



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



DOKTORA TEZİ

**YÜKSEK MERTEBEDEN EĞRİLİKLİ GRAVİTASYONDA
MAKASLAMASIZ KOZMİK AKIŞKAN İDDİASI**

Değer SOFUOĞLU

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Programı

Danışman

Prof. Dr. Haşim MUTUŞ

Eylül, 2014

İSTANBUL

Bu çalışma 18/09/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Matematiksel Fizik programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi:



Prof. Dr. Haşim MUTUŞ (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



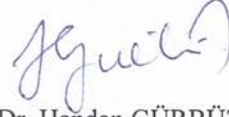
Prof. Dr. Suat ÖZKORUCUKLU
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Prof. Dr. Y. Gürkan ÇELEBİ
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi



Prof. Dr. Handan GÜRBÜZ
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Bu alışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliđinin 9698 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Tez konumu belirleyen danışmanım Prof. Dr. Haşim MUTUŞ'a, Lisans ve Yüksek lisans öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

Bütün hayatım boyunca olduğu gibi, tez çalışmalarım boyunca da yanımda olduklarını hissettiğim, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

Eylül, 2014

Değer SOFUOĞLU

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	v
ÖZET.....	vii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL KISIMLAR	5
2.1. GENEL RÖLATİVİTE TEORİSİ	5
2.1.1. Temel Geometrik Bağlıntılar ve Yazılış Kabulleri	6
2.2. YÜKSEK MERTEBEDEN EĞRİLİKLİ GRAVİTASYON TEORİLERİ.....	10
3. MALZEME VE YÖNTEM	16
3.1. UZAY-ZAMANIN 1+3 KOVARYANT AYRIŞIMI	16
3.1.1. İzdüşürme Tansörleri	16
3.1.2. Akışkanın Kinematik Büyüklükleri	19
3.1.3. Akışkanın Dinamik Büyüklükleri	21
3.1.4. Kovaryant Evrim ve Bağ Denklemleri.....	23
3.2. TETRAD FORMALİZMİ	26
3.2.1. Evrim ve Bağ Denklemlerinin Tetrad Formu	28
3.3. DÖRT BOYUTTA $F(R,G)$, $F(R)$ VE $F(G)$ -GRAVİTE TEORİLERİNİN ALAN DENKLEMLERİ	32
3.4. BEŞ BOYUTTA ZAREVREN MODELLERİNİN ALAN DENKLEMLERİ.....	33
4. BULGULAR	39
4.1. 1+3 KOVARYANT AYRIŞIM TEKNİĞİNİN $F(R,G)$ -GRAVİTENİN ALAN DENKLEMLERİNE UYGULANMASI	39
4.2. MAKASLAMASIZ AKIŞKAN İDDİASININ DÖRT BOYUTTA YÜKSEK MERTEBEDEN EĞRİLİKLİ GRAVİTE TEORİLERİNDE ELE ALINMASI.....	65
4.2.1. $F(R)$ -gravitede Makaslama-sız Akışkan İddiası.....	67
4.2.1.1. Gödel Tip Genişleyen Kozmolojik Model.....	68

4.2.1.2. Dönmeli Bianchi-tip II Model	75
4.2.1.3. Dönmeli Bianchi-tip IX Model	80
4.2.2. F(G)-gravitede Makaslamaşız Akışkan İddiası.....	89
4.2.2.1. Gödel Tip Genişleyen Kozmolojik Model.....	90
4.2.2.2. Dönmeli Bianchi-tip IX Model	97
4.3. MAKASLAMASIZ AKIŞKAN İDDİASININ BEŞ-BOYUTLU ZAREVREN MODELLERİNDE ELE ALINMASI	106
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	127
KAYNAKLAR	133
EKLER.....	139
EK A. F(R,G)-GRAVİTENİN ALAN DENKLEMLERİNİN BİR VARYASYON İLKESİNDEN ÇIKARTILMASI	139
EK B. TEMEL BAĞINTI VE ÖZDEŞLİKLER	146
B.1. Yararlı Özdeşlikler	146
B.2. h_{ab} , U_{ab} ve η_{abc} nin Bazı Türev Özellikleri	146
B.3. Diğer Bazı Özdeşlikler	146
EK C.	147
ÖZGEÇMİŞ.....	150

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 4.1: $K=13/10$, $S=3/2$ için Δ yüzeyi	95
Şekil 4.2: $S=1$, $K=2$ için Δ yüzeyi	95
Şekil 4.3: $S=1$, $K=-1/2$ (Krechet-Gödel evreni) için Δ yüzeyi.....	96

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
g_{ab}	: Uzay-zamanın metriği
R_{ab}	: Ricci tansörü
R	: Ricci skaler eğriliği
G_{ab}	: Einstein tansörü
Λ	: Kozmolojik sabit
T_{ab}	: Enerji-momentum tansörü
κ^2	: Kuplaj sabiti
G	: Newton gravitasyon sabiti
c	: Işık hızı
R_{abcd}	: Riemann eğrilik tansörü
C_{abcd}	: Weyl tansörü
E_{ab}	: Weyl tansörünün elektriksel kısmı
H_{ab}	: Weyl tansörünün magnetik kısmı
u^a	: 4-lü hız vektörü
Σ	: Hiperyüzey
U_{ab}	: Paralel izdüşürme tansörü
h_{ab}	: Dik izdüşürme tansörü
μ	: Madde-enerji yoğunluğu
p	: Eşyönlü basınç
q_a	: Isı akısı (enerji akısı)
π_{ab}	: Eşyönsüz basınç tansörü
$\dot{u}_a$	: İvme
θ_{ab}	: Genişleme tansörü
θ	: Genişleme skaleri
σ_{ab}	: Makaslama tansörü
σ	: Makaslama skaleri
ω_{ab}	: Girdap tansörü
ω_a	: Girdap (dönme) vektörü
ω	: Dönme skaleri
η_{abcd}	: 4-boyutlu permütasyon tansörü (hacim elemanı)
ε_{abcd}	: 4-boyutlu Levi-Civita sembolü
η^{abc}	: 3-uzay efektif hacim elemanı (3-uzay Levi-Civita sembolü)
Γ^a_{bc}	: Christoffel sembolleri (veya Ricci dönme katsayıları)

S_{EH}	: Einstein-Hilbert aksiyonu
S_m	: Madde-enerji aksiyonu
L_m	: Maddenin Lagrange yoğunluğu
γ^c_{ab}	: Komütasyon fonksiyonları
G	: Gauss-Bonnet terimi
K_{ab}	: Dışsal eğrilik
n^a	: Hiperyüzeyin normali
U	: Zar üzerinde efektif yerel olmayan enerji yoğunluğu
Q_a	: Zar üzerinde efektif yerel olmayan enerji akısı
P_{ab}	: Zar üzerinde efektif yerel olmayan eşyönsüz basınç

Kısaltmalar	Açıklama
EAD	: Einstein alan denklemleri
EH	: Einstein-Hilbert
DGP	: Dvali-Gabadadze-Porrati
FLRW	: Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker
ΛCDM	: Λ -lı soğuk karanlık madde-enerji (cold dark matter with Λ)
GRT	: Genel Rölativite Teorisi
KMAF	: Kozmik mikrodalga arkafonu

ÖZET

DOKTORA TEZİ

YÜKSEK MERTEBEDEN EĞRİLİKLİ GRAVİTASYONDA MAKASLAMASIZ KOZMİK AKIŞKAN İDDİASI

Değer SOFUOĞLU

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Haşim MUTUŞ

Bu tezde, rölativist kozmolojinin makaslamasız mükemmel akışkan iddiasının $F(R)$ -gravite, $F(G)$ -gravite ve zarevren teorilerinde karşılığının olup olmadığını araştırdık. $F(R)$ ve $F(G)$ -gravitede metriğe dayalı bir yaklaşım kabul ederek ve bu teorilere genelleştirilmiş tetrad denklemlerini kullanarak kaynağı makaslamasız mükemmel akışkan olarak alınan $F(R)$ -gravite ve $F(G)$ -gravitenin alan denklemlerinin aynı anda dönen ve genişleyen çözümlerinin varlığını araştırmak için, uzayca homojen üç metrik göz önüne aldık. $F(R)$ -gravitede dönen Bianchi-tip II ile genişleyen Gödel tip evreninin, bu değişikliğe uğratılmış gravite teorisinin alan denklemlerinin çözümü olarak kabul edilmediğini gösterdik. Öte yandan, hem genişleyen ve aynı zamanda hem dönen bir makaslamasız Bianchi-tip IX evreninin var olduğu iki tip $F(R)$ modeli bulduk. Bu evrenin madde içeriği $F(R)$ modelin tipine ve kozmolojik sabite bağlı olarak pozitif ya da negatif basınçlı bir mükemmel akışkan ile tasvir edilmiştir; kozmolojik sabitin sıfır olduğu özel durumda evrenin pür radyasyon ile dolu olduğunu bulduk. Durumlar ne olursa olsun, evren daima üç doğrultu boyunca eşyönsüz uyuşuk genişleme göstermektedir ve evrimleşmesi de düz bir Milne evreni gibidir. Dönme ise kozmik zamanla ters orantılıdır. Bir başka sonuç ise Weyl tansörünün gravito-magnetik kısmının sıfır olmaması ve dolayısıyla bu modelin gravitasyon dalgalarının yayılımına izin vermesidir. Çözümümüz, $F(R)$ -gravitede genel rölativist makaslamasız akışkan iddiasının karşılığının bulunmadığına destek veren ikinci bir örneği oluşturmaktadır.

$F(G)$ -gravitede, stasyoner Gödel modelinin genişleyen bir versiyonunun alan denklemlerinin çözümü olarak kabul edilmediğini bulduk. Buna karşılık, daha da

genelleştirilmiş Gödel metrik formuna ait bir sınıf, tetrad denklemlerinin tam kümesinin tutarsızlığına yol açmaksızın çözümü olabilmektedir. Mamafih, zamana bağlı ölçek çarpanının fonksiyonel karmaşıklığından dolayı bir $F(G)$ modeli oluşturmak mümkün olamamıştır. Aynı durum dönen Bianchi-tip IX modeli için de geçerlidir.

Zarevren modellerinde, kovaryant bağ denklemlerinin tutarlılık analizi yaklaşımını kullanarak iki özel durumu göz önüne aldık: pür zarevren için ivmesiz pür-Coulombsu durumda iddianın doğru olduğunu, indüklenmiş graviteli $F(R)$ -zarevren ve pür zarevren modelleri için ivmesiz durumda ise makaslamasız mükemmel akışkanın aynı anda dönme ve genişlemeye sahip olduğu durumlar olabileceğini gösterdik.

Eylül 2014, 151 Sayfa.

Anahtar kelimeler: Makaslamasız akışkan, $f(R)$ -gravite, $f(G)$ -gravite, Gauss-Bonnet, kozmoloji, yüksek mertebeden gravitasyon, kovaryant evrim ve bağ denklemleri, tetrad.

SUMMARY

Ph.D. THESIS

SHEAR-FREE COSMIC FLUID CONJECTURE IN HIGH ORDER CURVATURE GRAVITY

Değer SOFUOĞLU

İstanbul University

Graduate School of Science and Engineering

Department of Physics

Supervisor : Prof. Dr. Haşim MUTUŞ

In this thesis, we have investigated whether or not there is a counterpart of the relativistic shear-free perfect fluid conjecture within the context of $F(R)$ -gravity, $F(G)$ -gravity and braneworld theories. In $F(R)$ and $F(G)$ -gravities by adopting a metric based approach and making use of tetrad equations, extended to these theories we have considered three spatially homogeneous metrics in order to investigate the existence of simultaneously rotating and expanding solutions of the $F(R)$ -gravity and $F(G)$ -gravity field equations with shear-free perfect fluids as sources. We have shown that in $F(R)$ -gravity the Gödel type expanding universe, as well as a rotating Bianchi-type II spacetime allow no such solutions of the field equations of this modified gravity. On the other hand, we have found that there exist two types of $F(R)$ models in which a shear-free Bianchi-type IX universe can expand and rotate at the same time. The matter content of this universe is described by a perfect fluid having positive or negative pressure, depending on the type of $F(R)$ model and on the cosmological constant; in the particular case of a vanishing cosmological constant we have found that the universe is filled with a pure radiation. Whatsoever the cases, the universe exhibits always coasting anisotropic expansions along three spatial directions evolving like a flat Milne universe, and has a vorticity inversely proportional to cosmic time. A further result is that, due to the nonvanishing of the gravito-magnetic part of the Weyl tensor, this model allows for gravitational waves. Our solution constitutes one more example giving support to that in $F(R)$ -gravity there is no counterpart of the general relativistic shear-free conjecture.

In $F(G)$ -gravity, we have found that an expanding version of the stationary Gödel metric is not admitted as solution of field equations. By contrast a class of a further generalized form of the Gödel metric could be allowed as solution of the full set of tetrad equations without leading to any inconsistencies. However, due to the functional complexity of the time dependence of the scale factor the reconstruction of a $F(G)$ model is avoided. Such a situation has been also encountered in rotating Bianchi-type IX model.

In braneworld models, we have used the consistency analysis approach of the covariant constraint equations and have considered two special cases: for the pure braneworld in the acceleration-free pure-Coulombian case we have shown that the conjecture is true while for the $F(R)$ -braneworld with induced gravity and pure braneworld in the acceleration-free case there may be situations where a shear-free perfect fluid could have simultaneous rotation and expansion.

September 2014, 151 Pages.

Keywords: Shear-free fluid, $f(R)$ -gravity, $f(G)$ -gravity, Gauss-Bonnet, cosmology, high order gravity, evolution and constraint equation, tetrad.

1. GİRİŞ

Genel Rölativite Teorisinde (GRT) Einstein Alan Denklemleri (EAD) için madde-enerji kaynağı olarak makaslamasız mükemmel akışkan alındığında, elde edilen çözümler arasında, Newton'un gravitasyon teorisindeki duruma karşıt bir şekilde, hem genişleyen hem de dönen bir evreni tasvir eden bir çözüm bulunmamaktadır. Başka bir deyişle, bir makaslamasız mükemmel akışkan için evren ya dönmesiz, ya genişlemesiz, ya da hem dönmesiz hem genişlemesiz olmalıdır. Bu durumlara en iyi bilinen örnekler: dönen fakat genişlemeyen stasyoner Gödel evreni ve genişleyen fakat dönmeyen Robertson-Walker evrenidir. Söz konusu kaynak tipi için, hem dönen hem de genişleyen bir çözüm olamayacağı ilk kez Gödel tarafından 1950'de ispatsız olarak verilen bir teoremle ileri sürülmüştür [1]. Bu teoremde Gödel, makaslamasız toz dolu bir homojen Bianchi-tip IX evren modelinin genişleyebileceğini ya da dönebileceğini, fakat her iki durumda olamayacağını savunmuştur. 1957'de Schücking bir metrik yaklaşım kullanarak Gödel'in bu sonucunu toz dolu uzayca homojen modeller sınıfına genelleştirmiştir [2]. Daha sonra, 1967'de Ellis, ortonormal tetrad formalizmini kullanarak uzayca homojenlik durumuna kısıtlamanın gereksiz olduğunu göstermiştir [3]. Hemen sonrasında, Treciokas ve Ellis, μ enerji yoğunluğu ve p de basınç olmak üzere $\mu + p \neq 0$ koşuluna uyan makaslamasız bir mükemmel akışkanın aynı anda hem dönme hem de genişleme göstermesinin olanaksız olacağı iddiasını ortaya atmışlardır [4]. "Makaslamasız mükemmel akışkan iddiası" olarak adlandırılan bu iddia son kırk yıldan bu yana oldukça ilgi çeken konulardan biri olagelmıştır. Pek çok araştırmacı [5-19], ya özel koordinat sistemleri ya da amaca uygun tetrad çatıları göz önüne alarak ve yahut da, gözlemciye bağlı olmaması dolayısıyla daha genel bir yöntem olan, tamamen kovaryant yaklaşımı kullanarak ve ayrıca da gerek hal denklemleriyle ve gerekse de akışkanın bazı kinematik ve dinamik büyüklükleri hakkında birtakım özel varsayımlar da yaparak gerçekleştirmiş oldukları çalışmalarda bu iddiaya güçlü destek vermişlerdir. Ne var ki, bu çok özel durumların dışında genel durumlar için iddianın doğruluğu ya da yanlışlığının henüz ortaya konulması mümkün olamamıştır. Dahası, günümüzde, bu iddiayı yanlışlayan bir karşıt çözüm dahi bulunmamaktadır. GRT'nin alan

denklemlerine dayalı kozmolojinin kastedildiği Rölativist Kozmoloji çerçevesinde, hem dönmeli hem genişlemeli makaslamasız çözümler inşa etmenin bir yolu mükemmel akışkan kaynağı kısıtlamasını gevşetip madde-enerji içeriğine ısı akısı ya da eşyönsüz basınç ithal etmektir; bir başka deyişle enerji-momentum tansörü bir mükemmel olmayan akışkan şeklinde olmalıdır [20]. Bir başka yol ise, enflasyon senaryolarında olduğu gibi, mesela skaler alanlar içeren daha genel enerji-momentum tansörleri göz önüne almaktır [21]. Öte yandan, en başta söylenildiği gibi Newton'un gravitasyon teorisinde bu iddianın karşılığı bulunmamaktadır; yani, bu teoride hem dönen hem de genişleyen makaslamasız mükemmel akışkan çözümleri bulunmaktadır [2,16,22]. Böyle bir durumun varlığı, makaslamasız akışkan iddiasının GRT'nin kendi yapısından kaynaklanıyor olabileceğini ve dolayısıyla gravitasyonel olayları tasvir için GRT'ye alternatif olarak ileri sürülen teoriler çerçevesinde mümkün karşıt-örnekler bulunabileceği beklentisini telkin etmektedir. Gerçekten de, bu beklentiye destekleyen bir girişim yakın zamanlarda Abebe ve diğ. [23] tarafından, GRT'ye alternatif teorilerden biri olan ve evrenin ileri zamanındaki kozmik ivmesi ve geçmiş zamanındaki enflasyonu gibi bir takım kozmolojik meseleleri çözme konusunda son onbeş yıldan bu yana çok ilgi çekmiş olan $F(R)$ -gravite teorisi [24-31] çerçevesinde yapılmıştır. Standart Einstein-Hilbert (EH) aksiyonu, R eğrilik skaleri yerine keyfi bir $F(R)$ fonksiyonu alınarak değiştirildiğinde, metrik tansöre göre genel olarak dördüncü mertebeden kısmi türevli alan denklemlerine yol açan bu teoride, Abebe ve diğ. 1+3 kovaryant formalizmi kullanarak bir Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) arka fonuna göre lineerleştirilmiş bir pertürbasyon yaklaşıklığında katı akışkanlı bir R^3 -gravite modelinde hem dönen hem de genişleyen düz bir Milne-evren çözümü bulunduğunu göstermişlerdir. Bilebildiğimiz kadarıyla, bu, Newtonsal olanların dışında makaslamasız akışkan iddiasına ilk karşıt örneği oluşturmaktadır. Mamafih, böyle bir çözümün lineerleştirme kararsızlığı gösterdiğini söylemek gerekmektedir; şöyle ki, bulunan sonuç, lineerleştirme sürecinde ikinci mertebeden terimlerin atılması nedeniyle, tamamen non-lineer teorisinin bir tam (exact) çözümünün limiti olmayabilmektedir [31,32]. Bundan ötürü, $F(R)$ -gravitede rölativist makaslamasız akışkan iddiasının karşılığı olamayacağı sonucunu dışarılama doğru olmayacaktır.

Bu Tez’de, Rölativist Kozmolojinin makaslamasız akışkan iddiasını, pek çok kozmolojik meseleye açıklama getirmek üzere GRT’ye alternatif olarak ileri sürülen ve genel olarak “değişikliğe uğratılmış gravitasyon teorileri”, ya da “yüksek mertebeden eğrilikli gravitasyon teorileri” olarak anılan teoriler çerçevesinde ele alacağız. Bunlardan, ilk ikisi 4-boyuttaki $F(R,G)$ -gravitenin özel halleri olan, $F(R)$ -gravite ve $F(G)$ -gravite [33-43] ve sonuncusu ise 5-boyutta zarevren teorileri [44-64] olacaktır. Bu teorilerin alan denklemlerinden hareketle, bir koordinatsal tabanda standart tansör hesabı aracılığıyla çözüm bulmaya yönelmek, söz konusu amacı gerçekleştirmek için: 1) işin içine akışkanın kinematik özelliklerini doğrudan doğruya dahil edememek; 2) uzay-zamanın simetrilerini kolayca tasvir edememek; 3) alan denklemlerinin Bianchi özdeşlikleri gibi integre edilebilirlik koşullarını kapsayamamak; 4) hem koordinat sistemine bağlı ve hem de ikiden daha yüksek mertebeden türevli denklemlerle iş görmek vb... nedenlerle yukarıdaki amacımız için hiç uygun değildir. Biz, bu çalışmada alan denklemlerini doğrudan doğruya hesaplamak yerine, yukarıda sıralanan olumsuzlukları içermeyen uzay-zamanın 1+3 kovaryant ayrışımına dayalı kovaryant evrim ve bağ denklemlerini kullanacağız. Ayrıca da, bir uzay-zaman aralığı (metrik ifadesi) söz konusu olduğunda, uzay-zamanın simetrilerinin ve kinematik özelliklerinin doğrudan yansıtılmasını barındıran ve kovaryant denklemlerden daha da kapsamlı olan tetrad formalizmini kullanacağız. Birinci yöntem, evrenin madde-enerji içeriği bir akışkan gibi yorumlandığında kovaryant (gözlemciden bağımsız) rölativist hidrodinamik denklemlerin tesisine dayanmaktadır. Bu yöntemin ana hatları ve denklemleri, 1960’lardan itibaren yapılan çalışmaların sonucunda Ellis [3,65,66] tarafından derli toplu zarif bir biçimde derlenmiştir. Tetrad formalizmi ise, yine pekçok araştırmacının katkılarıyla Ellis ve MacCallum [3,66,67] tarafından geliştirilmiş ve kozmolojiye uygulanmıştır. Bu tezde, makaslamasız akışkan iddiası için, yukarıda sözü edilen gravitasyon teorilerinde, bu yöntemlerle elde edilmiş evrim ve bağ denklemlerini kullanacağız. Literatürde, bilebildiğimiz kadarıyla, 1+3 kovaryant ayrışım yöntemi yalnızca $F(R)$ ve $F(G)$ -gravite ile Randall ve Sundrum’un pür zarevren kozmolojisine [68-73] uygulanmıştır. Biz bunu, daha genel olarak $F(R,G)$ -graviteye ve indüklenmiş graviteli $F(R)$ -zarevren modellerine uygulayıp bunlar için kovaryant evrim ve bağ denklemlerini tesis edeceğiz. $F(R,G)$ -gravite denklemlerinin ayrıca tetrad versiyonları da gerçekleştirilecektir.

Çalışma planımız şöyle olacaktır: 2. Bölüm’de, önce, GRT’nin temel geometrik bağıntılarını kendi notasyonumuz çerçevesinde tanıtıyor ve sonra da, yüksek mertebeden eğrilikli gravitasyon teorilerinin ortaya çıkış nedenlerine kısaca değiniyoruz. 3. Bölüm’de, 1+3 kovaryant ayrışım yöntemi ile tetrad formalizminin dayandığı geometrik çerçeveyi açıklıyor ve evrim ve bağ denklemlerini listeliyoruz. Bu bölümde, Tezimizde göz önüne alınacak gravitasyon teorilerinin alan denklemlerini yazıyoruz. Bulgular bölümünde, önce efektif akışkan yaklaşımını kullanarak 1+3 kovaryant ayrışım tekniğini $F(R,G)$ -gravitenin alan denklemlerine uygulayıp efektif dinamik büyüklüklerin ifadelerini tesis ediyor ve bunlara dayanan kovaryant ve tetrad evrim ve bağ denklemlerini çıkarıyoruz. Hemen sonrasında, $F(R)$ -gravitede, biri Gödel tip genişleyen kozmolojik model, diğer ikisi de dönmeli ve genişleyen Bianchi-tip II ve Bianchi-tip IX modelleri olmak üzere, uzayca homojen üç model için mükemmel akışkan varsayımı altında, tetrad evrim ve bağ denklemlerini hesaplıyor ve varılan denklem sisteminin, hem modellerin parametreleri ile hem de zamana bağlı ölçek çarpanı varsayımıyla tutarlı olup olmadığını araştırıyoruz. Benzer işi, $F(G)$ -gravite çerçevesinde, Gödel tip genişleyen model ile dönmeli Bianchi IX modeli için tekrarlıyoruz. Makaslamasız, dönen ve genişleyen bir uzay-zaman metriği seçip bunun alan denklemleri tarafından mükemmel akışkan varsayımı altında çözüm olarak kabul edilip edilmediğini araştırmamızdaki neden, değişikliğe uğratılmış söz konusu teorilerde iddiayı destekleyen ya da karşıt örnek oluşturacak somut bir çözüm bulmak amacını gütmektedir. İddianın ortaya çıkış tarihlerinde, başlangıçta izlenen bu tür girişimler daha sonraları Senovilla ve diğ. [16] nin çalışmalarıyla mahiyet değiştirmiş ve somut çözüm bulmak yerine, kovaryant denklemlerden yola çıkarak bunların makaslamanın sıfır olması halinde, θ ile genişleme ve ω ile de dönme gösterilmek üzere, $\theta\omega \neq 0$ koşulunun kovaryant bağ denklemlerinin evriminde herhangi bir çelişkiye yol açıp açmadığı araştırılmıştır. Biz de, Senovilla ve diğ. nin yöntemini, indüklenmiş graviteli $F(R)$ -zarevren olarak ele alacağımız modele, daha farklı şekilde ifade edilmiş evrim ve bağ denklemlerini kullanarak uygulayacağız. Bunun için, önce kendi notasyonumuza uygun bir şekilde gerekli komütasyon bağıntılarını ve özdeşlikleri en genel durum için tesis ediyor ve bunların yardımıyla bağların tutarlılığı analizini gerçekleştiriyoruz. Tartışma ve Sonuç bölümünde ise yapılanların değerlendirmesini ve tartışmasını sunuyoruz.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. GENEL RÖLATİVİTE TEORİSİ

Einstein'in Genel Rölativite Teorisi, gravitasyonu, metriği (Birinci temel form)

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b \quad (2.1)$$

olan 4-boyutlu eğrisel bir uzay-zaman manifoldunda ele alır ve bu uzay-zamanda madde-enerjinin geometri ile yerel etkileşmesini

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab} \quad (2.2)$$

alan denklemleriyle tasvir eder. Burada: G_{ab} , Einstein tansörü; R_{ab} , Ricci tansörü; R , Ricci skaleri ya da uzay-zamanın skaler eğriliği olup bunlar g_{ab} metrik tansör ile bunun birinci ve ikinci mertebeden türevleri cinsinden tanımlanmıştır. Λ ($\Lambda > 0, \Lambda < 0, \Lambda = 0$) ve κ^2 ise birer sabit olup sırasıyla, kozmolojik sabit ve Einstein kuplaj sabiti olarak adlandırılırlar. κ^2 , G Newton gravitasyon sabiti ve c de ışık hızı olmak üzere, $\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$ dir. (2.2) denklemleri, G_{ab} nin simetrik olmasından ötürü en fazla 10 bağımsız denklem olup uzay-zamanın geometrisini, T_{ab} enerji-momentum tansörü aracılığıyla tasvir edilen madde-enerji dağılımına yerel olarak bağlar. Bu denklemler, bilinmeyen g_{ab} alanının en fazla ikinci mertebeden türevlerini içeren, lineer olmayan (non-linear) ve birbirlerine bağlı (kuple) bir diferansiyel denklem sistemi oluştururlar.

GRT nin başlıca uğraşı, T_{ab} madde-enerji alanı tarafından doğurulan g_{ab} gravitasyon alan çözümlerini bulmak ve incelemektir. Ancak, bir yandan denklemlerin matematiksel yapısındaki nonlineerlik ve kuplelik gibi güçlükler, diğer yandan da madde-enerji dağılımının iyi biliniyor olmaması, söz konusu problemin kolayca ele alınmasını önlemektedir. Bununla beraber, gerek enerji-momentum tansörü hakkında bir takım

özel seçimler (toz, mükemmel akışkan, vb...) ve gerekse de uzay-zaman hakkında bir takım simetrilere dayalı basitleştirici varsayımlar kullanımı, alan denklemlerini nispeten sadeleştirip bilinmeyen sayısını da indirgeyebilmektedir. Bu son söylenene en güzel örnek, küresel simetri varsayımına dayalı meşhur Schwarzschild çözümüdür. İyi bilinen diğer bir örnek de evrenin homojen ve eşyönlü olduğu varsayımına dayalı Robertson–Walker metrik önçözümüdür (ansatz). Keza, uzayca homojen fakat eşyönsüz olan Bianchi–tip modeller de sık kullanılan yararlı önçözümlerdir. Günümüze değin, (2.2) denklemlerinin çözümünü bulmak üzere, yukarıda sözü edilen metrik yaklaşımın yanısıra tetrad formalizmi, uzay-zamanın 1+3 ipliklenmesi, uzay-zamanın 3+1 dilimlenmesi, pertürbasyon yaklaşımı gibi pek çok teknik geliştirilmiştir. Amacımıza uygun olarak bunlardan ilk üçüne kısaca değinilecektir.

2.1.1. Temel Geometrik Bağıntılar ve Yazılış Kabulleri

Bu alt bölümde ileride kullanılacak ya da adı geçecek temel geometrik ve dinamik büyüklükleri 4-boyutlu uzay-zaman hali için kısaca sunmaktayız. Bunların 5-boyuta genelleştirilmesi ise çok küçük değişikliklerle mümkün olacaktır. Tansör bileşenleri $a, b, \dots = 0, 1, 2, 3$ indisleriyle gösterilmek üzere geçici bir koordinat sistemi seçildiğinde, metrik bu sistemde, imzası $(-1, +1, +1, +1)$ olan, Lorentzsel biçimde alınacaktır. Bu imza kabulüne göre bir $\mathbf{X}$ 4-lü vektör $X^a X_a = -1, 0, 1$ normlanmasına göre, sırasıyla, zamansal, ışıksal ve uzaysal olarak adlandırılacaktır.

Uzay-zamanın içsel (intrensek) eğriliğini veren Riemann eğrilik tansörü, keyfi bir $\mathbf{X}$ vektörünün kovaryant türevlerinin yerdeğiştirici olmamalarının bir sonucu olup burulmasız uzay-zamanlar için

$$2\nabla_{[a} \nabla_{b]} X_c = R_{abcd} X^d \quad (2.3.a)$$

Ricci özdeşliği ile tanımlanmaktadır. Bir $\mathbf{X}$ tansörü için ise, özdeşlik

$$2\nabla_{[a} \nabla_{b]} X_{cd} = R^e_{cba} X_{ed} + R^e_{dba} X_{ce} \quad (2.3.b)$$

biçimindedir. Burada ∇_a operatörü,

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc}) \quad (2.4)$$

ile Christoffel sembolleri gösterilmek üzere bir $X^{b...}_{c...}$ tansörü için

$$\nabla_a X^{b...}_{c...} = \partial_a X^{b...}_{c...} + \Gamma^b_{am} X^{m...}_{c...} + \dots - \Gamma^m_{ac} X^{b...}_{m...} - \dots \quad (2.5)$$

biçiminde tanımlanan kovaryant türevdir (türev indisinin tarafımızdan Γ larda ilk alt indis olarak kullanıldığına dikkat edilmelidir). Buna göre Riemann eğrilik tansörü

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{db} - \partial_d \Gamma^a_{cb} + \Gamma^e_{db} \Gamma^a_{ce} - \Gamma^e_{cb} \Gamma^a_{de} \quad (2.6)$$

ile verilecektir. Riemann eğrilik tansörünün

$$R^c_{acb} = R_{ab} = R_{ba} \quad \text{ve} \quad R^{ab}_{ab} = R^a_a = R \quad (2.7)$$

olmak üzere sıfırdan farklı iki izi bulunmaktadır. R_{ab} ye simetrik Ricci skaler eğrilik tansörü ve R ye de 4-boyutlu uzay-zamanın Ricci eğrilik skaleri denir.

Riemann eğrilik tansörü, (2.3) ile verilen Ricci diferansiyel özdeşliklerinden başka,

$$R_{abcd} = R_{[ab][cd]} = R_{cdba} \quad (\text{Birinci Bianchi Özdeşliği}) \quad (2.8.a)$$

$$R_{a[bcd]} = 0 \quad (\text{İkinci Bianchi Özdeşliği}) \quad (2.8.b)$$

$$\nabla_{[a} R_{bc]de} = 0 \quad (2.8.c)$$

özdeşliklerini sağlar. Öte yandan, bu sonuncunun iki kere büzülmesi

$$\nabla_a R^a_b = \frac{1}{2} \nabla_b R \quad (2.9)$$

özdeşliğini verir ki, bu (2.2) alan denklemlerinde kullanılırsa,

$$\nabla_a G^{ab} = 0 \Rightarrow \nabla_a T^{ab} = 0 \quad (2.10)$$

denkleminde yol açar. Bu T_{ab} enerji-momentum tansörünün korunduğu anlamına gelir. Yukarıdaki ifadelerin yazılışında $(\mathbf{M}_4, \mathbf{g})$ uzay-zamanının burulmasız, yani, f bir skaler fonksiyon olmak üzere

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -T^c_{ab} \partial_c f \quad (2.11)$$

ile tanımlı $T^c_{ab} = \Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb}$ burulma tansörünün özdeş olarak sıfır olduğu varsayılmıştır. Bu varsayımın sonucu koordinatsal bir tabanda Christoffel sembolleri alt indislerine göre simetrik yani $\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}$ olmaktadır. Ancak, genel bir taban (tetrad) söz konusu olduğunda, uzay-zaman burulmasız olsa dahi, böyle bir simetri yoktur.

(2.7) bağıntısından anlaşılacağı gibi, R_{abcd} Riemann eğrilik tansörü biliniyorsa, R_{ab} Ricci tansörü ve R Ricci skaler eğriliği büzme işlemi ile elde edilebilmektedir. Ancak bunun tersi doğru değildir. Zira, R_{ab} ve R , R_{abcd} nin iz kısımlarını oluşturduğu için R_{abcd} yi yalnızca bunlar cinsinden ifade etmek mümkün olmayıp bir de, C_{abcd} ile gösterilen izsiz kısmına gerek bulunmaktadır. C_{abcd} ye Weyl tansörü ya da konform eğrilik tansörü denilmekte olup 4-boyutta

$$R_{abcd} = C_{abcd} + R_{a[c} g_{d]b} - R_{b[c} g_{d]a} - \frac{1}{3} R g_{a[c} g_{d]b} \quad (2.12)$$

bağıntısıyla tanımlanır. Bu tansör R_{abcd} nin (2.8) deki simetri özelliklerinin tümünü sağlar ve ayrıca da tüm indislere göre izsiz olma özelliği taşır. Yani,

$$C_{abcd} = C_{[ab][cd]} = C_{cdab} \quad (2.13.a)$$

$$C_{a[bcd]} = 0 \quad (2.13.b)$$

$$C^a_{bac} = 0 \quad \text{ve} \quad C^{ab}_{ab} = 0 \quad (2.13.c)$$

$$\nabla_{[a} C_{bc]de} = 0 \quad (2.13.d)$$

özellikleri vardır. Öte yandan, (2.12) bağıntısının her iki tarafının diverjansı alınır ve (2.9) bağıntısında kullanılırsa

$$\nabla_a C^a_{bcd} = \nabla_{[c} R_{d]b} + \frac{1}{6} g_{b[c} \nabla_{d]} R \quad (2.14)$$

bağıntısına varılır ki, bu, Weyl tansörünü (2.2) denkleminin yardımıyla T_{ab} enerji-momentum tansörüne bağlama olanağı sağlamaktadır. Şöyle ki; (2.2) ile gösterilen Einstein alan denklemleri yerel kaynakların R_{ab} yi belirlemesini tasvir eder ve (2.12) uyarınca R_{ab} ve R aracılığıyla yerel kaynakların R_{abcd} ye katkısı elde edilir. Yerel olmayan kaynaklardan gelen katkıyı ise (mesela gravitasyon dalgaları, gel-git kuvvetleri) Weyl tansörü verir. Dolayısıyla Weyl tansörüne serbest gravitasyon alanı gözüyle bakılır. R_{abcd} tansörü aslında Einstein alan denklemlerinin çözümü olan metrikten hareketle, (2.6) denklemi aracılığıyla, türetme yoluyla bulunabilir. (2.12) denklemi R_{ab} ve R ile birlikte, eğer C_{abcd} Weyl tansörü de bilinirse R_{abcd} nin bulunabileceğini söylemektedir. O halde (2.2) ile gösterilen Einstein alan denklemlerini integre etmek yerine, bunlara R_{ab} yi T_{ab} cinsinden ifade eden cebirsel denklemler gözüyle bakmak gerekecektir, yani

$$R_{ab} = T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T + \Lambda g_{ab} \quad (2.15.a)$$

$$R = -T + 4\Lambda \quad (2.15.b)$$

dir. Bunlar (2.14) e yerleştirilirse

$$\nabla_a C^a_{bcd} = \nabla_{[c} T_{d]b} + \frac{1}{3} g_{b[c} \nabla_{d]} T \quad (2.16)$$

elde edilir ki, bu da, Weyl tansörü için hareket denklemidir.

Yukarıda söylenildiği üzere, Riemann tansörü genel bir n-boyutlu manifoldun içsel eğriliğini ifade eder. Bu manifolda daldırılmış, (n-1)-boyutlu manifolda ise (n-1)-boyutlu hiperyüzey denir ve bunun n-boyuttaki eğrilmesini ise

$$K_{ab} = D_a n_b \equiv h_a^c h_b^d \nabla_c n_d, \quad (\Rightarrow K_{ab} = K_{ba}) \quad (2.17)$$

bağıntısıyla tanımlanan K_{ab} “dışsal eğriliği” (İkinci temel form) belirler. Burada $\mathbf{n}$ ile hiperyüzeyin $\varepsilon_n = -1, 0, 1$ olmak üzere, $n_a n^a = \varepsilon_n$ biçiminde normlanmış normal, ∇ ile n -boyutlu kovaryant türev, h_{ab} ve D ile de §3.1 de değinileceği üzere, sırasıyla izdüşürme operatörü ve tamamen izdüşürülmüş $(n-1)$ -boyutlu kovaryant türev gösterilmektedir. Her iki manifoldun Riemann eğrilik tansörleri birbirlerine

$${}^{n-1}R_{abcd} = h_a^p h_b^q h_c^r h_d^s {}^n R_{pqrs} + \varepsilon_n (K_{ac} K_{bd} - K_{bc} K_{ad}) \quad (2.18)$$

Gauss bağıntısıyla bağılırlar. Bunun büzülmüş şekilleri ise

$${}^{n-1}R_{ab} = h_a^p h_b^q {}^n R_{pq} - \varepsilon_n n^p h_a^q n^r h_b^s {}^n R_{pqrs} + \varepsilon_n (K K_{ab} - K_{ac} K^c{}_b) \quad (2.19)$$

ve

$${}^{n-1}R = {}^n R - 2\varepsilon_n n^a n^b {}^n R_{ab} + \varepsilon_n (K^2 - K_{ab} K^{ab}) \quad (2.20)$$

olup bunlara sırasıyla, Büzülmüş Gauss Bağıntısı ve Skaler Gauss Bağıntısı denir. (2.3.a) da $\mathbf{X}$ yerine özel olarak $\mathbf{n}$ normalini almak

$$D_a K_{bc} - D_b K_{ac} = h_a^p h_b^q h_c^r {}^n R_{pqrs} n^s \quad (2.21)$$

$$D_a - D_b K_a^b = -h_a^p {}^n R_{ps} n^s \quad (2.22)$$

bağıntılarına yol açar ki, bunlara da sırasıyla Codazzi-Mainardi Bağıntısı ve Büzülmüş Codazzi-Mainardi Bağıntısı denir.

2.2.YÜKSEK MERTEBEDEN EĞRİLİKLİ GRAVİTASYON TEORİLERİ

(2.2) ile verilen Einstein Alan Denklemlerini (EAD),

$$\begin{aligned} S &= S_{EH} + S_m \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g} L_m(g_{ab}, \psi) \end{aligned} \quad (2.23)$$

ile tanımlanan bir aksiyondan hareketle, metriğe göre bir varyasyon ile elde etmek mümkündür. Burada S_{EH} , R Ricci skaleri olmak üzere, Einstein-Hilbert (EH) aksiyonu

(Λ -lı); S_m ise, L_m madde-enerji Lagrange yoğunluğu olmak üzere, madde aksiyonudur. Birinci aksiyon R ye göre lineer olup (2.2) nin sol (geometrik) kısmını; ikincisi ise

$$T_{ab} = -2 \frac{\partial L_m}{\partial g^{ab}} + g_{ab} L_m \quad (2.24)$$

ile tanımlı T_{ab} enerji-momentum tansörünü verir.

Çok iyi bilindiği üzere, EAD'nin geçerliliği Güneş sistemimizde, yani zayıf gravitasyon alanında (düşük enerji) büyük bir güvenilirlik derecesinde kanıtlanmıştır. Ancak, mesela evrenin başlangıç anlarında (Planck uzunluklarında), eğriliğin çok yüksek ve de kuvantum dalgalanmalarının çok şiddetli olabileceği göz önüne alınırsa, Öklitsele yakın bir topolojik yapının (zayıf gravitasyon) fazla olası olamayacağı düşünülebilir. Einstein-Hilbert aksiyonunun R ye göre lineer olması, kuvantum gravitasyonunda ortaya çıkan ve renormalizasyonu önleyen istenmeyen diverjansları elemekte yetersiz kalmaktadır. Bu bakımdan, yani, kuvantum düzeltmelerini GRT kapsamı içine almak için, (2.23) aksiyonunda R ye göre lineer olmayan gravitasyonel Lagrange'yenler kullanmak hiç de anlamsız görünmemektedir. Bu bağlamda, Einstein'ın GRT'sine, eğriliğin çok güçlü olduğu durumları da kapsayan daha genel bir gravitasyon teorisinin düşük enerji limiti olduğu gözüyle bakılmaktadır. Dörtten daha büyük boyutları ilgilendiren ve gravitasyonu kuvantize etme amacını taşıyan bu girişimlere birazdan tekrar dönmek üzere, önce 4-boyutta EAD'yi değişikliğe uğratma girişimlerine değinelim.

4-boyutta, EH aksiyonunu ve dolayısıyla da EAD'yi değişikliğe uğratma yaklaşımlarına önemli bir gerekçeyi “karanlık enerji” olarak anılan problem etrafında sürdürülen tartışmalar oluşturmaktadır. İlk defa 1998'de ortaya konulan ve günümüze kadar çeşitli gözlem grupları tarafından da doğrulanan Süpernova Tip-Ia kızılakayma uzaklık gözlemleri ve de kozmik mikrodalga arka fonu (KMAF) sıcaklığındaki dalgalanma spektrumuna ilişkin gözlemsel veriler evrenimizin:

- günümüzde ivmelenen (hızlanan) bir genişleme evresinde bulunduğu;
- uzaysal eğriliğinin sıfır (düz uzay) olduğuna;

- 10^{-5} mertebesinde homojen ve eşyönlü olduğuna

işaret etmektedir. Günümüzde böyle bir ivmelenmeyle genişlemeyi GRT, evrenin içerdiği bilinen (gözlenen) enerji miktarından hareketle açıklayamamaktadır. Açıklanması için çok daha büyük miktarlarda enerji gerekmektedir ki bunun kaynağının ne olduğu hakkında çok çeşitli spekülasyonlar yapılagelmektedir. Mahiyeti ne olursa olsun evrenin geç-zamanındaki ivmeli genişlemesinden sorumlu etken “karanlık enerji” olarak adlandırılmaktadır. Öte yandan, galaksimize ilişkin gözlemsel veriler ile galaksilerin merceklenme görüntülerinden hareketle evrenimizde bir de “karanlık madde” denilen bir madde türü olması gerektiği de ortaya çıkmıştır. Bu karanlık maddeye aday olarak önerilenler arasında nötrino, beyaz cüceler, Macholar, vb... sayısız standart madde türlerinden hiçbiri, gözlemleri tutarlı ve sorunsuz bir biçimde açıklayamamaktadırlar.

Gözlemsel verilerden ve ölçümlerden ortaya çıkan sonuç, evrenimizin madde-enerji içeriği olarak, yaklaşık % 71 karanlık enerji, %25 karanlık madde ve %4 de bilinen madde olduğuna işaret etmektedir. Karanlık madde probleminin yanı sıra, özellikle evrenimizin günümüzde hızlanarak genişlemesinin açıklanması, yüzyılımızın en temel teorik problemlerinden biri olarak kabul edilmekte ve bu alanda da son on yıldan bu yana sayısız çalışmanın konusunu oluşturagelmektedir.

Karanlık enerji problemini çözmeye yönelik çalışmalarda başlıca iki tip yaklaşımın ele alındığı göze çarpmaktadır. Bunların birincisinde (2.2) deki EAD,

$$G_{ab} = T_{ab}^{\text{bilinen madde}} + T_{ab}^{\text{karanlık enerji}} \quad (2.25)$$

biçiminde yazılmaktadır. Burada, sağdaki ikinci terim karanlık enerji denilen bilinenin dışında ekzotik bir maddeye bağlanan enerji-momentum tansörünü göstermektedir. (2.2) ile karşılaştırmadan hemen görüleceği üzere böyle bir enerjiye Λ kozmolojik sabitini (vakumun enerjisi) bağlamak ilk olası çözüm gibi görünmektedir. Ancak, evrenin günümüzdeki gözlenen ivmeli genişlemesini verecek şekilde ayarlanmış Λ parametresinin Güneş sistemimiz için bulunan değerden çok daha büyük olması gerektiği (ince-ayar (fine-tuning) problemi) Λ -lı soğuk karanlık madde-enerji (Λ CDM: cold dark matter with Λ) modellerine rağbeti azaltmaktadır. $T_{ab}^{\text{karanlık enerji}}$ için, Λ dan

başka, skaler modeller (quintessence veya phantom), karmaşık bir hal denklemine sahip karanlık akışkan, fermiyonlu Abelian ya da Abelian olmayan vektör alanı, sicim veya M-teori, yüksek boyutlar, vb. çok daha karmaşık alan teorileri ileri sürülmüştür. Ancak, karanlık enerji olarak ileri sürülen ve varlığı günümüze kadar hiçbir şekilde gözlenemeyen söz konusu ekzotik madde-enerjiye dayalı açıklamalar pek çok sorunu da beraberinde getirmektedirler (Bu konuyla ilgili daha geniş bilgi için [26-30,33-64] kaynaklarına bakılabilir).

Evrenin ivmelenerek genişlemesinin açıklanmasını amaçlayan bir diğer yaklaşım da (2.2) deki EAD'nin sol yanı olan geometrik kısmı

$$G_{ab} + G_{ab}^{\text{karanlık geometri}} = \kappa^2 T_{ab} \quad (2.26)$$

biçiminde değişikliğe uğratmaktır. Burada, soldaki ikinci terim, uzay-zamanın: R , R_{ab} , R_{abcd} eğriliklerinin bir çeşit kombinasyonundan oluşmuş, geometrik kökenli, ikinci mertebeden bir tansörel ifadedir.

(2.2) deki EAD'yi, (2.26) daki gibi “düzeltme terimi” rolü oynayan bir terimle değişikliğe uğratmak için, (2.23) teki EH aksiyonunda çok çeşitli seçimler göz önüne alınmıştır. Bunlardan biri, (2.23) te R yerine R nin keyfi bir $F(R)$ skaler fonksiyonunu almaktır. Böyle elde edilen teoriye “ $F(R)$ -gravite” adı verilmektedir. Bir başka seçim de,

$$G = R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd} \quad (2.27)$$

olmak üzere, (2.23) teki R yi, $F(G)$ gibi keyfi bir fonksiyon ile $R + F(G)$ biçiminde değiştirmektir. Burada G ifadesine “pür Gauss-Bonnet terimi” denilmekte olup böyle değiştirilmiş teorilere de “ $F(G)$ -gravite” ya da “Gauss-Bonnet terimli gravite” adı verilmektedir. Aslında, yukarıdaki her iki değişikliği de kapsayacak biçimde genel olarak R yerine $F(R, G)$ biçiminde bir fonksiyon almak da mümkündür. Hatta, hepsinden de daha genel olarak, $F(R, R_{ab}R^{ab}, R_{abcd}R^{abcd})$ gibi eğrilik büyüklüklerinin invariantlarının bir fonksiyonun alınması düşünülebilir. Şüphesiz böyle terimlerin yol açtığı alan denklemleri, EAD'ye göre daha karmaşık ve dolayısıyla da çözüm

buldurmaya zorlaştıracak bir mahiyette olmaktadır. Zira, EAD nin, metriğe göre en fazla ikinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler olmalarına karşılık, yukarıda söylenen türdeki değişiklikler alan denklemlerinin dördüncü mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler olmalarına yol açmaktadır. Bununla beraber, bu tür teoriler EAD'ye nispetle çok daha zengin bir kozmolojik çerçeve sunmaktadır.

Şimdi, yüksek boyutlarda gravitasyonun kuantum teorisi ve de birleştirilmiş teori için yapılan girişimlere değinelim. Aslında, EAD'nin dörtten daha büyük boyutlu uzay-zamanlarda ele alınması 1920'lerin başlarında Kaluza ve Klein'in çalışmalarıyla başlamıştır [74,75]. Elektromagnetizma ile gravitasyonu bir birleştirme girişimi olarak ileri sürülen teorilerinin getirdiği ekstra boyut kavramı 1980'lerin başlarında yeniden canlandırılmış ve gravitasyonun Kuantum Mekaniği ile birleştirilmesi girişimlerinde ve özellikle Sicim teorisi ile M-teori için vazgeçilmez bir unsur olmuştur. Bu çalışmalar, gravitasyonun, düşük enerjilerde efektif olarak 4-boyutlu olan yüksek boyutlu bir teorinin limiti olduğu düşüncesine sevk etmiştir. Bu çalışmaların ortak yönünü ise, içinde yaşadığımız fiziksel dört boyutlu uzay-zaman ile gözlemsel ve deneysel tutarlılığın koşulu olarak, ekstra boyut ya da boyutlara getirilen sıkıştırma (kompaktlaştırma) mekanizması oluşturmaktadır. Ancak, Sicim teorisindeki 90'lı yılların sonlarındaki gelişmeler bazı ekstra boyutların son derece küçük olmadıkları yönünde bir takım sonuçlar vermiştir. Sicim teorisinin bu sonuçlarından ve de M-teoriden esinlenen yüksek boyutlu modeller, ekstra boyutların içinde yaşadığımız dört boyutlu evreni nasıl etkilediğini tasvir eden basit ama akla yatkın bir yaklaşım sunmuşlardır. Buna göre, Parçacık Fiziğinin Standart Modelindeki temel etkileşimleri tasvir eden alanlar 3-zar denilen bir (1+3)-boyutlu hiperyüzeye hapsedilmiş iken gravitasyon alanı "bulk" denilen (1+3+d) boyutlarda yayılabilmektedir ve üstelik ekstra boyutların küçük ve hatta çok küçük (kompakt) olması da gerekmemektedir. Bu sınıf modeller içinde en basitini oluşturan d=1 hali için, beşinci boyutun evrenin büyüklüğü mertebesinde de olabileceği 1998'de Randall ve Sundrum [68,69] tarafından gösterilmiştir.

Evrenimizin, bulk diye anılan yüksek boyutlu bir uzay-zamana yatırılmış topolojik bir "arıza" olarak tasavvuru, kozmolojik evrim açısından, Konvansiyonel (Standart) Kozmoloji'dekilerden farklı bir takım özelliklerin ortaya çıkmasına olanak

tanınmaktadır. Nitekim, mesela, zarevren modellerinde, ileride gösterileceği üzere, zar üzerinde elde edilen efektif Einstein Alan Denklemlerinde fazladan iki terim ortaya çıkmaktadır. Birincisi, zarın enerji momentum tansöründe kuvadratik bir düzeltme terimi bulunmakta; ikincisi ise, beş boyutlu bulk'ın Weyl tansörünün elektriksel kısmı diye anılan bir terim, bulk'ın etkisi olarak alan denklemlerine girmektedir. Öte yandan, bulk ile zar arasında bir enerji alışverişi olanağı bulunması da kozmolojik evrim bakımından yeni olabilirlikler sunacak bir mekanizma olarak görülmektedir.

Yakın zamanlarda, zarevren modellerinin daha da genelleştirilmiş şekilleri ileri sürülmüştür. Bunlardan biri Maeda ve Torii' nin 2008'de ileri sürdüğü ve bulk'ın aksiyonuna bir 5-boyutlu pür Gauss-Bonnet terimi ekleyerek değişikliğe uğrattığı zarevren modelidir [51]. Diğer bir genelleştirmeyi ise Dvali, Gabadadze ve Porrati (DGP) tarafından önerildiği üzere, 4-boyutlu zar aksiyonuna bir de R eğrilik skaleri eklemek oluşturmaktadır [76]. Bu tür değişikliklerle oluşturulan teoriler, genel olarak, Gauss-Bonnet terimli ve indüklenmiş graviteli zarevren modelleri olarak anılmaktadır. Şüphesiz, R ve G yerine bunların $F(R)$, $F(G)$ gibi fonksiyonlarla daha da genelleştirilmeleri olanak dışı değildir [61].

Bu Tezde, GRT'deki makaslamasız mükemmel kozmik akışkan iddiasını, S_m madde aksiyonuna değil de, EH aksiyonuna getirilen geometri kökenli düzeltmelerle değişikliğe uğratılmış yukarıda sözü edilen 4-boyutlu ve 5-boyutlu teorilerde ele alacağız. Bu teorilerin, matematiksel yapılarını §3'te kısaca sunacağız.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Çalışmalarımız, göz önüne alınacak gravitasyon teorilerinin alan denklemlerinin hem 1+3 kovaryant ayrışım yöntemi, hem de tetrad formalizmi kullanılarak elde edilmiş evrim ve bağ denklemlerinin kullanımına dayanacağından, önce, bu iki tekniği [3,65-67,77-79] kaynaklarından yararlanarak kısaca tanıtıyoruz.

3.1. UZAY-ZAMANIN 1+3 KOVARYANT AYRIŞIMI

3.1.1. İzdüşürme Tansörleri

Uzay-zamanın ipliklenmesi ya da 1+3 kovaryant ayrışımı olarak adlandırılan yöntem, bir $(\mathbf{M}_4, \mathbf{g})$ uzay-zamanında $\mathbf{u}$ ile gösterilen ayrıcalıklı bir vektörün varlığı varsayımına dayanır. Bu, akışkanın zamansal 4-lü hız vektörü olabileceği gibi, akışkan ile birlikte hareket eden (eşhareketli) bir gözlemcinin de 4-lü hız vektörü olarak veyahut da 3-boyutlu hiperyüzeylere dilimlenmiş bir uzay-zaman manifoldunun hiperyüzeylerinin $\mathbf{n}$ normali olarak düşünülebilir. Eğer bu ayrıcalıklı vektör, zaman cinsinden 4-lü hız vektörü olarak düşünülürse

$$u^a u_a = -1 \quad (3.1)$$

biçiminde normlanacaktır. $\mathbf{u}$ nun varlığı, $(\mathbf{M}_4, \mathbf{g}, \mathbf{u})$ uzay-zaman manifoldunda

$$U_{ab} = -u_a u_b \quad (3.2.a)$$

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \quad (3.2.b)$$

bağıntıları uyarınca iki tansör tanımlanabilmesine olanak sağlamaktadır. Tanımlarından hareketle bu tansörlerin aşağıdaki bağıntıları sağladıkları kolayca gösterilebilir.

