

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI QUASİLİNEER FONKSİYON UZAYLARININ
CEBİRSEL VE TOPOLOJİK YAPISI
ÜZERİNE**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Erdem DEMİR

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

HAZİRAN 2022

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI QUASİLİNEER FONKSİYON UZAYLARININ
CEBİRSEL VE TOPOLOJİK YAPISI
ÜZERİNE**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Erdem DEMİR
(36193614002)**

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

HAZİRAN 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgmeden beni her konuda yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ'a,

Hayatımın her anında bana yardım eden, bu günlere gelmemde çok büyük katkısı olan, bana güvenen, desteklerini esirgemeyen aileme, sevdiklerime, dostlarıma,

Desteğini her zaman yanımda hissettiğim çok değerli hocam Doç. Dr. Murat CANDAN'a,

Lisans ve yüksek lisans hayatım boyunca güleryüzlerini eksik etmeyen, bilgi ve tecrübeleriyle her türlü katkıyı sağlayan değerli Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine,

Katkılarından dolayı değerli jüri üyelerine saygılarımı sunar, teşekkür ederim.



ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “BAZI QUASİLİNEER FONKSİYON UZAYLARININ CEBİRSEL VE TOPOLOJİK YAPISI ÜZERİNE” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Erdem DEMİR



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	iv
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.1 Önemli Tanım ve Teoremler	2
2.1.1 Metrik uzaylar	3
2.1.2 Topolojik Uzaylar	4
2.1.3 Lineer Uzaylar	4
2.1.4 Normlu Uzaylar	6
2.1.5 İç Çarpım Uzayları	7
3. QUASİLİNEER UZAYLAR	11
3.1 Quasilineer Uzaylar	11
3.1.1 Quasilineer Uzaylarda Quasilineer Bağımlılık-Bağımsızlık	13
3.1.2 Normlu Quasilineer Uzaylar.....	16
3.1.3 İç çarpım Quasilineer Uzaylar.....	16
4. İNTERVAL DEĞERLİ KARESİ İNTEGRALLENEBİLEN FONKSİYONLARIN QUASİLİNEER UZAYI	18
4.1 Karesi İntegrallenebilir İnterval Değerli Fonksiyonların Sınıfı.....	18
4.2 Sonlu Enerjili İnterval Değerli Sinyallerin Uygulaması.....	22
4.3 Non-Deterministik Bazı Sinyallerin Fourier Transformlarının Tahmini Olarak Belirlenmesi.....	28
KAYNAKLAR.....	33
ÖZGEÇMİŞ	35

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$I_{\mathbb{R}}$	: $\mathbb{R}$ nin tüm kapalı aralıklarının oluşturduğu küme
$\Omega(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}$ lineer uzayının kapalı, sınırlı, alt kümelerinin ailesi
$\Omega_C(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}$ lineer uzayının kapalı, sınırlı, konveks alt kümelerinin ailesi
$QspM$	: Bir M quasilineer uzayının quasi-gereni
$L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$	: $[a, b]$ aralığından $I_{\mathbb{R}}$ ye tanımlı karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$\hat{G}(\omega)$	: G nin küme değerli Fourier transformu
$\bar{F}$	: İnterval değerli fonksiyonun üst sınırı
$\underline{F}$	: İnterval değerli fonksiyonun alt sınırı

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI QUASİLİNEER FONKSİYON UZAYLARININ CEBİRSEL VE TOPOLOJİK YAPISI ÜZERİNE

ERDEM DEMİR

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

35+vi sayfa

2022

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde, tezde bahsedilen konular hakkında kısaca bilgi verildi. Sonra tezde yapılanlardan bahsedildi.

İkinci bölümde ise ilerideki bölümlerde kullanılan temel kavramlar, tanım ve teoremlere yer verildi.

Üçüncü bölümde lineer uzayların genelleştirilmesi olan quasiliner uzayların tanımına yer verildi. Lineer uzaylardaki önemli cebirsel ifadeler, tanım ve teoremlerin quasilineer uzaylardaki karşılıklarına yer verildi.

Dördüncü bölümde interval değerli fonksiyonların oluşturduğu uzay $L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ quasilineer uzayından bahsedildi. Bu uzayın diğer adının interval değerli sonlu enerjili sinyaller uzayı olduğu ifade edildi. Bu uzayın üzerindeki normla Hilbert quasilineer uzay olduğu da belirtildi. Ayrıca bazı eksik bilgiye sahip non-deterministik sinyallerin enerjilerinin tahminine yönelik bir yöntem geliştirildi. Daha sonra bazı non-deterministik sinyallerinde Fourier Transformatları tahmin etmeye çalışıldı. Burada da daha önceden bilinen Küme değerli Fourier Transformatı kullanıldı. Bunun için iç çarpım quasilineer uzaylar kullanılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Quasilineer uzaylar, İnterval değerli fonksiyon, İnterval değerli sinyal, Non-deterministik sinyal.

ABSTRACT

Master Thesis

ON ALGEBRAIC AND TOPOLOGICAL STRUCTURE OF SOME QUASILINEAR FUNCTION SPACES

Erdem DEMİR

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

35+vi pages

2022

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yilmaz YILMAZ

This master thesis consists of four parts. In the first part of the thesis, brief information was given about the subjects mentioned in the thesis. Then, what was done in the thesis was mentioned.

In the second part, the basic concepts, definitions and theorems used in the following chapters are given.

In the third chapter, the definition of quasilinear spaces, which is the generalization of linear spaces, is given. Important algebraic expressions, definitions and theorems in linear spaces are given in quasilinear spaces.

In the fourth chapter, the space $L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ quasilinear space formed by interval-valued functions is mentioned. It was stated that the other name of this space is the interval valued finite energy signals space. It was also stated that this space is a Hilbert quasilinear space with the norm on it. In addition, a method for estimating the energies of non-deterministic signals with some missing information was developed. Then, it was tried to predict Fourier Transforms in some non-deterministic signals. Here, the previously known Set-valued Fourier Transform was used. For this, inner product quasilinear spaces are used.

Keywords: Quasilinear spaces, Interval valued function, Interval valued signal, Non deterministic signal.

1. GİRİŞ

Lineer Uzayın bir genelleştirmesi olan “Quasilineer Uzay” yaklaşımı, ilk olarak Aseev [1] tarafından sunuldu. Aseev makalesinde, quasilineer uzaylarda, quasilineer operatörler vererek lineer uzaylardaki lineer operatörleri genelleştirdi. O zamandan beri birkaç makale çalışması quasilineer fonksiyonel analiz ve küme değerli analizle ilgilenmiştir. (Çakan ve Yılmaz, 2015; Levent ve Yılmaz, 2018b; Bozkurt ve Yılmaz, 2016a; Bozkurt ve Yılmaz, 2018b;)

Son zamanlarda Yılmaz ve diğerlerinin 2016’da yaptığı çalışmalarda, iç çarpım quasilineer uzayı, Hilbert Quasilineer Uzayı ve diklikle ilgili bazı yeni yaklaşım serileri içeren sonuçların elde edilmesi amaçlanmıştır. İç çarpım uzayları ile iç çarpım quasilineer uzayları arasındaki önemli temel ayrım “küme-değerli” fonksiyon olarak tanımlanmıştır. Aradaki bu fark, quasilineer fonksiyonel analizde, lineer fonksiyonel analizde olmayan bazı yeni analizler yapmaya izin vermektedir.

Sinyal işleme son yıllarda özellikle etkin olarak kullanılmaya başlanmıştır. Bunun öncülüğünde bir çok buluş ortaya çıkmıştır. Biz bu çalışmada quasilineer uzayların sinyal işlemede önemli bir yere sahip olduğunu ifade ettik. Eksik bilgiye sahip belli oranda özelliklerini bildiğimiz bazı sinyallerin deterministik otokorolasyonu eksik bilgiye sahip sinyaller içinde yaklaşık olarak hesaplayabilmekteyiz. Burada önemli bir nokta ise sinyalin özelliklerini tam olarak bilmesek bile bazı noktalarda hangi aralıklarda olduğunu biliyorsak sinyalin otokorelasyonu ile ilgili tahminlerde bulunabiliriz. Bu bize sinyal işlemede çok önemli katkılarda bulunuyor.

Bu tezde $L_2(\mathbb{R}, I_{\mathbb{R}})$ quasilineer uzayının $L_2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{R}))$ quasilineer uzayının bir alt quasilineer uzayı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bir interval değerli fonksiyonun sinyalinin enerjisini hesaplanmaya ilişkin uygulamalar yapılmıştır. $[a, b] \rightarrow I_{\mathbb{R}}$ ’ ye tanımlı fonksiyonların iç çarpımlarının kolay olarak nasıl hesaplandığına yönelik uygulamalara yer verilmiştir. Bir uygulama ile non-deterministik bir sinyalin enerjisini hesaplamaya yönelik bir tahmin geliştirilmiştir. Bu uygulama ile Hilbert-quasilineer uzayların klasik sinyal işlemede bize önemli katkılar sağladığını göstermektedir. Ayrıca non-deterministik bazı sinyallerin Fourier transformlarının tahmini olarak belirlenmesine yönelik bilgilere yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Önemli Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere ve " $\preceq$ " X üzerinde ki bağıntı, her $v, t, u \in X$ için

$$i) v \preceq v,$$

$$ii) v \preceq u \text{ ve } u \preceq t \text{ ise } v \preceq t,$$

$$iii) v \preceq u \text{ ve } u \preceq v \text{ ise } v = u,$$

şartlarını sağlıyorsa, $\preceq$ bağıntısına X üzerinde kısmi sıralama bağıntısı denir. $(X, \preceq)$ ikilisinde kısmi sıralı küme denir. [2]

Tanım 2.1.2. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme ve $a \in X$ olsun. Her $x \in X$ için $x \preceq a$ olacak şekilde $a \in X$ varsa, a elemanına X 'in maksimum elemanı denir. Ayrıca her $x \in X$ için $b \preceq x$ olacak şekilde bir $b \in X$ varsa, b elemanına X 'in minimum elemanı denir. [2]

Tanım 2.1.3. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme ve $a \in X$ olsun. Her $x \in X$ için $a \preceq x$ olması $x = a$ olması durumunda gerçekleşiyorsa a elemanına X 'in bir maksimal elemanı denir. $b \in X$ olmak üzere, her $x \in X$ için $x \preceq b$ olması $x = b$ olması durumunda gerçekleşiyorsa b elemanına X 'in minimal elemanı denir. [2]

Tanım 2.1.4. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme olmak üzere $M \subset X$ olsun, her $b \in M$ için,

$$b \preceq x$$

ve

$$b \preceq y \text{ şartını sağlayan her } y \in X \text{ için } x \preceq y$$

için öyle bir $x \in X$ varsa, x elemanına M 'nin üst sınırlarının en küçüğü veya başka bir ifadeyle supremumu denir. Eğer her $b \in M$ için,

$$x \preceq b$$

ve

$$y \preceq b \text{ şartını sağlayan her } y \in X \text{ için } y \preceq x$$

için öyle bir $x \in X$ varsa, x elemanına M 'nin alt sınırlarının en büyüğü veya başka bir ifadeyle infimumu denir. [2]

Tanım 2.1.5. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme ve her $a, b \in X$ için,

$$a \preceq b \text{ veya } b \preceq a$$

ifadesini sağlayan bu bağıntıya X üzerinde ki tam sıralama bağıntısı denir. Bu şartları sağlayan X kümesine ise tam sıralı küme denir. [2]

