)\end{aligned}\tag{4.12}$$

olarak hesaplanır. O halde (4.10) eşitliğindeki değerlerin (4.12) de yerlerine yazılmasıyla katsayılar matrisi

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} x'_1(s) \pm \frac{v_1 x'_3(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}} & x'_2(s) \pm \frac{v_2 x'_3(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}} \end{bmatrix}_{1 \times 2}$$

şeklinde bulunur. Burada $\mathbb{A}$ matrisinin elemanlarının kareleri toplamına bakılır ve (4.11) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}& \left(x'_1(s) \pm \frac{v_1 x'_3(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}}\right)^2 + \left(x'_2(s) \pm \frac{v_2 x'_3(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}}\right)^2 \\ &= (x'_1(s))^2 + (x'_2(s))^2 + \left(1 + \frac{1}{1-v_1^2-v_2^2}\right)(x'_3(s))^2 \neq 0\end{aligned}$$

sağlandığından dolayı $rank \mathbb{A} = 1$ dir.

2.Durum: h_{v_0} fonksiyonu A_3 singülerliğine sahipse $\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v_i}(s, v)$ fonksiyonunun 2. dereceden jetleri;

$$\begin{aligned}
J^2\left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v_1}(s, v_0)\right)(s_0) &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v_1}(s - s_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v_1}(s - s_0)^2 \\
&= \alpha_{11}(s - s_0) + \frac{1}{2} \alpha_{21}(s - s_0)^2 \\
J^2\left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v_2}(s, v_0)\right)(s_0) &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v_2}(s - s_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v_2}(s - s_0)^2 \\
&= \alpha_{12}(s - s_0) + \frac{1}{2} \alpha_{22}(s - s_0)^2
\end{aligned} \tag{4.13}$$

olarak hesaplanır ve (4.10) eşitliğindeki değerlerin (4.13) de yerine yazılmasıyla kat-sayılar matrisi

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} x'_1(s) \pm \frac{v_1 x'_3(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}} & x'_2(s) \pm \frac{v_2 x'_3(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}} \\ x''_1(s) \pm \frac{v_1 x''_3(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}} & x''_2(s) \pm \frac{v_2 x''_3(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

dir. h_{v_0} fonksiyonu A_3 singülerliğine sahip olduğundan dolayı

$$v = \pm \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left(\frac{k_2}{k_1} N_1(s) - N_2(s) \right)$$

olduğu bilindiğinden,

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{B}) &= \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}} \begin{vmatrix} x'_1(s) & x'_2(s) & x'_3(s) \\ x''_1(s) & x''_2(s) & x''_3(s) \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\
&= (x''_2 x'_1 - x'_2 x''_1) - \frac{v_1}{v_3} (x''_2 x'_3 - x'_2 x''_3) - \frac{v_2}{v_3} (x''_3 x'_1 - x'_3 x''_1) \\
&= \frac{1}{v_3} \langle v, T(s) \wedge T'(s) \rangle \\
&= \frac{1}{v_3} \langle v, k_1(s) N_2(s) - k_2(s) N_1(s) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{v_3} < \pm \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left(\frac{k_2}{k_1} N_1(s) - N_2(s) \right), k_1(s)N_2(s) - k_2(s)N_1(s) > \\
&= \pm \frac{1}{v_3} \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left(-\frac{k_2^2}{k_1} - k_1 \right) \\
&= \pm \frac{1}{v_3} \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \neq 0
\end{aligned}$$

olup $rank \mathbb{B} = 2$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

(2) Tanım 4.1.2 deki $\widetilde{\mathbb{H}}(s, v, u)$ nin tanımından dolayı

$$\widetilde{\mathbb{H}}(s, v, u) = x_1(s)v_1 + x_2(s)v_2 + x_3(s)\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2} - u$$

şeklindedir. O halde $k = 2$ ve $k = 3$ değerleri için 2 farklı durum söz konusudur.

1.Durum: h_{v_0, u_0} fonksiyonu A_2 singülerliğine sahipse katsayılar matrisi;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x'_1(s) - \frac{v_1 x'_3(s)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} & x'_2(s) - \frac{v_2 x'_3(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}} & -1 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

olup $rank \mathbf{A} = 1$ olduğu kolayca görülmektedir.

2.Durum: h_{v_0, u_0} fonksiyonu A_3 singülerliğine sahipse katsayılar matrisi;

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x'_1(s) - \frac{v_1 x'_3(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}} & x'_2(s) - \frac{v_2 x'_3(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}} & -1 \\ x''_1(s) - \frac{y_1 x''_3(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}} & x''_2(s) - \frac{v_2 x''_3(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}} & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

olup Önerme 4.2.1 (1) durum 2 den yararlanılarak kolayca gözükmektedir ki

$rank \mathbf{B} = 2$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

4.3 Singülerite Derecelerine Göre d Küresel Darboux Göstergesi ve BDU Yüzeyinin Sınıflandırılması

Teorem 4.3.1 (Ana Teorem) $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi $k_1(s) > 0$ eğriliği ile birim hızlı regüler bir eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler gerçekleşir.

(1)(a) Bishop Darboux göstergesi $d(s)$, s_0 noktasında $\{0\} \times \mathbb{R}$ doğrusuna lokal difeo-

morfiktir $\iff \rho(s_0) \neq 0$

(b) Bishop Darboux göstergesi $d(s)$, s_0 noktasında C (adi cusp) cümlesine lokal difeomorfiktir $\iff \rho(s_0) = 0$ ve $\rho'(s_0) \neq 0$

(2)(a) Bishop Dual BDU_γ s_0 noktasında $\mathbb{R}^2$ düzlemine lokal difeomorfiktir $\iff k_1(s_0)\lambda + k_2(s_0)\mu \neq 0$, burada λ ve μ ifadeleri $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ sağlanacak şekildeki reel sayılardır.

(b) Bishop Dual BDU_γ s_0 noktasında $C \times \mathbb{R}$ (cuspidal edge) yüzeyine lokal difeomorfiktir $\iff$

$$v = \pm \frac{k_1(s_0)}{\sqrt{k_1^2(s_0) + k_2^2(s_0)}} \left(\frac{k_2(s_0)}{k_1(s_0)} N_1(s_0) - N_2(s_0) \right) \text{ ve } \rho(s_0) \neq 0$$

dır.

(c) Bishop Dual BDU_γ s_0 noktasında SW (swallow tail) yüzeyine lokal difeomorfiktir $\iff$

$$v = \pm \frac{k_1(s_0)}{\sqrt{k_1^2(s_0) + k_2^2(s_0)}} \left(\frac{k_2(s_0)}{k_1(s_0)} N_1(s_0) - N_2(s_0) \right), \rho(s_0) = 0 \text{ ve } \rho'(s_0) \neq 0$$

dır.

$k_1(s) < 0$ olduğu durumda da yukarıdaki teoremle eşdeğer sonuçlar verilebilir (Liu ve Pei 2012).

İspat: (1)(a) $\mathbb{H}$ fonksiyonu (p)-versal katlanma ve $\mathfrak{B}_H = d$ olduğundan dolayı $n = 2$ ve $k = 2$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılarak d Darboux göstergesinin s_0 noktasında $\{0\} \times \mathbb{R}$ doğrusuna lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul $\rho(s_0) \neq 0$ olmasıdır.

(b) $\mathbb{H}$ fonksiyonu (p)-versal katlanma ve $\mathfrak{B}_H = d$ olduğundan dolayı $n = 2$ ve $k = 3$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılarak d Darboux göstergesinin s_0 noktasında C (adi cusp) cümlesine lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul $\rho(s_0) = 0$ ve $\rho'(s_0) \neq 0$ olmasıdır.

(2)(a) $\tilde{\mathbb{H}}$ fonksiyonu versal katlanma ve $\mathfrak{D}_H = BDU_\gamma$ olduğundan dolayı $n = 3$ ve $k = 1$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılarak BDU_γ Bishop Dualin s_0 noktasında $\mathbb{R}^2$ düzlemine lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul $k_1(s_0)\lambda + k_2(s_0)\mu \neq 0$

ve $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ sağlanacak şekilde λ ve μ reel sayılarının bulunmasıdır.

(b) $\tilde{\mathbb{H}}$ fonksiyonu versal katlanma ve $\mathfrak{D}_H = BDU_\gamma$ olduğundan dolayı $n = 3$ ve $k = 2$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılarak BDU_γ Bishop Dualin s_0 noktasında $C \times \mathbb{R}$ (cuspidal edge) yüzeyine lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul $v = \pm \frac{k_1(s_0)}{\sqrt{k_1^2(s_0) + k_1^2(s_0)}} \left(\frac{k_2(s_0)}{k_1(s_0)} N_1(s_0) - N_2(s_0) \right)$ ve $\rho(s_0) \neq 0$ olmasıdır.

(c) $\tilde{\mathbb{H}}$ fonksiyonu versal katlanma ve $\mathfrak{D}_H = BDU_\gamma$ olduğundan dolayı $n = 3$ ve $k = 3$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılarak BDU_γ Bishop Dualin s_0 noktasında SW (swallow tail) cümlesine lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul

$$v = \pm \frac{k_1(s_0)}{\sqrt{k_1^2(s_0) + k_1^2(s_0)}} \left(\frac{k_2(s_0)}{k_1(s_0)} N_1(s_0) - N_2(s_0) \right), \rho(s_0) = 0 \text{ ve } \rho'(s_0) \neq 0 \text{ olmasıdır.}$$

Bu da teoremi ispatlar.

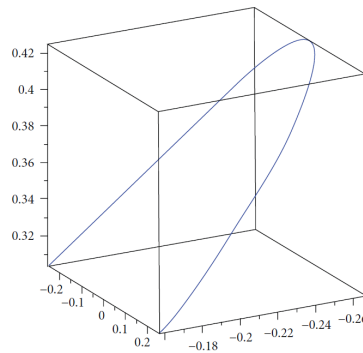
Ana sonuç Teorem 4.3.1 in uygulamaları ve örneği olarak iki örnek verelim.

Örnek 4.3.2 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(s) = \left(\frac{2}{5} \sin 2s - \frac{1}{40} \sin 8s, -\frac{2}{5} \cos 2s + \frac{1}{40} \cos 8s, \frac{4}{15} \sin 3s \right)$$

şeklinde s yay parametresi ile tanımlı bir eğri olsun (Şekil 4.3).



Şekil 4.3 $\gamma(s)$ eğrisi

$\gamma(s)$ eğrisinin eğrinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla

$$\kappa(s) = -4 \sin 3s$$

$$\tau(s) = 4 \cos 3s$$

şeklindedir. $\gamma(s)$ eğrisinin Bishop eğrilik denklemleri kullanılarak

$$k_1(s) = -4 \sin(3s) \cos\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right)$$

$$k_2(s) = -4 \sin(3s) \sin\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right)$$

olarak elde edilir.

