



**BELİRSİZLİK İÇEREN SINIRLI LİNEER
OPERATÖRLERİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ**

Yüksek Lisans Tezi

Oğuz YALÇINTUĞ

Haziran, 2022

**BELİRSİZLİK İÇEREN SINIRLI LİNEER OPERATÖRLERİN SPEKTRAL
ÖZELLİKLERİ**

Oğuz YALÇINTUĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Programı/ Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Vakıf CAFER

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Haziran,2022

21/06/2022

DANIşMAN ONAYI

Danişmanlığını yürüttüğüm Lütfen seçiniz đrencisi Lütfen doldurunuz Belirsiz Sınırlı Lineer Operatörlerin Spektral zellikleri başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Daniřmanı
Prof. Dr. Vakıf CAFER

ÖZET

BELİRSİZLİK İÇEREN SINIRLI LİNEER OPERATÖRLERİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Oğuz YALÇINTUĞ

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Haziran, 2022

Danışman: Prof. Dr. Vakıf CAFER

Bu tez çalışmasında kompleks Banach uzaylarında tanımlı lineer operatörlerin ve operatörler ailesinin spektrum ve rezolvent kümeleri incelenmektedir. Bu çeşit problemler, birçok uygulamada karşılaşılan cebirsel denklem sistemleri, diferansiyel denklemler, integral denklemlerin çözümleri için önemlidir.

Tez çalışması, Giriş kısmı, dokuz bölüm ve Kaynaklar bölümünden oluşmaktadır. İkinci ve Üçüncü Bölümlerde lineer operatörlerin tersinir olması, sınırlı lineer operatörlerin görüntü kümelerinin kapalı olması koşulları araştırılmış, Açık Dönüşüm ve Sınırlı Ters Dönüşüm Teoremleri ifade edilmiştir. Dördüncü Bölüm kompleks Hilbert uzayında tanımlı özeşlenik, üniter ve normal operatörlerin özellikleri ifade edilmiştir. Beşinci, Altıncı ve Yedinci Bölümlerde sonlu boyutlu ve sonsuz boyutlu Banach ve Hilbert uzaylarında tanımlı sınırlı lineer operatörlerin spektrumunun özellikleri ifade edilmiştir. Burada, operatörün resolvent kümesiyle birebirlik ve örtenliği arasında bağlantılar incelenmiştir. Sekizinci Bölüm sonlu boyutlu uzaylarda tanımlı parametrik operatörlerin spektrumunun konumu ele alınmıştır. Dokuzuncu Bölüm Hilbert uzayında tanımlı afin ailenin spektrumu incelenmiş, spektrum kümesinin boş veya tüm kompleks düzleme eşit olma koşulu verilmiştir. Onuncu Bölümde uygulamalarda sık sık karşılaşılan bir kuadratik ailenin spektrumu ele alınmış, bu spektrumun kapalı üst yarı, açık üst yarı düzlem, sanal eksen üzerinde olması durumları ele alınmış, özdeğerlerin basit veya yarı basit olması koşulları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sınırlı Lineer Operatör, Spektrum, Rezolvent, Özdeğer, Operatörler Ailesi.

ABSTRACT
**SPECTRAL PROPERTIES OF LINEAR BOUNDED OPERATORS CONTAINING
UNCERTAINTY**

Oğuz YALÇINTUĞ

Mathematics Department

Eskisehir Technical Universty, Institute of Graduate Programs, June, 2022

Advisor: Prof. Dr. Vakıf CAFER

In this thesis the srectrum and the resolvent sets of linear operators and operator pencils defined on a complex Banach space are considered. Such problems arise in the solutions of systems of linear equations, differential equations, integral equations which are important in applications.

The thesis consists of the Introduction, nine paragraphs and the Reference list. In the second and third paragraphs invertible linear operators, bounded operators with closed ranges are defined, the Open Mapping Theorem and the Bounded Inverse Theorem are formulated. The fourth paragraph contains the properties of self-adjoint, unitary and normal operators defined in a complex Hilbert space. In the fifth -seventh paragraphs the properties of the spectrum and resolvent sets of bounded linear operators defined on finite and infinite dimensional Banach spaces. Here some connections between the resolvent set and the one-to-one, onto properties are established. The eighth paragraph contains the properties of the spectrum of a parametric operators defined on a finite dimensional normed space. In the ninth paragraph for an affine family of linear operators defined on a complex Hilbert space the conditions under which the spectrum is empty or is whole complex plane are considered. In the last paragraph one class of quadratic operator pencil which is important in applications is considered. The conditions under which the spectrum is contained in the upper open, upper closed half planes, on the imaginary axis are given.

Key Words: Bounded Linear Operator, Spectrum, Resolvent, Eigenvalue, Operator Pencil.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında benden her türlü bilgi ve tecrübesini esirgemeyen her konuda bana yardımcı olan yoluma ışık tutan kıymetli hocam Prof. Dr. Vakıf CAFER hocama en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmanın ortaya çıkış sürecinde her zaman bana destek veren hep yanımda olan sevgili eşim Ebru YALÇINTUĞ'a, çalışma zamanlarımda ona vakit ayıramadığım için benden desteğini esirgemeyen biricik oğlum Ali YALÇINTUĞ'a, okul hayatımda bana yol gösteren ve büyük destek olan abim Erdem YALÇINTUĞ'a, bana hep inanan ve hep yanımda olan annem Münevver YALÇINTUĞ ve kardeşim Yasemin YALÇINTUĞ'a, beni okutan bugünlere gelmemde en büyük pay sahibi olan rahmetli babam Ali YALÇINTUĞ'a her şey için çok teşekkür ederim.

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan ''bilimsel intihal tespit programı''yla tarandığını ve hiçbir şekilde ''intihal içermediğini'' beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Oğuz YALÇINTUĞ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
BAŞLIK SAYFASI.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAY SAYFASI.....	ii
DANIŞMAN ONAYI.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vi
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. LİNEER OPERATÖRLER VE SINIRLI LİNEER OPERATÖRLER	2
3. BAZI ÖNEMLİ TEOREMLER	10
4. ÖZEŞLENİK, ÜNİTER VE NORMAL OPERATÖRLER	13
4.1. Eşlenik Operatörün Özellikleri	13
5. LİNEER OPERATÖRÜN SPEKTRUMU	17
6. BANACH UZAYLARINDA SINIRLI LİNEER OPERATÖRLERİN SPEKTRUMU	30
7. ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN SPEKTRUMU	34
8. POLİNOMİAL MATRİSLERİN SPEKTRUMU	37
9. AFİN AİLENİN SPEKTRUMU	42
KAYNAKÇA	53
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R	: Gerçel sayılar kümesi
C	: Kompleks sayılar kümesi
R^n	: n-boyutlu gerçel vektörler uzayı
C^n	: n-boyutlu kompleks vektörler uzayı
X	: Kompleks vektör uzayı
$\text{boy}(X)$	: X uzayının boyutu
H	: Hilbert uzayı
T	: Lineer operatör
T^{-1}	: T operatörünün tersi
$R^{n \times n}$	: $n \times n$ boyutlu gerçel matrisler uzayı
$N(T)$	: T operatörünün çekirdeği
$R(T)$	: T operatörünün görüntü uzayı
$\sigma(T)$	: T operatörünün spektrumu
$\rho(T)$	: T operatörünün rezolventi
I	: Birim operatör
$B(X)$	: X uzayında tanımlı sınırlı lineer operatörler uzayı
$R_\lambda(T)$	: Rezolvent operatörü
$L_2[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında tanımlı Lebesgue ölçülebilir ve modülün karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$C[a,b]$	: $[a,b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
T^*	: T operatörünün eşleneği
$Y^\perp$	: Y kümesinin ortogonal tümleyeni
$\text{span}\{M\}$	: M kümesinin gerdiği altuzay
l^∞	: Sınırlı diziler uzayı
$\bar{z}$	: z karmaşık sayısının eşleneği
$\text{Re}(z)$	: z karmaşık sayısının reel kısmı
$\text{Im}(z)$	: z karmaşık sayısının sanal kısmı
$ z $	: z karmaşık sayısının modülü
$\oplus$	: Kronecker toplamı

S_∞	: Uzayda tanımlı tüm kompakt operatörler kümesi
$\det(A)$	: A matrisinin determinantı
$\text{iz}(A)$	: A matrisinin izi
$T \geq 0$	: T operatörü pozitifdir
$\sigma_p(T)$	: T operatörünün noktasal spektrumu
$\sigma_c(T)$	: T operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(T)$	: T operatörünün resüdal spektrumu
$r_\sigma(T)$	: T operatörünün spektral yarıçapı
$L(\lambda)$	: Lineer operatörler ailesi
$\sigma(L(\lambda))$	: $L(\lambda)$ 'nın spektrumu
$\sigma_p(L(\lambda))$	: $L(\lambda)$ 'nın noktasal spektrumu

1. GİRİŞ

Spektral analiz teorisi modern fonksiyonel analiz ve fonksiyonel analizin uygulamaları açısından önemli teoridir. Bu teori, normlu uzayda tanımlı lineer operatörler için ters alma işlemleri, bu terslerin özellikleri ve operatörlerle ters operatörlerin arasındaki bağlantıları araştırmaktadır. Lineer operatörler için ters alma işlemleri denklem çözümlerinde doğal olarak karşımıza çıkmaktadır. Böyle denklemlere örnek olarak lineer cebirsel denklem sistemleri, diferansiyel denklemler, integral denklemler gösterilebilir. Örneğin, Sturm-Liouville denklemleri için sınır değer problemleri ve Fredholm integral denklemler teorisi spektral teorisinin gelişmesinde önemli rol oynamıştır.

Ayrıca, lineer operatörlerin spektral teorisi, operatörlerin özelliklerinin daha iyi anlaşılması için de önemlidir.

Bu tez çalışmasında kompleks normlu uzaylarda tanımlı sınırlı lineer operatörlerin spektrumları ve rezolvent kümeleri incelenmektedir. Bilindiği gibi, sonlu boyutlu uzayda tanımlı her lineer operatör, bu uzayda bir taban seçildiğinde bir kare matrisle ifade edilmektedir. Bir matris için spektrum kümesi bu matrisin özdeğerleri kümesi olup sonlu kümedir. Matrisler için özdeğerler teorisi hem teorik hem de uygulama açısından çok gelişmiştir. Ancak sonsuz boyutlu normlu uzaylarda tanımlı lineer operatörlerin spektral teorisi matrislere göre daha karmaşıktır.

Bölüm 2 de vektör uzaylarında tanımlı lineer operatörler ve bu operatörlerin bazı önemli özellikleri ifade edilmiştir. Bölüm 3 de Banach uzaylarda tanımlı sınırlı lineer operatörler için bazı önemli teoremler (Açık Dönüşüm Teoremi, Sınırlı Ters Operatör Teoremi vs.) verilmiştir. Bölüm 4 de kompleks Hilbert uzayında tanımlı özeşlenik, üniter ve normal operatörlerin özellikleri incelenmiştir. Bölüm 5 ve Bölüm 6 da lineer operatörün spektrum ve rezolvent kümeleri tanımlanmış, örneklerle açıklanmıştır. Bölüm 7 de özeşlenik operatörlerin spektrumları incelenmiştir. Bölüm 8 de polinomial matris ailesinin Hurwitz kararlılığı yani spektrumunun sol açık yarı düzlemde bulunması problemi ele alınmıştır. Burada Kronecker toplamı ve bir matris ailesinin “koruyucu dönüşümleri” (“guardian maps”) kavramları kullanılmıştır. Bölüm 9 da bir parametreye bağlı ailenin, Bölüm 10 da ise bir kuadratik ailenin spektrumları incelenmiştir.

2. LİNEER OPERATÖRLER VE SINIRLI LİNEER OPERATÖRLER

X ve Y aynı cisim üzerinde tanımlı vektör uzayları olmak üzere $T: X \rightarrow Y$ biçimindeki dönüşüme operatör denir. Eğer her $x, y \in X$ ve α skaleri için

$$i) \quad T(x + y) = Tx + Ty$$

$$ii) \quad T(\alpha x) = \alpha Tx$$

eşitlikleri sağlanıyorsa T 'ye lineer operatör adı verilir. Değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar veya $\mathbb{C}$ kompleks sayılar olan operatörlere fonksiyonel denir. T lineer operatörü için

$$R(T) = \{y \in Y: y = Tx, x \in X\},$$

$$N(T) = \{x \in X: Tx = 0\}$$

kümeleri tanımlansın. Birinci kümeye T 'nin görüntü kümesi, ikinci kümeye ise T 'nin çekirdeği (sıfır uzayı) denir.

Teorem 2.1. $T: X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. O zaman

- 1) $R(T)$ ve $N(T)$ kümeleri alt uzaylardır.
- 2) $\text{boy}(X) = n$ ise $\text{boy}(R(T)) \leq n$ dir.

Kanıt 1.

$y_1 \in R(T), y_2 \in R(T), y_1 = Tx_1, y_2 = Tx_2$ ise $\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1) + T(\beta x_2) = T(\alpha x_1 + \beta x_2) \in R(T)$ olduğundan $R(T)$ alt uzaydır.

Herhangi bir $x_1, x_2 \in N(T)$ alalım. $Tx_1 = Tx_2 = 0$ ve T lineer olduğundan herhangi α, β skalerleri için $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = 0$ yazabiliriz. Bu da $(\alpha x_1 + \beta x_2) \in N(T)$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $N(T)$ de bir alt uzaydır.

Kanıt 2.

$y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \in R(T), y_i = Tx_i$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$) olmak üzere $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ lineer bağımlıdır ($\text{boy}(X) = n$ olduğu için). Enaz bir tanesi sıfırdan farklı $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ için $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0, T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = T(0) = 0, \alpha_1 Tx_1 + \alpha_2 Tx_2 + \dots + \alpha_{n+1} Tx_{n+1} = 0 \Rightarrow \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0$, yani her $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ lineer bağımlıdır. Çelişki elde ettik, bu yüzden $\text{boy}(R(T)) \leq n$ dir.

Tanım 2.1. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow Tx_1 \neq Tx_2$ veya $Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ oluyorsa T ye bire-bir operatör denir. Eğer T birebir ise $T^{-1}: R(T) \rightarrow X$ ters operatör vardır ve

$$T^{-1}x = y \Leftrightarrow Ty = x.$$

Teorem 2.2. X ve Y vektör uzayları $T: X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. O zaman

- a) T^{-1} vardır $\Leftrightarrow Tx = 0 \Rightarrow x = 0$.
- b) T^{-1} varsa lineerdir.
- c) $\text{boy } X = n < \infty$ ise ve T^{-1} varsa $\text{boy } R(T) = \text{boy } X = n$

önergeleri geçerlidir.

Kanıt a.

($\Rightarrow$) T^{-1} varsa T operatörü birebirdir. O halde;

$Tx_1 = Tx_2$ iken $x_1 = x_2$ olur. $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$ olduğunu gösterelim. $Tx = 0 = T0$ ve T operatörü birebir olduğundan $x = 0$ olur.

($\Leftarrow$) $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$ olsun. $Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ olduğunu gösterelim. $Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow Tx_1 - Tx_2 = 0 \Rightarrow T(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ bulunur. Dolayısıyla, T operatörü birebirdir ve T^{-1} vardır.

Kanıt b.

Herhangi $y_1, y_2 \in R(T)$ alırsak $Tx_1 = y_1$ ve $Tx_2 = y_2$ olacak biçimde $x_1 \in X, x_2 \in X$ vardır. T^{-1} var olduğundan $x_1 = T^{-1}y_1$ ve $x_2 = T^{-1}y_2$ yazabiliriz. $\alpha y_1 + \beta y_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$ olduğu için $\alpha x_1 + \beta x_2 = T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^{-1}y_1 + \beta T^{-1}y_2$ ve T^{-1} in lineerliği kanıtlanmış olur.

Kanıt c.

Teorem 2.1. e göre $\text{boy } R(T) \leq \text{boy } X$ dir. Aynı sonucu T^{-1} dönüşümüne uygularsak

$$\text{boy } X \leq \text{boy } R(T)$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlikten eşitlik sonucu ortaya çıkar.

Teorem 2.3. $T: X \rightarrow Y$, $S: Y \rightarrow Z$ iki tane bire-bir ve örten lineer dönüşümleri verilsin. Burada X , Y ve Z aynı cisim üzerinde tanımlı vektör uzaylarıdır. O zaman $(S \circ T)^{-1}: Z \rightarrow X$ dönüşümü de bire-bir ve örtendir ve

$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$$

Kanıt.

$S \circ T: X \rightarrow Z$ dönüşümü bire-bir ve örtendir. Buna göre $(S \circ T)^{-1}: Z \rightarrow X$ vardır.

$$(S \circ T) \circ (S \circ T)^{-1} = I_Z$$

eşitliğinde her iki tarafa soldan S^{-1} uygularsak

$$S^{-1} \circ (S \circ T) \circ (S \circ T)^{-1} = T \circ (S \circ T)^{-1} = S^{-1}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafına soldan T^{-1} uygularsak

$$T^{-1} \circ T \circ (S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$$

bulunur. Yani sonuç olarak $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$ elde edilmektedir.

Şimdi ise normlu uzaylarda tanımlı sınırlı lineer operatörler ve onların bazı özelliklerini ele alalım.

X ve Y aynı cisim üzerinde tanımlı normlu vektör uzayları ve $T: X \rightarrow Y$ olmak üzere, eğer her $x_1, x_2 \in X$ ve her α, β sayıları için $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2$ ise T 'ye lineer operatör, eğer bir $k > 0$ sayısı varsa ki her $x \in X$ için $\|T x\| \leq k \|x\|$ ise T 'ye sınırlı lineer operatör denir. Buna göre $\|T x\| \leq k \|x\|$ eşitsizliği, sınırlı bir lineer operatörün X 'deki sınırlı kümeleri, Y içerisindeki sınırlı kümelere dönüştürdüğünü göstermektedir.

$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T x\|}{\|x\|}$ sayısına T operatörünün normu denir. T 'nin normu için diğer formül şu şekildedir:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T x\| .$$

Gerçekten, $\|x\| = a$ yazalım ve $x \neq 0$ olmak üzere $y = \frac{1}{a} x$ diyelim. Bu durumda $\|y\| = \frac{\|x\|}{a} = 1$ olup T 'nin bir lineer operatör olması nedeninden dolayı $\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{1}{a} \|T x\|$

$= \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \left\| T \left(\frac{1}{a} x \right) \right\| = \sup_{\|y\|=1} \|T y\|$ ve y yerine x yazarsak ispat tamamlanır.

Teorem 2.4. $T \rightarrow \|T\|$ fonksiyonu norm aksiyomlarını sağlamaktadır. Yani

- 1) $\|T\| \geq 0$, $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$.
- 2) $\|\alpha T\| = |\alpha| \cdot \|T\|$.

$$3) \quad \|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|.$$

Kanıt.

$$1) \quad \|0\| = \sup 0 = 0, \|T\| = 0 \text{ ise } \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = 0 \Rightarrow x \neq 0 \text{ için } \|Tx\| = 0 \Rightarrow Tx = 0, T0 = 0 \text{ olduğundan } T = 0 \text{ yani } T \text{ sıfır operatördür.}$$

$$2) \quad \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \cdot \|Tx\| = |\alpha| \cdot \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

$$3) \quad \|(T_1 + T_2)x\| = \|T_1x\| + \|T_2x\| \leq \sup_{\|x\|=1} (\|T_1x\|) + \sup_{\|x\|=1} (\|T_2x\|) = \|T_1\| + \|T_2\|.$$

Yukarıdaki eşitsizlik her $\|x\| = 1$ için sağlandığından $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$.