2.1.1 Metrik uzaylar

Tanım 2.1.6. X boştan farklı bir küme olmak üzere, her $\alpha, \beta, \lambda \in X$ için

$$M1) d(\alpha, \beta) \geq 0, d(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \text{ve } \alpha = \beta,$$

$$M2) d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha),$$

$$M3) d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \lambda) + d(\lambda, \beta)$$

$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bu üç şartı sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir. (X, d) ' ye ise metrik uzay denir. [2]

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, d(x, y) = |x - y|$$

metriği ile bir metrik uzaydır. Bu metriğe mutlak değer metriği veya alışılmış metrik denir. Kompleks terimli ve sınırlı bütün dizilerin kümesi olan

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k) \subset \mathbb{C} : \sup_k |x_k| < \infty \right\},$$
$$d(x, y) = \sup_k |x_k - y_k|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu ile bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.7. (X, d) bir metrik uzay olsun ve $M \subseteq X$ boştan farklı bir küme olmak üzere,

$$\text{diam}M = \sup\{d(x, y) : x, y \in M\}$$

değerine M kümesinin çapı denir. [2]

Tanım 2.1.8. (X, d) metrik uzayında $M \subseteq X$ olsun, her $\alpha, \beta \in M$ için $d(\alpha, \beta) \leq K$ şartını sağlayan bir K pozitif reel sayısı varsa M kümesine sınırlıdır denir. [2]

Tanım 2.1.9. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, X' deki her Cauchy dizisi X' de yakınsak ise (X, d) ' ye bir tam metrik uzay denir. [2]

2.1.2 Topolojik Uzaylar

Tanım 2.1.10. X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere ve X 'in alt kümelerinin ailesinden oluşan τ için

$\tau_1)$ $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$,

$\tau_2)$ τ 'nun elemanlarının sonlu sayıda kesişimi τ 'nin elemanıdır;

$\tau_3)$ τ 'nun elemanlarının keyfi birleşimi τ 'nin elemanıdır.

Bu şartlar sağlanıyan (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir. [3]

Önerme 2.1.1. (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. [2]

A kümesi kompakttır $\Leftrightarrow A$ 'daki her dizi yakınsak bir alt diziye sahiptir.

Tanım 2.1.11. M ve N iki topolojik uzay olmak üzere, $f : M \rightarrow N$ dönüşümü birebir, örten, sürekli ve tersi de sürekli ise f dönüşümüne homeomorfizm (topolojik eşyapı dönüşümü) denir. M ve N uzaylarına da homeomorf topolojik uzaylar denir. [3]

Tanım 2.1.12. M ve N topolojik uzaylar ve $f : M \rightarrow N$ bir homeomorfizm olsun. Bu dönüşüm altında M üzerindeki topolojik özellikler korunur. [3]

2.1.3 Lineer Uzaylar

Tanım 2.1.13. $W \neq \emptyset$ ve K reel veya kompleks sayılar üzerinde bir cisim olsun. W üzerinde,

$$+ : W \times W \rightarrow W, (v, w) \rightarrow v + w$$

ve

$$\cdot : K \times W \rightarrow W, (\lambda, v) \rightarrow \lambda \cdot v$$

işlemleri tanımlansın. Her $v, w, u \in W$ ve her $\lambda, \beta \in K$ için,

L1 $v + w = w + v$,

L2 $(v + w) + u = v + (w + u)$,

L3 $v + \theta = \theta + v = v$ olacak şekilde bir $\theta \in W$ vardır,

L4 $v + (-v) = (-v) + v = \theta$ olacak şekilde bir $-v \in X$ vardır,

L5 $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$,

L6 $(\lambda + \beta) \cdot v = \lambda \cdot v + \beta \cdot v$,

L7 $\lambda \cdot (\beta \cdot x) = (\lambda\beta) \cdot v$,

L8 $1 \cdot v = v$ olacak şekilde bir $1 \in K$ vardır.

*Bu şartların hepsi sağlanıyorsa X 'e K cismi üzerinde bir **lineer uzay (vektör uzayı, doğrusal uzay)** denir. X 'in elemanlarına ise vektör denir. [2]*

Teorem 2.1.1. W bir vektör uzayı ve $V \subseteq W$ olsun. V kümesinin W 'in bir alt vektör uzayı olması için gerek ve yeter koşul her $\lambda, \mu \in K$ ve her $v_1, v_2 \in V$ için $\lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2 \in V$ olmasıdır. [2]

Tanım 2.1.14. W bir vektör uzayı ve $A \subseteq W$ olsun. Her $a, b \in A$ için $[a, b] \subseteq A$ ise A 'ya konveks küme denir. [2]

Tanım 2.1.15. V, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ olmak üzere $\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k$ toplamına $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerinin lineer kombinasyonu denir. [2]

Tanım 2.1.16. V lineer uzay ve A 'da boştan farklı bir küme $A \subset V$ olsun, A 'nın tüm muhtemel lineer kombinasyonlarının kümesine A 'nın gereni denir. SpA ile gösterilir. $SpA = V$ oluyorsa A kümesi V 'i geriyor denir. [2]

Tanım 2.1.17. V bir lineer uzay ve $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset V$ olsun. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot w_k = 0$$

ifadesi $\lambda_k = 0$ ($1 \leq k \leq n$) olması ile mümkünse W kümesine lineer bağımsızdır denir. Aksi halde W kümesine lineer bağımlıdır denir. [2]

Tanım 2.1.18. V bir lineer uzay olsun. V 'in lineer bağımsız ve V 'i geren bir alt kümesi varsa bu kümeye V için bir baz denir. [2]

2.1.4 Normlu Uzaylar

Tanım 2.1.19. X bir lineer uzay olmak üzere X ' den $\mathbb{R}$ ' ye tanımlı $\|\cdot\|$ fonksiyonu her $u, v \in X$ ve her $\lambda \in K$ için

N1 $\|u\| \geq 0$ ve $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta$,

N2 $\|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \|u\|$,

N3 $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

özelliklerini gerçekleyen fonksiyona X üzerinde bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ 'a ise normlu uzay denir. [2]

Tanım 2.1.20. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

olarak tanımlanan $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ d metriğine normdan doğan metrik ya da norm metriği denir. [2]

Tanım 2.1.21. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Eğer $(X, \|\cdot\|)$ norm metriği ile tam ise $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine Banach uzayı denir. [4]

Örnek 2.1.1. $p \geq 1$ olmak üzere $L_p[a, b]$ p . mertebeden integrallenebilen fonksiyonlar uzayı $f \in L_p[a, b]$ için

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuyla bir normlu uzay olup norm metriği ile de tam olan bir normlu uzaydır. Dolayısıyla $L_p[a, b]$ fonksiyon uzayı bu normla bir Banach uzayıdır.

Başka bir örnek olarak $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$,

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

öklid normu olarak adlandırılan norm ile birer Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.22. V ve W birer vektör uzayı olsunlar. V ' den W 'ye giden T operatöründe her $u, v \in V$ ve her $\lambda, \beta \in K$ için $T(\lambda u + \beta v) = \lambda T(u) + \beta T(v)$ şartını gerçekleştiriyorsa bu T operatörüne lineer operatör denir. [2]

Tanım 2.1.23. V ve W normlu uzay olmak üzere, $T : V \rightarrow W$ lineer operatörü her $v \in V$ için

$$\|T(v)\| \leq m \|v\|$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir m pozitif reel sayısı varsa T 'ye sınırlı lineer operatör denir. [2]

2.1.5 İç Çarpım Uzayları

Tanım 2.1.24. V bir lineer uzay olsun. $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$ fonksiyonu verilsin. her $\alpha, \beta, \mu \in V$ ve $\lambda \in K$ için

İÇ1) $\langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0$ ve $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = \theta$,

İÇ2) $\langle \alpha, \beta \rangle = \overline{\langle \beta, \alpha \rangle}$,

İÇ3) $\langle \lambda \cdot \alpha, \beta \rangle = \lambda \cdot \langle \alpha, \beta \rangle$,

İÇ4) $\langle \alpha + \beta, \mu \rangle = \langle \alpha, \mu \rangle + \langle \beta, \mu \rangle$,

fonksiyonu şartlarını sağlarsa V üzerinde bir iç çarpım adını alır. $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de bir iç çarpım uzayı denir. [4]

Teorem 2.1.2. V bir iç çarpım uzayı ve her $\gamma, \mu \in V$ için

$$|\langle \gamma, \mu \rangle| \leq \|\gamma\| \cdot \|\mu\|$$

sağlayan eşitsizliğe Cauchy-Schwarz Eşitsizliği denir. [4]

Teorem 2.1.3. V bir iç çarpım uzayı ve her $\gamma, \mu \in V$ için

$$\|\gamma + \mu\| \leq \|\gamma\| + \|\mu\|$$

sağlayan eşitsizliğe üçgen eşitsizliği denir. [4]

Teorem 2.1.4. (Paralelkenar Özelliği) V bir iç çarpım uzayı ve her $\gamma, \mu \in V$ için

$$\|\gamma + \mu\|^2 + \|\gamma - \mu\|^2 = 2(\|\gamma\|^2 + \|\mu\|^2)$$

'dir. [2]

Bu teorem önemlidir. Bir normlu uzayın bir iç çarpım uzayı olup olmadığını anlamak için paralel kenar kanununu sağlayıp sağlamadığına bakarız. Eğer sağlarsa o normlu uzayın normunun bir iç çarpımdan geldiğini yani aslında bir iç çarpım uzayı olduğunu söyleriz. Sağlamıyorsa o normlu uzay bir iç çarpım uzayı değildir.

Tanım 2.1.25. V bir iç çarpım uzayı ve $\gamma, \mu \in V$ olsun. V , iç çarpım metriği ile yani $d(\gamma, \mu) = \|\gamma - \mu\| = \sqrt{\langle \gamma - \mu, \gamma - \mu \rangle}$ metriği ile tam ise V 'e bir Hilbert uzayı denir. [5]

Örnek 2.1.2. $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı

$$\langle \rho, \sigma \rangle = \int_0^1 \rho(t) \cdot \overline{\sigma(t)} dt$$

ile bir iç çarpım uzayıdır.

$$\|\rho\| = \langle \rho, \rho \rangle^{1/2} = \left(\int_0^1 |\rho(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

Hilbert uzayı değildir.

Burada $\Omega(\mathbb{R}^n)$ dediğimiz küme $\mathbb{R}^n$ ' lineer uzayının kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi olarak adlandırılır. $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ise $\mathbb{R}^n$ ' lineer uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesi olarak adlandırılır. Ayrıca $\Omega(\mathbb{C})$ 'yi $\mathbb{C}$ 'nin tüm kompakt kümelerinin ailesi olarak göstereceğiz.

Tanım 2.1.26. V ve W kümeleri $\mathbb{R}$ 'nin boştan farklı iki alt kümesi ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla

$$V + W = \{v + w : v \in V, w \in W\},$$

ve

$$\alpha \cdot V = \{\alpha \cdot v : v \in V\}$$

olarak tanımlanır. [6]

Çoğunlukla $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ 'nin bir X elemanı için $X + (-1) \cdot X \neq \emptyset$ dir. Örneğin; $n = 1$ için $X = [-3, 1]$ olsun. O halde $(-1) \cdot X = [-1, 3]$ olur. Buradan

$$X + (-1) \cdot X = [-3, 1] + [-1, 3] = [-4, 4]$$

olur. Buradanda anlaşılacağı üzere $X + (-1) \cdot X = [-4, 4] \neq \emptyset$ dir.