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \Leftrightarrow g_{ab} = U_{ab} + h_{ab} \quad (3.3.a)$$

$$U_{ab} = U_{ba}, U^a_a = +1, U^a_b u^b = u^a, U^a_c U^c_b = U^a_b, U^a_c U^b_d = U^a_d U^b_c \quad (3.3.b)$$

$$h_{ab} = h_{ba}, \quad h^a_a = 3, \quad h^a_b u^b = 0, \quad h^a_c h^c_b = h^a_b, \quad h^a_c h^b_d = h^a_d h^b_c \quad (3.3.c)$$

İzdüşürme tansörleri denilen bu tansörlerin varlığı, geometrik ve fiziksel büyüklüklerin bu ayrıcalıklı $\mathbf{u}$ vektörüne paralel ve dik bileşenlere ayrıştırılmasını sağlar. Eğer $\mathbf{u}$ akışkanla birlikte hareket eden gözlemcinin zamansal 4-lü hız vektörü ise, $\mathbf{u}$ ya dik izdüşüm, gözlemcinin anlık durgunluk sistemine izdüşüm olarak düşünülecektir. Bir $\mathbf{X}$ vektörü ve bir $\mathbf{X}$ tansörü için söz konusu izdüşümler (3.3.a) uyarınca

$$X^a = g^a_b X^b = U^a_b X^b + h^a_b X^b \quad (3.4.a)$$

$$X_{ab} = g^c_a g^d_b X_{cd} = U^c_a U^d_b X_{cd} + U^c_a h^d_b X_{cd} + h^c_a U^d_b X_{cd} + h^c_a h^d_b X_{cd} \quad (3.4.b)$$

biçiminde ifade edilir. (3.4.a) ve (3.4.b) deki son terimlere, sırasıyla “tamamen dik izdüşürülmüş uzaysal kısım” denir. Genel bir tansör için bu

$$X^{ab...}_{cd...} = h^a_m h^b_n ... h^p_c h^r_d X^{mn...}_{pr...} \quad (3.4.c)$$

ile tanımlanır. Şimdi, özel olarak $\mathbf{u}$ nun ikinci mertebeden bir tansör olan $\nabla_a u_b$ kovaryant türevi göz önüne alınsın. (3.1) denkleminde kolayca elde edilebilecek

$$u^a \nabla_b u_a = 0, \quad u^a \nabla_a u_b \equiv a_b \Rightarrow u^a a_a = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{u} \quad (3.5)$$

bağıntıları (3.4.b) bağıntısında $X_{ab} = \nabla_a u_b$ alınarak kullanılırsa

$$\nabla_a u_b = -u_a a_b + h^c_a h^d_b \nabla_c u_d \quad (3.6)$$

ayrışımı elde edilir. Son terim, genellikle

$$D_a u_b = h^c_a h^d_b \nabla_c u_d \quad (3.7)$$

biçiminde gösterilir. $D_a u_b$ ye $\mathbf{u}$ ya dik izdüşürülmüş kovaryant türev (gözlemcinin anlık durgunluk uzayına dik izdüşürülmüş kovaryant türev) denir. Bu türev keyfi bir skaler, bir vektör ve bir tansör için, sırasıyla

$$D_a f = h^c_a \nabla_c f, \quad D_a X_b = h^c_a h^d_b \nabla_c X_d, \quad D_a X^{b...}_{c...} = h^p_a h^b_q ... h^r_c ... \nabla_p X^{q...}_{r...} \quad (3.8)$$

biçiminde tanımlanır. Hemen görüleceği üzere,

$$u^a D_a f = u^a D_a X_b = u^a D_a X^{b\dots}_{c\dots} = 0 \quad (3.9)$$

dir, yani D_a kovaryant türevi $\mathbf{u}$ ya diktir ve zaten uzaysal denmesinin nedeni de budur. (3.5) te tanımlanan $\mathbf{a}$ büyüklüğü 4-lü hız vektörü $\mathbf{u}$ nun kendi doğrultusundaki kovaryant türevi olup $\mathbf{u}$ nun zamansal olması nedeniyle ivmeyi gösterir. $u^a \nabla_a$ operatörü, gözlemci sisteminde öz-zamana göre türev anlamını taşıdığından bu terimi zamana göre türev anlamında “ $\cdot$ ” ile göstermek ve dolayısıyla da $a_a \equiv \dot{u}_a$ yazılışını kullanmak uygun olacaktır. Buna göre bir skaler, bir vektör ve bir tansör için sırasıyla

$$u^a \nabla_a f \equiv \dot{f}, \quad u^a \nabla_a X_b \equiv \dot{X}_b, \quad u^a \nabla_a X^{b\dots}_{c\dots} \equiv \dot{X}^{b\dots}_{c\dots} \quad (3.10)$$

yazılışları kullanılacaktır. Yukarıda tanımlanan bu türevler ışığında mesela f gibi bir keyfi skalerin 4-boyutlu kovaryant türevi

$$\nabla_a f = U^b_a \nabla_b f + h^b_a \nabla_b f = -u_a u^b \nabla_b f + D_a f = -u_a \dot{f} + D_a f \quad (3.11)$$

biçiminde ayrışacaktır.

Şimdi (3.4.b) bağıntısındaki son terime dönelim ve bunu

$$h^c_a h^d_b X_{cd} \equiv \overset{s}{X}_{ab} \quad (3.12)$$

ile gösterelim. $\overset{s}{X}_{ab}$, 4-tansör X_{ab} nin $\mathbf{u}$ ya tamamen dik izdüşürülmüş uzaysal kısmıdır

(“ s ” harfi uzaysal (spatial) olduğunu belirtmektedir) ve biri simetrik, diğeri de antisimetrik olmak üzere

$$\overset{s}{X}_{ab} = \overset{s}{X}_{(ab)} + \overset{s}{X}_{[ab]} \quad (3.13)$$

biçiminde iki kısma ayrıştırılabilir. Öte yandan, $\overset{s}{T}_{(ab)}$ simetrik kısım da, biri izsiz simetrik kısım, diğeri de iz kısmı olmak üzere

$$\overset{s}{X}_{(ab)} = \overset{s}{X}_{\langle ab \rangle} + \frac{1}{3} \text{Tr } \overset{s}{X}_{(ab)} h_{ab} \quad (3.14)$$

biçiminde yazılabilir. Burada “Tr ” yazılışı ile İz (Trace) kastedilmekte olup

$$\text{Tr } \overset{s}{X}_{(ab)} = h^{cd} \overset{s}{X}_{(cd)} \quad (3.15)$$

dir. Öte yandan açılı parantez ile $\overset{s}{X}_{\langle ab \rangle}$ nin izsiz simetrik kısmı gösterilmektedir. Bu tanımlar yardımıyla

$$\overset{s}{X}_{\langle ab \rangle} = \left[h^c_{(a} h^d_{b)} - \frac{1}{3} h^{cd} h_{ab} \right] X_{cd} \quad (3.16)$$

ifadesi kolayca elde edilebilir. Açılı parantez yalnızca tansörlerin dik izdüşürülmüş izsiz simetrik kısmı için değil, fakat aynı zamanda vektörlerin dik izdüşümleri ve de bütünlüğü sağlamak üzere, u^a boyunca kovaryant zaman türevlerinin dik (ortogonal) izdüşümleri için de kullanılıp

$$X_{\langle a \rangle} = h_{ab} X^b, \quad \dot{X}_{\langle a \rangle} = h_{ab} \dot{X}^b \quad (3.17)$$

yazılacaktır.

3.1.2. Akışkanın Kinematik Büyüklükleri

Şimdi, 1+3 ayrışımının uzaysal kısmının parçalanışı için yukarıda söylenenler, izdüşürülmüş kovaryant uzaysal türeve uygulanarak (3.6) denklemini

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + D_{(a} u_{b)} + D_{[a} u_{b]} = -u_a \dot{u}_b + D_{\langle a} u_{b \rangle} + \frac{1}{3} \text{Tr} D_{(a} u_{b)} h_{ab} + D_{[a} u_{b]} \quad (3.18)$$

biçiminde ifade edilir ve

$$\theta_{ab} = D_{(a} u_{b)}, \quad \theta = \text{Tr} D_{(a} u_{b)}, \quad \sigma_{ab} = D_{\langle a} u_{b \rangle} \equiv \theta_{ab} - \frac{1}{3} \theta h_{ab}, \quad \omega_{ab} = D_{[a} u_{b]} \quad (3.19)$$

tanımları yapılırsa,

$$v_{ab} \equiv \theta_{ab} + \omega_{ab} \equiv \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \omega_{ab} \quad (3.20)$$

olmak üzere,

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + \theta_{ab} + \omega_{ab} = -u_a \dot{u}_b + \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \omega_{ab} = -u_a \dot{u}_b + v_{ab} \quad (3.21)$$

biçimini alır. $\dot{u}_a$, θ_{ab} , θ , σ_{ab} ve ω_{ab} akışkanın kinematik büyüklüklerini oluşturur ve sırasıyla: ivme, genişleme tansörü, genişleme skaleri, makaslama tansörü ve dönme (girdap) tansörü olarak adlandırılırlar. Bunlardan θ_{ab} , $\mathbf{u}$ vektörüne yerel olarak dik 3-uzay elemanının genişleme hızını; σ_{ab} makaslama tansörü ise $\mathbf{u}$ ya dik uzay elemanlarının hacim değişmeksizin şekil değişikliğini verir. Tanımlarından görüleceği üzere yukarıdaki kinematik büyüklükler şu özellikleri sağlarlar:

$$\theta_{ab} = \theta_{(ab)}, \theta_{ab} u^a = \theta_{ab} u^b = 0, \theta = \theta^a_a = D_a u^a \quad (3.22.a)$$

$$\sigma_{ab} = \sigma_{(ab)}, \sigma_{ab} u^a = \sigma_{ab} u^b = 0, \sigma^a_a = 0 \quad (3.22.b)$$

$$\omega_{ab} = \omega_{[ab]}, \omega_{ab} u^a = \omega_{ab} u^b = 0, \omega^a_a = 0 \quad (3.22.c)$$

Ayrıca, σ_{ab} ve ω_{ab} ye

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{ab}\sigma^{ab}, \omega^a = \frac{1}{2}\eta^{abcd}u_d\omega_{bc}, \omega^2 = \frac{1}{2}\omega_{ab}\omega^{ab} = \omega_a\omega^a \quad (3.23)$$

bağıntılarıyla tanımlı, sırasıyla, makaslama skaleri (σ), dönme vektörü (ω^a) ve dönme skaleri (ω) bağlanabilir ve bunlar da

$$\sigma_{ab} = 0 \Leftrightarrow \sigma = 0, \omega_{ab} = 0 \Leftrightarrow \omega^a = 0, \omega^a u_a = \omega^a \omega_{ab} = 0 \quad (3.24)$$

özelliklerini sağlar. ω^a vektörü, $\mathbf{u}$ nun anlık durgunluk uzayında, akışkanın, dönmeden ileri gelen anlık dönme eksenini belirler ve ayrıcalıklı zamansal $\mathbf{u}$ referans kongürüansının integral eğrilerinin içsel (intrinsic) dönme ve şekil bozulmalarının bir ölçüsüdür.

(3.23) te kullanılan tamamen antisimetrik η psödötansörü 4-boyutlu hacim elemanı olup

$$\begin{aligned}\eta_{abcd} &= -\sqrt{-g}\varepsilon_{abcd} \quad , \quad \eta_{0123} = -\sqrt{-g} < 0 \\ \eta^{abcd} &= +\frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{abcd} \quad , \quad \eta^{0123} = +\frac{1}{\sqrt{-g}} > 0\end{aligned}\quad (3.25)$$

bağıntılarıyla tanımlanmıştır ve

$$\begin{aligned}\eta^{abcd}\eta_{efgh} &= -\delta_{efgh}^{abcd} \quad , \quad \eta^{abct}\eta_{efgt} = -\delta_{efg}^{abc} \quad , \quad \eta^{abst}\eta_{efst} = -2\delta_{ef}^{ab} \\ \eta^{arst}\eta_{erst} &= -6\delta_e^a \quad , \quad \eta^{prst}\eta_{prst} = -24\end{aligned}\quad (3.26)$$

özelliklerini sağlar. ε_{abcd} tamamen antisimetrik Levi-Civita ($\varepsilon_{0123} = +1$ kabul edilmiştir) ve δ_{efgh}^{abcd} de genelleştirilmiş Kronocker sembolleridir. Öte yandan,

$$\eta_{abc} \equiv \eta_{abcd}u^d \Rightarrow \eta_{abc}u^c = 0 \quad (3.27)$$

bağıntısı aracılığıyla durgunluk uzayları için bir hacim elemanı tanımlanabilir.

Bu konuyu kapamadan önce şu önemli noktaya değinmek iyi olacaktır. Gözlemcinin anlık durgunluk sistemleri her zaman bir hiperyüzey oluşturucu değildirler, yani $\mathbf{u}$ vektörü her zaman bir hiperyüzey ailesinin normali olarak düşünülemez. Bunun böyle olması için ω dönme vektörünün sıfır olması ($\omega=0$) gerekir.

3.1.3. Akışkanın Dinamik Büyüklükleri

Bir akışkanın, $\mathbf{u}$ 4-lü hızıyla hareket eden bir gözlemciye göre enerji-momentum tansörünün ifadesi

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} + 2q_{(a} u_{b)} + \pi_{ab} \quad (3.28)$$

olup burada: μ : madde-enerji yoğunluğu, p : eşyönlü basınç, q_a : momentum yoğunluğu veya enerji akısı, π_{ab} : eşyönsüz basınç tansörüdür ve bunlar

$$q_a u^a = 0 \quad , \quad \pi_{ab} = \pi_{(ab)} \quad , \quad \pi_{ab} u^a = 0 \quad , \quad \pi^a_a = 0 \quad (3.29)$$

özelliklerini taşırlar. Bu dört dinamik büyüklük T_{ab} den hareketle

$$\mu = u^a u^b T_{ab} \quad (3.30.a)$$

$$p = \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab} \quad (3.30.b)$$

$$q_c = -T_{ab} h_c^a u^b \quad (3.30.c)$$

$$\pi_{ab} = (h_{(a}^c h_{b)}^d - \frac{1}{3} h^{cd} h_{ab}) T_{cd} \quad (3.30.d)$$

bağıntılarıyla tanımlanır.

T_{ab} enerji-momentum tansörü

$$\nabla_a T^{ab} = 0 \quad (3.31)$$

korunum kanununa uyar. (3.28), bir akışkan için en genel enerji-momentum tansörü ifadesidir. Akışkanın fiziğini bu dört değişken arasındaki birtakım bağıntılar belirler ve bunlar “hal denklemi” olarak anılırlar. Çok özel olarak,

$$q_a = 0 \quad , \quad \pi_{ab} = 0 \quad (3.32)$$

haline Mükemmel Akışkan denir. Bu takdirde

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} \quad (3.33)$$

olur. Bunun da $p=0$ haline Basıncsız Akışkan (ya da Toz veya Soğuk Karanlık Madde) denir. Mükemmel akışkanın hal denklemi olarak

$$p = p(\mu) \quad (3.34)$$

biçimindeki bir bağıntıya barotropik hal denklemi ve bunun da

$$p = w\mu \quad (w = \text{sabit} \quad , \quad -1 \leq w \leq 1) \quad (3.35)$$

biçimindeki özel haline lineer barotropik hal denklemi denir.

3.1.4. Kovaryant Evrim ve Bağ Denklemleri

Ayrıcalıklı bir $\mathbf{u}$ vektörünün varlığı altında yeni bir yapı kazanan $(\mathbf{M}_4, \mathbf{g}, \mathbf{u})$ uzay-zamanında temel amaç, 1+3 ayrışımı ile Riemann eğrilik tansörü gibi geometrik büyüklüklerden bilgi üretilmesidir. Bu yaklaşımda,

$$R_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 \left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right) \quad (3.36)$$

biçiminde yazılabilecek Einstein alan denklemleri, R_{ab} Ricci tansörünü, yerel kaynakların katkısını gösteren T_{ab} enerji-momentum tansörü cinsinden ifade etmek için cebirsel bir bağıntı rolünü oynar. (3.28) ve (3.36) ifadelerinden hareketle, şu bağıntıları ve çeşitli izdüşümlerini yazmak mümkündür:

$$R = -T + 4\Lambda, \quad T = -\mu + 3p, \quad R = \mu - 3p + 4\Lambda \quad (3.37.a)$$

$$R_{ab} u^a u^b = \frac{1}{2}(\mu + 3p) - \Lambda, \quad h^a_c h^b_d R_{ab} = \left[\Lambda - \frac{1}{2}(p - \mu) \right] h_{cd} + \pi_{cd} \quad (3.37.b)$$

$$R_{ab} u^b = -q_a - \frac{1}{2}(\mu + 3p - 2\Lambda) u_a, \quad R_{ab} u^b h^a_c = -q_c \quad (3.37.c)$$

Öte yandan (2.11) ile verilen Weyl tansörünün ifadesinden

$$R_{abcd} u^a u^c = E_{bd} - \frac{1}{2} \pi_{bd} + \frac{1}{6}(\mu + 3p - 2\Lambda) h_{bd} \quad (3.38)$$

bağıntısı yazılabilir. Burada E_{ab} Weyl tansörünün “elektiriksel kısmı” olarak anılır. Weyl tansörünün “magnetik kısmı” ise H_{ab} ile gösterilir; bunlar

$$E_{ab} = C_{aebd} u^e u^d, \quad H_{ab} = \frac{1}{2} \eta_{ae}^{gh} C_{ghbd} u^e u^d \quad (3.39)$$

bağıntılarıyla tanımlanırlar ve

$$E_{ab} = E_{(ab)}, \quad H_{ab} = H_{(ab)}, \quad E^a_a = 0, \quad H^a_a = 0, \quad E_{ab} u^b = 0, \quad H_{ab} u^b = 0 \quad (3.40)$$

özelliklerini taşırlar. Bu iki tansör,

$$C^{ab}_{cd} = 4u^{[a}u_{[c}E^{b]}_{d]} + 4h^{[a}_{[c}E^{b]}_{d]} + 2\eta^{abe}u_{[c}H_{d]e} + 2\eta_{cde}u^{[a}E^{b]e} \quad (3.41)$$

bağıntısı uyarınca, Weyl tansörünü tamamen belirler.

1+3 kovaryant ayrışım yönteminin esası, kaydadeğer geometrik ve dinamik büyüklükleri, izdüşüm tansörleri aracılığıyla, $\mathbf{u}$ ayrıcalıklı vektörüne dik ve paralel bileşenlerine ayırtırmaya dayanır. Amaç, Riemann tansörü ile Ricci ve Bianchi özdeşliklerinden kaynaklanabilecek tüm bilgileri elde etmektir. Akışkanın kinematik ve dinamik büyüklüklerinin hesaba katılması, ifadeleri (3.21) ve (3.36) ile verilen, sırasıyla $\nabla_a u_b$ kovaryant türev ve R_{ab} Ricci tansörü ifadeleri aracılığıyla; E_{ab} ve H_{ab} serbest alanlarının hesaba katılması ise (2.11), (3.39) ve (3.41) ifadelerinin kullanımıyla olur. Sonuçta: $\dot{u}_a$, θ_{ab} , θ , σ_{ab} , σ , ω_{ab} , ω_a ve ω kinematik büyüklükler ile E_{ab} ve H_{ab} serbest gravitasyon alanları ve de μ , p , q_a ve π_{ab} dinamik değişkenleri için evrim (ya da yayılım) ve bağ denklemleri denilen aşağıdaki denklemler elde edilir. Bunların çıkarımları için bkz. [65,66,77,79].

EVRİM DENKLEMLERİ:

(E_1) : Genelleştirilmiş Raychaudhuri Denklemi (Genişleme Yayılımı)

$$\dot{\theta} = D_a \dot{u}^a - \frac{1}{3} \theta^2 + \dot{u}_a \dot{u}^a - 2\sigma^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2}(\mu + 3p) + \Lambda \quad (3.42)$$

$(E_2)^a$: Girdap Yayılımı

$$\dot{\omega}^a = \frac{1}{2} \eta^{abc} D_b \dot{u}_c - \frac{2}{3} \theta \omega^a + \sigma^a_b \omega^b + u^a \dot{u}_b \omega^b \quad (3.43)$$

$(E_3)_{ab}$: Makaslama Yayılımı

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ab} = & (u_a \sigma_{bc} + u_b \sigma_{ac}) \dot{u}^c + \frac{1}{2} (D_a \dot{u}_b + D_b \dot{u}_a) - \sigma_{ac} \sigma^c_b - \frac{2}{3} \theta \sigma_{ab} + \dot{u}_a \dot{u}_b \\ & - \omega_a \omega_b - \frac{1}{3} (D_c \dot{u}^c + \dot{u}_c \dot{u}^c - 2\sigma^2 - \omega^2) h_{ab} - \left(E_{ab} - \frac{1}{2} \pi_{ab} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$(E_4)_{ab}$: **Gravito-elektrik Yayılımı (Maxwell-Weyl E-nokta Denklemi)**

$$\begin{aligned}
\left(\dot{E}_{ab} + \frac{1}{2} \dot{\pi}_{ab} \right) = & \left(E_{ae} + \frac{1}{2} \pi_{ae} \right) \dot{u}^e u_b + \left(E_{be} + \frac{1}{2} \pi_{be} \right) \dot{u}^e u_a \\
& + \frac{1}{2} \left(\eta_{aef} D^e H^f{}_b + \eta_{bef} D^e H^f{}_a \right) - \frac{1}{4} (D_a q_b + D_b q_a) + \frac{1}{6} h_{ab} D^e q_e \\
& - \frac{1}{2} (\mu + p) \sigma_{ab} - \frac{1}{2} (q_a \dot{u}_b + q_b \dot{u}_a) + \frac{1}{3} h_{ab} q^e \dot{u}_e - \theta \left(E_{ab} + \frac{1}{6} \pi_{ab} \right) \\
& + \frac{3}{2} \sigma^e{}_a \left(E_{be} - \frac{1}{6} \pi_{be} \right) + \frac{3}{2} \sigma^e{}_b \left(E_{ae} - \frac{1}{6} \pi_{ae} \right) - h_{ab} \sigma^{ef} \left(E_{fe} - \frac{1}{6} \pi_{fe} \right) \\
& - \frac{1}{2} \eta_{aef} \left[\left(E^e{}_b + \frac{1}{2} \pi^e{}_b \right) \omega^f + 2 H^e{}_b \dot{u}^f \right] \\
& - \frac{1}{2} \eta_{bef} \left[\left(E^e{}_a + \frac{1}{2} \pi^e{}_a \right) \omega^f + 2 H^e{}_a \dot{u}^f \right]
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$(E_5)_{ab}$: **Gravito-magnetik Yayılımı (Maxwell-Weyl H-nokta Denklemi)**

$$\begin{aligned}
\dot{H}_{ab} = & (u_a H_{bc} + u_b H_{ac}) \dot{u}^c - \frac{1}{2} \eta_{aef} D^e \left(E^f{}_b - \frac{1}{2} \pi^f{}_b \right) \\
& - \frac{1}{2} \eta_{bef} D^e \left(E^f{}_a - \frac{1}{2} \pi^f{}_a \right) - \theta H_{ab} + \frac{3}{2} (H_{ac} \sigma^c{}_b + H_{bc} \sigma^c{}_a) \\
& - H_{ef} \sigma^{ef} h_{ab} + \frac{3}{4} (\omega_a q_b + \omega_b q_a) - \frac{1}{2} \omega_c q^c h_{ab} + (\eta_{aef} E^e{}_b + \eta_{bef} E^e{}_a) \dot{u}^f \\
& - \frac{1}{2} (\eta_{aef} H^e{}_b + \eta_{bef} H^e{}_a) \omega^f + \frac{1}{4} (\eta_{aef} \sigma^e{}_b + \eta_{bef} \sigma^e{}_a) q^f
\end{aligned} \tag{3.46}$$

(E_6) : **Madde Korunum Denklemi**

$$\dot{\mu} = -D_a q^a - (\mu + p) \theta - 2 q^a \dot{u}_a - \pi^{ab} \sigma_{ab} \tag{3.47}$$

$(E_7)^a$: **Momentum Korunum Denklemi**

$$\dot{q}^a = -D^a p - D_b \pi^{ab} - (\mu + p) \dot{u}^a - \sigma^a{}_b q^b - \frac{4}{3} \theta q^a + u^a \dot{u}_b q^b - \pi^{ab} \dot{u}_b + \eta^{abc} q_b \omega_c \tag{3.48}$$

BAĞ DENKLEMLERİ:

$(C_1)^a$: **Makaslama Bağ Denklemi**

$$0 = D_b \sigma^{ab} - \frac{2}{3} D^a \theta + \eta^{abc} D_b \omega_c + 2 \eta^{abc} \dot{u}_b \omega_c + q^a \quad (3.49)$$

(C_2) : **Girdap Bağ Denklemi**

$$0 = D_a \omega^a - \dot{u}_a \omega^a \quad (3.50)$$

$(C_3)_{ab}$: **Gravito-magnetik Bağ Denklemi**

$$0 = H_{ab} + (\omega_a \dot{u}_b + \omega_b \dot{u}_a) - \omega^e \dot{u}_e h_{ab} - \frac{1}{2} (\eta_{aef} D^e \sigma^f_b + \eta_{bef} D^e \sigma^f_a) + \frac{1}{2} (D_a \omega_b + D_b \omega_a) \quad (3.51)$$

$(C_4)_a$: **Gravito-elektrik Diverjans (Maxwell-Weyl div-E) Denklemi**

$$0 = D_b \left(E^b_a + \frac{1}{2} \pi^b_a \right) - \frac{1}{3} D_a \mu - \frac{1}{2} \sigma^b_a q_b + \frac{1}{3} \theta q_a - \eta_{aef} \left(\sigma^{eb} H^f_b - \frac{3}{2} \omega^e q^f \right) - 3 H^b_a \omega_b \quad (3.52)$$

$(C_5)_a$: **Gravito-magnetik Diverjans (Maxwell-Weyl div-H) Denklemi**

$$0 = D_b H^b_a + \frac{1}{2} \eta_{aef} D^e q^f + (\mu + p) \omega_a + 3 \left(E^b_a - \frac{1}{6} \pi^b_a \right) \omega_b + \eta_{aef} \sigma^e_b \left(E^{fb} + \frac{1}{2} \pi^{fb} \right) \quad (3.53)$$

3.2. TETRAD FORMALİZMİ

Bir $\{x^i, i=0,1,2,3\}$ koordinat sisteminde ∂_i koordinatsal taban vektörleri ve dx^i ler de bunların $dx^i(\partial_j) = \delta^i_j$ düal bağıntısıyla tanımlı düal koordinatsal taban 1-formları olmak üzere $\{\partial_i, dx^i\}$ koordinatsal tabanda metriğin ifadesi $ds^2 = g_{ij}(x^k) dx^i dx^j$ dir. Eğer,

bunların, birbirlerine $\omega^a(E_b) = \delta^a_b$ düalete bağıntısıyla bağlı, $E_a = \omega^i_a(x)\partial_i$ ve $\omega^a = \omega^a_i(x)dx^i$ ($a, b, \dots = 0, 1, 2, 3$.) gibi lineer kombinasyonlarından oluşturulan bir $\{\omega^a, E_a\}$ tabanı tanımlanırsa metrik $ds^2 = g_{ab}\omega^a\omega^b$ biçiminde ifade edilebilir. Bu tabana holonom olmayan taban ya da kısaca tetrad (4-boyutta) tabanı denir. Bunlardan hareketle, metrik, $\eta_{ab} = \text{köş}(-1, 1, 1, 1)$ olmak üzere, Lorentzsel $ds^2 = \eta_{ab}\sigma^a\sigma^b$ biçiminde yazılacak şekilde, $e_a = E^c_a(x)E_c = e^i_a(x)\partial_i$ ve $\sigma^a = E^a_c(x)\omega^c = e^a_i(x)dx^i$ ($\sigma^a(e_b) = \delta^a_b$) yeni bir $\{\sigma^a, e_a\}$ çatısı tanımlanabilir; buna ortonormal tetrad çatısı denir. (Yukarıdaki bağıntılardaki matrisler birbirlerinin tersi olma özelliğini gösteren $\omega^i_a\omega^b_i = \delta^b_a$, $\omega^i_a\omega^a_j = \delta^i_j$, $e^i_a e^b_i = \delta^b_a$, $e^i_a e^a_j = \delta^i_j$ eşitliklerini sağlamaktadırlar.) Koordinatsal tabanda taban vektörlerinin $[\partial_i, \partial_j] = 0$ olan komütatörü, bu çatıda

$$[e_a, e_b] = \gamma^c_{ab}e_c \quad (3.54)$$

biçimini alır. γ^c_{ab} lara komütasyon fonksiyonları denir ve bunlar genel olarak uzay-zaman koordinatlarının fonksiyonudur. Öte yandan, taban vektörlerinin birbirlerine göre kovaryant türevi

$$\nabla_{e_a} e_b \equiv \nabla_a e_b = \Gamma^c_{ab}e_c \quad (3.55)$$

biçiminde tanımlanır. Ricci dönme katsayıları denilen Γ^c_{ab} lar, burulmasız uzay için, γ^c_{ab} lara

$$\gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba} \quad (3.56)$$

bağıntısı uyarınca bağlıdır. Tetrad formalizminde tansör ve tetrad bileşenleri arasındaki geçiş ve kovaryant türev, sırasıyla aşağıdaki gibi olur:

$$S_{a\dots}^{b\dots} = e_a^i \dots e_j^b T^{j\dots}_{i\dots} \Leftrightarrow T^{j\dots}_{i\dots} = e_i^a \dots e_b^j T_{a\dots}^{b\dots} \quad (3.57)$$

$$\nabla_a S^{b\dots}_{c\dots} = e_a^d S^{b\dots}_{c\dots} + \Gamma^d_{ac} S^{b\dots}_{d\dots} - \Gamma^b_{ad} S^{d\dots}_{c\dots} \dots \quad (3.58)$$

Özel olarak, $\mathbf{u}$ vektörünün kovaryant türevi

$$\nabla_a u_b = e_a u_b - \Gamma_{ab}^c u_c \quad (3.59)$$

dir. Eğer, $e_0 = \mathbf{u}$, yani e_0 taban vektörü 4-lü hız vektörü doğrultusunda alınırsa,

$$u^a = \delta_0^a = (1, 0, 0, 0) \Leftrightarrow u_a = -\delta_a^0 = (-1, 0, 0, 0) \quad (3.60)$$

olacağından, (3.21) ve (3.59) dan Γ_{ab}^c lar ve (3.56) da kullanılarak γ_{ab}^c bulunabilir. Bunlar [77,79] da listelenmiştir. Burada, özel olarak, $0 = u_0 = \theta_{a0} = \omega_{a0}$ olduğunu, yani kinematik büyüklüklerin zamansal tetrad bileşenlerinin gözlemcinin anlık durgunluk uzayında sıfır olduğunu söyleyelim. Bundan böyle uzaysal tetrad bileşenleri Grek alfabesinin ilk yarısındaki harfler ($\alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2, 3$) ile indislenecektir. γ_{ab}^c ları bulmanın bir başka yolu da, bir metrik verildiğinde ve bir $\{\sigma^a, e_a\}$ tetrad çatısı seçildiğinde, yani e_a^i ve e_i^a bilindiğinde (3.54) ten kolayca elde edilebilecek

$$\gamma_{ab}^c = -e_a^i e_b^j (\partial_i e_j^c - \partial_j e_i^c) \quad (3.61)$$

ifadesini kullanmaktır. Sonuçlar

$$[e_0, e_\beta] = \dot{u}_\beta e_0 + \left[\varepsilon_{\beta\delta}^\gamma (\Omega^\delta + \omega^\delta) - \sigma_\beta^\gamma - \frac{1}{3} \delta_\beta^\gamma \theta \right] e_\gamma, \quad (3.62.a)$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \omega^\gamma e_0 + (\varepsilon_{\alpha\beta\delta} n^{\gamma\delta} + a_\alpha \delta_\beta^\gamma - a_\beta \delta_\alpha^\gamma) e_\gamma, \quad (3.62.b)$$

komütasyon bağıntılarında özetlenmiştir. Burada $n_{\alpha\beta}$ ve a_α komütasyon değişkenleri ve Ω_α da uzaysal $\{e_\alpha\}$ 3-çatısının (triad) yerel açısal hızıdır.

3.2.1. Evrim ve Bağ Denklemlerinin Tetrad Formu

§3.1.4'te listelenen evrim ve bağ denklemlerinin bir kısmının ortonormal bir tetrad tabanında alacağı şekilleri bulmak için “ D_a ” uzaysal türevlerinin, tetrad karşılıkları için [78]'de verilen dönüşüm ifadeleri kullanılabilir. Ya da, tamamını elde etmek için, doğrudan doğruya, Riemann, Ricci, ... vb. gibi tansörlerin tetrad tabanında yazılmış

ifadelerinden yola çıkılabilir. Burada ayrıntıya girmeyip kendi notasyonumuzla yeniden tesis ettiğimiz bu denklemleri aşağıda yalnızca listelemekle yetiniyoruz.

EVRİM DENKLEMLERİ:

(E_1) : Genelleştirilmiş Raychaudhuri Denklemi (Genişleme Yayılımı)

$$e_0\theta - e_\alpha\dot{u}^\alpha = -\frac{1}{3}\theta^2 + (\dot{u}_\alpha - 2a_\alpha)\dot{u}^\alpha - 2\sigma^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2}(\mu + 3p) + \Lambda \quad (3.63)$$

$(E_2)^\alpha$: Girdap Yayılımı

$$e_0\omega^\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}e_\beta\dot{u}_\gamma = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\left(\Omega_\beta\omega_\gamma - \frac{1}{2}a_\beta\dot{u}_\gamma\right) - \frac{1}{2}n^\alpha{}_\beta\dot{u}^\beta - \frac{2}{3}\theta\omega^\alpha + \sigma^\alpha{}_\beta\omega^\beta \quad (3.64)$$

$(E_3)^{\alpha\beta}$: Makaslama Yayılımı

$$e_0\sigma^{\alpha\beta} - \delta^{\gamma\langle\alpha}e_\gamma\dot{u}^{\beta\rangle} = \varepsilon^{\gamma\delta\langle\alpha}\left(2\Omega_\gamma\sigma^{\beta\rangle}{}_\delta - n^{\beta\rangle}{}_\gamma\dot{u}_\delta\right) + a^{\langle\alpha}\dot{u}^{\beta\rangle} + \dot{u}^{\langle\alpha}\dot{u}^{\beta\rangle} - \frac{2}{3}\theta\sigma^{\alpha\beta} - \sigma^{\langle\alpha}{}_\gamma\sigma^{\beta\rangle\gamma} - \omega^{\langle\alpha}\omega^{\beta\rangle} - \left(E^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\pi^{\alpha\beta}\right) \quad (3.65)$$

$(E_4)^{\alpha\beta}$: Gravito-elektrik Yayılımı (Maxwell-Weyl E-nokta Denklemi)

$$\begin{aligned} e_0\left(E^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\pi^{\alpha\beta}\right) - \varepsilon^{\gamma\delta\langle\alpha}e_\gamma H^{\beta\rangle}{}_\delta + \frac{1}{2}\delta^{\gamma\langle\alpha}e_\gamma q^{\beta\rangle} \\ = -3n^{\langle\alpha}{}_\gamma H^{\beta\rangle\gamma} + \frac{1}{2}n^\gamma{}_\gamma H^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left(a^{\langle\alpha} + 2\dot{u}^{\langle\alpha}\right)q^{\beta\rangle} \\ - \frac{1}{2}(\mu + p)\sigma^{\alpha\beta} - \theta\left(E^{\alpha\beta} + \frac{1}{6}\pi^{\alpha\beta}\right) + 3\sigma^{\langle\alpha}{}_\gamma\left(E^{\beta\rangle\gamma} - \frac{1}{6}\pi^{\beta\rangle\gamma}\right) \\ + \varepsilon^{\gamma\delta\langle\alpha}\left[\left(2\Omega_\gamma + \omega_\gamma\right)\left(E^{\beta\rangle}{}_\delta + \frac{1}{2}\pi^{\beta\rangle}{}_\delta\right) + \frac{1}{2}n^{\beta\rangle}{}_\gamma q_\delta + (2\dot{u}_\gamma - a_\gamma)H^{\beta\rangle}{}_\delta\right] \end{aligned} \quad (3.66)$$

$(E_5)^{\alpha\beta}$: Gravito-magnetik Yayılımı (Maxwell-Weyl H-nokta Denklemi)

$$\begin{aligned}
e_0 H^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\gamma\delta\langle\alpha} e_\gamma \left(E^{\beta\rangle}_\delta - \frac{1}{2} \pi^{\beta\rangle}_\delta \right) &= 3n^{\langle\alpha}_\gamma \left(E^{\beta\rangle}_\gamma - \frac{1}{2} \pi^{\beta\rangle}_\gamma \right) \\
&- \frac{1}{2} n^\gamma_\gamma \left(E^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \pi^{\alpha\beta} \right) - \theta H^{\alpha\beta} + 3\sigma^{\langle\alpha}_\gamma H^{\beta\rangle}_\gamma + \frac{3}{2} \omega^{\langle\alpha} q^{\beta\rangle} \\
&+ \varepsilon^{\gamma\delta\langle\alpha} \left[(2\Omega_\gamma + \omega_\gamma) H^{\beta\rangle}_\delta + a_\gamma \left(E^{\beta\rangle}_\delta - \frac{1}{2} \pi^{\beta\rangle}_\delta \right) + \frac{1}{2} \sigma^{\beta\rangle}_\gamma q_\delta - 2\dot{u}_\gamma E^{\beta\rangle}_\delta \right]
\end{aligned} \tag{3.67}$$

(E_6) : Madde Korunum Denklemi

$$e_0 \mu + e_\alpha q^\alpha + (\mu + p)\theta + \sigma^\alpha_\beta \pi^\beta_\alpha + 2(\dot{u}_\alpha - a_\alpha)q^\alpha = 0 \tag{3.68}$$

$(E_7)^\alpha$: Momentum Korunum Denklemi

$$\begin{aligned}
e_0 q^\alpha + \delta^{\alpha\beta} e_\beta p + e_\beta \pi^{\alpha\beta} + (\mu + p)\dot{u}^\alpha + \frac{4}{3} \theta q^\alpha + \sigma^\alpha_\beta q^\beta \\
+ (\dot{u}_\beta - 3a_\beta) \pi^{\alpha\beta} - \varepsilon^\alpha_{\beta\gamma} \left[(\Omega^\beta - \omega^\beta) q^\gamma + n^\beta_\delta \pi^{\delta\gamma} \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.69}$$

$(E_8)_\alpha$: Komütasyon Değişkeni a_α nın Yayılımı

$$\begin{aligned}
e_0 a_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta}{}^\gamma (e_\gamma + \dot{u}_\gamma - 2a_\gamma) \Omega^\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (\dot{u}^\beta + a^\beta) \omega^\gamma - \frac{1}{2} \sigma_\alpha{}^\beta (\dot{u}_\beta + a_\beta) \\
+ \frac{1}{3} (\dot{u}_\alpha + a_\alpha) \theta - \frac{1}{2} n_{\alpha\beta} \omega^\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda} \sigma^\beta_\gamma n^{\gamma\lambda} = 0
\end{aligned} \tag{3.70}$$

$(E_9)^{\alpha\beta}$: Komütasyon Değişkeni $n^{\alpha\beta}$ nın Yayılımı

$$\begin{aligned}
e_0 n^{\alpha\beta} + \frac{1}{3} n^{\alpha\beta} \theta + \delta^{\alpha\beta} \left[(e_\gamma + \dot{u}_\gamma) (\Omega^\gamma + \omega^\gamma) \right] - \delta^{\gamma(\beta} \left[(e_\gamma + \dot{u}_\gamma) (\Omega^{\alpha)} + \omega^{\alpha)} \right] \\
+ \varepsilon^{\gamma\delta(\alpha} (e_\gamma + \dot{u}_\gamma) \sigma^{\beta)}_\delta - 2\sigma^{(\alpha}_\gamma n^{\beta)\gamma} + 2\varepsilon^{\gamma\lambda(\alpha} n^{\beta)}_\gamma (\Omega_\lambda + \omega_\lambda) = 0
\end{aligned} \tag{3.71}$$

BAĞ DENKLEMLERİ:

$(C_1)^\alpha$: **Makaslama Bağ Denklemi**

$$e_\beta \sigma^{\alpha\beta} - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} e_\beta \theta + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} e_\beta \omega_\gamma - 3a_\beta \sigma^{\alpha\beta} - n^\alpha_\beta \omega^\beta - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \left[n_{\beta\delta} \sigma^\delta_\gamma + (a_\beta - 2\dot{u}_\beta) \omega_\gamma \right] + q^\alpha = 0 \quad (3.72)$$

(C_2) : **Girdap Bağ Denklemi**

$$e_\alpha \omega^\alpha - (2a_\alpha + \dot{u}_\alpha) \omega^\alpha = 0 \quad (3.73)$$

$(C_3)^{\alpha\beta}$: **Gravito-magnetik Bağ Denklemi**

$$H^{\alpha\beta} + \delta^{\gamma\langle\alpha} e_\gamma \omega^{\beta\rangle} - \varepsilon^{\gamma\delta\langle\alpha} e_\gamma \sigma^{\beta\rangle}_\delta + (2\dot{u}^{\langle\alpha} + a^{\langle\alpha}) \omega^{\beta\rangle} + 3n^{\langle\alpha}_\gamma \sigma^{\beta\rangle\gamma} - \frac{1}{2} n^\gamma_\gamma \sigma^{\alpha\beta} - \varepsilon^{\gamma\delta\langle\alpha} (n^{\beta\rangle}_\gamma \omega_\delta - a_\gamma \sigma^{\beta\rangle}_\delta) = 0 \quad (3.74)$$

$(C_4)^\alpha$: **Gravito-elektrik Diverjans (Maxwell-Weyl div-E) Denklemi**

$$e_\beta \left(E^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \pi^{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{3} \delta^{\alpha\beta} e_\beta \mu - 3a_\beta \left(E^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \pi^{\alpha\beta} \right) + \frac{1}{3} \theta q^\alpha - \frac{1}{2} \sigma^\alpha_\beta q^\beta - 3\omega_\beta H^{\alpha\beta} - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \left[\sigma_{\beta\delta} H^\delta_\gamma - \frac{3}{2} \omega_\beta q_\gamma + n_{\beta\delta} \left(E^\delta_\gamma + \frac{1}{2} \pi^\delta_\gamma \right) \right] = 0 \quad (3.75)$$

$(C_5)^\alpha$: **Gravito-magnetik Diverjans (Maxwell-Weyl div-H) Denklemi**

$$e_\beta H^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} e_\beta q_\gamma - 3a_\beta H^{\alpha\beta} + (\mu + p) \omega^\alpha - \frac{1}{2} n^\alpha_\beta q^\beta + 3\omega_\beta \left(E^{\alpha\beta} - \frac{1}{6} \pi^{\alpha\beta} \right) + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \left[\sigma_{\beta\delta} \left(E^\delta_\gamma + \frac{1}{2} \pi^\delta_\gamma \right) - \frac{1}{2} a_\beta q_\gamma - n_{\beta\delta} H^\delta_\gamma \right] = 0 \quad (3.76)$$

$(C_J)^\alpha$: **Jacobi Özdeşliği'nden Kaynaklanan Bağ Denklemi**

$$e_\beta n^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} e_\beta a_\gamma - 2\varepsilon^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\beta \Omega^\gamma + 2\sigma^\alpha_\beta \omega^\beta + \frac{2}{3} \theta \omega^\alpha - 2n^{\alpha\beta} a_\beta = 0 \quad (3.77)$$

$(C_G)_{\alpha\beta}$: EAD'den Kaynaklanan Bağ Denklemi

$$\begin{aligned} & e_{\langle\alpha} a_{\beta\rangle} + 2n_{\gamma\langle\alpha} n_{\beta\rangle}^{\gamma} - n_{\gamma}^{\gamma} n_{\langle\alpha\beta\rangle} + (e_{\gamma} - 2a_{\gamma}) n_{\langle\alpha}^{\lambda} \varepsilon_{\beta\rangle\lambda}^{\gamma} \\ & + \frac{1}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\langle\alpha}^{\gamma} \sigma_{\beta\rangle\gamma} + 2\omega_{\langle\alpha} \Omega_{\beta\rangle} - \omega_{\langle\alpha} \omega_{\beta\rangle} - \left(E_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \pi_{\alpha\beta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

(C_G) : Gauss-Codazzi Denkleminden Kaynaklanan Bağ Denklemi

$$4e_{\alpha} a^{\alpha} - 6a_{\alpha} a^{\alpha} - n^{\alpha\gamma} n_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} n_{\gamma}^{\gamma} n^{\alpha}_{\alpha} - 4\omega^{\lambda} \Omega_{\lambda} - 2\mu^t + \frac{2}{3} \theta^2 + 2\sigma^2 + 2\omega^2 = 0 \quad (3.79)$$

3.3. DÖRT BOYUTTA F(R,G), F(R) VE F(G)-GRAVİTE TEORİLERİNİN ALAN DENKLEMLERİ

§2.2'de bahsedildiği üzere, EAD'nin geometrik kısmı

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (3.80)$$

biçimindeki EH aksiyonundan, metriğe göre bir varyasyonla elde edilmekteydi. Aksiyonda, R Ricci skaler eğriliği yerine R ve G nin ((2.27) deki Gauss-Bonnet terimi) $F(R,G)$ gibi keyfi bir fonksiyonu alınarak

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} F(R,G) + S_m \quad (3.81)$$

biçiminde değiştirilmesiyle elde edilen teoriye $F(R,G)$ -gravite denir ((2.23) teki Λ kozmolojik sabiti, $F(R,G)$ fonksiyonunun içine atıldığı için aksiyonda açıkça görülmemektedir.). $F(R,G) \equiv F(R)$ (veya $\equiv f(R)$) özel haline $F(R)$ -gravite, $F(R,G) \equiv R + F(G)$ özel haline ise $F(G)$ -gravite denir. (3.81) in metriğe göre varyasyonu

$$\begin{aligned} & F_R R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} (F(R,G) - G F_G) - \nabla_a \nabla_b F_R + g_{ab} \square F_R \\ & - 2R \nabla_a \nabla_b F_G - 4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d F_G - 4R_{ab} \square F_G + 2R g_{ab} \square F_G \\ & + 4R^c_a \nabla_b \nabla_c F_G + 4R^c_b \nabla_a \nabla_c F_G - 4F_G R^c_a{}^d_b \nabla_d \nabla_c = \kappa^2 T^m_{ab} \end{aligned} \quad (3.82)$$

alan denklemlerine yol açar (Bkz. EK A). Burada, F_R ve F_G , $F_R \equiv \frac{\partial F(R,G)}{\partial R}$ ve $F_G \equiv \frac{\partial F(R,G)}{\partial G}$ türevlerini, $\square = \nabla_a \nabla^a$ ise 4-boyutlu D’Alambert operatörünü göstermektedir. T_{ab}^m de bilinen maddeye bağlanan standart enerji-momentum tansörüdür. Hemen görüleceği üzere, (3.82), $F(R,G) = F(R)$ için, $F(R)$ -gravitenin

$$F_R R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} F(R) - \nabla_a \nabla_b F_R + g_{ab} \square F_R = \kappa^2 T_{ab}^m \quad (3.83)$$

biçimindeki alan denklemlerine ve $F(R,G) = R + F(G) \Rightarrow F_R = 1$ için de $F(G)$ -gravitenin

$$\begin{aligned} R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R - \frac{1}{2} g_{ab} (F(G) - G F_G) \\ - 2R \nabla_a \nabla_b F_G - 4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d F_G - 4R_{ab} \square F_G + 2R g_{ab} \square F_G \\ + 4R^c_a \nabla_b \nabla_c F_G + 4R^c_b \nabla_a \nabla_c F_G - 4F_G R_a^{cd} \nabla_d \nabla_c = \kappa^2 T_{ab}^m \end{aligned} \quad (3.84)$$

biçimindeki alan denklemlerine özelleşir. (3.83) denklemi, $F(R) = R - 2\Lambda$ için ve (3.84) denklemi de, $F(G) = G - 2\Lambda$ için (2.1) deki EAD’ye indirgenir. Bu son durum, G nin 4-boyutta bir topolojik invaryant olduğu biçiminde ifade edilir.

3.4. BEŞ BOYUTTA ZAREVREN MODELLERİNİN ALAN DENKLEMLERİ

1999’da Randall ve Sundrum [68,69] evreni “bulk” denilen 5-boyutlu bir uzay-zaman manifolduna daldırılmış “zar” olarak anılan 4-boyutlu bir hiperyüzey olarak tasarlamaya dayalı bir model ileri sürmüşlerdir. Zarevren denilen bu modelin aksiyonu

$$\begin{aligned} S &= S_{bulk} + S_{zar} \\ &= \frac{1}{2\kappa_5^2} \int d^5 X \sqrt{-^5 g} (^5 R - 2\Lambda_5) + S_m^{bulk} + \int d^4 x \sqrt{-^4 g} (-\lambda) + S_m^{zar} \end{aligned} \quad (3.85)$$

olup bundan türeyen 5-boyutlu EAD,

$$T_{AB}^{toplamlam} = T_{AB}^{bulk(toplam)} + \delta(\chi) T_{AB}^{zar(toplam)} \quad (3.86.a)$$

$$T_{AB}^{bulk(toplam)} = -\Lambda_5 {}^5g_{AB} + {}^5T_{AB}^{madde(bulk)} \quad (3.86.b)$$

$$T_{AB}^{zar(toplam)} = -\lambda {}^4g_{AB} + {}^5T_{AB}^{bilinen\ madde} \quad (3.86.c)$$

olmak üzere,

$${}^5G_{AB} \equiv {}^5R_{AB} - \frac{1}{2} {}^5R {}^5g_{AB} = -\Lambda_5 {}^5g_{AB} + \kappa_5 {}^2T_{AB}^{toplam} \quad (3.87)$$

biçimindedir. Yukarıda, büyük Latin harfleri bulka ait koordinat bileşenlerini göstermekte olup $A, B, C, \dots = 0, 1, 2, 3, 4$. değerlerini almaktadır. Büyüklüklerin sol üst ve sağ alt köşelerinde yer alan “4” ve “5” rakamları ise, sırasıyla, zara ve bulka aidiyeti göstermektedir. Buna göre, ${}^5g_{AB}$, ${}^5G_{AB}$ ve Λ_5 , sırasıyla 5-boyutlu bulk uzay-zamanının metriği, Einstein tansörü ve kozmolojik sabitidir. κ_5^2 , 5-boyutlu gravitasyonel kuplaj sabitidir. (3.86) da $T_{AB}^{bulk(toplam)}$ a bulktaki muhtemel bir madde-enerji varlığı da eklenmiştir. $T_{AB}^{zar(toplam)}$ zar üzerinde yerleşik enerji-momentumu ve λ da zardaki gerilimi göstermektedir (4-boyutlu Konvansiyonel gravitasyonun zar üzerinde geçerliliğini sağlamak üzere λ nın pozitif alınması gerekmektedir).

(3.86.a) bağıntısında zarın enerji-momentumunun Dirac δ -distribüsyonu biçiminde ifade edilmesi, zarın, $X^4 \equiv \chi = \text{sabit} \equiv 0$ bulk koordinat değerinde bulunduğu anlamına gelmektedir. Buna göre, zara bağlı bir gözlemci için, zar hareketsiz fakat bulk hareketli olmaktadır. Shiromizu ve diğ. [70] bu yaklaşımdan hareketle, 5-boyuta genelleştirilmiş izdüşürme mekanizması aracılığıyla, boş bir bulk ($T_{AB}^{madde(bulk)} = 0$) için, Gauss-Codazzi denklemlerinden

$$\begin{aligned} {}^4G_{ab} = & KK_{ab} - K_a^c K_{bc} - \frac{1}{2} g_{ab} (K^2 - K^{cd} K_{cd}) - \varepsilon_{ab} \\ & + \frac{2\kappa_5^2}{3} \left[T_{AB} g^A_a g^B_b + \left(T_{AB} n^A n^B - \frac{1}{4} T \right) g_{ab} \right] \end{aligned} \quad (3.88)$$

ve Z_2 ayna simetrisi varsayımı altında da Israel bağdaştırma koşullarını

$$K_{ab} = -\frac{\kappa_5^2}{2} \left(S_{ab} - \frac{1}{3} S g_{ab} \right), \quad S_{ab} \equiv T_{ab} - \lambda g_{ab} \quad (3.89)$$

bulmaktadırlar. Yukarıda denklemler $a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3$. olan zar koordinatlarında ifade edilmişlerdir ve ${}^4g_{ab} \equiv g_{ab}$, $T_{AB}^{bulk(toplam)} \equiv T_{AB}$, $T_{ab}^{madde} \equiv T_{ab}$, $T_{AB}^{zar(toplam)} \equiv S_{ab}$ kısaltmaları kullanılmıştır. ${}^4g_{ab} \equiv g_{ab}$ ye 4-boyutlu zar üzerinde indüklenmiş metrik denir; K_{ab} , zarın bulk içinde eğriliğini ifade eden dışsal eğrilik tansörünü ve ε_{ab} de 5-boyutlu Weyl tansörünün elektriksel kısmının zar üzerine izdüşümünün zar koordinatlarındaki ifadesini göstermektedir. Simetrik ve izsiz olan bu tansör bulktaki serbest gravitasyon alanının yerel olmayan etkisini yansıtmaktadır.

Bu son denklem (3.88) e yerleştirildiğinde zar üzerinde indüklenmiş efektif Einstein alan denklemleri maddesiz bulk için

$$\tau_{ab} \equiv \frac{1}{12} T T_{ab} - \frac{1}{4} T_{ac} T^c_b + \frac{1}{24} g_{ab} [3 T_{cd} T^{cd} - T^2] \quad (3.90)$$

olmak üzere

$${}^4G_{ab} = -\Lambda_4 g_{ab} + \kappa_5^4 \tau_{ab} + \kappa_4^2 T_{ab} - {}^5\varepsilon_{ab} \quad (3.91)$$

biçiminde elde edilirler. Burada parametreler birbirlerine

$$\frac{1}{2} \left(\Lambda_5 + \frac{1}{6} \kappa_5^2 \lambda^2 \right) = \Lambda_4 \quad \text{ve} \quad \frac{\kappa_5^4 \lambda}{6} = \kappa_4^2 \equiv 8\pi G_4 \quad (3.92)$$

biçiminde bağlıdır ve κ_4^2 , Λ_4 ve G_4 sırasıyla, dört boyutlu uzay zamanın gravitasyon sabiti, efektif kozmolojik sabit ve efektif Newton kütleçekim sabiti olup bulktaki temel κ_5^2 ve Λ_5 sabitleri cinsinden verilmiştir.

Literatürde Randall ve Sundrum'un zarevren modelinin pek çok değiştirilmiş şekli son 15 yıldan bu yana göz önüne alınmıştır. Bunlardan biri, Maeda ve Torii'nin [51], bulk aksiyonunda

$${}^5G = {}^5R^2 - 4 {}^5R_{ab} {}^5R^{ab} + {}^5R_{abcd} {}^5R^{abcd} \quad (3.93)$$

Gauss-Bonnet terimini alarak ileri sürmüş olduğu zarevren; bir diğeri ise Dvali, Gabadadze ve Porrati'nin (DGP) [76] zar üzerinde indüklenmiş R skaler eğrilik terimini alarak ileri sürmüş olduğu indüklenmiş graviteli zarevren modelleridir. R yerine daha genel olarak $F(R)$ gibi bir fonksiyon da alınabileceğini belirterek her iki modeli de kapsayacak şekilde genelleştirilmiş aksiyon, α ve β birer kuplaj sabiti olmak üzere

$$S = S_{bulk} + S_{zar} = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int d^5 X \sqrt{-^5 g} (^5 R - 2\Lambda_5 + \alpha ^5 G) + S_m^{bulk} + \int d^4 x \sqrt{-^4 g} [-\lambda + \beta F(R)] + S_m^{zar} \quad (3.94)$$

biçiminde yazılabilir. Maeda ve Torii $\beta \equiv 0$ ve de $\lambda \equiv 0$ için, (3.94) ten türeyen 5-boyutta alan denklemlerini,

$$H_{AB} = \left(2 ^5 R ^5 R_{AB} - 4 ^5 R_A^C ^5 R_{CB} - 4 ^5 R_{ACBD} ^5 R^{CD} + 2 ^5 R_A^{EFG} ^5 R_{BEFG} \right) - \frac{1}{2} g_{AB} ^5 G \quad (3.95)$$

$$^5 G_{AB} \equiv ^5 R_{AB} - \frac{1}{2} ^5 R g_{AB} \quad (3.96)$$

olmak ve $T_{AB}^{toplamlam}$ da (3.86.a) ile verilmek üzere (EK A'daki hesaba benzer tarzda),

$$^5 G_{AB} + \alpha H_{AB} = \kappa_5^2 T_{AB}^{toplamlam} \quad (3.97)$$

biçiminde bulmaktadırlar. Maeda ve Torii zarevrende yapılan benzer geometrik yaklaşımı izleyerek zar üzerine indüklenmiş efektif alan denklemleri için

$$^4 G_{ab} = K K_{ab} - K_a^c K_{bc} - \frac{1}{2} g_{ab} (K^2 - K^{cd} K_{cd}) - \varepsilon_{ab} - \alpha (\hat{H}_{ab}^{(1)} + \hat{H}_{ab}^{(2)} + \hat{H}_{ab}^{(3)}) + \frac{2\kappa_5^2}{3} \left\{ T_{AB} g^A_a g^B_b + \left(T_{AB} n^A n^B - \frac{1}{4} T \right) g_{ab} \right\} + \frac{\alpha}{3 + \alpha M} (M_{ab} - \frac{1}{4} M g_{ab}) T_{AB} g^{AB} \quad (3.98)$$

ve bağdaştırma koşulları için de

$$K_{ab} + \frac{2\alpha}{3} \left[9J_{ab} - 2Jg_{ab} - 2(3P_{abcd} + g_{ab} G_{cd}) K^{cd} \right] = -\frac{\kappa_5^2}{2} (S_{ab} - \frac{1}{3} S g_{ab}) \quad (3.99)$$

ifadelerini bulmuşlardır. Yukarıdaki denklemlerde yer alan çeşitli büyüklükler Maeda ve Torii tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmışlardır:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{ab}^{(1)} = & \frac{4}{3}(M_{acdf}M_b^{cdf} - 3M^{cd}M_{acbd} + 2MM_{ab} - 4M_{ac}M_b^c) \\ & - \frac{1}{12}g_{ab}(11M^2 - 40M_{cd}M^{cd} + 7M_{cdef}M^{cdef}) \\ & - \frac{\alpha}{3(3+\alpha M)}(M_{ab} - \frac{1}{4}Mg_{ab})(M^2 - 8M_{cd}M^{cd} + M_{cdef}M^{cdef})\end{aligned}\quad (3.100)$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_{ab}^{(2)} = & -4(M_{ac}\varepsilon_b^c + M_{bc}\varepsilon_a^c + M_{acbd}\varepsilon^{cd}) + 3g_{ab}M_{cd}\varepsilon^{cd} + 2M\varepsilon_{ab} \\ & + \frac{4\alpha}{(3+\alpha M)}(M_{ab} - \frac{1}{4}Mg_{ab})M_{cd}\varepsilon^{cd}\end{aligned}\quad (3.101)$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_{ab}^{(3)} = & \frac{8}{3}\left[-N_aN_b + N^c(N_{cab} + N_{cba}) + \frac{1}{2}N_{cda}N_b^{cd} + N_{acd}N_b^{cd}\right] \\ & + \left[2g_{ab} + \frac{8\alpha}{3(3+\alpha M)}(M_{ab} - \frac{1}{4}Mg_{ab})\right](N_cN^c - \frac{1}{2}N_{cde}N^{cde})\end{aligned}\quad (3.102)$$

$$M_{abcd} = R_{abcd} - K_{ac}K_{bd} + K_{ad}K_{bc}, \quad (3.103.a)$$

$$M_{ab} = g^{cd}M_{acbd} = R_{ab} - KK_{ab} + K_{ac}K_b^c \quad (3.103.b)$$

$$M = g^{ab}M_{ab} = R - K^2 + K_{ab}K^{ab} \quad (3.103.c)$$

$$N_{abc} = \nabla_a K_{bc} - \nabla_b K_{ac} \quad (3.104.a)$$

$$N_a = g^{bc}N_{bac} = \nabla_c K_a^c - \nabla_a K \quad (3.104.b)$$

$$J_{ab} = \frac{1}{3}(2KK_{ac}K_b^c + K_{cd}K^{cd}K_{ab} - 2K_{ac}K^{cd}K_{db} - K^2K_{ab}) \quad (3.105)$$

$$P_{abcd} = R_{abcd} + 2h_{a[d}R_{c]b} + 2h_{b[c}R_{d]a} + Rh_{a[c}h_{d]b} \quad (3.106)$$

Genelleştirilmiş DGP modelinde ise $\alpha \equiv 0$ alınarak zar üzerinde indüklenen efektif alan denklemleri (3.91) in elde edilmesine benzer tarzda bulunabilir. Ancak, burada zar

üzerinde bilinen madde ve zar gerilimine ek olarak $F(R)$ -indüklenmiş graviteden kaynaklanan,

$$T_{ab}^F \equiv -2\beta \left[F_R G_{ab} + \frac{1}{2} (R F_R - F) - \nabla_a \nabla_b F_R + g_{ab} \square F_R \right] \quad (3.107)$$

gibi bir efektif katkı daha bulunduğunu göz önünde bulundurmak gerekecektir. Bu takdirde, (3.89)

$$K_{ab} = -\frac{\kappa_5^2}{2} \left(S_{ab} - \frac{1}{3} S g_{ab} \right) , \quad S_{ab} \equiv T_{ab}^m - \lambda g_{ab} + T_{ab}^F \quad (3.108)$$

biçiminde yazılmalıdır. K_{ab} nin bu ifadesi (3.88) e yerleştirilirse uzun hesaplardan sonra elde edilen $F(R)$ -zarevren için zar üzerinde indüklenmiş efektif alan denklemlerini Bulgular bölümünde yazıyoruz.