Örnek 2.1. (İntegral Operatörü). $C[0,1]$ uzayı $[0,1]$ aralığında tanımlı tüm gerçel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı olsun. Burada T integral operatörü $T: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ $y(t) = \int_0^1 K(t, \tau)x(\tau)d(\tau)$ olmak üzere $y = Tx$ biçiminde tanımlayabiliriz. Burada K , verilen bir fonksiyon olup, T 'nin çekirdeği adını alır ve $J = [0,1]$ olmak üzere, t - τ -düzlemindeki $G = J \times J$ kapalı karesi üzerinde sürekli olduğu varsayılır. Bu operatör lineerdir. Ayrıca T sınırlıdır. Bunu ispatlayabilmek için, öncelikle K 'nin kapalı kare üzerindeki sürekliliğinin, K 'nin sınırlılığını gerektirdiğine dikkat etmemiz gerekir. Öyle K_0 reel bir sayısı vardır ki her $(t, \tau) \in G$ için $|K(t, \tau)| \leq K_0$ eşitsizliği sağlanmaktadır. Bunun yanı sıra $|x(t)| \leq \max_{t \in J} |x(t)| = \|x\|$ yazabiliriz. O halde;

$$\|y\| = \|Tx\| = \max_{t \in J} \left| \int_0^1 K(t, \tau)x(\tau)d(\tau) \right| \leq \int_0^1 |K(t, \tau)| |x(\tau)| d(\tau) \leq K_0 \|x\|.$$

Sonuç olarak her $x = x(t) \in C[0,1]$ için $\|Tx\| \leq K_0 \|x\|$ sağlanmaktadır, dolayısıyla T sınırlıdır.

Sonlu boyutlu uzaylarda Temel Lemma şu şekildedir: X normlu uzayı n -boyutlu, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$ lineer bağımsız alt küme olsun. O zaman öyle $c > 0$ sayısı vardır ki herhangi $a_1, a_2, \dots, a_n$ sayıları için $\|a_1x_1 + \dots + a_nx_n\| \geq c(|a_1| + \dots + |a_n|)$.

Teorem 2.5. (Sonlu Boyut). Eğer normlu bir X uzayı sonlu boyutlu ise X üzerindeki her lineer operatör sınırlıdır.

Kanıt.

$\text{boy}(X) = n$ ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ alt kümesi X ' in bir tabanı olsun. Her $x \in X$ için $x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$ yazabiliriz ve X üzerindeki herhangi bir T operatörünü göz önüne alalım. T lineer olduğundan

$$\|Tx\| = \left\| \sum \xi_j e_j \right\| \leq \sum |\xi_j| \|Te_j\| \leq (\max_k \|Te_k\|) \sum |\xi_j|$$

yazabiliriz.

$a_j = \xi_j$ ve $x_j = e_j$ olmak üzere Temel Lemmaya göre öyle $c > 0$ vardır ki

$$\sum |\xi_j| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum \xi_j e_j \right\| = \frac{1}{c} \|x\|$$

elde edilir. Bulduğumuz bu iki sonuç birlikte ele alınırsa $\gamma = \frac{\max_k \|Te_k\|}{c}$ olmak üzere

$$\|Tx\| \leq \gamma \|x\|$$

eşitsizliği elde edilir, o halde T sınırlıdır.

Örnek 2.2. X, Y normlu uzaylar, $T: X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. O zaman T sınırlı operatördür $\Leftrightarrow T$ dönüşümü sınırlı kümeyi sınırlı kümeye dönüştürmektedir.

Kanıt.

($\Rightarrow$) T sınırlı olsun. Öyle c sayısı vardır ki her $x \in X$ için $\|Tx\| \leq c\|x\|$ ve $B \subset X$ sınırlı küme olsun. Yani her $x \in B$ için $\|x\| \leq k$, o zaman $\|Tx\| \leq c\|x\| \leq ck$, yani $\{Tx: x \in B\} = T(B)$ kümesi sınırlıdır.

($\Leftarrow$) $S = \{x \in X: \|x\| = 1\}$ sınırlı kümedir. $T(S)$ sınırlı olmalıdır. Bir m sayısı vardır ki her $x \in S$ için $\|Tx\| \leq m$; her $y \in X, y \neq 0$ için $\frac{y}{\|y\|} \in S \Rightarrow \left\| T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| \leq m$ olur. Buradan şu sonuca varılmaktadır, $\left\| T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| = \left\| \frac{1}{\|y\|} T(y) \right\| = \frac{1}{\|y\|} \|Ty\| \leq m \Rightarrow \|Ty\| \leq m\|y\|$ olduğundan T sınırlıdır.

Örnek 2.3. l^∞ uzayı sınırlı diziler uzayı olmak üzere $T: l^\infty \rightarrow l^\infty$ dönüşümü şöyle tanımlansın $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots)$ için $Tx = (\frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \dots, \frac{\xi_j}{j}, \dots)$ olsun.

a) T lineer operatör müdür?

b) $\|T\| = ?$

Çözüm.

$$a) T(x + y) = \left(\frac{\xi_1 + \zeta_1}{1}, \frac{\xi_2 + \zeta_2}{2}, \dots, \frac{\xi_j + \zeta_j}{j}, \dots \right) = \left(\frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \dots, \frac{\xi_j}{j}, \dots \right) + \left(\frac{\zeta_1}{1}, \frac{\zeta_2}{2}, \dots, \frac{\zeta_j}{j}, \dots \right) =$$

$Tx + Ty$ ve $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ olduğundan T lineer operatördür.

$$b) \|Tx\| = \sup_j \left| \frac{\xi_j}{j} \right| \leq \sup_j |\xi_j| = \|x\| \text{ o halde } \|Tx\| \leq \|x\| \Rightarrow T \text{ sınırlı ve } \|T\| \leq 1$$

olduğu sonucu ortaya çıkar.

$$\xi_* = (1, 1, 1, \dots) \text{ diyelim, } \xi_* \in l^\infty, \|\xi_*\| = \sup |1| = 1, \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq \|T\xi_*\| =$$

$$\sup \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{j}, \dots \right\} = 1 \text{ sonucu elde edilir. Bu iki eşitsizlik eşitlik sonucunu verir yani } \|T\|$$

$= 1$ olmaktadır.

Örnek 2.4. X normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ örten lineer dönüşüm olsun. Eğer $k > 0$ sayısı varsa ki her $x \in X$ için $\|Tx\| \geq k\|x\|$ o zaman T 'nin tersinin olduğunu ve sınırlı olduğunu gösterelim.

Kanıt.

T^{-1} 'in varlığı için $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $Tx = 0$ ise $\|Tx\| = 0$ 'dır. $0 \geq k\|x\| \Rightarrow \|x\| \leq 0$. O halde $x = 0$, yani T^{-1} vardır. T operatörü örten olduğu için $T^{-1}: X \rightarrow X$ dir ve her $y \in X$ için $y = Tx$, $x = T^{-1}y$ ve $\|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{k} \|Tx\| = \frac{1}{k} \|y\|$ sağlanmaktadır. Buradan $\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{k} \|y\|$ olduğundan T^{-1} operatörü sınırlıdır.

Örnek 2.5. $X = R^{n \times n}$ uzayı $n \times n$ boyutlu gerçel matrislerin vektör uzayı olsun. $A_0 \in R^{n \times n}$ sabit bir matris, $A \in R^{n \times n}$ ise değişken matris olmak üzere $T: X \rightarrow X$ lineer dönüşümü

$$T(A) = A_0 \cdot A$$

biçiminde tanımlansın. Bu dönüşüm örtendir ve tersinin olması için (birebir olması için) $T(A) = 0$ (sıfır matris) $\Rightarrow A = 0$ (sıfır matris) sağlanmalıdır. Eğer A_0 'ın tersi varsa yani $\det(A_0) \neq 0$ ise $A_0 \cdot A = 0$ eşitliğinin her iki tarafını soldan A_0^{-1} ile çarparsak $A = 0$ elde edilir. $T^{-1}: X \rightarrow X$ var olması için A_0 matrisi tersinir olmalıdır.

Örnek 2.6. $T: l^2 \rightarrow l^2$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, 3x_1, x_2, 3x_3, x_4, \dots)$ lineer operatörü için $\|T\| = 3$ 'dür. $T^2(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, 0, 3x_1, 3x_2, 3x_3, 3x_4, \dots)$, $\|T^2x\| = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \dots) = 9\|x\|^2$, $\|T^2x\| = 3\|x\|$. Dolayısıyla;

$$\|T^2\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T^2x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} 3 = 3 = \|T\|$$

Bu örnek, $\|T^n\| \neq \|T\|^n$ olduğunu ifade etmektedir. Genel durumda $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ eşitsizliği geçerlidir.

Örnek 2.7. Banach uzayında sınırlı lineer operatör için görüntü kümesi kapalı olmayabilir.

$T: l^\infty \rightarrow l^\infty$, $T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots)$ lineer sınırlı operatörü verilsin. $R(T) = T(l^\infty)$ kapalı değildir.

Gerçekten $x^1 = (1, 0, 0, \dots)$, $x^2 = (1, \sqrt{2}, 0, 0, \dots)$, $x^3 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0, 0, \dots)$, ... $x^k = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{k}, 0, 0, \dots)$, ... dizisi alalım. $x^k \in l^\infty$ sağlanır. $\|x^k\| = \sqrt{k}$.

$$y^k = Tx^k = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k}}, 0, 0, \dots)$$

Bu dizi $y = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k+1}}, 0, 0, \dots) \in l^\infty$ elemanına yakınsaktır: $k \rightarrow \infty$ iken

$$\|y^k - y\| = \sup\{0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \frac{1}{\sqrt{k+2}}, \dots\} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \rightarrow 0$$

Ancak $y \notin T(l^\infty)$. Eğer öyle olmasaydı $x \in l^\infty$ elemanı bulunurdu ki;

$$T(x) = T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots) = y,$$

$$(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots) = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots).$$

Buradan $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{3}$, ... , $x_n = \sqrt{n}$, ... bulunurdu ve $x \notin l^\infty$ çelişkisi ortaya çıkardı çünkü $\|x\| = \infty$.

Örnek 2.8. Önceki örnekte verilen operatörü l^2 uzayında ele alalım.

$T: l^2 \rightarrow l^2$, $T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots)$ olsun. $T(l^2)$ görüntü kümesi l^2 'de yoğundur. Yani her $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in l^2$ için her $\varepsilon > 0$ için öyle $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^2$ vardır ki $\|Tx - y\| < \varepsilon$ veya $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_n}{n} - y_n \right|^2 < \varepsilon$. Gerçekten $x \in l^2$, $y \in l^2$ olduğu için $\sum_n |x_n|^2 < \infty$, $\sum_n |y_n|^2 < \infty$.

K sayısı yeteri kadar büyük olmak üzere $x = (y_1, 2y_2, 3y_2 \dots, Ky_K, 0, 0, 0, \dots) \in l^2$ seçelim. Bu durumda $\|Tx - y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_n}{n} - y_n \right|^2 = \sum_{n=1}^K \left| \frac{x_n}{n} - y_n \right|^2 + \sum_{n=K+1}^{\infty} |y_n|^2$ şeklinde yazarsak birinci toplam sıfırdır, ikinci toplam ise K'ya bağlıdır ve yakınsak serinin kalan serisidir ve $K \rightarrow \infty$ iken limiti sıfırdır. Bundan dolayı $\varepsilon > 0$ için K_0 vardır ki $K = K_0$ değeri için ikinci toplam ε^2 ' dan küçüktür yani $\|Tx - y\| < \varepsilon$.

Teorem 2.6. X ve Y Banach uzayları, $T: X \rightarrow Y$ sınırlı lineer dönüşüm olsun. Öyle $c > 0$ bulunsun ki her $x \in X$ için $\|Tx\| \geq c\|x\|$. O zaman $R(T) = T(X)$ görüntü kümesi Y uzayında kapalıdır.

Kanıt.

$T(x) = 0$ ise $c\|x\| \leq 0$ ve $x = 0$ olur. Yani T 'nin tersi vardır $x_n \in R(T)$, $x_n \rightarrow x$ ise $x \in R(T)$ olduğunu gösterelim.

$$\|x_n - x_m\| = \|TT^{-1}x_n - TT^{-1}x_m\| = \|T(T^{-1}x_n - T^{-1}x_m)\| \geq c\|T^{-1}x_n - T^{-1}x_m\|$$

$\{x_n\}$ yakınsak olduğu için Cauchy dizisidir: $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$. O zaman yukarıdaki eşitsizlikten $T^{-1}x_n$ dizisinin de Cauchy dizisi olduğu ortaya çıkar. X tam uzay olduğu için $T^{-1}x_n \rightarrow z \in X$. O zaman $T(z) = T(\lim_n T^{-1}x_n) = \lim_n TT^{-1}x_n = \lim_n x_n = x$ sağlanır, yani $x \in R(T)$ 'dir. Dolayısıyla $R(T)$ kapalıdır.

Sonraki bölümde yukarıda verilen $\|Tx\| \geq c\|x\|$ eşitsizliğinin T dönüşümünün $R(T)$ görüntüsünün kapalı olması için gerekli koşul olduğunu göstereceğiz. Bu önerme Açık Dönüşüm Teoreminden elde edilecektir. Yani T birebir ve $R(T)$ kapalı ise öyle $c > 0$ sayısı vardır ki $\|Tx\| \geq c\|x\|$.

3.BAZI ÖNEMLİ TEOREMLER

Bu bölümde lineer operatörlerin spektrumları teorisinde kullanılan bazı teoremleri vereceğiz.

Teorem 3.1. (Açık Dönüşüm Teoremi). X ve Y Banach uzayları, $T: X \rightarrow Y$ örten sınırlı lineer dönüşüm olsun. O zaman T dönüşümü açık dönüşümdür, yani X uzayındaki her açık kümenin T altındaki görüntüsü Y uzayında açıktır.

Teorem 3.2. (Sınırlı Ters Operatör Teoremi). Önceki teoremin koşullarına ek olarak T dönüşümü birebir ise T^{-1} dönüşümü sınırlıdır ve dolayısıyla süreklidir.

Kanıt.

T birebir ve örten olduğu için $T^{-1}: Y \rightarrow X$ vardır ve lineerdir. $A \subset X$ açık kümesi verilsin. Önceki teoreme göre $T(A)$ açıktır. Öte yandan $(T^{-1})^{-1}(A) = T(A)$ olduğu için $T^{-1}: Y \rightarrow X$ dönüşümü ile X deki her açık kümenin ters görüntüsü Y de açıktır yani T^{-1} sınırlıdır.

Teorem 3.3. X ve Y Banach uzayları, $T: X \rightarrow Y$ birebir sınırlı lineer operatör olsun. O zaman $T^{-1}: R(T) \rightarrow X$ operatörü sınırlıdır $\Leftrightarrow R(T)$ alt uzayı Y de kapalıdır.

Kanıt.

$\Leftarrow$). $R(T)$ alt uzayı kapalı ise Y Banach uzayı olduğundan $R(T)$ de Banach uzayıdır. Bu durumda $T: X \rightarrow R(T)$ birebir-örten, X ve $R(T)$ Banach uzayları olduğu için önceki teoreme göre $T^{-1}: R(T) \rightarrow X$ sınırlıdır.

$\Rightarrow$). $T^{-1}: R(T) \rightarrow X$ sınırlı ise $c > 0$ vardır ki her $y \in R(T)$ için $\|T^{-1}y\| \leq c\|y\|$. Öte yandan $R(T) = \{Tx: x \in X\}$ olduğundan dolayı her $x \in X$ için $\|T^{-1}Tx\| \leq c\|Tx\|$, $\|Tx\| \geq \frac{1}{c}\|x\|$ bulunur, 2.Bölümdeki Teorem 2.6 ya göre $R(T)$ kapalıdır.

Sonuç 3.1. Önceki teoremin koşulları sağlansın, yani X ve Y Banach uzayları, T birebir olsun. O zaman $R(T)$ kapalıdır $\Leftrightarrow$ Öyle $c > 0$ vardır ki $\|Tx\| \geq c\|x\|$.

Tanım 3.1. X Banach uzayında tanımlı T sınırlı lineer operatörü verilsin. Eğer bir $n \geq 1$ doğal sayısı için $T^n = 0$ ise T ye nilpotent operatör denir. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$ ise T ye quasi-nilpotent operatör denir. Her bir nilpotent operatör quasi-nilpotenttir.

Örnek 3.1. $X = L_2[a, b]$ uzayı verilsin. Bu uzay, $[a, b]$ aralığında tanımlı Lebesgue ölçülebilir ve modülün karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Yani:

$$L_2[a, b] = \{x(t): x(t) \text{ fonksiyonu Lebesgue ölçülebilir ve } \int_a^b |x(t)|^2 dt < +\infty\}.$$

$T: X \rightarrow X$ lineer sınırlı operatörü şöyle tanımlasın:

$$Tx(t) = \int_a^t K(t, u)x(u)du$$

Burada $K(t, u): [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyondur. Bu operatöre Volterra operatörü denir. Bu operatör quasi-nilpotent operatördür. Bunu kanıtlayalım. $x(t) \in L_2[a, b]$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak, $\|x(t)\|^2 = \int_a^b |x^2(t)| dt$ olmak üzere;

$$|Tx(t)| \leq \int_a^t |K(t, u)| |x(u)| du \leq \left(\int_a^t |K(t, u)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} (\|x(t)\|) \leq M(b-a)^{\frac{1}{2}} \|x\|,$$

$$|T^2x(t)| \leq \int_a^t |K(t, u)| |Tx(u)| du \leq (t-a)M^2(b-a)^{\frac{1}{2}} \|x\|$$

elde edilir. Böyle devam edersek $n \geq 2$ için;

$$|T^n x(t)| \leq \int_a^t |K(t, u)| |T^{n-1}x(u)| du \leq \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} M^n (b-a)^{\frac{1}{2}} \|x\|$$

bulunur. Her tarafın integralini alırsak, C bir sabit olmak üzere

$$\|T^n x\| \leq \frac{M^n (b-a)^n}{(n-1)! \sqrt{2n-1}} \|x\| \leq \frac{C^n}{n!} \|x\|$$

eşitsizliği bulunur. Son eşitsizlikten $\|T^n\| \leq \frac{C^n}{n!}$ ve $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{C}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0$ bulunur ki bu da Volterra operatörünün quasi-nilpotent operatör olduğunu göstermektedir. Yukarıdaki limitin sıfır olduğunu gösterelim.