$\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ 'nin bir elemanının -1 katını alıp daha sonra kendisiyle topladığımızda birim eleman olmak zorunda değildir. Bu durum $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega(\mathbb{R}^n)$ küme aileleri lineer uzay değildir. Bu küme aileleri ilerideki kısımda ifade edileceği üzere quasilineer uzay yapısına uymaktadır. [7]

Uyarı 2.1.1. Çoğunlukla $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ 'de $(\alpha + \beta) \cdot X = \alpha \cdot X + \beta \cdot X$ şartı sağlanmaz. Örnek olarak $n = 1$ için $A = [-3, 1] \subseteq \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$(1 + (-1)) \cdot [-3, 1] = 0 \cdot [-3, 1] = \{0\}$$

olduğu halde

$$1 \cdot [-3, 1] + (-1) \cdot [-3, 1] = [-3, 1] + [-1, 3] = [-4, 4]$$

dir. $\{0\} \subset [-4, 4]$ olup her $X \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için $(\alpha + \beta) \cdot X \subseteq \alpha \cdot X + \beta \cdot X$ dir.

Tanım 2.1.27. X ve Y kümeleri boştan farklı ve reel sayıların alt kümeleri olmak üzere

$$d_H(X, Y) = \sup\{d(b, X) : b \in Y\}$$

değerine Y 'nin X 'den Hausdorff ayrımı denir.

Tanım 2.1.28. $\mathbb{R}^n$ 'nin boştan farklı X, Y ve Z alt kümeleri arasında

$$D(X, Y) = \max\{d_H(X, Y), d_H(Y, X)\} \quad (2.1.1)$$

ifadesine Hausdorff uzaklığı denir. Bu D fonksiyonu, metrik şartlarını sağlar. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metrik tanımlar ve bu metriğe Hausdorff metrik denir.

$\Omega(\mathbb{R}^n)$ 'yi ele alalım. Bu küme D fonksiyonu üzerinde bir metrik tanımlar. Sonuç olarak $(\Omega(\mathbb{R}^n), D)$ bir metrik uzay yapısına sahip olur. [6]

$\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ kümesinde $n = 1$ hali önemli bir hal tutmaktadır. Yani $\Omega_C(\mathbb{R})$ kümesi için $\mathbb{R}$ 'nin tüm kapalı aralıklarının oluşturduğu küme olmaktadır ve bu küme $I_{\mathbb{R}}$ olarak daha çok adlandırılır. Bizde bu şekilde adlandıracağız. Bu küme interval analizinde oldukça önemli bir yer tutar. Yukarıda tanımlanan Hausdorff metriği daha kolay bir şekilde $I_{\mathbb{R}}$ için şu şekilde verilir fakat verdiğimiz tanım sadece $n = 1$ hali için geçerlidir yani $I_{\mathbb{R}}$ için verilebilir. $X, Y \in \Omega_C(\mathbb{R}) = I_{\mathbb{R}}$ ise $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ ve $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ şeklinde yazılır. Burdan $\underline{X}$ aralığın alt sınırını, $\overline{X}$ aralığın üst sınırını göstermektedir. Böylece $I_{\mathbb{R}}$ üzerindeki Hausdorff metrik şu şekilde verilir,

$$D(X, Y) = \max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\}$$

dir.

D 'nin bu şekilde verilen tanımını yukarıdaki D tanımıyla aynıdır. Fakat sadece $I_{\mathbb{R}}$ üzerinde D 'yi bu şekilde hesaplayabiliriz. Mesela $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ 'nin elemanları bir aralık olmak zorunda olmadığından $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ 'nin elemanları arasında ki mesafeyi böyle kolay yoldan hesaplamak mümkün değildir. Diğer ana tanımla hesaplamak gereklidir.

Bu çalışmada sürekli-zaman sinyallerinden sıklıkla bahsedildiğinden sürekli zaman Fourier dönüşümünden bahsedelim.

Tanım 2.1.29. *Fourier dönüşümü, her $f \in L_1(\mathbb{R})$ fonksiyonuna*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

ile verilen $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunu karşılık getirir. Yani f 'nin Fourier dönüşümü

$$(\mathcal{F}F)(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

dir. [8]

3. QUASİLİNEER UZAYLAR

3.1 Quasilineer Uzaylar

Tanım 3.1.1. Bir $X \neq \emptyset$ olmak üzere, her $u, v, y, z \in X$ ve her $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki verilmiş olan şartları sağlayan ” $\preceq$ ” kısmi sıralama bağıntısı, cebirsel toplama ve reel sayılarla çarpma işlemi tanımlıysa bu X uzayına **quasilineer uzay** denir. [1]:

q1) $u \preceq u$,

q2) $u \preceq v, v \preceq y \Rightarrow u \preceq y$,

q3) $u \preceq v, v \preceq u \Rightarrow u = v$,

q4) $u + v = v + u$,

q5) $u + (v + y) = (u + v) + y$,

q6) $u + \theta = u$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır,

q7) $\lambda \cdot (\beta \cdot u) = (\lambda \cdot \beta) \cdot u$,

q8) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$,

q9) $1 \cdot u = u$,

q10) $0 \cdot u = \theta$,

q11) $(\lambda + \beta) \cdot u \preceq \lambda \cdot u + \beta \cdot u$,

q12) $u \preceq v, y \preceq z \Rightarrow u + y \preceq v + z$,

q13) $u \preceq v \Rightarrow \lambda \cdot u \preceq \lambda \cdot v$,

Örnek 3.1.1. Reel normlu lineer uzayımız E olsun. $\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$ kümeleri bir ” $\subseteq$ ” bağıntısı aşağıda verilen $P, R \in \Omega_C(E)$ veya $P, R \in \Omega(E)$ için

$$P + R = \overline{\{p + r : p \in P, r \in R\}}$$

cebirsel toplama işlemi ve

$$\alpha \cdot P = \{\alpha \cdot p : p \in P\}$$

skalerle çarpma işlemleriyle quasilineer uzay olmaktadır. Burada eğer E sonlu boyutlu ise

$$P + R = \{p + r : p \in P, r \in R\}$$

şeklinde tanımlıdır. [1]

Örnek 3.1.2. $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ kümeleri, kısmi sıralama bağıntısı olan " $\subseteq$ " bağıntısı, $N, M \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ veya $N, M \in \Omega(\mathbb{R}^n)$

$$N + M = \{n + m : n \in N, m \in M\}$$

ile tanımlanan cebirsel toplama ve

$$\alpha \cdot N = \{\alpha \cdot n : n \in N\}$$

skalerle çarpma işlemleri ile birlikte birer quasilineer uzaydır.

$\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ verilen işlemlerle kapalıdır. Ayrıca her $N, M, L, T \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır. [1]:

$$N + M = M + N,$$

$$N + (M + L) = (N + M) + L,$$

$$N + \theta = \theta + N = N \text{ olacak şekilde } \theta \text{ birim elemanı vardır,}$$

$$1.N = N,$$

$$0.N = \theta,$$

$$\alpha.(\beta.N) = (\alpha\beta).N,$$

$$\alpha.(N + M) = \alpha.N + \alpha.M,$$

$$(\alpha + \beta).N \subseteq \alpha.N + \beta.N,$$

$$N \subseteq M \text{ ise } L \subseteq T \text{ ise } N + L \subseteq M + T,$$

$$N \subseteq M \text{ ise } \alpha.N \subseteq \alpha.M.$$

Genel olarak $N \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için $N + (-1).N \neq \theta$ olmaktadır.

Örnek 3.1.3. $n = 1$ olmak üzere $\Omega_C(\mathbb{R})$ kümesi ve $X = [-1, 5] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ elemanı için,

$$(-1).X = [-5, 1]$$

olur.

$$X + (-1).X = [-1, 5] + [-5, 1] = [-6, 6]$$

olur. $X + (-1).X = [-6, 6] \neq \theta$ dır.

Bu örnekten anlaşılabacağı gibi $\Omega(\mathbb{R})$ ve $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ kümeleri lineer uzay değildirler. Bu uzaylar quasilineer uzay yapısına sahiptir.

Lemma 3.1.1. X bir quasilineer uzay olsun. Bu durumda birim eleman yani θ elemanı minimaldir. [1]

Tanım 3.1.2. X quasilineer uzayında $\gamma' + \gamma = \theta$ olacak şekilde bir $\gamma' \in X$ mevcut ise γ' elemanına γ 'nın **tersi** denir. Bir elemanın tersi mevcut ise bu elemana **regüler** eleman, Eğer bu γ elemanının tersi mevcut değilse **singüler** eleman denir. X 'in regüler elemanlarından oluşan küme X_r ile gösterilir. X 'in tüm singüler elemanlarının kümesi X' e sıfırında dahil edilmesiyle oluşan küme denilen X_s ile gösterilir. [18]

Lemma 3.1.2. X bir quasilineer uzay olsun. X' de her elemanın tersi varsa kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısı olur. Sonuç olarak X bir lineer uzay yapısına sahip olur. [1]

Sonuç 3.1.1. Her reel lineer uzay bir quasilineer uzaydır fakat bunun tersi doğru değildir.

Önerme 3.1.1. Bir X quasilineer uzayında her regüler eleman minimaldir. [9]

Teorem 3.1.1. M bir quasilineer uzay olmak üzere ve $N \subseteq M$ olsun. N 'nin alt uzay olması için gerek ve yeter koşul her $u, v \in N$, her $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ için $\lambda \cdot u + \alpha \cdot v \in N$ olmasıdır. [9]

Tanım 3.1.3. M bir quasilineer uzayı olmak üzere bir $\gamma \in X$ için $-\gamma = \gamma$ olacak şekildeki γ elemanına **simetrik** denir. M 'nin simetrik elemanlarından oluşan küme M_{sym} ile gösterilir. [9]

3.1.1 Quasilineer Uzaylarda Quasilineer Bağımlılık-Bağımsızlık

Tanım 3.1.4. X bir quasilineer uzay, $a_1, a_2, \dots, a_n \in X$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot a_k = a$$

olacak şekilde a elemanına $\{a_k\}_{k=1}^n$ kümesinin bir lineer kombinasyonu denir.

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot a_k \preceq a$$

olacak şekilde a elemanına ise $\{a_k\}_{k=1}^n$ kümesinin bir quasilineer kombinasyonu denir. Kısacası ql -kombinasyonu olarak ifade edilir. [10]

Tanım 3.1.5. $(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay ve $M \subset X$ olmak üzere, M 'nin gereni

$$SpM = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot a_k, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in M \text{ ve } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak tanımlanır.

$$QspM = \left\{ a \in X : \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot a_k \preceq a, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in M \text{ ve } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak tanımlanır. [10]

$QspM = X$ olduğunda M kümesi X ' quasi-geriyor denir. $SpM \subseteq QspM$ ' dir.