4. BULGULAR

Bu bölümde, makaslamasız akışkan iddiasını önceki bölümlerde bahsedilen yüksek mertebeden eğrilikli gravitasyon teorileri çerçevesinde ele alacağız. Bu iş için, önce söz konusu teorilerin alan denklemlerinin 1+3 kovaryant ayrışımını gerçekleştirecek ve gerek duyulduğunda da bunların tetrad versiyonlarını oluşturacağız. Önce 4-boyutlu teoriler olan $F(R)$ -gravite ve $F(G)$ -gravite teorilerini göz önüne alıyoruz. Ancak, bütünlüğü sağlamak için ve de daha genel olması için, herbiri için ayrı ayrı yapmaktansa, bunları özel durum olarak içeren $F(R,G)$ ile başlamayı uygun bulduk.

4.1. 1+3 KOVARYANT AYRIŞIM TEKNİĞİNİN $F(R,G)$ -GRAVİTENİN ALAN DENKLEMLERİNE UYGULANMASI

Önce, (3.82) ile verilen $F(R,G)$ -gravitenin alan denklemlerini sol tarafta yalnızca $F_R R_{ab}$ terimi kalacak biçimde yazalım:

$$\begin{aligned} F_R R_{ab} = & \kappa^2 T_{ab}^m + \nabla_a \nabla_b F_R - g_{ab} \square F_R + \frac{1}{2} g_{ab} (F - G F_G) \\ & + 2R \nabla_a \nabla_b F_G + 4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d F_G + 4(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R) \square F_G \\ & - 4R^c_a \nabla_b \nabla_c F_G - 4R^c_b \nabla_a \nabla_c F_G + 4F_G R^c_a \nabla_b \nabla_c \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sol tarafta $G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$ Einstein tansörünü ortaya çıkarmak için, eşitliğin her iki yanına $-\frac{1}{2} g_{ab} R F_R$ terimi eklenirse

$$\begin{aligned} F_R (R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R) = & \kappa^2 T_{ab}^m + \nabla_a \nabla_b F_R - g_{ab} \square F_R + \frac{1}{2} g_{ab} (F - R F_R - G F_G) \\ & + 2R \nabla_a \nabla_b F_G + 4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d F_G + 4G_{ab} \square F_G \\ & - 4R^c_a \nabla_b \nabla_c F_G - 4R^c_b \nabla_a \nabla_c F_G + 4F_G R^c_a \nabla_b \nabla_c \end{aligned} \quad (4.2)$$

olur ve bu da EAD formuna benzeyecek şekilde düzenlenirse

$$G_{ab} = \kappa^2 \left\{ \frac{T_{ab}^m}{F_R} + \frac{1}{\kappa^2 F_R} \left[\frac{1}{2} g_{ab} (F - R F_R - G F_G) + \nabla_a \nabla_b F_R - g_{ab} \square F_R \right. \right. \\ \left. \left. + 2R \nabla_a \nabla_b F_G + 4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d F_G + 4G_{ab} \square F_G \right. \right. \\ \left. \left. - 4R^c_a \nabla_b \nabla_c F_G - 4R^c_b \nabla_a \nabla_c F_G + 4F_G R_a^{cd} \nabla_d \nabla_c \right] \right\} \quad (4.3)$$

elde edilir. Bu denklemler, $\square$ ve $\nabla_a \nabla_b$ operatörlerinden dolayı genel olarak metriğe göre dördüncü mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerdir. Şimdi, literatürde pek sık kullanılan efektif enerji-momentum tansör yaklaşımını uygulayalım. Bunun için

$$T_{ab}^M = \frac{1}{f} T_{ab}^m \quad (4.4)$$

$$T_{ab}^{RG} = \frac{1}{\kappa^2 f} \left[\frac{1}{2} g_{ab} (F - R F_R - G F_G) + \nabla_a \nabla_b F_R - g_{ab} \square F_R \right. \\ \left. + 2R \nabla_a \nabla_b F_G + 4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d F_G + 4G_{ab} \square F_G \right. \\ \left. - 4R^c_a \nabla_b \nabla_c F_G - 4R^c_b \nabla_a \nabla_c F_G + 4F_G R_a^{cd} \nabla_d \nabla_c \right] \quad (4.5)$$

tanımlanırsa, (4.3) denklemi

$$G_{ab} = \kappa^2 (T_{ab}^M + T_{ab}^{RG}) = \kappa^2 T_{ab}^t \quad (4.6)$$

standart EAD formunda yazılmış olur (RG üst indisi yerine, gerektiğinde yalnızca R ya da G yazılacaktır). Burada: T_{ab}^M , bilinen T_{ab}^m madde enerji-momentum tansörüne bağlanan bir efektif madde enerji-momentum tansörünü ve T_{ab}^{RG} de $F(R, G)$ den kaynaklanan bir efektif geometrik enerji-momentum tansörünü göstermektedir. Bunun, “eğrilik akışkanı” olarak da adlandırılabilir matematiksel bir akışkanı temsil ettiği düşünülebilir. T_{ab}^t ise,

$$T_{ab}^t = T_{ab}^M + T_{ab}^{RG} \quad (4.7)$$

olup toplam efektif enerji-momentum tansörünü göstermektedir. (4.3) ve (4.6) dan

$$2F - R F_R - G F_G - 3\square F_R - 2R\square F_G + 4R^{ab} \nabla_a \nabla_b F_G = -\kappa^2 T^m \quad (4.8.a)$$

ve

$$R = -\kappa^2 (T^M + T^{RG}) = -\kappa^2 T^t \quad (4.8.b)$$

iz denklemleri yazılabilir. Amacımız, yukarıda tanımlanan efektif enerji-momentum tansörlerini (3.30) daki izdüşürme bağıntılarında kullanıp akışkanın dinamik büyüklüklerinin ifadelerini $F(R,G)$ -teorisi kapsamında ifade etmek olacaktır. Bu iş için önce gerekli matematiksel çerçeveyi hazırlayalım.

$$\phi(R, G) \equiv F_R, \quad S_{ab} \equiv \nabla_a \nabla_b \phi, \quad S = \nabla^a \nabla_a \phi \equiv \square \phi \quad (4.9.a)$$

$$\varphi(R, G) \equiv F_G, \quad P_{ab} \equiv \nabla_a \nabla_b \varphi, \quad P = \nabla^a \nabla_a \varphi \equiv \square \varphi \quad (4.9.b)$$

tanımları yapılsın. Bu büyüklükler cinsinden, T_{ab}^{RG} nin ifadesi

$$\begin{aligned} T_{ab}^{RG} = \frac{1}{\kappa^2 f} & \left[\frac{1}{2} g_{ab} (F - R F_R - G F_G) + S_{ab} - g_{ab} S \right. \\ & + 2 R P_{ab} + 4 g_{ab} R^{cd} P_{cd} + 4 G_{ab} P \\ & \left. - 4 R^c_a P_{bc} - 4 R^c_b P_{ac} + 4 R^{cd}_a P_{dc} \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

olur. Öte yandan, EK C ve EK B.1 ile EK B.2'deki bağıntıları kullanarak, S_{ab} nin (3.4.b) uyarınca çeşitli izdüşümlerini veren

$$\begin{aligned} S_{ab} = u_a u_b & \left[\ddot{\phi} - \dot{u}^c D_c \phi \right] - u_a \left[D_b \dot{\phi} - \nu_b^c D_c \phi \right] \\ & - u_b \left[D_a \dot{\phi} - \nu_a^c D_c \phi \right] + D_a D_b \phi - \nu_{ab} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$S \equiv \square \phi = -\ddot{\phi} - \theta \dot{\phi} + \dot{u}^a D_a \phi + D^a D_a \phi \quad (4.12)$$

ifadeleri elde edilebilir. Benzer bağıntılar P_{ab} ve P için de yazılabilir. Öte yandan, R_{ab}

Ricci tansörü için Li ve diğ.nin yöntemini izleyerek R_{ab} yi u 4-lü hız vektörüne göre

$$R_{ab} = \Delta u_a u_b + \Xi h_{ab} + 2 u_{(a} \Upsilon_{b)} + \Sigma_{ab} \quad (4.13)$$

biçiminde ayrıştırılabilir [34]. Burada Δ , Ξ , Υ_a ve Σ_{ab} parametreleri

$$\Delta = R_{ab} u^a u^b, \quad \Xi = \frac{1}{3} R_{ab} h^{ab}, \quad \Upsilon_c = -R_{ab} h_c^a u^b, \quad \Sigma_{ab} = (h_{(a}^c h_{b)}^d - \frac{1}{3} h^{cd} h_{ab}) R_{cd} \quad (4.14.a)$$

biçiminde tanımlanmış olup

$$\Upsilon_c u^c = 0, \quad \Sigma_{ab} = \Sigma_{ba}, \quad \Sigma_{ab} u^a = \Sigma_{ab} u^b = 0, \quad \Sigma^a_a = 0 \quad (4.14.b)$$

özelliklerini taşırlar. Bunların, (4.6) ve (4.8.b) kullanılarak, toplam efektif büyüklüklere

$$\Delta = \frac{\kappa^2}{2} (\mu^t + 3p^t), \quad \Xi = \frac{\kappa^2}{2} (\mu^t - p^t), \quad \Upsilon_a = \kappa^2 q_a^t, \quad \Sigma_{ab} = \kappa^2 \pi_{ab}^t \quad (4.15.a)$$

$$\mu^t = \frac{1}{2\kappa^2} (\Delta + 3\Xi), \quad p^t = \frac{1}{2\kappa^2} (\Delta - \Xi), \quad q_a^t = \frac{1}{\kappa^2} \Upsilon_a, \quad \pi_{ab}^t = \frac{1}{\kappa^2} \Sigma_{ab} \quad (4.15.b)$$

bağıntıları uyarınca bağlı oldukları kolayca bulunabilir. Şimdi, (4.10) ile verilen T_{ab}^{RG} ifadesine, (3.30) bağıntılarını uygulayalım. (4.11) ve (4.12) ile §3.1 deki izdüşürme teknikleriyle elde edilen EK C'deki ve ayrıca EK B.1, EK B.2'de verilen bağıntıları kullanarak, uzun bir hesaptan sonra, eğrilik akışkanının efektif dinamik büyüklüklerini aşağıdaki gibi bulmaktayız:

Efektif madde–enerji yoğunluğu:

$$\begin{aligned} \mu^{RG} = & \frac{1}{\kappa^2 F_R} \left\{ -\frac{1}{2} (F - R F_R - G F_G) + F_{RR} \left[-\theta \dot{R} + D^a D_a R \right] + F_{RRR} \left[D^a R D_a R \right] \right. \\ & + F_{GG} \left[\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (-\theta \dot{G} + D^a D_a G) - 4 \left(E^{ab} + \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \right) (-\sigma_{ab} \dot{G} + D_a D_b G) \right] \\ & + F_{GGG} \left[\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) D^a G D_a G - 4 \left(E^{ab} + \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \right) D_a G D_b G \right] \\ & + F_{RG} \left[-\theta \dot{G} + D^a D_a G + \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (-\theta \dot{R} + D^a D_a R) \right. \\ & \quad \left. - 4 \left(E^{ab} + \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \right) (-\sigma_{ab} \dot{R} + D_a D_b R) \right] \\ & + F_{RRG} \left[2 D^a R D_a G + \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) D^a R D_a R - 4 \left(E^{ab} + \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \right) D_a R D_b R \right] \\ & \left. + F_{RGG} \left[D^a G D_a G + \frac{4}{3} (\Delta + 3\Xi) D^a R D_a G - 8 \left(E^{ab} + \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \right) D_a R D_b G \right] \right\} \quad (4.16) \end{aligned}$$

Efektif basınç:

$$\begin{aligned}
p^{RG} = & \frac{1}{\kappa^2 F_R} \left\{ \frac{1}{2} (F - R F_R - G F_G) \right. \\
& + F_{RR} \left[\ddot{R} - \dot{u}^a D_a R - \frac{2}{3} (-\theta \dot{R} + D^a D_a R) \right] + F_{RRR} \left[\dot{R}^2 - \frac{2}{3} D^a R D_a R \right] \\
& + F_{GG} \left[\frac{2}{3} (\Lambda + 3\Xi) (\ddot{G} - \dot{u}^a D_a G) + \frac{8}{9} \Lambda (-\theta \dot{R} + D^a D_a R) \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{3} \Upsilon^a (D_a \dot{G} - \nu_a^b D_b G) - \frac{4}{3} \left(E^{ab} - \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \right) (-\sigma_{ab} \dot{G} + D_a D_b G) \right] \\
& + F_{GGG} \left[\frac{2}{3} (\Lambda + 3\Xi) \dot{G}^2 + \frac{8}{9} \Lambda D^a G D_a G + \frac{8}{3} \dot{G} \Upsilon^a D_a G - \frac{4}{3} \left(E^{ab} - \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \right) D_a G D_b G \right] \\
& + F_{RG} \left[\ddot{G} - \dot{u}^a D_a G - \frac{2}{3} (-\theta \dot{G} + D^a D_a G) + \frac{2}{3} (\Lambda + 3\Xi) (\ddot{R} - \dot{u}^a D_a R) \right. \\
& \quad + \frac{8}{9} \Lambda (-\theta \dot{R} + D^a D_a R) + \frac{8}{3} \Upsilon^a (D_a \dot{R} - \nu_a^b D_b R) \\
& \quad \left. - \frac{4}{3} \left(E^{ab} - \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \right) (-\sigma_{ab} \dot{R} + D_a D_b R) \right] \\
& + F_{RRG} \left[2 \dot{R} \dot{G} - \frac{4}{3} D^a R D_a G + \frac{2}{3} (\Lambda + 3\Xi) \dot{R}^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{9} \Lambda D^a R D_a R + \frac{8}{3} \Upsilon^a \dot{R} D_a R - \frac{4}{3} \left(E^{ab} - \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \right) D_a R D_b R \right] \\
& + F_{RGG} \left[\dot{G}^2 - \frac{2}{3} D^a G D_a G + \frac{4}{3} (\Lambda + 3\Xi) \dot{R} \dot{G} + \frac{16}{9} \Lambda D^a R D_a G \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{3} \Upsilon^a (\dot{R} D_a G + \dot{G} D_a R) - \frac{8}{3} \left(E^{ab} - \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \right) D_a R D_b G \right] \Big\}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Efektif ısı akısı:

$$\begin{aligned}
q_a^{RG} = & \frac{1}{\kappa^2 F_R} \left\{ F_{RR} \left[- \left(D_a \dot{R} - \nu_a^b D_b R \right) \right] + F_{RRR} \left[- \dot{R} D_a R \right] \right. \\
& + F_{GG} \left[- \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) \left(D_a \dot{G} - \nu_a^b D_b G \right) + 2\Upsilon_a \left(-\theta \dot{G} + D^b D_b G \right) \right. \\
& \quad - 2\Upsilon^b \left(-\nu_{ba} \dot{G} + D_b D_a G \right) + 4\eta_a^{bc} H_b^d \left(-\nu_{cd} \dot{G} + D_c D_d G \right) \\
& \quad \left. + 4 \left(E_a^b + \frac{1}{2} \Sigma_a^b \right) \left(D_b \dot{G} - \nu_b^c D_c G \right) \right] \\
& + F_{GGG} \left[- \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) \dot{G} D_a G + 2\Upsilon_a D^b G D_b G - 2\Upsilon^b D_b G D_a G \right. \\
& \quad \left. + 4 \left(E_a^b + \frac{1}{2} \Sigma_a^b \right) \dot{G} D_b G + 4\eta_a^{bc} H_b^d D_c G D_d G \right] \\
& + F_{RG} \left[- \left(D_a \dot{G} - \nu_a^b D_b G \right) - \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) \left(D_a \dot{R} - \nu_a^b D_b R \right) \right. \\
& \quad + 2\Upsilon_a \left(-\theta \dot{R} + D^b D_b R \right) - 2\Upsilon^b \left(-\nu_{ba} \dot{R} + D_b D_a R \right) \\
& \quad \left. + 4 \left(E_a^b + \frac{1}{2} \Sigma_a^b \right) \left(D_b \dot{R} - \nu_b^c D_c R \right) + 4\eta_a^{bc} H_b^d \left(-\nu_{cd} \dot{R} + D_c D_d R \right) \right] \\
& + F_{RRG} \left[- \left(\dot{R} D_a G + \dot{G} D_a R \right) - \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) \dot{R} D_a R \right. \\
& \quad + 2\Upsilon_a D^b R D_b R - 2\Upsilon^b D_b R D_a R \\
& \quad \left. + 4 \left(E_a^b + \frac{1}{2} \Sigma_a^b \right) \dot{R} D_b G + 4\eta_a^{bc} H_b^d D_c R D_d R \right] \\
& + F_{RGG} \left[- \dot{G} D_a G - \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) \left(\dot{R} D_a G + \dot{G} D_a R \right) \right. \\
& \quad + 4\Upsilon_a D^b R D_b G - 2\Upsilon^b \left(D_b R D_a G + D_b G D_a R \right) \\
& \quad + 4 \left(E_a^b + \frac{1}{2} \Sigma_a^b \right) \left(\dot{R} D_b G + \dot{G} D_b R \right) \\
& \quad \left. \left. + 4\eta_a^{bc} H_b^d \left(D_c R D_d G + D_c G D_d R \right) \right] \right\} \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Efektif eşyönsüz basınç tansörü :

$$\begin{aligned}
\pi_{ab}^{RG} = & \frac{1}{\kappa^2 F_R} \left\{ F_{RR} \left[-\nu_{ab} \dot{R} + D_a D_b R - \frac{1}{3} h_{ab} (-\theta \dot{R} + D^f D_f R) \right] \right. \\
& + F_{RRR} \left[D_a R D_b R - \frac{1}{3} h_{ab} D^f R D_f R \right] \\
& + F_{GG} \left[-\frac{4}{3} \Delta (-\nu_{ab} \dot{G} + D_a D_b G) - 2\Upsilon_a (D_b \dot{G} - \nu_b^c D_c G) - 2\Upsilon_b (D_a \dot{G} - \nu_a^c D_c G) \right. \\
& + 4 \left(E_a^c - \frac{1}{2} \Sigma_a^c \right) (-\nu_{bc} \dot{G} + D_b D_c G) + 4 \left(E_b^c - \frac{1}{2} \Sigma_b^c \right) (-\nu_{ac} \dot{G} + D_a D_c G) \\
& - 4 \left(E_{ab} - \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) (-\theta \dot{G} + D^c D_c G) - 4 \left(E_{ab} + \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) (\ddot{G} - \dot{u}^c D_c G) \\
& + 4 (\eta_a^{cd} H_{db} + \eta_b^{cd} H_{ad}) (D_c \dot{G} - \nu_c^f D_f G) \\
& + \left(\frac{4}{9} \Delta (-\theta \dot{G} + D^c D_c G) + \frac{4}{3} \Upsilon^c (D_c \dot{G} - \nu_c^d D_d G) \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{8}{3} \left(E^{cd} - \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) (-\sigma_{cd} \dot{G} + D_c D_d G) \right) h_{ab} \right] \\
& + F_{GGG} \left[-\frac{4}{3} \Delta D_a G D_b G - 2\Upsilon_a \dot{G} D_b G - 2\Upsilon_b \dot{G} D_a G \right. \\
& + 4 (\eta_a^{cd} H_{db} + \eta_b^{cd} H_{ad}) \dot{G} D_c G \\
& + 4 \left(E_a^c - \frac{1}{2} \Sigma_a^c \right) D_b G D_c G + 4 \left(E_b^c - \frac{1}{2} \Sigma_b^c \right) D_a G D_c G \\
& - 4 \left(E_{ab} - \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) D^c G D_c G - 4 \left(E_{ab} + \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) \dot{G}^2 \\
& + \left(\frac{4}{9} \Delta D^c G D_c G + \frac{4}{3} \Upsilon^c \dot{G} D_c G - \frac{8}{3} \left(E^{cd} - \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) D_c G D_d G \right) h_{ab} \left. \right] \\
& + F_{RG} \left[-\nu_{ab} \dot{G} + D_a D_b G - \frac{4}{3} \Delta (-\nu_{ab} \dot{R} + D_a D_b R) \right. \\
& - 2\Upsilon_a (D_b \dot{R} - \nu_b^c D_c R) - 2\Upsilon_b (D_a \dot{R} - \nu_a^c D_c R) \\
& + 4 \left(E_a^c - \frac{1}{2} \Sigma_a^c \right) (-\nu_{bc} \dot{R} + D_b D_c R) + 4 \left(E_b^c - \frac{1}{2} \Sigma_b^c \right) (-\nu_{ac} \dot{R} + D_a D_c R) \\
& - 4 \left(E_{ab} - \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) (-\theta \dot{R} + D^c D_c R) - 4 \left(E_{ab} + \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) (\ddot{R} - \dot{u}^c D_c R) \\
& + 4 (\eta_a^{cd} H_{db} + \eta_b^{cd} H_{ad}) (D_c \dot{R} - \nu_c^f D_f R) \\
& + \left(-\frac{1}{3} (-\theta \dot{G} + D^c D_c G) + \frac{4}{9} \Delta (-\theta \dot{R} + D^c D_c R) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{3} \Upsilon^c \left(D_c \dot{R} - \nu_c^d D_d R \right) - \frac{8}{3} \left(E^{cd} - \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) \left(-\sigma_{cd} \dot{R} + D_c D_d R \right) h_{ab} \Big] \\
& + F_{RRG} \left[D_a R D_b G + D_a G D_b R - \frac{4}{3} \Delta D_a R D_b R \right. \\
& \quad - 2 \Upsilon_a \dot{R} D_b R - 2 \Upsilon_b \dot{R} D_a R + 4 \left(\eta_a^{cd} H_{db} + \eta_b^{cd} H_{ad} \right) \dot{R} D_c R \\
& \quad + 4 \left(E_a^c - \frac{1}{2} \Sigma_a^c \right) D_b R D_c R + 4 \left(E_b^c - \frac{1}{2} \Sigma_b^c \right) D_a R D_c R \\
& \quad - 4 \left(E_{ab} - \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) D^c R D_c R - 4 \left(E_{ab} + \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) \dot{R}^2 \\
& \quad + \left(-\frac{2}{3} D^c R D_c G + \frac{4}{9} \Delta D^c R D_c R \right. \\
& \quad \left. + \frac{4}{3} \Upsilon^c \dot{R} D_c R - \frac{8}{3} \left(E^{cd} - \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) D_c R D_d R \right) h_{ab} \Big] \\
& + F_{RGG} \left[D_a G D_b G - \frac{4}{3} \Delta (D_a R D_b G + D_a G D_b R) \right. \\
& \quad - 2 \Upsilon_a (\dot{R} D_b G + \dot{G} D_b R) - 2 \Upsilon_b (\dot{R} D_a G + \dot{G} D_a R) \\
& \quad + 4 \left(E_a^c - \frac{1}{2} \Sigma_a^c \right) (D_b R D_c G + D_b G D_c R) \\
& \quad + 4 \left(E_b^c - \frac{1}{2} \Sigma_b^c \right) (D_a R D_c G + D_a G D_c R) \\
& \quad - 8 \left(E_{ab} - \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) D^c R D_c G - 8 \left(E_{ab} + \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) \dot{R} \dot{G} \\
& \quad + 4 \left(\eta_a^{cd} H_{db} + \eta_b^{cd} H_{ad} \right) (\dot{R} D_c G + \dot{G} D_c R) \\
& \quad + \left(-\frac{1}{3} D^c G D_c G + \frac{8}{9} \Delta D^c R D_c G + \frac{4}{3} \Upsilon^c (\dot{R} D_c G + \dot{G} D_c R) \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{16}{3} \left(E^{cd} - \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) D_c R D_d G \right) h_{ab} \right] \Big\} \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadelerin elde edilmesinde keyfi bir $f(R, G)$ fonksiyonu için,

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial R} \frac{dR}{dt} + \frac{\partial f}{\partial G} \frac{dG}{dt} = f_R \dot{R} + f_G \dot{G} \quad \text{ve} \quad D_a f = f_R D_a R + f_G D_a G \quad \text{zincir kuralı}$$

uyarınca, F_R nin zaman ve uzaysal kovaryant türevleri için

$$\dot{F}_R = F_{RR} \dot{R} + F_{RG} \dot{G}, \quad \ddot{F}_R = F_{RRR} \dot{R}^2 + F_{RR} \ddot{R} + F_{RGG} \dot{G}^2 + F_{RG} \ddot{G} + 2F_{RRG} \dot{R} \dot{G} \tag{4.20.a}$$

$$D_a F_R = F_{RR} D_a R + F_{RG} D_a G \tag{4.20.b}$$

$$D_a D_b F_R = F_{RRR} D_a R D_b R + F_{RRG} (D_a G D_b R + D_a R D_b G) \\ + F_{RR} D_a D_b R + F_{RGG} D_a G D_b G + F_{RG} D_a D_b G \quad (4.20.c)$$

bağıntıları ve de F_G nin türevleri için benzerleri kullanılmıştır.

Şimdi, efektif eğrilik akışkanının, 1+3 kovaryant ayrışım yöntemi ile elde edilen dinamik büyüklüklerini tetrad formlarına çevirelim. Bu iş için [78]'de verilen dönüşüm formüllerinin kullanımıyla yazılabilecek,

$$a, b, c \dots \rightarrow \alpha, \beta, \gamma \dots, \varepsilon_{abc} \rightarrow \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \quad (4.21.a)$$

$$\dot{R} \rightarrow e_0 R, \ddot{R} \rightarrow e_0 e_0 R, D_\alpha R \rightarrow e_\alpha R, D_\alpha \dot{R} \rightarrow e_\alpha e_0 R \quad (4.21.b)$$

$$\dot{G} \rightarrow e_0 G, \ddot{G} \rightarrow e_0 e_0 G, D_\alpha G \rightarrow e_\alpha G, D_\alpha \dot{G} \rightarrow e_\alpha e_0 G \quad (4.21.c)$$

$$D_a D_b R \rightarrow D_\alpha D_\beta R = e_\alpha e_\beta R - (a^\lambda \delta_{\alpha\beta} - a_\beta \delta^\lambda_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n^{\lambda\gamma} + \varepsilon^{\gamma\lambda}_{(\alpha} n_{\beta)\gamma}) e_\lambda R \quad (4.21.d)$$

$$D_a D_b G \rightarrow D_\alpha D_\beta G = e_\alpha e_\beta G - (a^\lambda \delta_{\alpha\beta} - a_\beta \delta^\lambda_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n^{\lambda\gamma} + \varepsilon^{\gamma\lambda}_{(\alpha} n_{\beta)\gamma}) e_\lambda G \quad (4.21.e)$$

uyarlamaları göz önüne alındığında, (4.16)-(4.19) ifadeleri aşağıdaki şekilleri alır:

Efektif madde –enerji yoğunluğu:

$$\mu^{RG} = \frac{1}{\kappa^2 F_R} \left\{ -\frac{1}{2} (F - R F_R - G F_G) \right. \\ + F_{RR} (-\theta e_0 R + \delta^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta R - 2a^\alpha e_\alpha R) + F_{RRR} [\delta^{\alpha\beta} e_\alpha R e_\beta R] \\ + F_{GG} \left[\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (-\theta e_0 G + \delta^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta G - 2a^\alpha e_\alpha G) \right. \\ - 4 \left(E^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) [-\sigma_{\alpha\beta} e_0 G + e_\alpha e_\beta G \\ \left. - \left(-a_\beta \delta^\lambda_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}_\alpha n_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}_\beta n_{\alpha\gamma} \right) e_\lambda G \right] \\ \left. + F_{GGG} \left[\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) \delta^{\alpha\beta} e_\alpha G e_\beta G - 4 \left(E^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) e_\alpha G e_\beta G \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + F_{RG} \left[-\theta e_0 G + \delta^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta G - 2a^\alpha e_\alpha G \right. \\
& \quad + \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (-\theta e_0 R + \delta^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta R - 2a^\alpha e_\alpha R) \\
& \quad - 4 \left(E^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) \left[-\sigma_{\alpha\beta} e_0 R + e_\alpha e_\beta R \right. \\
& \quad \quad \left. - \left(-a_\beta \delta^\lambda_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}_\alpha n_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}_\beta n_{\alpha\gamma} \right) e_\lambda R \right] \\
& + F_{RRG} \left[2\delta^{\alpha\beta} e_\alpha Re_\beta G + \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) \delta^{\alpha\beta} e_\alpha Re_\beta R - 4 \left(E^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) e_\alpha Re_\beta R \right] \\
& + F_{RGG} \left[\delta^{\alpha\beta} e_\alpha Ge_\beta G + \frac{4}{3} (\Delta + 3\Xi) \delta^{\alpha\beta} e_\alpha Re_\beta G - 8 \left(E^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) e_\alpha Re_\beta G \right] \Bigg\} \\
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Efektif basınç:

$$\begin{aligned}
p^{RG} = \frac{1}{\kappa^2 F_R} & \left\{ \frac{1}{2} (F - RF_R - GF_G) \right. \\
& + F_{RR} \left[e_0 e_0 R - \dot{u}^\alpha e_\alpha R - \frac{2}{3} (-\theta e_0 R + \delta^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta R - 2a^\alpha e_\alpha R) \right] \\
& + F_{RRR} \left[(e_0 R)^2 - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} e_\alpha Re_\beta R \right] \\
& + F_{GG} \left[\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (e_0 e_0 G - \dot{u}^\alpha e_\alpha G) \right. \\
& \quad + \frac{8}{9} \Delta (-\theta e_0 G + \delta^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta G - 2a^\alpha e_\alpha G) + \frac{8}{3} \Upsilon^\alpha (e_\alpha e_0 G - v_\alpha^\beta e_\beta G) \\
& \quad - \frac{4}{3} \left(E^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) \left[-\sigma_{\alpha\beta} e_0 G + e_\alpha e_\beta G \right. \\
& \quad \quad \left. - \left(-a_\beta \delta^\lambda_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}_\alpha n_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}_\beta n_{\alpha\gamma} \right) e_\lambda G \right] \\
& + F_{GGG} \left[\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (e_0 G)^2 + \frac{8}{9} \Delta \delta^{\alpha\beta} e_\alpha Ge_\beta G \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{3} \Upsilon^\alpha e_0 Ge_\alpha G - \frac{4}{3} \left(E^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) e_\alpha Ge_\beta G \right] \\
& + F_{RG} \left[e_0 e_0 G - \dot{u}^\alpha e_\alpha G - \frac{2}{3} (-\theta e_0 G + \delta^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta G - 2a^\alpha e_\alpha G) \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (e_0 e_0 R - \dot{u}^\alpha e_\alpha R) + \frac{8}{9} \Delta (-\theta e_0 R + \delta^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta R - 2a^\alpha e_\alpha R) \right] \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8}{3} \Upsilon^\alpha \left(e_\alpha e_0 R - \nu_\alpha{}^\beta e_\beta R \right) - \frac{4}{3} \left(E^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) \left[-\sigma_{\alpha\beta} e_0 R + e_\alpha e_\beta R \right. \\
& \quad \left. - \left(-a_\beta \delta^\lambda{}_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}{}_\alpha n_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}{}_\beta n_{\alpha\gamma} \right) e_\lambda R \right] \\
& + F_{RGG} \left[(e_0 G)^2 - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} e_\alpha G e_\beta G + \frac{4}{3} (\Delta + 3\Xi) e_0 R e_0 G + \frac{16}{9} \Delta \delta^{\alpha\beta} e_\alpha R e_\beta G \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{3} \Upsilon^\alpha (e_0 R e_\alpha G + e_0 G e_\alpha R) - \frac{8}{3} \left(E^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) e_\alpha R e_\beta G \right] \\
& + F_{RRG} \left[2e_0 R e_0 G - \frac{4}{3} \delta^{\alpha\beta} e_\alpha R e_\beta G + \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (e_0 R)^2 + \frac{8}{9} \Delta \delta^{\alpha\beta} e_\alpha R e_\beta R \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{3} \Upsilon^\alpha e_0 R e_\alpha R - \frac{4}{3} \left(E^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) e_\alpha R e_\beta R \right] \Big\}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Efektif ısı akısı:

$$\begin{aligned}
q_\alpha^{RG} &= \frac{1}{\kappa^2 F_R} \left\{ F_{RR} \left(-e_\alpha e_0 R + \nu_\alpha{}^\beta e_\beta R \right) + F_{RRR} \left[-e_0 R e_\alpha R \right] \right. \\
& + F_{GG} \left[-\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) \left(e_\alpha e_0 G - \nu_\alpha{}^\beta e_\beta G \right) + 2\Upsilon_\alpha \left(-\theta e_0 G + \delta^{\beta\gamma} e_\beta e_\gamma G - 2a^\beta e_\beta G \right) \right. \\
& \quad - 2\Upsilon^\beta \left[-\nu_{\beta\alpha} e_0 G + e_\beta e_\alpha G \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(a^\lambda \delta_{\beta\alpha} - a_\alpha \delta^\lambda{}_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\alpha\gamma} n^{\lambda\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}{}_\beta n_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}{}_\alpha n_{\beta\gamma} \right) e_\lambda G \right] \right. \\
& \quad + 4 \left(E_\alpha{}^\beta + \frac{1}{2} \Sigma_\alpha{}^\beta \right) \left(e_\beta e_0 G - \nu_\beta{}^\gamma e_\gamma G \right) - 4\varepsilon_\alpha{}^{\beta\gamma} H_\gamma{}^\delta \left[-\nu_{\beta\delta} e_0 G + e_\beta e_\delta G \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(-a_\delta \delta^\lambda{}_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\delta\rho} n^{\lambda\rho} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\lambda}{}_\beta n_{\delta\rho} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\lambda}{}_\delta n_{\beta\rho} \right) e_\lambda G \right] \right] \\
& + F_{GGG} \left[-\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) e_0 G e_\alpha G + 2\Upsilon_\alpha \delta^{\beta\gamma} e_\beta G e_\gamma G \right. \\
& \quad \left. - 2\Upsilon^\beta e_\alpha G e_\beta G + 4 \left(E_\alpha{}^\beta + \frac{1}{2} \Sigma_\alpha{}^\beta \right) e_0 G e_\beta G - 4\varepsilon_\alpha{}^{\beta\gamma} H_\gamma{}^\delta e_\beta G e_\delta G \right] \\
& + F_{RG} \left[-e_\alpha e_0 G + \nu_\alpha{}^\beta e_\beta G - \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) \left(e_\alpha e_0 R - \nu_\alpha{}^\beta e_\beta R \right) \right. \\
& \quad \left. + 2\Upsilon_\alpha \left(-\theta e_0 R + \delta^{\beta\gamma} e_\beta e_\gamma R - 2a^\beta e_\beta R \right) - 2\Upsilon^\beta \left[-\nu_{\beta\alpha} e_0 R + e_\beta e_\alpha R \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(a^\lambda \delta_{\beta\alpha} - a_\alpha \delta^\lambda_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\alpha\gamma} n^{\lambda\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}_\beta n_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}_\alpha n_{\beta\gamma} \right) e_\lambda R \Big] \\
& + 4 \left(E_\alpha^\beta + \frac{1}{2} \Sigma_\alpha^\beta \right) \left(e_\beta e_0 R - v_\beta^\gamma e_\gamma R \right) - 4 \varepsilon_\alpha^{\beta\gamma} H_\gamma^\delta \left[-v_{\beta\delta} e_0 R + e_\beta e_\delta R \right. \\
& \quad \left. - \left(-a_\delta \delta^\lambda_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\delta\rho} n^{\lambda\rho} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\lambda}_\beta n_{\delta\rho} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\lambda}_\delta n_{\beta\rho} \right) e_\lambda R \right] \Big] \\
& + F_{RRG} \left[-e_0 R e_\alpha G - e_0 G e_\alpha R - \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) e_0 R e_\alpha R + 2Y_\alpha \delta^{\beta\gamma} e_\beta R e_\gamma R \right. \\
& \quad \left. - 2Y^\beta e_\alpha R e_\beta R + 4 \left(E_\alpha^\beta + \frac{1}{2} \Sigma_\alpha^\beta \right) e_0 R e_\beta R - 4 \varepsilon_\alpha^{\beta\gamma} H_\gamma^\delta e_\beta R e_\delta R \right] \\
& + F_{RGG} \left[-e_0 G e_\alpha G - \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (e_0 R e_\alpha G + e_0 G e_\alpha R) + 4Y_\alpha \delta^{\beta\gamma} e_\beta R e_\gamma G \right. \\
& \quad \left. - 2Y^\beta (e_\alpha R e_\beta G + e_\alpha G e_\beta R) - 4 \varepsilon_\alpha^{\beta\gamma} H_\gamma^\delta (e_\beta R e_\delta G + e_\beta G e_\delta R) \right. \\
& \quad \left. + 4 \left(E_\alpha^\beta + \frac{1}{2} \Sigma_\alpha^\beta \right) (e_0 R e_\beta G + e_0 G e_\beta R) \right] \Big\}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Efektif eşyönsüz basınç tansörü:

$$\begin{aligned}
\pi_{\alpha\beta}^{RG} &= \frac{1}{\kappa^2 F_R} \left\{ F_{RR} \left[-v_{\alpha\beta} e_0 R + e_\alpha e_\beta R \right. \right. \\
& \quad \left. - \left(a^\lambda \delta_{\alpha\beta} - a_\beta \delta^\lambda_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n^{\lambda\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}_\alpha n_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}_\beta n_{\alpha\gamma} \right) e_\lambda R \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} (-\theta e_0 R + \delta^{\gamma\delta} e_\gamma e_\delta R - 2a^\lambda e_\lambda R) \right] \right. \\
& + F_{RRR} \left[e_\alpha R e_\beta R - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta^{\gamma\delta} e_\gamma R e_\delta R \right] \\
& + F_{GG} \left[-\frac{4}{3} \Delta [-v_{\alpha\beta} e_0 G + e_\alpha e_\beta G \right. \\
& \quad \left. - \left(a^\lambda \delta_{\alpha\beta} - a_\beta \delta^\lambda_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n^{\lambda\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}_\alpha n_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}_\beta n_{\alpha\gamma} \right) e_\lambda G \right] \\
& \quad - 2Y_\alpha (e_\beta e_0 G - v_\beta^\gamma e_\gamma G) - 2Y_\beta (e_\alpha e_0 G - v_\alpha^\gamma e_\gamma G) \\
& \quad + 4 \left(E_\alpha^\gamma - \frac{1}{2} \Sigma_\alpha^\gamma \right) [-v_{\beta\gamma} e_0 G + e_\beta e_\gamma G \\
& \quad \left. - \left(a^\lambda \delta_{\beta\gamma} - a_\gamma \delta^\lambda_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\gamma\delta} n^{\lambda\delta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\delta\lambda}_\beta n_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\delta\lambda}_\gamma n_{\beta\delta} \right) e_\lambda G \right] \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \left(E^\gamma{}_\beta - \frac{1}{2} \Sigma^\gamma{}_\beta \right) \left[-\nu_{\alpha\gamma} e_0 G + e_\alpha e_\gamma G \right. \\
& \quad \left. - \left(a^\lambda \delta_{\alpha\gamma} - a_\gamma \delta^\lambda{}_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\gamma\delta} n^{\lambda\delta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\delta\lambda}{}_\alpha n_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\delta\lambda}{}_\gamma n_{\alpha\delta} \right) e_\lambda G \right] \\
& - 4 \left(E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \right) \left(-\theta e_0 G + \delta^{\gamma\delta} e_\gamma e_\delta G - 2a^\gamma e_\gamma G \right) \\
& - 4 \left(E_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \right) \left(e_0 e_0 G - \dot{u}^\gamma e_\gamma G \right) \\
& + 4 \left(\varepsilon_\alpha{}^{\gamma\delta} H_{\delta\beta} + \varepsilon_\beta{}^{\gamma\delta} H_{\alpha\delta} \right) \left(e_\gamma e_0 G - \nu_\gamma{}^\lambda e_\lambda G \right) \\
& + \left[\frac{4}{9} \Delta \left(-\theta e_0 G + \delta^{\gamma\delta} e_\gamma e_\delta G - 2a^\gamma e_\gamma G \right) + \frac{4}{3} \Upsilon^\gamma \left(e_\gamma e_0 G - \nu_\gamma{}^\delta e_\delta G \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{8}{3} \left(E^{\gamma\delta} - \frac{1}{2} \Sigma^{\gamma\delta} \right) \left[-\sigma_{\gamma\delta} e_0 G + e_\gamma e_\delta G \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(-a_\delta \delta^\lambda{}_\gamma + \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\lambda}{}_\gamma n_{\delta\rho} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\lambda}{}_\delta n_{\gamma\rho} \right) e_\lambda G \right] \delta_{\alpha\beta} \right] \\
& + F_{GGG} \left[-\frac{4}{3} \Delta e_\alpha G e_\beta G - 2 \left(\Upsilon_\alpha e_\beta G + \Upsilon_\beta e_\alpha G \right) e_0 G + 4 \left(E_\alpha{}^\gamma - \frac{1}{2} \Sigma_\alpha{}^\gamma \right) e_\beta G e_\gamma G \right. \\
& \quad + 4 \left(E^\gamma{}_\beta - \frac{1}{2} \Sigma^\gamma{}_\beta \right) e_\alpha G e_\gamma G - 4 \left(E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \right) \delta^{\gamma\delta} e_\gamma G e_\delta G \\
& \quad - 4 \left(E_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \right) (e_0 G)^2 + 4 \left(\varepsilon_\alpha{}^{\gamma\delta} H_{\delta\beta} + \varepsilon_\beta{}^{\gamma\delta} H_{\alpha\delta} \right) e_0 G e_\gamma G \\
& \quad \left. + \left[\frac{4}{9} \Delta \delta^{\gamma\delta} e_\gamma G e_\delta G + \frac{4}{3} \Upsilon^\gamma e_0 G e_\gamma G - \frac{8}{3} \left(E^{\gamma\delta} - \frac{1}{2} \Sigma^{\gamma\delta} \right) e_\gamma G e_\delta G \right] \delta_{\alpha\beta} \right] \\
& + F_{RG} \left[-\nu_{\alpha\beta} e_0 G + e_\alpha e_\beta G \right. \\
& \quad - \left(a^\lambda \delta_{\alpha\beta} - a_\beta \delta^\lambda{}_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n^{\lambda\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}{}_\alpha n_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}{}_\beta n_{\alpha\gamma} \right) e_\lambda G \\
& \quad - \frac{4}{3} \Delta \left[-\nu_{\alpha\beta} e_0 R + e_\alpha e_\beta R \right. \\
& \quad \quad \left. - \left(a^\lambda \delta_{\alpha\beta} - a_\beta \delta^\lambda{}_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n^{\lambda\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}{}_\alpha n_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}{}_\beta n_{\alpha\gamma} \right) e_\lambda R \right] \\
& \quad - 2 \Upsilon_\alpha \left(e_\beta e_0 R - \nu_\beta{}^\gamma e_\gamma R \right) - 2 \Upsilon_\beta \left(e_\alpha e_0 R - \nu_\alpha{}^\gamma e_\gamma R \right) \\
& \quad + 4 \left(E_\alpha{}^\gamma - \frac{1}{2} \Sigma_\alpha{}^\gamma \right) \left[-\nu_{\beta\gamma} e_0 R + e_\beta e_\gamma R \right. \\
& \quad \quad \left. - \left(a^\lambda \delta_{\beta\gamma} - a_\gamma \delta^\lambda{}_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\gamma\delta} n^{\lambda\delta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\delta\lambda}{}_\beta n_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\delta\lambda}{}_\gamma n_{\beta\delta} \right) e_\lambda R \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \left(E_{\beta}^{\gamma} - \frac{1}{2} \Sigma_{\beta}^{\gamma} \right) \left[-\nu_{\alpha\gamma} e_0 R + e_{\alpha} e_{\gamma} R \right. \\
& \quad \left. - \left(a^{\lambda} \delta_{\alpha\gamma} - a_{\gamma} \delta^{\lambda}_{\alpha} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\gamma\delta} n^{\lambda\delta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\delta\lambda}_{\alpha} n_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\delta\lambda}_{\gamma} n_{\alpha\delta} \right) e_{\lambda} R \right] \\
& - 4 \left(E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \right) \left(-\theta e_0 R + \delta^{\gamma\delta} e_{\gamma} e_{\delta} R - 2a^{\gamma} e_{\gamma} R \right) \\
& - 4 \left(E_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \right) \left(e_0 e_0 R - \dot{u}^{\gamma} e_{\gamma} R \right) + 4 \left(\varepsilon_{\alpha}^{\gamma\delta} H_{\delta\beta} + \varepsilon_{\beta}^{\gamma\delta} H_{\alpha\delta} \right) \left(e_{\gamma} e_0 R - \nu_{\gamma}^{\lambda} e_{\lambda} R \right) \\
& + \left[-\frac{1}{3} \left(-\theta e_0 G + \delta^{\gamma\delta} e_{\gamma} e_{\delta} G - 2a^{\gamma} e_{\gamma} G \right) + \frac{4}{9} \Delta \left(-\theta e_0 R + \delta^{\gamma\delta} e_{\gamma} e_{\delta} R - 2a^{\gamma} e_{\gamma} R \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{4}{3} \Upsilon^{\gamma} \left(e_{\gamma} e_0 R - \nu_{\gamma}^{\delta} e_{\delta} R \right) - \frac{8}{3} \left(E^{\gamma\delta} - \frac{1}{2} \Sigma^{\gamma\delta} \right) \left[-\sigma_{\gamma\delta} e_0 R + e_{\gamma} e_{\delta} R \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(-a_{\delta} \delta^{\lambda}_{\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\lambda}_{\gamma} n_{\delta\rho} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\lambda}_{\delta} n_{\gamma\rho} \right) e_{\lambda} R \right] \delta_{\alpha\beta} \right] \\
& + F_{RRG} \left[e_{\alpha} R e_{\beta} G + e_{\alpha} G e_{\beta} R - \frac{4}{3} \Delta e_{\alpha} R e_{\beta} R - 2\Upsilon_{\alpha} e_0 R e_{\beta} R - 2\Upsilon_{\beta} e_0 R e_{\alpha} R \right. \\
& \quad + 4 \left(E_{\alpha}^{\gamma} - \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha}^{\gamma} \right) e_{\beta} R e_{\gamma} R + 4 \left(E_{\beta}^{\gamma} - \frac{1}{2} \Sigma_{\beta}^{\gamma} \right) e_{\alpha} R e_{\gamma} R \\
& \quad - 4 \left(E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \right) \delta^{\gamma\delta} e_{\gamma} R e_{\delta} R - 4 \left(E_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \right) (e_0 R)^2 \\
& \quad + 4 \left(\varepsilon_{\alpha}^{\gamma\delta} H_{\delta\beta} + \varepsilon_{\beta}^{\gamma\delta} H_{\alpha\delta} \right) e_0 R e_{\gamma} R \\
& \quad + \left[-\frac{2}{3} \delta^{\gamma\delta} e_{\gamma} R e_{\delta} G + \frac{4}{9} \Delta \delta^{\gamma\delta} e_{\gamma} R e_{\delta} R + \frac{4}{3} \Upsilon^{\gamma} e_0 R e_{\gamma} R \right. \\
& \quad \left. - \frac{8}{3} \left(E^{\gamma\delta} - \frac{1}{2} \Sigma^{\gamma\delta} \right) e_{\gamma} R e_{\delta} R \right] \delta_{\alpha\beta} \Big] \\
& + F_{RGG} \left[e_{\alpha} G e_{\beta} G - \frac{4}{3} \Delta \left(e_{\alpha} R e_{\beta} G + e_{\alpha} G e_{\beta} R \right) - 2\Upsilon_{\alpha} \left(e_0 R e_{\beta} G + e_0 G e_{\beta} R \right) \right. \\
& \quad - 2\Upsilon_{\beta} \left(e_0 R e_{\alpha} G + e_0 G e_{\alpha} R \right) + 4 \left(E_{\alpha}^{\gamma} - \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha}^{\gamma} \right) \left(e_{\beta} R e_{\gamma} G + e_{\beta} G e_{\gamma} R \right) \\
& \quad + 4 \left(E_{\beta}^{\gamma} - \frac{1}{2} \Sigma_{\beta}^{\gamma} \right) \left(e_{\alpha} R e_{\gamma} G + e_{\alpha} G e_{\gamma} R \right) \\
& \quad - 8 \left(E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \right) \delta^{\gamma\delta} e_{\gamma} R e_{\delta} G - 8 \left(E_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \right) e_0 R e_0 G \\
& \quad + 4 \left(\varepsilon_{\alpha}^{\gamma\delta} H_{\delta\beta} + \varepsilon_{\beta}^{\gamma\delta} H_{\alpha\delta} \right) \left(e_0 R e_{\gamma} G + e_0 G e_{\gamma} R \right) \tag{4.25}
\end{aligned}$$

$$+ \left[-\frac{1}{3} \delta^{\gamma\delta} e_\gamma G e_\delta G + \frac{8}{9} \Delta \delta^{\gamma\delta} e_\gamma R e_\delta G + \frac{4}{3} \Upsilon^\gamma (e_0 R e_\gamma G + e_0 G e_\gamma R) - \frac{16}{3} \left(E^{\gamma\delta} - \frac{1}{2} \Sigma^{\gamma\delta} \right) e_\gamma R e_\delta G \right] \delta_{\alpha\beta} \Bigg\}$$

Eğrilik akışkanının efektif dinamik büyüklüklerinin (4.16)-(4.19) kovaryant ifadeleri ile (4.22)-(4.25) tetrad ifadeleri, $F(R)$ -gravite ve $F(G)$ -gravite özel durumlarına kolayca indirgenebilir.