Eğer n tek ise;

$$(n!)(n!) = (1.2 \dots n) (1.2 \dots n) = (1.n)^2 (2.(n-1))^2 \dots \left(\left(\frac{n+1}{2}\right).\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)^2 > \left(\frac{n}{2}\right)^2 . \left(\frac{n}{2}\right)^2 . \dots . \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

bulunur, burada $\frac{n+1}{2}$ tane çarpan vardır. O halde $\left(\frac{n}{2}\right)^2 . \left(\frac{n}{2}\right)^2 . \dots . \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^{2 \cdot \frac{n+1}{2}} = \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}, n!$

$$> \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n+1}{2n}} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}.$$

Eğer n çift ise;

Benzer yolla, $(n!)(n!) > \left(\frac{n}{2}\right)^n$ bulunur, burada $\frac{n}{2}$ tane çarpan vardır. $(n!)^{\frac{2}{n}} > \frac{n}{2}$, $(n!)^{\frac{1}{n}} > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, öte yandan $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ ve $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$ olduğu için $\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} = \left(\frac{2n}{4}\right)^{\frac{1}{2n}} = (2n)^{\frac{1}{2n}} \sqrt[n]{2}$. Sonuç olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \infty$$

ve buradan Volterra operatöründeki limitin sıfır olduğu kanıtlanmış olur.



4. ÖZEŞLENİK, ÜNİTER VE NORMAL OPERATÖRLER

Bu bölümde kompleks Hilbert uzayında tanımlı sınırlı lineer operatörün eşleniği tanımlanıp bazı özellikleri ifade edildikten sonra özeşlenik, üniter ve normal operatörler ele alınacaktır.

H kompleks Hilbert uzayı, $T: H \rightarrow H$ sınırlı lineer operatör olsun. $T^*: H \rightarrow H$ eşlenik operatörü

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad (4.1)$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır. Başka bir deyişle T^* operatörü her $x, y \in H$ için (4.1) eşitliğini sağlayan operatördür.

Teroem 4.1. (Varlık teoremi) (4.1) ile tanımlı T^* operatörü vardır, tektir ve sınırlı lineer operatördür. Bu operatörün normu $\|T^*\| = \|T\|$ koşulunu sağlamaktadır.

4.1. Eşlenik Operatörün Özellikleri

$S: H \rightarrow H$ ve $T: H \rightarrow H$ sınırlı lineer operatörler olsun ve α skaleri verilsin. O zaman;

i) $\langle T^*y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle$

ii) $(S + T)^* = S^* + T^*$

iii) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

iv) $(T^*)^* = T$

v) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$

vi) $T^*T = 0 \Leftrightarrow T = 0$

vii) $(ST)^* = T^*S^*$

Tanım 4.1. $T: H \rightarrow H$ sınırlı lineer operatörü verilsin. Eğer;

- 1) $T^* = T$ ise T 'ye özeşlenik veya Hermit operatörü denir.
- 2) T birebir ve örten olup $T^* = T^{-1}$ ise T 'ye üniter operatör denir.
- 3) $TT^* = T^*T$ ise T 'ye normal operatör denir.

T operatörü özeşlenik veya üniter ise normaldir ancak tersi doğru değildir. Örneğin, $I: H \rightarrow H$ birim operatör olmak üzere $T = (2i)I$ ise T normaldir, çünkü $T^* = (-2i)I$ ve $TT^* = T^*T = 4I$, ancak $T^* \neq T$ ve $T^* \neq T^{-1} = (-\frac{1}{2}i)I$.

Yukarıda verilen kavramlar sonlu boyutlu uzaylarda lineer operatörleri temsil eden matrisler için bilinen Hermit, üniter ve normal matrisler kavramlarının genelleşmeleridir. Aynı zamanda matrisler için bilinen özellikler burada da geçerlidir. Örneğin, aşağıdaki teorem Hermit matrisler için bilinen özelliklerin operatörlere genelleşmesidir.

Teorem 4.2. $T: H \rightarrow H$ sınırlı lineer operatörü verilsin. O zaman

- a) $T^* = T$ ise her $x \in H$ için $\langle Tx, x \rangle$ gerçeldir.
- b) Eğer H kompleks uzay ve $\langle Tx, x \rangle$ her $x \in H$ için gerçel ise T operatörü özdeşleniktir.

Kanıt.

- a) $T^* = T$ ise $\overline{\langle Tx, x \rangle} = \overline{\langle x, T^*x \rangle} = \overline{\langle x, Tx \rangle} = \langle Tx, x \rangle$ yani $\langle Tx, x \rangle$ gerçeldir.
- b) $\langle Tx, x \rangle$ gerçel ise $\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \overline{\langle x, T^*x \rangle} = \langle T^*x, x \rangle$, $0 = \langle Tx, x \rangle - \langle T^*x, x \rangle = \langle (T - T^*)x, x \rangle$, $A = T - T^*$, $\langle Ax, x \rangle = 0$ (her $x \in H$). Her $v = \alpha x + y$ için $0 = \langle A(\alpha x + y), (\alpha x + y) \rangle = |\alpha|^2 \langle Ax, x \rangle + \langle Ay, y \rangle + \bar{\alpha} \langle Ax, y \rangle + \alpha \langle Ay, x \rangle = \bar{\alpha} \langle Ax, y \rangle + \alpha \langle Ay, x \rangle$. Son eşitlikte $\alpha = 1$ ve $\alpha = i$ alırsak $\langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle = 0$, $\langle Ax, y \rangle - \langle Ay, x \rangle = 0$, o halde buradan sırasıyla $\langle Ax, y \rangle = 0$ ve $A = 0$ ve $T = T^*$ çıkar.

Teorem 4.3. $T: H \rightarrow H$ sınırlı lineer operatörü verilsin. O zaman T normaldir $\Leftrightarrow \|Tx\| = \|T^*x\|$ (her $x \in H$).

Kanıt.

$$T \text{ normaldir} \Leftrightarrow T^*T - TT^* = 0 \Leftrightarrow \langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle T^*T x, x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle \Leftrightarrow \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*x, T^*x \rangle \Leftrightarrow \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2.$$

Sonuç 4.1. Eğer T normal operatör ise $N(T) = N(T^*)$ dir.

Kanıt.

$$\text{Yukarıda verilen teoreme göre } Tx = 0 \Leftrightarrow T^*x = 0.$$

Teorem 4.4. Eğer T normal operatör ise;

$$N(T) = (R(T))^\perp \quad (4.2)$$

Kanıt.

$x \in N(T)$ olsun. $Tx = 0$ 'dır. Herhangi $y \in R(T)$ seçelim. O zaman $z \in H$ vardır ki $y = Tz$. $\langle x, y \rangle = \langle x, Tz \rangle = \langle T^*x, z \rangle = \langle 0, z \rangle = 0$, burada Sonuç 4.1 kullanıldı. Yani $x \in (R(T))^\perp$. Tersine $x \in (R(T))^\perp$ olsun. Her $y \in R(T)$ için $\langle x, y \rangle = 0$ başka bir deyişle her $z \in H$ için $\langle x, Tz \rangle = 0$, o halde $0 = \langle x, Tz \rangle = \langle T^*x, z \rangle$, z keyfi olduğu için $T^*x = 0$. Teorem 4.3'e göre $Tx = 0$ ve $x \in N(T)$ 'dir. Buna göre (4.2.) kanıtlanmış olur.

Sonuç 4.2. Eğer T normal operatör ise

$$N(T)^\perp = \overline{R(T)} \quad (4.3)$$

Kanıt.

$(R(T))^\perp = (\overline{R(T)})^\perp$ olduğu için (4.2.)'den

$$N(T) = (\overline{R(T)})^\perp \quad (4.4)$$

elde edilir. $\overline{R(T)}$ kapalı alt uzay olduğu için bilinen teoreme göre $\overline{R(T)}^{\perp\perp} = \overline{R(T)}$. (4.4) eşitliğinin her iki tarafına dik alma işlemini uygularsak $N(T)^\perp = \overline{R(T)}^{\perp\perp} = \overline{R(T)}$. Dolayısıyla (4.3) kanıtlanmış olur.

Tanım 4.2. $T: H \rightarrow H$ sınırlı lineer operatörü için $T^* = -T$ ise T ye ters-özeşlenik (skew-adjoint) operatör denir.

Tanım 4.3. $T: H \rightarrow H$ operatörü özeşlenik operatör olsun. Eğer her $x \in H$ için $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ ise T 'ye pozitif operatör denir ve $T \geq 0$ gibi gösterilir. T_1 ve T_2 özeşlenik operatörleri için

$$T_2 \geq T_1 \Leftrightarrow T_2 - T_1 \geq 0.$$

Teorem 4.5. Eğer S ve T lineer sınırlı özeşlenik operatörleri pozitif operatörler ve $ST = TS$ ise ST çarpımı da pozitifdir.

Eğer T operatörü özeşlenik ise T^2 operatörü pozitiftir. Çünkü $\langle T^2x, x \rangle = \langle T(Tx), x \rangle = \langle Tx, T^*x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$. Probleme tersten yaklaşırsak, T pozitif operatör ise bir özeşlenik A bulalım ki $A^2 = T$ olsun. Bu problem bizi pozitif operatörün karekökü kavramına getirmektedir.

Tanım 4.4. $T: H \rightarrow H$ pozitif, sınırlı özeşlenik lineer operatör olsun. Eğer $A^2 = T$ koşulunu sağlayan özeşlenik, sınırlı, lineer A operatörü varsa A ya T nin karekökü denir ve $A = T^{\frac{1}{2}}$ gibi gösterilir.

Örnek 4.1. $T: l^2 \rightarrow l^2$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, 0, x_3, x_4, \dots)$ lineer operatörü verilsin. $\|Tx\|^2 = x_3^2 + x_4^2 + \dots \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \dots = \|x\|^2$, $\|Tx\| \leq \|x\|$ olduğu için T sınırlıdır. Aynı zamanda T özeşleniktir çünkü $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ dir. $\langle Tx, y \rangle = \langle (0, 0, x_3, x_4, \dots), (y_1, y_2, y_3, y_4, \dots) \rangle = \langle (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots), (0, 0, y_3, y_4, \dots) \rangle = x_3y_3 + x_4y_4 + \dots = x_3y_3 + x_4y_4 + \dots = \langle x, Ty \rangle$ sağlanmaktadır. $A = T^{\frac{1}{2}}$ karekök operatörü T 'nin kendisidir, yani $A = T^{\frac{1}{2}} = T$. Çünkü $A(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, 0, x_3, x_4, \dots)$ ise $A^2(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = A(0, 0, x_3, x_4, \dots) = (0, 0, x_3, x_4, \dots) = Tx$

Teorem 4.6. Her pozitif sınırlı özeşlenik lineer $T: H \rightarrow H$ operatörün pozitif A karekökü vardır ve tekdir. Eğer B sınırlı lineer operatörü için $TB = BT$ ise $AB = BA$ 'dır.

5. LİNEER OPERATÖRÜN SPEKTRUMU

X sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir lineer operatör olduğunda X uzayının bazına bağlı olarak T lineer operatörü matrisler ile gösterilebilir. $A = (a_{jk})$ reel ya da kompleks terimli $n \times n$ tipinde karesel bir matris ise özdeğer ve özvektörler $Ax = \lambda x$ denklemi ile tanımlanırlar.

Tanım 5.1. $x \neq 0$, $x \in C^n$ olmak üzere $Ax = \lambda x$ denkleminin bir çözümü varsa bu λ sayısına, $A = (a_{jk})$ matrisinin özdeğeri ve x vektörüne ise bu özdeğere karşılık gelen özvektörü denir. λ özdeğerine karşılık gelen özvektörler ile sıfır vektörü, X uzayının bir alt vektör uzayını oluşturur ve bu uzaya λ 'ya karşılık gelen özuzay denir.

A kare matrisinin tüm öz değerlerinin $\sigma(A)$ kümesi, A matrisinin spektrum kümesi ve kompleks düzlemde bu kümenin tümleyeni olan $\rho(A) = C - \sigma(A)$ kümesine ise resolvent kümesi denir. Buna göre $A = (a_{jk})$ kare matrisi için

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in C: Ax = \lambda x, x \neq 0, x \in C^n \}, \rho(A) = C - \sigma(A).$$

$n \times n$ tipindeki A kare matrisi için özdeğer ve özvektörleri bulmak için öncelikle $n \times n$ tipindeki I birim matrisi için $(A - \lambda I)x = 0$ homojen denklemi şeklinde yazılır. Bu ifade, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ vektörünün bileşenlerini bilinmeyen olarak alan n tane lineer denklemin homojen bir sistemidir.

$(A - \lambda I)x = 0$ denkleminin $x \neq 0$ şeklinde bir çözümünün olması için $\det(A - \lambda I) = 0$ olmalıdır. Yani A matrisinin karakteristik denklemi $\det(A - \lambda I)$,

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

şeklinde olmalıdır. Çünkü $\det(A - \lambda I) \neq 0$ olduğunda $(A - \lambda I)x = 0$ denkleminin sadece $x = 0$ açık çözümü vardır. Bu verilenler A kare matrisinin karakteristik polinomunun, λ 'ya bağlı n . dereceden bir polinom olduğu çıkar. Matrisin özdeğerlerinin nasıl bulunacağını ifade eden sonuç aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir.

Teorem 5.1. $n \times n$ tipindeki $A = (a_{jk})$ kare matrisinin özdeğerleri, A kare matrisinin karakteristik denklemi olan $\det(A - \lambda I) = 0$ denklemi ile bulunur. A kare matrisinin en az bir tane en fazla n tane farklı özdeğeri vardır.

Kare matrislerdeki bu sonuç n boyutlu X normlu uzayı üzerindeki $T: X \rightarrow X$ lineer operatörüne şöyle uygulanır. $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, X normlu uzayının herhangi bir bazı ve T nin bu baza karşılık gelen matrisi $T_c = (a_{jk})$ olsun. Bu durumda T_c matrisinin özdeğerleri, T lineer operatörünün özdeğerleri olur. Yine bu matrisin spektrum ve resolvent kümesi, T lineer operatörünün spektrum ve resolvent kümesi olur.

Teorem 5.2. Sonlu boyutlu X normlu uzayı üzerinde verilmiş bir $T: X \rightarrow X$ lineer operatörünün X uzayının farklı bazlarına bağlı olarak tüm matris gösterimleri aynı özdeğerlere sahiptir.

Tanım 5.2. T_1 ve T_2 matrisleri $n \times n$ tipinde sırasıyla e ve e^* bazlarına göre aynı T operatörünü temsil eden matrisler olsun. Eğer $T_2 = C^{-1}T_1C$ eşitliğini sağlayacak şekilde singüler olmayan bir C matrisi mevcut ise $n \times n$ tipindeki T_2 'ye, T_1 'e benzerdir denir. Buna göre;

- a) Sonlu boyutlu X normlu uzayı üzerinde tanımlı T lineer operatörünü temsil eden iki matris, X normlu uzayının herhangi iki bazına göre benzerdir.
- b) Benzer matrisler, aynı özdeğerlere sahiptir.

Teorem 5.3. Sonlu boyutlu $X \neq \{0\}$ normlu uzayında tanımlı her lineer operatörün en az bir tane özdeğeri vardır.

Teorem 5.4. X vektör uzayı üzerinde tanımlı lineer bir T operatörünün farklı $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğerlerine karşılık gelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ özvektörleri lineer bağımsızdır.

Kanıt

Kabul edelim ki $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi lineer bağımlı olsun. Bu kümenin lineer bağımsız olacak şekilde $\{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$ alt kümesi alalım. Diyelim ki x_m elemanı bu kümenin elemanlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilen ilk vektör olsun. Bu

durumda $x_m = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{m-1}x_{m-1}$ olacak şekilde $a_1, a_2, \dots, a_m$ skalerleri vardır.

$T - \lambda_m I$ operatörü eşitliğin her iki tarafına uygulanırsa

$$(T - \lambda_m I) x_m = \sum_{j=1}^{m-1} (T - \lambda_m I) x_j = \sum_{j=1}^{m-1} a_j (\lambda_j - \lambda_m) x_j.$$

x_m vektörü, λ_m özdeğerine karşılık gelen bir özvektör olduğundan bu eşitliğin sol tarafı sıfırdır. $j = 1, 2, \dots, m-1$ için x_j vektörleri lineer bağımsız olduğundan $a_j (\lambda_j - \lambda_m) = 0$ olmalıdır. $j = 1, 2, \dots, m-1$ için $\lambda_j \neq \lambda_m$ olduğundan da $a_j = 0$ olmalıdır. Buna göre $x_m = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{m-1}x_{m-1}$ ifadesindeki $x_m = 0$ olur. Ancak x_m vektörü bir özvektör olduğundan $x_m \neq 0$ 'dır. Çelişki elde ettiğimiz için $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

Örnek 5.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ matrislerinin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulalım.

Çözüm.

$\lambda^2 - (izA)\lambda + \det A = 0$ ise $\lambda^2 - 12\lambda + 27 = 0$. O halde $(\lambda - 3)(\lambda - 9) = 0 \Rightarrow \lambda = 3$ ve $\lambda = 9$ bulunur.

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$(1-3)x_1 + 2x_2 = 0$$

$$-8x_1 + (11-3)x_2 = 0$$

İki bilinmeyenli denklem sistemi çözülürse $x_1 = x_2$ sonucu elde edilir. Buradan özvektör $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dir.

$$\lambda^2 - (izB)\lambda + \det B = 0 \text{ ise}$$

$$\lambda^2 - (2a)\lambda + (a^2 + b^2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = a + \sqrt{a^2 - (a^2 + b^2)},$$

$$\lambda_2 = a - \sqrt{a^2 - (a^2 + b^2)} \Rightarrow \lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$$

$$(a - a - ib)x_1 + bx_2 = 0, ix_1 = x_2$$

Buradan özvektör $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ şeklinde bulunur.

Teorem 5.5. Hermit matrisinin özdeğerleri gerçeldir.

Hermit matris karmaşık eşleniğinin transpozesi kendisine eşit olan matristir. Örneğin, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{bmatrix}$ matrisi hermit matristir.

Kanıt.

$A = A^* = ((\bar{A})^T) = (\overline{A^T})$, köşegen elemanları gerçeldir çünkü $\overline{a_{ij}} = a_{ji}$ dir ve $i = j$ alırsak $\overline{a_{ii}} = a_{ii}$ olur. $Ax = \lambda x$ sayısının gerçel olduğunu gösterelim. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $x^* = [x_1 \ \cdots \ x_n]$ dir. O halde $xx^* = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0$. Bu eşitliği Soldan x^* ile çarpalım. $x^*Ax = x^*\lambda x$ o halde $\lambda = \frac{x^*Ax}{x^*x}$ elde edilir. x^*Ax bir sayı olduğu için;

$$(\overline{x^*Ax}) = (x^*Ax)^* = x^*A^*(x^*)^* = x^*Ax \Rightarrow x^*$$

bulunur, yani x^*Ax ve λ gerçeldir.

Normlu kompleks $X \neq \{0\}$ uzayı ve $T: X \rightarrow X$ lineer operatör olsun. λ bir kompleks sayı ve I da X uzayı üzerinde birim operatör olmak üzere;

- 1) $T_\lambda = T - \lambda I$ operatörünü tanımlayalım. Eğer T_λ operatörünün tersi varsa, bu ters operatöre T 'nin resolvent operatörü denir ve $R_\lambda(T)$ ile gösterilir. Buna göre
- 2) $R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$ olur.

$R_\lambda(T)$ mevcut olmak üzere $x = T_\lambda^{-1}y = R_\lambda(T)y$ olur. Lineer operatörlerin tersi de bir lineer operatör olduğundan R_λ resolvent operatörü de bir lineer operatördür.