Örnek 3.1.4. $\Omega_C(\mathbb{R})$ quasilineer uzayında $A = \{[1, 4]\}$ kümesinin quasi-gereni aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$Qsp\{[1, 4]\} = \{x \in \Omega_C(\mathbb{R}) : \lambda \cdot [1, 4] \subseteq x, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Burada $\lambda = 1$ için $\lambda \cdot [1, 4] \subseteq [1, 4]$ olduğundan $[1, 4] \in QspA$ ' dir. Diğer taraftan $\lambda \cdot [1, 4] \subseteq [2, 4]$ olacak şekilde bir λ reel sayısı olmadığından $[2, 4] \notin QspA$ ' dir. Böylece $QspA \neq \Omega_C(\mathbb{R})$ sonucuna varılır.

Diğer taraftan, $2 \cdot [1, 4] \subseteq [2, 9]$ olduğundan $[2, 9] \in QspA$, fakat $\lambda \cdot [1, 4] = [2, 9]$ olacak şekilde hiçbir λ reel sayısı olmadığından $[2, 9] \notin SpA$ ' dir. [10]

Örnek 3.1.5. $\Omega_C(\mathbb{R})$ quasilineer uzayında $B = \{\{2\}\}$ kümesi verilsin. Her $x \in \Omega_C(\mathbb{R})$ için $\lambda \cdot \{2\} \subseteq x$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ mevcut olduğundan B 'nin quasi gereni,

$$Qsp\{\{2\}\} = \{x \in \Omega_C(\mathbb{R}) : \lambda \cdot \{2\} \subseteq x, \lambda \in \mathbb{R}\} = \Omega_C(\mathbb{R})$$

dir.

Sonuç olarak $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\{\{b\}\}$ kümesi $\Omega_C(\mathbb{R})$ 'yi quasi gerer. [10]

Teorem 3.1.2. $(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay ve $M = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\} \subset X$ olmak üzere, $QspM$, X 'in bir alt uzayıdır. [10]

Tanım 3.1.6. $(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in X$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\theta_X \preceq \lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \dots + \lambda_n \cdot a_n$$

sıralaması sadece $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ olması halinde gerçekleşiyorsa $\{a_k\}_{k=1}^n$ kümesine quasilineer bağımsız, diğer durumda quasilineer bağımlı denir. [10]

Örnek 3.1.6. $\Omega_C(\mathbb{R})$ quasilineer uzayında $\{[1, 3]\}$ kümesi verilsin. Bu durumda

$$\{0\} \subseteq \alpha \cdot [1, 3]$$

kapsamasının sağlanması sadece $\alpha = 0$ olmasıyla mümkündür. $[1, 3]$ kümesi ql-bağımsızdır.

diğer taraftan

$$\{0\} \subseteq \lambda \cdot [-1, 3]$$

kapsaması tüm $\lambda \in \mathbb{R}$ sayıları için sağlandığından $\{[-1, 3]\}$ kümesi ql-bağımlıdır. [10]

Sonuç olarak $\Omega_C(\mathbb{R})$ 'de 0'ı içeren bir kapalı aralığın oluşturduğu tek nokta kümesi ql-bağımlıdır. Bu durum lineer cebirde $\{0\}$ tek nokta kümesinin lineer bağımlı olmasına benzer. Burayı daha genel olarak şöyle bir gerçekte ifade ederiz. Bir quasiliner uzayında θ (sıfır) elemanına bağıntılı olan her eleman lineer bağımlıdır. Yani $\theta \subseteq \{x\}$ ve $x \in X$ için X bir quasilineer uzay oluyorsa $\{x\}$ ql-bağımlı olmak zorundadır. Eğer $\theta \not\subseteq \{x\}$ olduğunu biliyorsak $\{x\}$ ql-bağımsız olmak zorundadır.

Örnek 3.1.7. $\Omega_C(\mathbb{R})$ quasilineer uzayında $\{[1, 3], [-3, -1]\}$ kümesi verilsin. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ için,

$$\{0\} \subseteq \lambda_1 \cdot [1, 3] + \lambda_2 \cdot [-3, -1] = [2, 4]$$

kapsaması sağlanacağından $\{[1, 3], [-3, -1]\}$ kümesi $\Omega_C(\mathbb{R})$ quasilineer uzayında ql-bağımlıdır. [10]

Tanım 3.1.7. X quasilineer uzayının bir M alt kümesi verilsin. M kümesi quasilineer bağımsız ve $QspM = X$ ise M 'ye X 'in bir bazı (Hamel Bazı) denir. [10]

Örnek 3.1.8. $\Omega_C(\mathbb{R})$ quasilineer uzayında $M = \{\{2\}\}$ kümesi verilsin. Bu durumda $\{0\} \subseteq \lambda \cdot \{2\}$ kapsamı sadece $\lambda = 0$ olmasıyla mümkün olacağından M kümesi ql-bağımsızdır.

Ayrıca, her $x \in \Omega_C(\mathbb{R})$ için

$$\lambda \cdot \{2\} \subseteq x$$

olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ bulunabileceğinden $QspM = \Omega_C(\mathbb{R})$ ' dir.

Sonuç olarak $x \in \mathbb{R}$ ve $x \neq 0$ olmak üzere $\{\{x\}\}$ kümesi $\Omega_C(\mathbb{R})$ için bazdır. [10]

Örnek 3.1.9. $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ quasilineer uzayında $A = \{(1,0), (0,1)\}$ kümesi için

$$\{(0,0)\} \subseteq \lambda_1 \cdot \{(1,0)\} + \lambda_2 \{(0,1)\} = \{(\lambda_1, \lambda_2)\}$$

kapsamasının sağlanması $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ile mümkün olacağından A kümesi ql -bağımsızdır.

Ayrıca, her $x \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ için

$$\lambda_1 \cdot \{(1,0)\} + \lambda_2 \{(0,1)\} \subseteq x$$

olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mevcut olduğundan $QspA = \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ olur böylece A kümesi $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ için bir bazdır ve bu baza $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ 'nin standart bazı denir. [10]

3.1.2 Normlu Quasilineer Uzaylar

Tanım 3.1.8. X quasilineer uzayında X 'den $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı $\|\cdot\|$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki şartları sağlayan bu fonksiyona, X üzerinde bir norm denir.

nq1) $\|v\| = 0 \iff v = \theta,$

nq2) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|,$

nq3) $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \|v\|,$

nq4) $v \preceq w \Rightarrow \|v\| \leq \|w\|,$

nq5) $\forall r > 0$ için $\exists v_r \in X$ var öyle ki $v \preceq w + v_r$ ve $\|v_r\| \leq r \implies v \preceq w$ olur.

Bu şartları sağlayan X normlu uzayına, normlu quasilineer uzay denir. [1]

Tanım 3.1.9. X normlu quasilineer uzay olmak üzere, her $u, v \in X$ için

$$h_X(u, v) = \inf \{ \varepsilon \geq 0 : u \preceq v + a_1^\varepsilon, v \preceq u + a_2^\varepsilon, \|a_i^\varepsilon\|_X \leq \varepsilon \} \quad [14]$$

şeklinde tanımlı metriğe X üzerindeki Hausdorff metrik denir. [1]

Örnek 3.1.10. X bir reel Banach uzayı olsun. Bu durumda X bir tam normlu quasilineer uzaydır. X eşitlik bağıntısıyla bir quasilineer uzaydır. [1]

3.1.3 İç çarpım Quasilineer Uzaylar

Tanım 3.1.10. M bir quasilineer uzay olsun. M üzerinde $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times M \rightarrow \Omega(\mathbb{R})$ adlandırılan bir iç çarpım fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyondur. Eğer her $m, n, z, k \in M$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için;

ipq1) $m, n \in M_r$ ise $\langle m, n \rangle \in (\Omega(\mathbb{R}))_r \equiv \mathbb{R}'$ dir,

ipq2) $\langle m + n, z \rangle \subseteq \langle m, z \rangle + \langle n, z \rangle$,

ipq3) $\langle \alpha \cdot m, n \rangle = \alpha \cdot \langle m, n \rangle$,

ipq4) $\langle m, n \rangle = \langle n, m \rangle$,

ipq5) $m \in M_r$ için $\langle m, m \rangle \geq 0$ ve $\langle m, m \rangle = 0 \iff m = \theta$,

ipq6) $\|\langle m, n \rangle\| = \sup \left\{ \|\langle a, b \rangle\| : a \in F_m^M, b \in F_n^M \right\}$,

ipq7) $m \preceq n$ ve $z \preceq k$ ise $\langle m, z \rangle \subseteq \langle n, k \rangle$, dir.

ipq8) Her $\varepsilon > 0$ için $m_\varepsilon \in M$ olacak şekilde bir eleman vardır, öyleki; $m \preceq n + m_\varepsilon$ ve $\langle m_\varepsilon, m_\varepsilon \rangle \subseteq S_\varepsilon(\theta)$ olursa $m \preceq n$ olur. [11]

Bu iç çarpım ile birlikte M quasilineer uzayına quasilineer iç çarpım uzayı denir. $m \in M$ için

$$\|m\| = \sqrt{\|\langle m, m \rangle\|_{\Omega_C(\mathbb{R})}}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona iç çarpım normu denir. [11]

Lemma 3.1.3. (Schwarz Eşitsizliği) X bir iç çarpım quasilineer uzayı olmak üzere, her $a, b \in X$ için

$$\|\langle a, b \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \leq \|a\|_X \|b\|_X$$

olur. [12]

Önerme 3.1.2. X bir quasilineer iç çarpım uzayı olsun. $a_n \rightarrow a$ ve $b_n \rightarrow b$ ise $\langle a_n, b_n \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ dir. [12]

Uyarı 3.1.1. Bir iç çarpım quasilineer uzayını düşünelim. Bu uzayın normu paralelkenar kuralını sağlamak zorunda değildir.

Tanım 3.1.11. Normlu bir quasilineer uzay, norm metriği dediğimiz yani Hausdorff metriğine göre tam ise bu uzaya **Banach quasilineer** uzay adı verilir. Diğer taraftan bir iç çarpım quasilineer uzayı verildiğinde norm metriğine göre tam oluyorsa **Hilbert quasilineer** uzay adı verilir. [11]

4. İNTERVAL DEĞERLİ KARESİ İNTEGRALLENEBİLEN FONKSİYONLARIN QUASİLİNEER UZAYI

4.1 Karesi İntegrallenebilir İnterval Değerli Fonksiyonların Sınıfı

$L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ uzayı $[a, b]$ aralığından $I_{\mathbb{R}}$ kümesi üzerine tanımlı karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayıdır. $L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ uzayıda $L_2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayının alt quasilineer uzayıdır. $f \in L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ uzayı $L_2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayının alt quasilineer uzayı olduğundan o uzay üzerindeki iç çarpım $L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ üzerine etki eder ve bu iç çarpım ile iç çarpım quasilineer uzayı olur. [13] elde edilen bilgilere göre bu iç çarpım $L_2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayında Aumann anlamında integral kullanılarak şu şekilde verilmiştir:

Teorem 4.1.1. $F, G \in L_2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ için

$$\langle F, G \rangle = \int_{\mathbb{R}}^{(A)} \langle F(x), G(x) \rangle_{\Omega} dx \quad (4.1.1)$$

eşitliği $L_2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ üzerindeki iç çarpım olarak tanımlanır. Bu iç çarpımla $L_2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ quasilineer iç çarpım uzayıdır. Ayrıca Aumann integrali tanımı kullanılarak 4.1.1 eşitliği

$$\langle F, G \rangle = \int_{\mathbb{R}}^{(A)} \langle F(x), G(x) \rangle_{\Omega} dx = \left\{ \int_{\mathbb{R}} \langle f(x), g(x) \rangle_{\mathbb{C}} dx : f \in S^2(F), g \in S^2(G) \right\}$$

olarak verilir. [13]

Fakat biz bu iç çarpımı $L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ uzayı üzerinde daha basit bir şekilde tanımlayabiliriz. Bu teoremden çıkan bir sonuç olarak şu teoremi verebiliriz.