$\gamma(s)$ eğrisinin geometrik invaryant fonksiyonu

$$\rho(s) = -64 \sin^2(3s) \cos(3s)$$

olarak hesaplanır.

$\gamma(s)$ eğrisinin Bishop çatısı elemanları $\{T(s), N_1(s), N_2(s)\}$ sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$T(s) = \left(-\frac{4}{5} \cos(2s) - \frac{1}{5} \cos(8s), \frac{4}{5} \sin(2s) - \frac{1}{5} \sin(8s), \frac{4}{5} \cos(3s)\right)$$

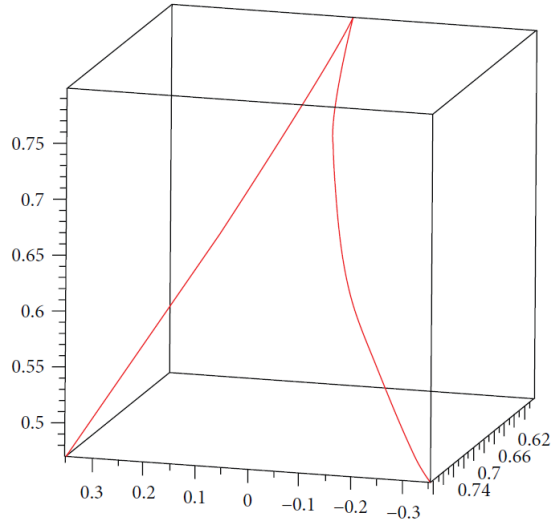
$$\begin{aligned} N_1(s) = & \frac{1}{\sqrt{\sin^2 s (4 \cos^2 s - 1)^2}} \left((\sin 8s - \sin 2s) \left(\frac{2}{5} \cos\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) - \frac{3}{25} \sin\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \sin 3s \right) \right. \\ & + \frac{24}{125} \sin\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \cos 3s (\cos 8s - \cos 2s) \Big), \\ & \frac{2}{5} \cos\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) (\cos 2s - \cos 8s) - \sin\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \left(\frac{8}{25} \cos 3s (\sin 8s - \sin 2s) \right. \\ & + \left(\frac{12}{25} \cos 2s - \frac{3}{25} \cos 8s \right) \sin 3s \Big), \\ & - \frac{3}{5} \cos\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \sin 3s - \sin\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \left(\left(\frac{8}{25} \cos 2s - \frac{2}{25} \cos 8s \right) (\cos 2s - \cos 8s) \right. \\ & + \left. \left(\frac{8}{25} \sin 2s - \frac{2}{25} \sin 8s \right) (\sin 2s - \sin 8s) \right) \Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2(s) = & \frac{1}{\sqrt{\sin^2 s (4 \cos^2 s - 1)^2}} \left(\frac{2}{5} (\sin 8s - \sin 2s) \sin\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \right. \\
& + \cos\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \left(\frac{3}{25} \sin 8s - \frac{12}{25} \sin 2s \right) \sin 3s - \frac{8}{25} \cos 3s (\cos 2s - \cos 8s), \\
& \frac{2}{5} (\cos 2s - \cos 8s) \sin\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) + \cos\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \left(\frac{8}{25} \cos 3s (\sin 8s - \sin 2s) \right) \\
& + \left(\frac{12}{25} \cos 2s - \frac{3}{25} \cos 8s \right) \sin 3s, \\
& - \frac{3}{5} \sin\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \sin 3s + \cos\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \left(\left(\frac{8}{25} \cos 2s - \frac{2}{25} \cos 8s \right) (\cos 2s - \cos 8s) \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{8}{25} \sin 2s - \frac{2}{25} \sin 8s \right) (\sin 8s - \sin 2s) \right) \right)
\end{aligned}$$

$\gamma(s)$ eğrisinin Bishop Darboux göstergesi

$$\begin{aligned}
d(s) = & \frac{1}{\sqrt{\sin^2 s (4 \cos^2 s - 1)^2}} \left(\sin 3s \left(\frac{3}{25} \sin 8s - \frac{12}{25} \sin 2s \right) + \frac{8}{25} \cos 3s (\cos 8s - \cos 2s) \right. \\
& , \frac{8}{25} \cos 3s (\sin 8s - \sin 2s) + \sin 3s \left(\frac{12}{25} \cos 2s - \frac{3}{25} \cos 8s \right) \\
& , \frac{2}{5} (1 + \cos 6s) \left. \right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir (Şekil 4.4).



Şekil 4.4 $\gamma(s)$ eğrisinin bir cusp noktasma sahip Bishop Darboux göstergesi

Ayrıca $\gamma(s)$ eğrisinin Bishop Gauss yüzeyi de

$$BGS(s, \omega) = \cos \omega N_1(s) + \sin \omega N_2(s)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu yüzey Bishop Darboux göstergesi ve Bishop Dual yüzeyi ile yakından ilişkilidir. Hem Bishop Darboux göstergesi hem de Bishop Gauss yüzeyi Şekil 4.5 çizilmiştir. Bishop Darboux göstergesinin Bishop Gauss yüzeyinde yattığı ve bir cusp noktasının olduğunu görebiliriz.

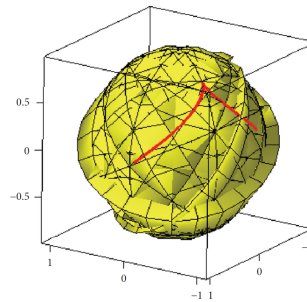
$\gamma(s)$ eğrisinin Bishop Dual yüzeyi için difeomorfik bir dönüşüm tanımlayalım ve onun difeomorfik görüntüsü de Şekil 4.6 daki gibidir. Kırmızı eğri ile gösterilen singüler noktaların ve bu yüzeydeki bazı diğer cuspidal edge noktaların geometrik yerini görebiliriz. Difeomorfik dönüşümü

$$\phi : S^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \phi(v, u) = u(v_1, v_2, \pm \sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2})$$

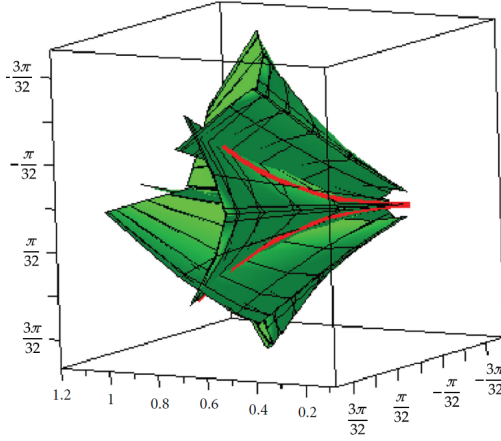
şeklinde tanımlayalım. Burada $v = (v_1, v_2, v_3) \in S^2$ ve $u \in \mathbb{R}$ dir. Bu yüzden $\gamma(s)$ eğrisinin Bishop Dual yüzeyinin difeomorfik görüntüsü

$$\phi(BDU(s, \omega)_\gamma) = \langle \gamma(s), BGS(s, \omega) \rangle BGS(s, \omega)$$

dir. $\gamma(s)$ eğrisinin Bishop Dual yüzeyinin difeomorfik görüntüsü Şekil 4.6 daki gibi görülebilir (Şekil 4.3- 4.6) (Liu ve Pei 2012).



Şekil 4.5 $\gamma(s)$ eğrisinin Bishop Gauss yüzeyi ve Bishop Darboux göstergesi (kırmızı eğri)



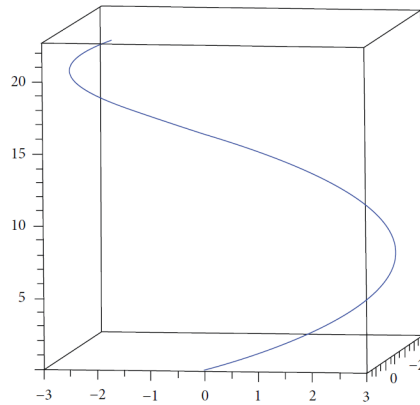
Şekil 4.6 $\gamma(s)$ eğrisinin Bishop Duali yüzeyi ve üzerindeki singüler noktalarının geometrik yeri olan cuspidal edge noktaları

Örnek 4.3.3 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere

$$\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\beta(s) = (3 \cos \frac{1}{5}s, 3 \sin \frac{1}{5}s, \frac{4}{5}s)$$

şeklinde s yay parametresi ile tanımlı bir eğri olsun (Şekil 4.7)



Şekil 4.7 $\beta(s)$ helis eğrisi

$\beta(s)$ eğrisinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla

$$\kappa(s) = \frac{3}{25}$$

$$\tau(s) = \frac{4}{25}$$

şeklindedir. $\beta(s)$ eğrisinin Bishop eğrilik denklemleri kullanılarak

$$k_1(s) = \frac{3}{25} \cos\left(\frac{4}{25}s\right)$$

$$k_2(s) = \frac{3}{25} \sin\left(\frac{4}{25}s\right)$$

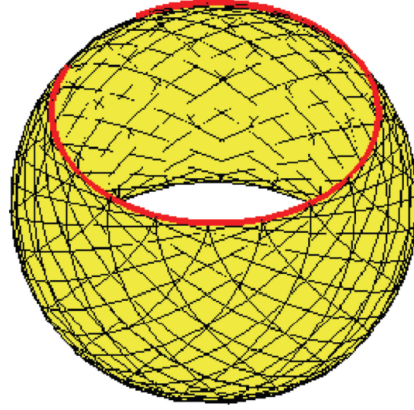
olarak elde edilir.

$\beta(s)$ eğrisinin geometrik invaryant fonksiyonu

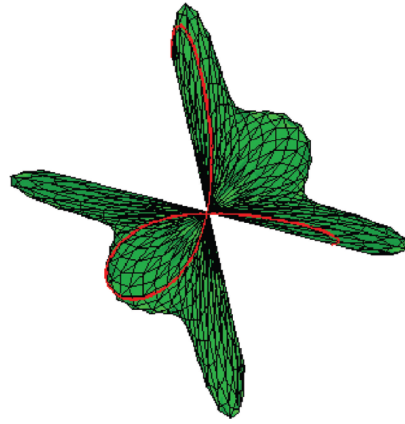
$$\rho(s) = -\frac{36}{253}$$

şeklinde hesaplanır.

Bir önceki örnekle aynı metot kullanılarak $\beta(s)$ eğrisinin Bishop Darboux göstergesi, Bishop Gauss yüzeyi ve Bishop Dual yüzeyi elde edilebilir. Bishop Darboux göstergesi, Bishop Gauss yüzeyi ve Bishop Dual yüzeyinin diffeomorfik görüntüsünün resimleri Şekil 4.8 ve Şekil 4.9 deki gibidir. Bishop Darboux göstergesinin Bishop Gauss yüzeyinde yattığı ve bir doğruya lokal diffeomorfik olduğunu görebiliriz. Bishop Dualinin diffeomorfik görüntüsü bazı cuspidal edge noktalara sahiptir (Şekil 4.7-4.9) (Liu ve Pei 2012).