$F(R, G) \equiv F(R)$ için kovaryant ifadeler:

$$\mu^R = \frac{1}{\kappa^2 F_R} \left\{ -\frac{1}{2} (F - R F_R) + F_{RR} \left[-\theta \dot{R} + D^a D_a R \right] + F_{RRR} \left[D^a R D_a R \right] \right\} \quad (4.26)$$

$$p^R = \frac{1}{\kappa^2 F_R} \left\{ \frac{1}{2} (F - R F_R) + F_{RR} \left[\ddot{R} - \dot{u}^a D_a R - \frac{2}{3} (-\theta \dot{R} + D^a D_a R) \right] + F_{RRR} \left[\dot{R}^2 - \frac{2}{3} D^a R D_a R \right] \right\} \quad (4.27)$$

$$q_a^R = \frac{1}{\kappa^2 F_R} \left\{ F_{RR} \left[-\left(D_a \dot{R} - \nu_a^b D_b R \right) \right] + F_{RRR} \left[-\dot{R} D_a R \right] \right\} \quad (4.28)$$

$$\pi_{ab}^R = \frac{1}{\kappa^2 F_R} \left\{ F_{RR} \left[-\nu_{ab} \dot{R} + D_a D_b R - \frac{1}{3} h_{ab} (-\theta \dot{R} + D^f D_f R) \right] + F_{RRR} \left[D_a R D_b R - \frac{1}{3} h_{ab} D^f R D_f R \right] \right\} \quad (4.29)$$

$F(R, G) \equiv F(R)$ için tetrad ifadeler:

$$\mu^R = \frac{1}{\kappa^2 F_R} \left\{ -\frac{1}{2} (F - R F_R) + F_{RR} \left(-\theta e_0 R + \delta^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta R - 2 a^\alpha e_\alpha R \right) + F_{RRR} \left[\delta^{\alpha\beta} e_\alpha R e_\beta R \right] \right\} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}
p^R = \frac{1}{\kappa^2 F_R} & \left\{ \frac{1}{2} (F - R F_R) \right. \\
& + F_{RR} \left[e_0 e_0 R - \dot{u}^\alpha e_\alpha R - \frac{2}{3} (-\theta e_0 R + \delta^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta R - 2a^\alpha e_\alpha R) \right] \\
& \left. + F_{RRR} \left[(e_0 R)^2 - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} e_\alpha R e_\beta R \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$q_\alpha^R = \frac{1}{\kappa^2 F_R} \left\{ F_{RR} (-e_\alpha e_0 R + v_\alpha{}^\beta e_\beta R) + F_{RRR} [-e_0 R e_\alpha R] \right\} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{\alpha\beta}^R = \frac{1}{\kappa^2 F_R} & \left\{ F_{RR} [-v_{\alpha\beta} e_0 R + e_\alpha e_\beta R \right. \\
& - \left(a^\lambda \delta_{\alpha\beta} - a_\beta \delta^\lambda{}_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n^{\lambda\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}{}_\alpha n_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}{}_\beta n_{\alpha\gamma} \right) e_\lambda R \\
& - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} (-\theta e_0 R + \delta^{\gamma\delta} e_\gamma e_\delta R - 2a^\lambda e_\lambda R) \Big] \\
& \left. + F_{RRR} \left[e_\alpha R e_\beta R - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta^{\gamma\delta} e_\gamma R e_\delta R \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$F(R, G) \equiv R + F(G)$ için kovaryant ifadeler:

$$\begin{aligned}
\mu^G = \frac{1}{\kappa^2} & \left\{ -\frac{1}{2} (F - G F_G) \right. \\
& + F_{GG} \left[\frac{2}{3} (\Lambda + 3\Xi) (-\theta \dot{G} + D^a D_a G) - 4 \left(E^{ab} + \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \right) (-\sigma_{ab} \dot{G} + D_a D_b G) \right] \\
& \left. + F_{GGG} \left[\frac{2}{3} (\Lambda + 3\Xi) D^a G D_a G - 4 \left(E^{ab} + \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \right) D_a G D_b G \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
p^G = \frac{1}{\kappa^2} & \left\{ \frac{1}{2} (F - GF_G) \right. \\
& + F_{GG} \left[\frac{2}{3} (\Lambda + 3\Xi) (\ddot{G} - \dot{u}^a D_a G) + \frac{8}{9} \Lambda (-\theta \dot{R} + D^a D_a R) \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{3} \Upsilon^a (D_a \dot{G} - \nu_a^b D_b G) - \frac{4}{3} \left(E^{ab} - \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \right) (-\sigma_{ab} \dot{G} + D_a D_b G) \right] \\
& + F_{GGG} \left[\frac{2}{3} (\Lambda + 3\Xi) \dot{G}^2 + \frac{8}{9} \Lambda D^a G D_a G + \frac{8}{3} \dot{G} \Upsilon^a D_a G \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{4}{3} \left(E^{ab} - \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \right) D_a G D_b G \right] \right\} \quad (4.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_a^G = \frac{1}{\kappa^2} & \left\{ F_{GG} \left[-\frac{2}{3} (\Lambda + 3\Xi) (D_a \dot{G} - \nu_a^b D_b G) + 2\Upsilon_a (-\theta \dot{G} + D^b D_b G) \right. \right. \\
& - 2\Upsilon^b (-\nu_{ba} \dot{G} + D_b D_a G) + 4\eta_a^{bc} H_b^d (-\nu_{cd} \dot{G} + D_c D_d G) \\
& \quad \left. + 4 \left(E_a^b + \frac{1}{2} \Sigma_a^b \right) (D_b \dot{G} - \nu_b^c D_c G) \right] \\
& + F_{GGG} \left[-\frac{2}{3} (\Lambda + 3\Xi) \dot{G} D_a G + 2\Upsilon_a D^b G D_b G - 2\Upsilon^b D_b G D_a G \right. \\
& \quad \left. + 4 \left(E_a^b + \frac{1}{2} \Sigma_a^b \right) \dot{G} D_b G + 4\eta_a^{bc} H_b^d D_c G D_d G \right] \right\} \quad (4.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{ab}^G = \frac{1}{\kappa^2} \Bigg\{ & F_{GG} \left[-\frac{4}{3} \Delta (-\nu_{ab} \dot{G} + D_a D_b G) \right. \\
& - 2\Upsilon_a (D_b \dot{G} - \nu_b^c D_c G) - 2\Upsilon_b (D_a \dot{G} - \nu_a^c D_c G) \\
& + 4 \left(E_a^c - \frac{1}{2} \Sigma_a^c \right) (-\nu_{bc} \dot{G} + D_b D_c G) + 4 \left(E_b^c - \frac{1}{2} \Sigma_b^c \right) (-\nu_{ac} \dot{G} + D_a D_c G) \\
& - 4 \left(E_{ab} - \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) (-\theta \dot{G} + D^c D_c G) - 4 \left(E_{ab} + \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) (\ddot{G} - \dot{u}^c D_c G) \\
& + 4 (\eta_a^{cd} H_{db} + \eta_b^{cd} H_{ad}) (D_c \dot{G} - \nu_c^f D_f G) \\
& + \left(\frac{4}{9} \Delta (-\theta \dot{G} + D^c D_c G) + \frac{4}{3} \Upsilon^c (D_c \dot{G} - \nu_c^d D_d G) \right. \\
& \quad \left. - \frac{8}{3} \left(E^{cd} - \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) (-\sigma_{cd} \dot{G} + D_c D_d G) \right) h_{ab} \Bigg] \\
& + F_{GGG} \left[-\frac{4}{3} \Delta D_a G D_b G - 2\Upsilon_a \dot{G} D_b G - 2\Upsilon_b \dot{G} D_a G \right. \\
& \quad + 4 (\eta_a^{cd} H_{db} + \eta_b^{cd} H_{ad}) \dot{G} D_c G \\
& \quad + 4 \left(E_a^c - \frac{1}{2} \Sigma_a^c \right) D_b G D_c G + 4 \left(E_b^c - \frac{1}{2} \Sigma_b^c \right) D_a G D_c G \\
& \quad - 4 \left(E_{ab} - \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) D^c G D_c G - 4 \left(E_{ab} + \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) \dot{G}^2 \\
& \quad \left. + \left(\frac{4}{9} \Delta D^c G D_c G + \frac{4}{3} \Upsilon^c \dot{G} D_c G - \frac{8}{3} \left(E^{cd} - \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) D_c G D_d G \right) h_{ab} \right] \Bigg\}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$F(R, G) \equiv R + F(G)$ için tetrad ifadeler:

$$\begin{aligned}
\mu^G = \frac{1}{\kappa^2} \Bigg\{ & -\frac{1}{2} (F - G F_G) \\
& + F_{GG} \left[\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (-\theta e_0 G + \delta^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta G - 2a^\alpha e_\alpha G) \right. \\
& \quad - 4 \left(E^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) \left[-\sigma_{\alpha\beta} e_0 G + e_\alpha e_\beta G \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - \left(-a_\beta \delta^\lambda_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}_\alpha n_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}_\beta n_{\alpha\gamma} \right) e_\lambda G \right] \right] \\
& \quad \left. + F_{GGG} \left[\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) \delta^{\alpha\beta} e_\alpha G e_\beta G - 4 \left(E^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) e_\alpha G e_\beta G \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
p^G = & \frac{1}{\kappa^2} \left\{ \frac{1}{2} (F - GF_G) \right. \\
& + F_{GG} \left[\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (e_0 e_0 G - \dot{u}^\alpha e_\alpha G) \right. \\
& + \frac{8}{9} \Delta (-\theta e_0 G + \delta^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta G - 2a^\alpha e_\alpha G) + \frac{8}{3} \Upsilon^\alpha (e_\alpha e_0 G - \nu_\alpha^\beta e_\beta G) \\
& - \frac{4}{3} \left(E^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) \left[-\sigma_{\alpha\beta} e_0 G + e_\alpha e_\beta G \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(-a_\beta \delta^\lambda{}_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}{}_\alpha n_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}{}_\beta n_{\alpha\gamma} \right) e_\lambda G \right] \right. \\
& + F_{GGG} \left[\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (e_0 G)^2 + \frac{8}{9} \Delta \delta^{\alpha\beta} e_\alpha G e_\beta G \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{3} \Upsilon^\alpha e_0 G e_\alpha G - \frac{4}{3} \left(E^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) e_\alpha G e_\beta G \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
q_\alpha^G = & \frac{1}{\kappa^2} \left\{ F_{GG} \left[-\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (e_\alpha e_0 G - \nu_\alpha^\beta e_\beta G) + 2\Upsilon_\alpha (-\theta e_0 G + \delta^{\beta\gamma} e_\beta e_\gamma G - 2a^\beta e_\beta G) \right. \right. \\
& - 2\Upsilon^\beta [-\nu_{\beta\alpha} e_0 G + e_\beta e_\alpha G \\
& \quad \left. - \left(a^\lambda \delta_{\beta\alpha} - a_\alpha \delta^\lambda{}_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\alpha\gamma} n^{\lambda\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}{}_\beta n_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}{}_\alpha n_{\beta\gamma} \right) e_\lambda G \right] \\
& + 4 \left(E_\alpha{}^\beta + \frac{1}{2} \Sigma_\alpha{}^\beta \right) (e_\beta e_0 G - \nu_\beta^\gamma e_\gamma G) - 4\varepsilon_\alpha{}^{\beta\gamma} H_\gamma{}^\delta [-\nu_{\beta\delta} e_0 G + e_\beta e_\delta G \\
& \quad \left. - \left(-a_\delta \delta^\lambda{}_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\delta\rho} n^{\lambda\rho} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\lambda}{}_\beta n_{\delta\rho} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\lambda}{}_\delta n_{\beta\rho} \right) e_\lambda G \right] \right. \\
& + F_{GGG} \left[-\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) e_0 G e_\alpha G + 2\Upsilon_\alpha \delta^{\beta\gamma} e_\beta G e_\gamma G \right. \\
& \quad \left. - 2\Upsilon^\beta e_\alpha G e_\beta G + 4 \left(E_\alpha{}^\beta + \frac{1}{2} \Sigma_\alpha{}^\beta \right) e_0 G e_\beta G - 4\varepsilon_\alpha{}^{\beta\gamma} H_\gamma{}^\delta e_\beta G e_\delta G \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{\alpha\beta}^G = & \frac{1}{\kappa^2} \left\{ F_{GG} \left[-\frac{4}{3} \Delta \left[-\nu_{\alpha\beta} e_0 G + e_\alpha e_\beta G \right. \right. \right. \\
& - \left(a^\lambda \delta_{\alpha\beta} - a_\beta \delta^\lambda_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n^{\lambda\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^\lambda_{\alpha} n_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\lambda}_{\beta} n_{\alpha\gamma} \right) e_\lambda G \left. \right. \\
& - 2\Upsilon_\alpha (e_\beta e_0 G - \nu_\beta^\gamma e_\gamma G) - 2\Upsilon_\beta (e_\alpha e_0 G - \nu_\alpha^\gamma e_\gamma G) \\
& + 4 \left(E_\alpha^\gamma - \frac{1}{2} \Sigma_\alpha^\gamma \right) \left[-\nu_{\beta\gamma} e_0 G + e_\beta e_\gamma G \right. \\
& - \left(a^\lambda \delta_{\beta\gamma} - a_\gamma \delta^\lambda_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\gamma\delta} n^{\lambda\delta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\delta\lambda}_{\beta} n_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\delta\lambda}_{\gamma} n_{\beta\delta} \right) e_\lambda G \left. \right. \\
& + 4 \left(E_\beta^\gamma - \frac{1}{2} \Sigma_\beta^\gamma \right) \left[-\nu_{\alpha\gamma} e_0 G + e_\alpha e_\gamma G \right. \\
& - \left(a^\lambda \delta_{\alpha\gamma} - a_\gamma \delta^\lambda_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\gamma\delta} n^{\lambda\delta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\delta\lambda}_{\alpha} n_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\delta\lambda}_{\gamma} n_{\alpha\delta} \right) e_\lambda G \left. \right. \\
& - 4 \left(E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \right) (-\theta e_0 G + \delta^{\gamma\delta} e_\gamma e_\delta G - 2a^\gamma e_\gamma G) \\
& - 4 \left(E_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \right) (e_0 e_0 G - \dot{u}^\gamma e_\gamma G) \\
& + 4 (\varepsilon_\alpha^{\gamma\delta} H_{\delta\beta} + \varepsilon_\beta^{\gamma\delta} H_{\alpha\delta}) (e_\gamma e_0 G - \nu_\gamma^\lambda e_\lambda G) \\
& + \left[\frac{4}{9} \Delta (-\theta e_0 G + \delta^{\gamma\delta} e_\gamma e_\delta G - 2a^\gamma e_\gamma G) + \frac{4}{3} \Upsilon^\gamma (e_\gamma e_0 G - \nu_\gamma^\delta e_\delta G) \right. \\
& - \frac{8}{3} \left(E^{\gamma\delta} - \frac{1}{2} \Sigma^{\gamma\delta} \right) \left[-\sigma_{\gamma\delta} e_0 G + e_\gamma e_\delta G \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(-a_\delta \delta^\lambda_\gamma + \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\lambda}_{\gamma} n_{\delta\rho} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\lambda}_{\delta} n_{\gamma\rho} \right) e_\lambda G \right] \delta_{\alpha\beta} \right] \\
& + F_{GGG} \left[-\frac{4}{3} \Delta e_\alpha G e_\beta G - 2 (\Upsilon_\alpha e_\beta G + \Upsilon_\beta e_\alpha G) e_0 G + 4 \left(E_\alpha^\gamma - \frac{1}{2} \Sigma_\alpha^\gamma \right) e_\beta G e_\gamma G \right. \\
& + 4 \left(E_\beta^\gamma - \frac{1}{2} \Sigma_\beta^\gamma \right) e_\alpha G e_\gamma G - 4 \left(E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \right) \delta^{\gamma\delta} e_\gamma G e_\delta G \\
& - 4 \left(E_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \right) (e_0 G)^2 + 4 (\varepsilon_\alpha^{\gamma\delta} H_{\delta\beta} + \varepsilon_\beta^{\gamma\delta} H_{\alpha\delta}) e_0 G e_\gamma G \\
& \left. + \left[\frac{4}{9} \Delta \delta^{\gamma\delta} e_\gamma G e_\delta G + \frac{4}{3} \Upsilon^\gamma e_0 G e_\gamma G - \frac{8}{3} \left(E^{\gamma\delta} - \frac{1}{2} \Sigma^{\gamma\delta} \right) e_\gamma G e_\delta G \right] \delta_{\alpha\beta} \right] \left. \right\}
\end{aligned}
\tag{4.41}$$

Şimdi, (4.4) ve (4.5) teki T_{ab}^t , T_{ab}^m ve T_{ab}^{RG} tansörlerinin (3.28) e benzer tarzda

$$T_{ab}^t = \mu^t u_a u_b + p^t h_{ab} + 2q_{(a}^t u_{b)} + \pi_{ab}^t \quad (4.42.a)$$

$$T_{ab}^M = \frac{T_{ab}^m}{F_R} = \frac{1}{F_R} (\mu^m u_a u_b + p^m h_{ab} + 2q_{(a}^m u_{b)} + \pi_{ab}^m) \quad (4.42.b)$$

$$T_{ab}^{RG} = \mu^{RG} u_a u_b + p^{RG} h_{ab} + 2q_{(a}^{RG} u_{b)} + \pi_{ab}^{RG} \quad (4.42.c)$$

ayrışımalarını göz önüne alarak bunların herbirine bağlanan μ , p , q_a ve π_{ab} dinamik değişkenlerini tanımlayalım. (4.7) eşitliğinden dolayı bu dinamik değişkenler birbirlerine

$$\mu^t = \frac{1}{F_R} \mu^m + \mu^{RG} \quad (4.43.a)$$

$$p^t = \frac{1}{F_R} p^m + p^{RG} \quad (4.43.b)$$

$$q_a^t = \frac{1}{F_R} q_a^m + q_a^{RG} \quad (4.43.c)$$

$$\pi_{ab}^t = \frac{1}{F_R} \pi_{ab}^m + \pi_{ab}^{RG} \quad (4.43.d)$$

bağıntılarıyla bağlı olurlar. (4.7) denkleminin tanımı göz önüne alınırsa bu dört bağıntının alan denklemlerinin yerini tuttuğu, başka bir deyişle, alan denklemlerinin artık bu bağıntılara eşdeğer olduğu kolayca anlaşılır. Bu anahtar bağıntılar ilerideki incelemelerimizin temelini oluşturacaktır.

§3.1.3'te, R_{ab} Ricci tansörünün, T_{ab} enerji-momentum tansörüne (3.36) bağıntısı ile bağlı olduğu ifade edilmişti. GRT'nin 1+3 kovaryant ayrışım formalizminde buna, hesaplarda ortaya çıkan Ricci tansörünü madde-enerjiye bağlamak için cebirsel bir bağıntı gözüyle bakılıyordu. Söz konusu bağıntı, efektif enerji-momentum tansörü yaklaşımında, (4.6) dan dolayı

$$R_{ab} = \kappa^2 \left(T_{ab}^t - \frac{1}{2} T_{ab}^t \right) \quad (4.44)$$

biçiminde yazılacağından, yeni teoride evrim ve bağ denklemlerinde yalnızca dinamik büyüklükler için değişiklik yapmak söz konusu olacaktır. Buna göre, evrim ve bağ denklemlerini $F(R,G)$ -graviteye genelleştirmek için rölativist kozmolojinin evrim ve bağ denklemlerinde μ , p , q_a ve π_{ab} yerine, (4.43) bağıntılarıyla tanımlı μ^t , p^t , q_a^t ve π_{ab}^t efektif toplam ifadelerini yazmak yeterli olacaktır. Ancak, standart kozmolojinin $\nabla^a T_{ab} = 0$ enerji-momentum tansörünün korunumundan kaynaklanan (3.47) ve (3.48) korunum denklemlerine ek olarak, $F(R,G)$ -gravitede $\nabla^a T_{ab}^m = 0$ korunumundan kaynaklanan iki korunum denklemi daha yazmak gerekecektir. Bu söylenenleri dikkate alarak, $F(R,G)$ -gravitenin kovaryant evrim ve bağ denklemlerini aşağıda listeliyoruz.

EVRİM DENKLEMLERİ:

$$(E_1): \quad \dot{\theta} = D_a \dot{u}^a - \frac{1}{3} \theta^2 + \dot{u}_a \dot{u}^a - 2\sigma^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2} (\mu^t + 3p^t) \quad (4.45)$$

$$(E_2)^a: \quad \dot{\omega}^a = \frac{1}{2} \eta^{abc} D_b \dot{u}_c - \frac{2}{3} \theta \omega^a + \sigma^a_b \omega^b + u^a \dot{u}_b \omega^b \quad (4.46)$$

$$(E_3)_{ab}: \quad \dot{\sigma}_{ab} = (u_a \sigma_{bc} + u_b \sigma_{ac}) \dot{u}^c + \frac{1}{2} (D_a \dot{u}_b + D_b \dot{u}_a) - \sigma_{ac} \sigma^c_b - \frac{2}{3} \theta \sigma_{ab} + \dot{u}_a \dot{u}_b - \omega_a \omega_b - \frac{1}{3} (D_c \dot{u}^c + \dot{u}_c \dot{u}^c - 2\sigma^2 - \omega^2) h_{ab} - \left(E_{ab} - \frac{1}{2} \pi_{ab}^t \right) \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned}
(E_4)_{ab} : \quad & \left(\dot{E}_{ab} + \frac{1}{2} \dot{\pi}_{ab}^t \right) = \left(E_{ae} + \frac{1}{2} \pi_{ae}^t \right) \dot{u}^e u_b + \left(E_{be} + \frac{1}{2} \pi_{be}^t \right) \dot{u}^e u_a \\
& + \frac{1}{2} \left(\eta_{aef} D^e H^f{}_b + \eta_{bef} D^e H^f{}_a \right) - \frac{1}{4} \left(D_a q_b^t + D_b q_a^t \right) \\
& + \frac{1}{6} h_{ab} D^e q_e^t - \frac{1}{2} \left(\mu^t + p^t \right) \sigma_{ab} - \frac{1}{2} \left(q_a^t \dot{u}_b + q_b^t \dot{u}_a \right) \\
& + \frac{1}{3} h_{ab} q_e^t \dot{u}^e - \theta \left(E_{ab} + \frac{1}{6} \pi_{ab}^t \right) + \frac{3}{2} \sigma^e{}_a \left(E_{be} - \frac{1}{6} \pi_{be}^t \right) \\
& + \frac{3}{2} \sigma^e{}_b \left(E_{ae} - \frac{1}{6} \pi_{ae}^t \right) - h_{ab} \sigma^{ef} \left(E_{fe} - \frac{1}{6} \pi_{fe}^t \right) \\
& - \frac{1}{2} \eta_a{}^{ef} \left[\left(E_{eb} + \frac{1}{2} \pi_{eb}^t \right) \omega_f + 2 H_{eb} \dot{u}_f \right] \\
& - \frac{1}{2} \eta_b{}^{ef} \left[\left(E_{ea} + \frac{1}{2} \pi_{ea}^t \right) \omega_f + 2 H_{ea} \dot{u}_f \right]
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
(E_5)_{ab} : \quad & \dot{H}_{ab} = (u_a H_{bc} + u_b H_{ac}) \dot{u}^c - \frac{1}{2} \eta_{ae}{}^f D^e \left(E_{fb} - \frac{1}{2} \pi_{fb}^t \right) \\
& - \frac{1}{2} \eta_{be}{}^f D^e \left(E_{fa} - \frac{1}{2} \pi_{fa}^t \right) - \theta H_{ab} + \frac{3}{2} \left(H_{ac} \sigma^c{}_b + H_{bc} \sigma^c{}_a \right) \\
& - H_{ef} \sigma^{ef} h_{ab} + \frac{3}{4} \left(\omega_a q_b^t + \omega_b q_a^t \right) \\
& - \frac{1}{2} \omega^c q_c^t h_{ab} + \left(\eta_{aef} E^e{}_b + \eta_{bef} E^e{}_a \right) \dot{u}^f \\
& - \frac{1}{2} \left(\eta_{ae}{}^f H^e{}_b + \eta_{be}{}^f H^e{}_a \right) \omega_f + \frac{1}{4} \left(\eta_{ae}{}^f \sigma^e{}_b + \eta_{be}{}^f \sigma^e{}_a \right) q_f^t
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$(E_6) : \quad \dot{\mu}^m = -D^a q_a^m - \left(\mu^m + p^m \right) \theta - 2 q_a^m \dot{u}^a - \pi_{ab}^m \sigma^{ab} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
(E_7)_a : \quad & \dot{q}_a^m = -D_a p^m - D^b \pi_{ab}^m - \left(\mu^m + p^m \right) \dot{u}_a - \sigma^b{}_a q_b^m - \frac{4}{3} \theta q_a^m \\
& + u_a \dot{u}^b q_b^m - \pi_{ab}^m \dot{u}^b + \eta_a{}^{bc} q_b^m \omega_c
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$(EE_6) : \quad \dot{\mu}^t = -D^a q_a^t - \left(\mu^t + p^t \right) \theta - 2 q_a^t \dot{u}^a - \pi_{ab}^t \sigma^{ab} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
(EE_7)_a : \quad & \dot{q}_a^t = -D_a p^t - D^b \pi_{ab}^t - \left(\mu^t + p^t \right) \dot{u}_a - \sigma^b{}_a q_b^t - \frac{4}{3} \theta q_a^t \\
& + u_a \dot{u}^b q_b^t - \pi_{ab}^t \dot{u}^b + \eta_a{}^{bc} q_b^t \omega_c
\end{aligned} \tag{4.53}$$

BAĞ DENKLEMLERİ:

$$(C_1)_a : \quad D^b \sigma_{ab} - \frac{2}{3} D_a \theta + \eta_{abc} D^b \omega^c + 2\eta_{abc} \dot{u}^b \omega^c + q_a^t = 0 \quad (4.54)$$

$$(C_2) : \quad D_a \omega^a - \dot{u}_a \omega^a = 0 \quad (4.55)$$

$$(C_3)_{ab} : \quad H_{ab} + (\omega_a \dot{u}_b + \omega_b \dot{u}_a) - \omega^e \dot{u}_e h_{ab} - \frac{1}{2} (\eta_{aef} D^e \sigma^f{}_b + \eta_{bef} D^e \sigma^f{}_a) \\ + \frac{1}{2} (D_a \omega_b + D_b \omega_a) = 0 \quad (4.56)$$

$$(C_4)_a : \quad D^b \left(E_{ab} + \frac{1}{2} \pi_{ab}^t \right) - \frac{1}{3} D_a \mu^t - \frac{1}{2} \sigma^b{}_a q_b^t + \frac{1}{3} \theta q_a^t \\ - \eta_{ae}{}^f \left(\sigma^{eb} H_{fb} - \frac{3}{2} \omega^e q_f^t \right) - 3H^b{}_a \omega_b = 0 \quad (4.57)$$

$$(C_5)_a : \quad D^b H_{ab} + \frac{1}{2} \eta_a{}^{ef} D_e q_f^t + (\mu^t + p^t) \omega_a + 3 \left(E_{ab} - \frac{1}{6} \pi_{ab}^t \right) \omega^b \\ + \eta_a{}^{ef} \sigma^b{}_e \left(E_{fb} + \frac{1}{2} \pi_{fb}^t \right) = 0 \quad (4.58)$$

$F(R,G)$ -gravitenin tetrad formundaki evrim ve bağ denklemleri ise şunlar olacaktır:

EVRİM DENKLEMLERİ:

$$(E_1) : \quad e_0 \theta - e_\alpha \dot{u}^\alpha = -\frac{1}{3} \theta^2 + (\dot{u}_\alpha - 2a_\alpha) \dot{u}^\alpha - 2\sigma^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2} (\mu^t + 3p^t) + \Lambda \quad (4.59)$$

$$(E_2)^\alpha : \quad e_0 \omega^\alpha - \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} e_\beta \dot{u}_\gamma = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \left(\Omega_\beta \omega_\gamma - \frac{1}{2} a_\beta \dot{u}_\gamma \right) \\ - \frac{1}{2} n^\alpha{}_\beta \dot{u}^\beta - \frac{2}{3} \theta \omega^\alpha + \sigma^\alpha{}_\beta \omega^\beta \quad (4.60)$$

$$(E_3)^{\alpha\beta} : \quad e_0 \sigma^{\alpha\beta} - \delta^{\gamma\langle\alpha} e_\gamma \dot{u}^{\beta\rangle} = \varepsilon^{\gamma\delta\langle\alpha} \left(2\Omega_\gamma \sigma^{\beta\rangle}{}_\delta - n^{\beta\rangle}{}_\gamma \dot{u}_\delta \right) + a^{\langle\alpha} \dot{u}^{\beta\rangle} + \dot{u}^{\langle\alpha} \dot{u}^{\beta\rangle} \\ - \frac{2}{3} \theta \sigma^{\alpha\beta} - \sigma^{\langle\alpha}{}_\gamma \sigma^{\beta\rangle\gamma} - \omega^{\langle\alpha} \omega^{\beta\rangle} - \left(E^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\pi^t)^{\alpha\beta} \right) \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned}
(E_4)^{\alpha\beta} : \quad & e_0 \left(E^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\pi^t)^{\alpha\beta} \right) - \varepsilon^{\gamma\delta\langle\alpha} e_\gamma H^{\beta\rangle}_\delta + \frac{1}{2} \delta^{\gamma\langle\alpha} e_\gamma (q^t)^{\beta\rangle} \\
& = -3n^{\langle\alpha}_\gamma H^{\beta\rangle\gamma} + \frac{1}{2} n^\gamma_\gamma H^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \left(a^{\langle\alpha} + 2\dot{u}^{\langle\alpha} \right) (q^t)^{\beta\rangle} \\
& \quad - \frac{1}{2} (\mu^t + p^t) \sigma^{\alpha\beta} - \theta \left(E^{\alpha\beta} + \frac{1}{6} (\pi^t)^{\alpha\beta} \right) + 3\sigma^{\langle\alpha}_\gamma \left(E^{\beta\rangle\gamma} - \frac{1}{6} (\pi^t)^{\beta\rangle\gamma} \right) \\
& \quad + \varepsilon^{\gamma\delta\langle\alpha} \left[(2\Omega_\gamma + \omega_\gamma) \left(E^{\beta\rangle}_\delta + \frac{1}{2} (\pi^t)^{\beta\rangle}_\delta \right) + \frac{1}{2} n^{\beta\rangle}_\gamma q^t_\delta + (2\dot{u}_\gamma - a_\gamma) H^{\beta\rangle}_\delta \right]
\end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
(E_5)^{\alpha\beta} : \quad & e_0 H^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\gamma\delta\langle\alpha} e_\gamma \left(E^{\beta\rangle}_\delta - \frac{1}{2} (\pi^t)^{\beta\rangle}_\delta \right) = 3n^{\langle\alpha}_\gamma \left(E^{\beta\rangle\gamma} - \frac{1}{2} (\pi^t)^{\beta\rangle\gamma} \right) \\
& \quad - \frac{1}{2} n^\gamma_\gamma \left(E^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\pi^t)^{\alpha\beta} \right) - \theta H^{\alpha\beta} + 3\sigma^{\langle\alpha}_\gamma H^{\beta\rangle\gamma} + \frac{3}{2} \omega^{\langle\alpha} (q^t)^{\beta\rangle} \\
& \quad + \varepsilon^{\gamma\delta\langle\alpha} \left[(2\Omega_\gamma + \omega_\gamma) H^{\beta\rangle}_\delta + a_\gamma \left(E^{\beta\rangle}_\delta - \frac{1}{2} (\pi^t)^{\beta\rangle}_\delta \right) + \frac{1}{2} \sigma^{\beta\rangle}_\gamma q^t_\delta - 2\dot{u}_\gamma E^{\beta\rangle}_\delta \right]
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$(E_6): \quad e_0 \mu^m + e_\alpha (q^m)^\alpha + (\mu^m + p^m) \theta + \sigma^\alpha_{\beta} (\pi^m)_\alpha{}^\beta + 2(\dot{u}_\alpha - a_\alpha) (q^m)^\alpha = 0 \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
(E_7)^\alpha : \quad & e_0 q_\alpha^m + e_\alpha p^m + e_\beta (\pi^m)_\alpha{}^\beta + (\mu^m + p^m) \dot{u}_\alpha + \frac{4}{3} \theta q_\alpha^m + \sigma^{\alpha\beta} q_\beta^m \\
& \quad + (\dot{u}_\beta - 3a_\beta) (\pi^m)^{\alpha\beta} - \varepsilon^\alpha_{\beta\gamma} \left[(\Omega^\beta - \omega^\beta) (q^m)^\gamma + n^\beta_\delta (\pi^m)^{\delta\gamma} \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$(EE_6): \quad e_0 \mu^t + e_\alpha (q^t)^\alpha + (\mu^t + p^t) \theta + \sigma^\alpha_{\beta} (\pi^t)_\alpha{}^\beta + 2(\dot{u}_\alpha - a_\alpha) (q^t)^\alpha = 0 \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}
(EE_7)_\alpha : \quad & e_0 q_\alpha^t + e_\alpha p^t + e_\beta (\pi^t)_\alpha{}^\beta + (\mu^t + p^t) \dot{u}_\alpha + \frac{4}{3} \theta q_\alpha^t + \sigma^{\alpha\beta} q_\beta^t \\
& \quad + (\dot{u}_\beta - 3a_\beta) (\pi^t)^{\alpha\beta} - \varepsilon^\alpha_{\beta\gamma} \left[(\Omega^\beta - \omega^\beta) (q^t)^\gamma + n^\beta_\delta (\pi^t)^{\delta\gamma} \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
(E_8)_\alpha : \quad & e_0 a_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta}{}^\gamma (e_\gamma + \dot{u}_\gamma - 2a_\gamma) \Omega^\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (\dot{u}^\beta + a^\beta) \omega^\gamma \\
& \quad - \frac{1}{2} \sigma_\alpha{}^\beta (\dot{u}_\beta + a_\beta) + \frac{1}{3} (\dot{u}_\alpha + a_\alpha) \theta - \frac{1}{2} n_{\alpha\beta} \omega^\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda} \sigma^\beta_\gamma n^{\gamma\lambda} = 0
\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}
(E_9)^{\alpha\beta} : \quad & e_0 n^{\alpha\beta} + \frac{1}{3} n^{\alpha\beta} \theta + \delta^{\alpha\beta} \left[(e_\gamma + \dot{u}_\gamma) (\Omega^\gamma + \omega^\gamma) \right] - \delta^{\gamma(\beta} \left[(e_\gamma + \dot{u}_\gamma) (\Omega^{\alpha)} + \omega^{\alpha)} \right] \\
& \quad + \varepsilon^{\gamma\delta(\alpha} (e_\gamma + \dot{u}_\gamma) \sigma^{\beta)}_\delta - 2\sigma^{(\alpha}_\gamma n^{\beta)\gamma} + 2\varepsilon^{\gamma\lambda(\alpha} n^{\beta)}_\gamma (\Omega_\lambda + \omega_\lambda) = 0
\end{aligned} \tag{4.69}$$

BAĞ DENKLEMLERİ:

$$(C_1)^\alpha : \quad e_\beta \sigma^{\alpha\beta} - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} e_\beta \theta + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} e_\beta \omega_\gamma - 3a_\beta \sigma^{\alpha\beta} - n^\alpha{}_\beta \omega^\beta \\ - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \left[n_{\beta\delta} \sigma^\delta{}_\gamma + (a_\beta - 2\dot{u}_\beta) \omega_\gamma \right] + (q^t)^\alpha = 0 \quad (4.70)$$

$$(C_2): \quad e_\alpha \omega^\alpha - (2a_\alpha + \dot{u}_\alpha) \omega^\alpha = 0 \quad (4.71)$$

$$(C_3)^{\alpha\beta} : \quad H^{\alpha\beta} + \delta^{\gamma\langle\alpha} e_\gamma \omega^{\beta\rangle} - \varepsilon^{\gamma\delta\langle\alpha} e_\gamma \sigma^{\beta\rangle}{}_\delta + \left(2\dot{u}^{\langle\alpha} + a^{\langle\alpha} \right) \omega^{\beta\rangle} \\ + 3n^{\langle\alpha}{}_\gamma \sigma^{\beta\rangle\gamma} - \frac{1}{2} n^\gamma{}_\gamma \sigma^{\alpha\beta} - \varepsilon^{\gamma\delta\langle\alpha} \left(n^{\beta\rangle}{}_\gamma \omega_\delta - a_\gamma \sigma^{\beta\rangle}{}_\delta \right) = 0 \quad (4.72)$$

$$(C_4)^\alpha : \quad e_\beta \left(E^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\pi^t)^{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{3} \delta^{\alpha\beta} e_\beta \mu^t - 3a_\beta \left(E^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\pi^t)^{\alpha\beta} \right) \\ + \frac{1}{3} \theta (q^t)^\alpha - \frac{1}{2} \sigma^\alpha{}_\beta (q^t)^\beta - 3\omega_\beta H^{\alpha\beta} \\ - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \left[\sigma_{\beta\delta} H^\delta{}_\gamma \frac{3}{2} \omega_\beta (q^t)_\gamma + n_{\beta\delta} \left(E^\delta{}_\gamma + \frac{1}{2} (\pi^t)^\delta{}_\gamma \right) \right] = 0 \quad (4.73)$$

$$(C_5)^\alpha : \quad e_\beta H^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} e_\beta q^t{}_\gamma - 3a_\beta H^{\alpha\beta} + (\mu^t + p^t) \omega^\alpha \\ - \frac{1}{2} n^\alpha{}_\beta (q^t)^\beta + 3\omega_\beta \left(E^{\alpha\beta} - \frac{1}{6} (\pi^t)^{\alpha\beta} \right) \\ + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \left[\sigma_{\beta\delta} \left(E^\delta{}_\gamma + \frac{1}{2} (\pi^t)^\delta{}_\gamma \right) - \frac{1}{2} a_\beta q^t{}_\gamma - n_{\beta\delta} H^\delta{}_\gamma \right] = 0 \quad (4.74)$$

$$(C_J)^\alpha : \quad e_\beta n^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} e_\beta a_\gamma - 2\varepsilon^\alpha{}_{\beta\gamma} \omega^\beta \Omega^\gamma + 2\sigma^\alpha{}_\beta \omega^\beta + \frac{2}{3} \theta \omega^\alpha - 2n^{\alpha\beta} a_\beta = 0 \quad (4.75)$$

$$(C_G)_{\alpha\beta} : \quad e_{\langle\alpha} a_{\beta\rangle} + b_{\langle\alpha\beta\rangle} + (e_\gamma - 2a_\gamma) n^\lambda{}_{\langle\alpha} \varepsilon^\gamma{}_{\beta\rangle\lambda} + \frac{1}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} - \sigma^\gamma{}_{\langle\alpha} \sigma_{\beta\rangle\gamma} \\ + 2\omega_{\langle\alpha} \Omega_{\beta\rangle} - \omega_{\langle\alpha} \omega_{\beta\rangle} - \left(E_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \pi^t{}_{\alpha\beta} \right) = 0 \quad (4.76)$$

$$(C_G): \quad 4e_\alpha a^\alpha - 6a_\alpha a^\alpha - n^{\alpha\gamma} n_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} n^\gamma{}_\gamma n^\alpha{}_\alpha - 4\omega^\lambda \Omega_\lambda \\ - 2\mu^t + \frac{2}{3} \theta^2 + 2\sigma^2 + 2\omega^2 = 0 \quad (4.77)$$

4.2. MAKASLAMASIZ AKIŞKAN İDDİASININ DÖRT BOYUTTA YÜKSEK MERTEBEDEN EĞRİLİKLİ GRAVİTE TEORİLERİNDE ELE ALINMASI

Giriş'te söz edildiği üzere, makaslamasız mükemmel akışkan için rölativist bağ denklemlerinin tutarlılığı araştırılırken, bunların evrimleştirilmesi, yani kovaryant zaman türevinin alınması, ya yüksek mertebeden türevlere götürüp yorumun kaybolmasına yol açmakta ya da çoğu kere olduğu gibi, sonu gelmeyen sayısız integre edilebilirlik koşullarından oluşan bir bağıntı zinciriyle karşı karşıya bırakmaktaydı. Dahası, bu tür yöntem ile çözümün ne olduğu değil, fakat ya varlığı ya da yokluğu gösterilebiliyordu. Bu söylenenlere bir örnek olmak üzere söz konusu yöntem §4.3'te $F(R)$ -zarevren modeli çerçevesinde uygulanacaktır. Biz aşağıda, evrim ve bağ denklemleriyle, makaslamasız, dönen ve genişleyen mükemmel akışkan için bir önçözüm rolünü oynayacak metrik yaklaşım kullanarak iş göreceğiz. Göz önüne alacağımız metrikler analitik hesap yapabilmeye olanak sağlayabilecek türden nisbeten özel metrikler olacaktır. Bianchi-tip metrikler denilen uzay-zamanlar, uzayca homojen eşyönsüz metrikler olup kozmoloji kapsamında, uzayca homojen ve eşyönlü olan Robertson-Walker metriğinden sonra en çok kullanılagelen metriklerdir. Bunlar, dokuz tip olarak sınıflandırılmışlardır. Biz bunlardan yalnızca makaslamasız, dönen ve genişleyen Bianchi-tip IX ile Bianchi-tip II metriğini göz önüne alacağız. Ayrıca, Bianchi-tip olmamakla birlikte, ünlü stasyoner ve dönen Gödel modelini stasyoner olmayan yani genişleyen bir evren modeline genelleştirip bunun, göz önüne alacağımız teorilerin alan denklemlerinin bir çözümü olup olmadığını araştıracağız.

Bu söylenenler ışığında, $v_\alpha(t)$ ve $\Gamma_{\alpha\beta}(t)$ yalnızca t kozmik zamanın fonksiyonları olmak üzere, metriği $\{\omega^a\}$ 1-form tabanında

$$ds^2 = -(\omega^0 - v_\alpha(t)\omega^\alpha)^2 + \Gamma_{\alpha\beta}(t)\omega^\alpha\omega^\beta \quad (4.78)$$

biçiminde yazılmış ve dönen, uzayca homojen modeller sınıfına ait üç uzay-zaman örneği göz önüne alacağız. Ancak, söz konusu fonksiyonların, matematiksel bakımdan işlenebilir denklemlere yol açması olası görülmediğinden bu şekliyle amacımız için oldukça fazla genel olacaktır. Bu bakımdan [21,80,81] kaynaklarını izleyerek bunların fonksiyonel şekillerini, $a(t)$ zamana bağlı kozmik ölçek çarpanı ve k_α ve v_α

$(\alpha=1,2,3)$, $k_\alpha > 0$ ve en az bir $v_\alpha \neq 0$ koşullarını sağlayan sabit parametreler olmak üzere,

$$v_\alpha(t) = a(t)v_\alpha, \quad \Gamma_{\alpha\beta}(t) = a^2(t)k_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha \text{ üzerinden toplam yok}) \quad (4.79)$$

biçiminde kısıtlıyoruz. (4.78) denkleminin, $\{dx^i, \partial_i\}$ tabanlı $\{x^i\}$ yerel koordinatlarında

$$ds^2 = -M^2(t, x)(dt - M_\nu(t, x)dx^\nu)^2 + h_{\mu\nu}(t, x)dx^\mu dx^\nu, \quad (4.80)$$

biçiminde ifade edilmiş ipliklenmiş formdaki uzay-zaman metriğinin çok özel durumu olduğuna dikkat çekelim. Burada $M(t, x)$ ve $M_\nu(t, x)dx^\nu$ sırasıyla, ipliklenmiş zaman fonksiyonu ve ipliklenmiş kayma 1-formu olarak adlandırılırlar. x ile $\{x^\nu, \nu=1,2,3\}$ koordinatları, $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$ ile de $\mathbf{u}$ ya dik ($h_{00} = 0$, $h_{ij}u^j = 0$) yerel durgunluk 3-uzay metriği gösterilmektedir. Uzay-zamana 1+3 iplikleme bakış açısı yaklaşımını yansıtan bu form, $M_\nu(t, x)$ fonksiyonu aracılığıyla, kinematik dönmeyi işin içine sokmak için doğal bir yol oluşturmaktadır. (4.78) ile verilen metrik, $M(t, x) \equiv 1$ ayarını kabul ederek ve de $M_\nu(t, x)$ ile $h_{\mu\nu}(t, x)$ in uzay ve zaman koordinatlarına göre, $M_\nu(t, x) = v_\alpha(t)\omega^\alpha_\nu(x)$ ve $h_{\mu\nu}(t, x) = \Gamma_{\alpha\beta}(t)\omega^\alpha_\mu(x)\omega^\beta_\nu(x)$ gibi ayrıştırılabilir fonksiyonlar olduğunu varsayarak elde edilmiştir. Bu bize,

$$\omega^0 = dt \quad E_0 = \partial_t \quad (4.81)$$

$\Leftrightarrow$

$$\omega^\alpha = \omega^\alpha_\nu(x)dx^\nu \quad E_\alpha = \omega^\nu_\alpha(x)\partial_\nu \quad (\omega^\alpha_\nu \omega^\nu_\beta = \delta^\alpha_\beta),$$

ile, (4.80) in (4.78) biçiminde yazılabileceği zamandan bağımsız dört adet taban 1-formu ile bunların düali olan $E_a = \omega^i_a(x)\partial_i$ taban vektörlerinden oluşan bir $\{\omega^a, E_a\}$ eşhareketli çatı tanımlamaya olanak sağlar. Bir ortonormal tabanda çalışmak çok daha kolay olduğu için, şimdi, $\{\omega^a, E_a\}$ tabanından, $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ olmak üzere, uzay-zaman elemanının $ds^2 = \eta_{ab}\sigma^a\sigma^b$ şeklini alacağı bir ortonormal $\{\sigma^a, e_a\}$ tabanına geçiyoruz. Bu, (4.78) ve (4.79) ifadelerinden şu aşıkâr seçimle gerçekleştirilebilir:

$$\begin{aligned}
\sigma^0 &= \omega^0 - a(t)v_\alpha \omega^\alpha & e_0 &= E_0 \\
\sigma^\alpha &= a(t)k_\alpha \omega^\alpha & e_\alpha &= v_\alpha k_\alpha^{-1} E_0 + a^{-1}(t)k_\alpha^{-1} E_\alpha
\end{aligned} \tag{4.82}$$

(yukarıdaki denklemlerde tekrarlanan α indisi üzerinden toplam yoktur). $e_0 = E_0 = \partial_t = \mathbf{u}$ olduğundan, bu ortonormal tetrad çatısının da eşhareketli olduğuna işaret edelim. Böyle bir çatı için e_a taban vektörlerinin komütatörlerinin Ellis ve van Elst [65,66] tarafından e_0 a göre ölçülen akışkanın kinematik büyüklükleri cinsinden verildiğini §3.2’de söylemiştik (bkz. (3.62)).

4.2.1. F(R)-gravitede Makaslamaşız Akışkan İddiası

Yukarıdaki hazırlığı yaptıktan sonra, şimdi $F(R)$ teorisi için hesaplarımızın adımlarını sunabiliriz. Önce (3.62) komütatörlerini kullanarak akışkanın $\theta, \sigma_{\alpha\beta}, \dot{u}_\alpha \dots$ kinematik büyüklüklerini hesaplıyor ve sonra da bunları, efektif toplam akışkanın μ^t, p^t, q_α^t ve $\pi_{\alpha\beta}^t$ büyüklüklerini bulmak için (4.70)-(4.77) deki tüm bağ denklemleri topluluğuna; efektif eğrilik akışkanının μ^R, p^R, q_α^R ve $\pi_{\alpha\beta}^R$ dinamik büyüklüklerini bulmak için de (4.30)-(4.33) e yerleştiriyoruz. Elde edilen bu büyüklükleri birbirlerine bağlamak için, mükemmel akışkan varsayımı altında, yani $q_a^m = 0 = \pi_{ab}^m$ için, aşağıdaki şekilde indirgenmiş

$$\text{a) } \mu^t = \frac{1}{F_R} \mu^m + \mu^R, \quad \text{b) } p^t = \frac{1}{F_R} p^m + p^R, \quad \text{c) } q_\alpha^t = q_\alpha^R, \quad \text{d) } \pi_{\alpha\beta}^t = \pi_{\alpha\beta}^R \tag{4.83}$$

denklemlerini kullanıyoruz. Buradan da $a(t), \mu^m, p^m$ ve $F(R)$ bilinmeyenleri için birbirine kuple bir denklem sistemi buluyor ve sistemi oluşturan denklemlerin birbirleriyle ve metriğin parametreleriyle ve de makaslamaşız akışkan iddiasının temel koşulu olan $\mu^m + p^m \neq 0$ bağıntısıyla tutarlı olup olmadığını araştırıyoruz. Tutarlılık halinde yapılacak iş $F(R)$ -gravite modelini inşa etmek olacaktır. Aşağıda, üç metrik örnek alıp bu incelemeyi gerçekleştiriyoruz.

4.2.1.1. Gödel Tip Genişleyen Kozmolojik Model

Makaslamasız, dönen ve genişleyen uzay-zamanlara ilk örnek olarak, metriği $\{x^i\} = \{t, x, y, z\}$ yerel koordinatlarda

$$ds^2 = -dt^2 + 2\sqrt{S}a(t)e^{mx}dtdy + a^2(t)(dx^2 + Ke^{2mx}dy^2 + dz^2) \quad (4.84)$$

olan Gödel tip model göz önüne alıyoruz. Burada, $a(t)$ zamana bağlı bir ölçek çarpanı ve m, S, K : $m > 0, S > 0, K \neq 0$ ve $S + K > 0$ koşullarına uyan sabit parametrelerdir [80]. Gödel tarafından 1949'da [1] önerilen dönen ve stasyoner orijinal model $a(t) = a_0 = \text{sabit}$, $K = -1/2$, $S = 1$ ve ω_0 sabit dönme parametresi olmak üzere, $m = \sqrt{2}\omega_0 a_0$ değerlerine karşılık gelmektedir. (4.84) metriği, a yı zamanın fonksiyonu olarak orijinal Gödel metriğinin stasyoner olmayan duruma doğal genelleştirilmesini oluşturmaktadır. S ve K parametreleri modelin alışılmadık özelliklerini tartışmak için daha sonraki yıllarda daha da bir genelleme olarak metriğe katılmıştır [80]. Aşağıda, $F(R)$ -gravite alan denklemlerinin bu tür bir uzay zamanı çözüm olarak kabul edip etmediğini araştıracağız.

$$\omega^a = (dt, dx, e^{mx}dy, dz) \Leftrightarrow E_a = (\partial_t, \partial_x, e^{-mx}\partial_y, \partial_z) \quad (4.85)$$

ile tanımlı $\{\omega^a, E_a\}$ tabanında (4.84) deki yay elemanı (4.78) biçimine düşer ve buradan da, (4.79) kullanılırsa $v_1 = v_3 = 0$, $v_2 = \sqrt{S}$ ve $k_1 = k_3 = 1$, $k_2 = \sqrt{K + S}$ olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla, (4.82) ye göre, (σ^a, e_a) tabanı açıkça

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= dt - \sqrt{S}a(t)e^{mx}dy, & e_0 &= \partial_t, \\ \sigma^1 &= a(t)dx, & e_1 &= a^{-1}(t)\partial_x, \\ \sigma^2 &= \sqrt{K + S} a(t)e^{mx}dy, & e_2 &= \sqrt{\frac{S}{K + S}}\partial_t + \frac{1}{\sqrt{K + S}}a^{-1}(t)e^{-mx}\partial_y, \\ \sigma^3 &= a(t)dz, & e_3 &= a^{-1}(t)\partial_z \end{aligned} \quad (4.86)$$

biçiminde verilecektir. Bunlar (3.62) deki komütasyon bağıntılarında kullanılırsa şu aşağıdaki kinematik büyüklükler elde edilir:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta} &= 0, \quad \theta = 3\frac{\dot{a}}{a}, \quad \dot{u}_\alpha = (0, \sqrt{\frac{S}{K+S}}\frac{\dot{a}}{a}, 0), \quad \omega_\alpha = (0, 0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{K+S}}\frac{m}{a}) = -\Omega_\alpha, \\ a_\alpha &= (-\frac{m}{2a}, -\sqrt{\frac{S}{K+S}}\frac{\dot{a}}{a}, 0), \quad n_{\alpha\beta} = -\frac{m}{2a}\delta_\alpha^2\delta_\beta^3\end{aligned}\quad (4.87)$$

Burada nokta ile, $e_0 = \partial_t$ olduğundan, t ye göre türev gösterilmiştir. Bu uzay-zamanda, dönen makaslamaşız akışkanın, $\dot{a} \neq 0$ olduğunda genişleyen ve ivmeli olduğuna dikkat çekelim. (4.87) deki kinematik büyüklükleri (4.86) daki e_α çatı türevlerini kullanarak, önce (4.70)-(4.77) bağı denklemlerine yerleştiriyoruz. Beklenildiği gibi, (C_2) ve $(C_J)_\alpha$ özdeş olarak sağlanır. $(C_1)_\alpha$ dan

$$q_1^t = -\frac{S}{K+S}\frac{m\dot{a}}{a^2}, \quad q_2^t = 2\sqrt{\frac{S}{K+S}}(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}), \quad q_3^t = 0 \quad (4.88)$$

ve $(C_3)_{\alpha\beta}$ dan da $H_{\alpha\beta} = 0$ bulunur. Öte yandan, $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ olması nedeniyle (4.61) deki $(E_3)_{\alpha\beta}$ evrim denklemi

$$(K_3)_{\alpha\beta} : \quad -e_{\langle\alpha}\dot{u}_{\beta\rangle} + \varepsilon_{\gamma\delta\langle\alpha}n_{\beta\rangle}{}^\gamma\dot{u}^\delta - (\dot{u}_{\langle\alpha} + a_{\langle\alpha}\dot{u}_{\beta\rangle} + \omega^{\langle\alpha}\omega^{\beta\rangle}) + (E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\pi_{\alpha\beta}^t) = 0 \quad (4.89)$$

şeklinde yeni bir bağı denkleminde dönüşmektedir. Bu denklemle birlikte $(C_G)_{\alpha\beta}$ dan $E_{\alpha\beta}$ ve $\pi_{\alpha\beta}^t$ bileşenleri

$$E_{11} = E_{22} = -\frac{1}{2}E_{33} = -\frac{K}{6(K+S)}\frac{m^2}{a^2}, \quad E_{12} = E_{23} = E_{31} = 0, \quad (4.90)$$

$$\pi_{11}^t = \frac{2S}{3(K+S)}(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}) - \frac{2K+S}{6(K+S)}\frac{m^2}{a^2}, \quad (4.91.a)$$

$$\pi_{22}^t = -\frac{4S}{3(K+S)}(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}) - \frac{2K+S}{6(K+S)}\frac{m^2}{a^2}, \quad (4.91.b)$$

$$\pi_{33}^t = \frac{2S}{3(K+S)} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{2K+S}{3(K+S)} \frac{m^2}{a^2}, \quad (4.91.c)$$

$$\pi_{12}^t = \pi_{21}^t = \sqrt{\frac{S}{K+S}} \frac{m\dot{a}}{a^2}, \quad \pi_{23}^t = \pi_{31}^t = 0. \quad (4.91.d)$$

biçiminde bulunur. Eğer, (4.86)-(4.91.d) denklemleriyle verilen büyüklükler $(C_4)_\alpha$ ve $(C_5)_\alpha$ bağ denklemlerine yerleştirilirse, kısaltma ve düzenlemelerden sonra, sırasıyla

$$e_\alpha \mu^t = \sqrt{\frac{S}{K+S}} \left[-\frac{2S}{K+S} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \left(6\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2(3K+2S)\dot{a}^2}{a^2} + \frac{4K+S}{2(K+S)} \frac{m^2}{a^2} \right) \right] \delta_\alpha^2 \quad (4.92)$$

ve

$$\mu^t + p^t = -\frac{2(3K+4S)}{3(K+S)} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{4K-S}{6(K+S)} \frac{m^2}{a^2}, \quad (4.93)$$

bulunur. Nihayet, son (C_6) bağ koşulundan

$$\mu^t = -\frac{2S}{K+S} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3K+2S}{K+S} \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{4K+S}{4(K+S)} \frac{m^2}{a^2}, \quad (4.94)$$

elde edilir ki, bu (4.93) denkleminde kullanılırsa

$$p^t = -\frac{2(3K+S)}{3(K+S)} \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3K-2S}{3(K+S)} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{4K+5S}{12(K+S)} \frac{m^2}{a^2}. \quad (4.95)$$

bulunur. Bağ denklemlerinden elde edilebilecek tüm bağıntılar bunlardan ibarettir. Yukarıda bulunan büyüklükler ile bunların e_a türevleri kullanılırsa, (E_6) ve $(E_7)^\alpha$ denklemleri dışında, (4.59)-(4.69) evrim denklemlerinin tamamının ve de (4.92) denkleminin özdeş olarak sağlandığı gösterilebilir. Dolayısıyla bunlar yeni bir bilgiye yol açmazlar. Şimdi, (E_6) ve $(E_7)^\alpha$ denklemlerinin sırasıyla indirgendiği

$$\dot{\mu}^m = -3\frac{\dot{a}}{a}(\mu^m + p^m), \quad (4.96)$$

ve

$$e_1 p^m = 0, \quad e_2 p^m = -\sqrt{\frac{S}{K+S}} \frac{\dot{a}}{a} (\mu^m + p^m), \quad e_3 p^m = 0, \quad (4.97)$$

denklemleri göz önüne alalım. Öte yandan, μ^t ve p^t için (4.94) ve (4.95) denklemleri ve μ^R ve p^R için de (4.100), (4.101) denklemleri ve ayrıca da

$$R(t) = \mu^t - 3p^t = \frac{6K}{K+S} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{4K+3S}{2(K+S)} \frac{m^2}{a^2}, \quad (4.98)$$

biçimde hesaplanan Ricci eğriliğinin ifadesi göz önüne alınırsa, (4.83) teki anahtar denklemler μ^m ve p^m nin her ikisinin de yalnızca zamanın fonksiyonu olduğunu söylemektedirler. Dolayısıyla, (4.86) uyarınca (4.97) deki birinci ve üçüncü denklemler özdeş olarak sağlanırlar; ikincisi ise basınç için şu aşağıdaki evrim denklemine yol açar:

$$\dot{p}^m = -\frac{\dot{a}}{a} (\mu^m + p^m) \quad (4.99)$$

Burada şuna işaret edelim: (4.59)-(4.69) evrim denklemleri topluluğunda eşyönlü basınç için böyle bir evrim denklemi bulunmamaktadır. Burada söz konusu denklem yalnızca uzaysal türev içermesinden ötürü bir bağ denklemi olarak adlandırılan (4.97) bağ denkleminde kaynaklanmaktadır. Mamafih, uzaysal türevli olmak yanıltıcı bir görünümünden ibarettir. Zira, e_2 aynı zamanda bir zamansal türev içerdiği için salt bir bağ denklemi olarak yorumlamak doğru değildir. Aynı saptama (4.92) denklemi için de geçerlidir. Bu konuda, “bağ denklemi” biçimindeki adlandırmanın yol açmış olduğu karışıklık konusunda [82]’deki araştırmacıların eleştirilerine yönlendirme yapalım.