Tanım 4.1.1. $F : [a, b] \rightarrow I_{\mathbb{R}}$ ye interval değerli bir fonksiyon ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in [a, b]$ için $f(x) \in F(x)$ oluyorsa f ' ye F ' nin bir selektörü denir. [14]

Teorem 4.1.2. $F, G \in L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ için

$$\begin{aligned} \langle F, G \rangle &= \int_{[a, b]}^{(A)} \langle F(x), G(x) \rangle dx \\ &= \int_a^b [\underline{F(x)}, \overline{F(x)}] \cdot [\underline{G(x)}, \overline{G(x)}] dx \\ &= \left\{ \int_a^b \langle f(x), g(x) \rangle dx : f \in S^2(F), g \in S^2(G) \right\} \\ &= \left\{ \int_a^b f(x)g(x) dx : f \in S^2(F), g \in S^2(G) \right\} \end{aligned}$$

dir. [13]

Burada $S^2(F)$ ve $S^2(G)$ kümeleri F ve G interval değerli fonksiyonların tüm integrallenebilir selettörlerinin kümesidir. Burada f, F' nin g, G' nin integrallenebilir selettörleridir.

Buradaki iç çarpım bize sinyal işleme dedğimiz alanda bir uygulama kapısı açmaktadır. Eksik bilgiye sahip belli oranda özelliklerini bildiğimiz bazı sinyallerin deterministik otokorolasyonu veya zaman fonksiyonu olarak verilmiş sinyalin frekansın bir fonksiyonu olarak ifade edebilmek için gerekli Fourier Transformunu eksik bilgiye sahip sinyaller içinde yaklaşık olarak hesaplayabilmekteyiz. Bunun örneklerini [15] ve [16] isimli makalelerde görüyoruz. Bunun için bu kısımda bu tip uygulamalardan sıklıkla bahsedeceğiz. Bu uygulamadan bahsedebilmek için bazı temel tanımları kısaca verelim.

Genel olarak sinyal işlemenin tarihsel gelişiminden biliyoruz ki sinyal kavramı elektriğin icadından sonra göz önüne alınmaya başlanmıştır. Evrenden bazı sinyallerin doğal olarak iletişimde ve haberleşmede kullanılabileceği fark edildiğinde insanoğlunun bunları nasıl ve ne amaçla yararlı bir yolda kullanabileceği düşüncesi ortaya çıkmıştır. Bunun yolunun matematiksel bir modellemeyle yapılacağı fikri ortaya atılarak evrenden herhangi bir sinyalin özellikle de ilk olarak, bir zaman sinyalinin reel sayılardan kompleks sayılara bir fonksiyon olarak modellenmesi fikri ortaya atılmıştır. Şunu belirtelim ki zamanı en iyi modelleyebilecek kavram reel sayılar kümesidir ve sık sık reel sayılar sürekli-zaman (Continuous-time) modellenmesinde kullanılmıştır. Bunun alt kümesi olan tam sayılarsa bazen kesikli zaman (Discrete-time) modellenmesinde kullanılmaktadır. Buna göre bir sürekli zaman sinyali t zaman değişkeninin $x(t)$ fonksiyonu olarak yazılır ve $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}'$ ye bir fonksiyon veya $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $x : A \rightarrow \mathbb{C}'$ ye bir fonksiyondur. Genel olarak sinyal işlemede biliyoruz ki sinyal enerjisinin sonlu (enerjisini hesaplayabildiğimiz) veya sonsuz olması önemli bir yer tutmaktadır. Tüm sonlu enerjili sinyallerin oluşturduğu küme $L_2(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $L_2(\mathbb{R})$ 'nin

$$\langle x, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt$$

iç çarpımıyla bir Hilbert uzayı olduğunu biliyoruz ve buradan doğan norm ile bir x sinyalinin enerjisini şu şekilde hesaplayabiliriz.

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt.$$

Sinyal işleme dedğimiz alan 20. yüzyılda etkin olarak kullanılmaya başlanmış ve bir çok yeni buluşun öncülüğünü yapmıştır. Sinyallerin bazı dijital örneklerinin belirlenmesi,

sinyallerin otokorolasyonlarının hesaplanması, parazitli sinyallerin parazitten arındırılması ve bazı sinyallerin işlenmeyen özelliklerinin daha elverişli hale getirilmesi gibi bir çok işlemi icra etme işine sinyal işleme diyoruz. Özellikle sinyal işlemede bir sürekli zaman sinyalinin otokorolasyonunun belirlenmesi de icra edilen önemli işlerden biridir. Bir sinyalin deterministik otokorolasyonu sinyalin kendi iç özelliklerinin uyum ve tutarlılığının bir ölçüsünü bize verdiği için önemlidir. Bil hassa sinyalin kendi içinde zaman gecikmelerinden veya sinyalin zaman gecikmeli versiyonundan ne kadar etkilenip etkilenmediğini bize söyler ve sinyal senkronizasyonunu ölçmede bunu kullanırız. Eğer sinyalin tanımını bilinmiyorsa diğer bir ifadeyle fonksiyonun özellikleri tam olarak bilinmiyorsa deterministik otokorolasyonda belirleyemeyiz. Fakat sinyalin özelliklerini bilmesek bile sinyalin değerlerinin bazı anlarda hangi aralıklarda olduğunu biliyorsak otokorolasyonuyla ilgili tahminlerde bulunabiliriz. Eğer belirsizlik aralığı çok küçük ise tahminimiz daha doğru hatamız daha az olacaktır. Bu gibi sinyalleri tahmini olarak belirlemek için quasilineer uzayları kullanabiliyoruz.

Klasik olarak $L_2(\mathbb{R})$ ' de bir x sinyalinin deterministik otokorolasyonu şu şekilde belirlenir. $L_2(\mathbb{R})$ 'de bir x sürekli-zaman sinyalinin otokorolasyonu bir

$$a_x(\tau) = \langle x, x_{-\tau} \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot x^*(t - \tau) dt, \quad \tau \in \mathbb{R}$$

fonksiyonudur. Buradaki iç çarpım $L_2(\mathbb{R})$ 'yi Hilbert uzayı yapan iç çarpımdır yani bir x sinyalinin otokorolasyon sinyali dediğimiz a_x , $L_2(\mathbb{R})$ üzerindeki iç çarpıma göre tanımlanan bir fonksiyondur.

[13]' de $L_2(\mathbb{R}, I_{\mathbb{R}})$ uzayının yukarda yazdığımız iç çarpımla bir iç çarpım uzayı olduğunu belirtmiştik. Şimdi biz de sürekli zamanli interval sinyal adını vereceğimiz bir kavramı yazacağız ve bunu kullanarak eksik bilgiye sahip bazı sürekli zaman sinyallerinin otokorolasyonunu yaklaşık olarak, bu iç çarpım vasıtasıyla hesaplayacağız. Şunu belirtelim ki genel olarak quasilineer uzaylar üzerinde iç çarpım kavramı [17] isimli makalede tanımlanmıştır. Bu iç çarpım tanımı kullanılarak $L_2(\mathbb{R}, I_{\mathbb{R}})$ 'nin bir Hilbert quasilineer uzay olduğu gösterilmiştir. Aslında [13]'de $L_2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ 'nin Hilbert quasilineer uzay olduğu gösterildi. Fakat bizim model adlıığımız uzay olan $L_2(\mathbb{R}, I_{\mathbb{R}})$ uzayıda $L_2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{R}))$ uzayının bir alt uzayı olduğu aşağıdaki teoremden gösterilmiştir. Dolayısıyla $L_2(\mathbb{R}, I_{\mathbb{R}})$ 4.1.1' deki iç çarpımla bir iç çarpım quasilineer uzayıdır.

Teorem 4.1.3. $L_2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ kümesi $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir quasilineer uzayıdır. [13]

Teorem 4.1.4. $L_2(\mathbb{R}, I_{\mathbb{R}})$ uzayı $L_2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{R}))$ quasilineer uzayının bir alt quasilineer uzayıdır.

İspat: $F, G \in L_2(\mathbb{R}, I_{\mathbb{R}})$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. $\alpha.F + \beta.G \in L_2(\mathbb{R}, I_{\mathbb{R}})$ olduğunu göstereceğiz. $t \in \mathbb{R}$ için $F(t) = [\underline{F(t)}, \overline{F(t)}]$ ve $G(t) = [\underline{G(t)}, \overline{G(t)}]$ şeklinde yazılabilir. Çünkü $F(t), G(t) \in I_{\mathbb{R}}$ 'dir. Burada $\underline{F(t)}, \overline{F(t)}$ ve $\underline{G(t)}, \overline{G(t)}$ fonksiyonları reel sayılardan reel sayılara tanımlı fonksiyonlardır. Buna göre her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} (\alpha.F + \beta.G)(t) &= (\alpha.F)(t) + (\beta.G)(t) \\ &= \alpha F(t) + \beta.G(t) \\ &= \alpha[\underline{F(t)}, \overline{F(t)}] + \beta[\underline{G(t)}, \overline{G(t)}] \end{aligned}$$

olur ve buradan dört farklı durum ortaya çıkar

$$\alpha[\underline{F(t)}, \overline{F(t)}] + \beta[\underline{G(t)}, \overline{G(t)}] = \begin{cases} [\alpha F(t), \alpha \overline{F(t)}] + [\beta G(t), \beta \overline{G(t)}], & \alpha, \beta \geq 0 \\ [\alpha \overline{F(t)}, \alpha F(t)] + [\beta G(t), \beta \overline{G(t)}], & \alpha < 0, \beta \geq 0 \\ [\alpha F(t), \alpha \overline{F(t)}] + [\beta \overline{G(t)}, \beta G(t)], & \beta < 0, \alpha \geq 0 \\ [\alpha \overline{F(t)}, \alpha F(t)] + [\beta \overline{G(t)}, \beta G(t)], & \alpha, \beta < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [\alpha F(t) + \beta G(t), \alpha \overline{F(t)} + \beta \overline{G(t)}], & \alpha, \beta \geq 0 \\ [\alpha \overline{F(t)} + \beta G(t), \alpha F(t) + \beta \overline{G(t)}], & \alpha < 0, \beta \geq 0 \\ [\alpha F(t) + \beta \overline{G(t)}, \alpha \overline{F(t)} + \beta G(t)], & \beta < 0, \alpha \geq 0 \\ [\alpha \overline{F(t)} + \beta \overline{G(t)}, \alpha F(t) + \beta G(t)], & \alpha, \beta < 0 \end{cases}$$

olur. Burada ortaya çıkan herbir değer bir kapalı aralık olduğundan ve F ve G de $L_2(\mathbb{R}, I_{\mathbb{R}})$ 'nin elemanı olduğundan $\alpha.F + \beta.G \in L_2(\mathbb{R}, I_{\mathbb{R}})$ 'dir. Sonuç olarak $L_2(\mathbb{R}, I_{\mathbb{R}})$ uzayı $L_2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{R}))$ quasilineer uzayının bir alt quasilineer uzayıdır.