Şekil 4.8 $\beta(s)$ eğrisinin Bishop Gauss yüzeyi ve üzerindeki Bishop Darboux göstergesi



Şekil 4.9 $\beta(s)$ eğrisinin Bishop Dual yüzeyi ve üzerindeki singüler noktalarının geometrik yeri

4.4 2.Tip Bishop Çatısına Göre Fonksiyon Ailelerinin Singüleriteleri

Bu bölümde regüler eğrinin geometrik değişmezlerinin çalışılmasında yararlı olacak γ üzerindeki dört farklı fonksiyon ailesini tanıtalım. I , $\mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. Şimdi I üzerinde sürekli fonksiyonların bir ailesini tanımlıyalım:

Tanım 4.4.1

$$H_{N_1} : I \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_1(s, v) = \langle N_1(s), v \rangle \quad (4.14)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona N_1 **yönündeki yükseklik fonksiyonu** denir (Liu ve Pei 2013).

Tanım 4.4.2

$$H_{N_2} : I \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_2(s, v) = \langle N_2(s), v \rangle \quad (4.15)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona N_2 **yönündeki yükseklik fonksiyonu** denir (Liu ve Pei 2013).

Herhangi bir $v \in S^2$ için $H_{N_i}(s, v) = h_{iv}(s)$ gösterimini kullanabiliriz. Ayrıca

Tanım 4.4.3

$$H_{\zeta_1} : I \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_{\zeta_1}(s, v) = \langle \zeta_1(s), v \rangle \quad (4.16)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona ζ_1 **yönündeki yükseklik fonksiyonu** denir (Liu ve Pei 2013).

Tanım 4.4.4

$$H_{\zeta_2} : I \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_{\zeta_2}(s, v) = \langle \zeta_2(s), v \rangle \quad (4.17)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona ζ_2 **yönündeki yükseklik fonksiyonu** denir (Liu ve Pei 2013).

Aynı şekilde herhangi bir $v \in S^2$ için $H_{\zeta_i}(s, v) = g_{iv}(s)$ gösterimini kullanabiliriz ($i = 1, 2$).

Önerme 4.4.5 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler birim hızlı bir eğri olsun. O zaman

(A) Kabul edelim ki $k_1(s) \neq 0$ olsun. O halde aşağıdaki iddialardan biri gerçekleşir.

(1) $h_{1v}(s) = 0 \iff \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sayıları için $v = \lambda N_1 + \mu N_2$ olacak şekilde v birim

vektörü vardır.

(2) $h_{1v}(s) = h'_{1v}(s) = 0 \iff v = \pm N_2$ dir.

(3) $h_{1v}(s) = h'_{1v}(s) = h''_{1v}(s) = 0 \iff v = \pm N_2$ ve $k_2(s) = 0$ sağlanmasıdır.

(4) $h_{1v}(s) = h'_{1v}(s) = h''_{1v}(s) = h'''_{1v}(s) = 0 \iff v = \pm N_2$ ve $k_2(s) = k'_2(s) = 0$ sağlanmasıdır.

(B) Kabul edelim ki $k_2(s) \neq 0$ olsun. O halde aşağıdaki iddialardan biri gerçekleşir.

(1) $h_{2v}(s) = 0 \iff \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sayıları için $v = \lambda N_1 + \mu N_2$ olacak şekilde v birim vektörü vardır.

(2) $h_{2v}(s) = h'_{2v}(s) = 0 \iff v = \pm N_1$ dir.

(3) $h_{2v}(s) = h'_{2v}(s) = h''_{2v}(s) = 0 \iff v = \pm N_1$ ve $k_1(s) = 0$ sağlanmasıdır.

(4) $h_{2v}(s) = h'_{2v}(s) = h''_{2v}(s) = h'''_{2v}(s) = 0 \iff v = \pm N_1$ ve $k_1(s) = k'_1(s) = 0$ sağlanmasıdır.

(C) Kabul edelim ki $\varepsilon_1(s) \neq 0$ olsun. O halde aşağıdaki iddialardan biri gerçekleşir.

(1) $g_{1v}(s) = 0 \iff \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sayıları için $v = \lambda N_1 + \mu N_2$ olacak şekilde v birim vektörü vardır.

(2) $g_{1v}(s) = g'_{1v}(s) = 0 \iff v = \pm \zeta_2(s)$ dir.

(3) $g_{1v}(s) = g'_{1v}(s) = g''_{1v}(s) = 0 \iff v = \pm \zeta_2(s)$ ve $\varepsilon_2(s) = 0$ sağlanmasıdır.

(4) $g_{1v}(s) = g'_{1v}(s) = g''_{1v}(s) = g'''_{1v}(s) = 0 \iff v = \pm \zeta_2(s)$ ve $\varepsilon_2(s) = \varepsilon'_2(s) = 0$ sağlanmasıdır.

(D) Kabul edelim ki $\varepsilon_2(s) \neq 0$ olsun. O halde aşağıdaki iddialardan biri gerçekleşir.

(1) $g_{2v}(s) = 0 \iff \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sayıları için $v = \lambda N_1 + \mu N_2$ olacak şekilde v birim vektörü vardır.

(2) $g_{2v}(s) = g'_{2v}(s) = 0 \iff v = \pm \zeta_1(s)$ dir.

(3) $g_{2v}(s) = g'_{2v}(s) = g''_{2v}(s) = 0 \iff v = \pm \zeta_1(s)$ ve $\varepsilon_1(s) = 0$ sağlanmasıdır.

(4) $g_{2v}(s) = g'_{2v}(s) = g''_{2v}(s) = g'''_{2v}(s) = 0 \iff v = \pm \zeta_1(s)$ ve $\varepsilon_1(s) = \varepsilon'_1(s) = 0$ sağlanmasıdır (Liu ve Pei 2013).

İspat: (A)(1) (4.14) denkleminde dolayı

$$h_{1v}(s) = \langle N_1, v \rangle \quad (4.18)$$

olur. Bu durumda $h_{1v}(s) = 0$ ise $\langle N_1, v \rangle = 0$ yani

$$v = \lambda T + \mu N_2 \quad (4.19)$$

elde edilir. Burada $v \in S^2$ olduğundan dolayı λ ve μ , $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ olacak şekildeki reel sayılardır.

(2) Kabul edelim ki $h_{1v}(s) = h'_{1v}(s) = 0$ olsun. (4.18) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve Bishop formülleri kullanılırsa

$$h'_{1v}(s) = \langle -k_1 T, v \rangle \quad (4.20)$$

eşitliği elde edilir. $h'_{1v}(s) = 0$ ve (4.19) eşitlikleri birlikte kullanılırsa $-k_1 \lambda = 0$ elde edilir. $k_1 \neq 0$ olduğundan dolayı $\lambda = 0$, yani $v = \pm N_2(s)$ olarak bulunur.

(3) Kabul edelim ki $h_{1v}(s) = h'_{1v}(s) = h''_{1v}(s) = 0$ olsun. (4.20) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$h''_{1v}(s) = -k'_1 \langle T, v \rangle - k_1^2 \langle N_1, v \rangle - k_1 k_2 \langle N_2, v \rangle \quad (4.21)$$

eşitliği elde edilir. $h''_{1v}(s) = 0$ ve $v = \pm N_2(s)$ olduğu göz önüne alınırsa $-k_1 k_2 = 0$ elde edilir. Ayrıca $k_1 \neq 0$ olduğundan dolayı $k_2 = 0$ olmak zorundadır.

(4) Kabul edelim ki $h_{1v}(s) = h'_{1v}(s) = h''_{1v}(s) = h'''_{1v}(s) = 0$ olsun. (4.21) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve düzenlenirse

$$h'''_{1v}(s) = (-k''_1 + k_1^3 + k_1 k_2^2) \langle T, v \rangle - 3k_1 k'_1 \langle N_1, v \rangle + (-2k'_1 k_2 - k_1 k'_2) \langle N_2, v \rangle \quad (4.22)$$

olur. $h'''_{1v}(s) = 0$ ve (4.22) denklemi göz önüne alınırsa

$$(-k''_1 + k_1^3 + k_1 k_2^2) \langle T, v \rangle - 3k_1 k'_1 \langle N_1, v \rangle + (-2k'_1 k_2 - k_1 k'_2) \langle N_2, v \rangle = 0 \quad (4.23)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $v = \pm N_2(s)$ olduğu bilindiğinden (4.23) in düzenlenmesiyle

$$-2k'_1k_2 - k_1k'_2 = 0$$

elde edilir ve $k_2 = 0$ olduğundan $-k_1k'_2 = 0$ sağlanır. Bu ise $k_1 \neq 0$ gerçekleştiğinden dolayı $k'_2 = 0$ olmasını gerektirir. Bu da ispatı tamamlar.

(B) (1) (4.15) denkleminde dolayı

$$h_{2v}(s) = \langle N_2, v \rangle \quad (4.24)$$

olur. Bu durumda $h_{2v}(s) = 0$ ise $\langle N_2, v \rangle = 0$ yani

$$v = \lambda T + \mu N_1 \quad (4.25)$$

elde edilir. Burada $v \in S^2$ olduğundan dolayı λ ve μ , $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ olacak şekildeki reel sayılardır.

(2) Kabul edelim ki $h_{2v}(s) = h'_{2v}(s) = 0$ olsun. (4.24) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve Bishop formülleri kullanılırsa

$$h'_{2v}(s) = \langle -k_2T, v \rangle \quad (4.26)$$

eşitliği elde edilir. $h'_{2v}(s) = 0$ ve (4.25) eşitlikleri birlikte kullanılırsa $-k_2\lambda = 0$ elde edilir. $k_2 \neq 0$ olduğundan dolayı da $\lambda = 0$, yani $v = \pm N_1(s)$ olarak bulunur.

(3) Kabul edelim ki $h_{2v}(s) = h'_{2v}(s) = h''_{2v}(s) = 0$ olsun. (4.26) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$h''_{2v}(s) = -k'_2 \langle T, v \rangle - (k_1k_2) \langle N_1, v \rangle - k_2^2 \langle N_2, v \rangle \quad (4.27)$$

eşitliği elde edilir. $h''_{2v}(s) = 0$ ve $v = \pm N_1(s)$ olduğu göz önüne alınırsa $-k_1k_2 = 0$ elde edilir. Ayrıca $k_2 \neq 0$ olduğundan dolayı $k_1 = 0$ olmak zorundadır.