Şimdi (4.30)-(4.33) denklemlerine dönelim. (4.26) ve (4.87) yi kullanarak eğrilik akışkanının efektif dinamik büyüklükleri için şunları buluruz:

$$\mu^R = -\frac{1}{2F_R} (F - RF_R) + \frac{F_{RR}}{F_R} \left(\frac{S}{K+S} \ddot{R} - \frac{3K+S}{K+S} \frac{\dot{a}}{a} \dot{R} \right) + \frac{F_{RRR}}{F_R} \frac{S}{K+S} \dot{R}^2 \quad (4.100)$$

$$p^R = \frac{1}{2F_R} (F - RF_R) + \frac{F_{RR}}{F_R} \left(\frac{3K+S}{3(K+S)} \ddot{R} + \frac{6K-S}{3(K+S)} \frac{\dot{a}}{a} \dot{R} \right) + \frac{F_{RRR}}{F_R} \frac{3K+S}{3(K+S)} \dot{R}^2 \quad (4.101)$$

$$q_1^R = \frac{1}{2} \frac{F_{RR}}{F_R} \frac{S}{K+S} \frac{m\dot{R}}{a}, \quad q_2^R = -\sqrt{\frac{S}{K+S}} \left[\frac{F_{RR}}{F_R} \left(\ddot{R} - \frac{\dot{a}}{a} \dot{R} \right) + \frac{F_{RRR}}{F_R} \dot{R}^2 \right], \quad q_3^R = 0 \quad (4.102)$$

$$\pi_{11}^R = -\frac{1}{2} \pi_{22}^R = \pi_{33}^R = -\frac{1}{3} \frac{S}{K+S} \left[\frac{F_{RR}}{F_R} \left(\ddot{R} - \frac{\dot{a}}{a} \dot{R} \right) + \frac{F_{RRR}}{F_R} \dot{R}^2 \right] \quad (4.103.a)$$

$$\pi_{12}^R = -\frac{1}{2} \frac{F_{RR}}{F_R} \sqrt{\frac{S}{K+S}} \frac{m\dot{R}}{a}, \quad \pi_{23}^R = \pi_{31}^R = 0 \quad (4.103.b)$$

(4.83) teki anahtar denklemleri kullanmadan önce, anlaşılabilir olmak ve aynı zamanda da yer kazanmak için $F(R)$ fonksiyonunun etkisini türevleri cinsinden kapsayan

$$X \equiv \frac{\dot{a}}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{F_{RR}}{F_R} \frac{\dot{R}}{a} \quad \text{and} \quad Y \equiv 2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{F_{RR}}{F_R} \left(\ddot{R} - \frac{\dot{a}}{a} \dot{R} \right) + \frac{F_{RRR}}{F_R} \dot{R}^2 \quad (4.104)$$

gibi iki yardımcı fonksiyon tanımlayalım. Bu takdirde, bunlar cinsinden (4.88), (4.91), (4.102), (4.103.b) denklemleri kullanılırsa (4.83) denklemleri, gerekli kısaltmalar da yapıldıktan sonra,

$$q_1^t = q_1^R : \quad -\frac{S}{K+S} mX = 0 \quad (4.105.a)$$

$$q_2^t = q_2^R : \quad 0 = -Y \quad (4.105.b)$$

$$\pi_{11}^t = \pi_{11}^R : \quad -\frac{2K+S}{6(K+S)} \frac{m^2}{a^2} = -\frac{1}{3} \frac{S}{K+S} Y \quad (4.106.a)$$

$$\pi_{22}^t = \pi_{22}^R : \quad -\frac{2K+S}{6(K+S)} \frac{m^2}{a^2} = \frac{2S}{3(K+S)} Y \quad (4.106.b)$$

$$\pi_{33}^t = \pi_{33}^R : \quad \frac{2K+S}{3(K+S)} \frac{m^2}{a^2} = -\frac{S}{3(K+S)} Y \quad (4.106.c)$$

$$\pi_{12}^t = \pi_{12}^R : \quad \sqrt{\frac{S}{K+S}} mX = 0 \quad (4.106.d)$$

biçiminde yazılırlar. Öte yandan (4.83.a) ve (4.83.b) denklemlerini ayrı ayrı yazmaktansa bunların

$$\mu^t + p^t = \frac{1}{F_R}(\mu^m + p^m) + \mu^R + p^R \quad (4.107)$$

şeklindeki birleştirilmesini göz önüne alalım. (4.94), (4.95), (4.100) ve (4.101) denklemlerini kullanarak, bu

$$-\frac{1}{6} \frac{4K - S}{(K + S)} \frac{m^2}{a^2} = \frac{1}{F_R}(\mu^m + p^m) + \frac{1}{3} \frac{3K + 4S}{(K + S)} Y \quad (4.108)$$

biçiminde ifade edilir. Bu aşamada, (4.96) ve (4.99) denklemlerinin de,

$$(\mu^m + p^m)^{\cdot} = -4 \frac{\dot{a}}{a} (\mu^m + p^m) \quad (4.109)$$

biçiminde kombine edilebileceği ve bunun da integrasyonunun, $\dot{a} \neq 0$ ve $\mu^m + p^m \neq 0$ varsayarak, C bir integrasyon sabiti olmak üzere

$$\mu^m + p^m = \frac{C}{a^4} \quad (4.110)$$

olacağına işaret edelim. Sonuçta, $a(t)$, $\mu^m(t)$, $p^m(t)$ ve $F(R)$ bilinmeyenleri için (4.96), (4.98), (4.99), (4.104), (4.105.a)-(4.106.d), (4.108) ve (4.110) ile verilen kapalı, fakat aşikar olarak bilinmeyen sayısından fazla sayıda denklem içeren bir denklem sistemi elde ediyoruz. (4.105.b) denkleminin (4.106.a,b,c) ile tutarlılığını sağlamak için K ve S parametrelerinin $2K + S = 0$ koşuluna uymaları gerektiği hemen görülebilir. Bu koşul ise, $K + S > 0$ zorunluluğu dikkate alındığında, $K < 0$ koşuluna yol açar. Bu koşullar altında şimdi, yukarıdaki (4.105.a)-(4.106.d) sisteminde $X = 0$ ve $Y = 0$ olan yalnızca iki bağımsız denkleme düşmüş olmaktadır. Bunların zamana bağlı $a(t)$ ölçek çarpanıyla tutarlılığını göstermek için X in zaman türevini alalım. (4.104) tanımını kullanılırsa sonuçta

$$0 = \dot{X} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} Y - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = -3 \frac{\dot{a}^2}{a^3} \quad (4.111)$$

bulunur ki, bu da $\dot{a} = 0$, yani $a = \text{sabit} \equiv a_0$ verir. Buradan, zamana bağılı bir $a(t)$ ölçek çarpanının $F(R)$ alan denklemlerinin çözümü olarak kabul edilmediği sonucuna varırız. Bu alt bölümü kapamadan önce, $F(R)$ -gravitede stasyoner Gödel çözümünün var olup olmadığına bakmak ilginç olacaktır. O halde $a = \text{sabit} \equiv a_0$ alırsak, yukarıdaki denklemler çok büyük ölçüde sadeleşir; (4.98) den $R = -\frac{4K+3S}{2(K+S)} \frac{m^2}{a_0^2}$ ve (4.87) dan da

$$\omega_3 \equiv \omega_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{K+S}} \frac{m}{a_0} \text{ olur. Öte yandan, (4.96) ve (4.99) dan } \dot{\mu}^m = 0 = \dot{p}^m \text{ elde ederiz}$$

ki, bunlar da $\mu^m = \text{sabit}$ ve $p^m = \text{sabit}$ biçiminde integre edilirler. O halde şimdi, R nin sabit olmasını göz önüne alarak (4.105.a) ve (4.105.b) denklemlerinin özdeş olarak sağlandığını ve (4.106) denklemlerinin de $2K+S=0$ tutarlılık koşuluna yol açtığını hemen görürüz. Bu takdirde, R ve ω_0 , sırasıyla $R = -m^2 / a_0^2$ ve $\omega_0 = m / (\sqrt{2}a_0)$ biçiminde sadeleşir. Şimdi, tüm bulunanları (4.83.a) ve (4.83.b) denklemleri ile bunların (4.108) deki kombinasyonuna yerleştirirsek, sırasıyla

$$\frac{1}{2} \frac{m^2}{a_0^2} = \frac{1}{F_R} \mu^m - \frac{1}{2F_R} (F - RF_R) \quad (4.112)$$

$$\frac{1}{2} \frac{m^2}{a_0^2} = \frac{1}{F_R} p^m + \frac{1}{2F_R} (F - RF_R) \quad (4.113)$$

$$\frac{m^2}{a_0^2} = \frac{1}{F_R} (\mu^m + p^m) \quad (4.114)$$

denklemlerini elde ederiz. Son denklem, $c_1 = (\mu^m + p^m) a_0^2 / m^2$ ve c_2 bir integrasyon sabiti olmak üzere, $F(R) = c_1 R + c_2$ olarak hemen integre edilebilir. c_2 sabiti (4.112) ve (4.113) denklemlerinden $c_2 = \mu^m - p^m$ olarak bulunur. GRT limitinde $F(R) = R - 2\Lambda$ olacağından, $c_1 = 1$ ve $c_2 = -2\Lambda$ olmalıdır. Bu da, $\mu^m + p^m = m^2 / a_0^2 = 2\omega_0^2$ ve $\mu^m - p^m = -2\Lambda$ bağıntılarına yol açar ki, bunlar Ellis [3] tarafından daha önce bulunmuş bağıntılar olup basıncı da içerecek şekilde genelleştirilmiş Gödel evrenine karşılık düşer. O halde, $F(R)$ -gravite alan

denklemlerinin stasyoner Gödel evrenini dahi çözüm kabul etmediği sonucuna varmaktayız. Burada, $2K + S = 0$ ve $K < 0$ koşuluna uyan K ve S parametre değerlerinin bu sonuca etki etmediğini kaydedelim.

4.2.1.2. Dönmeli Bianchi-tip II Model

İkinci örnek olarak, $\{\omega^a; E_a\}$ tabanı

$$\omega^a = (dt, dx - zdy, dy, dz) \Leftrightarrow E_a = (\partial_t, \partial_x, z\partial_x + \partial_y, \partial_z) \quad (4.115)$$

koordinat temsilleriyle tanımlanmış [67] dönen Bianchi-tip II modelini göz önüne alacağız. Dolayısıyla $\{\sigma^a; e_a\}$ tabanı (4.82) deki ifadeye göre, açıkça

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= dt - v_1 a(t) dx + (v_1 z - v_2) a(t) dy - v_3 a(t) dz, & e_0 &= \partial_t \\ \sigma^1 &= k_1 a(t) dx - k_1 a(t) z dy, & e_1 &= \frac{v_1}{k_1} \partial_t + \frac{1}{k_1 a(t)} \partial_x \\ \sigma^2 &= k_2 a(t) dy, & e_2 &= \frac{v_2}{k_2} \partial_t + \frac{z}{k_2 a(t)} \partial_x + \frac{1}{k_2 a(t)} \partial_y \\ \sigma^3 &= k_3 a(t) dz, & e_3 &= \frac{v_3}{k_3} \partial_t + \frac{1}{k_3 a(t)} \partial_z \end{aligned} \quad (4.116)$$

biçiminde yazılacaktır. Bunları kullanarak (3.62) deki komütatörlerden akışkanın kinematik büyüklükleri

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= 0, \quad \theta = 3 \frac{\dot{a}}{a}, \quad \dot{u}_\alpha = \frac{v_\alpha}{k_\alpha} \frac{\dot{a}}{a}, \quad \omega_\alpha = \left(-\frac{v_1}{2k_2 k_3} \frac{1}{a}, 0, 0, \right) = -\Omega_\alpha, \\ a_\alpha &= -\frac{v_\alpha}{k_\alpha} \frac{\dot{a}}{a}, \quad n_{\alpha\beta} = \text{diag} \left(-\frac{k_1}{k_2 k_3} \frac{1}{a}, 0, 0 \right) \end{aligned} \quad (4.117)$$

olarak elde edilir. Önceki alt bölümdeki yöntemin benzerini izleyerek, efektif toplam dinamik büyüklükleri (4.70)-(4.77) denklemlerinden; ve efektif eğrilik akışkanının efektif dinamik büyüklüklerini de (4.30)-(4.33) denklemlerinden hesaplıyoruz. Her ne

kadar tartışmaya girmese de tamlik amacıyla gravito-magnetik ve gravito-elektrik alanların bileşenlerini de yazıyoruz (bkz. 4.126). Sonuçları aşağıda listeliyoruz:

$$\mu^t = -\left(\frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2}\right)\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k_1^2 - 3v_1^2}{4k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} \quad (4.118)$$

$$p^t = \frac{1}{3}\left(\frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2}\right)\left(4\frac{\ddot{a}}{a} + 5\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) - \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) + \frac{k_1^2 + v_1^2}{12k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} \quad (4.119)$$

$$q_1^t = 2\frac{v_1}{k_1}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) - \frac{k_1 v_1}{2k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} \quad (4.120.a)$$

$$q_2^t = 2\frac{v_2}{k_2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) - \frac{v_1 v_3}{k_2 k_3^2} \frac{\dot{a}}{a^2} \quad (4.120.b)$$

$$q_3^t = 2\frac{v_3}{k_3}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) + \frac{v_1 v_2}{k_2^2 k_3} \frac{\dot{a}}{a^2} \quad (4.120.c)$$

$$\pi_{11}^t = \frac{2}{3}\left(-2\frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2}\right)\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) + \frac{2k_1^2 - v_1^2}{3k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} \quad (4.121.a)$$

$$\pi_{22}^t = \frac{2}{3}\left(\frac{v_1^2}{k_1^2} - 2\frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2}\right)\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) - \frac{2k_1^2 - v_1^2}{6k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} \quad (4.121.b)$$

$$\pi_{33}^t = \frac{2}{3}\left(\frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} - 2\frac{v_3^2}{k_3^2}\right)\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) - \frac{2k_1^2 - v_1^2}{6k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} \quad (4.121.c)$$

$$\pi_{12}^t = -2\frac{v_1 v_2}{k_1 k_2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) + \frac{k_1 v_3}{k_2 k_3^2} \frac{\dot{a}}{a^2} \quad (4.121.d)$$

$$\pi_{23}^t = -2\frac{v_2 v_3}{k_2 k_3}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \quad (4.121.e)$$

$$\pi_{31}^t = -2\frac{v_3 v_1}{k_3 k_1}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) + \frac{k_1 v_2}{k_2^2 k_3} \frac{\dot{a}}{a^2} \quad (4.121.f)$$

$$\begin{aligned}\mu^R = & -\frac{1}{2F_R}(F_R - RF_R) + \frac{F_{RR}}{F_R} \left[\left(\frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2} \right) (\ddot{R} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{R}) - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{R} \right] \\ & + \frac{F_{RRR}}{F_R} \left(\frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2} \right) \dot{R}^2\end{aligned}\quad (4.122)$$

$$\begin{aligned}p^R = & \frac{1}{2F_R}(F - RF_R) + \frac{F_{RR}}{F_R} \left[\ddot{R} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{R} - \frac{1}{3} \left(\frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2} \right) (2\ddot{R} + 7\frac{\dot{a}}{a}\dot{R}) \right] \\ & + \frac{F_{RRR}}{F_R} \left[\dot{R}^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2} \right) \dot{R}^2 \right]\end{aligned}\quad (4.123)$$

$$q_1^R = -\frac{v_1}{k_1} \left[\frac{F_{RR}}{F_R} \left(\ddot{R} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{R} \right) + \frac{F_{RRR}}{F_R} \dot{R}^2 \right] \quad (4.124.a)$$

$$q_2^R = \frac{F_{RR}}{F_R} \left[-\frac{v_2}{k_2} \left(\ddot{R} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{R} \right) + \frac{v_1 v_3}{2k_2 k_3^2} \frac{\dot{a}}{a}\dot{R} \right] + \frac{F_{RRR}}{F_R} \left(-\frac{v_2}{k_2} \dot{R}^2 \right) \quad (4.124.b)$$

$$q_3^R = \frac{F_{RR}}{F_R} \left[-\frac{v_3}{k_3} \left(\ddot{R} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{R} \right) - \frac{v_1 v_2}{2k_2^2 k_3} \frac{\dot{a}}{a}\dot{R} \right] + \frac{F_{RRR}}{F_R} \left(-\frac{v_3}{k_3} \dot{R}^2 \right) \quad (4.124.c)$$

$$\pi_{11}^R = \frac{1}{3} \left(2\frac{v_1^2}{k_1^2} - \frac{v_2^2}{k_2^2} - \frac{v_3^2}{k_3^2} \right) \left[\frac{F_{RR}}{F_R} \left(\ddot{R} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{R} \right) + \frac{F_{RRR}}{F_R} \dot{R}^2 \right] \quad (4.125.a)$$

$$\pi_{22}^R = \frac{1}{3} \left(-\frac{v_1^2}{k_1^2} + 2\frac{v_2^2}{k_2^2} - \frac{v_3^2}{k_3^2} \right) \left[\frac{F_{RR}}{F_R} \left(\ddot{R} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{R} \right) + \frac{F_{RRR}}{F_R} \dot{R}^2 \right] \quad (4.125.b)$$

$$\pi_{33}^R = \frac{1}{3} \left(-\frac{v_1^2}{k_1^2} - \frac{v_2^2}{k_2^2} + 2\frac{v_3^2}{k_3^2} \right) \left[\frac{F_{RR}}{F_R} \left(\ddot{R} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{R} \right) + \frac{F_{RRR}}{F_R} \dot{R}^2 \right] \quad (4.125.c)$$

$$\pi_{12}^R = \frac{F_{RR}}{F_R} \left[\frac{v_1 v_2}{k_1 k_2} \left(\ddot{R} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{R} \right) - \frac{1}{2} \frac{k_1 v_3}{k_2 k_3^2} \frac{\dot{R}}{a} \right] + \frac{F_{RRR}}{F_R} \frac{v_1 v_2}{k_1 k_2} \dot{R}^2 \quad (4.125.d)$$

$$\pi_{23}^R = \frac{v_2 v_3}{k_2 k_3} \left[\frac{F_{RR}}{F_R} \left(\ddot{R} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{R} \right) + \frac{F_{RRR}}{F_R} \dot{R}^2 \right] \quad (4.125.e)$$

$$\pi_{31}^R = \frac{F_{RR}}{F_R} \left[\frac{v_3 v_1}{k_3 k_1} (\ddot{R} - \frac{\dot{a}}{a} \dot{R}) + \frac{1}{2} \frac{k_1 v_2}{k_2^2 k_3} \frac{\dot{R}}{a} \right] + \frac{F_{RRR}}{F_R} \frac{v_3 v_1}{k_3 k_1} \dot{R}^2 \quad (4.125.f)$$

$$E_{11} = -\frac{1}{2} E_{22} = -\frac{1}{2} E_{33} = \frac{1}{3} \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2}, \quad E_{12} = E_{23} = E_{31} = 0, \quad H_{\alpha\beta} = 0 \quad (4.126)$$

Şimdi, (4.118)-(4.125) ifadelerini (4.83) denklemlerine yerleştirirsek X ve Y cinsinden şu aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz:

$$\mu^t + p^t = \frac{1}{F_R} (\mu^m + p^m) + \mu^R + p^R :$$

$$-\frac{k_1^2 - 5v_1^2}{6k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{F_R} (\mu^m + p^m) + \frac{1}{3} (3 + \frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2}) Y \quad (4.127)$$

$$q_\alpha^t = q_\alpha^R :$$

$$\frac{v_1}{k_1} \frac{k_1^2}{2k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} = \frac{v_1}{k_1} Y \quad (4.128.a)$$

$$\frac{v_3 v_1}{k_2 k_3^2} X = \frac{v_2}{k_2} Y \quad (4.128.b)$$

$$\frac{v_1 v_2}{k_2^2 k_3} X = \frac{v_3}{k_3} Y \quad (4.128.c)$$

$$\pi_{\alpha\beta}^t = \pi_{\alpha\beta}^R :$$

$$\frac{2k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} = (\frac{2v_1^2}{k_1^2} - \frac{v_2^2}{k_2^2} - \frac{v_3^2}{k_3^2}) Y \quad (4.129.a)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{2k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} = (\frac{2v_2^2}{k_2^2} - \frac{v_3^2}{k_3^2} - \frac{v_1^2}{k_1^2}) Y \quad (4.129.b)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{2k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} = (\frac{2v_3^2}{k_3^2} - \frac{v_1^2}{k_1^2} - \frac{v_2^2}{k_2^2}) Y \quad (4.129.c)$$

$$\frac{k_1}{k_2 k_3} \frac{v_3}{k_3} X = \frac{v_1 v_2}{k_1 k_2} Y \quad (4.129.d)$$

$$0 = \frac{v_2 v_3}{k_2 k_3} Y \quad (4.129.e)$$

$$\frac{k_1}{k_2 k_3} \frac{v_2}{k_2} X = \frac{v_3 v_1}{k_3 k_1} Y \quad (4.129.f)$$

Bu denklemlerin birbirleriyle tutarlılığını göstermek için üç durum göz önüne alıyoruz:

1. $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0, v_3 \neq 0$: (4.129.e) denklemi $Y = 0$ verir. Bu (4.128.a) ya yerleştirildiğinde $k_1^2 / (2k_2^2 k_3^2 a^2) = 0$ a yol açar ve buradan da $k_1 = 0$ bulunur ki, bu $k_1 \neq 0$ kabulüyle çelişir.

2. $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0, v_3 = 0$: Bu durumda (4.128.a) $k_1^2 / (2k_2^2 k_3^2 a^2) = Y$ ve (4.128.b) de $Y = 0$ denklemlerine indirgenir. $k_1 \neq 0$ olduğundan bu iki durum birbiriyle çelişir.

3. $v_1 \neq 0, v_2 = 0, v_3 = 0$: Bu durumda (4.128.a),

$$\frac{k_1^2}{2k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} = Y \quad (4.130)$$

denklemini; ve (4.129.a), (4.129.b) ve (4.129.c) de tek bir

$$\frac{2k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} = \frac{2v_1^2}{k_1^2} Y \quad (4.131)$$

denklemini indirgenir; geri kalanlar ise özdeş olarak sağlanır. (4.128.a) daki Y , (4.129.a) ya yerleştirilirse tutarlılık koşulu olarak $v_1^2 = k_1^2$ elde ederiz. Şimdi, geriye yalnızca (4.127) denklemini, $v_1^2 = k_1^2$ koşulu altında göz önüne almak kalıyor. Bu takdirde (4.127)

$$\frac{2}{3} \frac{k_1^2}{k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{F_R} (\mu^m + p^m) + \frac{4}{3} Y \quad (4.132)$$

olur ya da Y için (4.128.a) kullanılırsa

$$\frac{1}{F_R}(\mu^m + p^m) = 0 \quad (4.133)$$

biçiminde sadeleşir. Bu ise $(\mu^m + p^m) \neq 0$ varsayımı ile çelişir.

Sonuç olarak bu modelde aynı anda dönme ve genişleme olmasının mümkün olmadığı görülmektedir.

4.2.1.3. Dönmeli Bianchi-tip IX Model

Bu modelin $\{E_a, \omega^a\}$ tabanı

$$\omega^a = (dt, \cos y \cos z dx - \sin z dy, \cos y \sin z dx + \cos z dy, -\sin y dx + dz) \quad (4.134)$$

$$E_a = (\partial_t, \frac{\cos z}{\cos y} \partial_x, -\sin z \partial_y + \tan y \cos z \partial_z, \frac{\sin z}{\cos y} \partial_x + \cos z \partial_y + \tan y \sin z \partial_z, \partial_z)$$

koordinat gösterimleriyle tanımlanmıştır [67]. Buradan (4.82) denklemine göre inşa edilebilecek (σ^a, e_a) ortonormal tabandan hareketle önceki modellerdeki aynı yolu izleyerek kinematik büyüklükler

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= 0, \quad \theta = 3\frac{\dot{a}}{a}, \quad \dot{u}_\alpha = \frac{v_\alpha}{k_\alpha} \frac{\dot{a}}{a}, \quad \omega_\alpha = \left(-\frac{v_1}{2k_2k_3} \frac{1}{a}, \frac{v_2}{2k_3k_1} \frac{1}{a}, \frac{v_3}{2k_1k_2} \frac{1}{a} \right) = -\Omega_\alpha, \\ a_\alpha &= -\frac{v_\alpha}{k_\alpha} \frac{\dot{a}}{a}, \quad n_{\alpha\beta} = \text{diag}\left(-\frac{k_1}{k_2k_3} \frac{1}{a}, -\frac{k_2}{k_3k_1} \frac{1}{a}, -\frac{k_3}{k_1k_2} \frac{1}{a} \right) \end{aligned} \quad (4.135)$$

bulunur. Efektif toplam ve eğrilik akışkanlarının her birini ilgilendiren dinamik büyüklüklerin ve aynı zamanda da serbest gravitasyon alanlarının hesap sonuçlarını aşağıda listeliyoruz:

$$\begin{aligned} \mu^t &= -\left(\frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2} \right) \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[\frac{k_1^2 - 3v_1^2}{k_2^2k_3^2} + \frac{k_2^2 - 3v_2^2}{k_1^2k_3^2} + \frac{k_3^2 - 3v_3^2}{k_1^2k_2^2} - 2\left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} + \frac{1}{k_3^2} \right) \right] \frac{1}{a^2} \end{aligned} \quad (4.136)$$

$$p^t = \frac{1}{3} \left(\frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2} \right) \left(4 \frac{\ddot{a}}{a} + 5 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{1}{12} \left[\frac{k_1^2 + v_1^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{k_2^2 + v_2^2}{k_1^2 k_3^2} + \frac{k_3^2 + v_3^2}{k_1^2 k_2^2} - 2 \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} + \frac{1}{k_3^2} \right) \right] \frac{1}{a^2} \quad (4.137)$$

$$q_1^t = 2 \frac{v_1}{k_1} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{v_2 v_3}{k_1} \left(\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_3^2} \right) \frac{\dot{a}}{a^2} - \frac{k_1 v_1}{2 k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} \quad (4.138)$$

$$\pi_{11}^t = \frac{2}{3} \left(-\frac{2v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2} \right) \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} - \frac{2k_2^2 - v_2^2}{2k_3^2 k_1^2} - \frac{2k_3^2 - v_3^2}{2k_1^2 k_2^2} + \frac{2}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \quad (4.139)$$

$$\pi_{12}^t = -2 \frac{v_1 v_2}{k_1 k_2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \left(\frac{k_1}{k_2 k_3} - \frac{k_2}{k_3 k_1} \right) \frac{v_3}{k_3} \frac{\dot{a}}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{v_1 v_2}{k_1 k_2 k_3^2} \frac{1}{a^2} \quad (4.140)$$

$$\mu^R = -\frac{1}{2F_R} (F - RF_R) + \frac{F_{RR}}{F_R} \left[\left(\frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2} \right) (\ddot{R} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{R}) - 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{R} \right] + \frac{F_{RRR}}{F_R} \left(\frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2} \right) \dot{R}^2 \quad (4.141)$$

$$p^R = \frac{1}{2F_R} (F - RF_R) + \frac{F_{RR}}{F_R} \left[-\frac{1}{3} \left(\frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2} \right) (2\ddot{R} + 7 \frac{\dot{a}}{a} \dot{R}) + \ddot{R} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{R} \right] + \frac{F_{RRR}}{F_R} \left[\dot{R}^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2} \right) \dot{R}^2 \right] \quad (4.142)$$

$$q_1^R = \frac{F_{RR}}{F_R} \left[\frac{v_1}{k_1} \left(-\ddot{R} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{R} \right) + \frac{v_2 v_3}{2k_1} \left(\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_3^2} \right) \frac{\dot{R}}{a} \right] + \frac{F_{RRR}}{F_R} \left(-\frac{v_1}{k_1} \dot{R}^2 \right) \quad (4.143)$$

$$\pi_{11}^R = \frac{1}{3} \left(\frac{2v_1^2}{k_1^2} - \frac{v_2^2}{k_2^2} - \frac{v_3^2}{k_3^2} \right) \left[\frac{F_{RR}}{F_R} \left(\ddot{R} - \frac{\dot{a}}{a} \dot{R} \right) + \frac{F_{RRR}}{F_R} \dot{R}^2 \right] \quad (4.144)$$

$$\pi_{12}^R = \frac{F_{RR}}{F_R} \left[\frac{v_1 v_2}{k_1 k_2} \left(\ddot{R} - \frac{\dot{a}}{a} \dot{R} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{k_2 k_3} - \frac{k_2}{k_3 k_1} \right) \frac{v_3}{k_3} \frac{\dot{R}}{a} \right] + \frac{F_{RRR}}{F_R} \frac{v_1 v_2}{k_1 k_2} \dot{R}^2 \quad (4.145)$$

$$E_{11} = \frac{1}{6} \left(2 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} - \frac{k_2^2 - v_2^2}{k_1^2 k_3^2} - \frac{k_3^2 - v_3^2}{k_1^2 k_2^2} + \frac{2}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2}, E_{12} = -\frac{1}{2} \frac{v_1 v_2}{k_1 k_2 k_3^2} \frac{1}{a^2}$$

$$H_{11} = H_{22} = H_{33} = 0, H_{12} = \frac{1}{4} \frac{v_3}{k_3} \left(\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1^2} \right) \frac{1}{a^2} \quad (4.146)$$

(Yukarıdaki ifadelere ek olarak $q_1^t, \pi_{11}^t, \pi_{12}^t; q_1^R, \pi_{11}^R, \pi_{12}^R; H_{12}, E_{11}, E_{12}$ büyüklüklerinin her biri için, (1,2,3) ün dairesel permütasyonu uygulanarak elde edilebilecek ikişer ifade daha bulunmaktadır.)

Bu sonuçlar kullanıldığında, Ricci eğrilik skalerinin ifadesi ve (4.104) ile tanımlı X ve Y cinsinden (4.83) denklemleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$$R = 6 \left[1 - \left(\frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2} \right) \right] \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{k_2^2 - v_2^2}{k_1^2 k_3^2} + \frac{k_3^2 - v_3^2}{k_1^2 k_2^2} - 2 \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} + \frac{1}{k_3^2} \right) \right] \frac{1}{a^2} \quad (4.147)$$

$$q_\alpha^t = q_\alpha^R:$$

$$\frac{v_2 v_3}{k_1} \left(\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_3^2} \right) X + \frac{k_1 v_1}{2 k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} = \frac{v_1}{k_1} Y \quad (4.148.a)$$

$$\frac{v_3 v_1}{k_2} \left(\frac{1}{k_3^2} - \frac{1}{k_1^2} \right) X + \frac{k_2 v_2}{2 k_3^2 k_1^2} \frac{1}{a^2} = \frac{v_2}{k_2} Y \quad (4.148.b)$$

$$\frac{v_1 v_2}{k_3} \left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2} \right) X + \frac{k_3 v_3}{2 k_1^2 k_2^2} \frac{1}{a^2} = \frac{v_3}{k_3} Y \quad (4.148.c)$$

$$\pi_{\alpha\beta}^t = \pi_{\alpha\beta}^R:$$

$$\left(\frac{2k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} - \frac{2k_2^2 - v_2^2}{2k_3^2 k_1^2} - \frac{2k_3^2 - v_3^2}{2k_1^2 k_2^2} + \frac{2}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} = \left(\frac{2v_1^2}{k_1^2} - \frac{v_2^2}{k_2^2} - \frac{v_3^2}{k_3^2} \right) Y \quad (4.149.a)$$

$$\left(\frac{2k_2^2 - v_2^2}{k_3^2 k_1^2} - \frac{2k_3^2 - v_3^2}{2k_1^2 k_2^2} - \frac{2k_1^2 - v_1^2}{2k_2^2 k_3^2} + \frac{2}{k_2^2} - \frac{1}{k_3^2} - \frac{1}{k_1^2} \right) \frac{1}{a^2} = \left(\frac{2v_2^2}{k_2^2} - \frac{v_3^2}{k_3^2} - \frac{v_1^2}{k_1^2} \right) Y \quad (4.149.b)$$

$$\left(\frac{2k_3^2 - v_3^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{2k_1^2 - v_1^2}{2k_2^2 k_3^2} - \frac{2k_2^2 - v_2^2}{2k_3^2 k_1^2} + \frac{2}{k_3^2} - \frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2}\right) \frac{1}{a^2} = \left(\frac{2v_3^2}{k_3^2} - \frac{v_1^2}{k_1^2} - \frac{v_2^2}{k_2^2}\right) Y \quad (4.149.c)$$

$$\left(\frac{k_1}{k_2 k_3} - \frac{k_2}{k_3 k_1}\right) \frac{v_3}{k_3} X - \frac{v_1 v_2}{2k_1 k_2 k_3^2} \frac{1}{a^2} = \frac{v_1 v_2}{k_1 k_2} Y \quad (4.149.d)$$

$$\left(\frac{k_2}{k_3 k_1} - \frac{k_3}{k_1 k_2}\right) \frac{v_1}{k_1} X - \frac{v_2 v_3}{2k_2 k_3 k_1^2} \frac{1}{a^2} = \frac{v_2 v_3}{k_2 k_3} Y \quad (4.149.e)$$

$$\left(\frac{k_3}{k_1 k_2} - \frac{k_1}{k_2 k_3}\right) \frac{v_2}{k_2} X - \frac{v_3 v_1}{2k_3 k_1 k_2^2} \frac{1}{a^2} = \frac{v_3 v_1}{k_3 k_1} Y \quad (4.149.f)$$

$$\mu^t + p^t = \frac{1}{F_R} (\mu^m + p^m) + \mu^R + p^R:$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6} \left[\frac{k_1^2 - 5v_1^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{k_2^2 - 5v_2^2}{k_3^2 k_1^2} + \frac{k_3^2 - 5v_3^2}{k_1^2 k_2^2} - 2\left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} + \frac{1}{k_3^2}\right) \right] \frac{1}{a^2} \\ & = \frac{1}{F_R} (\mu^m + p^m) + \frac{1}{3} \left(3 + \frac{v_1^2}{k_1^2} + \frac{v_2^2}{k_2^2} + \frac{v_3^2}{k_3^2}\right) Y \end{aligned} \quad (4.150)$$

Öte yandan, (4.96), (4.99) ve (4.110) denklemlerinin bu model için de geçerli olduğunu aklımızda tutalım. Bu denklem sisteminin tutarlılığını yine üç durumda inceliyoruz:

1. $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$: Önce, $k_2 = k_3$ olduğunda (4.148.a) ve (4.149.e) denklemlerinin,

sırasıyla $Y = \frac{k_1^2}{2k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} > 0$ ve $Y = -\frac{1}{2k_1^2} \frac{1}{a^2} < 0$ bağıntılarına yol açtığını not edelim.

Bu ikisinin ortak çözümü $Y = 0$ olur ki, bu $k_1 \neq 0$ varsayımıyla çelişir. Benzer şekilde, $k_3 = k_1$ olamaz. Aksi takdirde, (4.148.b) ve (4.149.f) den aynı anda $Y > 0$ ve $Y < 0$ olması sonucu çıkar. Öte yandan, eğer $X = 0$ ise, bu takdirde tekrar (4.148.a) ve (4.149.e) yi kullanarak benzer çelişki elde ederiz. Dolayısıyla, denklem sisteminin ilk tutarlılık koşulları $k_1 \neq k_2 \neq k_3$ ve $X \neq 0$ olmalıdır. Şimdi v_α lar üzerine herhangi bir koşul gelip gelmeyeceğine bakalım. (4.149.e) ve (4.149.f) denklemlerini (4.149.d) den çıkarırsak, sırasıyla

$$\left[\frac{v_3}{v_1 v_2} \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_3^2} \right) - \frac{v_1}{v_2 v_3} \left(\frac{k_2^2 - k_3^2}{k_1^2} \right) \right] X = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_3^2} - \frac{1}{k_1^2} \right) \frac{1}{a^2} \quad (4.151)$$

ve

$$\left[\frac{v_3}{v_1 v_2} \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_3^2} \right) - \frac{v_2}{v_3 v_1} \left(\frac{k_3^2 - k_1^2}{k_2^2} \right) \right] X = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_3^2} - \frac{1}{k_2^2} \right) \frac{1}{a^2} \quad (4.152)$$

buluruz. Eşitliklerin her iki tarafı da sıfırdan farklı olduğundan, bunları taraf tarafa böler ve düzenlersek

$$(k_2^2 - k_3^2)^2 v_1^2 + (k_3^2 - k_1^2)^2 v_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)^2 v_3^2 = 0 \quad (4.153)$$

elde ederiz. Bu denklem ancak ve ancak $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ olması halinde sağlanır. Oysa bu, bizim başlangıç varsayımımız olan $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$ ile çelişir. Dolayısıyla, göz önüne alınan durum için yukarıdaki (4.148.a)-(4.149.f) denklem sistemi tutarlı değildir.

2. $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 = 0$: Bu durumda (4.148.a)-(4.148.c) sisteminin ilk üç denklemi

$$\frac{k_1^2}{2k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} = Y, \quad \frac{k_2^2}{2k_3^2 k_1^2} \frac{1}{a^2} = Y, \quad \frac{v_1 v_2}{k_3} \left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2} \right) X = 0 \quad (4.154)$$

denklemlerine indirgenir. Bunlar birbirleriyle ancak ve ancak $k_1 = k_2$ ve $Y > 0$ olduğunda tutarlıdır. Fakat $k_1 = k_2$ için (4.149.d) denklemi $-1/(2k_3^2 a^2) = Y < 0$ olur ki, bu $Y > 0$ ile çelişir.

3. $v_1 \neq 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$: Bu durumda, (4.148.b), (4.148.c), (4.149.d), (4.149.f) denklemleri özdeş olarak sağlanır ve dolayısıyla yalnızca aşağıdaki gibi sadeleşen (4.148.a), (4.149.a,b,c,e) denklemleri kalır.

$$\frac{k_1^2}{2k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} = Y \quad (4.155)$$

$$\left(\frac{2k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} - \frac{k_2^2}{k_3^2 k_1^2} - \frac{k_3^2}{k_1^2 k_2^2} + \frac{2}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} = \frac{2v_1^2}{k_1^2} Y \quad (4.156.a)$$

$$\left(\frac{2k_2^2}{k_3^2 k_1^2} - \frac{k_3^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{2k_1^2 - v_1^2}{2k_2^2 k_3^2} + \frac{2}{k_2^2} - \frac{1}{k_3^2} - \frac{1}{k_1^2}\right) \frac{1}{a^2} = -\frac{v_1^2}{k_1^2} Y \quad (4.156.b)$$

$$\left(\frac{2k_3^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{2k_1^2 - v_1^2}{2k_2^2 k_3^2} - \frac{k_2^2}{k_3^2 k_1^2} + \frac{2}{k_3^2} - \frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2}\right) \frac{1}{a^2} = -\frac{v_1^2}{k_1^2} Y \quad (4.156.c)$$

$$\left(\frac{k_2}{k_3 k_1} - \frac{k_3}{k_1 k_2}\right) \frac{v_1}{k_1} X = 0 \quad (4.156.d)$$

(4.155) ve (4.156.d) nin birbirleriyle tutarlı olması için ya a) $Y > 0$ ve $k_2 = k_3$ ya da b) $Y > 0$ ve $X = 0$ olmalıdır.

(a) $Y > 0$ ve $k_2 = k_3$: (4.156.a)-(4.156.c) denklemleri, bu takdirde şu

$$(2k_1^4 - 2k_1^2 k_2^2 - k_1^2 v_1^2) \frac{1}{a^2} = 2v_1^2 k_2^4 Y \quad (4.157)$$

tek denkleme indirgenir; buna da (4.155) ten Y yerleştirilirse

$$v_1^2 = k_1^2 - k_2^2 \quad (4.158)$$

gibi bir başka tutarlılık koşulunu verir ki, bu da $k_1 > k_2 = k_3$ koşuluna yol açar. q_α ve $\pi_{\alpha\beta}$ lı anahtar denklemlerden oluşan sistemde, şimdi, özdeş olarak sıfır olmayan yegane denklemin (4.155) olduğunu aklımızda tutarak, (4.150) ile verilen diğer anahtar denklemini göz önüne alalım. Bu, v_1^2 için (4.158) kullanılırsa

$$\frac{1}{6} \frac{4k_1^2 - k_2^2}{k_2^4} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{F_R} (\mu^m + p^m) + \frac{1}{3} \frac{4k_1^2 - k_2^2}{k_1^2} Y \quad (4.159)$$

şekline indirgenir. Bu da Y için (4.155) kullanılırsa

$$\frac{1}{F_R} (\mu^m + p^m) = 0 \quad (4.160)$$

denklemine yol açar ki, $\mu^m + p^m \neq 0$ varsayımı ile bir çelişki ortaya çıkar.

(b) $Y > 0$ ve $X = 0$: Bu alt durumda, özdeş olarak sıfır olmayan denklemler (4.155), (4.156.a), (4.156.b) ve (4.156.c) dir. (4.156.c) yi (4.156.b) den çıkararak

$$3(k_2^2 - k_3^2)(k_2^2 + k_3^2 - k_1^2) = 0 \quad (4.161)$$

elde ederiz ve bu da $k_2 = k_3$ veya $k_1^2 = k_2^2 + k_3^2$ verir. $k_2 = k_3$ durumu $Y > 0$ durumuyla birlikte biraz önce incelenmişti. Dolayısıyla, şimdi yalnızca $k_2 \neq k_3$, $k_1^2 = k_2^2 + k_3^2$ olan son durumu göz önüne almamız gerekmektedir. Bu durumda, (4.156.a) denklemi, (4.155) teki Y kullanılırsa

$$v_1^2 = \frac{2k_2^2 k_3^2}{k_2^2 + k_3^2} \quad (4.162)$$

koşuluna yol açar. Dolayısıyla, yukarıdaki (4.148.a)-(4.149.f) ile gösterilen dokuz denklemden oluşan kümenin tutarlılık koşulu şu şekilde özetlenebilir: $Y = Y(t) > 0$,

$X = 0$, $k_2 \neq k_3$, $k_1^2 = k_2^2 + k_3^2$ ve $v_1^2 = \frac{2k_2^2 k_3^2}{k_2^2 + k_3^2}$. Bu koşullar (4.150) de kullanılırsa

$$\frac{1}{F_R}(\mu^m + p^m) = -\frac{1}{2} \frac{(k_2^2 - k_3^2)^2}{k_2^2 k_3^2 (k_2^2 + k_3^2)} \frac{1}{a^2} < 0 \quad (4.163)$$

elde edilir. Öte yandan (4.110) denkleminde $\dot{a} \neq 0$ olduğunda $\mu^m + p^m = \frac{C}{a^4}$

olduğunu biliyoruz. Bunu, yukarıdaki denklemde kullanırsak

$$F_R = -\frac{2Ck_2^2 k_3^2 (k_2^2 + k_3^2)}{(k_2^2 - k_3^2)^2} \frac{1}{a^2} \quad (4.164)$$

buluruz. O halde şimdi yapılacak iş $F(R)$ nin fonksiyonel formunu bulmak olacaktır. Yukarıdaki koşullar altında, (4.147)

$$R = 6 \frac{k_2^4 + k_3^4}{(k_2^2 + k_3^2)^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{3}{k_2^2 + k_3^2} \frac{1}{a^2} \quad (4.165)$$

ifadesine indirgenir. Öte yandan, $X = 0$ denkleminin zaman türevini göz önüne alalım. Bu, daha önce (4.111) denklemiyle

$$0 = \dot{X} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} Y - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \quad (4.166)$$

biçiminde verilmişti. Buradan ise,

$$Y = 6 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad (4.167)$$

sonucu çıkar. Bunu, (4.155) denklemiyle karşılaştırsak

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{12} \frac{k_2^2 + k_3^2}{k_2^2 k_3^2} = \text{sabit} \quad (4.168)$$

olması gerektiğini buluruz. Bu da integre edildiğinde

$$a(t) = At, \quad A = A(k_2, k_3) \equiv \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}{k_2 k_3} \quad (4.169)$$

olur (burada genelliği bozmadan integrasyon sabiti sıfır alınmıştır). Bu ise, $\ddot{a} = 0$ bağıntısına yol açar. Bununla birlikte (4.168) denklemi de göz önüne alınırsa (4.165) denklemi

$$R = \frac{1}{2} \frac{k_2^4 + k_3^4 + 6k_2^2 k_3^2}{(k_2^2 + k_3^2) k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} \quad (4.170)$$

biçiminde sadeleşir. Bu kullanılınc (4.164) denklemi

$$F_R(R) = - \frac{4Ck_2^4 k_3^4 (k_2^2 + k_3^2)^2}{(k_2^2 - k_3^2)^2 (k_2^4 + k_3^4 + 6k_2^2 k_3^2)} R \quad (4.171)$$

olur ve bunun da integrasyonundan, integral sabitini -2Λ biçiminde yazarak

$$F(R) = -CY^2 R^2 - 2\Lambda, \quad Y^2 \equiv \frac{2k_2^4 k_3^4 (k_2^2 + k_3^2)^2}{(k_2^2 - k_3^2)^2 (k_2^4 + k_3^4 + 6k_2^2 k_3^2)} \quad (4.172)$$

elde edilir. O halde, denklemlerde bir tutarsızlığa rastlamadan, zamana bağlı bir ölçek çarpanı bulmuş ve bir $F(R)$ -gravite modeli oluşturmuş oluyoruz. μ^m ve p^m nin ayrıntılarını bilmek için önce (4.96) ve (4.99) denklemlerinin (4.110) kullanılarak integrasyonunun $\mu^m = 3C / (4a^4) - \text{sabit}$ ve $p^m = C / (4a^4) + \text{sabit}$ verdiğiine işaret edelim. Sabit'in değerini bulmak için $\mu^m = F_R(\mu^t - \mu^R)$ ve $p^m = F_R(p^t - p^R)$ şeklinde yazılabilecek (4.83.a) ve (4.83.b) denklemlerini kullanalım. Basit ama uzun hesaplardan sonra μ^t , μ^R , p^t ve p^R (sırasıyla (4.136), (4.141), (4.137), (4.142) denklemleri) dinamik büyüklükleri ile yukarıdaki (4.169) ve (4.172) denklemleri kullanılırsa

$$\mu^m(t) = \frac{3C}{4a^4(t)} - \Lambda, \quad p^m(t) = \frac{C}{4a^4(t)} + \Lambda \quad (4.173)$$

bulunur. Bunlardan ise, $a(t)$ yi eleyerek

$$p^m(t) - \Lambda = \frac{1}{3}(\mu^m(t) + \Lambda) \quad (4.174)$$

bulunur. Bu ise, $p^m = p^m(\mu^m)$ biçiminde bir barotropik hal denklemdir. Vardığımız sonucun tartışmasını §5'e bırakarak, burada yalnızca şu iki duruma kısaca değinelim: Birincisi, yukarıdaki modelin koşulları kullanılarak (4.146) dan gravito-elektrik ve gravito-magnetik alanlar hesaplanırsa

$$E_{\alpha\beta} = 0, \quad H_{23} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{k_2^2 - k_3^2}{k_2 k_3 (k_2^2 + k_3^2)} \frac{1}{a^2(t)} \quad (4.175)$$

bulunur. Bu, vardığımız modelin salt bir gravito-magnetik çözüm ($E_{\alpha\beta} = 0 \neq H_{\alpha\beta}$) olduğunu göstermektedir. İkincisi ise, GRT'de dönen Bianchi-tip IX modeli olup olmadığı meselesidir. O halde, $F(R)$ yi $F_R(R) = R - 2\Lambda$ alalım. $F_R = 1$ ve $F_{RR} = F_{RRR} = 0$ olacağından X ve Y , $X = \frac{\dot{a}}{a^2}$ ve $Y = 2(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2})$ ifadelerine indirgenir (burada hala $a = a(t)$ varsaymaktayız). Bu aşamada, yalnızca 3. durumu göz önüne almamız gerekir. Zira, 1. ve 2. durumlarda denklemlerin tutarsızlığı X ve Y yardımcı fonksiyonlarının özel formlarına bağlı olmaksızın ortaya çıkmıştı. Dolayısıyla, bu durumlar için yapılan

inceleme GRT durumuna da uygulanabilir. O halde, 3. durumdan yola çıkıyoruz. Öncelikle, 3.(b) alt durumunu tanımlayan $X = 0$ ve $Y > 0$ bağıntılarının hemen yukarıda yazmış olduğumuz X ve Y nin ifadeleriyle tutarlı olmadığını belirtelim. Zira, birinci bağıntı $a = \text{sabit}$ verir ki, bu Y nin sıfır olmasına yol açar ve bu da $Y > 0$ ile çelişir. Dolayısıyla bu alt durumda stasyoner modelin varlığına bile izin yoktur. Şimdi, $Y > 0$ ve $k_2 = k_3$ ve de ek olarak $v_1^2 = k_1^2 - k_2^2$ ile tanımlanan 3.(a) alt durumunu göz önüne alalım. Bu takdirde Y nin ifadesini (4.155) denkleminde kullanırsak

$$2\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = \frac{k_1^2}{2k_2^4} \frac{1}{a^2} \quad (4.176)$$

gibi ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem elde ederiz. Bu ise integre edildiğinde, c_1 ve c_2 iki integrasyon sabiti olmak üzere,

$$a(t) = \frac{k_1}{2k_2^2 c_1} \cosh(c_1 t + c_2) \quad (4.177)$$

çözümünü verir. O halde, görünüşe göre, GRT’de makaslamasız dönen ve genişleyen bir model olduğu anlamına gelen, zamana bağlı bir $a(t)$ ölçek çarpanı bulmuş oluyoruz. Fakat, maalesef, durum böyle değildir. Zira, mükemmel akışkan, (4.173) ün elde edilmesine benzer tarzda hesaplanabilecek $\mu^m = 3k_2^2 / k_1^2 - \Lambda$ ve $p^m = -3k_2^2 / k_1^2 + \Lambda$ bağıntıları kullanılarak da doğrulanabilecek, (4.160) denkleminde uymalıdır. Bu ise, makaslamasız akışkan iddiasının temelindeki $\mu^m + p^m \neq 0$ koşulunu ihlal etmektedir. O halde, Bianchi-tip IX modelinin bu özel formu makaslamasız akışkan iddiasının GRT’de geçerliliğini destekleyen bir başka somut örneği oluşturmaktadır.

4.2.2. F(G)-gravitede Makaslamasız Akışkan İddiası

Söz konusu iddiayı bu sefer $F(G)$ -gravite teorisi çerçevesinde ele alıyoruz. $F(R)$ -gravitede izlediğimiz yola benzer tarzda, bu teori için de, makaslamasız genişleyen Gödel evreni ile, dönen Bianchi-tip IX modelinin $F(G)$ -gravitenin mükemmel akışkanlı alan denklemleri tarafından çözüm olarak kabul edilip edilmediğini araştıracağız. Bu iş için kullanacağımız denklemler $F(R,G)=R+F(G)$ özel durumuna indirgenmiş olan tetrad formdaki (4.38)-(4.41) denklemleri olacaktır.

4.2.2.1. Gödel Tip Genişleyen Kozmolojik Model

Bu modelin kinematik büyüklükleri ile, efektif toplam dinamik büyüklükleri önceki alt bölümde hesaplanmıştır (bkz. (4.87), (4.88), (4.91), (4.94) ve (4.95) denklemleri). Burada hesaplamamız gerekenler yalnızca, G üst indisi ile göstereceğimiz efektif akışkanın μ^G , p^G , q_α^G ve $\pi_{\alpha\beta}^G$ efektif dinamik büyüklükleri olacaktır. Bunları, $F(R)$ -gravitedekine benzer tarzda, (4.38)-(4.41) den hareketle, ve

$$X \equiv \dot{F}_G = F_{GG} \dot{G} \quad , \quad Y \equiv \ddot{F}_G = F_{GG} \ddot{G} + F_{GGG} \dot{G}^2 \quad (4.179)$$

bağıntıları aracılığıyla X ve Y gibi zamana bağlı iki fonksiyon tanımlayarak, aşağıdaki gibi bulmaktayız:

$$q_1^G = \frac{2KS}{(S+K)^2} \frac{m}{a} \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) X + \frac{\dot{a}}{a} Y \right] \quad (4.180.a)$$

$$q_2^G = -2 \sqrt{\frac{S}{S+K}} \frac{\dot{a}}{a} \left\{ \frac{2K}{S+K} \left[\left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{S}{S+K} \frac{m^2}{a^2} \right] X + \frac{2K}{S+K} \frac{\dot{a}}{a} Y \right\} \quad (4.180.b)$$

$$q_3^G = 0 \quad (4.180.c)$$

$$\begin{aligned} \pi_{11}^G = \frac{1}{3(S+K)} & \left\{ \left[-\frac{4KS}{S+K} \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{S(K+2S)}{S+K} \frac{m^2}{a^2} \right] \frac{\dot{a}}{a} X \right. \\ & \left. + \left[-\frac{4KS}{S+K} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K(4K+5S)}{S+K} \frac{m^2}{a^2} \right] Y \right\} \end{aligned} \quad (4.181.a)$$

$$\begin{aligned} \pi_{22}^G = \frac{1}{3(S+K)} & \left\{ \left[\frac{8KS}{S+K} \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{S(K-4S)}{S+K} \frac{m^2}{a^2} \right] \frac{\dot{a}}{a} X \right. \\ & \left. + \left[\frac{8KS}{S+K} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K(4K+5S)}{S+K} \frac{m^2}{a^2} \right] Y \right\} \end{aligned} \quad (4.181.b)$$

$$\begin{aligned} \pi_{33}^G = \frac{1}{3(S+K)} & \left\{ \left[-\frac{4KS}{S+K} \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{2S(K-S)}{S+K} \frac{m^2}{a^2} \right] \frac{\dot{a}}{a} X \right. \\ & \left. + \left[-\frac{4KS}{S+K} \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2K(4K+5S)}{S+K} \frac{m^2}{a^2} \right] Y \right\} \end{aligned} \quad (4.181.c)$$

$$\pi_{12}^G = -2\sqrt{\frac{S}{S+K}} \frac{K}{S+K} \frac{m}{a} \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) X + \frac{\dot{a}}{a} Y \right] \quad (4.181.d)$$

Bunlar, (4.83) ile verilen (artık R üst indisi yerine G üst indisi kullanılacağı açıktır) anahtar denklemlere yerleştirilirse, sonuçta tutarlılığı incelenecek denklem sistemini aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$q_1^t = q_1^G :$$

$$-\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2K}{(K+S)} \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) X + \frac{\dot{a}}{a} Y \right] \quad (4.182.a)$$

$$q_2^t = q_2^G :$$

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = -\frac{2K}{K+S} \left\{ \left[\left(2\frac{\ddot{a}}{a} - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{S}{K+S} \frac{m^2}{a^2} \right] X + \frac{\dot{a}}{a} Y \right\} \frac{\dot{a}}{a} \quad (4.182.b)$$

$$\pi_{11}^t = \pi_{11}^G :$$

$$\begin{aligned} 2S \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{2K+S}{2} \frac{m^2}{a^2} = & \left[-\frac{4KS}{S+K} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{S(K+2S)}{S+K} \frac{m^2}{a^2} \right] \frac{\dot{a}}{a} X \\ & + \left[-\frac{4KS}{S+K} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K(4K+5S)}{S+K} \frac{m^2}{a^2} \right] Y \end{aligned} \quad (4.183.a)$$

$$\pi_{22}^t = \pi_{22}^G :$$

$$\begin{aligned} -4S \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{2K+S}{2} \frac{m^2}{a^2} = & \left[\frac{8KS}{S+K} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{S(K-4S)}{S+K} \frac{m^2}{a^2} \right] \frac{\dot{a}}{a} X \\ & + \left[\frac{8KS}{S+K} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K(4K+5S)}{S+K} \frac{m^2}{a^2} \right] Y \end{aligned} \quad (4.183.b)$$

$$\pi_{33}^t = \pi_{33}^G :$$

$$2S\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) + (2K + S)\frac{m^2}{a^2} = \left[-\frac{4KS}{S+K}\left(2\frac{\ddot{a}}{a} - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) + \frac{2S(K-S)}{S+K}\frac{m^2}{a^2} \right] \frac{\dot{a}}{a} X + \left[-\frac{4KS}{S+K}\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2K(4K+5S)}{S+K}\frac{m^2}{a^2} \right] Y \quad (4.183.c)$$

$$\pi_{12}^t = \pi_{12}^G :$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = -2\frac{K}{S+K} \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)X + \frac{\dot{a}}{a}Y \right] \quad (4.183.d)$$

Hemen görüldüğü gibi (4.182.a) ve (4.183.d) denklemleri birbirinin aynısıdır. $\pi_{\alpha\beta}$ izsiz olduğu için ($\pi_{\alpha}^{\alpha} = 0$), (4.183.a)-(4.183.c) denklemlerinden yalnızca ikisi bağımsızdır. Ayrıca (4.183.a) denkleminin (4.183.b) nin çıkarılmasıyla (4.182.b) denklemi, (4.183.c) nin çıkarılmasıyla da

$$\frac{2K+S}{2} = -\frac{3SK}{S+K}\frac{\dot{a}}{a}X + \frac{3K(4K+5S)}{S+K}Y \quad (4.184)$$

elde edilir. Dolayısıyla üç bağımsız denklemden oluşan ve $X \neq 0$ ve $Y \neq 0$ olmak üzere, X ve Y ye göre lineer olan bu denklem sistemi çeşitli şekillerde çözülebilir. İstenirse (4.182.a), (4.182.b), (4.183.a) ve (4.183.c) denklemlerinden X ve Y bulunabilir. Biz, (4.182.a) ve (4.182.b) ile (4.183.a) ve (4.183.b) yi kullanıyoruz. X ve Y yi (4.182.a) ve (4.182.b) den

$$X = -\frac{(K+S)\left(-\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)}{\frac{\dot{a}}{a}\left(-2K\frac{\ddot{a}}{a} + 8K\frac{\dot{a}^2}{a^2} - S\frac{m^2}{a^2}\right)} \quad (4.185)$$

$$Y = -\frac{1}{2} \frac{(K+S)\left(2K\frac{\ddot{a}^2}{a^2} + 4K\frac{\dot{a}^4}{a^4} - 4K\frac{\ddot{a}}{a}\frac{\dot{a}^2}{a^2} - S\frac{\dot{a}^2}{a^2}\frac{m^2}{a^2}\right)}{\frac{\dot{a}^2}{a^2}K\left(-2K\frac{\ddot{a}}{a} + 8K\frac{\dot{a}^2}{a^2} - S\frac{m^2}{a^2}\right)} \quad (4.186)$$

biçiminde ve (4.183.a) ve (4.183.b) den de

$$X = -\frac{(K+S)\left[-(4K+5S)\frac{\ddot{a}}{a}+6(K+S)\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right]}{\frac{\dot{a}}{a}\left[-4K(4K+5S)\frac{\ddot{a}}{a}+4K(7S+6K)\frac{\dot{a}^2}{a^2}-S(4K+5S)\frac{m^2}{a^2}\right]} \quad (4.187)$$

$$Y = -\frac{1}{2}\frac{(K+S)\left[-2K(4K+3S)\frac{\ddot{a}}{a}+4K(3K+2S)\frac{\dot{a}^2}{a^2}-S(2K+S)\frac{m^2}{a^2}\right]}{K\left[-4K(4K+5S)\frac{\ddot{a}}{a}+4K(7S+6K)\frac{\dot{a}^2}{a^2}-S(4K+5S)\frac{m^2}{a^2}\right]} \quad (4.188)$$

biçiminde buluyoruz. Denklem sisteminin tutarlılığı için her iki denklem çiftinden bulunan X ve Y ifadeleri aynı olmalıdır. Yani, Δ ile bunların farkları gösterilirse,

$$\Delta X = \frac{2(K+S)\left[-K(4K+5S)\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2+2K(3K+4S)\frac{\dot{a}^2}{a^2}\frac{\ddot{a}}{a}-4KS\frac{\dot{a}^4}{a^4}+S(K+2S)\frac{\dot{a}^2}{a^2}\frac{m^2}{a^2}\right]}{\frac{\dot{a}}{a}\left(2K\frac{\ddot{a}}{a}-8K\frac{\dot{a}^2}{a^2}+S\frac{m^2}{a^2}\right)\left[4K(4K+5S)\frac{\ddot{a}}{a}-4K(7S+6K)\frac{\dot{a}^2}{a^2}+S(4K+5S)\frac{m^2}{a^2}\right]} = 0 \quad (4.189)$$

$$\Delta Y = \left\{ (K+S)\left[-K(4K+5S)\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2+2K(3K+4S)\frac{\dot{a}^2}{a^2}\frac{\ddot{a}}{a}-4KS\frac{\dot{a}^4}{a^4}+S(K+2S)\frac{\dot{a}^2}{a^2}\frac{m^2}{a^2}\right] \right. \\ \left. \cdot \left[-4K\frac{\ddot{a}}{a}+6K\frac{\dot{a}^2}{a^2}-S\frac{m^2}{a^2}\right] \right\} / \left\{ K\frac{\dot{a}^2}{a^2}\left(-2K\frac{\ddot{a}}{a}+8K\frac{\dot{a}^2}{a^2}-S\frac{m^2}{a^2}\right) \cdot \right. \\ \left. \left[-4K(4K+5S)\frac{\ddot{a}}{a}+4K(7S+6K)\frac{\dot{a}^2}{a^2}-S(4K+5S)\frac{m^2}{a^2}\right] \right\} = 0 \quad (4.190)$$

olmalıdır. Bu her iki denklemin de sağlanması için, hemen görüleceği üzere

$$-K(4K+5S)\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2+2K(3K+4S)\frac{\dot{a}^2}{a^2}\frac{\ddot{a}}{a}-4KS\frac{\dot{a}^4}{a^4}+S(K+2S)\frac{\dot{a}^2}{a^2}\frac{m^2}{a^2}=0 \quad (4.191)$$

olması gerekmektedir. Bu, yukarıdaki denklem sisteminin tutarlılık koşulunu oluşturmaktadır. Bu denklemi, $\frac{\ddot{a}}{a}$ ya göre ikinci dereceden bir polinom biçiminde düzenleyelim:

$$-K(4K+5S)\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 + 2K(3K+4S)\frac{\dot{a}^2}{a^2}\frac{\ddot{a}}{a} + \left[-4KS\frac{\dot{a}^2}{a^2} + S(K+2S)\frac{m^2}{a^2}\right]\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 0 \quad (4.192)$$

Bu diferansiyel denklem $\frac{\ddot{a}}{a}$ ya göre çözüldüğünde, Δ ile

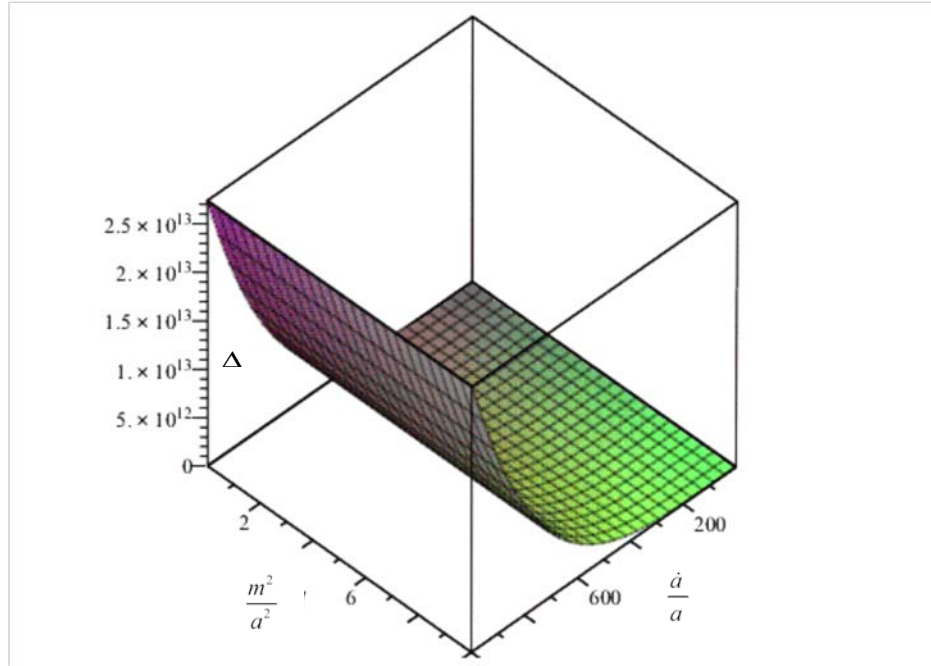
$$\Delta = K\frac{\dot{a}^2}{a^2}\left[K(9K^2+8KS-4S^2)\frac{\dot{a}^2}{a^2} + S(4K^2+13KS+10S^2)\frac{m^2}{a^2}\right] \quad (4.193)$$

diskriminantı gösterilmek üzere,

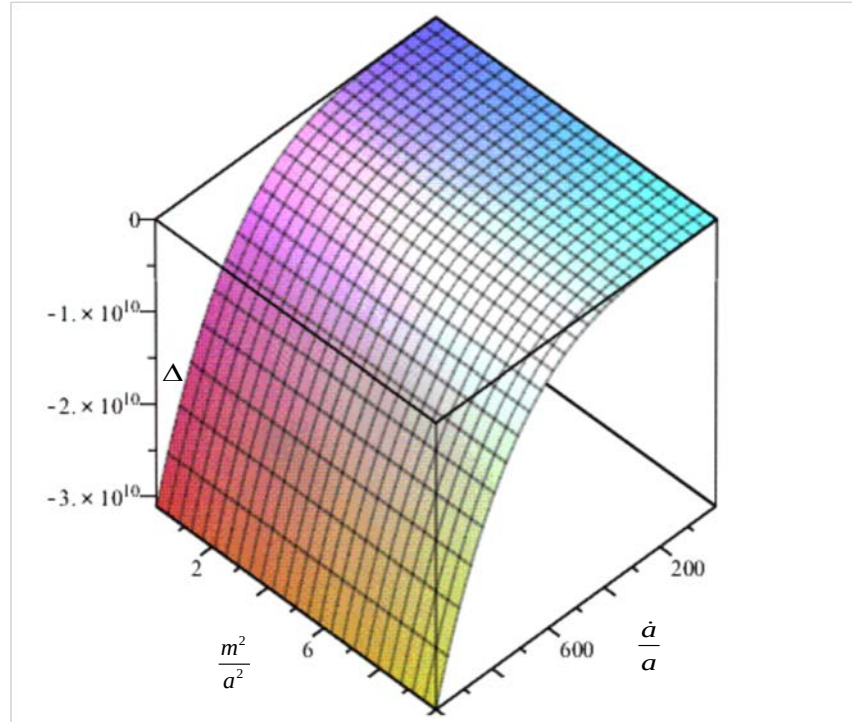
$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{K(4K+5S)}\left[K(3K+4S)\frac{\dot{a}}{a} \pm \Delta^{1/2}\right] \quad (4.194)$$

elde edilir. $\frac{\ddot{a}}{a}$ reel olduğundan, çözümün olması için $\Delta \geq 0$ olması gerektiği aşikardır.

