

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**KESİR DERECELİ KAOTİK SİSTEMLERİN AKTİF DEVRE
ELEMANLARI İLE GERÇEKLEŞTİRİLMESİ**

Emre YILMAZ

Yüksek Lisans Tezi

ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Devreler ve Sistemler Bilim Dalı

TEMMUZ 2022

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Elektrik Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

KESİR DERECELİ KAOTİK SİSTEMLERİN AKTİF DEVRE ELEMANLARI İLE GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

Tez Yazarı
Emre YILMAZ

Danışman
Doç. Dr. Vedat ÇELİK

TEMMUZ 2022
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Elektrik Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	Kesir Dereceli Kaotik Sistemlerin Aktif Devre Elemanları İle Gerçekleştirilmesi
Yazarı:	Emre YILMAZ
İlk Teslim Tarihi:	02.06.2022
Savunma Tarihi:	04.07.2022

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Doç. Dr. Vedat ÇELİK Fırat Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
-----------	---	--------------------------

Başkan:	Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜSTÜNDAĞ Malatya Turgut ÖZAL Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi	Onayladım
---------	---	-----------

Üye:	Prof. Dr. Arif GÜLTEN Fırat Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi	Onayladım
------	--	-----------

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza
Prof. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Kesir Dereceli Kaotik Sistemlerin Aktif Devre Elemanları İle Gerçekleştirilmesi” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

04.07.2022

Emre YILMAZ



ÖNSÖZ

Kesirli hesaplama 300 yılı aşkın bir süredir bilinmesine rağmen, hak ettiği değeri son on yıllarda görmeye başlamıştır. Kesirli hesaplamanın en önemli uygulama alanlarından birisi kaotik sistemlerdir ve literatürde son on yıllarda yoğun şekilde çalışıldığı görülmektedir. Bu çalışmada, literatürde yaygın çalışılan bazı kesir dereceli kaotik sistemler incelenmiştir.

Yüksek lisans tez çalışmasında bilgi ve birikimi ile bana yol gösteren danışman hocam, Doç.Dr. Vedat ÇELİK'e, manevi destekleriyle beni motive eden arkadaşlarıma ve son olarak çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle her zaman yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Emre YILMAZ
ELAZIĞ, 2022

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
TABLolar LİSTESİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR	xii
1. GİRİŞ	1
1.1. Kesir Dereceli Sistemler.....	1
1.2. Kaotik Sistemler	2
2. KESİR DERECELİ HESAPLAMA	4
2.1. Temel Tanımlamalar.....	4
2.1.1. Grünwald-Letnikov Tanımı.....	4
2.1.2. Riemann-Liouville Tanımı	5
2.1.3. Caputo Tanımı.....	5
2.2. Kesir Dereceli Kaotik Sistemlerde Nümerik Çözüm.....	5
2.3. Kesir Dereceli Sistemlerde Çatallaşma ve Kaotik Davranış Oluşturma Şartı	6
3. KESİR DERECELİ KAOTİK SİSTEMLER	8
3.1. Kesir Dereceli Lorenz Sistemi.....	8
3.2. Kesir Dereceli Chen Sistemi.....	14
3.3. Kesir Dereceli Lü Sistemi.....	19
3.4. Kesir Dereceli Liu Sistemi	24
3.5. Kesir Dereceli Rössler Sistemi	29
4. KESİR DERECELİ KAOTİK SİSTEMLERİN ANALOG DEVRE TASARIMI.....	35
4.1. Kesir Dereceli Sistemlerin Tamsayı Yaklaşım Metotları	35
4.1.1. Charef Yaklaşım Metodu	36
4.1.2. Carlson Yaklaşım Metodu.....	37
4.1.3. Matsuda Yaklaşım Metodu	37
4.1.4. Oustaloup Yaklaşım Metodu.....	37
4.2. Transfer Fonksiyon Yaklaşımı	38
4.3. Fraktans Elemanı	39
4.3.1. Zincir Fraktans	40
4.3.2. Ağaç Fraktans.....	41
4.4. İşlemsel Kuvvetlendiriciler (OP-AMP).....	42
4.4.1. Faz Çeviren ve Faz Çevirmeyen OP-AMP Devresi	42
4.4.2. Toplama Yapan OP-AMP Devresi.....	44
4.4.3. Gerilim İzleyici OP-AMP Devresi	44
4.4.4. Fark Alıcı OP-AMP Devresi	45
4.4.5. İntegral Alıcı OP-AMP Devresi.....	45
4.4.6. Türev Alıcı OP-AMP Devresi.....	46
4.5. Kesir Dereceli İntegral Opetatörünün Zincir Fraktans ile Tasarımı	47
4.6. Kesir Dereceli Lorenz Sisteminin Analog Devre Tasarımı	52