Tanım 4.1.2. $[a, b]$ reel sayıların bir kapalı aralığı olmak üzere reel sayılardan $I_{\mathbb{R}}$ 'ye tanımlı herhangi bir fonksiyona interval değerli sürekli-zaman sinyali adını veriyoruz. Tam sayılardan $I_{\mathbb{R}}$ 'ye tanımlı bir fonksiyona da kesik zamanlı (Discrete-time) bir interval sinyal adı verilir.

Reel sayılar kümesi $I_{\mathbb{R}}$ 'nin bir alt kümesi olarak görüldüğünden klasik olarak bildiğimiz sürekli-zamanlı ve ayrık (kesikli) zamanlı sinyallerde bir interval değerli sinyal olarak görülebilir. Sinyal değerlerinin belli zaman anlarında ki görüntülerinin net olarak bilinmediği fakat belli bir kapalı aralıkta olduğu bilindiği durumlarda bu sinyallere eksik bilgiye ait sinyaller adı verilir. Bu gibi sinyallerin değerlerini bu deterministik interval değerli sinyalden alan bir sinyal olarak görürüz. Böylece eksik bilgiye sahip klasik sinyalin işlenmesini bu interval değerli sinyalin işlenmesini göz önüne alarak bazı durumlarda yaklaşık olarak yapabiliriz.

Örnek 4.1.1.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow I_{\mathbb{R}}, f(t) = [0, t^2 + 1]$$

fonksiyonu sürekli-zamanlı interval değerli bir sinyal iken

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow I_{\mathbb{R}}, f(n) = fn = \begin{cases} [0, n], & n \geq 0 \\ [n, 0], & n < 0 \end{cases}$$

ise ayrık-zamanlı interval değerli bir sinyaldir.

Sinyal işlemede tanım kümesi olan $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{Z}$ ' nin belli aralığı veya dizinin belli sonlu alt kümeleri göz önüne alınarak işlem yapılır. Belli aralık veya belli sonlu alt kümelerine karşılık gelen fonksiyon değerlerine pencere adı verilir.

4.2 Sonlu Enerjili İnterval Değerli Sinyallerin Uygulaması

Tanım 4.2.1. $f : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f \in L_2(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda

$$\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

dur, [13].

Tanım 4.2.2. $F : L_2([a, b], I_{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $F \in L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ olsun. Bu durumda

$$\|F\| = \left(\int_{\mathbb{R}} \|F(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

dur, [13].

$\|F\|^2$, ye F sinyalinin enerjisi adı verilir. Böylece $L_2(\mathbb{R})$ ' ye neden sonlu enerjili sinyallerin uzayı dediğimiz ortaya çıkar. Birçok durumda $L_2(\mathbb{R})$ yerine $L_2([a, b])$ uzayı göz önüne alınır. Biz de interval değerli sinyal işlemede $L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ ' yi sık sık göz önüne alacağız. Bu uzayın bir Hilbert Quasilineer uzay olduğunu hatırlayalım. Buradaki iç çarpımdan doğan norm vasıtasıyla bir interval değerli sinyalin enerjisi

$$\|F\|^2 = \|\langle F, F \rangle\| = \left\| \int_a^b [\underline{F(t)}, \overline{F(t)}] [\underline{F(t)}, \overline{F(t)}] dt \right\| \quad (4.2.1)$$

şeklinde hesaplanır.

Lemma 4.2.1. $F : [a, b] \rightarrow I_{\mathbb{R}}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_{[a, b]} F(t) dt = \left[\int_{[a, b]} \underline{F(t)} dt, \int_{[a, b]} \overline{F(t)} dt \right]$$

dir, [18].

Burada F' nin sürekliliğinden $\underline{F}$ ve $\overline{F}$ şeklinde reel değerli sürekli iki tane fonksiyonun var olduğunu biliyoruz. Ayrıca her $t \in [a, b]$ için $F(t) = [\underline{F}(t), \overline{F}(t)]$ şeklinde yazılabilir. Bu lemma kullanılarak interval değerli F ve G fonksiyonlarının enerjisini yukarıda verdiğimiz iç çarpım ile daha kolay hesaplanabilmektedir. Ayrıca bir aralığın mutlak değeri ise şu şekilde hesaplanmaktadır. [18]

$$|F| = \max\{|\underline{F}|, |\overline{F}|\}.$$

Örnek 4.2.1. $F, G: [0, 1] \rightarrow I_{\mathbb{R}}$, $F(t) = [0, 1+t^2]$ ve $G(t) = [0, t^2]$ olmak üzere $\langle F, G \rangle$ ' yi bulunuz ve F 'nin enerjisini hesaplayınız.

Çözüm: $F(t)$ ' nin ve $G(t)$ ' nin tanımından sürekli fonksiyon olduğunu biliyoruz. $\underline{F}(t) = 0$, $\overline{F}(t) = 1+t^2$ ve $\underline{G}(t) = 0$, $\overline{G}(t) = t^2$ fonksiyonları da reel değerli bildiğimiz sürekli fonksiyonlardır. Buna göre $\langle F, G \rangle$ intervallerin çarpımından şu şekilde bulunur.

$$\begin{aligned} \langle F, G \rangle &= \int_0^1 [\underline{F}(t), \overline{F}(t)] [\underline{G}(t), \overline{G}(t)] dt \\ &= \int_0^1 [0, 1+t^2] \cdot [0, t^2] dt \\ &= \int_0^1 [0, t^2 + t^4] dt \\ &= \left[\int_0^1 0 dt, \int_0^1 (t^2 + t^4) dt \right] \\ &= \left[0, \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right)_0^1 \right] \\ &= \left[0, \frac{8}{15} \right]. \end{aligned}$$

şimdi F 'nin enerjisini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\|F\|^2 &= \|\langle F, F \rangle\| \\
&= \left\| \int_0^1 [F(t), \overline{F(t)}] [F(t), \overline{F(t)}] dt \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 [0, 1+t^2] \cdot [0, 1+t^2] dt \right\| \\
&= \left\| \left[\int_0^1 0 dt, \int_0^1 (1+t^2)^2 dt \right] \right\| \\
&= \left\| \left[0, \int_0^1 (t^4 + 2t^2 + 1) dt \right] \right\| \\
&= \left\| \left[0, \int_0^1 (t^4 + 2t^2 + 1) dt \right] \right\| \\
&= \left\| \left[0, \frac{t^5}{5} + \frac{2}{3}t^3 + t \right]_0^1 \right\| \\
&= \left\| \left[0, \frac{28}{15} \right] \right\|
\end{aligned}$$

$I_{\mathbb{R}}$ 'de bir aralığın normu mutlak değerine eşit olduğundan

$$\begin{aligned}
\|F\|^2 &= \|\langle F, F \rangle\| \\
&= \left| \left[0, \frac{28}{15} \right] \right| \\
&= \max \left\{ |0|, \left| \frac{28}{15} \right| \right\} \\
&= \frac{28}{15}.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak F 'nin enerjisini bulmuş oluruz. Benzer olarak G 'nin enerjiside bulunabilir.

Şimdi bu özellikleri kullanarak bazı eksik bilgiye sahip sinyallerin enerjisini hesaplayacağız

Örnek 4.2.2. $G, F : [0, 1] \rightarrow I_{\mathbb{R}}$ $F(t) = [-1, e^{4t}]$, $G(t) = [-e^{2t}, 1]$ $\langle F, G \rangle$ yi bulup F 'nin enerjisini hesaplayınız.

Çözüm: $F(t)$ ve $G(t)$ sürekli fonksiyonlardır. $\underline{F(t)} = -1$, $\overline{F(t)} = e^{4t}$ ve $\underline{G(t)} = -e^{2t}$, $\overline{G(t)} = 1$ reel değerli fonksiyonları da sürekli.

$\langle F, G \rangle$ intervallerin çarpımından ve lemma 4.2.1 yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 \langle F, G \rangle &= \int_0^1 [\underline{F(t)}, \overline{F(t)}][\underline{G(t)}, \overline{G(t)}] dt \\
 &= \int_0^1 [-1, e^{4t}][e^{2t}, 1] dt \\
 &= \int_0^1 [-e^{6t}, e^{4t}] dt \\
 &= \left[\int_0^1 -e^{6t} dt, \int_0^1 e^{4t} dt \right] \\
 &= \left[-\frac{1}{6} e^{6t} \Big|_0^1, \frac{1}{4} e^{4t} \Big|_0^1 \right] \\
 &= \left[\frac{1 - e^6}{6}, \frac{e^4 - 1}{4} \right].
 \end{aligned}$$

F 'nin enerjisini hesaplayalım;

$$\begin{aligned}
 \|F\|^2 &= \|\langle F, F \rangle\| \\
 &= \left\| \int_0^1 [\underline{F(t)}, \overline{F(t)}][\underline{F(t)}, \overline{F(t)}] dt \right\| \\
 &= \left\| \int_0^1 [-1, e^{4t}] \cdot [-1, e^{4t}] dt \right\| \\
 &= \left\| \left[\int_0^1 -e^{4t} dt, \int_0^1 e^{8t} dt \right] \right\| \\
 &= \left\| \left[-\frac{1}{4} e^{4t} \Big|_0^1, \frac{1}{8} e^{8t} \Big|_0^1 \right] \right\| \\
 &= \left\| \left[\frac{1 - e^4}{4}, \frac{e^8 - 1}{8} \right] \right\|
 \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
 \|F\|^2 &= \max \left\{ \left| \frac{1 - e^4}{4} \right|, \left| \frac{e^8 - 1}{8} \right| \right\} \\
 &= \frac{e^8 - 1}{8}
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Problem 1: Non-deterministik bir sinyalin $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığındaki değerlerinin sinüs ve cosinüs fonksiyonları arasında salındığı ölçülmüştür. Bu non-deterministik sinyalin enerjisi için bir tahmin geliştiriniz.

Çözüm: Bu gibi non-deterministik sinyallerin enerjilerini kesin olarak hesaplamak mümkün olmaz ama birçok durumda yaklaşık değerler bulabilmekte sorunu çözebilmektedir. Önemli olan sinyal enerjisinin kritik bir bant değerini aşmamasıdır. Şimdi bu problemi quasilineer

analiz yardımıyla çözmeye çalışacağız. Öncelikle sinüs ve cosinüs sinyalleri $\frac{\pi}{4}$ ' de kesiştiği için ve non-deterministik sinyal bu dalgalar arasında salındığından sinyalin üst dalgası ve alt dalgası iki aralıkta değişik olacaktır. Şöyle ki non-deterministik sinyalimizin değerleri şu özelliği gösterir: $[0, \frac{\pi}{4}]$ aralığında sinyal cosinüs sinyalinin altında, sinüs sinyalini üstündedir. Diğer taraftan $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ aralığında ise sinüs sinyalinin altında cosinüs sinyalinin üstündedir.

$v : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ non-deterministik sinyalimizi gösterebiliriz. $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ için $v(t) \in [\sin t, \cos t]$ ve $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ için $v(t) \in [\cos t, \sin t]$ dir. Bu durumda yukardaki Lemma 4.0.1' den interval değerli $F : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow I_{\mathbb{R}}$

$$F(t) = \begin{cases} [\sin t, \cos t], & t \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ [\cos t, \sin t], & t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

Lemma 4.2.2. Yukarıda tanımlı F fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur.