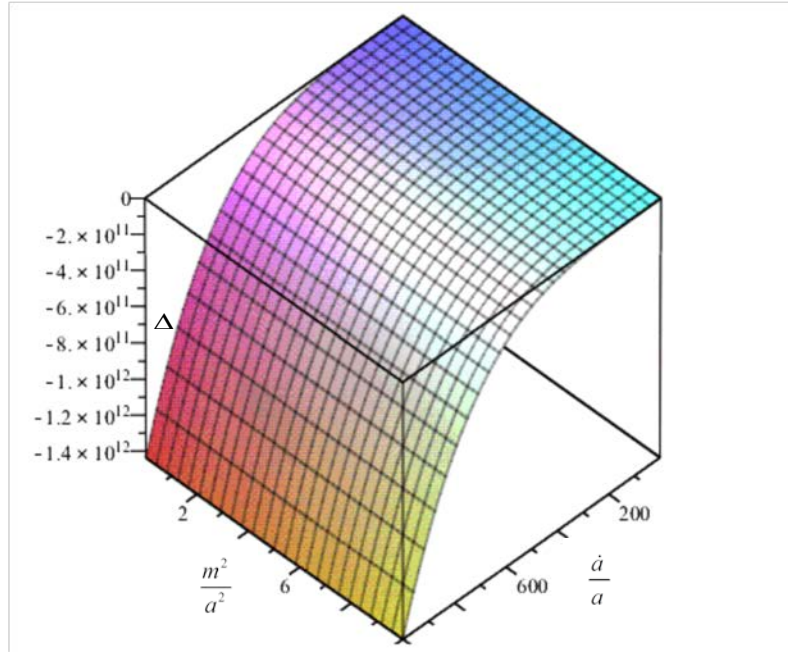
$\Delta > 0$ için bu denklemin çözümleri Lambert W [83] fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir, LambertW fonksiyonlarını kullanmak analitik hesap sürdürmek için hiç de işlevsel olmadığından sayısal hesaba başvurmak durumundayız. Bu aşamada önce şuna işaret edelim: $K+S > 0$ ve $S > 0$ koşullarından $K+2S > 0$ ya da, $\varepsilon > 1$ olmak üzere, $K = -2S + \varepsilon S$ olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Eğer, bu koşulu sağlayan çeşitli K ve S değerleri için, Δ diskriminantının $\frac{\dot{a}}{a}$ ve $\frac{m^2}{a^2}$ ye göre grafiği çizdirilirse Δ nın sıfır olabileceği gibi, pozitif veya negatif değerler de alabileceği görülmektedir (bkz. Şekil 1 ve Şekil 2). Özel olarak, orijinal stasyoner Gödel evreninin, ölçek çarpanının $a(t)$ şeklinde zamanın fonksiyonu alınarak stasyoner olmayan duruma genelleştirilmesi Krechet-Gödel evreni olarak adlandırılır [20]. Bu modeli tanımlayan $K = -1/2$ ve $S = 1$ değerlerinin (4.193) diskriminantını negatif yaptığı, dolayısıyla böyle bir evren modelinin $F(G)$ -gravite teorisinin alan denklemlerinin bir çözümü olmadığı grafik olarak açıkça görülmektedir (bkz. Şekil 3).



Şekil 4.1: $K=13/10$, $S=3/2$ için Δ yüzeyi



Şekil 4.2: $S=1$, $K=2$ için Δ yüzeyi



Şekil 4.3: $S=1, K=-1/2$ (Krechet-Gödel evreni) için Δ yüzeyi

Şimdi, (4.194) denkleminde geri dönelim. Bunun $a(t) \neq \text{sabit}$ olacak şekilde bir özel çözümünün var olup olmayacağını araştıralım. Eğer, özel olarak $\frac{\ddot{a}}{a} = 0$ alınırsa c_1 ve c_2 integrasyon sabitleri olmak üzere,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = 0 \Rightarrow a(t) = c_1 t + c_2 \quad (4.195)$$

olur. Gerçekten de, (4.194) ten, $\ddot{a} = 0$ ve $\frac{\dot{a}}{a} \neq 0$ olduğunda,

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{K + 2S}{4K} \frac{m^2}{a^2} \quad (4.196)$$

olması gerektiği bulunur. Buradan da, $\frac{\dot{a}}{a}$ nın reel olması için, $K + 2S > 0$ olduğundan, $K > 0$ koşuluna ulaşılır. Dolayısıyla, eğer yalnızca genişleyen evren çözümü istenirse

$$\dot{a}(t) = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{K+2S}{K}} \quad (4.197)$$

olur, ki bunun da integrasyonu

$$a(t) = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{K+2S}{K}} t + c_2 \quad (4.198)$$

verir (genelliği bozmadan integrasyon sabiti $c_2 = 0$ alınabilir). Bu aşamada, yukarıdaki denklem sisteminin tutarlılık durumunu bozmayan, zamana bağlı bir $a(t)$ ölçek çarpanı bulmuş duruma gelmiş gibiyiz. Ancak, (4.198) çözümünü, Gauss-Bonnet teriminin EK C'deki (C.24) ten hesaplanacak

$$G = -\frac{2K}{S+K} \frac{\ddot{a}}{a} \left[\frac{-12K}{S+K} \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{4K+5S}{2(K+S)} \frac{m^2}{a^2} \right] \quad (4.199)$$

ifadesinden hareketle elde edilmiş

$$\begin{aligned} \dot{G} = -\frac{2K}{S+K} \left\{ \frac{\ddot{a}}{a} \left[\frac{-12K}{S+K} \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{4K+5S}{2(K+S)} \frac{m^2}{a^2} \right] \right. \\ \left. - \frac{\ddot{a}}{a^2} \left[\frac{-12K}{S+K} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{4K+5S}{2(K+S)} \frac{m^2}{a^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.200)$$

türev ifadesine yerleştirdiğimizde her t için $\dot{G} = 0$ buluruz ki, bu (4.179) dan dolayı $X = 0$ sonucuna yol açar. Bu ise, başlangıç kabulü olan $X \neq 0$ koşuluyla bir çelişki oluşturur. Bu sonucun ışığında, böyle bir modelde aynı anda hem dönen hem de genişleyen bir evren çözümünün var olamayacağı anlaşılmaktadır.

4.2.2.2. Dönmeli Bianchi-tip IX Model

Şimdi, benzer incelemeyi dönen Bianchi-tip IX modeli için ele alalım. $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$ genel durumu çok uzun denklemlere yol açtığından burada makaslamasız mükemmel akışkan iddiasını yalnızca $v_2 = v_3 = 0$ durumu için inceleyeceğiz. Bu model için, $v_2 = v_3 = 0$ olduğunda, efektif akışkanın μ^G , p^G , q_α^G ve

$\pi_{\alpha\beta}^G$ efektif dinamik büyüklüklerini, (4.179) ile tanımlanan X ve Y cinsinden, aşağıdaki gibi bulmaktayız:

$$\begin{aligned} \mu^G = & \left[8 \frac{v_1^2}{k_1^2} \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \frac{\ddot{a}}{a} - 12 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right. \\ & \left. + \left(\frac{k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{k_2^2}{k_1^2 k_3^2} + \frac{k_3^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{2}{k_1^2} - \frac{2}{k_2^2} - \frac{2}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right] \frac{\dot{a}}{a} X \quad (4.201) \\ & + \frac{v_1^2}{k_1^2} \left[4 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \left(-3 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{k_2^2}{k_1^2 k_3^2} + \frac{k_3^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{2}{k_1^2} + \frac{2}{k_2^2} + \frac{2}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right] Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^G = & \left\{ 8 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{v_1^2}{k_1^2} \left[-\frac{8}{3} \left(\frac{5k_1^2 - 2v_1^2}{k_1^2} \right) \frac{\ddot{a}}{a} - 4 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} - \frac{k_2^2}{k_1^2 k_3^2} - \frac{k_3^2}{k_1^2 k_2^2} + \frac{2}{k_1^2} - \frac{2}{k_2^2} - \frac{2}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right] \right\} \frac{\dot{a}}{a} X \quad (4.202) \\ & + \left\{ 4 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{v_1^2}{k_1^2} \left[-\frac{4}{3} \left(\frac{5k_1^2 - 2v_1^2}{k_1^2} \right) \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{3} \frac{k_1^2 - 2v_1^2}{k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{k_1^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{k_2^2}{k_1^2 k_3^2} + \frac{k_3^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{2}{k_1^2} - \frac{2}{k_2^2} - \frac{2}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right\} Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1^G = & -\frac{v_1}{k_1} \left[4 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} - \frac{k_2^2}{k_1^2 k_3^2} - \frac{k_3^2}{k_1^2 k_2^2} + \frac{2}{k_1^2} - \frac{2}{k_2^2} - \frac{2}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right] \frac{\dot{a}}{a} X \quad (4.203.a) \\ & - \frac{v_1}{k_1} \left[4 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \left(-3 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{k_2^2}{k_1^2 k_3^2} + \frac{k_3^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{2}{k_1^2} + \frac{2}{k_2^2} + \frac{2}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right] Y \end{aligned}$$

$$q_2^G = 0 \quad , \quad q_3^G = 0 \quad (4.203.b)$$

$$\begin{aligned} \pi_{11}^G = & \frac{2}{3} \frac{v_1^2}{k_1^2} \left[4 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} - \frac{4k_2^2}{k_1^2 k_3^2} - \frac{4k_3^2}{k_1^2 k_2^2} + \frac{8}{k_1^2} - \frac{2}{k_2^2} - \frac{2}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right] \frac{\dot{a}}{a} X \quad (4.204.a) \\ & + \frac{2}{3} \left[\frac{v_1^2}{k_1^2} \left(4 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{5k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} \right) \right. \\ & \left. + \left(-\frac{4k_1^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{2k_2^2}{k_1^2 k_3^2} + \frac{2k_3^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{4}{k_1^2} + \frac{2}{k_2^2} + \frac{2}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right] Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{22}^G = & -\frac{1}{3} \frac{v_1^2}{k_1^2} \left[4 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \right. \\
& + \left(\frac{k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} - \frac{10 k_2^2}{k_1^2 k_3^2} + \frac{2 k_3^2}{k_1^2 k_2^2} + \frac{8}{k_1^2} - \frac{2}{k_2^2} - \frac{2}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \left. \right] \frac{\dot{a}}{a} X \\
& - \frac{1}{3} \left[\frac{v_1^2}{k_1^2} \left(4 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \left(\frac{5 k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} - \frac{6}{k_2^2} + \frac{6}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right) \right. \\
& + \left. \left(-\frac{4 k_1^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{8 k_2^2}{k_1^2 k_3^2} - \frac{4 k_3^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{4}{k_1^2} + \frac{8}{k_2^2} - \frac{4}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right] Y
\end{aligned} \tag{4.204.b}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{33}^G = & -\frac{1}{3} \frac{v_1^2}{k_1^2} \left[4 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \right. \\
& + \left(\frac{k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} - \frac{10 k_3^2}{k_1^2 k_2^2} + \frac{2 k_2^2}{k_1^2 k_3^2} + \frac{8}{k_1^2} - \frac{2}{k_2^2} - \frac{2}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \left. \right] \frac{\dot{a}}{a} X \\
& - \frac{1}{3} \left[\frac{v_1^2}{k_1^2} \left(4 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \left(\frac{5 k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{6}{k_2^2} - \frac{6}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right) \right. \\
& + \left. \left(-\frac{4 k_1^2}{k_2^2 k_3^2} - \frac{4 k_2^2}{k_1^2 k_3^2} + \frac{8 k_3^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{4}{k_1^2} - \frac{4}{k_2^2} + \frac{8}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right] Y
\end{aligned} \tag{4.204.c}$$

$$\pi_{23}^G = -2 \frac{v_1}{k_1^2} \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \left(\frac{k_2}{k_3} - \frac{k_3}{k_2} \right) \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \frac{1}{a} X - 2 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \left(\frac{k_2}{k_3} - \frac{k_3}{k_2} \right) \frac{\dot{a}}{a^2} Y \tag{4.204.d}$$

Ve yine, (4.203) ve (4.204) ile (4.138)-(4.140) denklemleri, (4.83) teki anahtar denklemlerde kullanılırsa, tutarlılığı incelenecek denklem sistemi olarak şu sistem elde edilir:

$$q_1^t = q_1^G :$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{v_1}{k_1} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{k_1 v_1}{2 k_2^2 k_3^2} \frac{1}{a^2} = & -\frac{v_1}{k_1} \left[4 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \right. \\
& + \left. \left(\frac{k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} - \frac{k_2^2}{k_1^2 k_3^2} - \frac{k_3^2}{k_1^2 k_2^2} + \frac{2}{k_1^2} - \frac{2}{k_2^2} - \frac{2}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right] \frac{\dot{a}}{a} X \\
& - \frac{v_1}{k_1} \left[4 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \left(-3 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{k_2^2}{k_1^2 k_3^2} + \frac{k_3^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{2}{k_1^2} + \frac{2}{k_2^2} + \frac{2}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right] Y
\end{aligned} \tag{4.205}$$

$$\pi_{11}^t = \pi_{11}^G :$$

$$\begin{aligned} & -\frac{4v_1^2}{3k_1^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2k_1^2-v_1^2}{k_2^2k_3^2}-\frac{k_2^2}{k_3^2k_1^2}-\frac{k_3^2}{k_1^2k_2^2}+\frac{2}{k_1^2}-\frac{1}{k_2^2}-\frac{1}{k_3^2}\right)\frac{1}{a^2} \\ & =\frac{2}{3}\frac{v_1^2}{k_1^2}\left[4\frac{k_1^2-v_1^2}{k_1^2}\left(2\frac{\ddot{a}}{a}-3\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\right. \\ & \quad \left.+\left(\frac{k_1^2-v_1^2}{k_2^2k_3^2}-\frac{4k_2^2}{k_3^2k_1^2}-\frac{4k_3^2}{k_1^2k_2^2}+\frac{8}{k_1^2}-\frac{2}{k_2^2}-\frac{2}{k_3^2}\right)\frac{1}{a^2}\right]\frac{\dot{a}}{a}X \\ & \quad +\frac{2}{3}\left[\frac{v_1^2}{k_1^2}\left(4\frac{k_1^2-v_1^2}{k_1^2}\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{5k_1^2-v_1^2}{k_2^2k_3^2}\frac{1}{a^2}\right)\right. \\ & \quad \left.+\left(-\frac{4k_1^2}{k_2^2k_3^2}+\frac{2k_2^2}{k_3^2k_1^2}+\frac{2k_3^2}{k_1^2k_2^2}-\frac{4}{k_1^2}+\frac{2}{k_2^2}+\frac{2}{k_3^2}\right)\frac{1}{a^2}\right]Y \end{aligned} \quad (4.206.a)$$

$$\pi_{22}^t = \pi_{22}^G :$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}\frac{v_1^2}{k_1^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{2k_1^2-v_1^2}{2k_2^2k_3^2}+\frac{2k_2^2}{k_3^2k_1^2}-\frac{k_3^2}{2k_1^2k_2^2}-\frac{1}{k_1^2}+\frac{2}{k_2^2}-\frac{1}{k_3^2}\right)\frac{1}{a^2} \\ & =-\frac{1}{3}\frac{v_1^2}{k_1^2}\left[4\frac{k_1^2-v_1^2}{k_1^2}\left(2\frac{\ddot{a}}{a}-3\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\right. \\ & \quad \left.+\left(\frac{k_1^2-v_1^2}{k_2^2k_3^2}-\frac{10k_2^2}{k_3^2k_1^2}+\frac{2k_3^2}{k_1^2k_2^2}+\frac{8}{k_1^2}-\frac{2}{k_2^2}-\frac{2}{k_3^2}\right)\frac{1}{a^2}\right]\frac{\dot{a}}{a}X \\ & \quad -\frac{1}{3}\left[\frac{v_1^2}{k_1^2}\left(4\frac{k_1^2-v_1^2}{k_1^2}\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\left(\frac{5k_1^2-v_1^2}{k_2^2k_3^2}-\frac{6}{k_2^2}+\frac{6}{k_3^2}\right)\frac{1}{a^2}\right)\right. \\ & \quad \left.+\left(-\frac{4k_1^2}{k_2^2k_3^2}+\frac{8k_2^2}{k_3^2k_1^2}-\frac{4k_3^2}{k_1^2k_2^2}-\frac{4}{k_1^2}+\frac{8}{k_2^2}-\frac{4}{k_3^2}\right)\frac{1}{a^2}\right]Y \end{aligned} \quad (4.206.b)$$

$$\pi_{33}^t = \pi_{33}^G :$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}\frac{v_1^2}{k_1^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{2k_1^2-v_1^2}{2k_2^2k_3^2}-\frac{k_2^2}{k_3^2k_1^2}+\frac{2k_3^2}{k_1^2k_2^2}-\frac{1}{k_1^2}-\frac{1}{k_2^2}+\frac{2}{k_3^2}\right)\frac{1}{a^2} \\ & =-\frac{1}{3}\frac{v_1^2}{k_1^2}\left[4\frac{k_1^2-v_1^2}{k_1^2}\left(2\frac{\ddot{a}}{a}-3\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\right. \\ & \quad \left.+\left(\frac{k_1^2-v_1^2}{k_2^2k_3^2}+\frac{2k_2^2}{k_3^2k_1^2}-\frac{10k_3^2}{k_1^2k_2^2}+\frac{8}{k_1^2}-\frac{2}{k_2^2}-\frac{2}{k_3^2}\right)\frac{1}{a^2}\right]\frac{\dot{a}}{a}X \\ & \quad -\frac{1}{3}\left[\frac{v_1^2}{k_1^2}\left(4\frac{k_1^2-v_1^2}{k_1^2}\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\left(\frac{5k_1^2-v_1^2}{k_2^2k_3^2}+\frac{6}{k_2^2}-\frac{6}{k_3^2}\right)\frac{1}{a^2}\right)\right. \\ & \quad \left.+\left(-\frac{4k_1^2}{k_2^2k_3^2}-\frac{4k_2^2}{k_3^2k_1^2}+\frac{8k_3^2}{k_1^2k_2^2}-\frac{4}{k_1^2}-\frac{4}{k_2^2}+\frac{8}{k_3^2}\right)\frac{1}{a^2}\right]Y \end{aligned} \quad (4.206.c)$$

$$\pi_{23}^t = \pi_{23}^G :$$

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{k_1^2} \left(\frac{k_2}{k_3} - \frac{k_3}{k_2} \right) \frac{\dot{a}}{a^2} = & -2 \frac{v_1}{k_1^2} \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \left(\frac{k_2}{k_3} - \frac{k_3}{k_2} \right) \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \frac{1}{a} X \\ & - 2 \frac{v_1}{k_1^2} \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \left(\frac{k_2}{k_3} - \frac{k_3}{k_2} \right) \frac{\dot{a}}{a^2} Y \end{aligned} \quad (4.206.d)$$

Ayrıca, (4.136) ve (4.137) ile (4.201) ve (4.202) denklemlerini kullanarak, (4.83) uyarınca,

$$\mu^t + p^t = \mu^m + p^m + \mu^G + p^G :$$

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{3} \left(\frac{3k_1^2 + v_1^2}{k_1^2} \right) \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \\ & - \frac{1}{6} \left[\frac{k_1^2 - 5v_1^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{k_2^2}{k_3^2 k_1^2} + \frac{k_3^2}{k_1^2 k_2^2} - 2 \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} + \frac{1}{k_3^2} \right) \right] \frac{1}{a^2} = \mu^m + p^m \\ & + \left\{ 4 \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{v_1^2}{k_1^2} \left[-\frac{4}{3} \frac{2k_1^2 + v_1^2}{k_1^2} \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{2k_1^2 + v_1^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{k_2^2}{k_3^2 k_1^2} + \frac{k_3^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{2}{k_1^2} + \frac{2}{k_2^2} + \frac{2}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right] \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{k_1^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{k_2^2}{k_3^2 k_1^2} + \frac{k_3^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{2}{k_1^2} - \frac{2}{k_2^2} - \frac{2}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right\} \frac{\dot{a}}{a} X \\ & + \left\{ 4 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{v_1^2}{k_1^2} \left[-\frac{4}{3} \frac{2k_1^2 + v_1^2}{k_1^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \left(-\frac{10k_1^2 - 11v_1^2}{3k_2^2 k_3^2} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{k_2^2}{k_3^2 k_1^2} + \frac{k_3^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{2}{k_1^2} + \frac{2}{k_2^2} + \frac{2}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{k_1^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{k_2^2}{k_3^2 k_1^2} + \frac{k_3^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{2}{k_1^2} - \frac{2}{k_2^2} - \frac{2}{k_3^2} \right) \frac{1}{a^2} \right\} Y \end{aligned} \quad (4.207)$$

kombinasyonunu yazabiliriz.

Bu denklem sisteminin tutarlılığı için, §4.2.2.1’de genişleyen Gödel modeli için yapmış olduğumuz benzer analizi tekrarladık. (4.206.d) den ötürü, X ve Y nin ifadelerini hesaplayabileceğimiz en az dört bağımsız denklem ancak $k_2 \neq k_3$ koşulu altında var olduğu için, analizi $k_2 \neq k_3$ durumu için gerçekleştirdik. Fakat, gerek X ve gerekse de Y

nin ifadeleriyle oluşturulan ikinci dereceden polinom ile diskriminant ifadesi son derece uzun olduğu için sonuçları burada göstermiyoruz. Bu uzun tartışmadan sonra, denklemlerin tutarlılık koşulu olarak Gödel evreni için bulduğumuza benzer şekilde $a(t) = c_1 t + c_2$ özel çözümüne varmaktayız. Ancak, bu çözüm için de, (C.24) ten hesaplanan

$$G = 2 \frac{\ddot{a}}{a} \left\{ 12 \left[1 + \frac{v_1^2}{(k_2^2 + k_3^2)^2} (v_1^2 - 2k_2^2 - 2k_3^2) \right] \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{k_2^2 + k_3^2} \left[4 - \frac{v_1^2}{k_2^2 k_3^2} \left(\frac{(k_2^2 - k_3^2)^2}{k_2^2 + k_3^2} + v_1^2 \right) \right] \frac{1}{a^2} \right\}$$

Gauss-Bonnet teriminin kendisi ve $\dot{G}$ türevi sıfır olmaktadır. Bu da tıpkı Gödel evreninde karşılaştığımız üzere, $X = 0$ sonucuna yol açmaktadır ki bu, $X \neq 0$ ile çelişmektedir. Dolayısıyla, Bianchi-tip IX evreninde, $k_2 \neq k_3$ için hem dönen hem genişleyen çözüm yoktur.

Şimdi, yerel olarak rotasyonel simetri durumu olan $k_2 = k_3 (\equiv k_2)$ durumunu inceleyelim. Bu durumda, yukarıdaki (4.205)-(4.207) denklemleri

$$q_1^t = q_1^G :$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{v_1}{k_1} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{k_1 v_1}{2k_2^4} \frac{1}{a^2} = - \frac{v_1}{k_1} \left[4 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{k_1^2 - v_1^2 - 4k_2^2}{k_2^4} \frac{1}{a^2} \right] \frac{\dot{a}}{a} X \\ - \frac{v_1}{k_1} \left[4 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3k_1^2 - 3v_1^2 + 4k_2^2}{k_2^4} \frac{1}{a^2} \right] Y \end{aligned} \quad (4.208)$$

$$\pi_{11}^t = \pi_{11}^G, \pi_{22}^t = \pi_{22}^G, \pi_{33}^t = \pi_{33}^G :$$

$$\begin{aligned} - \frac{4v_1^2}{3k_1^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{2k_1^2 - v_1^2 - 2k_2^2}{3k_2^4} \frac{1}{a^2} \\ = \frac{2v_1^2}{3k_1^2} \left[4 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{k_1^2 - v_1^2 - 4k_2^2}{k_2^4} \frac{1}{a^2} \right] \frac{\dot{a}}{a} X \\ \frac{2}{3} \left[\frac{v_1^2}{k_1^2} \left(4 \frac{k_1^2 - v_1^2}{k_1^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{5k_1^2 - v_1^2}{k_2^4} \frac{1}{a^2} \right) - \frac{4(k_1^2 - k_2^2)}{k_2^4} \frac{1}{a^2} \right] Y \end{aligned} \quad (4.209)$$

$$\mu^t + p^t = \mu^m + p^m + \mu^G + p^G :$$

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{3} \left(\frac{3k_1^2 + v_1^2}{k_1^2} \right) \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{1}{6} \left[\frac{k_1^2 - 5v_1^2 - 4k_2^2}{k_2^4} \right] \frac{1}{a^2} = \mu^m + p^m + \left\{ 4 \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \right. \\ & + \frac{v_1^2}{k_1^2} \left[-\frac{4}{3} \frac{2k_1^2 + v_1^2}{k_1^2} \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{2k_1^2 + v_1^2 + 4k_2^2}{3k_2^4} \frac{1}{a^2} \right] + \frac{k_1^2 - 4k_2^2}{k_2^4} \frac{1}{a^2} \left. \right\} \frac{\dot{a}}{a} X \quad (4.210) \\ & + \left\{ 4 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{v_1^2}{k_1^2} \left[-\frac{4}{3} \frac{2k_1^2 + v_1^2}{k_1^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \left(-\frac{10k_1^2 - 11v_1^2 - 12k_2^2}{3k_2^4} \frac{1}{a^2} \right) - \frac{k_1^2 - 4k_2^2}{3k_2^4} \frac{1}{a^2} \right] \right\} Y \end{aligned}$$

biçimlerine indirgenirler. (4.208) denklemi, $\frac{2v_1}{3k_1}$ ile çarpılıp (4.209) ile taraf tarafa

toplanırsa gerekli sadeleştirmelerden sonra,

$$k_1^2(k_1^2 - v_1^2 - k_2^2) = -4(k_1^2 - v_1^2)(k_1^2 - v_1^2 - k_2^2)Y \quad (4.211)$$

elde edilir. Bunu $(k_1^2 - v_1^2 - k_2^2) \neq 0$ ve $(k_1^2 - v_1^2 - k_2^2) = 0$ halleri için ayrı ayrı ele alalım:

1. Eğer, $(k_1^2 - v_1^2 - k_2^2) \neq 0$ ise, (4.211) denklemi

$$k_1^2 = -4(k_1^2 - v_1^2)Y \quad (4.212)$$

şeklinde kısılabılır. Buradan $k_1 > 0$ koşulunun sağlanması için $k_1^2 - v_1^2 \neq 0$ olması gerektiği görülmektedir. O halde bu denklemden, hemen

$$Y = -\frac{k_1^2}{4(k_1^2 - v_1^2)} \quad (4.213)$$

bulunur. Bu, Y için (4.208) denkleminde kullanılırsa,

$$\left(\frac{k_1^2}{4(k_1^2 - v_1^2)} + \frac{\dot{a}}{a} X \right) \left[4k_2^4(k_1^2 - v_1^2)(2\ddot{a}a - 3\dot{a}^2) + k_1^2(k_1^2 - v_1^2 - 4k_2^2) \right] = 0 \quad (4.214)$$

elde edilir. Buradan ya birinci ya da ikinci çarpanın sıfır olması gerektiği aşıkardır:

(a) Eğer, $\frac{k_1^2}{4(k_1^2 - v_1^2)} + \frac{\dot{a}}{a} X = 0$ ise, buradan hemen

$$\frac{k_1^2}{4(k_1^2 - v_1^2)} = -\frac{\dot{a}}{a} X \quad (4.215)$$

ve bunun (4.213) ile karşılaştırılmasından da

$$\frac{\dot{a}}{a} X = Y \quad (4.216)$$

yazılabilir. Öte yandan X ve Y nin (4.179) ile verilen tanımlarından

$$\dot{X} = Y \quad (4.217)$$

olduğuna dikkat çekerek (4.216) denklemini

$$\frac{\dot{a}}{a} X = \dot{X} \quad (4.218)$$

biçiminde yazabiliriz. Bunun da integrali, (integrasyon sabitini sıfır alarak)

$$X = a(t) \quad (4.219)$$

verir. Bunu ve Y için (4.213) ü, (4.216) denkleminde kullanıp integre edersek, c_1 integrasyon sabiti olmak üzere,

$$\dot{a} = -\frac{k_1^2}{4(k_1^2 - v_1^2)} \Rightarrow a(t) = -\frac{k_1^2}{4(k_1^2 - v_1^2)} t + c_1 \quad (4.220)$$

buluruz. Buradan, $k_2 \neq k_3$ durumunda olduğu gibi, $\ddot{a} = 0$ olacağı için, $G = 0 \Rightarrow \dot{G} = 0$ olur, bu da (4.179) tanımından $X = 0$ sonucuna yol açar, ki bu da $X \neq 0$ ile çelişir.

(b) Eğer $4k_2^4(k_1^2 - v_1^2)(2\ddot{a}a - 3\dot{a}^2) + k_1^2(k_1^2 - v_1^2 - 4k_2^2) = 0$ ise, buradan kolayca görüldüğü gibi

$$\ddot{a} = \frac{1}{2} \left[-\frac{k_1^2(k_1^2 - v_1^2 - 4k_2^2)}{4k_2^4(k_1^2 - v_1^2)} + 3\dot{a}^2 \right] \quad (4.221)$$

yazılabilir. Bu ve Y için (4.213) denklemi, (4.210) denkleminde kullanılıp uygun kısaltmalar yapılırsa

$$0 = 3(\mu^m + p^m)k_1^2k_2^4a^2 \Rightarrow \mu^m + p^m = 0 \quad (4.222)$$

olur ki, bu, makaslamasız akışkan iddiasının $\mu^m + p^m \neq 0$ koşuluyla çelişir.

(2) Eğer $(k_1^2 - v_1^2 - k_2^2) = 0 \Rightarrow k_2^2 = k_1^2 - v_1^2$ ise, buradan $k_2 > 0$ koşulunun sağlanması için $k_1^2 - v_1^2 \neq 0$ olması gerektiği görülmektedir. $k_2^2 = k_1^2 - v_1^2$ hali için, (4.208) ve (4.209) denklemleri

$$\begin{aligned} & \frac{k_1^2}{2(k_1^2 - v_1^2)} \left[-4(k_1^2 - v_1^2)^2 \dot{a}^2 - 4v_1^2(2k_1^2 - v_1^2)\ddot{a}a - k_1^2 \right] \\ & = - \left[4(k_1^2 - v_1^2)^2(2\ddot{a}a - 3\dot{a}^2) - 3k_1^2 \right] \frac{\dot{a}}{a} X - \left[4(k_1^2 - v_1^2)^2 \dot{a}^2 + k_1^2 \right] Y \end{aligned} \quad (4.223)$$

biçiminde tek bir denkleme ve (4.210) denklemi de,

$$\begin{aligned} & -\frac{k_1^2}{2(k_1^2 - v_1^2)} \left[-4(k_1^2 - v_1^2)^2 \dot{a}^2 - 4v_1^2(2k_1^2 - v_1^2)\ddot{a}a - k_1^2 \right] \\ & = 3\frac{k_1^4(k_1^2 - v_1^2)}{v_1^2 + 3k_1^2}(\mu^m + p^m)a^2 + \left[4(k_1^2 - v_1^2)^2(2\ddot{a}a - 3\dot{a}^2) - 3k_1^2 \right] \frac{\dot{a}}{a} X \\ & \quad + \left[4(k_1^2 - v_1^2)^2 \dot{a}^2 + k_1^2 \right] Y \end{aligned} \quad (4.224)$$

denklemine indirgenir. (4.223) ile (4.224) denklemlerini taraf tarafa toplarsak

$$0 = 3\frac{k_1^4(k_1^2 - v_1^2)}{v_1^2 + 3k_1^2}(\mu^m + p^m)a^2 \Rightarrow \mu^m + p^m = 0 \quad (4.225)$$

olur ki, bu $\mu^m + p^m \neq 0$ ile çelişir.

O halde, $F(G)$ -gravite teorisi çerçevesinde, Bianchi-tip IX modelinin $k_2 = k_3$ durumu için de, hem dönen hem genişleyen evren çözümü bulunmamaktadır.

4.3. MAKASLAMASIZ AKIŞKAN İDDİASININ BEŞ-BOYUTLU ZAREVREN MODELLERİNDE ELE ALINMASI

Bu alt bölümde, makaslamaşız akışkan iddiasını zarevren modellerinde ele alacağız. Ancak, denklemlerin yapısı 5-boyuttaki öğelerin de işin içine girmesi nedeniyle, 4-boyutta daha önce gördüklerimize göre son derece girift ve karmaşık olduğundan, ilk defa rölativist kozmolojide Senovilla ve diğ. [16] tarafından kullanılan kovaryant yaklaşım yöntemini bu modellerde kullanmayı deneyeceğiz. Yöntemi açıklamadan önce, §3.4'te söz edildiği üzere, DGP tarafından $F(R) \equiv R$ özel hali için ileri sürülmüş indüklenmiş gravite modelinin genel bir $F(R)$ alınarak genelleştirilmiş şekli olan $F(R)$ -zarevren için zar üzerinde indüklenen efektif Einstein denklemlerini yazalım ve efektif akışkan varsayımını kullanarak bu teoremin evrim ve bağ denklemlerini tesis edelim.

Eğer (3.108) ile verilen K_{ab} ifadesi (3.88) e yerleştirilir ve (3.92) tanımları kullanılırsa, uzun fakat kolay yapılabilir bir hesaptan sonra, bulk maddesiz fakat kozmolojik sabitli alındığında zar üzerindeki indüklenmiş graviteli efektif Einstein denklemleri, uygun düzeltmeler sonrasında

$$G_{ab} = -\Lambda_4 g_{ab} + \kappa_4^2 \left\{ \tau_{ab} + \frac{\kappa_5^4}{\kappa_4^2} \left[\frac{1}{12} \tau \tau_{ab} - \frac{1}{4} \tau_{ac} \tau^c_b + \frac{1}{24} g_{ab} (3\tau_{cd} \tau^{cd} - \tau^2) \right] - \frac{1}{\kappa_4^2} {}^5\mathcal{E}_{ab} \right\} \quad (4.226)$$

biçiminde bulunur. Burada, $T_{ab}^m \equiv T_{ab}^{madde(zar)}$ ve T_{ab}^F de indüklenmiş katkı olmak üzere

$$\tau_{ab} \equiv T_{ab}^m + T_{ab}^F \quad (4.227)$$

dir. Eğer, T_{ab}^m mükemmel akışkan olarak alınır ve T_{ab}^F nin de (3.28) deki gibi açılımı yapılırsa, yani sırasıyla

$$T_{ab}^m = \mu^m u_a u_b + p^m h_{ab} \quad (4.228.a)$$

$$T_{ab}^F = \mu^F u_a u_b + p^F h_{ab} + q_a^F u_b + q_b^F u_a + \pi_{ab}^F \quad (4.228.b)$$

olmak üzere τ_{ab} nin açık ifadesi

$$\tau_{ab} = (\mu^m + \mu^F)u_a u_b + (p^m + p^F)h_{ab} + q_a^F u_b + q_b^F u_a + \pi_{ab}^F \quad (4.229)$$

olur.

$T_{ab}^{madde(bulk)} = 0$ durumu için yazılmış olan yukarıdaki denklemlerden hemen anlaşılacağı gibi, 4-boyutlu EAD'ye bulk'tan kaynaklanan yalnızca iki türlü katkı bulunmaktadır. Birincisi, zarın madde-enerjisini yansıtan T_{ab}^m yerel madde-enerji tansörüne kuadratik düzeltme terimi olarak T_{ab}^F ile birlikte simetrik bir τ_{ab} tansörü eklenmesi; ikincisi ise, ${}^5\mathcal{E}_{ab}$ simetrik tansörüdür. Bu tansörün varlığından dolayı (4.226) denklemleri kapalı değildir. Bu bilinmezliğin giderilmesi için, ya bulk'ın Einstein denklemleri çözülüp ${}^5\mathcal{E}_{ab}$ belirlenmelidir, ya da literatürde sıkça yapıldığı gibi, ${}^5\mathcal{E}_{ab}$ hakkında bir takım varsayımlarda bulunmak gerekmektedir, ki biz de ileride böyle yapacağız.

Şimdi,

$$T_{ab}^t = \tau_{ab} + \frac{\kappa_5^4}{\kappa_4^2} \left[\frac{1}{12} \tau \tau_{ab} - \frac{1}{4} \tau_{ac} \tau^c_b + \frac{1}{24} g_{ab} (3\tau_{cd} \tau^{cd} - \tau^2) \right] - \frac{1}{\kappa_4^2} {}^5\mathcal{E}_{ab} \quad (4.230)$$

ile bir T_{ab}^t toplam efektif enerji-momentum tansörü tanımlanırsa (4.226)

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab}^t \quad (4.231)$$

standart Einstein denklemi şeklini alır (burada $\kappa_4^2 \equiv \kappa^2$, $\Lambda_4 \equiv \Lambda$ yazılışları kullanılmıştır). Şimdi amacımız, (4.230) daki enerji-momentum tansörünü (3.30) daki izdüşürme bağıntılarında kullanıp akışkanın dinamik büyüklüklerinin ifadelerini bu indüklenmiş eğrilikli zarevren teorisi kapsamında ifade etmek olacaktır.

Önce, ${}^5\mathcal{E}_{ab}$ simetrik tansörünü, zar gözlemcisi u_a ya göre

$${}^5\mathcal{E}_{ab} = -\left(\frac{\kappa_5}{\kappa}\right)^4 \left[U u_a u_b + P h_{ab} + 2Q_{(a} u_{b)} + P_{ab} \right] \quad (4.232)$$

biçiminde ayrıştırılabilir ($Q_a u^a = 0$, $P_{ab} u^a = 0$, $P_{ab} = P_{ba}$, $P^a_a = 0$ dır). ${}^5\mathcal{E}_{ab}$ nin izsiz simetrik bir tansör olduğu göz önüne alınarak bu

$${}^5\mathcal{E}_{ab} = -\left(\frac{\kappa_5}{\kappa}\right)^4 \left[U \left(u_a u_b + \frac{1}{3} h_{ab} \right) + 2Q_{(a} u_{b)} + P_{ab} \right] \quad (4.233)$$

biçiminde yazılabilir. Burada U , zar üzerinde efektif yerel olmayan enerji yoğunluğu (Weyl enerji yoğunluğu); Q_a zar üzerinde efektif yerel olmayan enerji akısı (Weyl enerji akısı, Weyl momentum yoğunluğu) ve P_{ab} zar üzerinde efektif yerel olmayan eşyönsüz basınç (Eşyönsüz Weyl basıncı) olarak adlandırılır.

Şimdi, zar gözlemcisinin 4-lü hız vektörü $\mathbf{u}$ ya göre T_{ab}^t nin de

$$T_{ab}^t = \mu^t u_a u_b + p^t h_{ab} + 2q_{(a}^t u_{b)} + \pi_{ab}^t \quad (4.234)$$

biçimindeki ayrışımını göz önüne alalım. Burada μ^t , toplam efektif enerji yoğunluğu, p^t toplam efektif eşyönlü basınç, q_a^t toplam efektif enerji akısı ve π_{ab}^t de toplam efektif eşyönsüz basınç olup, (4.230) ifadesine (4.229) ve (4.233) taşınır ve katsayılar için (3.92) tanımı kullanılırsa, (3.30) bağıntıları uyarınca

$$\mu^t = \Lambda + \kappa^2 \left\{ \mu^m + \mu^F + \frac{1}{4\lambda} \left[2(\mu^m + \mu^F)^2 - 3\pi_{ab}^F (\pi^F)^{ab} \right] + \frac{6}{\kappa^4 \lambda} U \right\} \quad (4.235.a)$$

$$p^t = -\Lambda + \kappa^2 \left\{ p^m + p^F + \frac{1}{4\lambda} \left[2(\mu^m + \mu^F)^2 + 4(\mu^m + \mu^F)(p^m + p^F) + \pi_{ab}^F (\pi^F)^{ab} - 4q_{ab}^F (q^F)^{ab} \right] + \frac{2}{\kappa^4 \lambda} U \right\} \quad (4.235.b)$$

$$q_a^t = \kappa^2 \left\{ q_a^F + \frac{1}{4\lambda} \left[4(\mu^m + \mu^F) q_a^F - \pi_{ab}^F (q^F)^b \right] + \frac{6}{\kappa^4 \lambda} Q_a \right\} \quad (4.235.c)$$

$$\pi_{ab}^t = \kappa^2 \left\{ \pi_{ab}^F + \frac{1}{2\lambda} \left[-(\mu^m + \mu^F + 3p^m + 3p^F) \pi_{ab}^F + 3\pi_{c<a}^F (\pi^F)_{b>}^c + 3q_{<a}^F q_{b>}^F \right] + \frac{2}{\kappa^4 \lambda} P_{ab} \right\} \quad (4.235.d)$$

biçiminde elde edilirler. Yukarıdaki ifadelerde (4.228.b) deki indüklenmiş enerji-momentum tansörünün efektif dinamik büyüklüklerini, izdüşürme tekniklerini kullanarak

$$\mu^F = -2\beta \left[F_R G_{ab} u^a u^b + \frac{1}{2} (F - R F_R) - F_{RR} (-\theta \dot{R} + D^a D_a R) - F_{RRR} (D^a R D_a R) \right] \quad (4.236)$$

$$p^F = -2\beta \left\{ F_R G_{ab} h^{ab} - \frac{1}{2} (F - R F_R) - F_{RR} \left[\ddot{R} - \dot{u}^a D_a R - \frac{2}{3} (-\theta \dot{R} + D^a D_a R) \right] - F_{RRR} \left[\dot{R}^2 - \frac{2}{3} D^a R D_a R \right] \right\} \quad (4.237)$$

$$q_a^F = 2\beta \left[F_R h_a^b u^c G_{bc} - F_{RR} (D_a \dot{R} - (\frac{1}{3} \theta h_{ab} + \eta_{abc} \omega^c) D^b R) - F_{RRR} (\dot{R} D_a R) \right] \quad (4.238)$$

$$\pi_{ab}^F = -2\beta \left[F_R h_{\langle a}^c h_{b \rangle}^d G_{cd} - F_{RR} D_{\langle a} D_{b \rangle} R - F_{RRR} D_{\langle a} R D_{b \rangle} R \right] \quad (4.239)$$

biçiminde bulmaktayız. Şimdi, son olarak, yukarıda tanımlanan çeşitli madde-enerji-momentum tansörlerinin korunum kanunlarına değinelim. Zar üzerinde büzülmüş Bianchi özdeşliklerinden ($\nabla^a G_{ab} = 0$) toplam enerji-momentumun

$$\nabla^a T_{ab}^t = 0 \quad (4.240.a)$$

korunumuna ve (3.107) ile verilen tanımından dolayı T_{ab}^F nin de

$$\nabla^a T_{ab}^F = 0 \quad (4.240.b)$$

korunum kanununa uyduğu gösterilebilir [84]. Öte yandan, Bulkta bir madde-enerji olmaması halinde ($T_{ab}^{madde(bulk)} = 0$), zarın T_{ab}^m enerji-momentum tansörü de

$$\nabla^a T_{ab}^m = 0 \quad (4.240.c)$$

korunum denkleminde uyar. Bu bir yerel korunum denklemi olup, zar ile bulk arasında bir enerji alışverişi olmadığını ifade eder.

Zar üzerinde indüklenen efektif Einstein denklemleri, bir efektif toplam enerji momentum tansörü cinsinden (4.231) biçiminde yazılabildiğinden ve (4.240) korunum denklemleri geçerli olduğundan dolayı, zarda evrim ve bağ denklemleri; μ^t , p^t , q_a^t ve π_{ab}^t (4.235) ile tanımlanan büyüklükler olmak üzere, (4.45)-(4.58) ile verilen $F(R,G)$ -gravitenin evrim ve bağ denklemleriyle aynı formda olacaktır.

Şimdi, aşağıda makaslamasız akışkan iddiasının kovaryant bir biçimde genel olarak nasıl ele alındığını özetleyelim [79]. Bağ denklemlerinin evriminden şu anlaşılmaktadır:

Başlangıç koşulları bilindiğinde, akışkanın kinematik ve dinamik büyüklükleri, bir t_0 anında $\Sigma(t_0)$ yüzeyi üzerinde evrim denklemleri aracılığıyla tek türlü belirlenmesine karşın, bağ denklemleri tarafından kısıtlanırlar; yani, bağ denklemleri, eğer bir t_0 anında sağlanıyorsa, her t için $\Sigma(t)$ yüzeyleri üzerinde sağlanmaları gerekir. Bu koşulun sağlanıp sağlanmadığını anlamak için bağ denklemlerinin $\mathbf{u}$ gözlemcisi doğrultusunda zaman türevi ya da başka bir deyişle evrimi alınır. Bir bağ denkleminin $\mathbf{u}$ doğrultusundaki zaman türevi, bağ denklemlerinin bir çeşit kombinasyonu olarak ifade edilebiliyorsa, bu taktirde söz konusu bağ denklemi her t için korunur, yani bağ denklemleri sisteminde bir tutarsızlığa yol açmaz. Eğer, tüm bağ denklemleri her t için korunuyorsa, bu takdirde bağ denklemleri sisteminin tutarlı bir sistem olduğu ve evrim denklemleriyle tutarlı bir biçimde evrimleştiği sonucu ortaya çıkar. Bununla beraber, bir bağ denkleminin evriminin, bağ denklemlerinin kombinasyonu ile birlikte, bir de mesela dinamik ve/veya kinematik değişkenler cinsinden bir fonksiyon verdiği durumlarda, bu bağ denkleminin korunması için, söz konusu fonksiyonun sıfıra eşit olması gerektiği açıktır. Buna integre edilebilirlik koşulu denir; sistemin tutarlılığı için bunun da sağlanması gerektiğinden, bu, artık yeni bir bağ denklemdir. Tutarlılığı sürdürmek için, bu yeni bağ denkleminin de evrimi alınır ve aynı süreç bir tutarlılığa rastlanıncaya kadar tekrarlanır. Fakat, bazen tutarlılığın sağlanması için gerekli olan integre edilebilirlik koşulu, başlangıç verileriyle bir çelişki yaratabilir. Bu takdirde bu sistem tutarsız bir sistemdir.

Bağ denklemlerinin evrimlerinin hesabında, pek çok bağıntı ve özdeşliğe gerek bulunmaktadır. Literatürde bunların bir kısmı, müelliften müellife farklılık gösteren notasyonlarla, parça parça ve çeşitli kısıtlı haller için, yani mesela; $\omega = 0$ ve ya $\sigma = 0$

durumları için ya da lineer yaklaşıklıkla verilmiştir. Biz, notasyon ve kabul farklılıklarından kaynaklanabilecek olası bir hatayı önlemek için, herhangi bir kısıtlama yoluna gitmeden, bunları kendi notasyonumuzla, burulmasız ($\nabla_a \nabla_b \phi - \nabla_b \nabla_a \phi = 0$) bir uzay-zaman için elde ettik. Uzun ve karmaşık hesaplar sonucunda elde edilen bu bağıntı ve özdeşliklerin hesabındaki ayrıntılara girmeden, aşağıda, bunları listeliyoruz:

Zamansal ve Uzaysal Türevlerin Komütasyon Bağıntıları

- Bir skaler için:

$$(D_a \phi)^\cdot = D_a \dot{\phi} + \dot{u}_a \phi + u_a \dot{u}^e D_e \phi - v_a^e D_e \phi \quad (4.241)$$

- Bir uzaysal vektör için ($X_a u^a = 0$):

$$\begin{aligned} (D_a X_b)^\cdot &= D_a \dot{X}_{\langle b \rangle} + \dot{u}_a \dot{X}_{\langle b \rangle} - v_a^c D_c X_b - \dot{u}_b v_a^c X_c \\ &\quad + u_a \dot{u}^c D_c X_b + u_b \dot{u}^c D_a X_c + h_a^c h_b^d R_{ecd} u^e X^f \end{aligned} \quad (4.242.a)$$

ya da

$$\begin{aligned} (D_a X_b)^\cdot &= D_a \dot{X}_b + \dot{u}_a \dot{X}_b + u_b (D_a \dot{u}^c) X_c + u_a \dot{u}^c D_c X_b + u_b \dot{u}^c D_a X_c \\ &\quad + u_a u_b \dot{u}^c v_c^d X_d - u_b v_a^c v_c^d X_d - v_a^c D_c X_b \\ &\quad - \dot{u}_b v_a^c X_c - u_b \dot{v}_a^c X_c + R_{abc} u^e X^c \end{aligned} \quad (4.242.b)$$

$$(D_a X^a)^\cdot = D_a \dot{X}^a + \dot{u}_a \dot{X}^a - v_a^b D_b X^a - \dot{u}^a v_a^b X_b + h^{rs} R_{ersc} u^e X^c \quad (4.242.c)$$

- Bir uzaysal 2-tansör için ($X_{ab} u^a = X_{ab} u^b = 0$):

$$\begin{aligned} (D_a X_{bc})^\cdot &= D_a \dot{X}_{bc} - v_a^e D_e X_{bc} + \dot{u}_a \dot{X}_{bc} - \dot{u}_a u_b \dot{u}^e X_{ec} - \dot{u}_a u_c \dot{u}^e X_{be} \\ &\quad - \dot{u}_b v_a^e X_{ec} - \dot{u}_c v_a^e X_{be} + u_a \dot{u}^e D_e X_{bc} + u_b \dot{u}^e D_a X_{ec} \\ &\quad + u_c \dot{u}^e D_a X_{be} + h_a^r h_b^s R_{ersp} u^e X^p_c + h_a^r h_c^t R_{ertp} u^e X_b^p \end{aligned} \quad (4.243.a)$$

ya da

$$\begin{aligned}
(D_a X_{bc})^\cdot &= D_a \dot{X}_{bc} + \dot{u}_a \dot{X}_{bc} + u_b (D_a \dot{u}^f) X_{fc} + u_c (D_a \dot{u}^f) X_{bf} + u_b \dot{u}^f D_a X_{fc} \\
&\quad + u_c \dot{u}^f D_a X_{bf} + u_a u_b \dot{u}^e v_e^f X_{fc} + u_a u_c \dot{u}^e v_e^f X_{bf} + u_a \dot{u}^e D_e X_{bc} \\
&\quad - u_b v_a^e v_e^f X_{fc} - u_c v_a^e v_e^f X_{bf} - v_a^e D_e X_{bc} - \dot{u}_b v_a^f X_{fc} - u_b \dot{v}_a^f X_{fc} \\
&\quad - \dot{u}_c v_a^f X_{bf} - u_c \dot{v}_a^f X_{bf} + R_{eabf} u^e X_{fc} + R_{eacf} u^e X_{bf}
\end{aligned} \tag{4.243.b}$$

$$\begin{aligned}
(D_a X^a_b)^\cdot &= D_a \dot{X}^a_b + \dot{u}^e \dot{X}_{eb} - u_b \dot{u}^e \dot{u}^d X_{ed} - v_a^e D_e X^a_b - \dot{u}^a v_a^e X_{eb} \\
&\quad - \dot{u}_b v_a^e X^a_e + u_b \dot{u}^e D_a X^a_e + h^{cd} R_{ecdf} u^e X^f_b + h^d_b R_{ecdf} u^e X^{cf}
\end{aligned} \tag{4.243.c}$$

Kovaryant Uzaysal Türevlerin Komütasyon Bağlılıkları ve Genelleştirilmiş Gauss Denklemi

- Bir skaler için:

$$(D_a D_b - D_b D_a) \phi = 2\omega_{ab} \dot{\phi} = 2\eta_{abc} \omega^c \dot{\phi} \quad \text{ya da} \quad \eta^{abc} D_a D_b \phi = 2\omega^c \dot{\phi} \tag{4.244}$$

$$\begin{aligned}
(D^2 D_a - D_a D^2) \phi &= {}^3 R_{ad} (D^d \phi) \\
&\quad - 2\eta_{abc} \left[\omega^c (2D^b \dot{\phi} - v^{bd} D_d \phi + \dot{u}^b \dot{\phi}) + \dot{\phi} D^b \omega^c \right]
\end{aligned} \tag{4.245}$$

$$(D^a D_b D_a - D_b D^2) \phi = {}^3 R_{bd} D^d \phi + 2\eta_{dbc} \omega^c (D^d \dot{\phi} - v^{de} D_e \phi + \dot{u}^d \dot{\phi}) \tag{4.246}$$

- Bir uzaysal vektör için ($X_a u^a = 0$):

$$(D_a D_b - D_b D_a) X_c = {}^3 R_{abcd} X^d + 2\omega_{ab} h_{cd} \dot{X}^d \tag{4.247}$$

$$(D^a D_b - D_b D^a) X_a = {}^3 R_{bd} X^d + 2\eta_{dbf} \omega^f \dot{X}^d \tag{4.248}$$

- Bir uzaysal 2-tansör için ($X_{ab} u^a = X_{ab} u^b = 0$):

$$D_{[a} D_{b]} X_{cd} = \frac{1}{2} ({}^3 R_{mcba} X^m_d + {}^3 R_{mdba} X^m_c) + \omega_{ab} h^m_c h^n_d \dot{X}_{mn} \tag{4.249}$$

- Herhangi bir uzaysal tansör için ($X_{ab...} u^a = X_{ab...} u^b = 0$):

$$D_{[a}D_{b]}T_{cd...ef} = \frac{1}{2} \left({}^3R_{mcba}T^m_d + \dots + {}^3R_{mdba}T^m_c \right) + \omega_{ab}h^m_c h^n_d \dots h^p_e h^r_f \dot{T}_{mn...pr} \quad (4.250)$$

Burada, ${}^3R_{abcd}$ gözlemcinin yerel eylemsizlik sisteminin “Riemann tansörü”dür ve “Genelleştirilmiş ($\omega \neq 0$) Gauss Denklemi” aracılığıyla

$$\begin{aligned} {}^3R_{abcd} &\equiv h^m_a h^n_b h^p_c h^q_d R_{mnpq} - (v_{ac}v_{bd} - v_{bc}v_{ad}) \\ &\Rightarrow {}^3R^{ab}_{cd} = \left(R^{ab}_{cd} \right)_{\perp} - 2v^{[a}_c v^{b]}_d \end{aligned} \quad (4.251)$$

biçiminde tanımlanır ($(R_{abcd})_{\perp} \equiv h^m_a h^n_b h^p_c h^q_d R_{mnpq}$). Eğer $\omega = 0 \Rightarrow v_{ab} = \theta_{ab}$ ise, ${}^3R_{abcd}$, u^a ya dik uzayın 3-eğriliği olur. Riemann tansörünün (2.12) ile verilen ifadesi kullanılarak,

$$\begin{aligned} {}^3R_{abcd} &= -\eta_{abr}\eta_{cds}E^{rs} + \frac{1}{2} (h_{ac}h_b^m h_d^n R_{mn} + h_{bd}h_a^m h_c^n R_{mn} \\ &\quad - h_{ad}h_b^m h_c^n R_{mn} - h_{bc}h_a^m h_d^n R_{mn}) \\ &\quad - \frac{R}{6} (h_{ac}h_{bd} - h_{ad}h_{bc}) - (v_{ac}v_{bd} - v_{ad}v_{bc}) \end{aligned} \quad (4.252)$$

yazılabilir.

