

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

ÇİFT DİZİLER İÇİN A-KUVVETLİ YAKINSAKLIK KARAKTERİZASYONU

Mehmet ÜNVER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2013**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

DOKTORA TEZİ

ÇİFT DİZİLER İÇİN A -KUVVETLİ YAKINSAKLIK KARAKTERİZASYONU

Mehmet ÜNVER

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cihan ORHAN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, alışılmış dizilerin ve çift dizilerin toplanabilmesine ilişkin bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Esas itibari ile orijinal sonuçlarımız üç ve dördüncü bölümlerde verilmiştir.

Üçüncü bölümde, çift dizilerin A -kuvvetli toplanabilmesi ve A -istatistiksel yakınsaklığına ilişkin bazı sonuçlar verilmiştir. Daha önce sınırlı çift diziler üzerinde denk olduğu gösterilmiş olan bu kavramların sınırlı çift diziler uzayından daha geniş bir uzay üzerindeki ilişkisi araştırılmış ve böylelikle çift dizilerin A -kuvvetli toplanabilmesi karakterize edilmiştir. Ayrıca A -istatistiksel yakınsaklık, Pringsheim A -düzgün integrallenebilir çift diziler uzayı üzerinde dört boyutlu bir toplanabilme matrisi ile karakterize edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise dört boyutlu matrislerin toplanabilirlik alanlarının çarpan uzayları ile ilgilenilmiş ve bu çarpan uzayların A -istatistiksel yakınsaklık ile olan ilişkisi verilmiştir.

Ekim 2013 , 43 sayfa

Anahtar Kelimeler: A -kuvvetli toplanabilme, A -istatistiksel yakınsaklık, Pringsheim A -düzgün integrallenebilir çift dizi

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

A CHARACTERIZATION OF A -STRONG CONVERGENCE OF DOUBLE SEQUENCES

Mehmet ÜNVER

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Cihan ORHAN

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some definitions and theorems concerning the summability of ordinary and double sequences have been given.

The original results of this thesis are included in the third and fourth chapters.

In the third chapter, some results concerning the concepts of A -statistical convergence and A -strong summability of double sequences have been given. The relationship between those concepts have been studied on the space of Pringsheim A -uniformly integrable double sequences that contains the space of bounded double sequences and also A -strong summability of double sequences has been characterized. Moreover the matrix characterization of A -statistical convergence of Pringsheim A -uniformly integrable double sequences has been given.

In the final chapter, the multiplier space of a four dimensional summability matrix has been studied and the relationship between these spaces and A -statistical convergence has been considered.

October 2013 , 43 pages

Key Words: A -strong summability, A -statistical convergence, Pringsheim A -uniformly integrable sequence

TEŞEKKÜR

Bu tezde problemlerin ortaya konulup çözülmesine kadar olan süreç boyunca sonsuz bilgi ve tecrübesiyle yolumu aydınlatan ve benden desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Cihan ORHAN (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarımız esnasında öğrendiğim ve bundan sonra öğreneceğim bilgiler hayatımın her aşamasında bana yol gösterecektir.

Tez çalışmalarımın Amerika Birleşik Devletleri'nde geçen yaklaşık yedi ayında en değerli bilgilerini benimle paylaşan hocam Sayın Prof. Dr. M. Kazim KHAN (Kent State Üniversitesi)'a ve bana bu çalışma imkanını sunan Yükseköğretim Kurulu Başkanlığı (YÖK)'na teşekkürü borç bilirim. Ayrıca teze katkılarından dolayı tez izleme kurulu üyeleri değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve Prof. Dr. Oktay DUMAN (TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi)'a teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Şeyhmus YARDIMCI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya ve Sayın Yard. Doç. Dr. Murat OLGUN (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a teşekkür ederim. Tez çalışmalarım boyunca gerek haftalık seminerlerimizde gerekse sosyal hayatımda yanımda olan arkadaşlarım Tuğba YURDAKADİM, İlknur ÖZGÜÇ, Emre TAŞ ve Nilay ŞAHİN'e teşekkür ederim.

Tez çalışmalarım süresince hep yanımda olan ve beni cesaretlendiren arkadaşlarım Dilek ÖZDEN, Gökhan ÖZÇELİK, Nuri ÇELİK ve Şerifenur CEBESÖY'a teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez "TÜBİTAK-2211 Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın tüm aşamalarında yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen hayatımın en değerli varlıkları olan aileme sonsuz teşekkürlerimi ve minnetlerimi sunarım.

Mehmet ÜNVER
Ankara, Ekim 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
3. ÇİFT DİZİLERİN A-KUVVETLİ TOPLANABİLMESİ VE A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI	17
3.1 A-Kuvvetli Toplanabilme	17
3.2 A-İstatistiksel Yakınsaklığın Matris Karakterizasyonu.....	19
4. DÖRT BOYUTLU MATRİSLERİN TOPLANABİLİRLİK ALANLARININ ÇARPAN UZAYLARI.....	28
4.1 Sınırlı Tutarlılık Teoremi	29
4.2 Çarpan Uzaylar	33
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ.....	43

SİMGELER DİZİNİ

$(C, 1)$	İki boyutlu Cesàro matrisi
$(C, 1, 1)$	Dört boyutlu Cesàro matrisi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
l_∞	Sınırlı diziler uzayı
$l_\infty^{(2)}$	Sınırlı çift diziler uzayı
c_A	İki boyutlu A matrisinin toplanabilirlik alanı
$c_A^{(2)}$	Dört boyutlu A matrisinin toplanabilirlik alanı
$\mathbf{Ax}$	$\mathbf{x}$ dizisinin A -dönüşüm dizisi
$A(\mathbf{x})$	$\mathbf{Ax}$ dizisinin P -limiti
$\delta_A^{(2)}(E)$	$E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alt kümesinin A -yoğunluğu
$\mathbb{U}_A$	A -düzgün integrallenebilir diziler uzayı
$\mathbb{U}_A^{(2)}$	Pringsheim A -düzgün integrallenebilir çift diziler uzayı
$\mathbb{S}_A$	A -sınırlı diziler uzayı
$\mathbb{S}_A^{(2)}$	Pringsheim A -sınırlı çift diziler uzayı
χ_E	E kümesinin karakteristik dizisi
E^c	E kümesinin tümleyeni

1. GİRİŞ

Seriler ve serilerin yakınsaklığının incelenmesi matematikte önemli bir yer tutmaktadır. Önceleri matematikçiler yakınsak serilerle ilgilenmişler ve ıraksak seriler ile ilgilenmeyi zaman kaybı olarak görmüşlerdir. Ancak toplanabilme teorsinin gelişmesiyle birlikte ıraksak serilere olan ilgi de artmıştır. Bernoulli, 1669 yılında

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1 - x} \quad (1.1)$$

bağıntısını kullanmıştır. Euler ise bu eşitlikte $x = -1$ alarak Euler paradoksal eşitliği olarak bilinen

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

bağıntısını elde etmiş ve hiçbir kuşkuya düşmeden birçok yerde kullanmıştır. Hardy ise bir adım daha ileri gitmiş ve seriler için Cauchy çarpım kuralını uygulayarak (1.1) bağıntısında her iki tarafın karesini almış ve

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \frac{1}{4}$$

bağıntısını elde etmiştir. Aslında anlamsız gibi görünen bu sonuçlar Hardy'nin de belirttiği gibi "sonsuz bir serinin toplamı"'nın nasıl tanımlandığına bağlıdır. Örneğin Cesàro $(C, 1)$ yakınsaklık tanımını vermiştir. $\sum_k a_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olmak üzere

$$t_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j$$

ile tanımlı (t_n) dizisi bir L sayısına yakınsak ise (s_n) dizisi L değerine $(C, 1)$ yakınsaktır (toplanabilirdir) ya da $\sum_k a_k$ serisi L değerine $(C, 1)$ yakınsaktır denir. Bu şekilde yakınsaklık tanımı genelleştirilerek çeşitli yakınsaklık kavramları elde edilmiştir. Bu açıklamalardan sonra toplanabilme teorisinin asıl amacının ıraksak bir seriye bir toplam karşılık getirmek olduğunu belirtebiliriz.

Çalışılmaya başlandığından itibaren, toplanabilme teorisi genellikle alışılmış seriler ve diziler için çalışılmıştır ve bunlar için bir çok yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır. Bunlardan en ilgi çekici olanları matris toplanabilme (özellikle Cesàro toplanabilme),

A -istatistiksel yakınsaklık ve A -kuvvetli toplanabilme metodlarıdır. Dizilerin matris toplanabilmesinde iki boyutlu sonsuz matrisler kullanılır. Aşında birçok metodun matris metodu olarak ifade edilip edilemeyeceği toplanabilme teorisinin önemli problemlerindendir. Örneğin toplanabilme teorisinde çok önemli bir rol oynayan istatistiksel yakınsaklığın matris karakterizasyonu her zaman ilgi çekici olmuştur. Fridy (1985) istatistiksel yakınsaklığın bir matris toplanabilme metodu tarafından içerilmediğini göstermiştir. Fridy ve Miller (1991) istatistiksel yakınsaklık ve matris metodlarının belirli bir sınıfı arasında kuvvetli bir ilişki olduğunu göstermiş ve sınırlı bir dizinin istatistiksel yakınsaklığının dizinin bu matris sınıfındaki her A matrisi tarafından A -toplanabilmeye denk olduğunu ispatlamıştır. Khan ve Orhan (2007) ise A -düzgün integrallenebilir diziler uzayı üzerinde A -istatistiksel yakınsaklığın negatif olmayan, regüler ve üçgensel bir matris metoduna denk olduğunu göstermiştir.

Keyfi iki boyutlu bir B toplanabilme matrisinin toplanabilirlik alanının çarpan uzayının karakterizasyonu da toplanabilme teorisinin önemli bir problemidir. Bununla ilişkili olarak nispeten daha kolay bir problem ise çarpımsal matris metodları için bu uzayın karakterizasyonudur. Henriksen ve Isbell (1964) bir konferansta bu tür bir karakterizasyon sunmuşlar ancak yayınlamamışlardır. Petersen (1972) tarafından ise başka ispat yayınlanmış ancak bu ispatın doğru olmadığı Khan ve Orhan (2007) tarafından yapılan incelemelerle ortaya konulmuştur. Khan ve Orhan (2007) çalışmalarında regüler ve çarpımsal matris metodlarının toplanabilirlik alanlarının çarpanlarını karakterize etmişlerdir.

Toplanabilme teorisinin bir diğer önemli kavramı da A -kuvvetli toplanabilme kavramıdır ve A -istatistiksel yakınsaklık ile yakından ilişkilidir. Connor (1989) sınırlı diziler üzerinde A -kuvvetli toplanabilme ile A -istatistiksel yakınsaklığın denk olduğunu göstermiştir. Khan ve Orhan (2007) tarafından A -kuvvetli toplanabilmenin bir karakterizasyonu verilmiş ve bir dizinin A -kuvvetli toplanabilir olması için gerek ve yeter koşulun dizinin A -istatistiksel yakınsak ve A -düzgün integrallenebilmesi olduğu ispatlanmıştır.

Yukarıda sözü edilen problemlerin bir çoğu çift diziler için de düşünülebilir. Miller (2008) sınırlı çift dizilerin A -istatistiksel yakınsaklığı ile klasik durumda olduğu gibi

dört boyutlu matris metodlarının özel bir sınıfı arasındaki bağlantıyı elde etmiştir. Bu tezde ise önce Pringsheim A -düzgün integrallenebilir çift diziler uzayı tanımlanıp bu uzay üzerinde çift dizilerin A -istatistiksel yakınsaklığı için bir matris karakterizasyonu elde edilecektir.

Moricz (2003), Mursaleen ve Edely (2003) ve Tripathy (2003) çift diziler için klasikteki duruma benzer şekilde istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli Cesàro toplanabilme arasındaki bağlantıyı incelemişlerdir. Bu tezde ise klasikteki sonuca paralel olarak A -kuvvetli toplanabilme karakterize edilecektir.

Ayrıca dört boyutlu toplanabilme matrislerinin toplanabilirlik alanlarının çarpan uzayları incelenip bu çarpan uzaylar ile A -istatistiksel yakınsaklığın bağlantısı verilecektir. Bunun için ise klasikte çok iyi bilinen ve çift diziler için Patterson (2004)'ın verdiği Brudno-Mazur-Orlicz sınırlı tutarlılık teoreminin bir başka versiyonu elde edilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde alışılmış (single) ve çift (double) dizilerin toplanabilmesine ilişkin bazı tanım ve kavramlardan söz edilecektir. Bu tez boyunca $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ doğal sayılar kümesini gösterecektir ve tez boyunca $x = (x_k)$ dizisi alışılmış dizi ya da sadece "dizi" olarak adlandırılacaktır. Tanım kümesi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olan fonksiyona "çift dizi" denir. Örneğin her j, k için $x_{jk} = j^2k$ ile tanımlı $\mathbf{x} = (x_{jk})$ bir "çift dizi" olup

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ 4 & 8 & 12 & \dots \\ 9 & 18 & 27 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir.

Bir $x = (x_k)$ dizisini alalım. Her $\varepsilon > 0$ için $k \geq N$ olduğunda $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı varsa x dizisi L sayısına yakınsaktır denir. Aşağıdaki tanım bu tanıma benzer olarak çift bir dizinin yakınsaklığını vermektedir:

Tanım 2.1 $\mathbf{x} = (x_{jk})$ bir çift dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $j, k \geq N$ olduğunda $|x_{jk} - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı varsa $\mathbf{x}$ dizisi L sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır (P -yakınsak) denir ve $P\text{-}\lim_{j,k} \mathbf{x} = L$ ile gösterilir (Pringsheim, 1900).

$x = (x_k)$ bir dizi olsun. $\sup_k |x_k| < \infty$ ise x dizisi sınırlıdır denir. Tüm sınırlı dizilerin uzayı l_∞ ile gösterilir. Aşağıdaki tanım bu tanımın çift diziler için genişletmesidir:

Tanım 2.2 $\mathbf{x} = (x_{jk})$ bir çift dizi olsun. $\sup_{j,k} |x_{jk}| < \infty$ ise $\mathbf{x}$ dizisi sınırlıdır denir. Tüm sınırlı çift dizilerin uzayı $l_\infty^{(2)}$ ile gösterilir.