İspat: Bu fonksiyonun tanımına bakılarak $\frac{\pi}{4}$ hariç diğer noktalarda sürekli olduğu aşikar olarak görülmektedir. Şimdi $\frac{\pi}{4}$ ' de de sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için F' nin $\frac{\pi}{4}$ noktasında dizisel sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. $t_n \rightarrow \frac{\pi}{4}^+$ kabul edelim. Bu durumda $\frac{\pi}{4} < t_n < \frac{\pi}{2}$, $|t_n - \frac{\pi}{4}| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olduğunu kabul etmiş oluyoruz. Bu durumda

$$\begin{aligned} D(F(t_n), F(\frac{\pi}{4})) &= D\left([\cos t_n, \sin t_n], [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]\right) \\ &= \max \left\{ \left| \cos t_n - \frac{\sqrt{2}}{2} \right|, \left| \sin t_n - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \right\} \end{aligned}$$

dir. Biliyoruz ki $n \rightarrow \infty$ için $t_n \rightarrow \frac{\pi}{4}^+$ gider, $|\cos t_n - \frac{\sqrt{2}}{2}| \rightarrow 0$ ve $|\sin t_n - \frac{\sqrt{2}}{2}| \rightarrow 0$ dir. Öyleyse $n \rightarrow \infty$ için $\max \left\{ \left| \cos t_n - \frac{\sqrt{2}}{2} \right|, \left| \sin t_n - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \right\} \rightarrow 0$ dir. Böylece $t_n \rightarrow \frac{\pi}{4}^+$ iken $D(F(t_n), F(\frac{\pi}{4})) \rightarrow 0$ dir. Ayrıca benzer şekilde gösterebiliriz ki $t_n \rightarrow \frac{\pi}{4}^-$ iken $D(F(t_n), F(\frac{\pi}{4})) \rightarrow 0$ olur. Bu bize F' nin $\frac{\pi}{4}$ noktasında da sürekli olduğunu söyler. Diğer noktalarda sürekli olduğunu söylemiştik. Öyleyse F sürekli fonksiyondur.

Lemma 4.2.1'i kullanabilmek için bu fonksiyonun sürekliliğini gösterdik. Şimdi bu interval değerli fonksiyonun enerjisini hesaplayabilmek için Lemma 4.2.1'i kullanabiliriz. Burada

$$\underline{F} : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, \underline{F}(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ \cos t, & t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

ve

$$\overline{F} : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, \overline{F}(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ \sin t, & t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

şeklinde tanımlı reel değerli fonksiyonlardır.

$$\begin{aligned}
\|F\|^2 &= \|\langle F, F \rangle\| \\
&= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} [F(t), \overline{F(t)}] [F(t), \overline{F(t)}] dt \right| \\
&= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin t, \cos t] [\sin t, \cos t] dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos t, \sin t] [\cos t, \sin t] dt \right| \\
&= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin^2 t, \cos^2 t] dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos^2 t, \sin^2 t] dt \right| \quad \text{Lemma 4.2.1 yardımıyla şu şekilde yazabiliriz.} \\
&= \left| \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt, \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt \right] + \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt, \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \right] \right| \\
&= \left| \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt, \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \right] + \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt, \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \right] \right| \\
&= \left| \left[\frac{1}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right)_0^{\frac{\pi}{4}}, \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)_0^{\frac{\pi}{4}} \right] + \left[\frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right] \right| \\
&= \left| \left[\frac{\pi - 2}{8}, \frac{\pi + 2}{8} \right] + \left[\frac{\pi - 2}{8}, \frac{\pi + 2}{8} \right] \right| \\
&= \left| \left[\frac{\pi - 2}{4}, \frac{\pi + 2}{4} \right] \right| \quad \text{buradan} \\
\|F\|^2 &= \left| \left[\frac{\pi - 2}{4}, \frac{\pi + 2}{4} \right] \right| \\
&= \max \left\{ \left| \frac{\pi - 2}{4} \right|, \left| \frac{\pi + 2}{4} \right| \right\} \\
&= \frac{\pi + 2}{4}.
\end{aligned}$$

Böylece non-deterministik olan v sinyalinin enerjisi $\frac{\pi+2}{4}$ değerini aşamaz diye bir yorum getirebiliyoruz. Böylece non-deterministik sinyalin net olarak enerjisini bilemezsek bile enerjisinin $\frac{\pi+2}{4}$ değerini aşamayacağını biliyoruz. Bu gibi analizler birçok durumda sinyalin değişik özellikleri içinde yeterli tahminleri bize verebilme imkanı sağlamaktadır.

Uyarı 4.2.1. Bu problem bize gösteriyor ki Hilbert-quasilineer uzaylar özellikle $L_2([a, b], I_{\mathbb{R}})$ Hilbert-quasilineer uzayı klasik sinyal işlemede de kritik tahminleri bize sağlamaktadır.

Uyarı 4.2.2. İnterval değerli sinyalin bu şekilde eksik bilgiye sahip veya non-deterministik sinyallerin enerjilerini yaklaşık olarak tahmin etmede bu şekilde kullanımı dışında, bu tip sinyallerin otokorelasyonlarının tahmini ile ilgili uygulamalarda mevcuttur. [15]' da interval değerli sinyaller kullanılarak analog bir non-deterministik sinyalin otokorelasyonu hesaplanmıştır. Aslında quasilineer analiz bize interval eğerli sinyal kavramı olacağı gibi interval değerli sistemlerde olabileceği ön görüşünü vermektedir. Bunlarla ilgili bazı çalışmalar da yürütülmektedir.

Klasik sinyal işlemede bir diğer önemli hususta zamanın bir fonksiyonu olarak verilen bir sürekli zaman sinyalinin frekansın bir fonksiyonu olarak ifade edebilmektir. Çünkü birçok durumda sinyal analizi iyi yapılabilir. Biz bu duruma sinyalin zaman alanından frekans alanına çevirme diyoruz. Sinyalin frekans alanına yani frekansın bir fonksiyonu olarak ifade edilmesine sinyalin frekans spektrumunda denilmektedir. Sinyallerin zaman aralığından frekans alanına geçişi Fourier Dönüşümü dediğimiz ve $L_2(\mathbb{R})$ Hilbert uzayları arasında sınırlı lineer bir operatör ile gerçekleştirilir.

4.3 Non-Deterministik Bazı Sinyallerin Fourier Transformlarının Tahmini Olarak Belirlenmesi

Fourier transformları klasik analiz yardımıyla ortaya çıkmış sınırlı lineer bir operatördür ve deterministik sürekli-zaman sinyallerinin Fourier Transformı tanımla verilmiştir.

Eksik bilgiye sahip non-deterministik sinyallerin Fourier transformunu belli bir aralığa veya belli bir kümeye kısıtlamak mümkün müdür? Bu sorunun cevabı bize bu tip sinyallerin Fourier transformları tahmin edilebilir mi sorusunu gündeme getirmektedir. Bu tip sinyallerin Fourier transformlarını tahmin edebilmemiz için öncelikle sürekli-zamanlı sinyalin hangi belirli aralık veya küme içerisinde kaldığını bilmemiz gerekir. Bunun dışında non-deterministik sinyalin deterministik olan herhangi iki sinyal arasında kaldığını veya belli bir oranda benzerliğini biliyorsak yine bir süreç yürütülebilmektedir. Öncelikle bu özelliklere sahip non-deterministik sinyalin bir interval değerli veya bir küme değerli fonksiyon olarak verilen bilgilere göre modellenmesi gerekir. Bu işlem yapıldıktan sonra söz konusu interval değerli fonksiyonun hangi cebirsel küme üzerinde olduğu tespit edilmelidir. Genel olarak biliyoruz ki küme değerli fonksiyonların uzayı bu tip özelliklere sahip bu tip özelliklere sahip ise bir quasilineer uzay formundadır. Üstelik bazı yeterli özelliklere de sahip ise bu tip interval değerli fonksiyonların Fourier transformunu tanımlayabilmekteyiz. Buna ilişkin önemli bir çalışma [13]' de verilmiştir. Şimdi bu çalışmadan interval değerli dönüşümler için Fourier transformunu verelim.

Tanım 4.3.1. $G \in L_1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ fonksiyonu ve $\hat{G} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega(\mathbb{C})$ olmak üzere, her $\omega \in \mathbb{R}$ için

$$\hat{G} = \int_{\mathbb{R}} G(x) e^{-2\pi i \omega x} dx = \left\{ \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2\pi i \omega x} dx : g \in S^1(G) \right\} \quad (4.3.1)$$

şeklinde verilen $\hat{G}$ fonksiyonuna dönüştüren dönüşüme küme değerli Fourier dönüşümü denir.

Bu fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$(\mathcal{F}G(\omega)) = \hat{G}(\omega), \omega \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanır. [13]

Tanım 4.3.2. $L_1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \cap L_2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ şeklinde verilen uzayın üzerindeki Fourier dönüşümü 4.3.1 ile verilir. Yani $G \in L_1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \cap L_2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ için G 'nin Fourier dönüşümü

$$\hat{G}(\omega) = \{ \hat{g}(\omega) : T(g) = \hat{g}, g \in S^1(G) \}$$

şeklindedir. [13]

Ayrıca [13]'de gösterildi ki küme değerli Fourier dönüşümü $L_2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ ' den $L_2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ 'ye sınırlı lineer bir dönüşümdür. Fakat genel olarak küme değerli fonksiyonların Fourier dönüşümlerini kanıtlasak bile Fourier dönüşümünü tespit etmek son derece zordur.

Problem 2: $G : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow I_{\mathbb{R}}$ ve $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için $G(t) = [0, 1]$ sabit fonksiyonunu düşünelim. $g(t) \in L_2[0, \frac{\pi}{2}]$ olsun. Bu durumda G' nin Fourier transformu için ne söylenebilir ?