(4) Kabul edelim ki $h_{2v}(s) = h'_{2v}(s) = h''_{2v}(s) = h'''_{2v}(s) = 0$ olsun. (4.27) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve düzenlenirse

$$h'''_{2v}(s) = (-k''_2 + k_2^3 + k_2k_1^2) < T, v > + (-2k'_2k_1 - k_2k'_1) < N_1, v > - 3k_2k'_2 < N_2, v > \quad (4.28)$$

olur. $h'''_v(s) = 0$ ve (4.28) denklemi göz önüne alınırsa

$$(-k''_2 + k_2^3 + k_2k_1^2) < T, v > + (-2k'_2k_1 - k_2k'_1) < N_1, v > - 3k_2k'_2 < N_2, v > = 0 \quad (4.29)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $v = \pm N_1(s)$ olduğu bilindiğinden (4.29) un düzenlenmesiyle

$$-2k'_2k_1 - k_2k'_1 = 0$$

elde edilir ve $k_1 = 0$ olduğundan $-k'_1k_2 = 0$ sağlanır. Bu ise $k_2 \neq 0$ gerçekleştiğinden dolayı $k'_1 = 0$ olmasını gerektirir. Bu da ispatı tamamlar.

(C)(1) (4.16) denkleminde dolayı

$$g_{1v}(s) = < \zeta_1, v > \quad (4.30)$$

olur. Bu durumda $< \zeta_1, v > = 0$ yani

$$v = \lambda B + \mu \zeta_2 \quad (4.31)$$

elde edilir. Burada $v \in S^2$ olduğundan dolayı λ ve μ , $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ olacak şekildeki reel sayılardır.

(2) Kabul edelim ki $g_{1v}(s) = g'_{1v}(s) = 0$ olsun. (4.30) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve Bishop formülleri kullanılırsa

$$g'_{1v}(s) = < -\varepsilon_1 B, v > \quad (4.32)$$

eşitliği elde edilir. $g'_{1v}(s) = 0$ ve (4.31) eşitlikleri birlikte kullanılırsa $-\varepsilon_1 \lambda = 0$ elde

edilir. $\varepsilon_1 \neq 0$ olduğundan dolayı da $\lambda = 0$, yani $v = \pm\zeta_2(s)$ olarak bulunur.

(3) Kabul edelim ki $g_{1v}(s) = g'_{1v}(s) = g''_{1v}(s) = 0$ olsun. (4.32) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g''_{1v}(s) = -\varepsilon_1^2 \langle \zeta_1, v \rangle - (\varepsilon_1 \varepsilon_2) \langle \zeta_2, v \rangle - \varepsilon_1' \langle B, v \rangle \quad (4.33)$$

eşitliği elde edilir. $g''_{1v}(s) = 0$ ve $v = \pm\zeta_2(s)$ olduğu göz önüne alınır $-\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$ elde edilir. Ayrıca $\varepsilon_1 \neq 0$ olduğundan dolayı $\varepsilon_2 = 0$ olmak zorundadır.

(4) Kabul edelim ki $g_{1v}(s) = g'_{1v}(s) = g''_{1v}(s) = g'''_{1v}(s) = 0$ olsun. (4.33) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve düzenlenirse

$$g'''_{1v}(s) = -3\varepsilon_1 \varepsilon_1' \langle \zeta_1, v \rangle - (2\varepsilon_1' \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2') \langle \zeta_2, v \rangle + (\varepsilon_1^3 - \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1'') \langle B, v \rangle \quad (4.34)$$

olur. $g'''_{1v}(s) = 0$ ve (4.34) denklemi göz önüne alınır

$$-3\varepsilon_1 \varepsilon_1' \langle \zeta_1, v \rangle - (2\varepsilon_1' \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2') \langle \zeta_2, v \rangle + (\varepsilon_1^3 - \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1'') \langle B, v \rangle = 0 \quad (4.35)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $v = \pm\zeta_2(s)$ olduğu bilindiğinden (4.35) in düzenlenmesiyle

$$-(2\varepsilon_1' \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2') = 0$$

elde edilir. (3) den dolayı $\varepsilon_2 = 0$ olduğu bilindiğinden $\varepsilon_1 \varepsilon_2' = 0$ elde edilir. Bu ise $\varepsilon_1 \neq 0$ gerçekleştiğinden dolayı $\varepsilon_2' = 0$ olmasını gerektirir. Bu da ispatı tamamlar.

(D) (1) (4.17) denkleminde dolayı

$$g_{2v}(s) = \langle \zeta_2, v \rangle \quad (4.36)$$

olur. Bu durumda $g_{2v}(s) = 0$ ise $\langle \zeta_2, v \rangle = 0$ yani

$$v = \lambda B + \mu \zeta_1 \quad (4.37)$$

elde edilir. Burada $v \in S^2$ olduğundan dolayı λ ve μ , $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ olacak şekildeki reel sayılardır.

(2) Kabul edelim ki $g_{2v}(s) = g'_{2v}(s) = 0$ olsun. (4.36) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve Bishop formülleri kullanılırsa

$$g'_{2v}(s) = \langle -\varepsilon_2 B, v \rangle \quad (4.38)$$

eşitliği elde edilir. $g'_{2v}(s) = 0$ ve (4.38) eşitlikleri birlikte kullanılırsa $-\varepsilon_2 \lambda = 0$ elde edilir. $\varepsilon_2 \neq 0$ olduğundan dolayıda $\lambda = 0$, yani $v = \pm \zeta_1(s)$ olarak bulunur.

(3) Kabul edelim ki $g_{2v}(s) = g'_{2v}(s) = g''_{2v}(s) = 0$ olsun. (4.38) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g''_{2v}(s) = -(\varepsilon_1 \varepsilon_2) \langle \zeta_1, v \rangle - \varepsilon_2^2 \langle \zeta_2, v \rangle - \varepsilon_2' \langle B, v \rangle \quad (4.39)$$

eşitliği elde edilir. $g''_{2v}(s) = 0$ ve $v = \pm \zeta_1(s)$ olduğu göz önüne alınırsa $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$ elde edilir. Ayrıca $\varepsilon_2 \neq 0$ olduğundan dolayı $\varepsilon_1 = 0$ olmak zorundadır.

(4) Kabul edelim ki $g_{2v}(s) = g'_{2v}(s) = g''_{2v}(s) = g'''_{2v}(s) = 0$ olsun. (4.39) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınır ve düzenlenirse

$$g'''_{2v}(s) = -(2\varepsilon_1 \varepsilon_2' + \varepsilon_1' \varepsilon_2) \langle \zeta_1, v \rangle - 3(\varepsilon_2 \varepsilon_2') \langle \zeta_2, v \rangle + (\varepsilon_2^3 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 - \varepsilon_1'') \langle B, v \rangle \quad (4.40)$$

olur. $g'''_{2v}(s) = 0$ ve (4.40) denklemi göz önüne alınırsa

$$-(2\varepsilon_1 \varepsilon_2' + \varepsilon_1' \varepsilon_2) \langle \zeta_1, v \rangle - 3(\varepsilon_2 \varepsilon_2') \langle \zeta_2, v \rangle + (\varepsilon_2^3 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 - \varepsilon_1'') \langle B, v \rangle = 0 \quad (4.41)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $v = \pm \zeta_1(s)$ olduğu bilindiğinden (4.41) in düzenlenmesiyle

$$-(2\varepsilon_1 \varepsilon_2' + \varepsilon_1' \varepsilon_2) = 0$$

elde edilir. (3) den dolayı $\varepsilon_1 = 0$ olduğu bilindiğinden $-\varepsilon_1' \varepsilon_2$ elde edilir. Bu ise

$\varepsilon_2 \neq 0$ gerçektlendiğinden dolayı $\varepsilon'_1 = 0$ olmasını gerektirir. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 4.4.6 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri olsun, o zaman aşağıdaki iddialar gerçektlenir.

(1) Kabul edelim ki $k_1(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda $k_2(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $v = \pm N_2$ vektörünün sabit vektör olmasıdır.

(2) Kabul edelim ki $k_2(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda $k_1(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $v = \pm N_1$ vektörünün sabit vektör olmasıdır.

(3) Kabul edelim ki $\varepsilon_1(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\varepsilon_2(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $v = \pm \zeta_2(s)$ vektörünün sabit vektör olmasıdır

(4) Kabul edelim ki $\varepsilon_2(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\varepsilon_1(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $v = \pm \zeta_1(s)$ vektörünün sabit vektör olmasıdır (Liu ve Pei 2013).

İspat: (1) Kabul edelim ki $k_1(s) \neq 0$ olsun, doğrudan hesaplamayla

$$v' = \pm k_2(s)T(s)$$

olduğu kolayca görülür. Bu yüzden $v'(s) \equiv 0$ olması için gerek ve yeter koşul $k_2(s) = 0$ olmasıdır.

(2) Kabul edelim ki $k_2(s) \neq 0$ olsun, doğrudan hesaplamayla

$$v' = \pm k_1(s)T(s)$$

olduğu kolayca görülür. Bu yüzden $v'(s) \equiv 0$ olması için gerek ve yeter koşul $k_1(s) = 0$ olmasıdır.

(3) Kabul edelim ki $\varepsilon_1(s) \neq 0$ olsun, doğrudan hesaplamayla

$$v' = \pm \varepsilon_2(s)B(s)$$

olduğu kolayca görülür. Bu yüzden $v'(s) \equiv 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\varepsilon_2(s) = 0$ olmasıdır.

(4) Kabul edelim ki $\varepsilon_2(s) \neq 0$ olsun, doğrudan hesaplamayla

$$v' = \pm \varepsilon_1(s)B(s)$$

olduğu kolayca görülür. Bu yüzden $v'(s) \equiv 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\varepsilon_1(s) = 0$ olmasıdır.

Önerme 4.4.7 (1) H_{N_1} ve H_{N_2} fonksiyonlarının zarf (diskriminant) cümleleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\mathfrak{D}_{H_{N_1}} = \{v = \pm N_2(s) \mid s \in I\}$$

$$\mathfrak{D}_{H_{N_1}} = \{v = \pm N_1(s) \mid s \in I\}$$

(2) H_{ζ_1} ve H_{ζ_2} fonksiyonlarının zarf (diskriminant) cümleleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\mathfrak{D}_{H_{\zeta_1}} = \{v = \pm \zeta_2(s) \mid s \in I\}$$

$$\mathfrak{D}_{H_{\zeta_2}} = \{v = \pm \zeta_1(s) \mid s \in I\}$$

(Liu ve Pei 2013).

Önerme 4.4.8 (1) Eğer $h_{1v_0}(s)$ fonksiyonu s_0 noktasında A_k singülerliğine sahipse ($k = 1, 2$) bu durumda $H_{N_1}(s, v)$ fonksiyonu, $h_{1v_0}(s)$ fonksiyonunun (p) -versal katlanmasıdır.

(2) Eğer $h_{2v_0}(s)$ fonksiyonu s_0 noktasında A_k singülerliğine sahipse ($k = 1, 2$) bu durumda $H_{N_2}(s, v)$ fonksiyonu, $h_{2v_0}(s)$ fonksiyonunun (p) -versal katlanmasıdır.