Çok iyi bilinmektedir ki bir dizi yakınsak ise sınırlıdır. Ancak P -yakınsak bir çift dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz:

Örnek 2.1

$$x_{jk} := \begin{cases} k, & j = 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı $\mathbf{x} = (x_{jk})$ çift dizisi sıfıra P -yakınsak olduğu halde sınırlı değildir. Aşağıdaki tanım çift diziler için sınırlılık tanımını biraz daha hafifletmektedir:

Tanım 2.3 $\mathbf{x} = (x_{jk})$ bir çift dizi olsun. $\sup_{j,k>H} |x_{jk}| < \infty$ olacak şekilde bir $H > 0$ sayısı mevcut ise $\mathbf{x}$ dizisi P -sınırlıdır denir. Tüm P -sınırlı çift dizilerin uzayı $P-l_{\infty}^{(2)}$ ile gösterilir.

Dikkat edilirse P -yakınsak her çift dizi P -sınırlıdır.

Burada bir çift dizinin P -yakınsaklığı ile satır ve sütun dizilerinin yakınsaklığı arasında nasıl bir ilişki olduğu sorulabilir. Bunun için aşağıdaki iki örneği inceleyelim:

Örnek 2.2 $\mathbf{x} = (x_{jk})$ çift dizisini

$$x_{jk} := \frac{1}{2 + \min\{j, k\} + (-1)^{j+k}}$$

ile tanımlayalım. O halde $P\text{-}\lim_{j,k} \mathbf{x} = 0$ olur. Ancak j_0 ve k_0 sabit olmak üzere ne $\{x_{j_0,k}\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi ne de $\{x_{j,k_0}\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi yakınsaktır.

Örnek 2.3 $\mathbf{x} = (x_{jk})$ çift dizisini

$$x_{jk} := \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak her sabit j_0 ve k_0 için $\{x_{j_0,k}\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi ve $\{x_{j,k_0}\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi sıfıra yakınsak olduğu halde $\mathbf{x}$ dizisi P -yakınsak değildir.

P -yakınsak bir çift dizinin aynı zamanda satır ve sütunları da yakınsak ise bu diziye regüler olarak P -yakınsaktır denir (Hardy 1919). Regüler olarak P -yakınsak bir dizinin sınırlı olduğu açıktır. Ayrıca Hardy (1919), regüler olarak P -yakınsak bir dizinin P -limitinin ardışık (iterated) limitlerle hesaplanabildiğini göstermiştir. Yani $\mathbf{x}$ regüler olarak P -yakınsak bir dizi ise

$$P\text{-}\lim_{j,k} \mathbf{x} = \lim_j (\lim_k x_{jk}) = \lim_k (\lim_j x_{jk})$$

gerçeklenir.

Tanım 2.4 $\mathbf{x} = (x_{jk})$ bir çift dizi olmak üzere $\sum_{j,k} x_{j,k}$ toplamına bir çift seri denir. Eğer bu serinin kısmi toplamlar dizisi $\left\{ \left(\sum_{j=1,k=1}^{r,s} x_{j,k} \right)_{r,s} \right\}$ P -yakınsak ise yani $P\text{-}\lim_{r,s} \sum_{j=1,k=1}^{r,s} x_{j,k}$ limiti mevcutsa seri bu limit değerine Pringsheim anlamında yakınsaktır (P -yakınsak) denir (Bromwich 1942).

Şimdi "toplanabilme" kavramını hatırlatalım:

$B = (b_{nk})$ iki boyutlu sonsuz bir matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise

$$(Bx)_n := \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x_k$$

olmak üzere $\{(Bx)_n\}$ dizisine x dizisinin B -dönüşüm dizisi denir (Maddox 1970). Eğer dönüşüm dizisi bir L sayısına yakınsak ise x dizisi L sayısına B -toplanabilirdir denir. Tüm B toplanabilir diziler uzayı c_B ile gösterilir. Yakınsak bir diziyi kendi limitine toplayan matrise regüler matris denir. Bu tanımların benzeri çift diziler için de aşağıdaki gibi verilmektedir:

Tanım 2.5 $A = (a_{jk}^{nm})$ dört boyutlu sonsuz bir matris ve $\mathbf{x} = (x_{jk})$ bir çift dizi olmak üzere her n, m için

$$(Ax)_{nm} := \sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{nm}$$

çift serisi P -yakınsak ise

$$\mathbf{Ax} := \left(\sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{nm} \right)_{n,m}$$

dizisine $\mathbf{x}$ dizisinin A -dönüşüm dizisi denir.

Aşağıda $\mathbf{Ax}$ dönüşüm dizisinin nasıl elde edildiği gösterilmiştir:

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{11} & a_{12}^{11} & \cdots \\ a_{21}^{11} & a_{22}^{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11}^{12} & a_{12}^{12} & \cdots \\ a_{21}^{12} & a_{22}^{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \cdots \\ \begin{pmatrix} a_{11}^{21} & a_{12}^{21} & \cdots \\ a_{21}^{21} & a_{22}^{21} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11}^{22} & a_{12}^{22} & \cdots \\ a_{21}^{22} & a_{22}^{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{11} & \sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{12} & \cdots \\ \sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{21} & \sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ayrıca dört boyutlu birim (identity) matris $I = (e_{jk}^{nm})$,

$$e_{jk}^{nm} := \begin{cases} 1 & , \quad j = n \text{ ve } k = m \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile verilir ve aşağıdaki gösterime sahiptir:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \cdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Eğer $\mathbf{Ax}$ çift dizisi bir L sayısına P -yakınsak ise $\mathbf{x}$ dizisi L sayısına A -toplanabilirdir denir ve bu durum $A(\mathbf{x}) = L$ şeklinde ifade edilir. Tüm A -toplanabilen çift dizilerin kümesine A matrisinin toplanabilirlik alanı denir ve bu küme $c_A^{(2)}$ ile gösterilir.

Tanım 2.6 A ve B iki boyutlu matrisler olsun. Her $x \in E \subseteq c_A \cap c_B$ için $\lim_n (Ax)_n = \lim_n (Bx)_n$ oluyorsa A ile B matrisleri E kümesi üzerinde tutarlıdır denir (Boos 2000). Benzer şekilde A ve B dört boyutlu matrisler olmak üzere her $\mathbf{x} \in E \subseteq c_A^{(2)} \cap c_B^{(2)}$ için $P\text{-}\lim_{n,m} (Ax)_{nm} = P\text{-}\lim_{n,m} (Bx)_{nm}$ oluyorsa A ile B matrisleri E kümesi üzerinde tutarlıdır denir.

Tanım 2.7 A ve B iki boyutlu matrisler olsun. Eğer $c_B \supset c_A$ ve A ile B tutarlı ise B metodu A metodunu içeriyor denir ve $B \supset A$ ile gösterilir. Eğer $B \supset A \supset B$ oluyorsa A ile B denktir denir (Boos 2000). Benzer şekilde A ve B dört boyutlu matrisler olmak üzere $c_B^{(2)} \supset c_A^{(2)}$ ve A ile B tutarlı ise B metodu A metodunu içeriyor denir ve $B \supset A$ ile gösterilir. Eğer $B \supset A \supset B$ oluyorsa A ile B denktir denir.

Tanım 2.8 Sınırlı P -yakınsak bir çift diziyi kendi limitine toplayan dört boyutlu matrise RH -regüler matris denir.

Aşağıdaki teorem RH -regülerliği karakterize etmektedir.

Teorem 2.1 Dört boyutlu bir $A = (a_{jk}^{nm})$ matrisinin RH -regüler olması için gerek ve yeter şart;

$$RH_1 : P\text{-}\lim_{n,m} a_{jk}^{nm} = 0, \text{ her } j, k$$

$$RH_2 : P\text{-}\lim_{n,m} \sum_{j,k} a_{jk}^{nm} = 1$$

$$RH_3 : P\text{-}\lim_{n,m} \sum_j |a_{jk}^{nm}| = 0, \text{ her } k$$

$$RH_4 : P\text{-}\lim_{n,m} \sum_k |a_{jk}^{nm}| = 0, \text{ her } j$$

$$RH_5 : \sum_{j,k} |a_{jk}^{nm}| \text{ serisi her } n, m \text{ için } P\text{-yakınsak}$$

$$RH_6 : \text{Her } n, m \text{ için } \sum_{j,k > N} |a_{jk}^{nm}| < M \text{ olacak biçimde } N \text{ ve } M \text{ sayılarının mevcut olmasıdır (Hamilton 1936).}$$

Dört boyutlu sonsuz bir matris iki boyutlu sonsuz matrislerin bir çift dizisi gibi düşünülebilir. Bu bakış açısıyla bir $A = (a_{jk}^{nm})$ dört boyutlu matrisi

$$a_{jk}^{nm} = \begin{pmatrix} (a_{jk}^{11}) & (a_{jk}^{12}) & \vdots \\ (a_{jk}^{21}) & (a_{jk}^{22}) & \vdots \\ \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}.$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. Tez boyunca her sabit n, m için iki boyutlu (a_{jk}^{nm}) matrisini $[A(n, m)_{j,k}]$ ile göstereceğiz ve bu terime A matrisinin (n, m) ikilisine karşılık gelen iç matrisi diyeceğiz.

$A = (a_{jk}^{nm})$ dört boyutlu bir matris olmak üzere $j > J(n, m)$ veya $k > K(n, m)$ olduğunda $a_{jk}^{nm} = 0$ olacak şekilde pozitif tamsayıların $J(n, m)$ ve $K(n, m)$ dizileri varsa A matrisine iç sonlu matris denir. Burada $J(n, m) = n$ ve $K(n, m) = m$ ise A matrisine iç dikdörtgensel matris denir. Dört boyutlu matrislerin iç sonluluğu ve iç dikdörtgenselliği sırasıyla iki boyutlu matrislerin satır sonluluğu ve üçgenselliğine benzemektedir. İç dikdörtgensel bir $A = (a_{jk}^{nm})$ matrisinin (n, m) ikilisine karşılık gelen iç matrisi

$$[A(n, m)_{j,k}] = \begin{pmatrix} a_{11}^{nm} & a_{12}^{nm} & \dots & a_{1m}^{nm} & 0 & 0 & \dots \\ a_{21}^{nm} & a_{22}^{nm} & \ddots & a_{2m}^{nm} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\ a_{n1}^{nm} & a_{n2}^{nm} & \dots & a_{nm}^{nm} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. $A = (a_{jk}^{nm})$ iç dikdörtgensel bir matris olmak üzere $[A(n, m)]^{(r)}$ ile (n, m) ikilisine karşılık gelen iç matrisin ilk $n \times m$ teriminin r tanesinin sıfırla yer değiştirilmiş hallerine karşılık gelen matrislerin sonlu sınıfını göstereceğiz.

Ayrıca

$$\sum_{j,k} a_{jk}^{nm} = 1, \quad \text{her } n, m \in \mathbb{N}$$

olacak biçimde negatif olmayan dört boyutlu $A = (a_{jk}^{nm})$ matrislerinin uzayını $\mathbb{M}_{(2)}^+$ ile göstereceğiz.

$C = (c_{jk}^{nm})$ dört boyutlu matrisini

$$c_{jk}^{nm} = \begin{cases} \frac{1}{nm} & , \quad j \leq n \text{ ve } k \leq m \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu matrise dört boyutlu Cesàro matrisi denir ve $(C, 1, 1)$ ile gösterilir. Bu matris RH -regüler, iç dikdörtgensel ve $\mathbb{M}_{(2)}^+$ sınıfına ait dört boyutlu bir matristir.

Şimdi alışılmış ve çift dizilerin toplanabilmesinde önemli yer tutan A -istatistiksel yakınsaklık ve A -kuvvetli toplanabilme kavramlarının tanımlarını vereceğiz:

$A = (a_{nk})$ negatif olmayan iki boyutlu bir matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \sum_{k: |x_k - L| > \varepsilon} a_{nk} = 0$$

oluyorsa x dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsaktır denir (Fast 1951, Connor 1989, Kolk 1991, Miller 1995). A matrisi olarak Cesàro matrisini alınırsa istatistiksel yakınsaklık elde edilir (Fridy, 1985). $A = (a_{nk})$ iki boyutlu bir matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere

$$\lim_n \sum_k a_{nk} |x_k - L| = 0$$

oluyorsa x dizisi L sayısına A -kuvvetli toplanabilirdir denir (Hardy ve Littlewood 1913, Freedman ve Sember 1989, Connor 1989). Bu iki önemli kavram çift dizilere aşağıdaki şekilde adapte edilmiştir:

Tanım 2.9 $A = (a_{jk}^{nm})$ negatif olmayan dört boyutlu bir matris ve $\mathbf{x} = (x_{jk})$ bir çift dizi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$P\text{-}\lim_{n,m} \sum_{j,k: |x_{jk} - L| > \varepsilon} a_{jk}^{nm} = 0$$

oluyorsa $\mathbf{x}$ dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $st_A^{(2)} - \lim \mathbf{x} = L$ ile ve tüm A -istatistiksel yakınsak çift dizilerin uzayı $st_A^{(2)}$ ile gösterilir. $A = (C, 1, 1)$ alınırsa bu durumda $\mathbf{x}$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir (Moricz 2003, Mursaleen ve Edely 2003, Tripathy 2003).

Dikkat edilecek olursa $\mathbf{x}$ dizisinin bir L sayısına A -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon, \delta > 0$ için

$$\sup_{n,m > N} \sum_{j,k \in E_\varepsilon} a_{jk}^{nm} < \delta$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon, \delta)$ olmasıdır. Burada $E_\varepsilon := \{(j, k) : |x_{jk} - L| > \varepsilon\}$ ile verilmektedir. Ayrıca Miller (2007) bazı özel dört boyutlu matrisler için A -istatistiksel yakınsaklığın bir karakterizasyonunu vermiştir.