Çözüm: Öncelikle G' nin küme değerli Fourier transformunu belirlemeye çalışalım. $\omega \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere.

$$\hat{G}(\omega) = \int_{[0, \frac{\pi}{2}]}^{(A)} G(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$$

olarak hesaplanacaktır. Ancak $\underline{G}(t)$ ve $\overline{G}(t)$ fonksiyonlarını yazarsak bu integrali daha kolay hesaplayabiliriz. Şimdi $\underline{G}(t) = 0$ sabit fonksiyonu ve $\overline{G}(t) = 1$ sabit fonksiyonunu düşünersek $G(t) = [\underline{G}(t), \overline{G}(t)]$ şeklinde tanımlı interval değerli sabit fonksiyon olduğu görülmektedir. Şimdi lemma 4.2.1 bu problemin çözümünde önemli bir yer tutacaktır. Fakat bundan önce $e^{-2\pi i \omega t}$ 'i reel ve sanal kısımlarıyla yeniden ifade edelim.

$$e^{-2\pi i \omega t} = \cos 2\pi \omega t - i \cdot \sin 2\pi \omega t$$

olduğunu hatırlayalım. Buna göre;

$$\hat{G}(\omega) = \int_{[0, \frac{\pi}{2}]}^{(A)} [0, 1] \cos(2\pi \omega t) dt - i \cdot \int_{[0, \frac{\pi}{2}]}^{(A)} [0, 1] \sin(2\pi \omega t) dt$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi lemma 4.2.1' i kullanarak

$$\begin{aligned} \hat{G}(\omega) &= \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \cdot \cos(2\pi \omega t) dt, \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \cos(2\pi \omega t) dt \right] - i \cdot \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \cdot \sin(2\pi \omega t) dt, \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \sin(2\pi \omega t) dt \right] \\ &= \left[0, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\pi \omega t) dt \right] - i \cdot \left[0, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\pi \omega t) dt \right] \end{aligned}$$

bu integralleri hesaplayıp yerine yazalım;

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\pi\omega t) dt &= \frac{1}{2\pi\omega} \sin 2\pi\omega t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\omega} (\sin \pi^2\omega - 0) \\ &= \frac{\sin \pi^2\omega}{2\pi\omega}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\pi\omega t) dt &= \frac{-1}{2\pi\omega} \cos 2\pi\omega t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{-1}{2\pi\omega} (\cos \pi^2\omega - 1) \\ &= \frac{1 - \cos \pi^2\omega}{2\pi\omega}\end{aligned}$$

olur. Buna göre yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\hat{G}(\omega) &= \left[0, \frac{\sin \pi^2\omega}{2\pi\omega}\right] - i \cdot \left[0, \frac{1 - \cos \pi^2\omega}{2\pi\omega}\right] \\ &= \left[0, \frac{\sin \pi^2\omega}{2\pi\omega}\right] + i \cdot \left[\frac{\cos \pi^2\omega - 1}{2\pi\omega}, 0\right].\end{aligned}$$

Buna göre G interval değerli fonksiyonun Fourier transformu yukarıda belirlediğimiz $\hat{G}$ fonksiyonudur. Dikkat edilirse $\hat{G}$ kompleks interval değerli bir fonksiyondur.

Uyarı 4.3.1. (Problem 2 ile ilgili uyarı ve yorumlar)

Klasik Harmonik analiz, Fourier analizi ve hatta sinyal işleme teorisinden bilindiği üzere sürekli-zamanlı bir fonksiyonun (sinyalin) klasik Fourier transformu f zaman- sinyalinin frekans alanına taşır. Yani frekansın bir fonksiyonu olarak ifade eder.

Şimdi yukarıda elde ettiğimiz $G(t) = [0, 1]$ interval değerli fonksiyonun Fourier transformu yukarıdaki $\hat{G}$ interval değerli fonksiyona dönüştürdü. Burdan anlıyoruz ki bütün $g(t)$ değerleri $[0, 1]$ aralığında olduğunu bildiğimiz bir $g(t)$ sinyalinin Fourier transformu olan $\hat{g}(\omega)$ fonksiyonu şu özellikleri sağlamaktadır.

$\hat{g}$ çıktı sinyalinin frekansı için şu kısıtlamalar zorunludur:

$$\Re \hat{g}(\omega) \in \left[0, \frac{\sin \pi^2\omega}{2\pi\omega}\right] \text{ ve } \Im \hat{g}(\omega) \in \left[\frac{\cos \pi^2\omega - 1}{2\pi\omega}, 0\right], \omega \in \mathbb{R}^+$$

bu ise g zaman-sinyalinin frekansına ilişkin bize bir tahmin veya sınırlama verir. Sinyal işlemede bir çok durumda sinyal frekansı için böylesi bir tahmin elde etmekte önemli bir yer tutabilir.

Problem 3: $F : [\frac{-1}{\omega}, \frac{1}{\omega}] \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}^+$ için

$$F(t) = \begin{cases} [t, 0], & t \in [-\frac{1}{\omega}, 0] \\ [0, t], & t \in [0, \frac{1}{\omega}] \end{cases}$$

şeklinde tanımlı F fonksiyonunun Fourier transformunu bulalım.

Çözüm: F 'nin Fourier transformu aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\hat{F}(\omega) = \int_{[\frac{-1}{\omega}, \frac{1}{\omega}]}^{(A)} F(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$$

$$t \in [-\frac{1}{\omega}, 0] \text{ için } \underline{F(t)} = t, \overline{F(t)} = 0$$

ve

$$t \in [0, \frac{1}{\omega}] \text{ için } \underline{F(t)} = 0, \overline{F(t)} = t$$

olur. Yine

$$\begin{aligned} \hat{F}(\omega) &= \int_{\frac{-1}{\omega}}^{\frac{1}{\omega}} F(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= \int_{\frac{-1}{\omega}}^0 F(t) e^{-2\pi i \omega t} dt + \int_0^{\frac{1}{\omega}} F(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \end{aligned}$$

olur.

$$e^{-2\pi i \omega t} = \cos 2\pi \omega t - i \sin 2\pi \omega t$$

kullanarak

$$\hat{F}(\omega) = \int_{\frac{-1}{\omega}}^0 [t, 0] \cos(2\pi \omega t) dt - i \int_{\frac{-1}{\omega}}^0 [t, 0] \sin(2\pi \omega t) dt + \int_0^{\frac{1}{\omega}} [0, t] \cos(2\pi \omega t) dt - i \int_0^{\frac{1}{\omega}} [0, t] \sin(2\pi \omega t) dt$$

F fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur dolayısıyla lemma 4.2.1' i kullanarak şu şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \hat{F}(\omega) &= \left[\int_{\frac{-1}{\omega}}^0 t \cos(2\pi \omega t) dt, 0 \right] - i \left[\int_{\frac{-1}{\omega}}^0 t \sin(2\pi \omega t) dt, 0 \right] \\ &\quad + \left[0, \int_0^{\frac{1}{\omega}} t \cos(2\pi \omega t) dt \right] - i \left[0, \int_0^{\frac{1}{\omega}} t \sin(2\pi \omega t) dt \right] \end{aligned}$$

yazabiliriz. Şimdi bu integralleri kısmi integrasyon yaparak hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{-1}{\omega}}^0 t \cos(2\pi \omega t) dt &= \frac{t}{2\pi \omega} \sin 2\pi \omega t \Big|_{\frac{-1}{\omega}}^0 + \frac{\cos 2\pi \omega t}{4\pi^2 \omega^2} \Big|_{\frac{-1}{\omega}}^0 = 0 \\ \int_{\frac{-1}{\omega}}^0 t \sin(2\pi \omega t) dt &= \frac{-t}{2\pi \omega} \cos 2\pi \omega t \Big|_{\frac{-1}{\omega}}^0 + \frac{\sin 2\pi \omega t}{4\pi^2 \omega^2} \Big|_{\frac{-1}{\omega}}^0 = \frac{-1}{2\pi \omega^2} \\ \int_0^{\frac{1}{\omega}} t \cos(2\pi \omega t) dt &= \frac{t}{2\pi \omega} \sin 2\pi \omega t \Big|_0^{\frac{1}{\omega}} + \frac{\cos 2\pi \omega t}{4\pi^2 \omega^2} \Big|_0^{\frac{1}{\omega}} = 0 \\ \int_0^{\frac{1}{\omega}} t \sin(2\pi \omega t) dt &= \frac{-t}{2\pi \omega} \cos 2\pi \omega t \Big|_0^{\frac{1}{\omega}} + \frac{\sin 2\pi \omega t}{4\pi^2 \omega^2} \Big|_0^{\frac{1}{\omega}} = \frac{-1}{2\pi \omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{F}(\omega) &= [0,0] - i \cdot \left[\frac{-1}{2\pi\omega^2}, 0 \right] + [0,0] - i \cdot \left[\frac{-1}{2\pi\omega^2}, 0 \right] \\
&= [0,0] + i \cdot \left[0, \frac{1}{2\pi\omega^2} \right] + i \cdot \left[0, \frac{1}{2\pi\omega^2} \right] \\
&= [0,0] + i \cdot \left[0, \frac{1}{\pi\omega^2} \right],
\end{aligned}$$

$f(t)$ sinyalinin Fourier transformu olan $\hat{f}(\omega)$ fonksiyonu şu özellikleri sağlamak zorundadır:

$$\Re \hat{f}(\omega) = \{0\} \text{ ve } \Im \hat{f}(\omega) = \left[0, \frac{1}{\pi\omega^2} \right], \quad \omega \in \mathbb{R}^+$$



KAYNAKLAR

- [1] **Aseev, S.M.** (1986). Quasilinear operators and their application in the theory of multivalued mappings, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*.
- [2] **Kreyszig, E.** (1991). *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, Newyork.
- [3] **Maddox, I.J.** (1973). *Elements of Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, Newyork.
- [4] **B. Musayev, M.A.** (2000). *Fonksiyonel Analiz*, Balcı yayınları, Ankara.
- [5] **Debnath, L. ve Mikusinski, P.** (2005). *Introduction to Hilbert spaces with applications*, Elsevier Academic Press.
- [6] **Lakshmikantham, V., Bhaskar, T.G. ve Devi, J.V.** (2006). *Theory of set differential equations in metric spaces*, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge.
- [7] **Temizsu, F.** (2012). *Bazı küme-değerli fonksiyon uzayları ve bu uzaylar arasındaki operatörlerin analizi üzerine* (Yüksek Lisans Tezi). İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [8] **Christensen, O.** (2010). *Functions, spaces, and expansions: mathematical tools in physics and engineering*, Springer Science & Business Media.
- [9] **Yılmaz, Y., Çakan, S. ve Aytakin, Ş.** (2012). Topological quasilinear spaces, *Abstract and Applied Analysis*, cilt2012, s. 10.
- [10] **Banazılı, H.K.** (2014). *On Quasilinear Operators Between Quasilinear Spaces* (Yüksek Lisans Tezi). İnönü University, Turkey.
- [11] **Bozkurt, H. ve Yılmaz, Y.** (2016). New Inner Product Quasilinear Spaces on Interval Numbers, *Journal of Function Spaces*, 2016, 1–9.
- [12] **Bozkurt, H. ve Yılmaz, Y.** (2016). Some new results on inner product quasilinear spaces, *Cogent Mathematics*, 3(1), 1194801.
- [13] **Levent, H.K.** (2019). *Küme değerli fonksiyon uzayları üzerindeki operatörler ve bazı uygulamaları*, Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.
- [14] **Bhaskar, T.G., Lakshmikantham, V. ve Vasundhara, D.J.** (2005). *Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces*.
- [15] **Levent, H. ve Yılmaz, Y.** (2022). Analysis of signals with inexact data by using interval-valued functions, *The Journal of Analysis*, 1–17.
- [16] **Yılmaz, Y. ve Levent, H.** (2021). Inner-product quasilinear spaces with applications in signal processing, *Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal*, 14(4).
- [17] **Bozkurt, H. ve Yılmaz, Y.** (2016). New Inner Product Quasilinear Spaces on Interval Numbers, *Journal of Function Spaces*, 2016, 1–9.

- [18] **Moore, R.E., Kearfott, R.B. ve Cloud, M.J.** (2009). *Introduction to interval analysis*, SIAM.
- [19] **Y.Soykan** (2012). *Fonksiyonel Analiz*, Nobel yayıncılık, Ankara.
- [20] **Çakan, S. ve Yılmaz, Y.** (2015). Normed Proper Quasilinear Spaces, *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 8.



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Erdem DEMİR

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2019, İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik
- **Y. Lisans:** 2022, İnönü Üniversitesi, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi, Matematik

MESLEKİ DENEYİMLER:

- Matematik öğretmenliği yapmaktadır.