Burada önemli olan R_λ resolvent operatörünün özelliklerinin araştırılmasının, T operatörünün özelliklerinin incelenmesi için temel olmasıdır. T_λ ve R_λ operatörlerinin bir çok özelliği λ kompleks sayısına bağlıdır. Spektral teoride bu özelliklerle ilgilenir. Şimdi spektrum, regüler değer, rezolvent operatör kavramlarının daha ayrıntılı tanımlarını verelim.

Tanım 5.3. $X \neq \{0\}$ kompleks normlu uzayı olmak üzere $T: X \rightarrow X$ lineer operatör olsun. Eğer;

- (R₁) $R_\lambda(T)$ operatörü mevcut ise yani T_λ operatörü birebir ise,
- (R₂) $R_\lambda(T)$ operatörü tanım kümesi üzerinde sınırlı lineer operatör ise,
- (R₃) $R_\lambda(T)$ operatörünün tanım kümesi, yani T_λ 'nın görüntü kümesi X uzayı içerisinde yoğun bir küme ise,

λ kompleks sayısına T operatörünün *regüler değeri* ve bütün regüler değerlerin oluşturduğu $\rho(T)$ kümesine de T operatörünün *resolvent kümesi* denir. Buna göre $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ regüler değer}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \text{ mevcut, sınırlı ve } X \text{ de yoğun bir kümede tanımlı}\}$ olarak tanımlayabiliriz. Resolvent kümesinin $\mathbb{C}$ kompleks düzlemdeki $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ tümleyeni T operatörünün spektrumu ve $\lambda \in \sigma(T)$ kompleks sayısı da T operatörünün spektral değeri olur. Buna göre;

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ spektral değeri}\}$$

Bu tanıma göre $\sigma(T)$ spektrum kümesi üç ayrık kümeden oluşur.

Nokta spektrum: $R_\lambda(T)$ resolvent operatörünün mevcut olmadığı λ sayılarının kümesi olup $\sigma_p(T)$ ile gösterilir. Bu durumda $\lambda \in \sigma_p(T)$ kompleks sayısına T operatörünün bir özdeğeri denir. Nokta spektrumuna ayrık spektrum da denir.

Süreklilik spektrum: $R_\lambda(T)$ operatörünün mevcut olduğu, (R_3) şartının sağlanıp (R_2) şartının sağlanmadığı yani, $R_\lambda(T)$ resolvent operatörünün sınırsız olduğu λ sayılarının kümesidir ve $\sigma_c(T)$ ile gösterilir.

Residü spektrum: $R_\lambda(T)$ resolvent operatörünün mevcut olduğu (sınırlı veya sınırsız) fakat (R_3) şartının sağlanmadığı yani $R_\lambda(T)$ operatörünün tanım kümesinin X uzayında yoğun olmadığı λ sayılarının kümesidir ve $\sigma_r(T)$ ile gösterilir.

Tablo 5.1 Resolvent ve spektrum kümeleri

λ kompleks sayısının elemanı olduğu kümeler	Sağlanan şartlar	Sağlanmayan şartlar
$\rho(T)$ resolvent	$(R_1), (R_2), (R_3)$	
$\sigma_p(T)$ nokta spektrum		(R_1)
$\sigma_c(T)$ sürekli spektrum	$(R_1), (R_3)$	(R_2)
$\sigma_r(T)$ residü spektrum	(R_1)	(R_3)
$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$		

(Teorem: X, Y normlu uzay ve X tanım kümesi $R(T) \subset Y$ değer kümesi olmak üzere; $T: X \rightarrow R(T)$ lineer operatörü verilmiş olsun. T nin tersinir olması için gerek ve yeter şart çekirdeğinin sadece sıfır vektöründen oluşmasıdır.)

Yukarıdaki teoremden dolayı $T_\lambda^{-1} = R_\lambda: R(T_\lambda) \rightarrow X$ dönüşümünün mevcut olması için gerek ve yeter şart $T_\lambda x = 0$ olduğunda $x = 0$ olmasıdır. Yani T_λ operatörünün çekirdeğinin $\{0\}$ olmasıdır. Yani eğer bir $x \neq 0$ vektörü için $T_\lambda x = (T - \lambda I)x = 0$ ise

T_λ operatörünün tersi yani R_λ resolvent operatörü mevcut değildir. O halde $\lambda \in \sigma_p(T)$ 'dir. Bu ise λ değerinin T operatörünün özdeğeri olmasıdır. Bu durumda x vektörü T operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olur. Sonlu boyutlu uzaylarda olduğu gibi özuzay T nin λ özdeğerine karşılık gelen bütün özvektörler ile 0 'dan ibaret olan, X 'in bir alt uzayıdır ve T 'nin λ 'ya karşılık gelen öz altuzayını oluşturur.

Buradaki özdeğerin tanımı ile matrisler için bilinen özdeğer tanımları uyumludur. Çünkü sonlu boyutlu uzay üzerinde tanımlı lineer operatörün spektrumu sadece nokta spektrumu olup sürekli ve residü spektrumu boş kümedir. Dolayısıyla sonlu boyutlu uzaylarda her spektral değer bir özdeğerdir. Eğer X sonsuz boyutlu ise bu durumda T operatörünün özdeğer olmayan spektral değerleri olabilir. Yani spektrum kümesinin elemanı olup nokta spektrum kümesinin elemanı olmayan değerler olabilir. Örneklerle inceleyelim.

Örnek 5.2. $X = l_2$ Hilbert dizi uzayı üzerinde $x = (\xi_j) \in l_2$ olmak üzere

$(\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$ ile tanımlanan $T: l_2 \rightarrow l_2$ lineer operatörünü tanımlayalım.

T operatörü sağa öteleme operatörüdür, l_2 uzayındaki norm aşağıda verildiği gibidir.

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{\infty} (|x_j|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|Tx\| = \|(0, \xi_1, \xi_2, \dots)\| = \sum_{j=1}^{\infty} (|\xi_j|^2)^{\frac{1}{2}} = \|(\xi_1, \xi_2, \dots)\| = \|x\| \text{ olduğundan } T \text{ sınırlıdır.}$$

$$\text{Aynı zamanda } \|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} 1 = 1 \text{ 'dir.}$$

a) $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$ 'dır. Yani $R_0(T) = T^{-1}: T(X) \rightarrow X$, $(\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow (\xi_2, \xi_3, \dots)$ operatörü mevcuttur ve sola ötelemelidir. Yani $R_0(T)$ operatörü (R_1) şartını sağlar.

Fakat $(\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$ ifadesinden $T(X)$ kümesi $Y = \{(\eta_j): \eta_1 = 0\}$ olup X in öz alt uzayıdır ve $\overline{T(X)} \neq X$ sağlanmaktadır. Yani $T(X)$ kümesi X uzayı içerisinde yoğun değildir. Yani $R_0(T)$ operatörü (R_3) şartını sağlamaz. O halde $\lambda = 0$ değeri T operatörünün resolvent kümesinin bir elemanı olmayıp, spektrum kümesinin elemanıdır. Yani $\lambda = 0$ bir spektral değerdir.

b) $(\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$ den dolayı $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$ 'dır ve $x = 0$ vektörü özvektör olmayacağı için Buna göre $\lambda = 0$ değeri özdeğer değildir.

Lemma 5.1 X kompleks Banach uzayı üzerinde $T: X \rightarrow X$ lineer operatörü verilsin ve $\lambda \in \rho(T)$ olsun. Eğer

- a) T kapalı operatör veya
- b) T sınırlı operatör

ise o halde $R_\lambda(T)$ resolvent operatörü X uzayının tamamı üzerinde tanımlı olup sınırlıdır.

Şimdi verilen bir operatörün spektrumunun genel özelliklerini ele alalım. Bu özellikler operatörün kendisine ve operatörün tanımlandığı uzaya bağlıdır. Önce kompleks X Banach uzayı üzerinde tanımlı ve sınırlı T lineer operatörleri ile başlayacağız. Yani $T \in B(X)$ alacağız.

Teorem 5.6. X Banach uzayı olmak üzere $T \in B(X)$ alalım. Eğer $\|T\| < 1$ ise bu durumda $(I - T)^{-1}$ operatörü X uzayının tamamı üzerinde sınırlı bir lineer operatördür ve

$$(I - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j = I + T + T^2 + \dots$$

Eşitliğin sağ tarafında bulunan seri $B(X)$ kümesinin üzerindeki norma göre yakınsaktır.

Kanıt.

Tümevarımdan $\|T^j\| \leq \|T\|^j$ dir. $\sum \|T\|^j$, geometrik serileri $\|T\| < 1$ olduğu durumda yakınsak olduğundan verilen seri $\|T\| < 1$ için mutlak yakınsak olacaktır. X bir Banach uzayı olduğundan $B(X)$ uzayı da tam uzaydır.

(Teorem: Eğer Y bir Banach uzayı ise $B(X, Y)$ uzayı bir Banach uzayıdır.)

Yukarıdaki teorem nedeniyle $B(X)$ tam olacaktır. Dolayısıyla mutlak yakınsaklık serinin yakınsaklığını gerektirdiğinden seri yakınsak olacaktır. O halde $\sum T^j = S(x)$ serisinin toplamını S ile gösterelim. $S = (I - T)^{-1}$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. S_n kısmi toplamlar dizisini gösterebiliriz. O halde;

$$\begin{aligned} (I - T)S_n &= (I - T)(I + T + T^2 + \dots + T^n) \\ &= I + T + T^2 + \dots + T^n - T - T^2 - T^3 - \dots - T^{n+1} \\ &= I - T^{n+1} \end{aligned}$$

ve benzer yolla $S_n(I - T) = I - T^{n+1}$ yazılır ve $\|T\| < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için, limite geçilirse $T^{n+1} \rightarrow 0$ olduğundan;

$$(I - T)S = S(I - T) = I$$

elde edilir. Buradan $S = (I - T)^{-1}$ bulunur.

Bu teoremin ilk uygulaması olarak sınırlı bir lineer operatörün spektrumunun kompleks düzlemde kapalı olduğunu gösterelim.

Teorem 5.7. X kompleks Banach uzayı üzerinde tanımlı ve sınırlı T lineer operatörünün $\rho(T)$ resolvent kümesi açıktır ve dolayısıyla $\sigma(T)$ spektrum kümesi kapalıdır.

Kanıt.

Eğer $\rho(T) = \emptyset$ ise ispat açıktır. O halde $\rho(T) \neq \emptyset$ alalım. Bu durumda $\lambda_0 \in \rho(T)$ sayısını ve herhangi bir $\lambda \in \mathbb{C}$ alalım.

$$\begin{aligned} T_\lambda &= T - \lambda I = T - \lambda_0 I + \lambda_0 I - \lambda I \\ &= T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I \\ &= (T - \lambda_0 I)[I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}] \\ &= T_{\lambda_0}(I - (\lambda - \lambda_0)(T_{\lambda_0})^{-1}) \\ &= T_{\lambda_0}(I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}) \end{aligned}$$

$V = I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}$ seçelim. O halde $T_\lambda = T_{\lambda_0}V$ yazılır.

$\lambda_0 \in \rho(T)$ ve T operatörü sınırlı olduğundan Lemma 5.1'den dolayı R_{λ_0} resolvent operatörü X uzayının tamamı üzerinde tanımlı ve sınırlıdır. Buradan $R_{\lambda_0} = (T_{\lambda_0})^{-1} \in B(X)$ elde ederiz.

Önceki teoremdeki T operatörü yerine $(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0} \in B(X)$ operatörü alınırsa, $\|(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}\| < 1$ olmak üzere tüm λ değerleri için $(I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0})^{-1} = V^{-1}$ operatörü X uzayının tamamı üzerinde tanımlı ve sınırlı olur.

$V^{-1} = (I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} ((\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0})^j = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j$ ve $\|(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}\| < 1 \Rightarrow |\lambda - \lambda_0| \cdot \|R_{\lambda_0}\| < 1 \Rightarrow |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$ olur. $T_{\lambda_0}^{-1} = R_{\lambda_0} \in B(X)$ olduğundan $V = I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}$ ifadesinden $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$ eşitsizliğini sağlayan her λ değeri için T_λ operatörünün $R_\lambda = T_\lambda^{-1} = (T_{\lambda_0}V)^{-1} = V^{-1}T_{\lambda_0}^{-1} = V^{-1}R_{\lambda_0}$ şeklinde bir tersi vardır. Dolayısıyla $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$ ifadesi T operatörünün λ_0 'ın regüler λ değerlerinden ibaret komşuluğunu gösterir.

R_λ mevcut, $R_\lambda = V^{-1}R_{\lambda_0}$ olduğundan sınırlı ve X uzayının tamamında tanımlıdır. $\lambda_0 \in \rho(T)$ keyfi bir sabit olduğundan $\rho(T)$ resolvent kümesi açık kümedir. O halde $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ spektrum kümesi kapalıdır.

Teorem.5.8. X kompleks Banach uzayı ve bu uzay üzerinde tanımlı ve sınırlı bir T operatörü alalım. $R_\lambda T$ resolvent operatörü her $\lambda_0 \in \rho(T)$ için kompleks düzlemde $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$ diski içinde mutlak yakınsak olan $R_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1}$ gösterimine sahiptir. Bu disk $\rho(T)$ resolvent kümesinin bir alt kümesidir.

Kanıt.

$R_\lambda = V^{-1}R_{\lambda_0}$ ve $V^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j$ olduğundan $R_\lambda = V^{-1}R_{\lambda_0}$ eşitliğinde $V^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j$ eşitliği yerine yazılırsa, $R_\lambda = (\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j) R_{\lambda_0}$ ve λ sayısı disk içinde keyfi bir sabit olduğundan $R_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1}$ bulunur.

Teorem 5.9. X kompleks Banach uzayı üzerinde tanımlı ve sınırlı $T: X \rightarrow X$ lineer operatörünün $\sigma(T)$ spektrumu kompakttır ve $|\lambda| \leq \|T\|$ ile verilen diskin içindedir. Yani T operatörünün $\rho(T)$ resolvent kümesi boş değildir.

Kanıt.

(**Teorem:** X sonlu boyutlu bir normlu uzay ve M , X uzayının bir alt kümesi olsun. M kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart M 'nin kapalı ve sınırlı olmasıdır.) Yukarı verilen Teorem gereği $\sigma(T)$ spektrum kümesinin kapalı ve sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Önceki teoremden $\sigma(T)$ spektrum kümesi kapalıdır. O halde sınırlılığa bakmak yeterli olacaktır. $\lambda \neq 0$ alalım. Buna göre;

$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1} = (\lambda(\frac{1}{\lambda}T - I))^{-1} = (-\lambda(I - \frac{1}{\lambda}T))^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(I - \frac{1}{\lambda}T)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} (\frac{1}{\lambda}T)^j$ yazabiliriz. $\sum_{j=0}^{\infty} (\frac{1}{\lambda}T)^j$ serisi $\left\| \frac{1}{\lambda}T \right\| = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$ eşitsizliğini sağlayan her λ değeri için yakınsaktır. Yani $|\lambda| > \|T\|$ için yakınsaktır. O halde $|\lambda| > \|T\|$ şartını sağlayan λ değerleri $\rho(T)$ resolvent kümesinin elemanlarıdır. Buradan $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ spektrum kümesinin elemanları $|\lambda| \leq \|T\|$ diskinin içinde olmalıdır. Dolayısıyla $\sigma(T)$ spektrum kümesi sınırlıdır.

Tanım 5.4. $X \neq \{0\}$ ve $T \in B(X)$ olsun. $\sigma(T)$ kümesi T 'nin spektrumu olmak üzere

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

sayısına T operatörünün spektral yarıçapı denir. Eğer X bir Banach uzayı ise

$$r_\sigma(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

Teorem 5.10. $X \neq \{0\}$ ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $\sigma(T^*) \subset \sigma(T)$ 'dir. Eğer X bir Banach uzayı ise $\sigma(T^*) = \sigma(T)$ 'dir.

Teorem 5.11. $X \neq \{0\}$ kompleks Banach uzayı ve $T \in B(X)$ ise $\sigma(T) \neq \emptyset$, yani spektrum kümesi daima boş değil.

Teorem 5.12. X kompleks Banach uzayı, $T \in B(X)$ olsun ve $\lambda, \mu \in \rho(T)$ alalım. Bu durumda

- a) T operatörünün R_λ resolvent operatörü aşağıdaki resolvent denklemini sağlar:

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda)(R_\mu R_\lambda), (\lambda, \mu \in \rho(T)).$$

- b) R_λ resolvent operatörü, T operatörü ile değişmeli olan her bir $S \in B(X)$ operatörü ile değişmelidir.
- c) $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$ ($\lambda, \mu \in \rho(T)$).

Kanıt.

a) T operatörü sınırlı olduğundan Lemma 5.1'den dolayı R_λ operatörü X uzayının tamamında tanımlı ve sınırlıdır. Yani T_λ operatörünün değer kümesi X uzayının kendisidir. Yani $R_\lambda: X \rightarrow X$ ve $T: X \rightarrow X$. O halde I operatörü X uzayı üzerinde birim operatör olmak üzere $\lambda, \mu \in \rho(T)$ için

$$I = T_\lambda R_\lambda, I = R_\mu T_\mu$$

$$(R_\mu - R_\lambda) = (R_\mu I - I R_\lambda) = (T_\lambda R_\lambda) - (R_\mu T_\mu) R_\lambda = R_\mu (T_\lambda - T_\mu) R_\lambda$$

ve

$$T_\lambda = T - \lambda I, T_\mu = T - \mu I$$

$$(R_\mu - R_\lambda) = R_\mu (T_\lambda - T_\mu) R_\lambda = R_\mu (T - \lambda I - (T - \mu I)) R_\lambda = R_\mu (-\lambda I + \mu I) R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda$$

bulunur.

b) $S \in B(X)$ operatörü T ile değişmeli yani $ST = TS$ olsun.

$$i) \quad ST_\lambda = S(T - \lambda I) = ST - S\lambda I = ST - \lambda S = TS - \lambda S$$

$$ii) \quad T_\lambda S = (T - \lambda I)S = TS - \lambda IS = TS - \lambda S \text{ eşitliklerinden } T_\lambda S = ST_\lambda \text{ olur.}$$

O halde $I = T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda$ eşitliklerini kullanırsak;

$$R_\lambda S = R_\lambda SI = R_\lambda ST_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda SR_\lambda = ISR_\lambda = SR_\lambda$$

bulunur, buradan $R_\lambda S = SR_\lambda$ eşitliğine ulaşılır. Yani R_λ operatörü S ile değişmelidir.

$$c) \quad R_\lambda S = SR_\lambda \text{ eşitliğinde } R_\lambda \text{ yerine } R_\mu \text{ ve } S \text{ yerine de } T \text{ alırsak } T \text{ operatörü}$$

kendisi ile değişmeli olduğundan R_μ resolvent operatörü T ile değişmeli olacaktır.

Sonra $R_\lambda S = SR_\lambda$ eşitliğinde S yerine R_μ alınırsa $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$ eşitliği bulunacaktır.

Spektral teoride önemli bir yeri olan diğer bir sonuç spektral dönüşüm teorisidir.

Ön hazırlık yapmak amacıyla matrisler için spektral dönüşüm teoremini hazırlayalım.