4.7. Kesir Dereceli Chen Sisteminin Analog Devre Tasarımı	66
5. SONUÇ.....	73
KAYNAKLAR.....	74
ÖZGEÇMİŞ	



ÖZET

Kesir Dereceli Kaotik Sistemlerin Aktif Devre Elemanları İle Gerçekleştirilmesi

Emre YILMAZ

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektrik Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Temmuz 2022, Sayfa: xii + 76

Bu yüksek lisans tez çalışmasında kesir dereceli kaotik sistemler için Grünwald-Letnikov tanımından faydalanılarak bir *MATLAB/M-dosyası* geliştirilmiş ve literatürde yoğun çalışılan kesir dereceli kaotik sistemlerin simülasyonları durum uzay diyagramları ve durum değişkenlerinin zaman cevapları şeklinde gerçekleştirilmiştir. Ayrıca bu sistemlerdeki kesir dereceli q sistem derecesine göre çatallaşma ve çatallaşma noktaları teorik olarak elde edilmiş ve böylece kaotik davranışın beklendiği ve kaotik davranışın kesinlikle gözlenmeyeceği sistem dereceleri gerçekleştirilen simülasyonlar ile test edilmiştir. Bunlara ek olarak, kesir dereceli kaotik sistemlerin analog devre tasarımları için kullanılan zincir fraktans yapısından bahsedilmiş ve kesir dereceli integral operatörün yakınsatılmış tam dereceli transfer fonksiyonları ile zincir fraktans tasarımları elde edilmiştir. Kesir dereceli Lorenz ve Chen sistem olmak üzere iki farklı kesir dereceli kaotik sistemin analog devre tasarımları elde edilen zincir fraktans kullanılarak gerçekleştirmiştir. Tasarlanan analog devrelerin *ORCHAD/Pspice* ortamından simülasyonları gerçekleştirilmiştir. *MATLAB/M-dosyası* geliştirilerek elde edilen simülasyon sonuçlarını *ORCHAD/Pspice* analog devre uygulaması sonuçlarının doğruladığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli hesaplama, Kesir dereceli kaotik sistemler, Grünwald-Letnikov tanımı, Çatallaşma noktası, Zincir fraktans

ABSTRACT

Implementation Of Fractional Order Chaotic System With Active Circuit Elements

Emre YILMAZ

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Electrical and Electronics Engineering

July 2022, Pages: xii + 76

In this master's thesis, a MATLAB/M-file was developed for fractional chaotic systems using the Grünwald-Letnikov definition, and simulations of fractional chaotic systems, which have been extensively studied in the literature, were carried out in the form of state space diagrams and time responses of state variables. In addition, bifurcation and bifurcation points in these systems are theoretically obtained according to the fractional order q system order, and thus, the system degrees where chaotic behavior is expected and chaotic behavior will not be observed are tested with simulations. In addition to these, chain fractance structure used for analog circuit designs of fractional order chaotic systems is mentioned and chain fractance designs are obtained with converged integer order transfer functions of fractional integral operator. Analogue circuit designs of two different fractional chaotic systems, namely the fractional order Lorenz and Chen systems, were carried out using the obtained chain fractance. Simulations of the designed analog circuits were carried out from the ORCHAD/Pspice environment. It has been shown that the simulation results obtained by developing the MATLAB/M-file are confirmed by the results of the ORCHAD/Pspice analog circuit application.