(3) Eğer $g_{1v_0}(s)$ fonksiyonu s_0 noktasında A_k singülerliğine sahipse ($k = 1, 2$) bu durumda $H_{\zeta_1}(s, v)$ fonksiyonu, $g_{1v_0}(s)$ fonksiyonunun (p) -versal katlanmasıdır.

(4) Eğer $g_{2v_0}(s)$ fonksiyonu s_0 noktasında A_k singülerliğine sahipse ($k = 1, 2$) bu durumda $H_{\zeta_2}(s, v)$ fonksiyonu, $g_{2v_0}(s)$ fonksiyonunun (p) -versal katlanmasıdır (Liu ve Pei 2013).

İspat: (1) $N_1(s) = (n_{11}, n_{12}, n_{13})$ ve $v = (v_1, v_2, \pm \sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2})$ olmak üzere

Tanım 4.4.1 den dolayı

$$H_{N_1}(s, v) = n_{11}v_1 + n_{12}v_2 \pm n_{13}\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}$$

şeklindedir. Bu yüzden

$$\begin{aligned} \frac{dH_{N_1}}{dv_i} &= n_{1i}(s) \pm \frac{v_i n_{13}(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}}, i = 1, 2 \\ \frac{d}{ds} \frac{dH_{N_1}}{dv_i} &= n'_{1i}(s) \pm \frac{v_i n'_{13}(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}}, i = 1, 2 \\ \frac{d^2}{ds^2} \frac{dH_{N_1}}{dv_i} &= n''_{1i}(s) \pm \frac{v_i n''_{13}(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}}, i = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

eşitlikleri kolayca hesaplanabilir. Eğer $H_{N_1}(s, v)$ fonksiyonu A_k ($k = 1, 2$) singülerliğine sahipse

$$v_1 n'_{11}(s) + v_2 n'_{12}(s) + \sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2} n'_{13}(s) = 0 \quad (4.43)$$

eşitliği sağlanmaktadır. Ayrıca $(\frac{dH_{N_1}}{dv_i})(s, v)$ fonksiyonunun s_0 noktasındaki 2. dereceden jetleri

$$\begin{aligned} J^2\left(\frac{\partial H_{N_1}}{\partial v_1}(s, v_0)\right)(s_0) &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial H_{N_1}}{\partial v_1}(s - s_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial H_{N_1}}{\partial v_1}(s - s_0)^2 \\ &= \alpha_{11}(s - s_0) + \frac{1}{2} \alpha_{21}(s - s_0)^2 \\ J^2\left(\frac{\partial H_{N_1}}{\partial v_2}(s, v_0)\right)(s_0) &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial H_{N_1}}{\partial v_2}(s - s_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial H_{N_1}}{\partial v_2}(s - s_0)^2 \\ &= \alpha_{12}(s - s_0) + \frac{1}{2} \alpha_{22}(s - s_0)^2 \end{aligned} \quad (4.44)$$

şeklinde hesaplanır. $k = 1$ ve $k = 2$ değerleri için 2 farklı durum söz konusudur.

1.Durum: h_{1v_0, w_0} fonksiyonu A_1 singülerliğine sahipse (4.42) eşitliklerinin (4.44) de yerine yazılmasıyla katsayılar matrisi;

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} n'_{11}(s) \pm \frac{v_1 n'_{13}(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}} & n'_{12}(s) \pm \frac{v_2 n'_{13}(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}} \end{bmatrix}_{1 \times 2}$$

şeklindedir. Burada $\tilde{A}$ matrisinin elemanlarının kareleri toplamına bakılırsa ve (4.43)

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & (n'_{11}(s) \pm \frac{v_1 n'_{13}(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}})^2 + (n'_{12}(s) \pm \frac{v_2 n'_{13}(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}})^2 \\ &= (n'_{11}(s))^2 + (n'_{12}(s))^2 + (1 + \frac{1}{1-v_1^2-v_2^2})(n'_{13}(s))^2 \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $rank \tilde{A} = 1$ dir.

2.Durum: h_{1v_0, w_0} fonksiyonu A_2 singülerliğine sahipse (4.42) eşitliklerinin (4.44) de yerine yazılmasıyla katsayılar matrisi;

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} n'_{11}(s) \pm \frac{v_1 n'_{13}(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}} & n'_{12}(s) \pm \frac{v_2 n'_{13}(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}} \\ n''_{11}(s) \pm \frac{v_1 n''_{13}(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}} & n''_{12}(s) \pm \frac{v_2 n''_{13}(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

olarak bulunur. $v_3 = \sqrt{1-v_1^2-v_2^2}$ olduğu gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} det \tilde{B} &= (n''_{12} n'_{11} - n'_{12} n''_{11}) - \frac{v_1}{v_3} (n''_{12} n'_{13} - n'_{12} n''_{13}) - \frac{v_2}{v_3} (n''_{13} n'_{11} - n'_{13} n''_{11}) \\ &= \frac{1}{v_3} \langle v, N'_1(s) \wedge N''_1(s) \rangle \\ &= \frac{1}{v_3} \langle v, k_1^3(s) N_2(s) - k_1^2(s) k_2(s) N_1(s) \rangle \\ &= \frac{1}{v_3} \langle \pm N_2(s), k_1^3(s) N_2(s) - k_1^2(s) k_2(s) N_1(s) \rangle \\ &= \pm \frac{1}{v_3} k_1^3(s) \neq 0 \end{aligned}$$

olup $rank \tilde{B} = 2$ olarak bulunur. Burada $v \in \mathfrak{D}_{H_{N_1}}$ bir singüler noktadır ve $v = \pm N_2(s)$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

(2) (1) iddiasının ispatına benzer şekilde kolayca elde edilir.

(3) $\zeta_1(s) = (\zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{13})$ ve $v = (v_1, v_2, \pm \sqrt{1-v_1^2-v_2^2})$ olmak üzere

Tanım 4.4.3 den dolayı

$$H_{\zeta_1}(s, v) = \zeta_{11}v_1 + \zeta_{12}v_2 \pm \zeta_{13}\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}$$

şeklindedir. Bu yüzden

$$\begin{aligned} \frac{dH_{\zeta_1}}{dv_i} &= \zeta_{1i}(s) \pm \frac{v_i\zeta_{13}(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}}, i = 1, 2 \\ \frac{d}{ds} \frac{dH_{\zeta_1}}{dv_i} &= \zeta'_{1i}(s) \pm \frac{v_i\zeta'_{13}(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}}, i = 1, 2 \\ \frac{d^2}{ds^2} \frac{dH_{\zeta_1}}{dv_i} &= \zeta''_{1i}(s) \pm \frac{v_i\zeta''_{13}(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}}, i = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

dir. Eğer $H_{\zeta_1}(s, v)$ fonksiyonu $A_k(k = 1, 2)$ singülerliğine sahipse

$$v_1\zeta'_{11}(s) + v_2\zeta'_{12}(s) + \sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}\zeta'_{13}(s) = 0 \quad (4.46)$$

eşitliği sağlanmaktadır. $(\frac{dH_{\zeta_1}}{dv_i})(s, v)$ fonksiyonunun s_0 noktasındaki 2. dereceden jetleri;

$$\begin{aligned} J^2\left(\frac{\partial H_{\zeta_1}}{\partial v_1}(s, v_0)\right)(s_0) &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial H_{\zeta_1}}{\partial v_1}(s - s_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial H_{\zeta_1}}{\partial v_1}(s - s_0)^2 \\ &= \alpha_{11}(s - s_0) + \frac{1}{2}\alpha_{21}(s - s_0)^2 \\ J^2\left(\frac{\partial H_{\zeta_1}}{\partial v_2}(s, v_0)\right)(s_0) &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial H_{\zeta_1}}{\partial v_2}(s - s_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial H_{\zeta_1}}{\partial v_2}(s - s_0)^2 \\ &= \alpha_{12}(s - s_0) + \frac{1}{2}\alpha_{22}(s - s_0)^2 \end{aligned} \quad (4.47)$$

şeklinde hesaplanır. $k = 1$ ve $k = 2$ değerleri için 2 farklı durum söz konusudur.

1.Durum: g_{1v_0, w_0} fonksiyonu A_1 singülerliğine sahipse (4.45) eşitliklerinin (4.47) da yerine yazılmasıyla katsayılar matrisi;

$$\tilde{\mathbb{A}} = \left[\begin{array}{cc} \zeta'_{11}(s) \pm \frac{v_1\zeta'_{13}(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}} & \zeta'_{12}(s) \pm \frac{v_2\zeta'_{13}(s)}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}} \end{array} \right]_{1 \times 2}$$

olarak bulunur. Burada $\tilde{\mathbb{A}}$ matrisinin elemanlarının kareleri toplamına bakılırsa ve

(4.46) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & (\zeta'_{11}(s) \pm \frac{v_1 \zeta'_{13}(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}})^2 + (\zeta'_{12}(s) \pm \frac{v_2 \zeta'_{13}(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}})^2 \\ &= (\zeta'_{11}(s))^2 + (\zeta'_{12}(s))^2 + (1 + \frac{1}{1-v_1^2-v_2^2})(\zeta'_{13}(s))^2 \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $rank \tilde{\mathbb{A}} = 1$ dir.

2.Durum: g_{1v_0, w_0} fonksiyonu A_2 singülerliğine sahipse (4.45) eşitliklerinin (4.47) da yerine yazılmasıyla katsayılar matrisi;

$$\tilde{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} \zeta'_{11}(s) \pm \frac{v_1 \zeta'_{13}(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}} & \zeta'_{12}(s) \pm \frac{v_2 \zeta'_{13}(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}} \\ \zeta''_{11}(s) \pm \frac{v_1 \zeta''_{13}(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}} & \zeta''_{12}(s) \pm \frac{v_2 \zeta''_{13}(s)}{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

şeklinde elde edilir. $v_3 = \sqrt{1-v_1^2-v_2^2}$ olduğu gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} det \tilde{\mathbb{B}} &= (\zeta''_{12} \zeta'_{11} - \zeta'_{12} \zeta''_{11}) - \frac{v_1}{v_3} (\zeta''_{12} \zeta'_{13} - \zeta'_{12} \zeta''_{13}) - \frac{v_2}{v_3} (\zeta''_{13} \zeta'_{11} - \zeta'_{13} \zeta''_{11}) \\ &= \frac{1}{v_3} \langle v, \zeta'_1(s) \wedge \zeta''_1(s) \rangle \\ &= \frac{1}{v_3} \langle v, \varepsilon_1^3(s) \zeta_2(s) - \varepsilon_1^2(s) \varepsilon_2(s) \zeta_1(s) \rangle \\ &= \frac{1}{v_3} \langle \pm \zeta_2(s), \varepsilon_1^3(s) \zeta_2(s) - \varepsilon_1^2(s) \varepsilon_2(s) \zeta_1(s) \rangle \\ &= \pm \frac{1}{v_3} \varepsilon_1^3(s) \neq 0 \end{aligned}$$

olup $rank \tilde{\mathbb{B}} = 2$ olarak bulunur. Burada $v \in \mathfrak{D}_{H_{\zeta_1}}$ bir singüler noktadır ve $v = \pm \zeta_2(s)$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

(4) (3) iddiasının ispatına benzer şekilde kolayca elde edilir.