Eğer λ sayısı A kare matrisinin bir özdeğeri ise bir $x \neq 0$ için $A\lambda = \lambda x$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği kullanarak $A^2x = AAx = A\lambda x = \lambda\lambda x = \lambda^2x$ bulunur. Yani $A^2x = \lambda^2x$ olur ve bu şekilde devam edilerek her $m \in \mathbb{Z}^+$ için $A^m x = \lambda^m x$ olduğu elde edilir. O halde λ , A kare matrisinin bir özdeğeri ise λ^m sayısı da A^m kare matrisinin bir özdeğeri olur. Daha genel bir ifadeyle;

$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0, \quad p(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_0 I$$

matrisinin bir özdeğeri.

Şimdi sonlu boyutta elde edilen bu sonucun herhangi bir boyuttaki Banach uzayına da genişletilebileceğini görmeye çalışalım. Fakat bu yapılırken sınırlı lineer bir operatörünün spektrumunun boştan farklı olduğu sonucu kullanılacaktır. Aşağıda verilen teoremden

$$p(\sigma(T)) = \{\mu \in \mathbb{C} \mid \mu = p(\lambda): \lambda \in \sigma(T)\}$$

sembolünü kullanacağız.

Teorem 5.13. (Polinomlar için spektral dönüşüm teoremi)

X kompleks Banach uzayı, $T \in B(X)$ alalım. $p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0$ ($\alpha_n \neq 0$) olsun. Bu durumda;

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) \text{ 'dir.}$$

Yani $p(T) = \alpha_n T^n + \alpha_{n-1} T^{n-1} + \dots + \alpha_0 I$ operatörünün $\sigma(p(T))$ spektrumu, T operatörünün $\sigma(T)$ spektrumuna ait noktaların p polinomu altındaki görüntülerinden ibarettir.

Kanıt.

$\sigma(T) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. $n > 0$ olsun.

$$\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T)) \text{ ve } p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$$

olduğunu göstermeliyiz.

a) $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$ olduğunu gösterelim. $p(T) = S$ olsun ve $\mu \in \mathbb{C}$ alalım. $S_\mu = p(T) - \mu I$ eğer S_μ^{-1} varsa S_μ^{-1} operatörü $p(T)$ polinomunun resolvent operatörü olur. X kompleks uzay olduğundan $S_\mu(\lambda) = p(\lambda) - \mu$ şeklinde verilen polinomun kökleri $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ şeklinde ise her polinom çarpanlarına ayrılabilirdiği için $S_\mu(\lambda) = p(\lambda) - \mu I = \alpha_n(\lambda - \gamma_1)(\lambda - \gamma_2) \dots (\lambda - \gamma_n) \dots (1)$ ve λ yerine T yazarsak $S_\mu = p(T) - \mu I = \alpha_n(T - \gamma_1 I)(T - \gamma_2 I) \dots (T - \gamma_n I) \dots (5.1)$ Eğer her $\gamma_j \in \rho(T)$ ise $T - \gamma_j I$ 'nin tersi var ve sınırlı operatördür ve lemma 5.1 gereğince tüm X de tanımlıdır ve onların çarpımları da aynı özelliğe sahiptir. İki operatörün tersleri varsa onların çarpımlarının (bileşkesinin) da tersi vardır. Yani $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$. O halde (5.1)'a göre $S_\mu^{-1} = \frac{1}{\alpha_n} (T - \gamma_n I)^{-1} \dots (T - \gamma_1 I)^{-1}$ bulunur. $S_\mu = p(T) - \mu I$ ifadesinin tersi olup, sınırlı ve tüm X de tanımlı olduğundan $\mu \in \rho(p(T))$ olur. Buradan her $\mu \in \sigma(p(T))$ için öyle bir γ_{j_0} vardır ki $\gamma_{j_0} \in \sigma(T)$ aksi durumda her j için $\gamma_j \in \rho(T)$ olsaydı yukarıda verilen sonuçlara göre $\mu \in \rho(p(T))$ olurdu. Bu da $\mu \in \sigma(p(T))$ ile çelişmektedir. Yukarıdaki polinom açılımından $s_\mu(\gamma_{j_0}) = p(\gamma_{j_0}) - \mu = 0$, $\mu = p(\gamma_{j_0}) \in p(\sigma(T))$ yani her $\mu \in \sigma(p(T))$ için $\mu \in p(\sigma(T))$ olur. O halde $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$ olduğu kanıtlandı.

b) $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$ olduğunu gösterelim. Her $k \in p(\sigma(T))$ ise $k \in \sigma(p(T))$ olduğunu gösterelim. $k \in p(\sigma(T))$ alalım. O zaman bir $\beta \in \sigma(T)$ vardır ki $k = p(\beta)$. Şimdi bundan sonra iki durum mümkündür. i) $T - \beta I$ 'nin tersi yoktur, ii) $T - \beta I$ 'nin tersi vardır.

i) $p(\beta) - k = 0$; β sayısı $S_k(\lambda) = p(\lambda) - k$ polinomunun bir köküdür. O halde $g(\lambda)$ polinomu $S_k(\lambda)$ polinomunun diğer tam bölenlerinin ve α_n başkatsayısının çarpımını göstermek üzere $S_k(\lambda) = p(\lambda) - k = (\lambda - \beta).g(\lambda)$ yazılabilir. Operatöre geçerek;

$$S_k = p(T) - KI = (T - \beta I)g(T) = g(T)(T - \beta I) \dots (5.2)$$

Eğer S_k 'nin tersi olsaydı $C = g(T)S_k^{-1}$ olmak üzere $(T - \beta I).g(T).S_k^{-1} = S_k^{-1}.g(T)(T - \beta I) = I$.

Yani $(T - \beta I)$ 'nin C tersi var, bu ise çelişkidir. Yani $p(T) - kI$ 'nin tersi yoktur. Yani $k \in \sigma(p(T))$

ii) $\beta \in \sigma(T)$ 'dir, $k = p(\beta)$, fakat $T - \beta I$ 'nin tersi var olsun. O zaman;

$$R(T - \beta I) \neq X \quad (5.3)$$

Açık dönüşüm teoremine göre (5.2) sağlanırsa $T - \beta I$ örtendir ve $T - \beta I$ 'nin sınırlı bir tersi vardır. Öyleyse $\beta \in \rho(T)$ olur. Bu ise kabulümüz olan $\beta \in \sigma(T)$ ile çelişir. (5.2) ifadesinden $S_k(X) = (T - \beta I)g(T)(X) \neq X$, $R(S_k) \neq X$ O halde $k \in \sigma(p(T))$ 'dir. Aksi durumda $k \in \rho(p(T))$ ise, lemma5.1'i $p(T)$ 'ye uygularsak $(p(T) - kI)^{-1}$ tüm X de tanımlı olur yani

$R(p(T) - kI) = X$, $R(S_k) = X$ bu ise $R(S_k) \neq X$ ile çelişir. Dolayısıyla $k \in \sigma(p(T))$ 'dir. İspat tamamlandı.

6. BANACH UZAYLARINDA SINIRLI LİNEER OPERATÖRLERİN SPEKTRUMU

Eğer X uzayı kompleks Banach uzayı ise λ kompleks sayısının regüler değer olması için daha basit tanım verilebilmektedir.

Tanım 6.1. X Banach uzayı, $T \in B(X)$ operatörü verilsin. Eğer bir $S \in B(X)$ operatörü için $S.T = T.S = I$ eşitliği sağlanıyorsa T 'ye tersinebilir operatör denir. Burada I birim matristir.

Teorem 6.1. X kompleks Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. O zaman T operatörü tersinebilirdir $\Leftrightarrow T$ birebir ve örtendir.

Kanıt.

($\Rightarrow$) T operatörü tersinebilir olsun. $S \in B(X)$ vardır ki $ST = TS = I$. Eğer $Tx = 0$ ise $x = Ix = STx = S0 = 0$, yani T birebirdir. Herhangi bir $y \in X$ için $y = Iy = T(Sy)$, yani T örtendir, çünkü herhangi $y \in X$ elemanı T operatörünün görüntü kümesindedir. ($\Leftarrow$) T birebir ve örten olsun. Açık Dönüşüm Teoremine göre $S \in B(X)$ vardır ki $ST = TS = I$, yani T dönüşümü tersinebilirdir.

Şimdi $T \in B(X)$, $\lambda \in \rho(T)$ ve $T_\lambda = T - \lambda I$, $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ olsun. Burada $\rho(T)$ rezolvent kümesi, R_λ ise rezolvent operatörüdür λ sayısı aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

R₁) R_λ vardır, yani T_λ operatörü birebirdir.

R₂) $R_\lambda: R(R_\lambda) \rightarrow X$ operatörü sınırlıdır.

R₃) R_λ 'nın tanım kümesi X de yoğundur.

Bu koşullar yukarıda verilen teoreme (Teorem 6.1) göre altta verilen tanım gibi değişebilir. Başka bir deyişle, λ 'nın regüler nokta olması için, yani rezolvent kümesinden olması için $T_\lambda = T - \lambda I$ operatörünün birebir ve örten olması gerekmektedir.

Teorem 6.2. X kompleks Banach uzayında $T \in B(X)$ olsun. O zaman

$$\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow T_\lambda \text{ tersinebilirdir.}$$

Kanıt.

$(\Leftarrow) T_\lambda$ tersinebilir ise Teorem 6.1. e göre R_λ vardır, $Im(T_\lambda) = X$ ve $S_\lambda \in B(X)$ vardır ki $S_\lambda T_\lambda = T_\lambda S_\lambda = I$ yani $R_\lambda = S_\lambda$ ve R_λ sınırlıdır.

$(\Rightarrow)$ Eğer R_1 ve R_3 koşulları sağlanıyorsa R_1 'den dolayı T_λ birebirdir. R_2 'e göre $Im(T_\lambda)$ kümesi X de yoğun olduğu için Teorem 3.3 e göre şu eşitlik sağlanır $R(T_\lambda) = \overline{R(T_\lambda)} = X$ ve T_λ örtendir ve R_3 'e göre $R_\lambda \in B(X)$ vardır ki $R_\lambda T_\lambda = T_\lambda R_\lambda = I$, yani T_λ tersinebilirdir.

Sonuç 6.1. X kompleks Banach uzayı, $T \in B(X)$ ise $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow T_\lambda$ dönüşümü birebir ve örtendir.

Bu sonuçtan dolayı $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow T_\lambda$ dönüşümü birebir değildir veya örten değildir. Bir $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı için T_λ dönüşümü birebir değilse bir $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ vektörü vardır ki $T_\lambda x = 0$ veya $Tx = \lambda x$. Böyle λ sayısına T 'nin özdeğeri, x vektörüne ise λ 'ya karşılık gelen özvektörü denildiğini hatırlayalım.

Örnek 6.1. $X = l^2$, $T \in B(l^2)$ lineer dönüşümü

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots)$$

şeklinde tanımlansın. $\lambda = 1$ ve $\lambda = -1$ sayıları özdeğerler, $(1, 0, 0, 0, \dots)$ ve $(0, 1, 0, 0, \dots)$ $\in l^2$ vektörleri ise karşılık gelen özvektörlerdir.

$$(1, -0, 0, -0, \dots) = 1. (1, 0, 0, 0, \dots),$$

$$(0, -1, 0, 0, \dots) = (-1). (0, 1, 0, 0, \dots).$$

Öte yandan, her $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -1$ için T_λ dönüşümü örtendir. Herhangi bir $y \in l^2$ seçelim. O halde $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, \dots)$ olduğundan $T_\lambda(x) = y$ sağlayan $x \in l^2$ vardır. Gerçekten,

$$(T - \lambda I)x = y,$$

$$(x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots) - (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \dots) = (y_1, y_2, y_3, y_4, \dots)$$

$$(1-\lambda) x_1 = y_1,$$

$$(-1-\lambda) x_2 = y_2,$$

$$(1-\lambda) x_3 = y_3,$$

$$(-1-\lambda) x_4 = y_4, \dots$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(\frac{1}{1-\lambda} y_1, \frac{1}{-1-\lambda} y_2, \frac{1}{1-\lambda} y_3, \frac{1}{-1-\lambda} y_4, \dots \right).$$

$x \in l^2$ 'dir, çünkü

$$\begin{aligned}
|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 + \dots &= \left| \frac{1}{1-\lambda} \right|^2 |y_1|^2 + \left| \frac{1}{1+\lambda} \right|^2 |y_2|^2 + \left| \frac{1}{1-\lambda} \right|^2 |y_3|^2 + \\
&\quad \left| \frac{1}{1+\lambda} \right|^2 |y_4|^2 + \dots = \\
&= \left| \frac{1}{1-\lambda} \right|^2 (|y_1|^2 + |y_3|^2 + \dots) + \left| \frac{1}{1+\lambda} \right|^2 (|y_2|^2 + |y_4|^2 + \dots) \leq \left| \frac{1}{1-\lambda} \right|^2 \|y\|^2 + \left| \frac{1}{1+\lambda} \right|^2 \|y\|^2 = \\
&= \left(\left| \frac{1}{1-\lambda} \right|^2 + \left| \frac{1}{1+\lambda} \right|^2 \right) \|y\|^2 < \infty.
\end{aligned}$$

$\lambda \neq 1, \lambda \neq -1$ ise T_λ dönüşümü birebirdir. Gerçekten, $(T - \lambda I)x = 0$ ise,

$$(x_1 - \lambda x_1, -x_2 - \lambda x_2, x_3 - \lambda x_3, -x_4 - \lambda x_4, \dots) = (0, 0, 0, 0, \dots),$$

$$(1 - \lambda)x_1 = 0, (1 + \lambda)x_2 = 0, (1 - \lambda)x_3 = 0, (1 + \lambda)x_4 = 0, \dots$$

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dots = 0$, yani $x = 0$. Dolayısıyla $\sigma(T) = \{-1, 1\}$.

$\sigma(T) = \{-1, 1\}$ olduğu başka bir yolla da gösterilebilir. $T^2 = I$ 'dir ve $\sigma(T^2) = \{1\}$ olur. O halde polinomlar için spektral dönüşüm teoremine göre $\sigma(T^2) = (\sigma(T))^2$ olduğu için $\sigma(T) \subset \{-1, 1\}$. Ancak $\{-1, 1\} \subset \sigma(T)$ olduğu için $\sigma(T) = \{-1, 1\}$ olmaktadır.

Örnek 6.2. $T \in B(l^2)$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ sağa kaydırma operatörünün özdeğeri bulunmamaktadır. Gerçekten $Tx = \lambda x \Rightarrow (0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$. Eğer $\lambda = 0$ ise $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = 0$, eğer $\lambda \neq 0$ ise $\lambda x_1 = 0$ 'dan $x_1 = 0$, $\lambda x_2 = x_1$ 'den $\lambda x_2 = 0$ ve $x_2 = 0$, ... Şimdi $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ olduğunu kanıtlayalım. $|\lambda| < 1$ olsun. T^* eşlenik operatörü şöyledir:

$$T^*(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

$T^*x = \lambda x$ ise $x_{n+1} = \lambda x_n$ ve $x_n = \lambda^{n-1}$ bir çözümdür ($\lambda \neq 0$) ve $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n} < \infty$, $\{x_n\} \in l^2$. Öte yandan, $\lambda = 0$ da özdeğerdir, çünkü $x = (1, 0, 0, \dots)$ vektörü $\lambda = 0$ a karşılık gelen özvektördür. Sonuçta $\{\bar{\lambda} : |\lambda| < 1\} \subset \sigma(T^*)$ ve $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subset \sigma(T)$.

$\{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ olduğu için $\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subset \sigma(T)$ ve $\sigma(T)$ kümesi kapalı olduğu için $\{\lambda : |\lambda| \leq 1\} \subset \sigma(T)$. Öte yandan $|\lambda| > 1$ ise $\|T\| = 1$ olduğu için $|\lambda| > \|T\|$ ve Teorem 5.9 a göre $\lambda \in \rho(T)$. Sonuç olarak ise $\sigma(T) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$ elde edilir.

Teorem 6.3. Eğer X kompleks Hilbert uzayı ve $T \in B(X)$ üniter operatör ise

$$\sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| = 1\}.$$

Kanıt.

T üniter ise $\|T\| = 1$ olduğundan $\sigma(T) \subset \{\lambda: |\lambda| \leq 1\}$. Öte yandan $\sigma(T^*) \subset \{\lambda: |\lambda| \leq 1\}$ (T^* operatörü de üniter olduğu için). Ancak $T^* = T^{-1}$ 'dir ve $\sigma(T) = \{\lambda^{-1}: \sigma(T^*)\} \subset \{\lambda: |\lambda| \geq 1\}$ olduğu için teoremden verilen eşitlik kanıtlanmış olur.

Örnek 6.3. $X = C[0,1]$ uzayı $[0,1]$ 'de tanımlı sürekli kompleks fonksiyonlar uzayı, $v(t) \in X$ fonksiyonu seçilsin ve $T: X \rightarrow X$ operatörü, $Tx = vx$ gibi tanımlansın. $0 \notin R(v(t))$ olduğunu varsayalım. Buna göre $\sigma(T)$ kümesini bulalım. $Tx = \lambda x$, $v(t)x(t) = \lambda x(t)$, $x(t) = \frac{1}{v(t)-\lambda}$ olduğu için ve $\lambda \notin R(v(t)) = \{v(t): t \in [0,1]\}$ için $x(t)$ sürekli olmaktadır. Her $\lambda \notin R(v(t))$ değeri T operatörünün özdeğeridir, çünkü $(T - \lambda I)x = 0$ denkleminin sıfırdan farklı $x(t) \in X$ çözümü vardır. λ 'nın bu değerlerinde T_λ dönüşümü örten olduğu için $\sigma(T) = R(v(t))$.

Örnek 6.4. $X = l^\infty$, $T: l^\infty \rightarrow l^\infty$ dönüşümü $x \rightarrow (x_2, x_3, \dots)$ gibi tanımlansın. $\sigma(T) = \{\lambda: |\lambda| \leq 1\}$ 'dir. Gerçekten $\|T\| = 1$ olduğu için $|\lambda| > 1$ ise $\lambda \in \rho(T)$. $|\lambda| \leq 1$ olsun ve $T_\lambda x = 0$ dan $(x_2 - \lambda x_1, x_3 - \lambda x_2, \dots) = (0, 0, 0, \dots)$. Buradan $x_2 = \lambda x_1$, $x_3 = \lambda x_2$, $x_4 = \lambda x_3$, ... çıkar.

Eğer $x_1 = \alpha \neq 0$ ise $x = (\alpha, \alpha\lambda, \alpha\lambda^2, \dots) \neq 0$ vektörü bir özvektördür. Bundan dolayı, kapalı birim diskteki her λ sayısı özdeğer olmaktadır ve $\sigma(T) = \{\lambda: |\lambda| \leq 1\}$ dir.

7. ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN SPEKTRUMU

Kompleks H Hilbert uzayında tanımlı T operatörü için $T = T^*$ ise T 'ye özeşlenik operatör denildiğini hatırlayalım.

Teorem 7.1. $T: H \rightarrow H$ sınırlı lineer operatörü verilsin. O zaman $T^* = T \Leftrightarrow$ Her $x \in H$ elemanı için $\langle Tx, x \rangle$ sayısı gerçeldir.

H kompleks Hilbert uzayı ve $T: H \rightarrow H$ sınırlı lineer operatör olsun. Eğer T 'nin özdeğeri varsa aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 7.2. $T: H \rightarrow H$ sınırlı lineer operatör ve $T^* = T$ olsun. O zaman

- a) T 'nin özdeğerleri (eğer varsa) gerçeldir.
- b) Farklı özdeğerlere karşı gelen özvektörler ortogonaldır.