Keywords: Fractional calculus, Fractional order chaotic systems, Grünwald-Letnikov definition, Bifurcation point, Chain fractance

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1.	Kesir dereceli Lorenz sistemi $q = 0.995$ için durum uzay diyagramı.....	11
Şekil 3.2.	Kesir dereceli Lorenz sistemi $q = 0.995$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları.....	12
Şekil 3.3.	Kesir dereceli Lorenz sistemi $q = 0.90$ için durum uzay diyagramı.....	13
Şekil 3.4.	Kesir dereceli Lorenz sistemi $q = 0.9$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları.....	14
Şekil 3.5.	Kesir dereceli Chen sistemi $q = 0.9$ için durum-uzay diyagramı.....	16
Şekil 3.6.	Kesir dereceli Chen sistemi $q = 0.9$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları.....	17
Şekil 3.7.	Kesir dereceli Chen sistemi $q = 0.72$ için durum uzay diyagramı.....	18
Şekil 3.8.	Kesir dereceli Chen sistemi $q = 0.72$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları.....	19
Şekil 3.9.	Kesir dereceli Lü sisteminin $q = 0.95$ için durum-uzay diyagramı.....	21
Şekil 3.10.	Kesir dereceli Lü sistemi $q = 0.9$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları.....	22
Şekil 3.11.	Kesir dereceli Lü sistemi $q = 0.8$ için durum-uzay diyagramı.....	23
Şekil 3.12.	Kesir dereceli Lü sistemi $q = 0.8$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları.....	24
Şekil 3.13.	Kesir dereceli Liu sistemi $q = 0.95$ için durum uzay diyagramı.....	26
Şekil 3.14.	Kesir dereceli Liu sistemi $q = 0.95$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları.....	27
Şekil 3.15.	Kesir dereceli Liu sistemi $q = 0.8$ için durum-uzay diyagramı.....	28
Şekil 3.16.	Kesir dereceli Liu sistemi $q = 0.8$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman Cevapları.....	29
Şekil 3.17.	Kesir dereceli Rössler sistemi $q = 0.9$ için durum uzay diyagramı.....	31
Şekil 3.18.	Kesir dereceli Rössler sistemi $q = 0.9$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları.....	32
Şekil 3.19.	Kesir dereceli Rössler sistemi $q = 0.8$ için durum uzay diyagramı.....	32
Şekil 3.20.	Kesir dereceli Rössler sistemi $q = 0.8$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları.....	33
Şekil 4.1.	Yakınsatılmış tam sayı dereceli transfer fonksiyonu ve $\frac{1}{s^{0.9}}$ integratörü Bode diyagramı.....	38
Şekil 4.2.	Zincir Fraktans yapısı.....	41
Şekil 4.3.	Ağaç Frantans yapısı.....	41
Şekil 4.4.	İdeal opamp gösterimi.....	42
Şekil 4.5.	Faz çeviren işlemsel yükselteç.....	43
Şekil 4.6.	Faz çevirmeyen işlemsel yükselteç.....	43
Şekil 4.7.	Toplama devresi.....	44
Şekil 4.8.	Gerilim İzleyici işlemsel yükselteç	44