$A = (a_{jk}^{nm}) \in \mathbb{M}_{(2)}^+$ iç dikdörtgensel dört boyutlu toplanabilme matrisi her p, q için

$$P\text{-}\lim_{n,m} \sum_{(j,k) \in E_{p,q}} a_{jk}^{nm} = 0$$

şartını sağlıyorsa ortalama matris adını alır (Miller 2007). Burada verilen p, q sayıları için $E_{p,q} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus T_{p,q}$ ve $T_{p,q} = \{(j, k) : j \geq p \text{ ve } k \geq q\}$ şeklindedir.

Önerme 2.1 $A = (a_{jk}^{nm}) \in \mathbb{M}_{(2)}^+$ iç dikdörtgensel dört boyutlu bir matris olsun. Bu durumda bir $\mathbf{x} = (x_{jk})$ çift dizisi bir L sayısına A -istatistiksel yakınsak ise

$$\delta_A^{(2)}(K) := P\text{-}\lim_{n,m} \sum_{j,k \in K} a_{jk}^{nm} = 0 \quad (2.1)$$

ve $P\text{-}\lim_{(j,k) \in K^c} x_{jk} = L$ olacak biçimde bir $K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mevcuttur (Miller 2007).

Ortalama matrisler için bu önermenin karşıta da doğrudur. Burada (2.1) limiti mevcut ise bu limite K kümesinin A -yoğunluğu denir (Miller, 2007). Burada $A = (C, 1, 1)$ alınırsa yine limitin mevcut olması durumunda bu limite K kümesinin doğal yoğunluğu denir ve $\delta^{(2)}(K)$ ile gösterilir (Moricz 2003, Mursaleen ve Edely 2003, Tripathy 2003). $(C, 1, 1)$ ortalama bir matris olup bu matris için bu önermenin ispatı Moricz (2003), Mursaleen ve Edely (2003) ve Tripathy (2003) tarafından bağımsız çalışmalarda verilmiştir.

Dikkat edilirse, dört boyutlu negatif olmayan RH -regüler bir A matrisi alındığında P -yakınsak her çift dizi A -istatistiksel yakınsak olur. Gerçekten, $P\text{-}\lim_{j,k} x_{jk} = L$

ise her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ olduğunda $|x_{jk} - L| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Ayrıca

$$\sum_{j,k:|x_{jk}-L|>\varepsilon} a_{jk}^{nm} \leq \sum_{j=1}^{n_0-1} \sum_k a_{jk}^{nm} + \sum_{k=1}^{n_0-1} \sum_j a_{jk}^{nm}$$

olup A matrisi RH -regüler olduğundan bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadeler RH_3 ve RH_4 şartlarından sıfıra P -yakınsaktır. Dolayısıyla $\mathbf{x} = (x_{jk})$ çift dizisi L sayısına A istatistiksel yakınsaktır. Karşıt olarak

$$x_{jk} = \begin{cases} jk & , \quad k \text{ ve } j \text{ tam kare} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı $\mathbf{x} = (x_{jk})$ çift dizisi ne yakınsak ne de sınırlı bir çift dizidir. Ancak her $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{j,k:|x_{jk}|>\varepsilon} c_{jk}^{nm} = \frac{1}{nm} \sum_{\substack{j,k:|x_{jk}|>\varepsilon \\ j \leq n, k \leq m}} 1 \leq \frac{\sqrt{nm}}{nm}$$

olduğundan $\mathbf{x}$ çift dizisi sıfıra istatistiksel yakınsaktır.

Tanım 2.10 $A = (a_{jk}^{nm})$ dört boyutlu bir matris ve $\mathbf{x} = (x_{jk})$ bir çift dizi olsun.

$$P\text{-}\lim_{n,m} \sum_{j,k} |x_{jk} - L| |a_{jk}^{nm}| = 0$$

oluyorsa $\mathbf{x}$ dizisi L sayısına A -kuvvetli toplanabilir denir. Burada $A = (C, 1, 1)$ alınrsa bu durumda $\mathbf{x}$ dizisi L sayısına kuvvetli Cesàro toplanabilir denir.

Toplanabilme teorisinde A -istatistiksel yakınsaklık ve A -kuvvetli toplanabilme arasındaki bağlantı incelenirken uzun süre sınırlı diziler uzayı göz önüne alınmıştır. Böylece A -kuvvetli toplanabilen bir dizinin A -istatistiksel yakınsak olduğu; ve de sınırlı ve A -istatistiksel yakınsak bir dizinin de A -kuvvetli toplanabilir olduğu gösterilmiştir. Ancak Khan ve Orhan (2007) A -düzgün integrallenebilme kavramını ilk defa ortaya atarak A -kuvvetli toplanabilmeyi karakterize etmişler ve göstermişlerdir ki bir dizinin bir L değerine A -kuvvetli toplanabilir olması için gerek ve yeter koşul yine aynı değere A -istatistiksel yakınsak ve A -düzgün integrallenebilir olmasıdır. Şimdi

benzer karakterizasyona ulaşabilmek için çift diziler için Pringsheim A -düzgün integrallenebilme kavramını tanımlayacağız. Ancak öncelikle alışılmış diziler için A -düzgün integrallenebilme kavramını hatırlatalım:

$A = (a_{nk})$ iki boyutlu bir matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_n \sum_{k: |x_k| > M} |x_k| |a_{nk}| = 0$$

oluyorsa x dizisi A -düzgün integrallenebilirdir denir. A -düzgün integrallenebilme sınırlılık kavramını zayıflatmaktadır. Bunu göstermek için öncelikle aşağıdaki lemmayı hatırlatalım:

Lemma 2.1 $x = (x_k)$ bir dizi ve A negatif olmayan ve satır toplamları bir olan iki boyutlu toplanabilme matrisi olsun. x dizisinin A -düzgün integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\phi(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{x} = \infty$ ve

$$\sup_n \sum_k \phi(|x_k|) a_{nk} < \infty$$

olacak şekilde konveks ve çift bir $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır (Khan ve Orhan 2010).

Öncelikle sınırlı her dizinin A -düzgün integrallenebilir olduğunu gösterelim. $x = (x_k)$ sınırlı bir dizi olsun.

$$E := \{k : |x_k| > M\}$$

kümesini tanımlayalım. $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$ değerinden büyük her M için $E = \emptyset$ olup

$$\begin{aligned} \sup_n \sum_{k: |x_k| > M} |x_k| |a_{nk}| &= \sup_n \sum_k \chi_E(k) |x_k| |a_{nk}| \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan x A -düzgün integrallenebilirdir. Ayrıca sınırsız fakat A -düzgün integrallenebilen diziler vardır. Bunu görmek için regüler, $\max_k a_{nk} \rightarrow 0$ ve satır toplamları bir olan negatif olmayan bir A matrisi aldığımızda sınırsız ancak A -düzgün integrallenebilen bir dizi inşa edebiliriz. Aslında A matrisi sıfıra yakınsayan kolonlara sahip ve

$$\liminf_k \left\{ \max_n a_{nk} \right\} = 0$$

olacak şekilde bir matris olduğunda sınırsız ancak A -düzgün integrallenebilen bir $x = (x_k)$ dizisi inşa edilebilir. Bunun için kolon indislerinin

$$\max_n a_{n,K(m)} < 2^{-m}, m = 0, 1, 2, \dots$$

olacak şekilde bir

$$K(0) < K(1) < K(2) < \dots$$

dizisini seçelim. Şimdi de $n > N(m)$ ve $k \leq K(m)$ olduğunda $a_{nk} < 2^{-m}$ olacak biçimde satır indislerinin artan $N(j)$ indislerini seçelim. Şimdi bir $y = (y_k)$ dizisini,

$$y_k = \begin{cases} m+1 & , \quad k = K(m) \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Her $n > N(m)$ için,

$$\begin{aligned} (Ay)_n &= \sum_{k=1}^{\infty} y_k a_{nk} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_{n,K(j)} \\ &\leq \sum_{j=0}^m (j+1) 2^{-m} + \sum_{j>m} (j+1) 2^{-j} \end{aligned} \tag{2.2}$$

gerçeklenir. (2.2) eşitsizliğinin her iki tarafında $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $n > N(m)$ olduğunda $n \rightarrow \infty$ olacağından $\lim_n (Ay)_n = 0$ gerçekleşir. Şimdi bir $x = (x_k)$ dizisini her k için,

$$x_k := \sqrt{y_k}$$

şeklinde tanımlayalım. $\phi(x) = x^2$ ile tanımlı ϕ fonksiyonunu göz önüne alırsak $\lim_n (Ay)_n = 0$ olduğundan

$$\sup_n \sum_k \phi(|x_k|) a_{nk} = \sup_n \sum_k a_{nk} y_k < \infty$$

olup *Lemma 2.1*'den x dizisi A -düzgün integrallenebilirdir.

Aşağıdaki tanım ile A -düzgün integrallenebilme kavramını çift diziler için genişleteceğiz.

Tanım 2.11 $A = (a_{jk}^{nm})$ dört boyutlu bir matris ve $\mathbf{x} = (x_{jk})$ çift bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $t > H$ olduğunda

$$\sup_{n,m>N} \sum_{j,k:|x_{jk}|>t} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| < \varepsilon$$

olacak biçimde $N = N(\varepsilon)$ ve $H = H(\varepsilon)$ sayıları mevcut ise $\mathbf{x}$ dizisi Pringsheim A -düzgün integrallenebilir denir. Tüm Pringsheim A -düzgün integrallenebilir çift dizilerin uzayı $\mathbb{U}_A^{(2)}$ ile gösterilir.

Aşağıdaki önerme sınırlı çift diziler ile Pringsheim A -düzgün integrallenebilir çift diziler arasındaki bağlantıyı açıklamaktadır:

Önerme 2.2 Pringsheim A -düzgün integrallenebilir çift diziler uzayı sınırlı çift diziler uzayını içerir ve bazı A matrisleri için bu içerme kesindir, yani $l_\infty^{(2)} \subsetneq \mathbb{U}_A^{(2)}$ gerçekleşir.

İspat. Sınırlı her çift dizi Pringsheim A -düzgün integrallenebilirdir. Gerçekten, $\mathbf{x} = (x_{jk})$ sınırlı çift bir dizi ise her N için $t > \sup_{j,k} |x_{jk}|$ olduğunda

$$\sup_{n,m>N} \sum_{j,k:|x_{jk}|>t} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| = 0$$

olup x dizisi Pringsheim A -düzgün integrallenebilirdir. Karşıt olarak, Pringsheim A -düzgün integrallenebilir sınırsız diziler mevcuttur. Bunu göstermek için negatif olmayan, sıfıra yakınsak kolonlara sahip ve

$$\liminf_j \left\{ \max_k b_{kj} \right\} = 0$$

olacak biçimde (iki boyutlu) bir $B = (b_{kj})$ matrisi alalım. Biliyoruz ki B -düzgün integrallenebilir sınırsız bir $y = (y_j)$ dizisi vardır. N sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere $A = (a_{jk}^{nm})$; $1 \leq k \leq N$ olduğunda $a_{jk}^{nm} = b_{kj}$ olacak şekilde dört boyutlu bir toplanabilme matrisi olsun. $x = (x_{jk})$ ilk N sütunu $y = (y_j)$ dizisi ile çakışacak ve

$$\sup_{k>N} |x_{jk}| < \infty$$

olacak biçimde bir çift dizi olsun. $\mathbf{x}$ dizisi sınırsız olup aşağıdaki gösterime sahiptir:

$$\mathbf{x} = \overbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & \cdots & y_1 & x_{1,N+1} & \cdots \\ y_2 & y_2 & \cdots & y_2 & x_{2,N+1} & \cdots \\ y_3 & y_3 & \cdots & y_3 & x_{3,N+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}^{N \text{ tane}}$$

O halde $t > \sup_{k>N} |x_{jk}|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{j,k: |x_{jk}| > t} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| &= \sum_{\substack{j,k: |x_{jk}| > t \\ 1 \leq k \leq N}} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| + \sum_{\substack{j,k: |x_{jk}| > t \\ k > N}} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j: |y_j| > t} y_j b_{kj} + \sum_{\substack{j,k: |x_{jk}| > t \\ k > N}} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| \end{aligned}$$

olduğundan her M için

$$\sup_{n,m>M} \sum_{j,k: |x_{jk}| > t} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| = \sum_{k=1}^N \sum_{j: |y_j| > t} y_j b_{kj} + \sup_{n,m>M} \sum_{\substack{j,k: |x_{jk}| > t \\ k > N}} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| \quad (2.3)$$

yazılabilir. Diğer yandan y dizisi B -düzgün integrallenebilir olduğundan her $k = 1, 2, \dots, N$ ve her $\varepsilon > 0$ için $t > h(\varepsilon)$ olduğunda

$$\sum_{j: |y_j| > t} y_j b_{kj} < \varepsilon / N$$

olacak şekilde bir $h > \sup_{k>N} |x_{jk}|$ mevcuttur. O halde (2.3) eşitliğinden $t > h(\varepsilon)$ olmak üzere

$$\sup_{n,m>M} \sum_{j,k: |x_{jk}| > t} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| < \varepsilon + \sup_{n,m>M} \sum_{\substack{j,k: |x_{jk}| > t \\ k > N}} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}|$$

elde edilir. $\mathbf{x}$ dizisi, $k > N$ için sınırlı olduğundan yeterince büyük t sayıları için son eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci ifade sıfıra eşittir. O halde yeterince büyük $t > h(\varepsilon)$ ve her $M > 0$ için

$$\sup_{n,m>M} \sum_{j,k: |x_{jk}| > t} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| < \varepsilon$$

elde edilir ki buradan $\mathbf{x}$ dizisinin Pringsheim A -düzgün integrallenebilir olduğu görülür. ■

3. ÇİFT DİZİLERİN A-KUVVETLİ TOPLANABİLMESİ VE A- İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde birinci kısımda çift dizilerin A -kuvvetli toplanabilmesi karakterize edilecektir ve ikinci kısımda Pringsheim A -düzgün integrallenebilir çift dizilerin A -istatistiksel yakınsaklığının matris karakterizasyonu elde edilecektir.