4.5 Singülerite Derecelerine Göre N_1 , N_2 , ζ_1 ve ζ_2 Göstergelerinin Sınıflandırılması

Teorem 4.5.1 (Ana Teorem) $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. O zaman aşağıdaki önermeler gerçekleşir.

(1) Kabul edelim ki $k_2(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialardan biri gerçekleşir.

(a) $N_1(s)$ Bishop küresel göstergesi s_0 noktasında $\{0\} \times \mathbb{R}$ doğrusuna lokal difeomorfiktir $\iff k_1(s) \neq 0$ dır

(b) $N_1(s)$ Bishop küresel göstergesi s_0 noktasında C (adi cusp) cümlesine lokal difeomorfiktir $\iff k_1(s) = 0$ ve $k'_1(s) \neq 0$ dır

(2) Kabul edelim ki $k_1(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialardan biri gerçekleşir.

(a) $N_2(s)$ Bishop küresel göstergesi s_0 noktasında $\{0\} \times \mathbb{R}$ doğrusuna lokal difeomorfiktir $\iff k_2(s) \neq 0$ dır

(b) $N_2(s)$ Bishop küresel göstergesi s_0 noktasında C (adi cusp) cümlesine lokal difeomorfiktir $\iff k_2(s) = 0$ ve $k'_2(s) \neq 0$ dır.

(3) Kabul edelim ki $\varepsilon_2(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialardan biri gerçekleşir.

(a) $\zeta_1(s)$ 2. tip Bishop küresel göstergesi s_0 noktasında $\{0\} \times \mathbb{R}$ doğrusuna lokal difeomorfiktir $\iff \varepsilon_1(s) \neq 0$ dır

(b) $\zeta_1(s)$ 2. tip Bishop küresel göstergesi s_0 noktasında C (adi cusp) cümlesine lokal difeomorfiktir $\iff \varepsilon_1(s) = 0$ ve $\varepsilon'_1(s) \neq 0$ dır.

(3) Kabul edelim ki $\varepsilon_1(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialardan biri gerçekleşir.

(a) $\zeta_2(s)$ 2. tip Bishop küresel göstergesi s_0 noktasında $\{0\} \times \mathbb{R}$ doğrusuna lokal difeomorfiktir $\iff \varepsilon_2(s) \neq 0$ dır.

(b) $\zeta_2(s)$ 2. tip Bishop küresel göstergesi s_0 noktasında C (adi cusp) cümlesine lokal difeomorfiktir $\iff \varepsilon_2(s) = 0$ ve $\varepsilon'_2(s) \neq 0$ dır (Liu ve Pei 2013).

İspat: (1)(a) $H_{N_2}(s, v)$ fonksiyonu (p) -versal katlanma ve $\mathfrak{D}_{H_{N_2}} = \pm N_1(s)$ olduğundan dolayı $n = 2$ ve $k = 1$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılarak $N_1(s)$ Bishop küresel göstergesinin s_0 noktasında $\{0\} \times \mathbb{R}$ doğrusuna lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul $k_1(s) \neq 0$ olmasıdır.

(b) $H_{N_2}(s, v)$ fonksiyonu (p) -versal katlanma ve $\mathfrak{D}_{H_{N_2}} = \pm N_1(s)$ olduğundan dolayı $n = 2$ ve $k = 2$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılarak $N_1(s)$ Bishop küresel göstergesinin s_0 noktasında C (adi cusp) cümlesine lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul $k_1(s) = 0$ ve $k'_1(s) \neq 0$ olmasıdır.

(2)(a) $H_{N_1}(s, v)$ fonksiyonu (p) -versal katlanma ve $\mathfrak{D}_{H_{N_1}} = \pm N_2(s)$ olduğundan dolayı $n = 2$ ve $k = 1$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılarak $N_2(s)$ Bishop küresel göstergesinin s_0 noktasında $\{0\} \times \mathbb{R}$ doğrusuna lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul $k_2(s) \neq 0$ olmasıdır.

(b) $H_{N_1}(s, v)$ fonksiyonu (p) -versal katlanma ve $\mathfrak{D}_{H_{N_1}} = \pm N_2(s)$ olduğundan dolayı $n = 2$ ve $k = 2$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılarak $N_2(s)$ Bishop küresel göstergesinin s_0 noktasında C (adi cusp) cümlesine lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul $k_2(s) = 0$ ve $k'_2(s) \neq 0$ olmasıdır.

(3)(a) $H_{\zeta_2}(s, v)$ fonksiyonu (p) -versal katlanma ve $\mathfrak{D}_{H_{\zeta_2}} = \pm \zeta_1(s)$ olduğundan dolayı $n = 2$ ve $k = 1$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılarak $\zeta_1(s)$ 2. tip Bishop küresel göstergesinin s_0 noktasında $\{0\} \times \mathbb{R}$ doğrusuna lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul $\varepsilon_1(s) \neq 0$ olmasıdır.

(b) $H_{\zeta_2}(s, v)$ fonksiyonu (p) -versal katlanma ve $\mathfrak{D}_{H_{\zeta_2}} = \pm \zeta_1(s)$ olduğundan dolayı $n = 2$ ve $k = 2$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılarak $\zeta_1(s)$ 2. tip Bishop küresel göstergesinin s_0 noktasında C (adi cusp) cümlesine lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul $\varepsilon_1(s) = 0$ ve $\varepsilon'_1(s) \neq 0$ olmasıdır.

(4)(a) $H_{\zeta_1}(s, v)$ fonksiyonu (p) -versal katlanma ve $\mathfrak{D}_{H_{\zeta_1}} = \pm \zeta_2(s)$ olduğundan dolayı $n = 2$ ve $k = 1$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılarak $\zeta_2(s)$ 2. tip Bishop küresel göstergesinin s_0 noktasında $\{0\} \times \mathbb{R}$ doğrusuna lokal difeomorfik olması için gerek ve yeter koşul $\varepsilon_2(s) \neq 0$ olmasıdır.

(b) $H_{\zeta_1}(s, v)$ fonksiyonu (p) -versal katlanma ve $\mathfrak{D}_{H_{\zeta_1}} = \pm \zeta_2(s)$ olduğundan dolayı $n = 2$ ve $k = 2$ durumunda Teorem 3.3.1 kullanılarak $\zeta_2(s)$ 2. tip Bishop küresel göstergesinin s_0 noktasında C (adi cusp) cümlesine lokal difeomorfik olması için

gerek ve yeter koşul $\varepsilon_2(s) = 0$ ve $\varepsilon_2'(s) \neq 0$ olmasıdır.

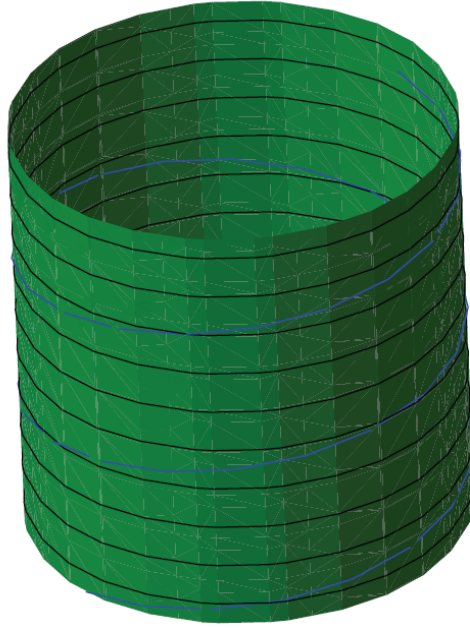
Bu da teoremi ispatlar.

Ana sonuç Teorem 4.5.1 in uygulamaları ve örneği olarak iki örnek verelim.

Örnek 4.5.2 $\alpha(s)$, E^3 de

$$\alpha(s) = (3 \cos \frac{1}{5}s, 3 \sin \frac{1}{5}s, \frac{4}{5}s)$$

şeklinde s yay parametresi ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Burada $s \in [0, 50\pi]$ dir (Şekil 4.10).



Şekil 4.10 $\alpha(s)$ helis eğrisi

$\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla

$$\kappa(s) = \frac{3}{25}$$

$$\tau(s) = \frac{4}{25}$$

şeklindedir. $\alpha(s)$ eğrisinin Bishop eğrilik denklemleri kullanılarak

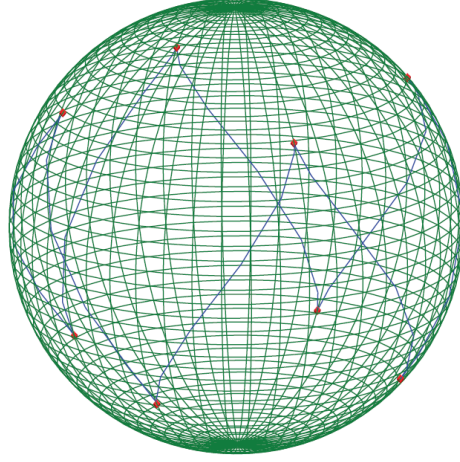
$$k_1(s) = \frac{3}{25} \cos\left(\frac{4}{25}s\right)$$

$$k_2(s) = \frac{3}{25} \sin\left(\frac{4}{25}s\right)$$

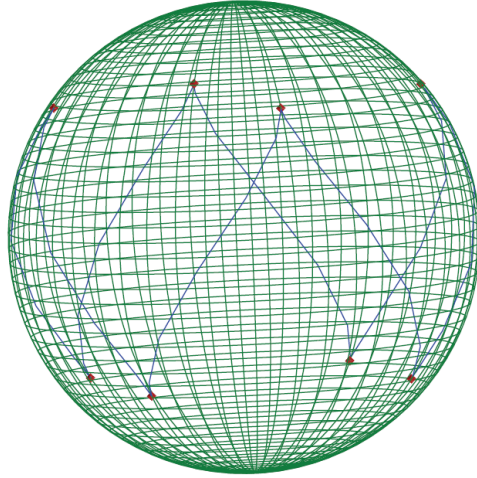
$$\varepsilon_1(s) = -\frac{4}{25} \cos\left(\frac{3}{25}s\right)$$

$$\varepsilon_2(s) = -\frac{4}{25} \sin\left(\frac{3}{25}s\right)$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.11 $\alpha(s)$ eğrisinin sekiz cusp noktasına sahip $N_1(s)$ küresel göstergesi



Şekil 4.12 $\alpha(s)$ eğrisinin sekiz cusp noktasına sahip $N_2(s)$ küresel göstergesi