Şekil 4.9.	Fark alıcı işlemsel yükselteç	45
Şekil 4.10.	İntegral alıcı işlemsel yükselteç	46
Şekil 4.11.	Türev alıcı işlemsel yükselteç	46
Şekil 4.12.	$\frac{1}{s^{0.9}}$ kesir derecesi için oluşturulan zincir fraktans yapısı.....	48
Şekil 4.13.	$\frac{1}{s^{0.6}}$ kesir derecesi için oluşturulan zincir fraktans yapısı.....	49
Şekil 4.14.	$\frac{1}{s^{0.8}}$ kesir derecesi için oluşturulan zincir fraktans yapısı.....	50
Şekil 4.15.	$\frac{1}{s^{0.992}}$ kesir derecesi için oluşturulan zincir fraktans yapısı.....	51
Şekil 4.16.	Coumo ve Oppenheim tarafından önerilen tam dereceli kaotik Lorenz sistemi devre tasarımı.....	53
Şekil 4.17.	Basitleştirilmiş tam dereceli kaotik Lorenz devre tasarımı.....	54
Şekil 4.18.	Basitleştirilmiş tam dereceli kaotik Lorenz devre tasarımı u durum değişkeni.....	55
Şekil 4.19.	Basitleştirilmiş tam dereceli kaotik Lorenz devre tasarımı v durum değişkeni.....	55
Şekil 4.20.	Basitleştirilmiş tam dereceli kaotik Lorenz devre tasarımı w durum değişkeni.....	56
Şekil 4.21.	Tam sayı dereceli kaotik Lorenz devresi.....	58
Şekil 4.22.	Tamsayı dereceli Lorenz sistemi a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları.....	59
Şekil 4.23.	Tam sayı dereceli kaotik Lorenz sistemi a) x - y b) x - z c) y - z durum uzay diyagramı.....	60
Şekil 4.24.	Kesir dereceli Lorenz devresi $q_1 = 1, q_2 = 1$ ve $q_3 = 0.992$	61
Şekil 4.25.	Kesir dereceli Lorenz sistemi $q_1 = 1, q_2 = 1$ ve $q_3 = 0.992$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları.....	62
Şekil 4.26.	Kesir dereceli Lorenz sistemi $q_1 = 1, q_2 = 1$ ve $q_3 = 0.992$ için a) x - y b) x - z c) y - z durum uzay diyagramı.....	63
Şekil 4.27.	Kesir dereceli Lorenz devresi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.992$	63
Şekil 4.28.	Kesir dereceli Lorenz sistemi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.992$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları.....	64
Şekil 4.29.	Kesir dereceli Lorenz sistemi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.992$ için a) x - y b) x - z c) y - z durum uzay diyagramı.....	65
Şekil 4.30.	Kesir dereceli Chen devresi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$	67
Şekil 4.31.	Kesir dereceli Chen sistemi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları.....	68
Şekil 4.32.	Kesir dereceli Chen sistemi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ için a) x - y b) x - z c) y - z durum uzay diyagramı.....	69
Şekil 4.33.	Kesir dereceli Chen devresi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.6$	70
Şekil 4.34.	Kesir dereceli Chen sistemi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.6$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları.....	71
Şekil 4.35.	Kesir dereceli Chen sistemi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.6$ için a) x - y b) x - z c) y - z durum uzay diyagramı.....	72

TABLÖLAR LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 4.1. $y = 2\text{dB}$ 0.1-0.9 dereceli lineer transfer fonksiyon yaklaşımı.....	38
Tablo 4.2. Kesir dereci $q = 0.9$ için hesaplanan zincir fraktans devre değerleri.....	48
Tablo 4.3. Kesir dereci $q = 0.6$ için hesaplanan zincir fraktans devre değerleri.....	49
Tablo 4.4. Kesir dereci $q = 0.8$ için hesaplanan zincir fraktans devre değerleri.....	50
Tablo 4.5. Kesir dereci $q = 0.992$ için hesaplanan zincir fraktans devre değerleri.....	51

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\Gamma(.)$	: Euler Gama fonksiyonu
$aD_t^q f(x)$	: Kesir dereceli türev operatörü