3.1 A-kuvvetli Toplanabilme

Kuvvetli toplanabilme kavramı ilk olarak Hardy ve Littlewood (1913) tarafından tanımlanmıştır. Biliyoruz ki A -kuvvetli toplanabilir bir dizi A -istatistiksel yakınsaktır ve karşıt olarak sınırlı A -istatistiksel yakınsak bir dizi A -kuvvetli toplanabilir. Ancak Khan ve Orhan (2007) ikinci ifadedeki sınırlılık şartının zayıflatılabileceğini göstermiş ve sınırlılıktan daha hafif bir kavram olan A -düzgün integrallenebilme kavramını kullanarak A -kuvvetli toplanabilmeyi karakterize etmişlerdir. Çift diziler için de yine sınırlılık kavramı kullanılarak istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli Cesàro toplanabilme kavramları arasındaki ilişki incelenmiştir. Aşağıdaki teorem Moricz (2003), Mursaleen ve Edely (2003) ve Tripathy (2003) tarafından farklı çalışmalarda ispatlanmıştır:

Teorem 3.1 *i) Bir çift dizi kuvvetli Cesàro toplanabilirse istatistiksel yakınsaktır. ii) Sınırlı istatistiksel yakınsak bir çift dizi kuvvetli Cesàro toplanabilir.*

Bu teorem dört boyutlu Cesàro matrisi yerine dört boyutlu negatif olmayan bir A matrisi alınarak da benzer şekilde ispatlanabilir. Ancak tüm bu sonuçlar yalnızca sınırlı diziler üzerinde A -kuvvetli toplanabilmeyi karakterize etmektedir. Pringsheim A -düzgün integrallenebilme kavramı kullanılarak Khan ve Orhan'ın (2007) alışılmış diziler için verdiği karakterizasyon burada çift diziler için verilecektir.

Teorem 3.2 $A = (a_{jk}^{nm}) \in M_{(2)}^+$ ve $\mathbf{x} = (x_{jk})$ bir çift dizi olsun. $\mathbf{x}$ dizisinin bir L sayısına A -kuvvetli toplanabilir olması için gerek ve yeter koşul Pringsheim A -düzgün integrallenebilir ve yine L sayısına A -istatistiksel yakınsak olmasıdır.

İspat. $L = 0$ almak genelliği bozmayacaktır. $\mathbf{x} = (x_{jk})$ sıfıra A -istatistiksel yakınsak ve Pringsheim A -düzgün integrallenebilir bir çift dizi olsun. O halde her $\varepsilon, \delta > 0$ için

$$\sup_{n,m > N_1} \sum_{j,k: |x_{jk}| > \varepsilon/3} a_{jk}^{nm} < \delta,$$

olacak biçimde $N_1 = N_1(\varepsilon, \delta)$ ve $t > H$ olduğunda

$$\sup_{n,m > N_2} \sum_{j,k: |x_{jk}| > t} |x_{jk}| a_{jk}^{nm} < \varepsilon/3$$

olacak biçimde $N_2 = N_2(\varepsilon)$ ve $H = H(\varepsilon)$ pozitif sayıları mevcuttur. Ayrıca her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} |x_{jk}| a_{jk}^{nm} &\leq \sum_{j,k: |x_{jk}| > t} |x_{jk}| a_{jk}^{nm} \\ &\quad + \sum_{\substack{|x_{jk}| > \varepsilon/3 \\ |x_{jk}| \leq t}} |x_{jk}| a_{jk}^{nm} \\ &\quad + \sum_{|x_{jk}| \leq \varepsilon/3} |x_{jk}| a_{jk}^{nm} \end{aligned}$$

gerçeklenir. O halde $N = \max \{N_1, N_2\}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \sup_{n,m > N} \sum_{j,k} |x_{jk}| a_{jk}^n &\leq \sup_{n,m > N} \sum_{j,k: |x_{jk}| > t} |x_{jk}| a_{jk}^{nm} \\ &\quad + t \sup_{n,m > N} \sum_{j,k: |x_{jk}| > \varepsilon/3} a_{jk}^{nm} \\ &\quad + \varepsilon/3 \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $\delta = \varepsilon/3t$ seçilirse, her $\varepsilon, t > 0$ için

$$\sup_{n,m > N} \sum_{j,k} |x_{jk}| a_{jk}^{nm} \leq \sup_{n,m > N} \sum_{j,k: |x_{jk}| > t} |x_{jk}| a_{jk}^{nm} + 2\varepsilon/3$$

elde edilir. Böylece her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_{n,m > N} \sum_{j,k} |x_{jk}| a_{jk}^{nm} < \varepsilon$$

gerçeklenir. Yani $\mathbf{x}$ dizisi sıfıra A -kuvvetli toplanabilirdir.

Karşıt olarak $\mathbf{x}$ dizisi sıfıra A -kuvvetli toplanabilir olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \sum_{j,k: |x_{jk}| > \varepsilon} a_{jk}^{nm} &\leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j,k: |x_{jk}| > \varepsilon} |x_{jk}| a_{jk}^{nm} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j,k} |x_{jk}| a_{jk}^{nm} \end{aligned} \quad (3.1)$$

yazılabilir. (3.1) eşitsizliğinin sağ tarafı sıfıra P -yakınsak olduğundan $\mathbf{x}$ dizisi sıfıra A -istatistiksel yakınsaktır. Diğer yandan $\mathbf{x}$ dizisi sıfıra A -kuvvetli toplanabilir olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için $n, m > N$ olduğunda

$$\sum_{j,k} |x_{jk}| a_{jk}^{nm} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı vardır. Böylece her $t > 0$ için

$$\sup_{n,m > N} \sum_{j,k: |x_{jk}| > t} |x_{jk}| a_{jk}^{nm} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Bu sonuçlar çift dizileri alışılmış dizilere ve çok boyutlu dizileri çok boyutlu dizilere dönüştüren matrisler için de benzer şekilde verilir.

3.2 A -istatistiksel Yakınsaklığın Matris Karakterizasyonu

Alışılmış diziler için Fridy (1985) istatistiksel yakınsaklığın bir matris gösteriminin olmadığını ispatlamıştır. Fridy ve Miller (1991) ise sınırlı dizilerin istatistiksel yakınsaklığının iki boyutlu toplanabilme matrislerinin belli bir sınıfındaki tüm matris metodlarına göre toplanabilmeye denk olduğunu göstermiştir. Khan ve Orhan (2007) yaygın bir düşünce olan A -istatistiksel yakınsaklığın bir matris gösterimine sahip olamayacağı düşüncesinin yanlış olduğunu göstermiş ve A -düzgün integralenebilir diziler uzayı üzerinde A -istatistiksel yakınsaklığın negatif olmayan regüler üçgensel bir matris metoduna denk olduğunu ispatlamıştır. Bu kısımda çift diziler için de benzeri problemleri gözönüne alacağız.

$\delta^{(2)}(K) = 0$ şartını sağlayan her $K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $\delta_A^{(2)}(K) = 0$ olacak biçimdeki iç dikedörtgensel ve $\mathbb{M}_{(2)}^+$ sınıfından olan dört boyutlu matrislerin sınıfı $\tau^{(2)}$ ile gösterilmek üzere Miller aşağıdaki sonucu vermiştir:

Teorem 3.3 *Sınırlı bir $\mathbf{x}$ çift dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $A \in \tau^{(2)}$ için yine L sayısına A -toplanabilir olmasıdır (Miller, 2008).*

Bu kısımda Khan ve Orhan'ın (2007) alışılmış diziler için verdiği sonuçtan yola çıkarak çift diziler için de ilgi çekici bir problem olan A -istatistiksel yakınsaklığın matris karakterizasyonu verilecektir ve Pringsheim A -düzgün integrallenebilir diziler ve dolayısıyla sınırlı çift diziler üzerinde A -istatistiksel yakınsaklığın negatif olmayan RH -regüler ve dikdörtgensel bir matris metoduna denk olduğu gösterilecektir. Ancak sözünü ettiğimiz karakterizasyonu verebilmek için öncelikle aşağıdaki lemmayı ispatlayacağız:

Lemma 3.1 $A = (a_{jk}^{nm})$ dört boyutlu RH -regüler bir matris ise her n, m için

$$\sum_{j,k} c_{jk}^{nm} = 1$$

ve Pringsheim A -düzgün integrallenebilir her $\mathbf{x} = (x_{jk})$ dizisi için

$$P\text{-}\lim_{n,m} \sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{nm} = P\text{-}\lim_{n,m} \sum_{j,k} x_{jk} c_{jk}^{nm}$$

olacak biçimde iç dikdörtgensel bir RH -regüler $C = (C_{jk}^{nm})$ dört boyutlu matrisi mevcuttur. Üstelik A negatif olmayan bir matris ise C de negatif olmayandır.

İspat. $A = (a_{jk}^{nm})$ dört boyutlu RH -regüler bir matris ve $\mathbf{x} = (x_{jk})$ Pringsheim A -düzgün integrallenebilir çift bir dizi olsun. A RH -regüler olduğundan her n, m için $\sum_{j,k} a_{jk}^{nm}$ çift serisi yakınsaktır. O halde her n, m için $\varepsilon_{nm} > 0$ ve $P\text{-}\lim_{n,m} \varepsilon_{nm} = 0$ olmak üzere

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq J(n,m) \\ k > K(n,m)}} |a_{jk}^{nm}| + \sum_{\substack{1 \leq k \leq K(n,m) \\ j > J(n,m)}} |a_{jk}^{nm}| + \sum_{\substack{j > J(n,m) \\ k > K(n,m)}} |a_{jk}^{nm}| < \varepsilon_{nm} \quad (3.2)$$

olacak biçimde pozitif tam sayıların $J(n, m), K(n, m)$ çift dizileri mevcuttur. $\mathbf{x} \in \mathbb{U}_A^{(2)}$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $t > h(\varepsilon)$ olduğunda

$$\sup_{n,m > N} \sum_{|x_{jk}| > t} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| < \varepsilon/3. \quad (3.3)$$

olacak biçimde bir $N = N(\varepsilon)$ ve bir $h = h(\varepsilon)$ mevcuttur. Şimdi dört boyutlu iç sonlu $D = (d_{jk}^{nm})$ matrisini

$$d_{jk}^{nm} := \begin{cases} a_{jk}^{nm}, & j \leq J(n, m) \text{ ve } k \leq K(n, m) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde (3.3) eşitsizliğinden her $n, m > N$ ve $t > h(\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned} |(Ax)_{nm} - (Dx)_{nm}| &= \left| \sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{nm} - \sum_{j,k} x_{jk} d_{jk}^{nm} \right| \\ &= \left| \sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{nm} - \sum_{\substack{1 \leq j \leq J(n,m) \\ 1 \leq k \leq K(n,m)}} x_{jk} a_{jk}^{nm} \right| \\ &\leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq J(n,m) \\ k > K(n,m)}} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| + \sum_{\substack{j > J(n,m) \\ 1 \leq k \leq K(n,m)}} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| \\ &\quad + \sum_{\substack{j > J(n,m) \\ k > K(n,m)}} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| \\ &\leq 3 \sup_{n,m \geq N} \sum_{|x_{jk}| > t} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| + t \sum_{\substack{1 \leq j \leq J(n,m) \\ k > K(n,m)}} |a_{jk}^{nm}| \\ &\quad + t \sum_{\substack{j > J(n,m) \\ 1 \leq k \leq K(n,m)}} |a_{jk}^{nm}| + t \sum_{\substack{j > J(n,m) \\ k > K(n,m)}} |a_{jk}^{nm}| \\ &\leq \varepsilon + t \left\{ \sum_{\substack{1 \leq j \leq J(n,m) \\ k > K(n,m)}} |a_{jk}^{nm}| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{j > J(n,m) \\ 1 \leq k \leq K(n,m)}} |a_{jk}^{nm}| + \sum_{\substack{j > J(n,m) \\ k > K(n,m)}} |a_{jk}^{nm}| \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (3.2) eşitsizliği yardımıyla $n, m \rightarrow \infty$ için

$$|(Ax)_{nm} - (Dx)_{nm}| \rightarrow 0$$

elde edilir. Ayrıca A ve D matrisleri $\mathbb{U}_A^{(2)}$ üzerinde denktir. Şimdi

$$\alpha_{nm} := \sum_{j,k} d_{jk}^{nm} = \sum_{\substack{1 \leq j \leq J(n,m) \\ 1 \leq k \leq K(n,m)}} a_{jk}^{nm}.$$

tanımlayalım. A RH -regüler olduğundan $P\text{-}\lim_{n,m} \alpha_{nm} = 1$ olmalıdır. Her n, m için $\alpha_{nm} \neq 0$ almak genelliği bozmayacaktır. Dört boyutlu $B = (b_{jk}^{nm})$ matrisini

$$b_{jk}^{nm} := \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{nm}} a_{jk}^{nm}, & j \leq J(n, m) \text{ ve } k \leq K(n, m) \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}.$$

şeklinde tanımlarsak B ve D matrisleri denk olup her n, m için

$$\sum_{j,k} b_{jk}^{nm} = 1$$

sağlanır. Son olarak elde ettiğimiz satır sonlu B matrisini iç dikdörtgenselleştirelim: Bunun için pozitif tamsayıların γ, β ve η dizilerini $i = 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned} \gamma(i) &= \max \left\{ \max_{1 \leq r \leq i+1} J(r, i+1), \max_{1 \leq r \leq i+1} J(i+1, r) \right\}, \\ \beta(i) &= \max \left\{ \max_{1 \leq r \leq i+1} K(r, i+1), \max_{1 \leq r \leq i+1} K(i+1, r) \right\}, \\ \eta(i) &= \max \{ \gamma(i), \beta(i) \} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. $\gamma(0) = \beta(0) = 0$ olmak üzere B matrisinin iç dikdörtgenselleştirilmiş hali olan C matrisi oluşturalım. Her $i = 1, 2, \dots$ için $\eta(i) > i + 1 + \eta(i-1)$ ise her $n, m \geq \eta(i-1) + i + 1$ için C matrisinin $(n + \eta(i) - 1, m + \eta(i) - 1)$ ikilisine karşılık gelen iç matrisine A matrisinin (n, m) ikilisine karşılık gelen iç matrisini yazalım. Geriye kalan iç matrisleri ise $Q(0) = \emptyset$,

$$R(i) := Q(i) \setminus Q(i-1)$$

ve

$$Q(i) := \{ [B(n, m)_{jk}] : 1 \leq n, m \leq i + 1 \}$$

olmak üzere $R(i)$ kümesinden rastgele seçelim. Böylece elde edilen C matrisi iç dikdörtgensel olup C matrisinin tüm iç matrisleri sonlu sayıda sütun ve satır hariç B matrisinin tüm iç matrisleri ile aynı olduğundan B ve C matrisleri denktir. Yine C matrisinin tüm iç matrisleri B matrisinden elde edildiğinden

$$\sum_{j,k} c_{jk}^{nm} = 1$$

olmalıdır. Ayrıca A ile C matrisleri $\mathbb{U}_A^{(2)}$ üzerinde denk ve $l_\infty^{(2)} \subset \mathbb{U}_A^{(2)}$ olduğundan A matrisinin RH -regüler olması C matrisinin RH -regüler olmasını gerektirir. ■

Bu lemmayı kullanarak Miller'ın negatif olmayan ve iç dikdörtgensel dört boyutlu matrisler için verdiği sonucu negatif olmayan RH -regüler matrisler için verebiliriz.