$\alpha(s)$ eğrisinin Bishop göstergeleri $\{N_1, N_2\}$ ve 2. tip Bishop göstergeleri $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} N_1(s) = & \left(-\cos\left(\frac{4}{25}s\right) \cos(15s) - \frac{4}{5} \sin\left(\frac{4}{25}s\right) \sin\left(\frac{1}{5}s\right), \right. \\ & -\cos\left(\frac{4}{25}s\right) \sin(15s) + \frac{4}{5} \sin\left(\frac{4}{25}s\right) \cos\left(\frac{1}{5}s\right), \\ & \left. -\frac{3}{5} \sin\left(\frac{4}{25}s\right) \right) \end{aligned}$$

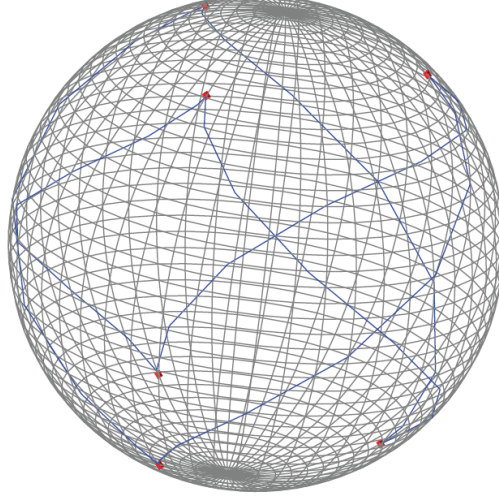
$$\begin{aligned} N_2(s) = & \left(-\sin\left(\frac{4}{25}s\right) \cos(15s) + \frac{4}{5} \cos\left(\frac{4}{25}s\right) \sin\left(\frac{1}{5}s\right), \right. \\ & -\sin\left(\frac{4}{25}s\right) \sin(15s) - \frac{4}{5} \cos\left(\frac{4}{25}s\right) \cos\left(\frac{1}{5}s\right), \\ & \left. \frac{3}{5} \cos\left(\frac{4}{25}s\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_1(s) = & \left(-\frac{3}{5} \sin\left(\frac{3}{25}s\right) \sin(15s) - \cos\left(\frac{3}{25}s\right) \cos\left(\frac{1}{5}s\right), \right. \\ & \frac{3}{5} \sin\left(\frac{3}{25}s\right) \cos(15s) - \cos\left(\frac{3}{25}s\right) \sin\left(\frac{1}{5}s\right), \\ & \left. \frac{4}{5} \sin\left(\frac{3}{25}s\right) \right) \end{aligned}$$

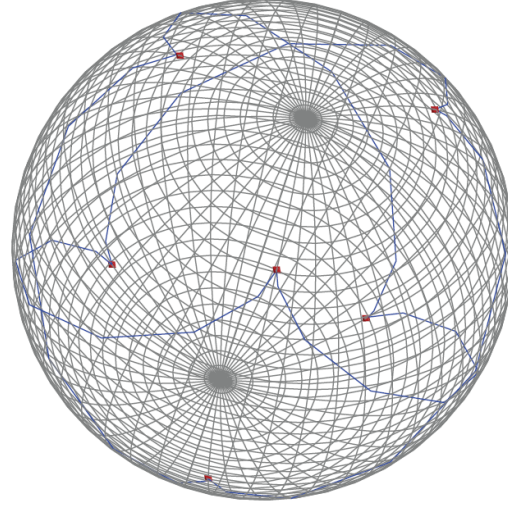
$$\begin{aligned} \zeta_2(s) = & \left(\frac{3}{5} \cos\left(\frac{3}{25}s\right) \sin(15s) - \sin\left(\frac{3}{25}s\right) \cos\left(\frac{1}{5}s\right), \right. \\ & -\frac{3}{5} \cos\left(\frac{3}{25}s\right) \cos(15s) - \sin\left(\frac{3}{25}s\right) \sin\left(\frac{1}{5}s\right), \\ & \left. -\frac{4}{5} \cos\left(\frac{3}{25}s\right) \right) \end{aligned}$$

Bazı reel kökler $s = \frac{25}{4}k\pi + \frac{25}{8}\pi$ için $k_1(s) = 0$ ve bazı reel kökler $s = \frac{25}{4}k\pi$ için $k'_1(s) = 0$ olduğunu görebiliriz. Diğer yandan bazı reel kökler $s = \frac{25}{4}k\pi$ için $k_2(s) = 0$ ve bazı reel kökler $s = \frac{25}{4}k\pi + \frac{25}{8}\pi$ için $k'_2(s) = 0$ olduğunu görebiliriz ($k = 0, 1, \dots, 7$). $s = \frac{25}{4}k\pi + \frac{25}{8}\pi$ durumu için $k_1(s) = 0$ ve $k'_1(s) \neq 0$ dır. Bu yüzden $N_1(s)$ Bishop göstergesi Cusp a lokal difeomorfiktir ve 8 cusp noktası vardır (Şekil 4.11), ayrıca $N_2(s)$ Bishop göstergesi $s = \frac{25}{4}k\pi$ noktalarında Cusp a lokal difeomorfiktir ve 8 cusp noktası vardır (Şekil 4.12). $s = \frac{25}{3}k\pi + \frac{25}{6}\pi$ durumu için

$\varepsilon_1(s) = 0$ ve $\varepsilon_1(s) \neq 0$ dır ($k = 0, \dots, 5$). Bu yüzden $\zeta_1(s)$ 2. tip Bishop göstergesi Cusp a lokal difeomorfiktir ve 6 cusp noktası vardır (Şekil 4.13). Ayrıca $\zeta_2(s)$ 2. tip Bishop göstergesi, $s = \frac{25}{3}k\pi$ noktalarında Cusp a lokal difeomorfiktir ve 6 cusp noktası vardır (Şekil 4.14). (Şekil 4.10- 4.14) (Liu ve Pei 2013).



Şekil 4.13 $\alpha(s)$ eğrisinin altı cusp noktasına sahip $\zeta_1(s)$ küresel göstergesi

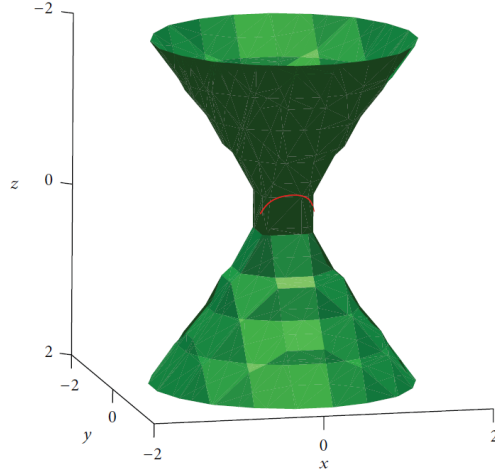


Şekil 4.14 $\alpha(s)$ eğrisinin altı cusp noktasına sahip $\zeta_2(s)$ küresel göstergesi

Örnek 4.5.3 $\psi(s)$, E^3 de

$$\psi(s) = \left(\frac{2}{5} \sin 2s - \frac{1}{40} \sin 8s, -\frac{2}{5} \cos 2s + \frac{1}{40} \cos 8s, \frac{4}{15} \sin 3s \right)$$

şeklinde s yay parametresi ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Burada $s \in [0.34\pi, 0.66\pi]$ dir (Şekil 4.15).



Şekil 4.15 $\psi(s)$ eğrisi

$\psi(s)$ eğrisinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla

$$\kappa(s) = -4 \sin 3s$$

$$\tau(s) = 4 \cos 3s$$

şeklindedir. $\psi(s)$ eğrisinin Bishop eğrilik denklemleri kullanılarak

$$k_1(s) = -4 \sin(3s) \cos\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right)$$

$$k_2(s) = -4 \sin(3s) \sin\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right)$$

$$\varepsilon_1(s) = -4 \cos(3s) \cos\left(\frac{4}{3} \cos 3s\right)$$

$$\varepsilon_2(s) = -4 \cos(3s) \sin\left(\frac{4}{3} \cos 3s\right)$$

olarak elde edilir.

$\psi(s)$ eğrisinin Bishop göstergeleri $\{N_1, N_2\}$ ve Bishop 2. tip göstergeleri $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

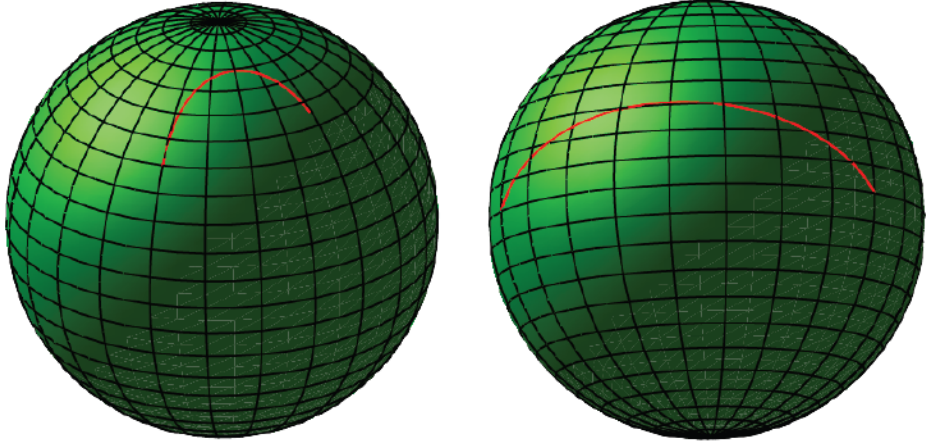
$$\begin{aligned}
N_1(s) = & \frac{1}{\sqrt{\sin^2 s (4 \cos^2 s - 1)^2}} ((\sin 8s - \sin 2s) \left(\frac{2}{5} \cos\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) - \frac{3}{25} \sin\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \sin 3s \right) \\
& + \frac{24}{125} \sin\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \cos 3s (\cos 8s - \cos 2s)), \\
& \frac{2}{5} \cos\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) (\cos 2s - \cos 8s) - \sin\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \left(\frac{8}{25} \cos 3s (\sin 8s - \sin 2s) \right. \\
& + \left(\frac{12}{25} \cos 2s - \frac{3}{25} \cos 8s \right) \sin 3s), \\
& - \frac{3}{5} \cos\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \sin 3s - \sin\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \left(\left(\frac{8}{25} \cos 2s - \frac{2}{25} \cos 8s \right) (\cos 2s - \cos 8s) \right. \\
& + \left. \left(\frac{8}{25} \sin 2s - \frac{2}{25} \sin 8s \right) (\sin 2s - \sin 8s) \right))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2(s) = & \frac{1}{\sqrt{\sin^2 s (4 \cos^2 s - 1)^2}} \left(\frac{2}{5} (\sin 8s - \sin 2s) \sin\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \right. \\
& + \cos\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \left(\frac{3}{25} \sin 8s - \frac{12}{25} \sin 2s \right) \sin 3s - \frac{8}{25} \cos 3s (\cos 2s - \cos 8s), \\
& \frac{2}{5} (\cos 2s - \cos 8s) \sin\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) + \cos\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \left(\frac{8}{25} \cos 3s (\sin 8s - \sin 2s) \right) \\
& + \left(\frac{12}{25} \cos 2s - \frac{3}{25} \cos 8s \right) \sin 3s), \\
& - \frac{3}{5} \sin\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \sin 3s + \cos\left(\frac{4}{3} \sin 3s\right) \left(\left(\frac{8}{25} \cos 2s - \frac{2}{25} \cos 8s \right) (\cos 2s - \cos 8s) \right. \\
& - \left. \left(\frac{8}{25} \sin 2s - \frac{2}{25} \sin 8s \right) (\sin 8s - \sin 2s) \right))
\end{aligned}$$