${}^3R_{abcd}$ nin simetri özellikleri:

ω nın değeri ne olursa olsun ($=0$ ya da $\neq 0$), şu genel eğrilik tansörü simetriteri sağlanır:

$${}^3R_{abcd} = -{}^3R_{bacd}, \quad {}^3R_{abcd} = -{}^3R_{abdc}, \quad \text{ya da} \quad {}^3R_{abcd} = {}^3R_{[ab][cd]} \quad (4.253)$$

Fakat artık $\omega = 0$ olmadıkça ${}^3R_{abcd} = {}^3R_{cdab}$ ve ${}^3R^a_{[bcd]} = 0$ (Birinci Bianchi Özdeşliği) özellikleri yoktur. Bunların yerine

$$\begin{aligned} {}^3R_{abcd} - {}^3R_{cdab} &= -2(\theta_{ac}\omega_{bd} + \theta_{bd}\omega_{ac} - \theta_{bc}\omega_{ad} - \theta_{ad}\omega_{bc}) \\ &= -2(\sigma_{ac}\omega_{bd} + \sigma_{bd}\omega_{ac} - \sigma_{bc}\omega_{ad} - \sigma_{ad}\omega_{bc}) \\ &\quad - \frac{2}{3}\theta(h_{ac}\omega_{bd} + h_{bd}\omega_{ac} - h_{bc}\omega_{ad} - h_{ad}\omega_{bc}) \end{aligned} \quad (4.254.a)$$

ya da

$${}^3R_{cd}^{ab} - {}^3R_{cd}^{ab} = -8\theta_{[c} \omega_{d]}^{[a} \omega^{b]} \quad (4.254.b)$$

ve

$${}^3R_{[bcd]}^a = 2v_{[b}^a \omega_{cd]} \quad (4.255)$$

şeklindeki özdeşlikler vardır. Buna ilişkin “3-Ricci tansörü” Genelleştirilmiş Gauss Denkleminin kontraksiyonu ile tanımlanır ve

$$\begin{aligned} {}^3R_{bd} &= h^{ac} {}^3R_{abcd} \\ &= h^{ac} \left[(R_{abcd})_{\perp} - (v_{ac} v_{bd} - v_{bc} v_{ad}) \right] \\ &= h^n{}_b h^q{}_d R_{nq} + u^m u^p h^n{}_b h^q{}_d R_{mpq} - (v_a{}^a v_{bd} - v_b{}^a v_{ad}) \end{aligned} \quad (4.256.a)$$

veya

$${}^3R_{bd} = E_{bd} + \frac{1}{2} h^n{}_b h^q{}_d R_{nq} + \frac{1}{2} h_{bd} u^m u^p R_{mp} + \frac{1}{6} R h_{bd} - (v_a{}^a v_{bd} - v_b{}^a v_{ad}) \quad (4.256.b)$$

veya son terimin de açıkça yazılmasıyla

$$\begin{aligned} {}^3R_{bd} &= E_{bd} + \frac{1}{2} h^n{}_b h^q{}_d R_{nq} + \frac{1}{2} h_{bd} u^m u^p R_{mp} + \frac{1}{6} R h_{bd} \\ &\quad - \left(\frac{1}{3} \theta \sigma_{bd} + \frac{2}{9} \theta^2 h_{bd} + \frac{1}{3} \theta \eta_{bdc} \omega^c + 2 \sigma_{[b}{}^e \eta_{d]ec} \omega^c \right. \\ &\quad \left. - \sigma_b{}^e \sigma_{ed} + \omega^2 h_{bd} - \omega_b \omega_d \right) \end{aligned} \quad (4.256.c)$$

biçiminde ifade edilebilir. Eğer $\omega \neq 0$ ise, aşağıdaki antisimetrik kısmının gösterdiği gibi, 3-Ricci tansörü simetrik değildir.

$${}^3R_{[bd]} = -\frac{1}{3} \theta \omega_{bd} + \sigma_{bc} \omega^c{}_d + \omega_{bc} \sigma^c{}_d = -\frac{1}{3} \theta \eta_{bdc} \omega^c - 2 \sigma_{[b}{}^e \eta_{d]ec} \omega^c \quad (4.257)$$

3-Ricci tansörünün kontraksiyonuyla da, 3-skaler eğrilik

$${}^3R = h^{ab} {}^3R_{ab} = R + 2R_{ab} u^a u^b - \frac{2}{3} \theta^2 + 2\sigma^2 - 2\omega^2 \quad (4.258)$$

biçiminde elde edilir.

Bağ denklemlerinin evrimlerinin hesabında, bu bağıntı ve özdeşliklerin yanısıra, EK B’de verilen (B.12)-(B.17) özdeşlikleri de kullanılmaktadır ve izlenecek yöntem şu şekildedir:

Önce, her bir bağ denkleminin zamana göre türevi alınır. Bu aşamada, değişkenlerin uzaysal türevlerinin zaman türevleri ortaya çıkar. Bunlar, (4.241)-(4.243) bağıntıları kullanılarak, değişkenin zaman türevlerinin uzaysal türevleri cinsinden yazılır. Buradaki zaman türevlerini elemek için evrim denklemleri kullanıldığında ortaya çıkacak olan ikinci mertebeden uzaysal türevleri, birinci mertebeden uzaysal türevlere indirgemek için (4.244)-(4.250) komütasyon bağıntıları ile (4.2525), (4.254), (4.256) ve (4.258) ifadelerinden gerekli olanlar kullanılır. Ortaya çıkan terimler uygun şekilde gruplandırılarak bağ denklemleri cinsinden ifade edilir ve en sonunda hala kalan terim varsa, bunları elemek için de EK B’deki (B.12)-(B.17) özdeşliklerinden yararlanılır.

Şimdi bağ denklemlerinin tutarlılık analizine geçebiliriz. Önce, kovaryant bağ denklemlerine herhangi bir kısıtlama getirilmediğinde bağ denklemlerinin evrimine değinelim. Yukarıda anlatılan yöntemi izleyerek uzun tansör hesabı sonrasında şu sonuçları bulmaktayız:

$$\left(\dot{C}_1\right)_{\langle a \rangle} = -\theta(C_1)_a - 2\omega_a(C_2) - 2\omega_f(C_3)_a^f - 2\eta_{aef}\sigma^{eg}(C_3)_g^f - (C_4)_a \quad (4.259)$$

$$\left(\dot{C}_2\right) = -\theta(C_2) + \omega^a(C_1)_a \quad (4.260)$$

$$\left(\dot{C}_3\right)_{\langle ab \rangle} = -\theta(C_3)_{\langle ab \rangle} + \omega_{\langle a}(C_1)_{b \rangle} + \eta_{ef\langle a}\sigma^e_{b \rangle}(C_1)^f \quad (4.261)$$

$$\begin{aligned} \left(\dot{C}_4\right)_{\langle a \rangle} - \frac{1}{2}\eta_{aef}D^e(C_5)^f &= -\frac{4}{3}\theta(C_4)_a + \frac{1}{2}\sigma_{af}(C_4)^f - \frac{1}{2}\eta_{aef}\omega^e(C_4)^f \\ &\quad - \frac{1}{2}(\mu + p)(C_1)_a + \frac{3}{2}\left(E_{af} + \frac{1}{6}\pi_{af}\right)(C_1)^f \\ &\quad + \eta_{aef}\left(E^e_d + \frac{1}{2}\pi^e_d\right)(C_3)^{fd} + \frac{3}{2}\eta_{aef}\dot{u}^e(C_5)^f \end{aligned} \quad (4.262)$$

$$\begin{aligned}
(\dot{C}_5)_{\langle a \rangle} + \frac{1}{2} \eta_{aef} D^e (C_4)^f &= -\frac{4}{3} \theta (C_5)_a + \frac{1}{2} \sigma_{af} (C_5)^f - \frac{1}{2} \eta_{aef} \omega^e (C_5)^f \\
&\quad - \frac{3}{4} \eta_{aef} q^e (C_1)^f + \frac{3}{2} H_{af} (C_1)^f + \frac{1}{2} q_a (C_2) \\
&\quad + \frac{1}{2} q_f (C_3)_a + \eta_{aef} H^{ed} (C_3)_d - \frac{3}{2} \eta_{aef} \dot{u}^e (C_4)^f
\end{aligned} \tag{4.263}$$

Bu sonuçtan kolayca görüldüğü gibi, genel durumda, bağ denklemlerinin evrimleri herhangi bir integrale edilebilirlik koşuluna yol açmamaktadır. Dolayısıyla bağ denklemleri birbirleriyle tutarlıdır ve evrim denklemleriyle tutarlı bir biçimde evrimleşmektedirler. Yukarıdaki analizde, yalnızca ve yalnızca toplam efektif dinamik değişkenler için içine girmiştir ve elde edilen sonuç bir uzay-zamanın ne metriğine, ne Ricci tansörüne, ne de Einstein tansörüne bağlıdır.

Şimdi, makaslamasız akışkan varsayımını yaparak bu varsayım altında, bağ denklemlerinin tutarlılığının sağlanıp sağlanmadığını bazı özel durumlar altında inceleyelim. Bu özel durumların ilki pür zarevren için ivmesiz pür-Coulombsu durum, ikincisi ise indüklenmiş graviteli $F(R)$ -zarevren için ivmesiz durum olacaktır.

1. Özel durum: ivmesiz pür-Coulombsu durum

Roy Maartens tarafından “pür-Coulombsu” olarak adlandırılan [72,73], ε_{ab} simetrik tansörünün (4.233) ile verilen ayrışımından hareketle tanımlanan, zarda efektif yerel olmayan enerji akısı ve zarda efektif yerel olmayan eşyönsüz basınç tansörünün ikisinin birden sıfır olması ($Q_a = 0$ ve $P_{ab} = 0$) durumu ile ivmesizlik kısıtlamaları altında zarda makaslamasız mükemmel akışkan iddiasının geçerli olup olmadığını araştıralım. Bunun için önce, (4.45)-(4.58) ile verilen zarda evrim ve bağ denklemlerini

$$\sigma = 0, \quad \dot{u}_a = 0, \quad Q_a = 0 = P_{ab}, \quad q_a^m = 0 = \pi_{ab}^m \tag{4.264}$$

kısıtlamaları altında, yani makaslamasız, ivmesiz, pür-Coulombsu, mükemmel bir akışkan için $\beta = 0 \Rightarrow \mu^F = p^F = q_a^F = \pi_{ab}^F = 0$ olarak tekrar yazalım:

Evrin denklemleri:

$$(E_1): \quad \dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 + 2\omega^2 - \frac{\kappa^2}{2}(\mu^t + 3p^t) + \Lambda \quad (4.265)$$

$$(E_2): \quad \dot{\omega}^a = -\frac{2}{3}\theta\omega^a \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = -\frac{2}{3}\theta\omega \quad (4.266)$$

$$(E_3)_{ab} \rightarrow (K_3)_{ab}: \quad 0 = -\omega_a\omega_b + \frac{1}{3}\omega^2 h_{ab} - E_{ab} \quad (4.267)$$

$$(E_4)_{ab}: \quad \dot{E}_{ab} = \frac{1}{2}\eta_{aef}D^e H^f{}_b + \frac{1}{2}\eta_{bef}D^e H^f{}_a - \theta E_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{aef}E^e{}_b\omega^f - \frac{1}{2}\eta_{bef}E^e{}_a\omega^f \quad (4.268)$$

$$(E_5)_{ab}: \quad \dot{H}_{ab} = -\frac{1}{2}\eta_{aef}D^e E^f{}_b - \frac{1}{2}\eta_{bef}D^e E^f{}_a - \theta H_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{aef}H^e{}_b\omega^f - \frac{1}{2}\eta_{bef}H^e{}_a\omega^f \quad (4.269)$$

$$(E_6): \quad \dot{\mu}^m = -(\mu^m + p^m)\theta \quad (4.270)$$

$$(E_7)_a \rightarrow (K_7)_a: \quad 0 = -D_a p^m \quad (4.271)$$

$$(EE_6): \quad \dot{U} = -\frac{4}{3}\theta U \quad (4.272)$$

$$(EE_7)_a \rightarrow (KK_7)_a: \quad 0 = -\frac{\kappa^4}{6}(\mu^m + p^m)D_a\mu^m - \frac{1}{3}D_a U \quad (4.273)$$

$$(E_6^t): \quad \dot{\mu}^t = -(\mu^t + p^t)\theta \quad (4.274)$$

$$(E_7^t)_a \rightarrow (K_7^t)_a: \quad 0 = -D_a p^t \quad (4.275)$$

Bağ denklemleri:

$$(C_1)_a: \quad 0 = -\frac{2}{3}D_a\theta + \eta_{abc}D^b\omega^c \quad (4.276)$$

$$(C_2): \quad 0 = D_a\omega^a \quad (4.277)$$

$$(C_3)_{ab} : 0 = H_{ab} + \frac{1}{2}(D_a \omega_b + D_b \omega_a) \quad (4.278)$$

$$(C_4)_a : 0 = D_b E^b_a - \frac{\kappa^2}{3} D_a \mu^t - 3H^b_a \omega_b \quad (4.279)$$

$$(C_5)_a : 0 = D_b H^b_a + \kappa^2 (\mu^t + p^t) \omega_a + 3E^b_a \omega_b \quad (4.280)$$

Yukarıdaki listeden kolayca anlaşılacağı üzere; $(E_3)_{ab}$, $(E_7)_a$, $(EE_7)_a$ ve $(E_7^t)_a$ evrim denklemleri sırasıyla; $(K_3)_{ab}$, $(K_7)_a$, $(KK_7)_a$, $(K_7^t)_a$ ile gösterdiğimiz yeni bağ denklemlerine dönüşmektedirler. Genel durumda bağların tutarlı olduklarını bilmemize rağmen, (4.264) koşullarının dayatılmasıyla oluşan yeni bağ denkleminin tutarsızlıklara yol açmayacağına peşinen bir garantisi yoktur. O halde şimdi bu $\{(C_1)_a, (C_2), (C_3)_{ab}, (C_4)_a, (C_5)_a, (K_3)_{ab}, (K_7)_a, (KK_7)_a, (K_7^t)_a\}$ yeni bağ sisteminin evrimleşmesini incelemek gerekmektedir. Yukarıdaki yolu izleyerek, bu bağ denklemlerinin evrimleri için şunları buluyoruz:

$$(\dot{C}_1)_a + D_f (K_3)_a^f = -\theta(C_1)_a - 2\omega_a(C_2) - 2\omega_f(C_3)_a^f - (C_4)_a - (K_7)_a \quad (4.281)$$

$$(\dot{C}_2) = -\theta(C_2) + \omega^a(C_1)_a \quad (4.282)$$

$$(\dot{C}_3)_{\langle ab \rangle} - \eta_{ef} D^e_a (K_3)_{\langle b \rangle}^f = -\theta(C_3)_{\langle ab \rangle} + \omega_{\langle a} (C_1)_{\rangle b} \quad (4.283)$$

$$\begin{aligned} (\dot{C}_4)_a - \frac{1}{2} \eta_{aef} D^e (C_5)^f = & -\frac{4}{3} \theta(C_4)_a - \frac{1}{2} \eta_{aef} \omega^e (C_4)^f - \frac{\kappa^2}{2} (\mu^t + p^t) (C_1)_a \\ & + \frac{3}{2} E_{af} (C_1)^f + \eta_{aef} E^e_d (C_3)^{fd} \\ & - \eta_{aef} H^e_d (K_3)^{fd} - \frac{1}{3} \theta(K_7)_a - \frac{1}{2} \eta_{aef} \omega^e (K_7)^f \end{aligned} \quad (4.284)$$

$$\begin{aligned} (\dot{C}_5)_a + \frac{1}{2}\eta_{aef}D^e(C_4)^f - \frac{1}{2}\eta_{aef}D^e(K_7)^f = & -\frac{4}{3}\theta(C_5)_a - \frac{1}{2}\eta_{aef}\omega^e(C_5)^f \\ & + \frac{3}{2}H_{af}(C_1)^f + \eta_{aef}H^{ed}(C_3)^f_d + \eta_{aef}E^{ed}(K_3)^f_d \end{aligned} \quad (4.285)$$

$$(\dot{K}_7)_a = -\frac{1}{3}\theta(K_7)_a + \eta_{aef}\omega^e(K_7)^f \quad (4.286)$$

$$(\dot{K}_7^t)_a = -\frac{1}{3}\theta(K_7^t)_a + \eta_{aef}\omega^e(K_7^t)^f \quad (4.287)$$

$$\begin{aligned} (\dot{K}_3)_{\langle ab \rangle} = & -\theta(K_3)_{\langle ab \rangle} + 2\eta_{ef\langle a}\omega^e(K_3)^f_{b \rangle} + \frac{1}{2}D_{\langle a}(C_1)_{b \rangle} - \eta_{ef\langle a}D^e(C_3)^f_{b \rangle} \\ & - \frac{4}{3}\theta\omega_{\langle a}\omega_{b \rangle} + \frac{1}{3}h_{ab}D^cD_c\theta \end{aligned} \quad (4.288)$$

$$\begin{aligned} (KK_7)_a = & -\frac{5}{3}\theta(KK_7)_a + \eta_{aef}\omega^e(KK_7)^f \\ & + \frac{\kappa^4}{9}(\mu^m + p^m)\theta D_a\mu^m + \frac{1}{6}\left[\kappa^4(\mu^m + p^m)^2 + \frac{8}{3}U\right]D_a\theta \end{aligned} \quad (4.289)$$

Bu sonuçtan kolayca, (4.281)-(4.287) denklemlerinin, bağı denklemleri sisteminde herhangi bir tutarsızlığa yol açmadıkları; ancak, (4.288) ve (4.289) denklemlerinin tutarlılıkları için, iki yeni bağı denklemine (integre edilebilirlik koşuluna) ihtiyaç duyulduğu görülmektedir. Eğer

$$0 = (KK_3)_{ab} \equiv -\frac{4}{3}\theta\omega_{\langle a}\omega_{b \rangle} + \frac{1}{3}h_{ab}D^cD_c\theta \quad (4.290)$$

$$0 = (KKK_7)_a \equiv \frac{\kappa^4}{9}(\mu^m + p^m)\theta D_a\mu^m + \frac{1}{6}\left[\kappa^4(\mu^m + p^m)^2 + \frac{8}{3}U\right]D_a\theta \quad (4.291)$$

biçiminde iki yeni bağı denklemini tanımlı yapılsa, (4.288) ve (4.289) denklemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} (\dot{K}_3)_{\langle ab \rangle} = & -\theta(K_3)_{\langle ab \rangle} + 2\eta_{ef\langle a}\omega^e(K_3)^f_{b \rangle} + \frac{1}{2}D_{\langle a}(C_1)_{b \rangle} \\ & - \eta_{ef\langle a}D^e(C_3)^f_{b \rangle} + (KK_3)_{ab} \end{aligned} \quad (4.292)$$

$$(KK_7)_a = -\frac{5}{3}\theta(KK_7)_a + \eta_{aef}\omega^e(KK_7)^f + (KKK_7)_a \quad (4.293)$$

biçiminde, bağ denklemleri cinsinden yazılabilirler. Böylece, evrim denklemlerinden dönüşmüş olan $(K_3)_{ab}$ ve $(KK_7)_a$ bağlarının, artık $(KK_3)_{ab}$ ve $(KKK_7)_a$ bağ denklemlerini de içeren sistemde herhangi bir tutarsızlığa yol açmadıkları kolayca görülmektedir. Fakat bu kez, (4.290) ve (4.291) ile tanımlanan $(KK_3)_{ab}$ ve $(KKK_7)_a$ yeni bağ denklemlerinin tutarlılıklarının incelenmesi gerekmektedir.

Şimdi, herhangi bir skaler için (4.244) komütasyon bağıntısını da kullanarak, (4.271) ve (4.275) denklemlerinin uzaysal kovaryant türevlerinden

$$D_{(a}D_{b)}p = \eta_{abc}\omega^c\dot{p}^m = 0 \quad \text{ve} \quad D_{(a}D_{b)}p^t = \eta_{abc}\omega^c\dot{p}^t = 0 \quad (4.294)$$

bağıntıları elde edilir ki, buradan kolayca görüldüğü gibi ya $\omega^c = 0$, ya da $\dot{p}^m = \dot{p}^t = 0$ dır. $\omega^c = 0$ durumu, makaslamasız akışkan iddiasının ispatıdır. Demek ki, bundan sonra sadece basınçların sabit olması $\dot{p}^m = \dot{p}^t = 0$ durumunu incelememiz gerekmektedir. O halde kullanmamız gereken efektif dinamik büyüklükler pür zarevren için yazılabilecek

$$\mu^t = \mu^m + \frac{1}{2\lambda}(\mu^m)^2 + \frac{6}{\kappa^4\lambda}U \quad (4.295.a)$$

$$p^t = p^m + \frac{1}{2\lambda}\left((\mu^m)^2 + 2\mu^m p^m\right) + \frac{2}{\kappa^4\lambda}U \quad (4.295.b)$$

$$q_a^t = 0 \quad (4.295.c)$$

$$\pi_{ab}^t = 0 \quad (4.295.d)$$

şeklindeki bağıntılar olacaktır. Bu noktadan sonra analizimiz şöyle devam edecektir:

Sabit basınçlar durumunda (4.295.b) ifadesinin zamana göre türevi alınır, (4.270) ve (4.272) denklemlerinin de kullanılmasıyla,

$$\left[\frac{3}{8}\kappa^4(\mu^m + p^m)^2 + U\right]\theta = 0 \quad (4.296)$$

elde edilir. Bu denklem ile birlikte (4.291) denklemi

$$0 = (KKK_7)_a = \frac{\kappa^4}{9} (\mu^m + p^m) \theta D_a \mu^m \quad (4.297)$$

biçimine indirgenir ve kolayca görüldüğü gibi (4.297) nin sağlanması için üç olasılık vardır.

1. Eğer $\theta = 0$ ise, (4.288) ve (4.289) denklemleri diğer denklemlerle tutarlı olurlar ve $(KK_3)_{ab}$ ve $(KKK_7)_a$ denklemlerinin tanımlanmasına gerek kalmaz. Bu durum, makaslamaşız akışkan iddiasının ispatıdır.

2. Eğer $D_a \mu^m = 0$ ise, (4.244) ve (4.270) kullanılarak

$$\dot{\mu}^m = 0 = -(\mu^m + p^m) \theta = 0 \quad (4.298)$$

elde edilir ki, bunun sağlanması için iki olasılık olduğu görülmektedir:

i. $\theta = 0$ durumu, 1. durum ile aynı durumdur ve iddianın ispatıdır.

ii. $\mu^m + p^m = 0$ durumu, 3. durumun özel bir halidir.

2. Her ne kadar makaslamaşız akışkan iddiası $\mu^m + p^m \neq 0$ kabul etse de, $\mu^m + p^m = 0$ durumunu da inceleyim. Bu durumda, (4.273) denklemi,

$$(KK_7)_a = 0 = -\frac{1}{3} D_a U = 0 \quad (4.299)$$

biçimine indirgenir. Bunun kovaryant uzaysal türevini alıp (4.270) komütasyon bağıntısını da kullanarak,

$$D_{(a} D_{b)} U = \eta_{abc} \omega^c \dot{U} = 0 \quad (4.300)$$

elde ederiz. Burada yine iki olasılık bulunmaktadır:

i. ya $\omega = 0$ dır ki bu, iddianın ispatıdır.

ii. ya da $\dot{U} = 0$ dır. Bu durumda (4.272) denkleminde

(a) ya $\theta = 0$ dır, bu durum iddianın ispatıdır.

(b) ya da $U = 0$ dır. Bu durumda (4.273) ile verilen $(KK_7)_a$ özdeş olarak sağlanır.

Bu son durumda $(\mu^m + p^m = 0, U = 0)$, $(KK_7)_a$ denkleminin sağlanması için, dönmenin ya da genişlemenin sıfır olması gerekmemektedir. Ancak, (4.290) denkleminin de $\mu^m + p^m = 0, U = 0$ koşulu altında tutarlı olup olmadığı incelenmelidir. Bu son durumda evrim ve bağ denklemleri setinin, standart rölativitedeki formlarından herhangi bir farkları olmadıkları görülmektedir. Standart rölativitede, $\dot{u}_a = 0$ durumu için makaslamasız mükemmel akışkan iddiasının ispatı Senovilla ve diğ. [16] tarafından yapılmıştır. Genişlemenin veya dönmenin veyahut da her ikisinin birden sıfır olması durumunda, bağ denklemlerinden oluşan sistem tutarlı olmaktadır.

O halde, zarın makaslamasız ve ivmesiz bir mükemmel akışkan ile dolu olduğu ve bulk'ta maddenin bulunmadığı, pür-Coulombsu bir durumda, aynı anda hem genişleyen hem de dönen bir evren modeli bulunmamaktadır. Başka bir deyişle, söz konusu kısıtlamalar altında, pür zarda makaslamasız mükemmel akışkan iddiası geçerlidir.

2. özel durum: ivmesiz durum

Bu bölümde, yukarıdaki analiz zarın ivmesiz ve makaslamasız bir mükemmel akışkan ile dolu olduğu ve yine bulk'ta maddenin olmadığı, fakat bu sefer indüklenmiş graviteli $F(R)$ -zarevren modelleri için ele alınacaktır. Ayrıca, (4.233) ile verilen ${}^5\mathcal{E}_{ab}$ simetrik tansörü üzerine de hiçbir kısıtlama yapılmayacaktır.

Şimdi,

$$\dot{u}_a = 0, \quad q_a^m = 0 = \pi_{ab}^m \quad (4.301)$$

kısıtlamaları altında, makaslamasız mükemmel akışkan iddiasını araştırmak için zarda evrim ve bağ denklemlerini yeniden yazalım.

Evrım Denklemleri:

$$(E_1): \quad \dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 + 2\omega^2 - \frac{\kappa^2}{2}(\mu^t + 3p^t) + \Lambda \quad (4.302)$$

$$(E_2): \quad \dot{\omega}^a = -\frac{2}{3}\theta\omega^a \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = -\frac{2}{3}\theta\omega \quad (4.303)$$

$$(E_3)_{ab} \rightarrow (K_3)_{ab}: \quad 0 = -\omega_a\omega_b + \frac{1}{3}\omega^2 h_{ab} - \left(E_{ab} - \frac{\kappa^2}{2}\pi^t_{ab}\right) \quad (4.304)$$

$$\begin{aligned} (\dot{E}_4)_{ab}: \quad & \left(\dot{E}_{ab} + \frac{\kappa^2}{2}\dot{\pi}^t_{ab}\right) = \frac{1}{2}(\eta_{aef}D^e H^f{}_b + \eta_{bef}D^e H^f{}_a) \\ & - \frac{\kappa^2}{4}(D_a q^t{}_b + D_b q^t{}_a) + \frac{\kappa^2}{6}h_{ab}D^e q^t{}_e - \theta\left(E_{ab} + \frac{\kappa^2}{6}\pi^t_{ab}\right) \\ & - \frac{1}{2}\eta_a{}^{ef}\left(E_{eb} + \frac{\kappa^2}{2}\pi^t_{eb}\right)\omega_f - \frac{1}{2}\eta_b{}^{ef}\left(E_{ea} + \frac{\kappa^2}{2}\pi^t_{ea}\right)\omega_f \end{aligned} \quad (4.305)$$

$$\begin{aligned} (\dot{E}_5)_{ab}: \quad & \dot{H}_{ab} = -\frac{1}{2}\eta_a{}^{ef}D_e\left(E_{fb} - \frac{\kappa^2}{2}\pi^t_{fb}\right) - \frac{1}{2}\eta_b{}^{ef}D_e\left(E^t{}_{fa} - \frac{\kappa^2}{2}\pi^t_{fa}\right) \\ & - \theta H_{ab} + \frac{3\kappa^2}{4}(\omega_a q^t{}_b + \omega_b q^t{}_a) - \frac{\kappa^2}{2}\omega^c q^t{}_c h_{ab} - \frac{1}{2}(\eta_{aef}H^e{}_b + \eta_{bef}H^e{}_a)\omega^f \end{aligned} \quad (4.306)$$

$$(E_6): \quad \dot{\mu}^m = -(\mu^m + p^m)\theta \quad (4.307)$$

$$(E_7)_a \rightarrow (K_7)_a: \quad 0 = -D_a p^m \quad (4.308)$$

$$(EE_6): \quad \dot{U} = -\frac{4}{3}\theta U - D_a Q^a \quad (4.309)$$

$$(EE_7)_a: \quad \dot{Q}_a = -\frac{\kappa^4}{6}(\mu^m + p^m)D_a \mu^m - \frac{1}{3}D_a U - D^b P_{ab} - \frac{4}{3}\theta Q_a + \eta_{abc}\omega^c Q^b \quad (4.310)$$

$$(E_6^t): \quad \dot{\mu}^t = -D^a q^t{}_a - (\mu^t + p^t)\theta \quad (4.311)$$

$$(E_7^t)_a: \quad \dot{q}^t{}_a = -D_a p^t - D^b \pi^t_{ab} - \frac{4}{3}\theta q^t{}_a + \eta_a{}^{bc}q^t{}_b \omega_c \quad (4.312)$$

Bağ Denklemleri:

$$(C_1)_a : 0 = -\frac{2}{3}D_a\theta + \eta_{abc}D^b\omega^c + \kappa^2 q^t{}_a \quad (4.313)$$

$$(C_2): 0 = D_a\omega^a \quad (4.314)$$

$$(C_3)_{ab}: 0 = H_{ab} + \frac{1}{2}(D_a\omega_b + D_b\omega_a) \quad (4.315)$$

$$(C_4)_a: 0 = D^b\left(E_{ba} + \frac{\kappa^2}{2}\pi^t{}_{ba}\right) - \frac{\kappa^2}{3}D_a\mu^t + \frac{\kappa^2}{3}\theta q^t{}_a + \frac{3\kappa^2}{2}\eta_a{}^{ef}\omega_e q^t{}_f - 3H^b{}_a\omega_b \quad (4.316)$$

$$(C_5)_a: 0 = D_b H^b{}_a + \frac{\kappa^2}{2}\eta_a{}^{ef}D_e q^t{}_f + \kappa^2(\mu^t + p^t)\omega_a + 3\left(E_{ba} - \frac{\kappa^2}{6}\pi^t{}_{ba}\right)\omega^b \quad (4.317)$$

(4.301) ve (4.308) denklemlerine dikkat edilecek olursa, bunların (4.301) kısıtlamaları altında, evrim denkleminde birer bağ denklemine dönüştükleri görülmektedir.

(4.301) koşulları altında yazılmış olan yukarıdaki bağ denklemlerinin, herhangi bir tutarsızlığa yol açıp açmadıklarını incelemek için, (4.304), (4.308), (4.313)-(4.317) ile verilen yeni bağ sisteminin evrimleşmesini incelemek gerekmektedir. Daha önce yapılabilecek tarzda, bu bağ denklemlerinin evrimleri için şunları buluyoruz:

$$(\dot{C}_1)_a + D_f(K_3)_a{}^f = -\theta(C_1)_a - 2\omega_a(C_2) - 2\omega_f(C_3)_a{}^f - (C_4)_a \quad (4.318)$$

$$(\dot{C}_2) = -\theta(C_2) + \omega^a(C_1)_a \quad (4.319)$$

$$(\dot{C}_3)_{\langle ab \rangle} - \eta_{ef\langle a}D^e(K_3)_{b \rangle}{}^f = -\theta(C_3)_{\langle ab \rangle} + \omega_{\langle a}(C_1)_{b \rangle} \quad (4.320)$$

$$\begin{aligned} (\dot{C}_4)_a - \frac{1}{2}\eta_{aef}D^e(C_5)^f &= -\frac{4}{3}\theta(C_4)_a - \frac{1}{2}\eta_{aef}\omega^e(C_4)^f \\ &\quad - \frac{\kappa^2}{2}(\mu^t + p^t)(C_1)_a + \frac{3}{2}\left(E_{af} + \frac{\kappa^2}{6}\pi^t{}_{af}\right)(C_1)^f \end{aligned}$$

$$+ \eta_a^{ef} \left(E_{ed} - \frac{\kappa^2}{2} \pi_{ed}^t \right) (C_3)_f^d - \eta_{aef} H^e_d (K_3)^{fd} + \frac{1}{2} q^t_f (K_3)_a^f \quad (4.321)$$

$$\begin{aligned} (\dot{C}_5)_a + \frac{1}{2} \eta_{aef} D^e (C_4)^f &= -\frac{4}{3} \theta (C_5)_a - \frac{1}{2} \eta_{aef} \omega^e (C_5)^f - \frac{3\kappa^2}{4} \eta_a^{ef} q^t_e (C_1)^f \\ &+ \frac{3}{2} H_{af} (C_1)^f + \frac{\kappa^2}{2} q^t_a (C_2) + \frac{\kappa^2}{2} q^t_f (C_3)_a^f \\ &+ \eta_{aef} H^{ed} (C_3)_d^f + \eta_a^{ef} \left(E_{ed} + \frac{\kappa^2}{2} \pi_{ed}^t \right) (K_3)_d^f \end{aligned} \quad (4.322)$$

$$(\dot{K}_7)_a = -\frac{1}{3} \theta (K_7)_a + \eta_{aef} \omega^e (K_7)^f \quad (4.323)$$

$$\begin{aligned} (\dot{K}_3)_{ab} &= -\theta (K_3)_{ab} + \eta_{aef} \omega^e (K_3)^f_b + \eta_{bef} \omega^e (K_3)^e_a + \frac{1}{2} D_{\langle a} (C_1)_{b \rangle} - \eta_{ef \langle a} D^e (C_3)^f_{b \rangle} \\ &+ \kappa^2 \dot{\pi}_{ab}^t - \frac{4}{3} \theta \omega_a \omega_b + \frac{2}{3} \theta \omega^2 h_{ab} + \frac{1}{6} D_a D_b \theta + \frac{1}{6} D_b D_a \theta - \frac{1}{9} h_{ab} D^e D_e \theta \\ &+ \frac{2\kappa^2}{3} \theta \pi_{ab}^t - \kappa^2 \eta_a^{ef} \omega_e \pi_{fb}^t - \kappa^2 \eta_b^{ef} \omega_e \pi_{af}^t \end{aligned} \quad (4.324)$$

(4.318)-(4.323) ifadeleri incelendiğinde, bunların herhangi bir tutarsızlığa yol açmadığı, bağ denklemlerinin zaman türevlerinin, diğer bağ denklemleri ve de kendileri cinsinden yazılabildiği görülmektedir. (4.324) denklemi ise, diğer bağ denklemleri cinsinden ifade edilememekle birlikte, ancak

$$\begin{aligned} \kappa^2 \dot{\pi}_{ab}^t - \frac{4}{3} \theta \omega_a \omega_b + \frac{2}{3} \theta \omega^2 h_{ab} + \frac{1}{6} D_a D_b \theta + \frac{1}{6} D_b D_a \theta - \frac{1}{9} h_{ab} D^e D_e \theta \\ + \frac{2\kappa^2}{3} \theta \pi_{ab}^t - \kappa^2 \eta_a^{ef} \omega_e \pi_{fb}^t - \kappa^2 \eta_b^{ef} \omega_e \pi_{af}^t = 0 \end{aligned} \quad (4.325)$$

biçiminde bir bağıntı tanımlandığında sistemde bir tutarsızlığa yol açmadığı görülmektedir. Bu son denklem, yeni bir bağ denklemini değil, fakat

$$\begin{aligned} \kappa^2 \dot{\pi}_{ab}^t &= \frac{4}{3} \theta \omega_a \omega_b - \frac{2}{3} \theta \omega^2 h_{ab} - \frac{1}{6} D_a D_b \theta - \frac{1}{6} D_b D_a \theta + \frac{1}{9} h_{ab} D^e D_e \theta \\ &- \frac{2\kappa^2}{3} \theta \pi_{ab}^t + \kappa^2 \eta_a^{ef} \omega_e \pi_{fb}^t + \kappa^2 \eta_b^{ef} \omega_e \pi_{af}^t \end{aligned} \quad (4.326)$$

biçiminde, π_{ab}^t için bir evrim denklemidir. Bu aşamadan sonra, π_{ab}^t için böyle bir evrim denkleminin gerçekten de var olup olamayacağını cevaplamak mümkün görünmemektedir. Zira, (4.235.d) ile verilen π_{ab}^t ifadesinin içinde bulk'ın etkisinden kaynaklanan bilinmeyen P_{ab} tansörüyle birlikte, ifadesi (4.239) ile verilen π_{ab}^F indüklenmiş eşyönsüzlük tansörü bulunmaktadır. Bu tansör hakkında bir bilgi edinmek için, (4.239) dan görüleceği üzere, 4-boyutlu G_{ab} Einstein tansörünün bilinmesine gerek bulunmaktadır. Bunun bilinmesi ise, özel bir evren metriği seçip çalışmak anlamına gelmektedir ki, böyle bir şey herhangi bir metrik seçimine dayalı olmayan kovaryant analiz yaklaşımına aykırı bir durumdur. Bir başka engeli de bilinmeyen P_{ab} tansörü oluşturmaktadır. Zira, bunun bilinmesi için bir bulk metriği seçmek gerekmektedir. Her iki durum da, pek çok seçenek arasından deneme-yanılmaya ve şansa dayalı bir uğraşı mahiyetindedir. Biz burada, yalnızca, ivmesiz durum için makaslama sıfır olduğunda, bağ denklemlerinin evrimlerinin tutarsızlığıyla karşılaşmadığı için, hem genişleyen hem de dönen bir modelin en azından yok olmadığını göstermiş olmaktadır. Başka bir deyişle, (4.326) denklemi $F(R)$ -zarevren ya da bunun özel hali olan pür zarevren kozmolojisinde, makaslamasız mükemmel akışkan iddiasının geçerli olması sonucunu zorunlu olarak doğurmamaktadır. Bu konuyu daha netleştirmek için (4.326) denklemini sağlayabilecek metrikler denenmesini ilerideki çalışmalarımıza bırakıyoruz. Yukarıda karşılaşılan güçlükler Maeda ve Torii'nin Gauss-Bonnet'li zarevren modelinin indüklenmiş graviteli durumuna (3.108) deki gibi genelleştirilmesinde de karşımıza çıkmaktadır. Ancak, bu teoride 1+3 kovaryant analiz yönteminin uygulanmasını imkansız kılan daha da önemli bir engeli, (3.99) ile verilen bağdaştırma koşulu oluşturmaktadır; zira, bu denklemden K_{ab} dışsal eğriliği çekip de (3.98) e yerleştirilerek zar üzerinde efektif Einstein alan denklemlerini (4.226) ve dolayısıyla (4.231) gibi yazmak mümkün olamamaktadır. Dışsal eğriliğin bilinebilmesi için herşeyden önce 5-boyutlu bulk geometrisinin ve de zarın bu geometriye yatırılma denklemlerinin bilinmesine gereksinim bulunmaktadır. Bu ise, yine yukarıda söylenildiği gibi, deneme-yanılmaya dayalı ve matematiksel olarak da işlenebilir, amaca uygun çok sayıda metrikler denenmesini gerektiren ve sonucun peşinen öngörülemezliği nitelikte uğraşlar demektir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu Tez’de, gerek birtakım kozmolojik sorunlara çözüm getirmeye, gerekse de gravitasyonu kuvantalaştırma amacı gütmeye dayanan nedenlerle, Einstein’ın GRT’sine alternatif olarak ileri sürülen ve genel olarak “değişikliğe uğratılmış yüksek mertebeden gravitasyon teorisi” olarak anılan teoriler çerçevesinde, rölativist kozmolojinin makaslamasız mükemmel akışkan iddiasını ele aldık. Bu teorilerden ilk ikisi R skaler eğriliğine göre lineer olan 4-boyutlu standart EH aksiyonunun, R skaler eğriliği ve G pür Gauss-Bonnet teriminin keyfi bir $F(R,G)$ fonksiyonuyla değiştirilmiş şekliyle elde edilmiş $F(R,G)$ -gravite teorisinin özel durumları olan $F(R)$ -gravite ile $F(G)$ -gravite teorileridir. Sonuncusu ise, 5-boyutlu genelleştirilmiş zarevren modelidir. Bu çalışmamızda, söz konusu teorilerin matematiksel yapısının GRT’ye nispetle kaydadeğer bir şekilde karmaşık olduğunu göz önünde bulundurarak klasik metrik yaklaşım ile alan denklemlerinin klasik hesaplanmasına hiç girmedik. Aksi takdirde, metriğe göre genel olarak dördüncü mertebeden türevli denklemlerle iş görmek, ve ayrıca da modellerin simetri özelliklerinden yararlanamamak ve dahası kinematik öğeleri açık bir şekilde ortaya çıkaramamak gibi olumsuzluklarla karşılaşacaktık. Böyle bir yaklaşım yerine, akışkanla dolu bir evren varsayımı altında, güçlü bir yöntem olma özelliğini taşıyan uzay-zamanın 1+3 kovaryant ayrışım yöntemini kullanmayı tercih ettik. Bu yöntem, zarevren modelinde uyguladığımız gibi, hem kovaryant bağ koşullarının tutarlılık analizini gerçekleştirmemizi mümkün kıldı, hem de kolayca elde edilebilecek tetrad versiyonları sayesinde, $F(R)$ ve $F(G)$ -gravitede seçilmiş bir metrik için, integre edilebilirlik koşullarını da içerecek şekilde, aynı anda tüm bilgileri kullanan tam (exact) bir denklem sistemi oluşturmamızı sağladı. EAD’ye geometrik düzeltmelerin söz konusu olduğu değişikliğe uğratılmış yüksek mertebeden bu teorilerde, 1+3 kovaryant ayrışım yönteminin uygulanabilmesine olanak sağlayan temel çıkış noktası, efektif akışkan yorumu olmuştur. Bu, gerek 4-boyutta $F(R,G)$ -den kaynaklanan, gerekse de 5-boyutta 3-boyutlu zar üzerinde efektif Einstein denklemleri yazılması sürecinde ortaya çıkan geometrik kökenli terimler topluluğunu hipotetik (varsayımsal) “eğrilik akışkanı” olarak yorumlayıp buna enerji yoğunluğu, basınç, ısı

akısı ve eşyönsüzlük basınç tansörü olmak üzere efektif dinamik değişkenler bağlanmasına olanak sağlamıştır. Bu söylenenler ışığında, biz de bu çalışmada, efektif akışkan yorumunu benimseyerek önce, $F(R,G)$ -gravitenin alan denklemlerinin eğrilik değişkenlerine bağlı geometrik olarak ortaya çıkan düzeltme terimlerini, bir eğrilik akışkanının efektif enerji-momentum tansörü olarak yorumlayıp (3.30) bağıntılarını kullanarak bunlara bağlanan (4.16)-(4.19) efektif değişkenleri hesapladık. Öte yandan, bilinen maddeye bağlanan madde-enerji tansörünü de göz önüne alarak ve bir efektif madde-enerji tansörü de tanımlayarak sonuçta, (4.7) bağıntısı aracılığıyla bir toplam efektif enerji-momentum tansörü oluşturduk. Bu, $F(R,G)$ -gravitenin alan denklemlerini (4.6) daki gibi standart Einstein denklemleri biçiminde ifade etmemizi sağladı. Bu yaklaşımda, $F(R,G)$ nin alan denklemleri, artık, (4.43) ile gösterilen anahtar bağıntılara indirgenmiş olmaktadır. Literatürde, bu yaklaşımın ve alan denklemlerinin bu tür işlenişinin açık bir şekilde böyle yapıldığına rastlamamış olduğumuzu söylemeliyiz. Bu yaklaşım, rölativist kozmoloji için tesis edilmiş olan 1+3 kovaryant evrim ve bağ denklemlerini ve de bunların tetrad versiyonlarını, tanımlanan $\mu^{toplamlar efektif}$, $p^{toplamlar efektif}$, vb. değişkenleri sayesinde, doğrudan doğruya bu yeni teori çerçevesinde (4.45)-(4.58) ve (4.59)-(4.77) denklemlerindeki gibi ifade etmemizi mümkün kılmıştır. Yukarıdaki formalizm çerçevesinde, Bulgular bölümünde, önce $F(R)$ -gravite teorisi için makaslamasız akışkan iddiasını stasyonere olmayan (yani genişlemeli) duruma genelleştirilmiş Gödel modeli ile dönen Bianchi-tip II ve de Bianchi-tip IX modelleri için ele aldık ve tetrad denklemlerini kullanarak her bir model için bulunabilecek tüm denklemleri tek bir kalemde elde ettik. Geriye, elde edilen denklem sisteminin, modelin parametrelerine olduğu kadar zamana bağlı bir ölçek çarpanının varlığına göre, $\mu^m + p^m \neq 0$ zorunluluğu altında, tutarlı olup olmadığını araştırmak ve tartışmak kalmaktadır.

Denklem sisteminin analizi sonucunda $F(R)$ -gravitede genişleyen Gödel evreni ve hatta stasyonere Gödel modeli olamayacağını bulduk. Şayet, rölativist kozmolojide Gödel evreninin nedensellik ilkesini ihlal ettiği ve ayrıca da Mach ilkesine aykırı bir çözüm olduğu düşünülürse, $F(R)$ -gravite tarafından dışarılanmış olması, $F(R)$ -gravite lehine bir olumluluk olarak yorumlanabilir. Göz önüne aldığımız ikinci model olan dönmeli Bianchi-tip II evreninin, denklem sisteminde tutarsızlıklara ve çelişkilere yol açtığı için $F(R)$ -gravite tarafından bir çözüm olarak kabul edilmediğini gösterdik. Dönmeli

Bianchi-tip IX modeline gelince, tüm denklemlerin tutarlılığının yalnızca $v_1 \neq 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$, halinde ve de $k_2 \neq k_3$, $k_1^2 = k_2^2 + k_3^2$ ve $v_1^2 = 2k_2^2 k_3^2 / (k_2^2 + k_3^2)$ tutarlılık koşulları sağlandığında gerçekleştiğini bulduk. Bu takdirde, $a(t)$, μ^m , p^m için (4.169) ve (4.173) denklemleriyle verilen çözümleri bulduk ve (4.172) de gösterildiği üzere, bir $F(R)$ -gravite modeli inşa etmeyi başardık. Çözümü tartışmadan önce, şuna işaret edelim: (4.110) daki C bir integrasyon sabiti olduğundan, negatif değerler de olabilir. Dolayısıyla, $\mu^m + p^m$ kombinasyonundaki μ^m ve p^m değerlerine bağlı olarak, C pozitif ya da negatif olabilir. Eğer, μ^m nin $\mu^m > 0$ şeklinde doğal varsayımı kabul edilirse ve (4.169) ile birlikte (4.173) denklemini göz önünde bulundurulursa, C ve Λ nın işaretlerine göre 4 durumun söz konusu olduğu görülür. Şöyle ki, $\mu^m > 0$ varsayımı ve (4.169) ve (4.173) kullanılarak bulunabilecek $t_* \equiv (1/A) |C/(4\Lambda)|^{1/4}$ şeklinde bir kritik zaman tanımlanırsa, şunlar kolaylıkla görülebilir:

1. $C > 0, \Lambda > 0$: bu durumda, $\mu^m(t < \sqrt[4]{3}t_*) > 0$ ve de $p^m(t < \sqrt[4]{3}t_*) > 0$, yani basınç pozitiftir.
2. $C > 0, \Lambda < 0$: $\mu^m(t) > 0$ koşulu her t için sağlanır ve ya $p^m(t < t_*) > 0$ ya da $p^m(t > t_*) < 0$ dır; dolayısıyla t ye bağlı olarak basınç pozitif ya da negatif olabilmektedir.
3. $C < 0, \Lambda > 0$: bu durum fiziksel değildir, zira her t için $\mu^m(t) < 0$ dır.
4. $C < 0, \Lambda < 0$: bu durumda, $\mu^m(t > \sqrt[4]{3}t_*) > 0$ ve $p^m(t > \sqrt[4]{3}t_*) < 0$ dır, yani bir negatif basınç söz konusudur.

Negatif bir basınç, genellikle skaler alan, sicim, Chaplygin gaz gibi gerçekçi olmayan bir madde şekline karşılık düşmekte olup çeşitli enerji koşullarının ihlaline yol açmaktadır. Hal böyle olmakla birlikte, negatif basınçlı bu tür madde çeşitleri evrenin madde içeriğini modellemekte pek sık kullanılagelmektedirler. Bizim modelimizde, negatif basınç 2 ve 4 numaralı her iki durumda ortaya çıkarken, pozitif basınç hem 1 nolu hem de 2 nolu durumda ortaya çıkmaktadır. Bu arada, şunu da belirtelim ki,

basıncın işaretini yalnızca t_* kritik zaman göre değil, fakat (4.174) ile gösterilen hal denklemini kullanarak, Λ parametresine göre de tartışmak mümkündür. Mamafih, bu konuda yalnızca şuna işaret edelim: Λ nın sıfır olduğu özel durumda, hal denklemi $p^m = (1/3)\mu^m$ şekline indirgenmektedir; bu ise, salt ışıyım ile dolu bir evren anlamına gelmektedir. Bir başka önemli nokta da, yukarıdaki her türlü durumda, $a(t)$ ölçek çarpanının basıncın işaretine bağlı olmaksızın tıpkı GRT'deki düz Milne modelini andırır şekilde, t ye göre lineer bir genişleme göstermesidir. O halde, yukarıda söylenenler çerçevesinde, evren k_1At , k_2At ve k_3At farklı ölçek çarpanlarıyla eşyönsüz olarak “uyuşuk (coasting)” bir biçimde genişlerken, aynı zamanda e_1 ekseninde, büyüklüğü zamana $\omega_1(t) = \sqrt{6}k_2k_3 / (k_2^2 + k_3^2)t^{-1}$ uyarınca bağlı bir dönme hızıyla dönmektedir. Şimdi, bir de (4.172) ile verilen $F(R)$ modelini tartışalım. R^2 teriminin işaretinin C sabitinin işaretine bağlı olduğunu görmekteyiz, şöyle ki, bu terim $C > 0$ olduğunda negatif olmakta; $C < 0$ olduğunda ise pozitif olmaktadır. Başka bir deyişle, sırasıyla $F(-R^2)$ -gravite ve $F(+R^2)$ -gravite olmak üzere iki model söz konusu olmaktadır. İkinci durumda, negatif bir basınç (4 nolu durum) söz konusuyken, birinci durumda pozitif bir basınç (1 ve 2 nolu durumlar) söz konusu olmaktadır. Mamafih, 2 nolu durumda olduğu gibi, negatif basınç da olabilmektedir. Dolayısıyla, pozitif basınca sahip fiziksel olarak gerçekçi bir bilinen madde yalnızca, $F(-R^2)$ -gravite modelinde mümkündür. Burada, alışılmadık “-” işareti için söylenebilecek yegane şey, teorik düzeyde bu modeli peşinen (a priori) dışarılayacak hiç bir gerekçenin bulunmadığıdır. Bu bağlamda yalnızca şuna işaret edelim: bulduğumuz bu $F(R)$ fonksiyonları standart EH aksiyonuna $\delta F(R) = F(R) - R + 2\Lambda = -C\Upsilon^2 R^2 - R$ olmak üzere $R - 2\Lambda + \delta F(R)$, biçiminde bir düzeltme terimi olarak yorumlanabilir.

Yukarıda sözü edilen bulgularımıza eklenebilecek bir başka ilgi çekici sonuç da, (4.175) denklemi uyarınca, bu makaslamasız dönen ve genişleyen Bianchi-tip IX modelinin tamamen pür gravito-magnetik bir model olduğu, başka bir deyişle gravitasyon dalgalarının yayılımına izin verdiği konusudur. Bu, rölativist kozmolojide makaslama sıfır olduğunda, gravitasyon dalgalarının olamayacağı beklentisini yanlışlar mahiyettedir [85]. Sonuç olarak, $F(R)$ -gravite teorisinde makaslamasız akışkanın hem dönme hem de genişleme gösterdiği durumlar bulunduğunu ve dolayısıyla da buradan,

rölativist kozmolojinin makaslamasız akışkan iddiasının $F(R)$ -gravitede karşılığı olmadığını göstermiş oluyoruz. Bilebildiğimiz kadarıyla, [23] kaynağındaki pertürbasyon yaklaşıklığı hesabı ayrı tutulursa, $F(R)$ -gravitede, bizimkinden başka makaslamasız akışkan iddiasını yalanlayan bir karşıt örnek, literatürde bulunmamaktadır. Bu çalışmada göz önüne almadığımız, diğer 7 tip Bianchi-tip model için de benzer incelemeyi yapıp bunlarda da makaslamasız akışkan iddiasının karşılığının olup olmadığını araştırmanın ilginç olacağını düşünmekteyiz.

İkinci olarak göz önüne aldığımız $F(G)$ -gravite teorisinde, $F(R)$ -gravitede yapılan hesaplamaları benzer tarzda genişlemeli Gödel evreni ile genelleştirilmiş Gödel evreni için ve de dönmeli Bianchi-tip IX modeli için tekrarladık. Her bir model için elde edilen denklem sisteminin zamana bağlı bir $a(t)$ ölçek çarpanı ile ve de metrik parametreleriyle tutarlılığını araştırdığımızda şu sonuçları bulduk: Genişlemeli Gödel tip evren ($K = -1/2$ ve $S = 1$) $F(G)$ -gravite teorisinde çözüm olarak kabul edilmemektedir. Buna karşılık, genişlemeli genelleştirilmiş Gödel-tip evren modelinde ise, $S > 0$ için, $\varepsilon > 1$ olmak üzere, eğer $K = -2S + \varepsilon S$ koşulu sağlanırsa, bu takdirde denklem sistemi zamana bağlı bir $a(t)$ ölçek çarpanının varlığı altında tutarsızlık göstermemektedir. Bu ise, $F(G)$ -gravitede modelin hem genişleme ve hem de dönmeye sahip olabileceği anlamına gelmektedir. Ancak, bu sonucu desteklemek için, bir de $F(G)$ -gravite modeli oluşturmak gerekmektedir. Ne var ki, a nın t ye bağlılığı elemanter fonksiyonlar cinsinden değil de LambertW fonksiyonları diye bilinen oldukça karmaşık fonksiyonlar cinsinden ifade edilmektedir. Bu ise, $F(G)$ modelini analitik olarak oluşturmayı önlemektedir. Özel çözüm olarak, $a(t)$ nin (4.198) deki gibi t nin lineer bir fonksiyonu olması halinde, denklem sistemi tutarlılığını korumakta, ancak $F(G)$ -gravite modelinin oluşturulması mümkün olamamaktadır. Dolayısıyla, bu tür bir özel çözüm için, hem genişleyen hem de dönen bir Gödel-tip model $F(G)$ -gravitede bulunmamaktadır. İkinci olarak ele aldığımız dönmeli Bianchi-tip IX modeli için ise, denklem sisteminin tutarlılığını, $v_2 = v_3 = 0$ alarak $v_1 \neq 0$ ile k_1, k_2, k_3 parametrelerinin çeşitli değerleri için tartıştık. Sonuçta, ya Gödel modelinde olduğu gibi $F(G)$ -gravite modeli oluşturulamamakta ya da daha o aşamaya gelmeden $\mu^m + p^m \neq 0$ koşulu ihlal edilmektedir. Dolayısıyla, $F(G)$ -gravite, dönmeli bir Bianchi-tip IX modelin varlığına izin vermemektedir.