Önerme 3.1 $A = (a_{jk}^{nm})$ negatif olmayan RH -regüler dört boyutlu bir matris olsun.

Bu durumda bir $\mathbf{x} = (x_{jk})$ dizisi bir L sayısına A -istatistiksel yakınsak ise

$$\delta_A^{(2)}(K) = 0$$

ve $P\text{-}\lim_{(j,k) \in K^c} x_{jk} = L$ olacak biçimde bir $K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mevcuttur.

İspat. Kabul edelim ki $\mathbf{x}$ dizisi bir L sayısına A -istatistiksel yakınsak olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} 0 &= P\text{-}\lim_{n,m} \sum_{j,k: |x_{jk}-L| > \varepsilon} a_{jk}^{nm} \\ &= P\text{-}\lim_{n,m} \sum_{j,k} \chi_{jk}(|x_{jk} - L| > \varepsilon) a_{jk}^{nm} \\ &= A(\{\chi_{jk}(|x_{jk} - L| > \varepsilon)\}) \end{aligned}$$

elde edilir ve $\{\chi_{jk}(|x_{jk} - L| > \varepsilon)\}$ dizisi sınırlı olduğundan aynı zamanda Pringsheim A -düzgün integrallenebilirdir. Burada $E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olmak üzere E kümesinin $\chi = (\chi_{jk})$ karakteristik çift dizisi

$$\chi_{jk}(E) := \begin{cases} 1, & (j, k) \in E \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlanmaktadır. Böylece Lemma 3.1'den iç dikdörtgensel, RH -regüler, her n, m için

$$\sum_{j,k} c_{jk}^{nm} = 1$$

ve

$$0 = A(\{\chi_{jk}(|x_{jk} - L| > \varepsilon)\}) = C(\{\chi_{jk}(|x_{jk} - L| > \varepsilon)\})$$

olacak biçimde bir $C = (c_{jk}^{nm})$ dört boyutlu matrisi mevcuttur. $C(\{\chi_{jk}(|x_{jk} - L| > \varepsilon)\}) = 0$ olduğundan $\mathbf{x}$ dizisi L sayısına C -istatistiksel yakınsaktır. O halde Önerme 2.1'den

$$\delta_C^{(2)}(K) = 0$$

ve $P\text{-}\lim_{(j,k) \in K^c} x_{jk} = L$ olacak biçimde bir $K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mevcuttur. Buradan $\{\chi_{jk}(K)\} \in \mathbb{U}_A^{(2)}$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_C^{(2)}(K) \\ &= P\text{-}\lim_{n,m} \sum_{j,k \in K} c_{jk}^{nm} \\ &= C(\{\chi_{jk}(K)\}) \\ &= A(\{\chi_{jk}(K)\}) \\ &= P\text{-}\lim_{n,m} \sum_{j,k \in K} a_{jk}^{nm} \\ &= \delta_A^{(2)}(K) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

Aşağıdaki teorem Pringsheim A -düzgün integrallenebilir diziler uzayı üzerinde A -istatistiksel yakınsaklığın dört boyutlu matris karakterizasyonunu vermektedir.

Teorem 3.4 $A = (a_{jk}^{nm})$ negatif olmayan dört boyutlu RH -regüler bir matris olsun. Her $\mathbf{x} \in \mathbb{U}_A^{(2)}$ için $st_A^{(2)}\text{-}\lim \mathbf{x} = B(\mathbf{x})$ olacak şekilde negatif olmayan, RH -regüler ve iç dikdörtgensel dört boyutlu bir $B = (b_{jk}^{nm}) \in M_{(2)}^+$ matrisi vardır.

İspat. Lemma 3.1'den A matrisini negatif olmayan iç dikdörtgensel ve her n, m için

$$\sum_{j,k} a_{jk}^{nm} = 1$$

olacak şekilde alabiliriz. B matrisinin varlığını ispat edebilmek için öncelikle bir $C = (c_{jk}^{nm})$ matrisi tanımlayacağız. Bunun için bir $\sigma = \sigma(i)$ dizisini her $i = 1, 2, \dots$ için

$$\sigma(i) := \frac{i^2 + \frac{(-1)^{i+1}+1}{2}}{2}$$

şeklinde tanımlayalım. Şimdi $E(0) = \emptyset$ ve $N_i := \sum_{k=1}^i 2^{\sigma(k)}$ olmak üzere $i = 1, 2, \dots$ için

$$E(i) := \{(n, m) : 1 \leq n, m \leq N_i\},$$

$$F(i-1, i) := E(i) \setminus E(i-1)$$

ve $N_0 = 0$ olmak üzere

$$G_{pq} := \{(n, m) : N_{p-1} < n \leq N_p, N_{q-1} < m \leq N_q\}$$

kümelerini tanımlayalım. $|G_{pq}| = 2^{\sigma(p)+\sigma(q)}$ ve $F(i-1, i) = \left(\bigcup_{p=1}^i G_{pi}\right) \cup \left(\bigcup_{q=1}^{i-1} G_{iq}\right)$ gerçekleşir. C matrisinin G_{pq} kümesine karşılık gelen iç matrislerini aşağıdaki algoritma ile belirleyelim:

G_{pq} kümesinin $\binom{pq}{0}$ sayıda elemanına (ikilisine) karşılık gelen iç matrislere $[A(p, q)_{j,k}]$ iç matrisi yazılsın, sırayla $k = 1, 2, \dots, pq$ için $\binom{pq}{k}$ terimin her biri için $[A(p, q)_{j,k}]^{(k)}$ kümesinden herhangi bir matris seçilsin. Benzer şekilde $F(i-1, i)$ kümesi içindeki tüm $G_{p1}, G_{p2}, \dots, G_{pi}$ ve $G_{i1}, G_{i2}, \dots, G_{(i-1),q}$ kümeleri için aynı işlem tekrarlınsın. Burada $\sum_{k=0}^{pq} \binom{pq}{k} = 2^{pq}$ sayıda terim seçimi vardır. G_{pq} kümesi $2^{\sigma(p)+\sigma(q)}$ sayıda terim içerdiğinden geriye kalan $2^{\sigma(p)+\sigma(q)} - 2^{pq}$ terim için tüm terimleri sıfır olan θ matrisi yazılsın.

Şimdi dört boyutlu $B = (b_{jk}^{nm})$ matrisini

$$\xi_{sr} := \sum_{j \leq s, k \leq r} c_{jk}^{sr}, \quad (s, r) \in G_{nm}$$

olmak üzere

$$b_{jk}^{sr} := (1 - \xi_{sr})a_{jk}^{nm} + c_{jk}^{sr}$$

şeklinde tanımlayalım. C matrisinin terimleri A matrisinin terimleri ile aynı olduğundan her s, r için $0 \leq \xi_{sr} \leq 1$ olur. Buradaki B matrisinin RH -regüler olduğunu gösterelim: $P - \lim_{s,r} c_{jk}^{sr} = 0$ ve ξ sınırlı olduğundan

$$\begin{aligned} P - \lim_{s,r} b_{jk}^{sr} &= P - \lim_{s,r} ((1 - \xi_{sr})a_{jk}^{nm} + c_{jk}^{sr}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve $s \geq n$ ve $r \geq m$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{j \leq s, k \leq r} b_{jk}^{sr} &= \sum_{j \leq s, k \leq r} ((1 - \xi_{sr})a_{jk}^{nm} + c_{jk}^{sr}) \\
&= (1 - \xi_{sr}) \sum_{j \leq s, k \leq r} a_{jk}^{nm} + \sum_{j \leq s, k \leq r} c_{jk}^{sr} \\
&= (1 - \xi_{sr}) + \xi_{sr} \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece RH1 ve RH2 şartları sağlanır. Sonlu sayıda θ matrisi hariç C matrisinin terimleri A matrisi ile aynı olduğundan RH3-4-5-6 şartları da gerçekleşir. Şimdi $\mathbf{x}$ sıfıra A -istatistiksel yakınsak ve Pringsheim A -düzgün integrallenebilir bir çift dizi olsun. O halde Önerme 2.1'den $\delta_A^{(2)}(K) = 0$ ve $P - \lim_{(j,k) \in K^c} x_{jk} = 0$ olacak biçimde bir $K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mevcuttur. Her $(s, r) \in G_{nm}$ ve her $M, H > 0$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j,k} x_{jk} b_{jk}^{sr} \right| &\leq \left| \sum_{|x_{jk}| > M} x_{jk} b_{jk}^{sr} \right| + \left| \sum_{|x_{jk}| \leq M} x_{jk} b_{jk}^{sr} \right| \\
&\leq \sup_{n,m \geq H} \sum_{|x_{jk}| > M} |x_{jk}| b_{jk}^{sr} + M \sum_{j,k \in K} b_{jk}^{sr} + \left| \sum_{\substack{|x_{jk}| \leq M \\ j,k \in K^c}} x_{jk} b_{jk}^{sr} \right| \\
&\leq 2 \sup_{n,m \geq H} \sum_{|x_{jk}| > M} |x_{jk}| a_{jk}^{nm} + 2M \sum_{j,k \in K} a_{jk}^{nm} + \left| \sum_{\substack{|x_{jk}| \leq M \\ j,k \in K^c}} x_{jk} b_{jk}^{sr} \right|.
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada M sayısı ilk terim yeterince küçük olacak şekilde istenildiği kadar büyük seçilebilir. s, r yeterince büyük olduğunda n, m de yeterince büyük olduğundan ikinci terim sıfıra P -yakınsaktır. Ayrıca $\mathbf{x}$ dizisi K^c üzerinde P -yakınsak, $|x_{jk}| < M$ ve B matrisi RH -regüler olduğundan $s, r \rightarrow \infty$ için son terim de sıfıra P -yakınsaktır. Buradan $B(\mathbf{x}) = 0$ elde edilir. Karşıt olarak $\mathbf{x} \in \mathbb{U}_A^{(2)}$ ve $B(\mathbf{x}) = 0$ olsun. B matrisinin G_{sr} kümesine karşılık gelen iç matrislerinin ilki A matrisinin (s, r) ikilisine karşılık gelen iç matrisi olduğundan $A(\mathbf{x}) = 0$ elde edilir. Böylece C matrisinin tanımı gereği $C(\mathbf{x}) = 0$ olmalıdır. Şimdi $\mathbf{x}$ dizisinin ilk $n \times m$ teriminin negatif işaretlileri kesinlikle A matrisinin $[A(n, m)_{j,k}]$ teriminin (iç matrisinin) sıfırla yer değiştirilmemiş terimlerine karşılık gelecek şekilde bir $(s, r) \in G_{nm}$ seçelim.

$C(\mathbf{x}) = 0$ olduğundan

$$\sum_{j,k} x_{jk} \chi_{jk}(x_{jk} < 0) a_{jk}^{nm} \rightarrow 0.$$

gerçeklenir. Aynı işlem $\mathbf{x}$ dizisinin pozitif terimleri için de tekrarlanırsa

$$\sum_{j,k} x_{jk} \chi_{jk}(x_{jk} \geq 0) a_{jk}^{nm} \rightarrow 0$$

elde edilir. Yani

$$\sum_{j,k} |x_{jk}| a_{jk}^{nm} \rightarrow 0$$

olduğu görülür. Bu sonuç $\mathbf{x}$ dizisinin sıfıra A -kuvvetli toplanabilir olması demektir.

Bu ise $st_A^{(2)} - \lim x = 0$ olmasını gerektirir. ■

Bu teorem Pringsehim A -düzgün integrallenebilir diziler uzayı üzerinde A -istatistiksel yakınsaklığı bir matris metodu ile karakterize ettiğinden toplanabilme teorisinde Pringsehim A -düzgün integrallenebilir diziler uzayı üzerinde dört boyutlu matris toplanabilmeyle ilgili bilinen tüm sonuçlar A -istatistiksel yakınsaklık için de geçerlidir.