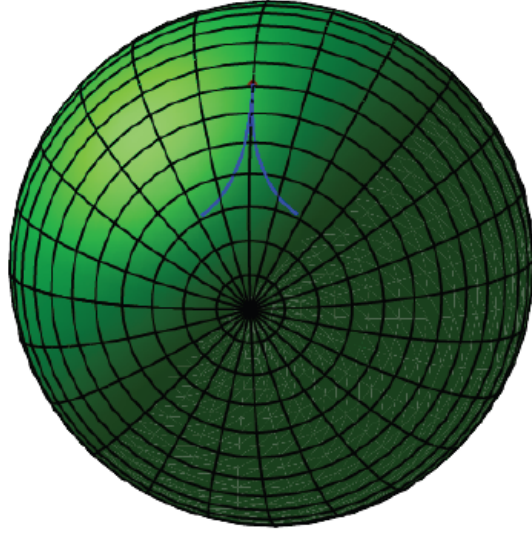
$$\begin{aligned}
\zeta_1(s) = & \left(\sin\left(\frac{4}{3} \cos 3s\right) \left(\frac{4}{5} \cos 2s - \frac{1}{5} \cos 8s \right) \right. \\
& + \frac{1}{\sqrt{\sin^2 s (4 \cos^2 s - 1)^2}} \left(\frac{1}{4} \cos\left(\frac{4}{3} \cos 3s\right) \left(-\frac{8}{5} \sin 2s + \frac{8}{5} \sin 8s \right), \right. \\
& \left. \sin\left(\frac{4}{3} \cos 3s\right) \left(\frac{4}{5} \sin 2s - \frac{1}{5} \sin 8s \right) \right. \\
& + \frac{1}{\sqrt{\sin^2 s (4 \cos^2 s - 1)^2}} \left(\frac{1}{4} \cos\left(\frac{4}{3} \cos 3s\right) \left(\frac{8}{5} \cos 2s - \frac{8}{5} \cos 8s \right), \right. \\
& \left. \frac{4}{5} \sin\left(\frac{4}{3} \cos 3s\right) \cos 3s \right. \\
& - \left. \frac{1}{\sqrt{\sin^2 s (4 \cos^2 s - 1)^2}} \left(\frac{3}{5} \cos \frac{4}{3} \cos 3s \right) \sin 3s \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_2(s) = & (-\cos(\frac{4}{3}\cos 3s)(\frac{4}{5}\cos 2s - \frac{1}{5}\cos 8s) \\
& + \frac{1}{\sqrt{\sin^2 s(4\cos^2 s - 1)^2}}(\frac{1}{4}\sin(\frac{4}{3}\cos 3s))(-\frac{8}{5}\sin 2s + \frac{8}{5}\sin 8s), \\
& -\cos(\frac{4}{3}\cos 3s)(\frac{4}{5}\sin 2s - \frac{1}{5}\sin 8s) \\
& + \frac{1}{\sqrt{\sin^2 s(4\cos^2 s - 1)^2}}(\frac{1}{4}\sin(\frac{4}{3}\cos 3s))(\frac{8}{5}\cos 2s - \frac{8}{5}\cos 8s), \\
& -\frac{4}{5}\cos(\frac{4}{3}\cos 3s)\cos 3s \\
& - \frac{1}{\sqrt{\sin^2 s(4\cos^2 s - 1)^2}}(\frac{3}{5}\sin \frac{4}{3}\cos 3s)\sin 3s))
\end{aligned}$$

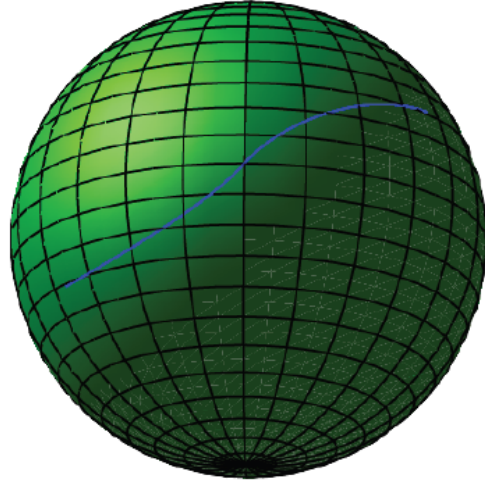
Bazı reel kökler $s = \frac{1}{3}k\pi$ için $k_1(s) = 0$ ve bazı reel kökler $s = \frac{1}{3}k\pi + \frac{\pi}{6}$ için $k'_1(s) = 0$ olduğunu görebiliriz. $s \in [0.34\pi, 0.66\pi]$ için $k'_1(s) \neq 0$ ve $k'_2(s) \neq 0$ dır. Bu yüzden $N_1(s)$ ve $N_2(s)$ bir doğruya lokal difeomorfiktir. Bishop göstergelerinin resimleri Şekil 4.16 de gösterilmiştir. $s = \frac{1}{2}\pi$ için $\varepsilon_1(s) = 0$ ve $\varepsilon_1(s) \neq 0$ dır. Bu yüzden $\zeta_1(s)$ 2. tip Bishop göstergesi Cusp a lokal difeomorfiktir (Şekil 4.17). Ayrıca $\zeta_2(s)$ 2. tip Bishop göstergesi Cusp a lokal difeomorfik değildir (Şekil 4.18). (Şekil 4.15- 4.18) (Liu ve Pei 2013).



Şekil 4.16 $\psi(s)$ eğrisinin $N_1(s)$ ve $N_2(s)$ küresel göstergeleri



Şekil 4.17 $\psi(s)$ eğrisinin $\zeta_1(s)$ küresel göstergesi



Şekil 4.18 $\psi(s)$ eğrisinin $\zeta_2(s)$ küresel göstergesi

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezin 3. ve 4. bölümlerinde Frenet ve Bishop çatılarına göre verilen uzay eğrilerinin farklı yükseklik fonksiyonları elde edilip bu fonksiyonlar yardımıyla singülerite dereceleri ile küresel Darboux göstergesi, Modifiye Darboux vektörü ve modifiye Darboux vektörünün farklı bir hali olan 2. tip modifiye Darboux vektörü arasındaki ilişkiler belirlenmiştir. Bu ilişkiler yardımıyla eğrilerin küresel Darboux göstergeleri ve eğriler ile Darboux vektörleri tarafından elde edilen bazı özel yüzeylerin singülerite derecelerine göre yerel olarak denk olduğu eğri ve yüzey cümleleri gösterilmiştir.

Ayrıca tezde bazı eğri örnekleri ele alınmış ve bu eğrilerin küresel darboux göstergesi ile eğri yardımıyla oluşturulan yüzeyler bulunmuş ve bu ailelerin denk olduğu cümleler elde edilip görsellerle desteklenmiştir. Bu kısımda açıkça görülmektedir ki eğriler ve eğrinin modifiye Darboux vektörleri değiştirildikçe bunlar yardımıyla elde edilen eğri ve yüzeylerde singülerlik derecelerine göre değişmektedir. Bu eğri ve yüzey ailelerini hesaplamak için yükseklik fonksiyonlarına benzer şekilde yeni fonksiyonlar elde edilip singülerite dereceleri ile bağlantısı kuruldukça daha karmaşık haldeki eğrilerin denk olduğu cümleler kolayca hesaplanabilecek ve görsellerle desteklenebilecektir. Bu bakımdan değme ve singülerlikle bağdaştırılabilen yeni fonksiyon aileleri araştırılmaya devam etmektedir.

KAYNAKLAR

- Bishop, L.R. 1975. There is more than one way to frame a curve, Amer. Math. Monthly, Volume 82, Issue 3, p. 246-251.
- Bruce, J.W. and Giblin P.J. 1992. Curves and Singularities (second edition), Cambridge University Press, Glasgow, England.
- Bukcu, B. and Karacan, M.K. 2009. The Slant Helices According to Bishop Frame, World Academy of Science, Engineering and Technology Vol: 3.
- Çallıalp, F. 2008. Çözümlü lineer cebir problemleri, Birsen yayınevi, İstanbul.
- Do Carmo, M.P. 1976. Differential Geometry of curves and surfaces, by Prentice Hall.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1983. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No. 2.
- Izumiya, S., Katsumi, H. and Yamasaki, T. 1998. The rectifying developable and the spherical Darboux image of a space curve, Geometry and topology of caustics-CAUSTICS' 98(Warsaw), p. 137-149.
- Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2004. New special curves and developable surfaces, Turk J Math 28, p. 153-163.
- Liu, H. and Pei, D. 2013. Singularities of a space curve according to the relatively parallel adapted frame and its visualization, Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering, Article ID 512020, 12 pages.
- Liu, H. and Pei, D. 2013 Cusps of Bishop spherical indicatrices and their visualizations, Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering Article ID 215614, 11 pages.
- O'Neill, B. 2001. Elementary differential geometry, Academic Press, Newyork.
- Uribe-Vargas, R. 2001. Singularities Symplectiques et de Contact en Geometrie Differentielle des Courbes et des Surfaces, P.H.D. Thesis.
- Rutter, J. W. 2000. Geometry of curves, Chapman and Hall/ Crc.
- Sabuncuoğlu, A. 2001. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınevi, Ankara.
- Şahin T. 2005. Lorenz uzayında karesel uzaklık, dayanak fonksiyonları ve singülerlikleri, Yüksek lisans tezi, On dokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Erdem KOCAKUŞAKLI

Doğum Yeri : Tekirdağ

Doğum Tarihi : 09.06.1990

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Malkara Anadolu Lisesi (2008)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2012)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Anabilim Dalı (Eylül 2012 – Ağustos 2014)

Uluslararası Sempozyumlar

1. KMD 2014 International Mathematics Symposium, Çankırı, Turkey, June 11-13, 2014, “A New Approach to Tubular Surfaces in Euclidean 3- Space” adlı çalışma sunulmuştur.

Ulusal Sempozyumlar

1. VIII. Ankara Matematik Günleri, Çankaya Üniversitesi, 13-14 Haziran 2013.
2. XI. Geometri Sempozyumu, Ordu Üniversitesi, 1-5 Temmuz 2013.
3. IX. Ankara Matematik Günleri, Atılım Üniversitesi, 12-13 Haziran 2014.