Göz önüne aldığımız son teori olan zarevren teorisinde ise, makaslamasız mükemmel akışkan iddiasını kovaryant evrim ve bağ denklemlerini kullanarak bağ denklemlerinin tutarlılık analizi aracılığıyla araştırdık. Bunun için, önce, kendi notasyonumuza uygun bir şekilde gerekli komütasyon bağıntılarını ve özdeşlikleri en genel durum için tesis edip akışkanın kinematik ve dinamik büyüklükleri üzerinde hiç bir kısıtlama olmadığı genel durumda, bağ denklemlerinin evrimlerinin herhangi bir integre edilebilirlik koşuluna yol açmadıklarını, dolayısıyla bağ denklemlerinin birbirleriyle tutarlı olduklarını ve evrim denklemleriyle tutarlı bir biçimde evrimleştiklerini gösterdikten sonra, makaslamasız mükemmel akışkan varsayımı altında, bağ denklemlerinin tutarlılığının sağlanıp sağlanmadığını iki özel durum için araştırdık. Bu özel durumlardan birincisi olan pür zarevren için ivmesiz pür-Coulombsu durumda, bir mükemmel akışkan için aynı anda hem genişlemenin hem de dönmenin olamayacağını, yani söz konusu kısıtlamalar altında makaslamasız akışkan iddiasının pür zarevren modellerinde geçerli olduğunu gösterdik. İkinci özel durum olan ivmesiz durumda indüklenmiş graviteli $F(R)$ -zarevren için ise, tutarlılık için bir integre edilebilirlik koşuluna ihtiyaç bulunmadığını ve fakat, (4.45)-(4.53) ile verilen evrim denklemleri sisteminde bulunmayan, π_{ab}^t için (4.326) biçiminde bir evrim denklemine ihtiyaç olduğunu gösterdik. Bu sonuç bize, makaslamasız, ivmesiz ve (4.326) denklemini sağlayacak bir mükemmel akışkan kaynağı için, makaslamasız mükemmel akışkan iddiasının geçerli olması gerekmediğini, başka bir deyişle, hem indüklenmiş graviteli $F(R)$ -zarevrende hem de bunun özel hali olan pür zarevrende toplam efektif eşyönsüzlük tansörü, eğer (4.326) evrim denklemini sağlıyorsa, aynı anda dönen ve genişleyen evren modelleri bulunabileceğini telkin etmektedir. Ancak, bu aşamada π_{ab}^t için böyle bir evrim denkleminin gerçekten de var olup olamayacağını cevaplamak mümkün görünmemektedir. Zira, (4.235.d) ile verilen π_{ab}^t ifadesinin içinde bulk'ın etkisinden kaynaklanan bilinmeyen P_{ab} tansörüyle birlikte, ifadesi (4.239) ile verilen π_{ab}^F indüklenmiş eşyönsüzlük tansörü bulunmaktadır. Bu tansör hakkında bir bilgi edinmek için, (4.239) dan görüleceği üzere, 4-boyutlu G_{ab} Einstein tansörünün bilinmesine gerek bulunmaktadır. Bunun bilinmesi ise, özel bir evren metriği seçip çalışmak anlamına gelmektedir ki, böyle bir şey herhangi bir metrik seçimine dayalı olmayan kovaryant analiz yaklaşımına aykırı bir durum oluşturmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1]. Gödel, K., 1950, Rotating universes in general relativity theory, *Proceeding of the International Congress of Mathematicians*, In: Graves, L.M. et al. (ed.), Cambridge, Mass. 1, 175-181; reprinted in *Gen. Rel. Grav.*, 32, 1419 (2000).
- [2]. Schücking, E., 1957, Homogene scherungsfreie weltmodelle in der relativistischen Kosmologie, *Naturwiss*, 19, 507.
- [3]. Ellis, G.F.R., 1967, Dynamics of pressure-free matter in general relativity, *J. Math. Phys.*, 29, 1171-1194.
- [4]. Treciokas, R., Ellis, G.F.R., 1971, Isotropic solutions of the Einstein-Boltzmann equations, *Commun. Math. Phys.*, 23, 1-22.
- [5]. King, A.R., Ellis, G.F.R., 1973, Tilted homogeneous cosmological models, *Commun. Math. Phys.*, 31, 209-242.
- [6]. King, A.R., 1973, *Cosmological Models and their singularities*, Doktora Tezi, Cambridge Üniversitesi.
- [7]. Collins, C.B., 1984, Shear-free perfect fluids with zero magnetic Weyl tensor, *J. Math. Phys.*, 25, 995-1000.
- [8]. White, A.J., Collins, C.B., 1984, A class of shear-free perfect fluids in general relativity I, *J. Math. Phys.*, 25, 332-337.
- [9]. Collins, C.B., 1985, Aspects of shear-free perfect fluids in general relativity, *J. Math. Phys.*, 26, 2009.
- [10]. Collins, C.B., 1986, Shear-free fluids in general relativity, *Can. J. Phys.*, 64, 191-199.
- [11]. Collins, C.B., 1988, Homogeneous and hypersurface-homogeneous shear-free perfect fluid in general relativity, *Gen. Relativ. Gravit.*, 20, 847-855.
- [12]. Carminati, J., 1987, Shear-free perfect fluids in general relativity. I. Petrov type N Weyl tensor, *J. Math. Phys.*, 28, 1848-1853.
- [13]. Carminati, J., 1988, Type N, shear-free, perfect fluid space-times with a barotropic equation of state, *Gen. Relativ. Gravit.*, 20, 1239-1248.
- [14]. Carminati, J., 1990, Shear-free perfect fluids in general relativity. II. Aligned, Petrov Type III space-times, *J. Math. Phys.*, 31, 2434-2440.

- [15]. Coley, A.A., 1991, Fluid spacetimes admitting a conformal Killing vector parallel to the velocity vector, *Class. Quantum Grav.*, 8, 955-968.
- [16]. Senovilla, J.M.M, Sopuerta, C.F., Szekeres, P., 1998, Theorems on shear-free perfect fluids with their Newtonian analogues, *Gen. Relativ. Gravit.*, 30, 389-411.
- [17]. Van den Bergh N., 1999, The shear-free perfect fluid conjecture, *Class. Quantum Grav.* 16, 1-13.
- [18]. Van den Bergh N., Carminati J., Karimian, H.R., 2007, Shearfree perfect fluids with solenoidal magnetic curvature and a gamma-law equation of state, *Class. Quantum Grav.*, 24, 3735-3744.
- [19]. Carminati, J., Karimian, H.R., Van den Bergh, N., Vu, K.T., 2009, Shear-free perfect fluids with a solenoidal magnetic curvature, *Class. Quantum Grav.*, 26, 195002.
- [20]. GrØn, Ø., Soleng, H.H., 1989, Note on rotating universe models, *Acta Phys. Pol. B*, 20 (7), 557-560.
- [21]. Obukhov, Y.N., Chrobok, T., Scherfner, M., 2002, Shear-free rotating inflation, *Phys. Rev. D*, 66, 043518.
- [22]. Narlikar, J.V., 1963, Newtonian Universes with shear and rotation, *Mon. Not. R. Ast. Soc.* 126, 203.
- [23]. Abebe, A., Goswami, R., Dunsby, P.K.S., 2011, On shear-free perturbations of $f(R)$ gravity, *Phys. Rev. D*, 84, 124027.
- [24]. Maartens, R., Taylor, D.R., 1994, Fluid dynamics in higher order gravity, *Gen. Relativ. Gravit.*, 26 (6), 599-613. (Erratum, 1995, *Gen. Relativ. Gravit.*, 27 (1), 113-114).
- [25]. Rippl, S., van Elst, H., Tavakol, R., Taylor, D., 1996, Kinematics and dynamics of $f(R)$ theories of gravity, *Gen. Rel. Grav.*, 28, 193.
- [26]. Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2007, Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 4, 115-146.
- [27]. Durrer, R., Maartens, R., Dark energy and dark gravity: theory overview, *Gen. Relativ. Gravit.*, 40, 301-328.
- [28]. Capozziello, S., Francaviglia, M., 2008, Extended theories of gravity and their cosmological and astrophysical applications, *Gen. Relativ. Gravit.*, 40, 357-420.
- [29]. Sotiriou, T.P., 2009, 6+1 lessons from $f(R)$ gravity, *J. Phys. Conf. Ser.* 189, 012039.
- [30]. De Felice, A., Tsujikawa, S., 2010, $f(R)$ Theories, *Living Rev. Relativity*, 13, 3.
- [31]. Lesame, W.M., Ellis, G.F.R., Dunsby, P.K.S., 1996, Irrotational dust with $\text{div}H=0$, *Phys. Rev. D*, 53, 2, 738-764.

- [32]. van Elst, H., Uggla, C., Lesame, W.M., Ellis, G.F.R., Maartens, R., 1997, Integrability of irrotational silent cosmological models, *Class. Quant. Grav.*, 14, 1151-1162.
- [33]. Goheer, N., Goswami, R., Dunsby, P. K. S., Ananda, K., 2009, Coexistence of matter dominated and accelerating solutions in $f(R)$ gravity, *Phys. Rev. D* 79, 121301.
- [34]. Li, B., Barrow, J. D., Mota, D.F., 2007, The cosmology of modified Gauss- Bonnet gravity, *Phys. Rev. D* 76, 044027.
- [35]. Neupane, I. P., 2007, Constraints on Gauss-Bonnet Cosmologies, *JCAP* 12, 020.
- [36]. Kirnos, I., V., Makarenko, A., N., Pavluchenko, S., A., Toporensky, A., V., 2009, with a Perfect Fluid, *Gen. Rel. Grav.* 42, 2633.
- [37]. Ameudola, L., Charmousis, C., Davis, S., C., 2006, Constrains on Gauss-Bonnet Gravity in Dark Energies Cosmologies, *JCAP* 12, 020.
- [38]. Nojiri, S., Odintsov, S., D., Gorbunova, O., G., 2005, Dark Energy Problem: from Phantom Theory to Modified Gauss-Bonnet Gravity, *J. Phys. A*, 39, 6627-6634.
- [39]. Nojiri, S., Odintsov, S., D., 2005, Modifeid Gauss-Bonnet Theory as Gravitational Alternative for Dark Energy, *Phys. Lett. B*, 631,1-6.
- [40]. Calcagui, G., Carlos, B., Felice, A., 2006, Ghost Conditions for Gauss-Bonnet Cosmologies, *Nucl. Phys. B*, 752, 404-438.
- [41]. Anabalon, A., Deruelle, N., Morisawa, Y., Oliva, J., Sasaki, M., Tampo, D., Troncoso R., 2009, Kerr-Schild Ansatz in Einstein–Gauss-Bonnet Gravity: An Exact Vacuum Solution in five Dimensions, *Class. Quant. Grav.* 26, 065002.
- [42]. Koivisto, T., Mota, D., F., 2006, *Cosmology and Astrophysical Constraints of Gauss-Bonnet Dark Energy*, <http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0606078v2.pdf>, [Ziyaret tarihi: 20 Ocak 2010].
- [43]. Nojiri, S., Odintsov, S., D., Sasaki, M., 2005, Gauss-Bonnet Dark Energy, *Phys. Rev. D*.71, 123509.
- [44]. Brax, P., Chatillon, N., Steer, D.A., 2004, Effective actions of a Gauss-Bonnet brane world with curvature terms, *Phys. Lett. B* 608, 130-141.
- [45]. Heydari-Fard, M., Spangi, H. R., 2009, Bulk scalar field in brane-worlds with induced gravity inspired by the $\mathcal{L}(R)$ term, *JCAP*, 01.2009.034.
- [46]. Brown, R., A., 2007, Brane Universes with Gauss-Bonnet-Induced-Gravity, *Gen. Relativ. Gravit.* 39: 477-500.
- [47]. Kofinas, G., Maartens, R., Papantonopoulos, E., 2003, Brane Cosmology with Curvature Corrections, *JHEP* 0310, 066.

- [48]. Ansari, R. Ul Haq, Suresh, P., K., 2008, Dvali-Gabadadze-Porrati Cosmologies in Bianchi I Brane, *Phys. Rev. D* 78, 043533.
- [49]. Nozari, K., Rashidi, N., 2009, A Braneworld Dark Energy Model with Induced Gravity and Gauss-Bonnet Effect, *Int. J. Theor. Phys.* 48, 2800-2817.
- [50]. Kiritsis, E., Tetradis, N., Tomaras, T.N., 2002, *Induced Gravity on RS Branes*, <http://arxiv.org/pdf/hep-th/0202037v1.pdf>, [Ziyaret tarihi: 14 Haziran 2010].
- [51]. Maeda, K., Torii, T., 2004, Covariant gravitational equation on brane world with Gauss-Bonnet term, *Phys. Rev. D* 69, 024002.
- [52]. Charmousis, C., Dufaux, J., F., 2002, General Gauss-Bonnet brane cosmology, *Class. Quant. Grav.* 19, 4671-4682.
- [53]. Maeda, H., Sahni, V., Shtanov, Y., 2007, Braneworld dynamics in Einstein-Gauss-Bonnet Gravity, *Phys. Rev. D* 76, 104028.
- [54]. Barrabes, C., Israel, W., 2005, Lagrangian brane dynamics in general relativity and in Einstein-Gauss-Bonnet gravity, *Phys. Rev., D* 71, 064008.
- [55]. Charmousis, C., Dufaux, J., F., 2002, General Gauss-Bonnet Brane Cosmology, *Class. Quant. Grav.* 19, 4671-4682.
- [56]. Kim, J., I., Kyae, B., Lee, H., M., 2000, Various Modified Solutions of the Randall-Sundrum Model with the Gauss- Bonnet Interaction, *Nucl. Phys. B* 582, 296-312.
- [57]. Gravanis, E., Willison, S., 2003, Israel Conditions for the Gauss-Bonnet Theory and the Friedmann Equation on the Brane Universe, *Phys. Lett. B* 562, 118-126.
- [58]. Barrabes, C., Israel, W., 2005, Lagrangian Brane Dynamics in General Relativity and in Einstein-Gauss-Bonnet Gravity, *Phys. Rev., D* 71, 064008.
- [59]. Tsujikawa, S., Sami, M., Maartens, R., 2004, Observational Constraints on Braneworld Inflation: The Effect of a Gauss-Bonnet Term, *Phys. Rev. D* 70, 063525.
- [60]. Davis, S., C., 2002, Generalized Israel Junction Conditions for a Gauss-Bonnet Brane World, *Phys. Rev. D* 67, 024030.
- [61]. Alfonso, V., I., Bazeia, R., Menezes, R., Petrov, A., Y., 2007, $f(R)$ Brane, *Phys. Lett. B* 658, 71-76.
- [62]. Kim, J., E., Kyae, B., Lee, H., M., 2000, Effective Gauss-Bonnet Interaction in Randall-Sundrum Compactification, *Phys. Rev. D* 62, 045013.
- [63]. Abdesselam, B., Mohammedi, N., 2002, Brane World Cosmology with Gauss-Bonnet Interaction, *Phys. Rev. D* 65, 084018.

- [64]. Aoyanagi K., 2004, *Creation of a Brane World with Gauss-Bonnet Term*, <http://www.slac.stanford.edu/econf/C041213/papers/1102.PDF>, [Ziyaret tarihi: 14 Haziran 2010].
- [65]. Ellis, G.F.R., 1973, *Relativistic Cosmology*, Lectures at the International Summer Physics of Physics, Cargese, Corsica, 1971, Schatzman, E. (ed.), Gordon and Breach, New York, 1-60.
- [66]. Ellis, G.F.R., van Elst, H., 1999, *Cosmological models (Cargese lectures 1998)*, In: Theoretical and Observational Cosmology NATO Series C: Math. Phys. Sci., Lachieze-Ray, M. (ed.), Vol 541, Kluwer, Dordrecht, 1-116.
- [67]. MacCallum, M.A.H., 1979, *Anisotropic and inhomogeneous relativistic cosmologies*, In: General Relativity An Einstein Centenary Survey, Hawking, S.W., Israel, W. (ed.), Ch. 11, Cambridge University Press, 179-236.
- [68]. Randall, L., Sundrum, L., 1999, A large mass hierarchy from a small extra dimension, *Phys. Rev. Letter*, 83, 3370-3373.
- [69]. Randall, L., Sundrum, L., 1999, An alternative to compactification, *Phys. Rev. Letter*, 83, 4690-4693.
- [70]. Shiromizu, T., Maeda, K.I., Sasaki, M., 2000, The Einstein equation on the 3-brane world, *Phys. Rev. D* 62, 024012.
- [71]. Sasaki, M., Shiromizu, T., Maeda, K.I., 2000, Gravity, stability, and energy conservation on the Randall-Sundrum brane world, *Phys. Rev. D* 62, 024008.
- [72]. Maartens, R., 2000, Cosmological dynamics on the brane, *Phys. Rev. D* 62, 084023.
- [73]. Maartens, R., 2004, Brane World Gravity, *Living Rev. Relativity* 7 (2004), 7.
- [74]. Kaluza, T., 1921, Zum unitatsproblem der physik, *Sitzungsber Preuss Akad. Wiss., Math. Phys. K* 1, 966-972.
- [75]. Klein, O., 1926, Quantentheorie und funfdimensionale relativitatstheorie, *Zeits. Phys.*, 37, 895-906.
- [76]. Dvali, G., Gabadadze, G., Porrati, M., 2000, 4D Gravity on a brane in 5D Minkowski space, *Phys. Lett. B*, 485, 208-214.
- [77]. Güdekli, E., 2004, *Bianchi tip çözümlerde ufuk-eşyönlüleşme meseleleri*, Doktora Tezi, İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [78]. van Elst, H., 1996, *Extensions and applications of 1+3 decomposition methods in general relativistic cosmological modelling*, Doktora Tezi, London Üniversitesi.
- [79]. Mutuş, H., 2000, Kozmoloji ders notları (basılmadı).

- [80]. Obukhov, Y.N., 2000, *On physical foundations and observational effects of cosmic rotation*, In: Colloquium on Cosmic Rotation, Scherfner, M., Chrobok, T., Shefaat, M. (ed.), Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin, 23-96.
- [81]. Chrobok, T, Obukhov, Y.N., Scherfner, M., 2001, On closing rotating worlds, *Phys. Rev. D*, 63, 104014.
- [82]. van Elst, H., Ugla, C., 1997, General relativistic 1+3 orthonormal frame approach, *Class. Quant. Gravit.*, 14, 2673-2695.
- [83]. Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E. G., Jeffrey, D.J., Knuth, D. E., 1996, On the Lambert W Function, *Adv. in Comput. Maths.*, Vol. 5, 329-359.
- [84]. Bouhmadi-Lopez, M., 2009, Self-accelerating the normal DGP branch, *JCAP*, 11, 011.
- [85]. Maartens, R., Lesame, W.M., Ellis, G.F.R., 1998, Newtonian-like and anti-Newtonian universes, *Class. Quantum Grav.*, 15, 1005-1017.
- [86]. Özemre, A. Y., 1982, *Teorik Fizik Dersleri Cild 7: Gravitasyonun Rölâivist Teorileri*, İst. Üniv. Fen Fak. Yay., İstanbul.
- [87]. Querella, L., 1998, *Variational principles and cosmological models in higher-order gravity*, Doktora Tezi, Universite De Liege, Institut d'astrophysique et de gCophysique.
- [88]. Guarnizo, A., Castaneda, L., Juan, M. T., 2010, *Variational principles in modified gravity: field equations in $f(R)$ Gravity*, 1002.0617v1 [gr-qc].
- [89]. van Elst, H., 1998, *(1+3)-covariant methods in general relativistic cosmology*, <http://www.mth.uct.ac.za/~henk/13coveq.pdf>, [Ziyaret tarihi: 23 Mayıs 2009].

EKLER

EK A. F(R,G)-GRAVİTENİN ALAN DENKLEMLERİNİN BİR VARYASYON İLKESİNDEN ÇIKARTILMASI

$F(R,G)$ -gravitenin

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [F(R, G)] + S_m \quad (\text{A.1})$$

aksiyonunun metriğe göre varyasyonunu almadan önce şu ifadeleri hatırlatmak iyi olacaktır [86,87]:

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{-g}) g_{ab} \delta g^{ab} \quad (\text{A.2})$$

$$\delta g^{ab} = -g^{ac} (\delta g_{cd}) g^{db} \quad , \quad \delta g_{ab} = -g_{ac} (\delta g^{cd}) g_{db} \quad (\text{A.3})$$

$$g^{ab} \Big|_{\partial V} = g_{ab} \Big|_{\partial V} = 0 \quad , \quad \delta g^{ab} \Big|_{\partial V} = \delta g_{ab} \Big|_{\partial V} = 0 \quad (\text{A.4})$$

(A.4) denklemleri g^{ab} lerin kendilerinin ve varyasyonlarının ∂V sınırında sıfır olduklarını ifade eder. Yine, hesaplarda gerekli olacak çeşitli varyasyon ifadeleri

$$\delta R = R_{ab} \delta g^{ab} + g_{ab} \square (\delta g^{ab}) - \nabla_a \nabla_b (\delta g^{ab}) \quad (\text{A.5})$$

$$\delta R_{ab} = \nabla_c (\delta \Gamma^c_{ba}) - \nabla_b (\delta \Gamma^c_{ca}) \quad (\text{A.6})$$

$$\delta R^a_{bcd} = \nabla_c (\delta \Gamma^a_{db}) - \nabla_d (\delta \Gamma^a_{cb}) \quad (\text{A.7})$$

$$\delta \Gamma^d_{ab} = -\frac{1}{2} \left[g_{bl} \nabla_a (\delta g^{dl}) + g_{al} \nabla_b (\delta g^{dl}) - g_{ak} g_{bl} \nabla^d (\delta g^{kl}) \right] \quad (\text{A.8})$$

$$\delta \Gamma^c_{ac} = -\frac{1}{2} g_{cl} \nabla_a (\delta g^{cl}) \quad (\text{A.9})$$

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int_V d^4x \sqrt{-g} T^m_{ab} \delta g^{ab} \quad (\text{A.10})$$

dir. (A.1) aksiyonunun

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x (\delta\sqrt{-g}) [F(R, G)] + \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [\delta F(R, G)] + \delta S_m \quad (A.11)$$

biçimindeki varyasyonunda $\delta F(R, G)$ terimini göz önüne alalım. $F(R, G)$ nin fonksiyonel türevi

$$\delta F(R, G) = F_R \delta R + F_G \delta G \quad (A.12)$$

biçimindedir. Bu ifadede $G = R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}$ Gauss-Bonnet teriminin varyasyonu

$$\begin{aligned} \delta G &= \delta(R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}) \\ &= 2R\delta R - 4R_{ab}\delta R^{ab} - 4R^{ab}\delta R_{ab} + R_{abcd}\delta R^{abcd} + R^{abcd}\delta R_{abcd} \end{aligned} \quad (A.13)$$

olur. Şimdi bu eşitliğin sağ yanındaki terimleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned} -4R_{ab}\delta R^{ab} &= -4R_{ab}\delta(g^{ap}g^{bq}R_{pq}) \\ &= -4R_{ab}\left[(\delta g^{ap})g^{bq}R_{pq} + g^{ap}(\delta g^{bq})R_{pq} + g^{ap}g^{bq}\delta R_{pq}\right] \\ &= -4R_a^q R_{pq}\delta g^{ap} - 4R_b^p R_{pq}\delta g^{bp} - 4R^{pq}\delta R_{pq} \end{aligned} \quad (A.14)$$

ya da indisleri düzenleyerek

$$-4R_{ab}\delta R^{ab} = -8R_a^c R_{bc}\delta g^{ab} - 4R^{ab}\delta R_{ab} \quad (A.15)$$

olur.

$$\begin{aligned} R_{abcd}\delta R^{abcd} &= R_{abcd}\delta(R^a_{rst}g^{br}g^{cs}g^{dt}) \\ &= R_{abcd}\left[(\delta R^a_{rst})g^{br}g^{cs}g^{dt} + R^a_{rst}(\delta g^{br})g^{cs}g^{dt} \right. \\ &\quad \left. + R^a_{rst}g^{br}(\delta g^{cs})g^{dt} + R^a_{rst}g^{br}g^{cs}(\delta g^{dt})\right] \\ &= R_a^{rst}\delta R^a_{rst} + R_{ab}^{st}R^a_{rst}(\delta g^{br}) \\ &\quad + R_a^{r\ t}R^a_{rst}(\delta g^{cs}) + R_a^{rs}R^a_{rst}(\delta g^{dt}) \end{aligned} \quad (A.16)$$

ya da indisleri düzenleyerek

$$R_{abcd}\delta R^{abcd} = R_a^{bcd}\delta R^a_{bcd} + 3R_a^{efg}R_{befg}\delta g^{ab} \quad (A.17)$$

olur.

$$\begin{aligned}
R^{abcd} \delta R_{abcd} &= R^{abcd} \delta (g_{sa} R^a_{bcd}) \\
&= R^{abcd} \left[(\delta g_{sa}) R^a_{bcd} + g_{sa} (\delta R^a_{bcd}) \right]
\end{aligned} \tag{A.18}$$

olur. Bu da (A.3) kullanılarak

$$R^{abcd} \delta R_{abcd} = -R_a^{efg} R_{befg} \delta g^{ab} + R_a^{bcd} \delta R^a_{bcd} \tag{A.19}$$

biçiminde yazılabilir. (A.15) , (A.17) ve (A.19) ifadeleri (A.13) e taşınırsa,

$$\delta G = 2R \delta R - 8R_a^c R_{cb} \delta g^{ab} - 8R^{ab} \delta R_{ab} + 2R_a^{bcd} \delta R^a_{bcd} + 2R_a^{efg} R_{befg} \delta g^{ab} \tag{A.20}$$

olur. δR , δR_{ab} ve δR^a_{bcd} ifadeleri için, sırasıyla (A.5), (A.6) ve (A.7) kullanılarak (A.20) denklemi

$$\begin{aligned}
\delta G &= 2R R_{ab} \delta g^{ab} + 2R g_{ab} \square \delta g^{ab} - 2R \nabla_a \nabla_b \delta g^{ab} - 8R_a^c R_{cb} \delta g^{ab} \\
&\quad + 2R_a^{efg} R_{befg} \delta g^{ab} - 8R^{ab} \left[\nabla_c (\delta \Gamma^c_{ba}) - \nabla_b (\delta \Gamma^c_{ca}) \right] \\
&\quad + 2R_a^{bcd} \left[\nabla_c (\delta \Gamma^a_{db}) - \nabla_d (\delta \Gamma^a_{cb}) \right]
\end{aligned} \tag{A.21}$$

halini alır ve eşitliğin sağ yanındaki son iki terim için de (A.8) ve (A.9) bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\delta G &= (2R R_{ab} - 8R_a^c R_{cb} + 2R_a^{efg} R_{befg}) \delta g^{ab} \\
&\quad + 2R g_{ab} \square \delta g^{ab} - 4R_{ab} \square \delta g^{ab} - 2R \nabla_a \nabla_b \delta g^{ab} \\
&\quad + 8R_b^c \nabla_a \nabla_c \delta g^{ab} - 4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d \delta g^{ab} - 4R_a^{cd} \nabla_b \nabla_d \delta g^{ab}
\end{aligned} \tag{A.22}$$

veya, $8R_b^c \nabla_a \nabla_c \delta g^{ab} = 4R_a^c \nabla_b \nabla_c \delta g^{ab} + 4R_b^c \nabla_a \nabla_c \delta g^{ab}$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\delta G &= (2R R_{ab} - 8R_a^c R_{cb} + 2R_a^{efg} R_{befg}) \delta g^{ab} \\
&\quad + 2R g_{ab} \square \delta g^{ab} - 4R_{ab} \square \delta g^{ab} - 2R \nabla_a \nabla_b \delta g^{ab} \\
&\quad + 4R_a^c \nabla_b \nabla_c \delta g^{ab} + 4R_b^c \nabla_a \nabla_c \delta g^{ab} \\
&\quad - 4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d \delta g^{ab} - 4R_a^{cd} \nabla_b \nabla_d \delta g^{ab}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

yazılabilir. Bu durumda (A.12) ifadesi, (A.5) ve (A.23) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\delta F(R, G) &= F_R R_{ab} \delta g^{ab} + F_R g_{ab} \square (\delta g^{ab}) - F_R \nabla_a \nabla_b (\delta g^{ab}) \\
&\quad + (2F_G R R_{ab} - 8F_G R_a^c R_{cb} + 2F_G R_a^{efg} R_{befg}) \delta g^{ab} \\
&\quad + 2F_G R g_{ab} \square \delta g^{ab} - 4F_G R_{ab} \square \delta g^{ab} - 2F_G R \nabla_a \nabla_b \delta g^{ab} \\
&\quad + 4R_a^c \nabla_b \nabla_c \delta g^{ab} + 4R_b^c \nabla_a \nabla_c \delta g^{ab} \\
&\quad - 4F_G g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d \delta g^{ab} - 4F_G R_a^{cd} \nabla_b \nabla_d \delta g^{ab}
\end{aligned} \tag{A.24}$$

olur. Bu son bağıntıyla birlikte (A.10) ve (A.2) de kullanılarak (A.11)

$$\begin{aligned}
\delta S = & -\frac{1}{2} \int_V d^4x \sqrt{-g} T_{ab}^m \delta g^{ab} \\
& + \frac{\alpha_{RG}}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} g_{ab} F \delta g^{ab} + F_R R_{ab} \delta g^{ab} \right. \\
& + F_R g_{ab} \square (\delta g^{ab}) - F_R \nabla_a \nabla_b (\delta g^{ab}) \\
& + (2F_G R R_{ab} - 8F_G R_a^c R_{cb} + 2F_G R_a^{efg} R_{befg}) \delta g^{ab} \\
& + 2F_G R g_{ab} \square \delta g^{ab} - 4F_G R_{ab} \square \delta g^{ab} - 2F_G R \nabla_a \nabla_b \delta g^{ab} \\
& + 4F_G R_a^c \nabla_b \nabla_c \delta g^{ab} + 4F_G R_b^c \nabla_a \nabla_c \delta g^{ab} \\
& \left. - 4F_G g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d \delta g^{ab} - 4F_G R_a^{cd} \nabla_b \nabla_c \delta g^{ab} \right\}
\end{aligned} \tag{A.25}$$

olur. Şimdi, bu ifadedeki

$$\begin{aligned}
I_1 & \equiv \frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} F_R g_{ab} \square (\delta g^{ab}), \quad I_2 \equiv -\frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} F_R \nabla_a \nabla_b (\delta g^{ab}), \\
I_3 & \equiv \frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} 2F_G R g_{ab} \square \delta g^{ab}, \quad I_4 \equiv -\frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} 2F_G R \nabla_a \nabla_b \delta g^{ab}, \\
I_5 & \equiv -\frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} 4F_G R_{ab} \square \delta g^{ab}, \quad I_6 \equiv \frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} 4F_G R_a^c \nabla_b \nabla_c \delta g^{ab}, \\
I_7 & \equiv \frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} 4F_G R_b^c \nabla_a \nabla_c \delta g^{ab}, \quad I_8 \equiv -\frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} 4F_G R^{cd} \nabla_c \nabla_d \delta g^{ab}, \\
I_9 & \equiv -\frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} 4F_G R_a^{cd} \nabla_b \nabla_c \delta g^{ab}
\end{aligned} \tag{A.26}$$

integrallerini tek tek göz önüne alalım. Önce, I_1 ile ilgilenelim. I_1 in hesabı için,

$$M^t = F_R g_{ab} \nabla^t (\delta g^{ab}) - \nabla^t (F_R) g_{ab} \delta g^{ab} \tag{A.27}$$

vektörü tanımlansın [88]. M^t vektörünün diverjansı

$$\nabla_t M^t = F_R g_{ab} \square (\delta g^{ab}) - g_{ab} (\square F_R) \delta g^{ab} \tag{A.28}$$

olup her iki yanının da integrali alınırsa

$$\int_V d^4x \sqrt{-g} \nabla_t M^t = \int_V d^4x \sqrt{-g} F_R g_{ab} \square (\delta g^{ab}) - \int_V d^4x \sqrt{-g} g_{ab} \square F_R \delta g^{ab} \tag{A.29}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol yanındaki integral için Gauss teoremi kullanılırsa,

$$\oint_{\partial V} d^3 y \varepsilon_n \sqrt{|h|} n_t M^t = \int_V d^4 x \sqrt{-g} F_R g_{ab} \square (\delta g^{ab}) - \int_V d^4 x \sqrt{-g} g_{ab} \square F_R \delta g^{ab} \quad (\text{A.30})$$

olur. Öte yandan, (A.4) sınır koşulları altında M^t vektörünün ∂V sınırındaki değerinin $M^t|_{\partial V} = 0$ olduğu kolayca görülmektedir. O halde (A.30) ifadesi

$$0 = \int_V d^4 x \sqrt{-g} F_R g_{ab} \square (\delta g^{ab}) - \int_V d^4 x \sqrt{-g} g_{ab} \square F_R \delta g^{ab} \quad (\text{A.31})$$

biçiminde olacaktır. Bu son ifade ile, (A.26) da tanımlanan I_1 integralinin karşılaştırılmasından

$$I_1 = \int_V d^4 x \sqrt{-g} g_{ab} \square F_R \delta g^{ab} \quad (\text{A.32})$$

olduğu görülmektedir. Şimdi, (A.26) da tanımlanan $I_2 - I_9$ integrallerinin hesapları için, yukarıdaki I_1 integralinin hesabına benzer şekilde:

$$I_2 \text{ için: } M^t = -F_R g_{ab} \nabla_m (\delta g^{tm}) + \nabla_m (F_R) \delta g^{tm} \quad (\text{A.33})$$

$$I_3 \text{ için: } M^t = 2F_G R g_{ab} \nabla^t (\delta g^{ab}) - 2\nabla^t (F_G) g_{ab} (\delta g^{ab}) \quad (\text{A.34})$$

$$I_4 \text{ için: } M^t = -2F_G R \nabla_m (\delta g^{tm}) + 2\nabla_m (F_G R) \delta g^{tm} \quad (\text{A.35})$$

$$I_5 \text{ için: } M^t = -4F_G R_{ab} \nabla^t (\delta g^{ab}) + 4\nabla^t (F_G R_{ab}) \delta g^{ab} \quad (\text{A.36})$$

$$I_6 \text{ için: } M^t = 4F_G R^c_a \nabla_c (\delta g^{ta}) - \nabla_b (F_G R^t_a) \delta g^{ab} \quad (\text{A.37})$$

$$I_7 \text{ için: } M^t = 4F_G R^c_b \nabla_c (\delta g^{tb}) - \nabla_a (F_G R^t_b) \delta g^{ab} \quad (\text{A.38})$$

$$I_8 \text{ için: } M^t = -4F_G g_{ab} R^{tm} \nabla_m (\delta g^{ab}) + 4g_{ab} \nabla_m (F_G R^{tm}) \delta g^{ab} \quad (\text{A.39})$$

$$I_9 \text{ için: } M^t = -4F_G R_a^{ct} \nabla_c (\delta g^{ab}) + 4\nabla_c (F_G R_a^{tc}) \delta g^{ab} \quad (\text{A.40})$$

vektörlerini tanımlayalım. I_1 in hesabı için izlenen yol takip edilerek

$$I_2 = - \int_V d^4 x \sqrt{-g} (\nabla_a \nabla_b F_R) \delta g^{ab} \quad (\text{A.41})$$

$$I_3 = \int_V d^4 x \sqrt{-g} \left[2g_{ab} R \square F_G + 4g_{ab} \nabla_c F_G \nabla^c R + 2g_{ab} F_G \square R \right] \delta g^{ab} \quad (\text{A.42})$$

$$I_4 = \int_V d^4x \sqrt{-g} \left[-2R \nabla_a \nabla_b F_G - 4 \nabla_a R \nabla_b F_G - 2F_G \nabla_a \nabla_b R \right] \delta g^{ab} \quad (\text{A.43})$$

$$I_5 = \int_V d^4x \sqrt{-g} \left[-4R_{ab} \square F_G - 8 \nabla_c F_G \nabla^c R_{ab} - 4F_G \square R_{ab} \right] \delta g^{ab} \quad (\text{A.44})$$

$$I_6 = \int_V d^4x \sqrt{-g} \left[4R^c_a \nabla_c \nabla_b F_G + 4 \nabla_b F_G \nabla_c R^c_a \right. \\ \left. + 4 \nabla_c F_G \nabla_b R^c_a + 4F_G \nabla_c \nabla_b R^c_a \right] \delta g^{ab} \quad (\text{A.45})$$

$$I_7 = \int_V d^4x \sqrt{-g} \left[4R^c_b \nabla_c \nabla_a F_G + 4 \nabla_a F_G \nabla_c R^c_b \right. \\ \left. + 4 \nabla_c F_G \nabla_a R^c_b + 4F_G \nabla_c \nabla_a R^c_b \right] \delta g^{ab} \quad (\text{A.46})$$

$$I_8 = \int_V d^4x \sqrt{-g} \left[-4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d F_G - 8g_{ab} \nabla_d F_G \nabla_c R^{cd} \right. \\ \left. - 4g_{ab} F_G \nabla_c \nabla_d R^{cd} \right] \delta g^{ab} \quad (\text{A.47})$$

$$I_9 = \int_V d^4x \sqrt{-g} \left[-4R^{cd}_a \nabla_c \nabla_d F_G - 4 \nabla_c R^{cd}_a \nabla_d F_G \right. \\ \left. - 4 \nabla_d R^{cd}_a \nabla_c F_G - 4F_G \nabla_c \nabla_d R^{cd}_a \right] \delta g^{ab} \quad (\text{A.48})$$

bulunur. Şimdi bunları aksiyona yerleştirmeden önce, $I_6 - I_9$ integrallerini, Bianchi Özdeşliklerinden elde edilen (B.1)-(B.5) bağıntıları ışığında tekrar ele alalım: (A.43) ve (A.44) integralleri, (B.2) ve (B.5) özdeşlikleri; (A.47) integrali, (B.2) ve (B.4) özdeşlikleri; (A.48) de (B.1), (B.3) ve Riemann tansörünün simetri özellikleri kullanılarak

$$I_6 = \int_V d^4x \sqrt{-g} \left[4R^c_a \nabla_c \nabla_b F_G + 2 \nabla_b F_G \nabla_a R + 4 \nabla_c F_G \nabla_b R^c_a \right. \\ \left. + 2F_G \nabla_a \nabla_b R + 4F_G R^c_a R_{bc} - 4F_G R_{bcad} R^{cd} \right] \delta g^{ab} \quad (\text{A.49})$$

$$I_7 = \int_V d^4x \sqrt{-g} \left[4R^c_b \nabla_c \nabla_a F_G + 2 \nabla_a F_G \nabla_b R + 4 \nabla_c F_G \nabla_a R^c_b \right. \\ \left. + 2F_G \nabla_a \nabla_b R + 4F_G R^c_b R_{ac} - 4F_G R_{acbd} R^{cd} \right] \delta g^{ab} \quad (\text{A.50})$$

$$I_8 = \int_V d^4x \sqrt{-g} \left[-4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d F_G - 4g_{ab} \nabla_d F_G \nabla^d R - 2g_{ab} F_G \square R \right] \delta g^{ab} \quad (\text{A.51})$$

$$I_9 = \int_V d^4x \sqrt{-g} \left[-4R^{cd}_a \nabla_c \nabla_d F_G + 8 \nabla^c R_{ab} \nabla_c F_G - 4 \nabla_b R^c_a \nabla_c F_G - 4 \nabla_a R^c_b \nabla_c F_G \right. \\ \left. + 4F_G \square R_{ab} - 2F_G \nabla_a \nabla_b R + 4F_G R_{acbd} R^{cd} - 4F_G R^c_a R_{bc} \right] \delta g^{ab} \quad (\text{A.52})$$

biçiminde yazılabilirler. Şimdi (A.32), (A.41)-(A.44) ve (A.49)-(A.52) ifadeleri (A.25) denkleminde yerleştirilerek, $F(R, G)$ -gravitenin aksiyonunun varyasyonu için

$$\begin{aligned} \delta S = & -\frac{1}{2} \int_V d^4x \sqrt{-g} T_{ab}^m \delta g^{ab} \\ & + \frac{1}{2\kappa^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} g_{ab} F + F_R R_{ab} + g_{ab} \square F_R - \nabla_a \nabla_b F_R \right. \\ & \quad + \left(2R R_{ab} - 4R_a^c R_{cb} - 4R_{acbd} R^{cd} + 2R_a^{efg} R_{befg} \right) F_G \\ & \quad + 2R g_{ab} \square F_G - 2R \nabla_a \nabla_b F_G - 4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d F_G - 4R_{ab} \square F_G \\ & \quad \left. + 4R_a^c \nabla_b \nabla_c F_G + 4R_b^c \nabla_a \nabla_c F_G - 4F_G R_a^{cd} \nabla_d \nabla_c \right\} \delta g^{ab} \end{aligned} \quad (A.53)$$

elde edilir ve $\delta S = 0$ stasyoner olma koşulundan, $F(R, G)$ -gravitenin

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} g_{ab} F + F_R R_{ab} + g_{ab} \square F_R - \nabla_a \nabla_b F_R \\ & \quad + \left(2R R_{ab} - 4R_a^c R_{cb} - 4R_{acbd} R^{cd} + 2R_a^{efg} R_{befg} \right) F_G \\ & \quad + 2R g_{ab} \square F_G - 2R \nabla_a \nabla_b F_G - 4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d F_G - 4R_{ab} \square F_G \\ & \quad + 4R_a^c \nabla_b \nabla_c F_G + 4R_b^c \nabla_a \nabla_c F_G - 4F_G R_a^{cd} \nabla_d \nabla_c = \kappa^2 T_{ab}^m \end{aligned} \quad (A.54)$$

biçimindeki alan denklemlerine ulaşılır. Burada şuna işaret edelim, Pür Gauss-Bonnet terimi 4-boyutta topolojik invaryant olduğundan, yani, alan denklemlerine katkısı olmadığından $F = R + G \Rightarrow F_G = 1, F_R = 1$ için standart EAD'ye düşülmelidir. Bu takdirde (A.54) ten

$$\frac{1}{2} g_{ab} G + \left(-2R R_{ab} + 4R_{ac} R_b^c - 2R_a^{cde} R_{bcde} - 4R_{acdb} R^{cd} \right) = 0 \quad (A.55)$$

özdeşliği elde edilir. Bu kullanılarak (A.54) yeniden ifade edilirse, alan denklemleri

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} g_{ab} (F - G F_G) + F_R R_{ab} + g_{ab} \square F_R - \nabla_a \nabla_b F_R \\ & \quad + 2R g_{ab} \square F_G - 2R \nabla_a \nabla_b F_G - 4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d F_G - 4R_{ab} \square F_G \\ & \quad + 4R_a^c \nabla_b \nabla_c F_G + 4R_b^c \nabla_a \nabla_c F_G - 4F_G R_a^{cd} \nabla_d \nabla_c = \kappa^2 T_{ab}^m \end{aligned} \quad (A.56)$$

şeklinde bulunur.

EK B. TEMEL BAĞINTI VE ÖZDEŞLİKLER

B.1. Yararlı Özdeşlikler

Aşağıdaki ifadeler burulmasız ($\nabla_a \nabla_b \phi - \nabla_b \nabla_a \phi = 0$) bir uzay-zaman için ifade edilmiş olup burada ϕ bir skaler ve X_{ab} de bir 2-tansördür.

$$\nabla^a R_{abcd} = \nabla_c R_{bd} - \nabla_d R_{bc} \quad (B.1)$$

$$\nabla^a R_{ab} = \frac{1}{2} \nabla_b R \quad (B.2)$$

$$\nabla_a \nabla_b R^{pq} = \square R^{pq} - \frac{1}{2} \nabla^p \nabla^q R - R^{pm} R^q_m + R^{pmqn} R_{mn} \quad (B.3)$$

$$\nabla_a \nabla_b R^{ab} = \frac{1}{2} \square R \quad (B.4)$$

$$\nabla_c \nabla_{(a} R_{b)}^c = \frac{1}{2} \nabla_{(a} \nabla_{b)} R + R_a^c R_{bc} - R_{acbd} R^{cd} \quad (B.5)$$

$$(\square \nabla_a - \nabla_a \square) \phi = R_{ab} \nabla^b \phi \quad (B.6)$$

$$R^{cab} \nabla_a \nabla_b \nabla_c \phi = -\frac{1}{2} R^{cab} R^d_{cab} \nabla_d \phi \quad (B.7)$$

$$2\nabla_{[a} \nabla_{b]} X_{pq} = R^m_{pba} X_{mq} + R^m_{qba} X_{pm} \quad (\text{Ricci özdeşlikleri}) \quad (B.8)$$

(B.1)-(B.5) bağıntıları, (2.7.b) ile verilen II. Bianchi Özdeşliğinden elde edilmektedirler.

B.2. h_{ab} , U_{ab} ve η_{abc} nin Bazı Türev Özellikleri

$$D_c h_{ab} = 0, \dot{h}_{ab} = 2u_{(a} \dot{u}_{b)} \Rightarrow \dot{h}_{\langle ab \rangle} = 0 \quad (B.9)$$

$$D_c U_{ab} = 0, \dot{U}_{ab} = -2u_{(a} \dot{u}_{b)} = -\dot{h}_{ab} \Rightarrow \dot{U}_{\langle ab \rangle} = 0 \quad (B.10)$$

$$D_d \eta_{abc} = 0, \dot{\eta}_{abc} = 3u_{[a} \eta_{bc]d} \dot{u}^d = (u_a \eta_{bcd} + u_b \eta_{cad} + u_c \eta_{abd}) \dot{u}^d \Rightarrow \dot{\eta}_{\langle abc \rangle} = 0 \quad (B.11)$$

B.3. Diğer Bazı Özdeşlikler

V_a , W_b birer uzaysal vektör ve A_{ab} , B_{ab} de birer uzaysal tansör olmak üzere,

$$0 = \eta^{abc} A_{bd} V_c W^d - \eta^{abc} A_{bd} W_c V^d - A^a_b \eta^{bcd} V_c W_d \quad (B.12)$$

$$0 = \eta^{abc} B_{bd} A_{ce} B^{de} + B^a_b \eta^{bcd} B_{ce} A_d^e \quad (B.13)$$

$$0 = V^{<a} \eta^{b>cd} (D_c V_d) + \eta^{cd<a} V_c (D_d V^{b>}) - \eta^{cd<a} V_c (D^{b>d} V_d) \quad (B.14)$$

$$0 = \eta^{abc} A_b^d (D_c V_d) - \eta^{abc} A_b^d (D_d V_c) - A^a_b \eta^{bcd} (D_c V_d) \quad (B.15)$$

$$0 = \eta^{abc} V_b (D_d A_c^d) - 2V_b \eta^{cd[a} (D_c A^{b]}_d) \quad (B.16)$$

$$0 = \eta^{cd\langle a} D_c (A_{de} A^{b\rangle e}) - \eta^{cd\langle a} D_c (A^{b\rangle}_c A_d^e) \quad (B.17)$$

dir. (B.12)-(B.17) özdeşlikleri Henk Van Elst'in [89] çalışmasından alınmıştır.

EK C.

$$S_{ab} \equiv \nabla_a \nabla_b \phi \text{ nin çeşitli izdüşümleri : } \nabla_a \nabla_b \phi - \nabla_b \nabla_a \phi = 0 \Rightarrow S_{ab} = S_{ba}$$

S_{ab} nin 1+3 kovaryant ayrışımı, (3.4.b) uyarınca

$$S_{ab} = U^c U^d {}_b S_{cd} + U^c {}_a h^d {}_b S_{cd} + h^c {}_a U^d {}_b S_{cd} + h^c {}_a h^d {}_b S_{cd} \quad (C.1)$$

dir.

$$\nu_{ab} \equiv D_a u_b \equiv \theta_{ab} + \omega_{ab} = \sigma_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab} + \eta_{abc} \omega^c \quad (C.2)$$

olmak üzere $U_{ab} = -u_a u_b$ ve $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$ izdüşüm operatörleri kullanılarak S_{ab} nin çeşitli izdüşümleri için

$$S_{ab} u^a u^b = \ddot{\phi} - \dot{u}^c D_c \phi \quad (C.3)$$

$$S_{ab} h^a {}_c u^d = -\nu_c^d D_d \phi + D_c \dot{\phi} \quad (C.4)$$

$$S_{ab} h^a {}_c u^b = D_c \dot{\phi} - \nu_c^d D_d \phi \quad (C.5)$$

$$S_{ab} h^a {}_c h^b {}_d = -\nu_{cd} \dot{\phi} + D_c D_d \phi \quad (C.6)$$

$$S_{ab} h^{ab} = D^a D_a \phi - \theta \dot{\phi} \quad (C.7)$$

bulunur ve bunlar (C.1) e taşınırsa,

$$S_{ab} = u_a u_b \left[\ddot{\phi} - \dot{u}^c D_c \phi \right] - u_a \left[-\dot{u}_b \dot{\phi} + (D_b \phi) \dot{} - u_b \dot{u}^c D_c \phi \right] - u_b \left[D_a \dot{\phi} - \nu_a^c D_c \phi \right] + D_a D_b \phi - \nu_{ab} \dot{\phi} \quad (\text{C.8.a})$$

olur ya da (4.241) özdeşliği de kullanılarak

$$S_{ab} = u_a u_b \left[\ddot{\phi} - \dot{u}^c D_c \phi \right] - u_a \left[D_b \dot{\phi} - \nu_b^c D_c \phi \right] - u_b \left[D_a \dot{\phi} - \nu_a^c D_c \phi \right] + D_a D_b \phi - \nu_{ab} \dot{\phi} \quad (\text{C.8.b})$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu ifadeden S_{ab} nin simetrik olduğu açıkça anlaşılamamaktadır. Fakat, (4.244) özdeşliği göz önünde bulundurulursa $S_{ab} = S_{ba}$ olduğu kolayca görülür.

Öte yandan R_{ab} Ricci tansörünün $R_{ab} = \Delta u_a u_b + \Xi h_{ab} + 2u_{(a} \Upsilon_{b)} + \Sigma_{ab}$ biçimindeki ayrışımından, yine izdüşüm operatörleri kullanılarak

$$R_{ab} u^a = -\Delta u_b - \Upsilon_b \quad (\text{C.9})$$

$$R_{ab} u^a u^b = \Delta \quad (\text{C.10})$$

$$R_{ac} h^{ab} = -\Xi h_c^b + u_c \Upsilon^b + \Sigma_c^b \quad (\text{C.11})$$

$$R_{ab} h^a_c h^b_d = \Xi h_{cd} + \Sigma_{cd} \quad (\text{C.12})$$

$$R_{ab} h^{ab} = 3\Xi \quad (\text{C.13})$$

$$R = -\Delta + 3\Xi \quad (\text{C.14})$$

ifadeleri ve bunları kullanarak da

$$R_{ac} R^c_b = -\Delta^2 u_a u_b - \Delta u_a \Upsilon_b - \Delta u_b \Upsilon_a + \Xi^2 h_{ab} + \Xi u_b \Upsilon_a + \Xi u_a \Upsilon_b + 2\Xi \Sigma_{ab} + u_a u_b \Upsilon_c \Upsilon^c - \Upsilon_a \Upsilon_b + u_a \Upsilon_c \Sigma^c_b + u_b \Upsilon^c \Sigma_{ac} + \Sigma^a_c \Sigma^c_b \quad (\text{C.15})$$

$$R_{ac} u^a R^c_b u^b = -\Delta^2 + \Upsilon_c \Upsilon^c \quad (\text{C.16})$$

$$R_{ac} R^c_b h^{ab} = 3\Xi^2 - \Upsilon^a \Upsilon_a + \Sigma^a_c \Sigma^c_a \quad (\text{C.17})$$

$$R_{ac} R^c_b h^b_c u^a = -3u_c \Delta \Xi - 3\Xi \Upsilon_c \quad (\text{C.18})$$

$$R_{acdb} u^a u^b = -E_{cd} - \frac{1}{3} \Delta h_{cd} + \frac{1}{2} \Sigma_{cd} \quad (\text{C.19})$$

$$R_a{}^{cd}{}_b h^{ab} = -E^{cd} - \frac{1}{3}(\Delta + 3\Xi)h^{cd} - \Delta u^c u^d - u^d \Upsilon^c - u^c \Upsilon^d - \frac{1}{2}\Sigma^{cd} \quad (C.20)$$

$$R_{acdb} u^a u^b R^{cd} = -E_{cd} \Sigma^{cd} - \Delta \Xi + \frac{1}{2} \Sigma_{cd} \Sigma^{cd} \quad (C.21)$$

$$R_a{}^{cde} u^a R_{bcde} u^b = u^a u^b C_a{}^{cde} C_{bcde} - \frac{2}{3} \Delta^2 + \Upsilon^a \Upsilon_a - \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \Sigma_{ab} \quad (C.22)$$

$$R_a{}^{cde} R_{bcde} h^{ab} = C_a{}^{cde} C_{bcde} h^{ab} + \Delta^2 + 3\Xi^2 + 2\Delta\Xi - 3\Upsilon^a \Upsilon_a + \frac{3}{2} \Sigma^{ab} \Sigma_{ab} \quad (C.23)$$

ve Gauss-Bonnet teriminin ifadesi için ise, uzun hesaplardan sonra

$$\begin{aligned} G &= R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd} \\ &= -\frac{4}{3}\Delta^2 - 4\Delta\Xi + 4\Upsilon_a \Upsilon^a - 2\Sigma_{ab}\Sigma^{ab} + C^2 \end{aligned} \quad (C.24)$$

elde edilir. Burada C^2 , Weyl tansörünün karesi olup yine uzun bir hesaptan sonra

$$C^2 = C_{abcd}C^{abcd} = 8(E_{ab}E^{ab} - H_{ab}H^{ab}) \quad (C.25)$$

bulunur. (C.19)-(C.24) ifadelerinin elde edilmesinde (3.41) bağıntısı da kullanılmıştır.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	Değer Sofuoğlu
Uyruğu	T.C.
Doğum tarihi, Yeri	15.11.1983, Giresun
Telefon	0212 455 57 00 / 15420
E-mail	degers@istanbul.edu.tr
Web adres	http://aves.istanbul.edu.tr/degers/

Eğitim

Derece	Kurum/Anabilim Dalı/Programı	Yılı
Doktora	İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü/Fizik Anabilim Dalı/Matematiksel Fizik Programı	2014
Yüksek Lisans	İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü/Fizik Anabilim Dalı/Matematiksel Fizik Programı	2008
Lisans	İ.Ü. Fen Fakültesi/Fizik Bölümü	2004
Lise	Dr. Sadık Ahmet Lisesi	2000

Makaleler / Bildiriler

1. Sofuoğlu, D., Mutuş, H., 2014, *Investigations of $f(R)$ -gravity counterparts of the general relativistic shear-free conjecture by illustrative examples*, Gönderildi.
2. Sofuoğlu, D., Gödel type expanding universe in the context of $F(G)$ -gravity (Sözlü Bildiri), *Turkish Physical Society 31st International Physics Congress Book of Abstracts*, 21-24 Temmuz 2014, Bodrum, Türkiye, 248.

3. Sofuoğlu, D., Güler, S., Reconstructions of $F(G)$ -gravity for Bianchi-type I Model (Sözlü Bildiri), *Turkish Physical Society 31st International Physics Congress Book of Abstracts*, 21-24 Temmuz 2014, Bodrum, Türkiye, 237.
4. Sofuoğlu, D., Rotating and expanding Bianchi-type V universe in $F(R)$ -gravity as an illustrative example to the shear-free perfect fluid conjecture (Poster), *Turkish Physical Society 31st International Physics Congress Book of Abstracts*, 21-24 Temmuz 2014, Bodrum, Türkiye, 484.
5. Sofuoğlu, D., Existence of shear-free, rotating and expanding universe in $F(R)$ -gravity (Sözlü Bildiri), *Turkish Physical Society 30th International Physics Congress Book of Abstracts*, 2-5 Eylül 2013, İstanbul, Türkiye, 290.
6. Sofuoğlu, D., Consistency analysis for covariant constraint equations of shear-free and acceleration-free brane-worlds (Poster), *Turkish Physical Society 30th International Physics Congress Book of Abstracts*, 2-5 Eylül 2013, İstanbul, Türkiye, 637.
7. Sofuoğlu, D., 2012, Effect of the bulk on shear-free dynamics in brane-world cosmologies (Sözlü Bildiri), *Turkish Physical Society 29th International Physics Congress Book of Abstracts*, 5-8 Eylül 2012, Bodrum, Türkiye, 345.
8. Yılmaz, D., Sofuoğlu, D., 2012, Generalization of the consistency analysis in irrotational cosmological models (Sözlü Bildiri), *Turkish Physical Society 29th International Physics Congress Book of Abstracts*, 5-8 Eylül 2012, Bodrum, Türkiye, 351.
9. Erman, M., Sofuoğlu, D., Güdekli E., Covariant cosmological evolution and constraint equations in higher-order gravity theories (Sözlü Bildiri), *Turkish Physical Society 29th International Physics Congress Book of Abstracts*, 5-8 Eylül 2012, Bodrum, Türkiye, 334.