4. DÖRT BOYUTLU MATRİSLERİN TOPLANABİLİRLİK ALANLARININ ÇARPAN UZAYLARI

Bu bölümde öncelikle sınırlı tutarlılık teoreminin çift diziler için bir versiyonu verilecek ve daha sonra dört boyutlu matrislerin toplanabilirlik alanlarının çarpan uzaylarına ilişkin bazı sonuçlar verilecektir. Önce alışılmış diziler için A -sınırlılık ve çarpan uzay tanımlarını hatırlatıp daha sonra çift diziler için Pringsheim A -sınırlılık ve çarpan uzay tanımlarını verelim:

$x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere

$$\sup_n \sum_k |x_k| |a_{nk}| < \infty$$

oluyorsa x dizisi A -sınırlıdır denir. *Tüm A -sınırlı dizilerin uzayı $\mathbb{S}_A$ ile gösterilir.*

Tanım 4.1 $A = (a_{jk}^{nm})$ dört boyutlu bir matrisi $\mathbf{x} = (x_{jk})$ çift bir dizi olmak üzere

$$\sup_{n,m \geq H} \sum_{j,k} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| < \infty$$

olacak biçimde bir $H > 0$ sayısı mevcutsa $\mathbf{x}$ dizisine Pringsheim A -sınırlıdır denir. *Tüm Pringsheim A -sınırlı çift dizilerin uzayı $\mathbb{S}_A^{(2)}$ ile gösterilir.*

$\mathcal{E}$ ve $\mathcal{F}$ iki dizi uzayı ve $\mathcal{U}$ bir cebir (yani, her $x, y \in \mathcal{U}$ için $xy \in \mathcal{U}$ ve $xy = (x_k y_k)$) olmak üzere

$$m_{\mathcal{U}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) := \{x \in \mathcal{U} : \text{her } y \in \mathcal{E} \text{ için } xy \in \mathcal{F}\}$$

kümesine $\mathcal{U}$ üzerinde çarpanların uzayı denir. $m_{\mathcal{U}}(c_A \cap \mathcal{U}, c_A)$ yerine kısaca $m(\mathcal{U})$ gösterimi kullanılır. Burada $\mathcal{U}$ dizi uzayının cebir olması $xy = (x_k y_k)$ olmak üzere her $x, y \in \mathcal{U}$ için $xy \in \mathcal{U}$ olması demektir. Bu kavramların çift diziler için genişletmeleri aşağıdadır:

Tanım 4.2 Φ ve Ψ iki çift dizi uzayı ve $\mathcal{U}$ çift dizilerin bir cebiri olmak üzere

$$m_{\mathcal{U}}^{(2)}(\Phi, \Psi) := \{x \in \mathcal{U} : \text{her } y \in \Phi \text{ için } xy \in \Psi\}$$

uzayına $\mathcal{U}$ üzerinde çarpanların uzayı diyeceğiz. Uygunluk açısından

$$m^{(2)}(\mathcal{U}) := m_{\mathcal{U}}^{(2)}(c_A^{(2)} \cap \mathcal{U}, c_A^{(2)})$$

gösterimini kullanacağız. Burada $\mathcal{U}$ dizi uzayının cebir olması $xy = (x_{jk}y_{jk})$ olmak üzere her $x, y \in \mathcal{U}$ için $xy \in \mathcal{U}$ olması demektir.

4.1 Sınırlı Tutarlılık Teoremi

Çift diziler için vereceğimiz sonuçlara geçmeden önce alışılmış diziler için Brudno-Mazur-Orlicz sınırlı tutarlılık teoremini hatırlatalım:

Teorem 4.1 *A ve B, A-toplanabilir her sınırlı dizi B toplanabilir olacak biçimde iki boyutlu regüler matrisler ise bu iki matris sınırlı A-toplanabilir her diziyi aynı değere toplar (Boos 2000).*

Khan ve Orhan (2007) yine alışılmış diziler için bu teoremin bir versiyonunu iki boyutlu matrislerin tüm sınırlı dizileri içeren bir cebir üzerindeki çarpan uzaylarını kullanarak vermiştir. Bu teoremi ispatsız verelim:

Teorem 4.2 *A ve B iki boyutlu regüler matrisler ve $\mathcal{U}, l_{\infty} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{S}_A \cap \mathbb{S}_B$ olacak biçimde bir cebir olsun. Eğer $c_A \cap \mathcal{U} \subseteq c_B \cap \mathcal{U}$ ise A ile B matrisleri $m(\mathcal{U})$ çarpan uzayı üzerinde tutarlıdır.*

Patterson (2004) ise çift diziler için Brudno-Mazur-Orlicz teoreminin benzerini ispatlamıştır. Aşağıdaki iki teorem ile Khan ve Orhan (2007)'ın alışılmış diziler için verdiği sonucun benzerleri çift diziler için verilecektir.

Teorem 4.3 *$A = (a_{jk}^{nm})$ ve $B = (b_{jk}^{nm})$ her $j, k \in \mathbb{N}$ için*

$$P - \lim_{n,m} a_{jk}^{nm} = P - \lim_{n,m} b_{jk}^{nm} = 0. \quad (4.1)$$

olacak şekilde dört boyutlu matrisler olsun. Eğer $\mathbb{S}_A^{(2)} \cap c_A^{(2)} \subseteq \mathbb{S}_B^{(2)} \cap c_B^{(2)}$ oluyorsa her $x \in \mathbb{S}_A^{(2)} \cap c_A^{(2)}$ için $A(x) = B(x)$ gerçekleşir.

İspat. $\mathbb{S}_A^{(2)} \cap c_A^{(2)} \subseteq \mathbb{S}_B^{(2)} \cap c_B^{(2)}$ olmak üzere kabul edelim ki $A(\mathbf{x}) \neq B(\mathbf{x})$ olacak şekilde bir $\mathbf{x} = (x_{jk}) \in \mathbb{S}_A^{(2)} \cap c_A^{(2)}$ çift dizisi mevcut olsun. $A(\mathbf{x}) = \alpha \neq \beta = B(\mathbf{x})$ alalım. Bir $\mathbf{x}' = (x'_{jk})$ çift dizisini

$$x'_{jk} = \frac{x_{jk} - \alpha}{\alpha - \beta}$$

şeklinde tanımlarsak $\mathbf{x}' \in \mathbb{S}_A^{(2)} \cap c_A^{(2)}$ olup $A(\mathbf{x}') = \frac{\alpha - \alpha}{\alpha - \beta} = 0$ ve $B(\mathbf{x}') = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = 1$ gerçekleşir. Bu durumda $\mathbf{x}$ dizisini $A(\mathbf{x}) = 0$ ve $B(\mathbf{x}) = 1$ olacak şekilde almak genelliği bozmayacaktır. $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_A^{(2)} \cap c_A^{(2)}$ olduğundan her $n, m > H$ için $\sum_{j,k} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}|$ serisi yakınsak olacak biçimde $H > 0$ sayısı mevcuttur. Buradan her $\varepsilon > 0$ ve her $n, m > H$ için

$$\sum_{j \leq N, k > M} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| + \sum_{j > N, k \leq M} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| + \sum_{j > N, k > M} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| < \varepsilon \quad (4.2)$$

olacak biçimde $N = N(n, m)$, $M = M(n, m)$ pozitif tamsayıları mevcuttur. Şimdi $J(0) = K(0) = 0$ olsun ve $P(1), Q(1) > H$ olacak şekilde $P(1), Q(1)$ sayılarını seçelim. (4.2) eşitsizliğinden $H < n \leq P(1)$, $H < m \leq Q(1)$ olduğunda

$$\sum_{j \leq J(1), k > K(1)} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| + \sum_{j > J(1), k \leq K(1)} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| + \sum_{j > J(1), k > K(1)} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| < 1$$

olacak biçimde $J(1), K(1)$ sayıları seçilebilir. Şimdi, (4.1) eşitliğinden, $n > P(2)$ ve $m > Q(2)$ olduğunda

$$\sum_{j \leq J(1), k \leq K(1)} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| < 1$$

olacak biçimde $P(2) > P(1)$ ve $Q(2) > Q(1)$ sayıları seçilebilir. Benzer şekilde devam ederek herhangi bir $i \geq 1$ için

$$P(1) < P(2) < \dots < P(i)$$

$$Q(1) < Q(2) < \dots < Q(i)$$

$$J(1) < J(2) < \dots < J(i-1)$$

$$K(1) < K(2) < \dots < K(i-1)$$

sayıları seçilebilir. Şimdi de $H < n \leq P(i)$ ve $H < m \leq Q(i)$ olduğunda

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \leq J(i), k > K(i)} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| + \sum_{j > J(i), k \leq K(i)} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| \\
& + \sum_{j > J(i), k > K(i)} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| < \frac{1}{i}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

olacak biçimde $J(i) > J(i-1)$ ve $K(i) > K(i-1)$ sayıları ve $n > P(i+1)$ ve $m > Q(i+1)$ olduğunda

$$\sum_{j \leq J(i), k \leq K(i)} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| < \frac{1}{i} \tag{4.4}$$

olacak biçimde $P(i+1) > P(i)$ ve $Q(i+1) > Q(i)$ sayıları seçilebilir. Her $s, r = 0, 1, 2, \dots$ için $E(r)$ ve $F(r, s)$ indis kümelerini

$$E(r) := \{(j, k) : 1 \leq j \leq J(r+1), 1 \leq k \leq K(r+1)\}$$

$$E(-1) := \emptyset$$

ve

$$F(r, s) := E(s) \setminus E(r).$$

şeklinde tanımlayalım. (4.3) eşitsizliğinden her $H < n \leq P(i)$ ve $H < m \leq Q(i)$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{r > i-1} \sum_{(j,k) \in F(r-1, r)} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| &= \sum_{j \leq J(i), k > K(i)} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| \\
&+ \sum_{j > J(i), k \leq K(i)} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| \\
&+ \sum_{j > J(i), k > K(i)} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| \\
&< \frac{1}{i}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ve (4.4) eşitsizliğinden her $n > P(i+1)$ ve $m > Q(i+1)$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leq r < i} \sum_{(j,k) \in F(r-1, r)} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| &= \sum_{j \leq J(i), k \leq K(i)} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| \\
&< \frac{1}{i}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir.

Diğer yandan her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
(A\mathbf{x})_{nm} &= \sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{nm} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{(j,k) \in F(r-1,r)} x_{jk} a_{jk}^{nm} \\
&= \sum_{0 \leq r < i-1} \sum_{(j,k) \in F(r-1,r)} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| + \sum_{(j,k) \in F(i-2,i)} x_{jk} a_{jk}^{nm} \\
&\quad + \sum_{r > i} \sum_{(j,k) \in F(r-1,r)} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}|. \tag{4.7}
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Böylece (4.5), (4.6) eşitsizlikleri ve (4.7) eşitliğinden her $P(i) < n \leq P(i+1)$ ve $Q(i) < m \leq Q(i+1)$ için

$$(A\mathbf{x})_{nm} = O\left(\frac{1}{i}\right) + \sum_{(j,k) \in F(i-2,i)} x_{jk} a_{jk}^{nm} \tag{4.8}$$

elde edilir. Benzer şekilde yine her $P(i) < n \leq P(i+1)$ ve $Q(i) < m \leq Q(i+1)$ için

$$(B\mathbf{x})_{nm} = O\left(\frac{1}{i}\right) + \sum_{(j,k) \in F(i-2,i)} x_{jk} b_{jk}^{nm}$$

elde edilebilir. Şimdi $\eta = (\eta_i)$, her i için $\eta_i \in (0, 1]$, $\liminf_i \eta_i = 0$, $\limsup_i \eta_i = 1$ ve $\lim_i (\eta_{i+1} - \eta_i) = 0$ olacak şekilde bir dizi olmak üzere, bir $\mathbf{y} = (y_{jk})$ çift dizisini

$$y_{jk} = x_{jk} \eta_r, \text{ for } (j, k) \in F(r-1, r-2)$$

ile tanımlayalım. Tanımdan dolayı $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_A^{(2)}$ olduğu açıktır. η sınırlı bir dizi,

$$F(i-2, i-1) = F(i-2, i-1) \cup F(i-1, i)$$

ve $F(i-2, i-1) \cap F(i-1, i) = \emptyset$ olduğundan her $i \in N$ ve $P(i) < n \leq P(i+1)$, $Q(i) < m \leq Q(i+1)$ için

$$\begin{aligned}
(A\mathbf{y})_{nm} &= \sum_{j,k} y_{jk} a_{jk}^{nm} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \eta_{r+1} \sum_{(j,k) \in F(r-1, r)} x_{jk} a_{jk}^{nm} \\
&= \sum_{0 \leq r < i-1} \sum_{(j,k) \in F(r-1, r)} x_{jk} a_{jk}^{nm} + \eta_i \sum_{(j,k) \in F(i-2, i-1)} x_{jk} a_{jk}^{nm} \\
&\quad + \eta_{i+1} \sum_{(j,k) \in F(i-1, i)} x_{jk} a_{jk}^{nm} + \sum_{r > i} \eta_{i+1} \sum_{(j,k) \in F(r-1, r)} x_{jk} a_{jk}^{nm} \\
&= O\left(\frac{1}{i}\right) + \eta_i \sum_{(j,k) \in F(i-2, i-1)} x_{jk} a_{jk}^{nm} + \eta_{i+1} \sum_{(j,k) \in F(i-1, i)} x_{jk} a_{jk}^{nm} \\
&= O\left(\frac{1}{i}\right) + \eta_i \sum_{(j,k) \in F(i-2, i)} x_{jk} a_{jk}^{nm} \\
&\quad + (\eta_{i+1} - \eta_i) \sum_{(j,k) \in F(i-1, i)} x_{jk} a_{jk}^{nm}. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan (4.8) eşitliğinden

$$\eta_i \left((A\mathbf{x})_{nm} + O\left(\frac{1}{i}\right) \right) = \eta_i \sum_{(j,k) \in F(i-2, i)} x_{jk} a_{jk}^{nm}$$

elde edilir. $P - \lim_{n,m} (A\mathbf{y})_{nm} = 0$ olduğundan bu ifade sifıra P -yakınsaktır. Ayrıca $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_A^{(2)}$ olduğundan

$$\sup_{n,m > T} \left| \sum_{(j,k) \in F(i, i)} x_{jk} a_{jk}^{nm} \right| \leq \sup_{n,m > T} \sum_{(j,k) \in F(i, i)} |x_{jk} a_{jk}^{nm}| < \infty. \tag{4.10}$$

olacak biçimde $T > 0$ mevcuttur. $\lim_i (\eta_{i+1} - \eta_i) = 0$ olduğundan, (4.10) eşitsizliğinden (4.9) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ifade sifıra gider. Böylece (4.9) eşitsizliğinin sağ tarafı sifıra P -yakınsaktır. Bu ise $(A\mathbf{y})_{nm}$ dizisinin sifıra P -yakınsak olması demektir; yani $\mathbf{y}$ dizisi sifıra A -toplanabilirdir. Benzer şekilde her $i \in N$ ve $P(i) < n \leq P(i+1)$, $Q(i) < m \leq Q(i+1)$ için

$$(B\mathbf{y})_{nm} = O\left(\frac{1}{i}\right) + \eta_i \left((B\mathbf{x})_{nm} + O\left(\frac{1}{i}\right) \right). \tag{4.11}$$

elde edilebilir. $P - \lim_{n,m} (B\mathbf{x})_{nm} = 1$ ve η dizisi 0 ile 1 arasında salınım yaptığından (4.11) eşitliğinden $P - \lim_{n,m} (B\mathbf{y})_{nm}$ limiti mevcut değildir. Bu ise çelişkidir. ■

Uyarı 4.1 Bir önceki ispattaki özelliklere uyan bir η dizisi örneği verelim. Eğer

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots + \underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ tane}} - \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \dots - \frac{1}{n}}_{n \text{ tane}} + \dots$$

serisinin kısmi toplamlar dizisi $\eta = (\eta_i)$ olarak alınrsa, η dizisi her i için $\eta_i \in (0, 1]$, $\liminf_i \eta_i = 0$, $\limsup_i \eta_i = 1$ ve $\lim_i (\eta_{i+1} - \eta_i) = 0$ olacak şekilde bir dizidir (Petersen 1966).