Bu teoremin kanıtı sonlu boyutlu uzaylarda matrisler için verilen kanıtla benzer yolla yapılmaktadır.

Teorem 7.3. $T^* = T$ ise λ sayısının $\rho(T)$ rezolvent kümesinde olması için gerek ve yeter koşul $T_\lambda = T - \lambda I$ olmak üzere öyle $c > 0$ sayısı vardır ki her $x \in H$ için $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$ koşulunun sağlanmasıdır.

Kanıt.

Eğer $\lambda \in \rho(T)$ ise $R_\lambda = T_\lambda^{-1}: H \rightarrow H$ var ve sınırlıdır. $\|R_\lambda\| = k > 0$ ve her $x \in H$ için $\|x\| = \|R_\lambda T_\lambda x\| \leq \|R_\lambda\| \|T_\lambda x\| = k \|T_\lambda x\|$ ($c = \frac{1}{k}$).

Tersine ($\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$) sağlansın. λ sayısının rezolventte olduğunu kanıtlayalım. Bunun için aşağıdakileri kanıtlayalım.

- 1) $T_\lambda: H \rightarrow T_\lambda(H)$ birebir ve örtendir,
- 2) $T_\lambda(H)$ alt uzayı H de yoğundur,
- 3) $T_\lambda(H)$ kapalıdır.

Buradan $T_\lambda(H) = H$ (örtelik) ve Sınırlı Ters Dönüşüm Teoremine göre $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ dönüşümü sınırlı olacaktır.

- 1) $T_\lambda x_1 = T_\lambda x_2$ ise $0 = \|T_\lambda x_1 - T_\lambda x_2\| = \|T_\lambda(x_1 - x_2)\| \geq c\|x_1 - x_2\|$ ve $x_1 = x_2$ olduğu ortaya çıkar.

2) $x_0 \perp \overline{T(H)}$ ise $x_0 = 0$ olduğunu gösterelim. $x_0 \perp T(H)$ 'dir ve her $x \in H$ için $0 = \langle T_\lambda x, x_0 \rangle = \langle Tx, x_0 \rangle - \lambda \langle x, x_0 \rangle = \langle x, Tx_0 \rangle - \langle x, \bar{\lambda}x_0 \rangle = \langle x, Tx_0 - \bar{\lambda}x_0 \rangle$, $x \in H$ keyfi olduğundan $Tx_0 = \bar{\lambda}x_0$. Buradan $x_0 = 0$ 'dır. Eğer $x_0 \neq 0$ olsaydı $\bar{\lambda}$ sayısı T 'nin özdeğeri olurdu. λ gerçel olduğu için buradan $\lambda = \bar{\lambda}$ ve $x_0 - \lambda x_0 = T_\lambda x_0 = 0$ ve (1)'e göre $0 = \|T_\lambda x\| \geq c\|x_0\| > 0$ çelişkisi çıkardı. Yani $x_0 = 0$ 'dır. x_0 keyfi olduğu için $(\overline{T_\lambda(H)})^\perp = \{0\}$. Bilinen teoreme göre $\overline{T_\lambda(H)} = H$, yani $\overline{T_\lambda(H)}$ altuzayı H 'de yoğundur.

3) $y \in \overline{T_\lambda(H)}$ olsun, $y \in T_\lambda(H)$ olduğunu kanıtlayalım. y elemanı kapanıştan olduğu için $y_n \in T_\lambda(H)$ dizisi vardır ki $y_n \rightarrow y$ sağlanmaktadır. $x_n \in H$ olmak üzere $y_n = T_\lambda x_n$ eşitliği geçerlidir ve

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c} \|T_\lambda(x_n - x_m)\| = \frac{1}{c} \|y_n - y_m\|.$$

$\{y_n\}$ dizisi yakınsak olduğu için Cauchy dizisidir. $\{x_n\}$ de Cauchy dizisidir ve yakınsaktır $x_n \rightarrow x$ ve $y_n = T_\lambda x_n \rightarrow T_\lambda x$. Limitin tekliğinden $T_\lambda x = y \in T_\lambda(H)$, yani $T(H)$ kapalıdır. $T(H) = \overline{T(H)} = H$ sağlanıyor, yani R_λ operatörü tüm H uzayında tanımlı ve sınırlıdır ve $\lambda \in \rho(T)$ 'dir ve λ rezolvent kümesindedir.

Eğer T sınırlı lineer operatörü özeşlenik ise onun $\sigma(T)$ spektrumu gerçeldir. Öte yandan $\sigma(T)$ 'nin kompakt olduğu da bilinmektedir. Ancak böyle operatörler için daha fazlası söylenebilmektedir.

Teorem 7.4. $T: H \rightarrow H$ sınırlı özeşlenik lineer operatör ise $\sigma(T)$ spektrumu $[m, M]$ kapalı gerçel aralıktadır. Burada

$$M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle,$$

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle,$$

Kanıt.

$\lambda \in \sigma(T)$ ise λ gerçeldir. $c > 0$ olmak üzere $t = (M + c)$ sayısının $\rho(T)$ resolvent kümesinde olduğunu gösterelim. Her $x \neq 0$ ve $v = \|x\|^{-1}x$ için $x = \|x\|v$, $\|v\| = 1$ buradan hareketle $\langle Tx, x \rangle = \langle T(\|x\|v), \|x\|v \rangle = \|x\|^2 \langle Tv, v \rangle \leq \langle x, x \rangle M$ 'dir. $-\langle Tx, x \rangle \geq -\langle x, x \rangle M$ ve Cauchy-Schwartz eşitsizliğine göre $\|T_t x\| \cdot \|x\| \geq -\langle T_t x, x \rangle = -\langle (T - tx), x \rangle = -\langle Tx, x \rangle + t \langle x, x \rangle \geq (-M + t) \|x\|^2 = c\|x\|^2$, sonuç olarak $\|T_t x\| \geq c\|x\|$ buradan (teorem...) göre $t \in \rho(T)$. Her $t < m$ sayısı için de

$t \in \rho(T)$ olduğu benzer yolla kanıtlanmaktadır.

Teorem 7.5. $T: H \rightarrow H$ sınırlı özeşlenik lineer operatör ise $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$

Teorem 7.6. $H \neq \{0\}$ ve T operatörü önceki teoremin koşullarını sağlıyorsa m ve M sayıları T 'nin spektral değerleridir, yani $m \in \sigma(T)$ ve $M \in \sigma(T)$.

Teorem 7.7. $T: H \rightarrow H$ sınırlı özeşlenik lineer operatör ise $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Kanıt.

Olmayana ergi yöntemini uygulayıp $\sigma_r T \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. $\lambda \in \sigma_r T$ olsun. Tanıma göre $T_\lambda = T - \lambda I$ 'nin tersi vardır, ancak T_λ^{-1} tersinin $R(T_\lambda^{-1})$ tanım kümesi H uzayında yoğun değildir, yani $\overline{R(T_\lambda^{-1})} \neq H$. Hilbert uzayında izdüşümle ilgili temel teoreme göre $y \neq 0$, $y \in H$ vardır ki y elemanı $R(T_\lambda^{-1})$ 'e diktir. Öte yandan $R(T_\lambda^{-1})$ alt uzayı T_λ nın değer kümesidir.

Bundan dolayı her $x \in H$ için $\langle T_\lambda x, y \rangle = \langle (T - \lambda I)x, y \rangle = 0$, $\langle x, (T - \lambda I)^* y \rangle = 0$, $\langle x, (T^* - \bar{\lambda} I)y \rangle = 0$, $\langle x, (T - \lambda I)y \rangle = 0$ 'dır. (Burada $T = T^*$ ve λ 'nın gerçel olduğu kullanıldı.) $x = T_\lambda y$ alırsak $\|T_\lambda y\|^2 = 0$, $T_\lambda y = 0$, $Ty - \lambda y = 0$ bulunur. $y \neq 0$ olduğu için buradan λ 'nın özdeğer olduğu ortaya çıkar. Bu ise $\lambda \in \sigma_r T$ ile çelişir.

8. POLİNOMİAL MATRİSLERİN SPEKTRUMU

Burada polinomial biçimde verilmiş sonlu boyutlu sınırlı lineer operatörler demetinin spektrumu ele alınacaktır. Başka bir deyişle $\wp \subset \mathbb{C}$ açık küme ve $J = [0,1]$ olmak üzere

$$K(\lambda) = \lambda^k K_k + \lambda^{k-1} K_{k-1} + \dots + \lambda K_1 + K_0 \quad (8.1)$$

matrisler ailesi verilsin. Burada K_i ($i = 0, 1, \dots, k$) matrisleri $n \times n$ boyutlu gerçel matrislerdir. Bu ailenin spektrumunun $\wp$ kümesinde bulunması için koşul verilecektir.

Tanım 8.1. $n \times n$ biçiminde verilen matrislerin bir κ açık kümesi ve $g: R^{n \times n} \rightarrow R$ dönüşümü verilsin. Eğer her $K \in \kappa$ için $g(K) \neq 0$ ve her $K \in \partial\kappa$ için $g(K) = 0$ ise g dönüşümüne κ ailesini koruyan dönüşüm(guardian map) denir. Burada $R^{n \times n}$ sembolü $n \times n$ boyutlu tüm gerçel matrisler ailesini göstermektedir.

Örnek 8.1. $\wp$ kümesi sol açık yarı düzlem (Hurwitz bölgesi), κ ailesi ise spektrumu $\wp$ 'de olan $n \times n$ matrislerin ailesi ise $g(K) = \det K \oplus K$, burada $\oplus$ sembolü Kronecker toplamını göstermektedir.

Örnek 8.2. $\wp$ kümesi açık birim disk (Schur bölgesi) ise $g(K) = \det (K \otimes K - I \otimes I)$ olur. $n \times n$ boyutlu matrislerin κ açık kümesi verilsin ve $g(K)$ bu ailenin koruyan dönüşümü olsun. $f: R^{n \times n} \rightarrow R^{m \times m}$ matris fonksiyonu verilsin ve $f(K)$ matrisinin girdileri K 'nin girdilerinin polinom fonksiyonları olsun. Örneğin, $f(K) = \det(K \oplus K)$, $f(K) = \det(K \otimes K - I \otimes I)$ fonksiyonları bu koşulu sağlamaktadır.

Tanım 8.2. $f(K(\lambda)) = \sum_{i=0}^N \lambda^i F_i$ gösterimine $f(K(\lambda))$ 'nın matris gösterimi denir. Burada F_i 'ler uygun boyutlu matrislerdir.

Tanım 8.3. Eğer $g(K) = \det f(K)$ ise g 'nin polinomial determinant gösterimi vardır denir.

Örnek 8.3. $K(\lambda) = K_0 + \lambda K_1$, $F(K) = K^2$ ve $K_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ise

$$f(K(\lambda)) = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 6 \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

bulunmaktadır.

Teorem 8.1. (8.1) ailesi ve $\wp \subset \mathbb{C}$ açık bölgesi verilsin. Spektrumu $\wp$ 'de olan tüm $n \times n$ matrisler ailesinin $\nu(K) = \det f(K)$ gibi polinomial determinant gösterimi mevcut olsun ve $F_0, F_1, \dots, F_N$ matrisleri $f(K(\lambda))$ 'yı temsil eden matrisler olsun. O zaman $K(\lambda)$ ailesinin spektrumunun $\wp$ bölgesinde olması için gerek ve yeter koşul K_0 'ın spektrumunun $\wp$ 'de olması ve

$$M(\wp) = \begin{bmatrix} 0 & I & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -F_0^{-1}F_N & -F_0^{-1}F_{N-1} & \cdots & -F_0^{-1}F_1 \end{bmatrix}$$

blok matrisinin $[1, \infty)$ aralığında gerçel özdeğerinin bulunmamasıdır. Burada $N = 1$ için $M(\wp) = -F_0^{-1}F_1$ olarak tanımlanmaktadır.

Kanıt.

Matrislerin özdeğerlerinin sürekliliğine ve g dönüşümünün tanımına göre $\sigma(K(\lambda)) \subset \wp$ olması için gerek ve yeter koşul her $\lambda \in J$ için $\nu(K(\lambda)) \neq 0$ olmasıdır. Son koşulun ise $M(\wp)$ matrisinin $[1, \infty)$ 'da özdeğerinin olmamasına denk olduğunu gösterelim. $\sigma(K_0) \subset \wp$ olduğu için $\lambda \in (0, 1]$ almamız yeterlidir. $\lambda=0$ için $K(\lambda)$ ailesi $\wp$ - kararlı olmalıdır, eğer olmazsa probleme devam etmenin anlamı yoktur. $g(K_0) = \det(F_0) \neq 0$ olduğu için $f(K(\lambda))$ 'yı şöyle yazalım:

$$f(K(\lambda)) = F_0(I + \sum \lambda^i F_0^{-1}F_i),$$

buradan

$$\nu(K(\lambda)) = \det f(K(\lambda)) = \det F_0 \cdot \det(I + \sum_{i=1}^N \lambda^i F_0^{-1}F_i).$$

O halde

$$\lambda \in (0, 1] \text{ için } \det(I + \sum_{i=1}^N \lambda^i F_0^{-1}F_i) \neq 0 \quad (8.2)$$

koşuluna varılmaktadır. $M(D)$ 'nin karakteristik polinomu

$$\det(t.I - M(D)) = \det(t^N I + \sum_{i=0}^{N-1} t^i F_0^{-1}F_{N-i}) \quad (8.3)$$

gibidir. Bu eşitlik kanıtın bitiminde doğrulanmıştır. (8.2)'de $\lambda = \frac{1}{t}$ dönüşümü yaparsak $\lambda \in (0, 1]$ için $t \in [1, \infty)$ olmaktadır ve (8.2) koşulu

$$\det(t^N I + \sum_{i=0}^{N-1} t^i F_0^{-1}F_{N-i}) \neq 0$$

koşuluna dönüşmektedir. Son determinant ise $M(D)$ matrisinin $\det(t.I - M(D))$ karakteristik polinomu olduğundan bu determinantın sıfırdan farklı olması $M(D)$ matrisinin $[1, \infty)$ aralığında özdeğerinin bulunmamasına eşdeğerdir. Sonuçta

$\nu(K(\lambda)) \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $M(D)$ matrisinin $t \geq 1$ özdeğerinin bulunmamasıdır.

(8.3)'ün kanıtı : A, B, C ve D uygun boyutlu matrisler olsun. Bu durumda $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)$ 'dır.

Bu eşitlikten yararlanarak $\det(t.I - M(D)) = \det(t^N I + \sum_{i=0}^{N-1} t^i F_0^{-1} F_{N-i})$ olduğunu göstereyim.

$$M(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & I & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -F_0^{-1}F_N & -F_0^{-1}F_{N-1} & \cdots & -F_0^{-1}F_1 \end{bmatrix}$$

ve

$$|tI - M| = \begin{bmatrix} tI & -I & \cdots & 0 \\ 0 & tI & -I & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ -F_0^{-1}F_N & -F_0^{-1}F_{N-1} & \cdots & -F_0^{-1}F_1 \end{bmatrix}$$

matrisinde

$$A = t.I, B = [-I \ \cdots \ 0], C = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -F_0^{-1}F_N \end{bmatrix} \text{ ve } D = \begin{bmatrix} tI & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -F_0^{-1}F_{N-1} & \cdots & tI + F_0^{-1}F_1 \end{bmatrix}$$

blokları seçelim.

1.adım:

$$\begin{aligned} & \det(t.I) \det \left(\begin{bmatrix} tI & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -F_0^{-1}F_{N-1} & \cdots & tI + F_0^{-1}F_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -F_0^{-1}F_N \end{bmatrix} (t.I)^{-1} [-I \ \cdots \ 0] \right) = \\ & = \det(t.I) \cdot \det \left(\begin{bmatrix} tI & -I & \cdots & 0 \\ 0 & tI & -I & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ -F_0^{-1}F_N & -F_0^{-1}F_{N-1} & \cdots & -F_0^{-1}F_1 \end{bmatrix} + (t.I)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -F_0^{-1}F_N & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ & = \det(t.I) \cdot \det \left(\begin{bmatrix} tI & \cdots & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -I \\ (tI)^{-1}F_0^{-1}F_N + -F_0^{-1}F_{N-1} & \cdots & tI + F_0^{-1}F_1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

2.adım:

$$\det \begin{bmatrix} tI & \cdots & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -I \\ (tI)^{-1}F_0^{-1}F_N + -F_0^{-1}F_{N-1} & \cdots & tI + F_0^{-1}F_1 \end{bmatrix} \text{ determinantında}$$

$$A = (t.I), B = [-I \quad \cdots \quad 0], C = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ (tI)^{-1}F_0^{-1}F_N + -F_0^{-1}F_{N-1} \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$D = \begin{bmatrix} tI & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -F_0^{-1}F_{N-2} & \cdots & tI + F_0^{-1}F_1 \end{bmatrix} \text{ seçimi yaparsak ilk eşitliğe göre}$$

$$\det(t.I)^2 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} tI & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -F_0^{-1}F_{N-2} & \cdots & tI + F_0^{-1}F_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ (tI)^{-1}F_0^{-1}F_N + -F_0^{-1}F_{N-1} \end{bmatrix} (t.I)^{-1}B \right)$$

$$=$$

$$\det(t.I)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} tI & \cdots & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -I \\ (tI)^{-2}F_0^{-1}F_N + (tI)^{-1}F_0^{-1}F_{N-1} + F_0^{-1}F_{N-2} & \cdots & tI + F_0^{-1}F_1 \end{bmatrix}$$

ve bu şekilde devam ettirirsek

(N-1). adım:

$$\det(t.I)^{N-2} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} tI & -I \\ (tI)^{-(N-2)}F_0^{-1}F_N + (tI)^{-(N-3)}F_0^{-1}F_{N-1} + F_0^{-1}F_2 & tI + F_0^{-1}F_1 \end{bmatrix} \right)$$

çarpımı elde edilir.

Bu determinantta $A = (t.I)$, $B = -I$, $C = (tI)^{-(N-2)}F_0^{-1}F_N + (tI)^{-(N-3)}F_0^{-1}F_{N-1} + F_0^{-1}F_2$ ve $D = tI + F_0^{-1}F_1$ seçersek

$$\det \left(\begin{bmatrix} tI & -I \\ (tI)^{-(N-2)}F_0^{-1}F_N + (tI)^{-(N-3)}F_0^{-1}F_{N-1} + F_0^{-1}F_2 & tI + F_0^{-1}F_1 \end{bmatrix} \right) = \det(t.I).$$

$$\det(tI + F_0^{-1}F_1 - ((tI)^{-(N-2)}F_0^{-1}F_N + (tI)^{-(N-3)}F_0^{-1}F_{N-1} + F_0^{-1}F_2) \cdot (t.I)^{-1} \cdot (-I)) =$$

$$= \det(t.I) \cdot \det((tI)^{-(N-1)}F_0^{-1}F_N + (tI)^{-(N-2)}F_0^{-1}F_{N-1} + (t.I)^{-1}F_0^{-1}F_2 + F_0^{-1}F_1 + t.I)$$

ve sonuç olarak

$$\det(t.I)^{N-1} (\det((tI)^{-(N-1)}F_0^{-1}F_N + (tI)^{-(N-2)}F_0^{-1}F_{N-1} + (t.I)^{-1}F_0^{-1}F_2 + F_0^{-1}F_1 + t.I)) =$$

$$= (F_0^{-1}F_N + tF_0^{-1}F_{N-1} + (t.I)^{N-2}F_0^{-1}F_2 + t^{N-1}F_0^{-1}F_1 + t^N I) =$$

$$= (t^N I + \sum_{i=0}^{N-1} t^i F_0^{-1}F_{N-i})$$

bulunur.

Örnek 8.4. $K_0 = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $K_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ve $\wp$ bölgesi Hurwitz bölgesi

olsun. $\upsilon(K) = \det K \oplus K$ ve $f(K(\lambda)) = K(\lambda) \otimes K(\lambda) =$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 6 & 6 & 0 \\ 2 & -9 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & -8 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M(\wp) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -F_0^{-1}F_2 & -F_0^{-1}F_1 \end{bmatrix}$$

olup bu matris 8×8 boyutludur ve $\sigma(K_0) \subset \wp$ 'dir. Bu matrisin özdeğerlerinden 6 tanesi kompleks olup 1 tanesi sıfırdır. Sıfır çift katlı özdeğerdir ve bundan dolayı her $\lambda \in [0,1]$ için $K(\lambda) = K_0 + \lambda K_1 + \lambda^2 K_2$ için $\sigma(K(\lambda)) \subset \wp$.

.

9. AFİN AİLENİN SPEKTRUMU

Bu bölümde kompleks Hilbert uzayında tanımlı lineer sınırlı operatörler ailesinin spektrumu ele alınmaktadır. Aile spektrumunun boş veya tüm kompleks düzlem olması için koşullar verilecektir.

Matematiksel fiziğin bazı problemlerinde(örneğin, kuantum teorisi, ulaşım denklemleri vs.) A ve B operatörleri sınırlı lineer operatörler olmak üzere

$$L(\lambda) = A - \lambda B \quad (9.1)$$

ailesinin spektrumunun araştırılması önemlidir.

Tanım 9.1. A ve B kompleks H Hilbert uzayında sınırlı lineer operatörler olsun.

$$L(\lambda) = A - \lambda B$$

operatör demetini alalım. $L(\lambda)$ 'nin spektrumu şöyle tanımlanmaktadır.

$$\sigma(L(\lambda)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : L(\lambda) \text{ operatörü } B(H) \text{ uzayında tersinir değil}\}.$$

Eğer B birim operatör ise $\sigma(L(\lambda)) = \sigma(A)$ 'dır ve bu küme aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır.

- 1) $\sigma(L(\lambda)) \neq \emptyset$.
- 2) Kapalı ve sınırlıdır (yani kompaktır).
- 3) $\lambda \in \sigma(L(\lambda))$ ise $|\lambda| < \|A\|$ eşitsizliği sağlanmaktadır.

Eğer $B \neq I$ ise bu özellikler sağlanmayabilir.

Eğer A operatörü kapalı sınırsız operatör ise $\sigma(T)$ kümesi boş küme veya tüm kompleks düzlem olabilmektedir. Bundan dolayı A ve B 'nin sınırlı olması durumunda $\sigma(L(\lambda))$ spektrumunun boş veya tüm düzlem olması için koşulları ele alacağız.

Tanım 9.2. Bir $T: H \rightarrow H$ sınırlı lineer operatörü verilsin. Eğer $T^n \equiv 0$ olacak biçimde $n \in \{1, 2, \dots\}$ sayısı mevcut ise T 'ye nilpotent operatör denir. Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$ ise T 'ye quasinilpotent operatör denir.

Teorem 9.1. X uzayı bir Banach uzayı olmak üzere $T: X \rightarrow X$ lineer operatörü quasinilpotent ise $I - T$ operatörü tersinirdir.

Kanıt.

$$I + T + T^2 + \dots + T^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

operatör serisini ve normlardan oluşan

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|$$

Sayı serisini alalım. $\sqrt[n]{a_n} = \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$ olduğu için yeteri kadar büyük n 'ler için $\sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{2}$ olur ve kök testine göre yukarıdaki sayı serisi ve X Banach uzayı olduğu için $\sum T^n$ serisi yakınsaktır. Bundan dolayı $(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \dots$ tersi vardır ve bu ters operatör serisinin toplamıdır.

Teorem 9.2. X uzayı bir Banach uzayı, $T: X \rightarrow X$ quasinilpotent operatör ise $\sigma(T) = \{0\}$ olmaktadır.

Kanıt.

$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda I - T \text{ birebir veya örten değil}\}$ olduğunu hatırlayalım. Teorem 5.9 a göre spektral yarıçap sıfırdır:

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$$

ve $\sigma(T) \neq \emptyset$ olup kompakt küme olduğu için $\sigma(T) = \{0\}$.

Teorem 9.3. H kompleks Hilbert uzayı, $A \in B(H)$, $B \in B(H)$ olsun. O zaman

$$\sigma(L(\lambda)) = \emptyset \Leftrightarrow A \text{ tersinirdir ve } A^{-1}B \text{ (veya } BA^{-1}) \text{ quasinilpotenttir.}$$

Kanıt.

$\Leftarrow$) A operatörü tersinir ve $A^{-1}B$ quasinilpotent olsun. $\sigma(L(\lambda)) = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $\lambda = 0 \notin \sigma(L(\lambda))$ 'dır, çünkü $\lambda = 0$ için $A - \lambda B = A$ ve A tersinirdir. Şimdi $\lambda \neq 0$ alalım. $A - \lambda B = A(I - \lambda A^{-1}B) = \lambda A(\frac{1}{\lambda}I - A^{-1}B)$ ve $A^{-1}B$ quasinilpotent olduğundan Teorem 9.2 ye göre her $t \neq 0$ için $(t.I - A^{-1}B)$ tersinirdir. λA operatörü de tersinir olduğundan $\lambda \neq 0$ için $\lambda \notin \sigma(L(\lambda))$. Yani $\sigma(L(\lambda)) = \emptyset$.

$\Rightarrow$) $\sigma(L(\lambda)) = \emptyset$ olsun. $\lambda = 0 \notin \sigma(L(\lambda))$ olduğu için $A - \lambda B = A$ tersinirdir. $\lambda \neq 0$ değeri için de $\lambda \notin \sigma(L(\lambda))$ sağlandığından

$$A - \lambda B = \lambda A(\frac{1}{\lambda}I - A^{-1}B)$$

operatörü tersinirdir. λA tersinir olduğu için her $t \neq 0$ için $(t.I - A^{-1}B)$ tersinirdir, yani $\sigma(A^{-1}B) = \{0\}$ ve

$$0 = r(A^{-1}B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A^{-1}B)^n\|^{\frac{1}{n}},$$

dolayısıyla $A^{-1}B$ quasinilpotenttir.

Eğer $(A - \lambda B) = (I - \lambda BA^{-1})$ A gösterimin kullanırsak BA^{-1} in de quasinilpotent olduğu ortaya çıkmaktadır.

Tanım 9.3. $L(\lambda)$ ailesi verilsin.

$$\sigma_p(L(\lambda)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda B \text{ operatörü birebir değil}\}$$

kümesine $L(\lambda)$ ailesinin noktasal spektrumu (point spectrum) denir.

Eğer $N(A) \cap N(B) \neq \{0\}$ ise $x \neq 0$, $x \in H$ vardır ki $Ax = Bx = 0$. Yani her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $(A - \lambda B)x = 0$ ve $A - \lambda B$ birebir değil. Bundan dolayı $\sigma_p(L(\lambda)) = \mathbb{C}$. Öte yandan $\sigma_p(L(\lambda)) \subset \sigma(L(\lambda))$ olduğu için $\sigma(L(\lambda)) = \mathbb{C}$ 'dir. Ancak bu eşitliklerin tersi doğru değildir.

Örnek 9.1. $H = \mathbb{C}^2$ uzayında

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ise

$A - \lambda B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$ ve bu matris her λ için tersinir değildir. Yani $\sigma(L(\lambda)) = \mathbb{C}$ ancak $N(A) = \{(x_1, x_2)^T : x_1 = 0\}$, $N(B) = \{(x_1, x_2)^T : x_2 = 0\}$, $N(A) \cap N(B) = \{0\}$.

Lemma 9.1. A ve B operatörleri $B(H)$ uzayından olup B tersinir ise yeteri kadar küçük $\varepsilon > 0$ sayısı için $\varepsilon A + B$ operatörü de tersinirdir.

Kanıt.

Teorem 5.6 da T yerine $I - T$ alalım. O zaman $\|I - T\| < 1$ ise $(I - (I - T))^{-1} = T^{-1}$ vardır. $T = \varepsilon AB^{-1} + I$ alırsak $I - T = -\varepsilon AB^{-1}$ 'dir ve $\|I - T\| = \varepsilon \|AB^{-1}\| < 1$ ise yani $\varepsilon < \frac{1}{\|AB^{-1}\|}$ ise $T = \varepsilon AB^{-1} + I$ tersinirdir. Sonuçta ε un yukarıdaki değerleri için $TB = (\varepsilon AB^{-1} + I)B = \varepsilon A + B$ tersinirdir.

Teorem 9.4. $\dim H \geq 2$ olmak üzere H kompleks Hilbert uzayı olsun ve

1) $A \in B(H)$, $B \in B(H)$ ve B operatörü (veya A operatörü) normal operatör olsun.

2) $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$ sayısı vardır ki $BA = \mu AB$ sağlansın.

O zaman

$$\sigma_p(L(\lambda)) = \mathbb{C} \Leftrightarrow N(A) \cap N(B) \neq \{0\}.$$

Kanıt.

$\sigma_p(L(\lambda)) = \mathbb{C}$ olduğunu varsayalım. $0 \in \sigma_p(L(\lambda))$ sayısı için $A - \lambda B = A$ ve A birebir değildir. O zaman $N(A) \neq \emptyset$. $\lambda_n \in \sigma_p(L(\lambda)) \setminus \{0\}$, $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ sayı dizisi alalım. $A - \lambda_n B$ birebir olmadığı için $\frac{1}{\lambda_n} A - B$ de birebir değildir. $\frac{1}{\lambda_n} \rightarrow 0$ olduğu için Lemma 9.1 e göre B operatörü de birebir değil ve $N(B) \neq \{0\}$.

Şimdi olmayana ergi yöntemiyle $N(A) \cap N(B) \neq \{0\}$ olduğunu varsayalım. $N(B)$ altuzayı A 'nın invaryant(değişmez) altuzaylarıdır. Yani:

- a) $A(N(B)) \subset N(B)$
- b) $A(N(B)^\perp) \subset N(B)^\perp$

$y \in A(N(B))$ ise $y = Ax$, $x \in N(B)$ ve $Bx = 0$. Buradan $By = BAx = \mu ABx = \mu A0 = 0$, yani a) sağlanır. Sonuç 4.2 ye e göre b) yerine $A(\overline{R(B)}) \subset \overline{R(B)}$ kanıtlanmalıdır. $y \in A(\overline{R(B)})$ ise, $y \in Az$, $z \in \overline{R(B)}$. Öyle $z_n \in R(B)$ vardır ki $z_n \rightarrow z$ ve $x_n \in H$ vardır ki $z_n = Bx_n$ 'dir. $Az_n = ABx_n = \frac{1}{\mu} B A x_n = B(A(\frac{1}{\mu} x_n)) \in R(B)$. $Az_n \rightarrow Az = y$ olduğu için $y \in \overline{R(B)}$ ve b) de kanıtlanmış olur.

$\overline{R(B)}$ altuzayı B operatörü için invaryant altuzaydır. Bunu da kanıtlayalım.

- a) $B(\overline{R(B)}) \subset \overline{R(B)}$,
- b) $B(\overline{R(B)})^\perp \subset \overline{R(B)}^\perp$.

$B(\overline{R(B)}) \subset R(B) \subset \overline{R(B)}$ olduğu için a) sağlanır. İç çarpımın sürekliliğinden $R(B)^\perp = \overline{R(B)}^\perp$ ve Teorem 4.4 e göre $N(B) = R(B)^\perp = \overline{R(B)}^\perp$ olduğundan b) nin kanıtı için $B(N(B)) \subset N(B)$ kanıtlanmalıdır. $B(N(B)) = \{0\}$ olduğu için b) de kanıtlanmış olur.

Böylece A ve B operatörleri $H = N(B)^\perp \oplus N(B)$ ayrışımına göre

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Bu ayrışımın anlamları şöyledir. Hilbert uzaylarının bilinen özelliğine göre eğer Y bir kapalı altuzay ise $H = Y^\perp \oplus Y$ 'dir yani her $x \in H$ vektörü $y \in Y$, $z \in Y^\perp$

olmak üzere tek biçimde $x = y + z$ biçiminde yazılabilmektedir. Bundan dolayı, $N(B)$ ve $\overline{R(B)}$ altuzayları kapalı oldukları için $H = N(B)^\perp \oplus N(B) = \overline{R(B)} \oplus \overline{R(B)}^\perp$ yazılabilir. $x_1 \in N(B)^\perp$, $x_2 \in N(B)$, $y_1 \in \overline{R(B)}$ ve $y_2 \in \overline{R(B)}^\perp$ olmak üzere $x = x_1 + x_2$, $\tilde{x} = y_1 + y_2$ ise $A_1: N(B)^\perp \rightarrow N(B)^\perp$, $A_2: N(B) \rightarrow N(B)$, $B_1: \overline{R(B)} \rightarrow \overline{R(B)}$, $B_2: \overline{R(B)}^\perp \rightarrow 0$ operatörleri için,

$$A_1 x_1 = A x_1,$$

$$A_2 x_2 = A x_2,$$

$$B_1 y_1 = B y_1,$$

$$B_2 y_2 = 0$$

eşitlikleri sağlanmaktadır.

$A_2: N(B) \rightarrow N(B)$ operatörü birebirdir. Gerçekten, $t \in N(B)$ olmak üzere $A_2 t = 0$ ise $A(t) = 0$ ve $B(t) = 0$ ve $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ olduğundan $t = 0$.

$B_1: \overline{R(B)} \rightarrow \overline{R(B)}$ operatörü de birebirdir. Gerçekten, $t \in \overline{R(B)}$ olmak üzere $B_1 t = 0$ ise $B t = B_1 t = 0$, yani $t \in N(B)$. Öte yandan $N(B) = \overline{R(B)}^\perp$ olduğu için $t \in \overline{R(B)}^\perp$. Dolayısıyla $t = 0$. Bundan dolayı, $\lambda \in C/\{0\}$ için $A - \lambda B$ birebir değil $\Leftrightarrow A_1 - \lambda B_1$ birebir değil $\Leftrightarrow B_1(B_1^{-1}A_1 - \lambda I)$ birebir değil $\Leftrightarrow C/\{0\} \subset \sigma_p(B_1^{-1}A_1)$ sonucu ise $\sigma_p(B_1^{-1}A_1)$ 'in sınırlılığıyla çelişmektedir. Dolayısıyla $N(A) \cap N(B) = \emptyset$.

Eğer B normal operatör değil ve A normal operatör ise A ve B 'nin yerleri değiştirilerek sonuca varılmaktadır.

$\Leftrightarrow N(A) \cap N(B) = \{0\}$ ise $x \in H$, $x \neq 0$ vardır ki $Ax = Bx = 0$. Buradan her $\lambda \in C$ için $(A - \lambda B)x = Ax - \lambda Bx = 0$ yani her $\lambda \in C$ için $L(\lambda)$ birebir değil, buradan $\sigma_p(L(\lambda)) = C$.

A ve B operatörlerinin her ikisi normal ise $|\mu| = 1$ olduğu gösterilmiştir, yani A ve B normal operatörler olup $BA = \mu AB$ ise $|\mu| = 1$ olmalıdır. A ve B operatörlerinin bir çarpına göre komutatiflik koşulunu kaldırırsak yukarıdaki teorem geçersizdir. Gerçekten A ve B matrisleri şöyle tanımlansın:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

B matrisi simetrik olup her $\mu \in C$ için

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \mu \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mu BA$$

doğrudur. Öte yandan $A - \lambda B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$ ve $\lambda A - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda - 1 \end{bmatrix}$. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için bu matrislerin determinantları sıfır oldukları için tersinir değiller, yani $\sigma_p(L(\lambda)) = \mathbb{C}$. Ancak $N(A) = \text{span}\{(1, -1)^T\}$, $N(B) = \text{span}\{(1, 0)^T\}$, $N(A) \cap N(B) = \text{span}\{(0, 0)^T\}$.

Teorem 9.5. $A \in B(H)$, $B \in B(H)$ operatörlerinin $R(A)$ ve $R(B)$ görüntü kümeleri kapalı olmakla beraber B normal operatör olsun ve $\mu \in \mathbb{C}$ için $BA = \mu AB \neq 0$ eşitsizliği sağlansın. O zaman aşağıdaki 1) - 4) önermeleri denktirler.

- 1) $\sigma_p(L(\lambda)) = \mathbb{C}$
- 2) $N(A) \cap N(B) \neq \{0\}$
- 3) $R(A^*) + R(B^*)$ altuzayı H 'nin kapalı özaltuzayıdır.
- 4) $R((AA^* + B^*B)^{\frac{1}{2}})$ altuzayı H 'nin kapalı özaltuzayıdır.

Kanıt.

$R(A)$ ve $R(B)$ kapalı ise $R(A^*)$ ve $R(B^*)$ altuzayları da kapalıdır. $N(A) \cap N(B) \neq \{0\}$ ise $H \neq (N(A) \cap N(B))^{\perp} = (N(A))^{\perp} + (N(B))^{\perp} = R(A^*) + R(B^*)$ sağlandığı için 1) ve 2) denktirler. (Bouchelaghem, F. and Benharrat, M. (2019). On the spectrum of linear operator pencils. *Mat. Stud.*, 52, 211–221) makalesindeki Teorem 2.2 ye göre

$$R(A^*) + R(B^*) = R((AA^* + B^*B)^{\frac{1}{2}})$$

olduğundan önceki Teorem 9.4. ü de hesaba katarsak gereken sonuca varırız.

Teorem 9.6. A ve B operatörleri H uzayında tanımlı pozitif özeşlenik operatörler olmak üzere $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ ise $\sigma_p(L(\lambda)) \subseteq \mathbb{R}$ sağlanmaktadır.

Kanıt.