Aşağıdaki teorem bir önceki teoreme benzer teknikle ispatlanabilir:

Teorem 4.4 $A = (a_{jk}^{nm})$ ve $B = (b_{jk}^{nm})$ her $j, k \in \mathbb{N}$ için

$$P - \lim_{n,m} a_{jk}^{nm} = P - \lim_{n,m} b_{jk}^{nm} = 0. \quad (4.12)$$

olacak şekilde dört boyutlu matrisler ve $\mathcal{U}$, $l_\infty^{(2)} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{S}_A^{(2)} \cap \mathbb{S}_B^{(2)}$ olacak biçimde bir cebir olsun. Eğer $c_A^{(2)} \cap \mathcal{U} \subseteq c_B^{(2)} \cap \mathcal{U}$ ise A ile B matrisleri $m^{(2)}(\mathcal{U})$ çarpan uzayı üzerinde tutarlıdır.

4.2 Çarpan Uzaylar

Khan ve Orhan (2007) alışılmış diziler için çarpan uzay üzerinde tutarlık teoremini kullanarak çarpan uzaylara ilişkin ilginç sonuçlar vermiştir ve negatif olmayan regüler bir matrisin toplanabilirlik alanının bir cebir üzerindeki çarpanlarının aslında cebirdeki A -istatistiksel yakınsak dizilerle çakıştığını göstermiştir. Tezin bu kısmında dört boyutlu RH -regüler matrisler için çarpan uzaylar incelenecek ve aşağıdaki teorem ile Khan ve Orhan (2007)'in sözü edilen sonuçları dört boyutlu matrisler ve çift diziler için verilecektir:

Teorem 4.5 $A = (a_{jk}^{nm})$ dört boyutlu RH -regüler bir matris ve $\mathcal{U}$ dizi uzayı bir cebir olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler gerçekleşir:

- i) $m^{(2)}(\mathcal{U})$ bir cebirdir.
- ii) $l_\infty^{(2)} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{S}_A^{(2)}$ ise, A matrisi $m^{(2)}(\mathcal{U})$ üzerinde çarpımsaldır, yani her

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in m^{(2)}(\mathcal{U})$ için $A(\mathbf{xy}) = A(\mathbf{x})A(\mathbf{y})$ gerçekleşir.

iii) $l_\infty^{(2)} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{S}_A^{(2)}$ ve A negatif olmayan dört boyutlu bir matris ise

$$m^{(2)}(\mathcal{U}) \subseteq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{U} : \text{her } p \geq 1 \text{ ve bir } L \text{ sayısı için } P - \lim_{n,m} \sum_{j,k} |x_{jk} - L|^p a_{jk}^{nm} = 0 \right\}$$

gerçeklenir.

iv) $l_\infty^{(2)} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{U}_A^{(2)}$ ise

$$m^{(2)}(\mathcal{U}) \supseteq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{U} : \text{bir } L \text{ sayısı için } P - \lim_{n,m} \sum_{j,k} |x_{jk} - L| |a_{jk}^{nm}| = 0 \right\}$$

gerçeklenir.

İspat. Önergelerin ispatlarına geçmeden önce $m^{(2)}(\mathcal{U}) \subseteq c_A^{(2)} \cap \mathcal{U}$ olduğunu göstere-
lim. $\mathbf{x} \in m^{(2)}(\mathcal{U})$ olsun. $\mathbf{e} \in c_A^{(2)} \cap \mathcal{U}$ olduğundan çarpan uzay tanımından
 $\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{e} \in c_A^{(2)}$ elde edilir. Dolayısıyla $\mathbf{x} \in c_A^{(2)} \cap \mathcal{U}$ gerçekleşir. Burada $\mathbf{e}$ ile tüm
terimleri 1 olan çift dizi gösterilmektedir.

i) $m^{(2)}(\mathcal{U})$ bir lineer uzaydır. Gerçekten her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in m^{(2)}(\mathcal{U})$ ve her α, β skalerleri için
 $\mathbf{z} \in c_A^{(2)}$ olmak üzere $\mathbf{x}\mathbf{z}, \mathbf{y}\mathbf{z} \in c_A^{(2)}$ olup $\alpha\mathbf{x}\mathbf{z} + \beta\mathbf{y}\mathbf{z} = (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})\mathbf{z} \in c_A^{(2)}$ gerçekleşir
yani $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in m^{(2)}(\mathcal{U})$ gerçekleşir. Şimdi keyfi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in m^{(2)}(\mathcal{U})$ alalım. $\mathbf{x} \in m^{(2)}(\mathcal{U})$
ve $\mathbf{y} \in c_A^{(2)} \cap \mathcal{U}$ olduğundan $\mathbf{xy} \in c_A^{(2)}$ elde edilir. Diğer yandan $\mathcal{U}$ bir cebir olduğundan
 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$ olup $\mathbf{xy} \in c_A^{(2)} \cap \mathcal{U}$ elde edilir. Şimdi $\mathbf{y} \in m^{(2)}(\mathcal{U})$ olduğundan her $\mathbf{z} \in c_A^{(2)} \cap \mathcal{U}$
için $\mathbf{yz} \in c_A^{(2)} \cap \mathcal{U}$ olur. Ayrıca $\mathbf{x} \in m^{(2)}(\mathcal{U})$ olduğundan $\mathbf{xy}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}(\mathbf{yz}) \in c_A^{(2)}$ elde
edilir. Son olarak $\mathbf{x}, \mathbf{yz} \in \mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}$ bir cebir olduğundan $\mathbf{xyz} \in \mathcal{U}$ olup $\mathbf{xy} \in m^{(2)}(\mathcal{U})$
elde edilir.

ii) $\mathbf{x} \in m^{(2)}(\mathcal{U})$ alalım ve ilk olarak $A(\mathbf{x}) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Dört boyutlu
bir $B = (b_{jk}^{nm})$ matrisini

$$b_{jk}^{nm} = \frac{a_{jk}^{nm} x_{jk}}{A(\mathbf{x})}$$

ile tanımlarsak A matrisi RH -regüler olduğundan her j, k için

$$P - \lim_{n,m} a_{jk}^{nm} = P - \lim_{n,m} b_{jk}^{nm} = 0$$

gerçeklenir. Diğer yandan $\mathbf{x} \in m^{(2)}(\mathcal{U})$ olduğundan her $\mathbf{y} \in c_A^{(2)} \cap \mathcal{U}$ için $\mathbf{xy} \in c_A^{(2)}$
olmalıdır, yani $A(\mathbf{xy})$ mevcuttur. Ayrıca

$$(By)_{nm} = \sum_{j,k} \frac{a_{jk}^{nm} x_{jk} y_{jk}}{A(\mathbf{x})} = \frac{1}{A(\mathbf{x})} (A\mathbf{xy})_{nm}$$

olup $B(\mathbf{y}) = \frac{A(\mathbf{xy})}{A(\mathbf{x})}$ mevcuttur. O halde $\mathbf{y} \in c_B^{(2)} \cap \mathcal{U}$ elde edilir, yani $c_A^{(2)} \cap \mathcal{U} \subseteq c_B^{(2)} \cap \mathcal{U}$ olur. Böylece Teorem 4.4'den $B(\mathbf{y}) = A(\mathbf{y})$ olup $A(\mathbf{xy}) = A(\mathbf{x})B(\mathbf{y})$ olduğundan

$$A(\mathbf{xy}) = A(\mathbf{x})A(\mathbf{y})$$

elde edilir.

Şimdi de $\mathbf{x} \in m^{(2)}(\mathcal{U})$ olmak üzere $A(\mathbf{x}) = 0$ olduğunu kabul edelim. Dört boyutlu bir $B = (b_{jk}^{nm})$ matrisini

$$b_{jk}^{nm} = a_{jk}^{nm} x_{jk} + a_{jk}^{nm}$$

şeklinde tanımlayalım. A matrisi RH -regüler olduğundan her j, k için

$$P - \lim_{n,m} a_{jk}^{nm} = P - \lim_{n,m} b_{jk}^{nm} = 0$$

gerçeklenir. Ayrıca her $\mathbf{y} \in c_A^{(2)} \cap \mathcal{U}$ için $(By)_{nm} = (Axy)_{nm} + (Ay)_{nm}$ olacağı açıktır ve $\mathbf{x} \in m^{(2)}(\mathcal{U})$ olduğundan $A(\mathbf{xy})$ mevcuttur. Bu durumda

$$B(\mathbf{y}) = A(\mathbf{xy}) + A(\mathbf{y})$$

gerçeklenir. Buradan $c_A^{(2)} \cap \mathcal{U} \subseteq c_B^{(2)} \cap \mathcal{U}$ olup Teorem 4.4'den $B(\mathbf{y}) = A(\mathbf{y})$ gerçekleşir. Diğer yandan $B(\mathbf{y}) = A(\mathbf{xy}) + A(\mathbf{y}) = A(\mathbf{y})$ olduğundan $A(\mathbf{xy}) = 0$ gerçekleşir. O halde $A(\mathbf{x})A(\mathbf{y}) = 0$ ve $A(\mathbf{xy}) = 0$ olduğundan $0 = A(\mathbf{xy}) = A(\mathbf{x})A(\mathbf{y})$ elde edilir.

iii) $\mathbf{x} \in m^{(2)}(\mathcal{U})$ olsun. $m^{(2)}(\mathcal{U}) \subseteq c_A^{(2)}$ olduğundan $\mathbf{x} \in c_A^{(2)}$ olur, yani $A(\mathbf{x})$ mevcuttur. $A(\mathbf{x}) = L$ olmak üzere bir $\mathbf{z} = (z_{jk})$ dizisini her j, k için $z_{jk} = x_{jk} - L$ olarak tanımlarsak $m^{(2)}(\mathcal{U})$ lineer bir uzay olduğundan $\mathbf{z} \in m^{(2)}(\mathcal{U})$ olur. Burada $[[\cdot]]$ tam değer fonksiyonunu göstermek üzere, her $p \geq 1$ için $\mathbf{z}^{2([p]+1)} \in m^{(2)}(\mathcal{U})$ olmalıdır. Hölder eşitsizliğinden, her n, m için

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} |x_{jk} - L|^p a_{jk}^{nm} &= \sum_{j,k} |x_{jk} - L|^p (a_{jk}^{nm})^{\frac{p}{2([p]+1)}} (a_{jk}^{nm})^{1 - \frac{p}{2([p]+1)}} \\ &\leq \left(\sum_{j,k} |x_{jk} - L|^{2([p]+1)} a_{jk}^{nm} \right)^{\frac{p}{2([p]+1)}} \left(\sum_{j,k} a_{jk}^{nm} \right)^{\frac{1}{1 - \frac{p}{2([p]+1)}}} \\ &= \left(\sum_{j,k} |x_{jk} - L|^{2([p]+1)} a_{jk}^{nm} \right)^{\frac{p}{2([p]+1)}} O(1) \end{aligned} \quad (4.13)$$

elde edilir. Burada

$$P - \lim_{n,m} \left(\sum_{j,k} |x_{jk} - L|^{2([p]+1)} a_{jk}^{nm} \right)^{\frac{p}{2([p]+1)}} = [A(\mathbf{z}^{2([p]+1)})]^{\frac{p}{2([p]+1)}}$$

olur. Ayrıca A çarpımsal olduğundan her q doğal sayısı için $A(\mathbf{z}^q) = [A(\mathbf{z})]^q = 0$ olur. O halde (4.13) eşitsizliğinden

$$P - \lim_{n,m} \sum_{j,k} |x_{jk} - L|^p a_{jk}^{nm} = 0$$

elde edilir.

iv) $l_\infty^{(2)} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{U}_A^{(2)}$ olmak üzere bir L sayısı için

$$P - \lim_{n,m} \sum_{j,k} |x_{jk} - L|^p a_{jk}^{nm} = L$$

olacak biçimde bir $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ve keyfi bir $\mathbf{y} \in c_A^{(2)} \cap \mathcal{U}$ alalım. Ayrıca

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} x_{jk} y_{jk} a_{jk}^{nm} &= \sum_{j,k} (x_{jk} - L + L) y_{jk} a_{jk}^{nm} \\ &= L \sum_{j,k} y_{jk} a_{jk}^{nm} + \sum_{j,k} (x_{jk} - L) y_{jk} a_{jk}^{nm} \\ &= L(Ay)_{nm} + \sum_{j,k} (x_{jk} - L) y_{jk} a_{jk}^{nm} \end{aligned}$$

yazılabilir. $m^{(2)}(\mathcal{U})$ lineer uzay olduğundan $L = 0$ almak genelliği bozmayacaktır. Şimdi her n, m, j, k için $b_{jk}^{nm} = |a_{jk}^{nm}|$ olmak üzere $B = (b_{jk}^{nm})$ dört boyutlu matrisini tanımlarsak $\mathbf{x}$ dizisi sıfıra B -kuvvetli toplanabilir olduğundan aynı zamanda sıfıra B -istatistiksel yakınsak olacaktır. Ayrıca $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$ olduğundan $\mathbf{xy} \in \mathcal{U}$ olup hipotezden $\mathbf{xy} \in \mathbb{U}_A^{(2)}$ gerçekleşir. $\mathbf{x}$ dizisi sıfıra B -istatistiksel yakınsak ve B negatif olmayan olduğundan Önerme 3.1'den $\delta_B^{(2)}(K) = 0$ ve $P - \lim_{(j,k) \in K^c} x_{jk} = 0$ olacak biçimde bir $K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mevcuttur. Ayrıca $\mathbf{xy} \in \mathbb{U}_A^{(2)}$ olduğundan *her $\varepsilon > 0$ için $T > H$ olduğunda*

$$\sup_{n,m > N} \sum_{j,k: |x_{jk}| > T} |x_{jk} y_{jk}| |a_{jk}^{nm}| < \varepsilon$$

olacak biçimde $N = N(\varepsilon)$ ve $H = H(\varepsilon)$ sayıları mevcuttur. Şimdi her $n, m \geq N$ ve $T > 0$ için