$\lambda_0 \in \sigma_p(L(\lambda))$ ise $A - \lambda_0 B$ birebir değil, yani λ_0 bir özdeğerdir. Bir $x_0 \in H$, $x_0 \neq 0$ vektörü vardır ki $(A - \lambda_0 B)x_0 = 0$. Şimdi $\text{Im}(\lambda_0) \neq 0$ olduğunu varsayalım. O halde $\langle (A - \lambda_0 B)x_0, x_0 \rangle = 0$ eşitliğinden $\langle Ax_0, x_0 \rangle$ ve $\langle Bx_0, x_0 \rangle$ gerçel oldukları için $\langle Ax_0, x_0 \rangle - (\text{Re} \lambda_0 + i \text{Im} \lambda_0) \langle Bx_0, x_0 \rangle = 0$, $\langle Ax_0, x_0 \rangle - \text{Re} \lambda_0 \langle Bx_0, x_0 \rangle = 0$, $\text{Im} \lambda_0 \langle Bx_0, x_0 \rangle = 0$, $\langle Bx_0, x_0 \rangle = 0$ elde edilir. B operatörü pozitif olduğu için $B = T^2$ olacak biçimde T pozitif özeşlenik operatörü vardır. $\langle T^2 x_0, x_0 \rangle = 0$ veya $\langle T(Tx_0), x_0 \rangle = 0$, $\langle (Tx_0), T^* x_0 \rangle = 0$, $\langle (Tx_0), Tx_0 \rangle = 0$ $\|Tx_0\|^2 = 0$, $Tx_0 = 0$, her

tarafından T alırsak $T(Tx_0) = T0 = 0$, $T^2x_0 = 0$, $Bx_0 = 0$. Bundan dolayı $x_0 \in N(B)$. Birinci denklemden $\langle Ax_0, x_0 \rangle = 0$, benzer yolla $Ax_0 = 0$ ve $x_0 \in N(A)$, buradan $x_0 \in N(A) \cap N(B)$ yani $N(A) \cap N(B) \neq \{0\}$. Çelişkiden dolayı $Im \lambda_0 = 0$. () makalesinde A ve B matrislerinin özeşlenik ve $BA = \mu AB \neq 0$ olması durumunda $\mu = 1$ veya $\mu = -1$ olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca eğer A veya B pozitif ise $\mu = 1$ olmaktadır. Yukarıdaki teoremlere göre şu sonucu söyleyebiliriz.

Sonuç 9.1. Eğer (A, B) ikilisi pozitif özeşlenik operatörler olup $AB = BA$ ise

$$N(A) \cap N(B) = \{0\} \Leftrightarrow \sigma_p(L(\lambda)) \subseteq \mathbb{R}.$$

Kanıt.

$\Rightarrow$ kısmı Teorem 9.6. den çıkmaktadır.

$\Leftarrow$ kısmı ise teorem 9.4. den çıkar, çünkü her özeşlenik operatör normaldir.

Sonlu boyutlu uzaylar için aşağıdaki sonuçlar geçerlidir.

Sonuç 9.2. A ve B matrisleri $n \times n$ boyutlu pozitif Hermit matrisleri olsun ve $AB = BA$ sağlansın. O zaman $N(A) \cap N(B) = \{0\} \Leftrightarrow$ öyle $\lambda^* \in \mathbb{C}$ vardır ki $A - \lambda^* B$ matrisinin tersi vardır.

Bu durumda $\sigma_p(L(\lambda))$ kümesi en fazla n tane nokta içermektedir.

Kanıt.

$(\Rightarrow)$ $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ olsun. Olmayana ergi yöntemini uygularsak her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $A - \lambda B$ tersinir olmazsa her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\det(A - \lambda B) = 0$ olmalıdır. Bu ise mümkün değildir. Çünkü $\det(A - \lambda B)$ ifadesi λ 'nın n . mertebeden polinom fonksiyonudur ve $\det(A - \lambda B)$ ifadesi ancak n tane $\lambda \in \mathbb{C}$ için sıfıra eşit olabilir.

$(\Leftarrow)$ Bir $\lambda^* \in \mathbb{C}$ için $(A - \lambda^* B)$ ifadesinin tersinir olduğunu kabul edelim. $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ olduğunu gösterelim. Olmayana ergi yöntemini uygulayalım. $N(A) \cap N(B) \neq \{0\}$ olsun. Öyle $x^* \in N(A) \cap N(B)$ vardır ki $x^* \neq 0$ sağlanmaktadır. Buradan $Ax^* = Bx^* = 0$ ($x^* \neq 0$). Buradan şu şekilde bir eşitlik yazılır: $(A - \lambda^* B)x^* = Ax^* - \lambda^* Bx^* = 0$, $x^* \neq 0$ olduğu için son eşitlik $(A - \lambda^* B)$ ifadesinin tersinir olması ile çelişmektedir.

10. KUADRATİK AİLENİN SPEKTRUMU

Bu bölümde birçok fiziksel problemlerde karşımıza çıkan bir kuadratik operatörler ailesinin spektrumu ele alınacaktır. Ailenin spektral parametreye göre lineer kısmı bir çubuğun küçük salınımlarda sürtünmesini ifade etmektedir.

H uzayı ayrılabilir kompleks Hilbert uzayı olsun. $M \in B(H)$, $K \in B(H)$ ve A ise H uzayında tanımlı kapalı operatörler olmak üzere

$$L(\lambda) = \lambda^2 M - i\lambda K - A$$

operatörler ailesini ele alalım. A 'nın tanım kümesi $D(A)$ altuzayının H de yoğun olduğunu varsayalım. O zaman $L(\lambda)$ 'in tanım kümesi $D(A)$ 'dır.

Tanım 10.1. I birim operatör olmak üzere, $M = I$ ise $L(\lambda)$ ailesine monik aile denir.

Koşul 10.1. $M \geq 0$, $K \geq 0$, olup sınırlı operatörlerdir, $A = A^* \geq -\beta I$ ($\beta > 0$ sabittir) olup bir $\beta_1 > 0$ için $(A + \beta_1 I)^{-1} \in S_\infty$ tersi vardır. Burada S_∞ olarak H 'de tanımlı tüm kompakt operatörler kümesi gösterilmiştir. Ek olarak $N(A) \cap N(M) \cap N(K) = \{0\}$ olduğunu varsayalım.

Tanım 10.2. $L^{-1}(\lambda)$ tersinin var olup sınırlı olduğu tüm λ kompleks sayılar kümesine $\rho(L(\lambda))$ rezolvent kümesi denir. $\sigma(L(\lambda)) = C / \rho(L(\lambda))$ tümleyenine ise ailenin spektrumu denir.

Tanım 10.3. $y_0 \in D(A)$, $y_0 \neq 0$ vektörü ve $\lambda_0 \in C$ sayısı için $L(\lambda_0)y_0 = 0$ ise λ_0 'a özdeğer y_0 'a ise özvektör denir. Eğer $y_1, \dots, y_{m-1}$ vektörleri için

$$\sum_{s=0}^k \frac{1}{s!} \frac{d^s(L(\lambda))}{d\lambda^s} \Big|_{\lambda=\lambda_0} y_{k-s} = 0, \quad (k=1,2, \dots, m-1)$$

eşitliği sağlanıyor ise bu vektörlere y_0 ile bağlantılı vektörler m sayısına ise zincirin uzunluğu denir. $C^+(C^-)$ ile açık üst (alt) yarı düzlem gösterilsin.

Teorem 10.1.

- 1) Eğer $A \geq 0$ ise, $L(\lambda)$ ailesinin spektrumu (eğer boş değilse) kapalı üst yarı düzlemdir.
- 2) $A \gg 0$ (şu eşitsizlik $A \geq \varepsilon I$, $\varepsilon > 0$ anlamındadır) ve $K > 0$ ise $L(\lambda)$ ailesinin spektrumu (eğer boş değilse) açık üst yarı düzlemdir.

- 3) Eğer $A \gg 0$ ve $\lambda^2 y - Ay \neq 0$ eşitsizliği tüm gerçel λ 'lar ve sıfırdan farklı tüm $y \in N(K)$ vektörleri için sağlanıyor ise $L(\lambda)$ spektrumu (eğer boş değilse) açık üst yarı düzlemedir.

Kanıt 1.

y_0 vektörü λ_0 'a karşılık gelen özvektör olsun. O zaman $L(\lambda_0)y_0 = 0$.

$$\langle L(\lambda_0)y_0, y_0 \rangle = 0, \quad y_0 \neq 0, \quad \lambda_0 = \operatorname{Re}(\lambda_0) + i\operatorname{Im}(\lambda_0),$$

$$\langle \lambda_0^2 My_0 - i\lambda_0 Ky_0 - Ay_0, y_0 \rangle = \lambda_0^2 \langle My_0, y_0 \rangle - i\lambda_0 \langle Ky_0, y_0 \rangle - \langle Ay_0, y_0 \rangle = 0,$$

$$(\operatorname{Re}(\lambda_0)^2 - \operatorname{Im}(\lambda_0)^2) \langle My_0, y_0 \rangle + 2i\operatorname{Re}(\lambda_0)\operatorname{Im}(\lambda_0) \langle My_0, y_0 \rangle + (\operatorname{Im}(\lambda_0) - i\operatorname{Re}(\lambda_0)) \langle Ky_0, y_0 \rangle - \langle Ay_0, y_0 \rangle = 0.$$

Buradan aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$(\operatorname{Re}(\lambda_0)^2 - \operatorname{Im}(\lambda_0)^2) \langle My_0, y_0 \rangle + \operatorname{Im}(\lambda_0) \langle Ky_0, y_0 \rangle - \langle Ay_0, y_0 \rangle = 0 \quad (10.1)$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_0)(2\operatorname{Im}(\lambda_0) \langle My_0, y_0 \rangle - \langle Ky_0, y_0 \rangle) = 0 \quad (10.2)$$

Eğer $\operatorname{Re}(\lambda_0) \neq 0$ olursa (10.1)'den dolayı $\operatorname{Im}(\lambda_0) \geq 0$ sağlanır. Eğer $\operatorname{Re}(\lambda_0) = 0$ olursa (10.1)'den dolayı $\operatorname{Im}(\lambda_0) \geq 0$ olur. İlk iddia kanıtlandı.

Kanıt 2.

Şimdi $A \gg 0$ ve $K > 0$ olsun. (10.1) ve (10.2) eşitliklerinde $\operatorname{Im}(\lambda_0) = 0$ yazalım. Buna göre, eğer $\operatorname{Re}(\lambda_0) = 0$ olursa (10.1) eşitliğinden $\langle Ay_0, y_0 \rangle = 0$ olduğu çıkar bu da $A \gg 0$ eşitsizliği ile çelişir. Eğer $\operatorname{Re}(\lambda_0) \neq 0$, $\operatorname{Im}(\lambda_0) = 0$ ise (10.2) eşitliğinden $\langle Ky_0, y_0 \rangle = 0$ çelişkisi elde edilir, çünkü $K > 0$ olduğu varsayılmıştı ve sonuçta ikinci iddia da kanıtlanmış oldu.

Kanıt 3.

$y_0 \in N(K)$ vektörü λ_0 reel özdeğerine karşılık gelen özvektör olsun. $L(\lambda_0)y_0 = (\lambda_0)^2 y_0 - Ay_0 = 0$ çelişkisi bulunur, çünkü $y_0 \neq 0$ ve her sıfır olmayan $y \in N(K)$ ve reel λ için $\lambda^2 y - Ay \neq 0$ olduğu varsayılmıştı.

Teorem 10.2.

- 1) $L(\lambda)$ 'nin spektrumunun açık alt yarı düzlemde bulunan kısmı sanal ekseninde yer almaktadır, yani $\operatorname{Re}\lambda = 0$.
- 2) $K > 0$ ise $L(\lambda)$ 'nin spektrumunun kapalı alt yarı düzlemde bulunan kısmı sanal ekseninde yer almaktadır.

Kanıt 1.

y_0 vektörü, λ_0 'a karşılık gelen özvektör olsun ve $\text{Im}(\lambda_0) < 0$ sağlansın. Eğer $\text{Re}(\lambda_0) \neq 0$ ise $\text{Re}(\lambda_0)[2\text{Im}(\lambda_0)\langle My_0, y_0 \rangle - \langle Ky_0, y_0 \rangle] = 0$ eşitliğinden $\langle My_0, y_0 \rangle = \langle Ky_0, y_0 \rangle = 0$ çıkar, buradan da sonuç olarak $My_0 = Ky_0 = 0$ bulunur. Gerçekten $M \geq 0$ olduğu için bu operatörün karekökü vardır yani $T^2 = M$ olacak biçimde $T \geq 0$ vardır. $0 = \langle My_0, y_0 \rangle = \langle T^2 y_0, y_0 \rangle = \langle T(Ty_0), y_0 \rangle = \langle Ty_0, T^* y_0 \rangle = \langle Ty_0, Ty_0 \rangle = \|Ty_0\|^2$ ve buradan $Ty_0 = 0$ ve her taraftan T alırsak $0 = T^2 y_0 = My_0$ çıkar ve benzer yolla $Ky_0 = 0$ da kanıtlanır. Koşul 10.1'e göre $Ay_0 \neq 0$ ve buradan $L(\lambda_0)y_0 = Ay_0 \neq 0$ çelişkisi çıkar. İlk iddia kanıtlandı.

Kanıt 2.

Eğer $K > 0$ ise ve $\text{Im}(\lambda_0) \leq 0$ sağlanıyorsa $\text{Re}(\lambda_0) = 0$ eşitliği (10.2) eşitliğinden elde edilir. İkinci iddia da kanıtlandı.

Teorem 10.3.

- 1) $L(\lambda)$ 'nın $\overline{C^-} / \{0\}$ içinde bulunan tüm özdeğerleri yarı basittir, yani bağlantılı vektörlere sahip değildirler.
- 2) $K > 0$ ise $L(\lambda)$ 'nın kapalı alt yarı düzlemde bulunan tüm özdeğerleri yarı basittir.

Kanıt 1.

λ_0 sayısı $L(\lambda)$ 'nın açık alt yarı düzlemde bulunan bir özdeğeri olsun. Teorem 10.2. 'ye göre bu özdeğer sanal eksen üzerindedir. y_0 vektörü λ_0 'a karşılık gelen özvektör, y_1 ise bağlantılı vektör olsun. Tanıma göre

$$\lambda_0^2 My_1 - i\lambda_0 Ky_1 - Ay_1 + 2\lambda_0 My_0 - iKy_0 = 0 \quad (10.3)$$

yazabiliriz. (10.3) 'ü y_0 ile çarparsak

$$\langle (\lambda_0^2 M - i\lambda_0 K - A)y_1, y_0 \rangle + \langle (2\lambda_0 M - iK)y_0, y_0 \rangle = 0 \quad (10.4)$$

buluruz. λ_0 'ın sanal ekseninde olduğunu hesaba katarsak (10.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \langle y_1, (\lambda_0^2 M - i\lambda_0 K - A)y_0 \rangle + \langle 2\lambda_0 M - iK \rangle y_0, y_0 \rangle &= 0, \\ i\langle 2\text{Im}(\lambda_0)M - K \rangle y_0, y_0 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (10.5)$$

elde edilir. (10.5) eşitliği $\text{Im}(\lambda_0) < 0$ olduğu için sadece $\langle My_0, y_0 \rangle = \langle Ky_0, y_0 \rangle = 0$ olması durumunda mümkündür. Buradan $My_0 = Ky_0 = 0$ bulunur. Bu durumda $L(\lambda_0)y_0 = -Ay_0 = 0$. Sonuç olarak, $y_0 \in N(M) \cap N(K) \cap N(A)$. O halde Koşul 10.1 gereği $y_0 = 0$ bulunur ve çelişki elde edilir.

Şimdi $\lambda_0 \in \mathbb{R}/\{0\}$ özdeğerini alalım. (10.2) eşitliğinden $\langle Ky_0, y_0 \rangle = 0$ olduğu çıkar ve sonuç olarak $Ky_0 = 0$ ve $(\lambda_0^2 M - A)y_0 = 0$ bulunur. Sonra (10.4) eşitliğinden

$$\langle y_1, (\lambda_0^2 M + i\lambda_0 K - A)y_0 \rangle + 2\lambda_0 \langle My_0, y_0 \rangle = 0, \quad \langle My_0, y_0 \rangle = 0$$

bulunur. Buradan $My_0 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $Ky_0 = 0$ 'ı dikkate alarak $Ay_0 = 0$ elde edilir, bu ise Koşul 10.1 ile çelişiyor. Birinci iddia kanıtlandı.

Kanıt 2.

$K > 0$ olsun ve λ_0 sayısı $L(\lambda)$ 'nın bir gerçel özdeğeri olsun. y_0 ve y_1 vektörleri karşı gelen özvektör ve bağlantılı vektörler olsun. O halde Teorem 10.2'ye göre $\lambda_0 = 0$ veya $y_0 \in N(A)$ ve (10.3) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Ay_1 + iKy_0 = 0 \quad (10.6)$$

(10.6) eşitliğini y_0 ile çarpalım:

$$0 = \langle Ay_1, y_0 \rangle + i\langle Ky_0, y_0 \rangle = \langle y_1, Ay_0 \rangle + i\langle Ky_0, y_0 \rangle = i\langle Ky_0, y_0 \rangle ,$$

bu ise $K > 0$ olması ile çelişiyor.



KAYNAKÇA

- Barmish, B.R. (1994). *New Tools for robustness of linear systems*. (First Edition). New York: Mcmillan Publishing Company.
- Blanchard, P. and Bruning, E. (2015). *Mathematical methods in physics: Distributions, Hilbert space operators, variational methods, and applications in quantum physics*. (Second Edition). New York: Springer.
- Bouchelaghem, F. and Benharrat, M. (2019). On the spectrum of linear operator pencils. *Mat. Stud.*, 52, 211–221.
- Brooke, J.A., Busch, P. and Pearson, B. (2002). Commutativity up to a factor of bounded operators in complex Hilbert space, *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 458, 109–118.
- Fillmore, P.A. and Williams, J.P. (1971). On operator ranges. *Advances in Math.*, 7, 254–281.
- Gohberg, I.C., Goldberg, S. and Kaashoek, M.A. (1990). *Classes of linear operators*. Basel: Birkhäuser.
- Gohberg I.C. and Krein M.G. (1969). *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*. Providence R.I.: Amer. Math. Soc.
- Kato, T. (1995). *Perturbation theory for linear operators*. New York: Springer.
- Kolmogrov, A.N. and Fomin, S.V. (1999). *Elements of the theory of functions and functional analysis*. New York: Dover Publications.
- Krein, M.G. and Langer, H. (1978). On some mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of continua. *Ibid*, 1, 364 – 399, 539 – 566.
- Krein, M.G. and Nudelman, A.A. (1979). On direct and inverse problems for frequencies of boundary dissipation of inhomogeneous string. *Dokl AN SSSR.*, 247(5),1046–1049.
- Krein, M.G. and Nudelman, A.A. (1989). On some spectral properties of an inhomogeneous string with dissipative boundary condition. *J. Operator Theory*, 22, 369–395.
- Kryszig, E. (2011). *Advanced engineering mathematics*. (Tenth Edition). Jefferson City, MO: John Wiley&Sons.
- Pivovarchik, V.N. (1989). On eigenvalues of a quadratic operator pencil. *Funkts. Anal. i Pril.*, 25, 80–81.

- Pivovarchik, V.N. (1994). On positive spectra of one class of polynomial operator pencils. *Integral Equat. Operator Theory*, 314–326.
- Pivovarchik, V.N. (2007). On spectra of a certain class of quadratic operator pencils with one-dimensional linear part. *Ukr. mat. Zhurn.*, 59(5), 702-716.
- Ryenne, B.P. and Youngson, M.A. (2007). *Linear functional analysis*. London: Springer.
- Saydy, L., Tits, A.L. and Abed, E. (1990). Guardian maps and the generalized stability of parametrized families of matrices and polynomials. *Mathematics of Control Signals and Systems*, 3(4), 345-371.
- Yang, J. and Du, H. (2004). A note on commutativity up to a factor of bounded operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(4), 1713–1720.



ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : OĞUZ YALÇINTUĞ

Yabancı dil : İNGİLİZCE

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

2020-2022, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı, Yüksek Lisans

2015 - Devam ediyor, Milli Eğitim Bakanlığı, Matematik Öğretmeni

2007-2014, İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Lisans

2003-2006, Adana 19 Mayıs Lisesi, Ortaöğretim