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j,k} x_{jk} y_{jk} a_{jk}^{nm} \right| &\leq \left| \sum_{j,k: |x_{jk}| > T} x_{jk} y_{jk} a_{jk}^{nm} \right| + \left| \sum_{j,k: |x_{jk}| \leq T} x_{jk} y_{jk} a_{jk}^{nm} \right| \\
&\leq \sup_{n,m > N} \sum_{j,k: |x_{jk}| > T} |x_{jk} y_{jk}| |a_{jk}^{nm}| + T \sum_{j,k \in K} |a_{jk}^{nm}| \\
&\quad + \left| \sum_{\substack{j,k \in K^c \\ |x_{jk} y_{jk}| \leq T}} x_{jk} y_{jk} a_{jk}^{nm} \right| \tag{4.14}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. $\mathbf{xy} \in \mathbb{U}_A^{(2)}$ olduğundan (4.14) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk ifade yeterince büyük $T > 0$ için yeterince küçüktür. Diğer yandan $\delta_B^{(2)}(K) = 0$ olduğundan eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci ifade de sıfıra P -yakınsaktır. Ayrıca $\mathbf{y} \in \mathbb{U}_A^{(2)}$ olduğundan her $n, m \geq M$ ve her $Q > 0$ için

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\substack{j,k \in K^c \\ |x_{jk} y_{jk}| \leq T}} x_{jk} y_{jk} a_{jk}^{nm} \right| &\leq \sum_{\substack{j,k \in K^c \\ |x_{jk} y_{jk}| \leq T \\ |y_{jk}| > Q}} |x_{jk} y_{jk}| |a_{jk}^{nm}| \\
&\quad + Q \sum_{j,k} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| \\
&\leq \frac{T}{Q} \sup_{n,m \geq M} \sum_{\substack{j,k \in K^c \\ |y_{jk}| > Q}} |y_{jk}| |a_{jk}^{nm}| \\
&\quad + Q \sum_{j,k} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| \tag{4.15}
\end{aligned}$$

olacak biçimde $M > 0$ mevcuttur. Burada $\mathbf{y} \in \mathbb{U}_A^{(2)}$ olduğundan yeterince büyük $Q > 0$ sayıları için eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk ifade yeterince küçüktür. Ayrıca hipotezden $P - \lim_{n,m} \sum_{j,k} |x_{jk}| |a_{jk}^{nm}| = 0$ olduğunu biliyoruz. O halde (4.14) ve (4.15) eşitsizliklerinden her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq \max\{N, M\}$ olduğunda

$$\left| \sum_{j,k} x_{jk} y_{jk} a_{jk}^{nm} \right| < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $xy \in c_A^{(2)}$ olduğunu gösterir. O halde $x \in m^{(2)}(\mathcal{U})$ olmalıdır. ■

Teorem 4.5'ün son iki önermesi ve Teorem 3.2'den aşağıdaki sonuç kolayca elde edilebilir.

Sonuç 4.1 *A negatif olmayan RH-regüler bir matris ve $\mathcal{U}$ dizi uzayı $l_\infty^{(2)} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{U}_A^{(2)}$ olacak biçimde bir cebir olsun. Bu durumda*

$$m^{(2)}(\mathcal{U}) = st_A^{(2)} \cap \mathcal{U}$$

gerçeklenir.

A-istatistiksel yakınsak çift diziler uzayı cebir ve iki cebirin arakesiti yine bir cebir olduğundan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.2 *$A = (a_{jk}^{nm})$ dört boyutlu negatif olmayan RH-regüler bir matris ve $\mathcal{U}$ dizi uzayı bir cebir olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler gerçekleşir:*

- i) $m_{st_A^{(2)} \cap \mathcal{U}}^{(2)}(st_A^{(2)} \cap c_A^{(2)} \cap \mathcal{U}, c_A^{(2)})$ bir cebirdir.
- ii) $l_\infty^{(2)} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{S}_A^{(2)}$ ise, A matrisi $m_{st_A^{(2)} \cap \mathcal{U}}^{(2)}(st_A^{(2)} \cap c_A^{(2)} \cap \mathcal{U}, c_A^{(2)})$ üzerinde çarpımsaldır.
- iii) $l_\infty^{(2)} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{S}_A^{(2)}$ ise

$$\begin{aligned} & m_{st_A^{(2)} \cap \mathcal{U}}^{(2)}(st_A^{(2)} \cap c_A^{(2)} \cap \mathcal{U}, c_A^{(2)}) \\ & \subseteq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{U} \cap st_A^{(2)} : \text{her } p \geq 1 \text{ ve bir } L \text{ sayısı için } P - \lim_{n,m} \sum_{j,k} |x_{jk} - L|^p a_{jk}^{nm} = 0 \right\} \end{aligned}$$

gerçeklenir.

- iv) $l_\infty^{(2)} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{U}_A^{(2)}$ ise

$$\begin{aligned} & m_{st_A^{(2)} \cap \mathcal{U}}^{(2)}(st_A^{(2)} \cap c_A^{(2)} \cap \mathcal{U}, c_A^{(2)}) \\ & = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{U} \cap st_A^{(2)} : \text{bir } L \text{ sayısı için } P - \lim_{n,m} \sum_{j,k} |x_{jk} - L| |a_{jk}^{nm}| = 0 \right\} \end{aligned}$$

gerçeklenir.

Khan ve Orhan (2007) A-toplanabilir diziler uzayı yerine A-istatistiksel yakınsak diziler uzayını alarak aşağıdaki sonucu vermiştir.

Önerme 4.1 A , negatif olmayan regüler bir matris ise $m_{st_A}(st_A, st_A) = st_A$ gerçekleşir. Hatta herhangi bir $\mathcal{U}$ cebiri için $m_{st_A \cap \mathcal{U}}(st_A \cap \mathcal{U}, st_A) = st_A \cap \mathcal{U}$ gerçekleşir.

Burada A -toplanabilir çift diziler uzayı yerine A -istatistiksel yakınsak çift diziler uzayı alınarak Khan ve Orhan (2007)'ın alışılmış diziler için verdiği sonucun benzeri dört boyutlu ortalama matrisler için verilecektir:

Önerme 4.2 A dört boyutlu ortalama bir matris ise $m_{st_A^{(2)}}^{(2)}(st_A^{(2)}, st_A^{(2)}) = st_A^{(2)}$ gerçekleşir. Hatta herhangi bir $\mathcal{U}$ cebiri için $m_{st_A^{(2)} \cap \mathcal{U}}^{(2)}(st_A^{(2)} \cap \mathcal{U}, st_A^{(2)}) = st_A^{(2)} \cap \mathcal{U}$ gerçekleşir.

İspat. $m_{st_A^{(2)}}^{(2)}(st_A^{(2)}, st_A^{(2)}) \subseteq st_A^{(2)}$ olduğu çarpan uzay tanımından açıktır. Karşıt olarak $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in st_A^{(2)}$ alalım. Bu durumda Önerme 2.1'den $\delta_A^{(2)}(E_{\mathbf{x}}) = \delta_A^{(2)}(E_{\mathbf{y}}) = 0$ ve $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dizileri sırasıyla $E_{\mathbf{x}}^c$ ve $E_{\mathbf{y}}^c$ kümeleri üzerinde P -yakınsak olacak şekilde $E_{\mathbf{x}}, E_{\mathbf{y}} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alt kümeleri mevcuttur. $E = E_{\mathbf{x}} \cup E_{\mathbf{y}}$ alırsak $\delta_A^{(2)}(E) = 0$ olup $\mathbf{xy}$ dizisi E^c üzerinde yakınsaktır, o halde yine Önerme 2.1'den $\mathbf{xy}$ dizisi A -istatistiksel yakınsaktır. O halde

$$st_A^{(2)} \subset m_{st_A^{(2)}}^{(2)}(st_A^{(2)}, st_A^{(2)})$$

gerçeklenir.

Şimdi $\mathcal{U}$ bir cebir olsun. İki cebirin arakesiti yine bir cebir olduğundan $st_A^{(2)} \cap \mathcal{U}$ bir cebir olup ispat benzer şekilde tamamlanır. ■

Aşağıdaki sonuç, sınırlı çift diziler uzayı üzerindeki çarpımsal matrisler göz önüne alındığında A -toplanabilme ile A -istatistiksel yakınsaklığın denkliğini vermektedir:

Sonuç 4.3 B matrisi $l_{\infty}^{(2)}$ üzerinde çarpımsal ve negatif olmayan dört boyutlu bir matris ise

$$c_B^{(2)} \cap l_{\infty}^{(2)} = st_B^{(2)} \cap l_{\infty}^{(2)}$$

gerçeklenir.

İspat. Çarpımsal metodlar için $c_B^{(2)} \cap l_{\infty}^{(2)} \subseteq m^{(2)}(l_{\infty}^{(2)})$ olup $c_B^{(2)} \cap l_{\infty}^{(2)} \supseteq m^{(2)}(l_{\infty}^{(2)})$ her durumda doğru olduğundan ilk olarak $c_B^{(2)} \cap l_{\infty}^{(2)} = m^{(2)}(l_{\infty}^{(2)})$ elde edilir. Ayrıca Sonuç 4.1'den $m^{(2)}(l_{\infty}^{(2)}) = st_A^{(2)} \cap l_{\infty}^{(2)}$ olduğundan ispat tamamlanır. ■

KAYNAKLAR

- Boos, J. 2000. *Classical and Modern Methods in Summability*. Oxford Univ. Press, UK.
- Bromwich, T.J.F.A. 1942 *An Introduction to Theory of Infinite Series*. London, MacMillan.
- Connor, J. S. 1988. *The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences*. Analysis 8; 47-63.
- Connor, J. S. 1989. *On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence*. Canad Math. Bull. Vol. 32; 194-198.
- Fast, H. 1951. *Sur la convergence statistique*. Colloq. Math. 2; 241-244.
- Freedman, A. R. and Sember, J. J. 1981. *Densities and summability*. Pacific J. Math. 95; 293-305.
- Fridy, J. A. 1985. *On statistical convergence*. Analysis 5; 301-313.
- Fridy, J. A. and Miller, H. I. 1991. *A matrix characterization of statistical convergence*. Analysis 11; 59-66.
- Hardy, G. H. 1919. *On the convergence of certain multiple series*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 19, 86-95.
- Hardy, G. H. and Littlewood, J. E. 1913. *Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable*. C. R. Acad. Sci. Paris 156; 1307-1309.
- Henriksen, M. and Isbell, J. R. 1964. *Multiplicative summability methods and Stone-Čech compactification*. Notices Amer. Math. Soc. 11, p. 90, Abstract 608-611.
- Khan, M. K. and Orhan, C. 2007. *Matrix characterization of A -statistical convergence*. J. Math. Anal. Appl., 335; 406-417.

- Khan, M. K. and Orhan C. 2010. *Characterization of strong and statistical convergences*. Publ. Math. Debrecen 76, no. 1-2, 77–88.
- Kolk, E. 1981. *The statistical convergence in Banach spaces*. Tartu ÜI. Toimatised. 928; 41-52.
- Miller, H. I. 1995. *A measure theoretic subsequences characterization of statistical convergence*. Trans. Amer. Soc. 347. 5; 1811-1819.
- Miller, H. I. 2007. *A-statistical convergence of subsequence of double sequences*. Bollettino U.M.I. (8) 10-B, 727-739.
- Miller, H. I. and Miller-Van Wieren, L. 2008. *A matrix characterization of statistical convergence of double sequences*. Sarajevo J. Math. 4(16), no. 1, 91–95.
- Móricz, F. 2003. *Statistical convergence of multiple sequences*. Arch. Math. (Basel) 81, (2003), no. 1, 82–89.
- Mursaleen and Edely O. H. H. 2003. *Statistical convergence of double sequences*, J. Math. Anal. Appl. 288, no. 1, 223–231.
- Patterson, R. F. 2004. *Four dimensional characterization of bounded double sequences*. Tamkang J. Math. 35, no. 2, 129–134.
- Petersen, G. M. 1966. *Regular matrix transformations*. McGraw-Hill Publishing Co., Ltd., London-New York-Toronto, Ont.
- Petersen, G. M. 1972. *The algebra of bounded sequences as factor sequences*. Indag. Math.-Verein. 74; 182-188.
- Pringsheim, A. 1898. *Elementare theorie der unendliche doppelreihen*. Sitzungsberichte der Math. Akad. der Wissenschaften zu Műch. Ber. 7, 101-153.
- Tripathy, B. C. 2003. *Statistically convergent double sequences*. Tamkang J. Math. 34, no. 3, 231–237.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet ÜNVER

Doğum Yeri : Karabük

Doğum Tarihi : 20.09.1985

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Karabük 75. Yıl Anadolu Lisesi, 2003

Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi,
Matematik Bölümü, 2007

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı, 2009

Yayımları:

- **Ünver M.** 2013. Characterization of multidimensional A -strong convergence. *Studia Sci. Math. Hungar.* Vol. 50, no. 1, 17-25.
- **Orhan C. and Ünver M.** Matrix characterization of A -statistical convergence of double sequences. *Acta Math. Hungar.*(accepted for publication).