Kısaltmalar

GL	: Grünwald-Letnikov
RL	: Riemann-Liouville



1. GİRİŞ

1.1. Kesir Dereceli Sistemler

Kesirli hesaplama 300 yıldan daha fazla geçmişe sahip bir matematik konusudur. Kesirli hesaplama fikrine ilk referans 1695 yılında Leibniz ve L'Hospital'in birbirleriyle mektuplaşmalarıdır. Bu mektuplaşmalarda $1/2$ dereceden türevden bahsedilmektedir. Ancak kesirli operatör ilk olarak N. H. Abel tarafından 1823 de tautochrome probleminin çözümünde kullanılmıştır. Devam eden dönemde, Liouville 1832 de kesirli hesaplama üstüne ilk büyük çalışmayı yapmıştır. Bu çalışmada kendi tanımını teorik problemlere uygulamıştır. Grünwald 1897 yılında kesir dereceli operatörler üzerine çalışmıştır. Aynı dönemde, Riemann üniversite yıllarında kesirli integrasyonların geliştirilmesi teorisi üzerine çalışmış ve 1892 de bu konu üzerine bir makale yayınlamıştır. Ayrıca, Letnikov'da 1868 ile 1872 yılları arasında bu konu üzerine çeşitli makaleler yazmıştır [1-2].

Kesir dereceli hesaplama ve uygulama alanları ile ilgili yakın geçmişe kadar yoğun olmayan çalışmalar söz konusu olmuştur. Ancak, son on yıllarda kesir dereceli hesaplamanın kullanıldığı uygulama sayısı giderek artmaktadır. Bu matematiksel tanımlama gerçek hayattaki dinamik sistemleri daha iyi modellememize olanak vermektedir. Doğadaki gerçek dinamik sistemler çoğunlukla kesir derecelidir, bununla birlikte birçoğunun derecesi tam dereceye yakındır [3]. Bu yüzden, dinamik sistemler sadece tam dereceli dinamik matematiksel modeller ile tanımlanmıştır. Ancak Bu kısıtlama ya düşük dereceli kesin olmayan modellere ya da son derece karmaşık yüksek dereceli modellemelerle sistemlerin tanımlanmasına sebep olmuştur [4]. Tam dereceli modellerin kesir dereceli modeller yerine kullanılmasının temel nedeni, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde karşılaşılan zorluklardır. Yani sistemlerin kesir dereceli olarak modellenmesi ve çözülebilmesi tam dereceli matematiksel modellere göre daha zor ve yüksek hesaplama gücüne ihtiyaç duymaktadır. Bununla birlikte kesir dereceli modellerin bazı avantajları vardır. Bunlardan ilki, modellerde daha fazla serbestlik derecesinin olmasıdır. Diğer avantajıysa modele bellek eklemesidir. Yani tam dereceli sistemler sınırlı bir belleğe sahipken, kesir dereceli sistemler sınırsız belleğe sahiptir [1,3].

Kesir dereceli hesaplama konusu her ne kadar matematiğin bir konusu gibi görünse de, disiplinler arası alanda birçok sistemin kesirli diferansiyel denklemlerle tanımlanabildiği gösterilmiştir. Örneğin; dielektrik polarizasyon, elektrot-elektrolit polarizasyon, elektromanyetik dalgalar, kompleks sistemlerin kuantum evrimi, nicel finans, difüzyon dalgası, fizik, robotik, güneş paneli sistemleri, lityum-iyon bataryalar, kontrol sistemleri ve kaos teorisi önemli uygulama alanlarıdır [5,6].

Kesir dereceli hesaplama zorluklarının başlıcası zaman cevapları hesaplamalarıdır. Bu tip sistemlerde çıkışın analitik çözümü mümkün değildir ve sonucu tahmin edecek kapsayıcı bir yöntem bulunmamaktadır. Son on yıllarda kesir dereceli sistemlerinin simülasyonlarının yapılması için pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların bir kısmı tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi temelli iken diğerleri ise nümerik yaklaşım yöntemlerini baz almaktadır. Tam dereceli yaklaşım yöntemleri kesir dereceli transfer fonksiyonlarını belirli frekans aralıkları için tam dereceli yani klasik transfer fonksiyonlara dönüştürdükleri için kesir dereceli sistemlerin çözümüne önemli katkı sağlamaktadır [16]. Bu yaklaşım metotlarının başında Charef, Carlson, Matsuda ve Oustaolup yöntemleri yer almaktadır. Nümerik yöntem analizinde ise kesir dereceli diferansiyel denklemlerini ifade ettiğimiz Grunwald-Letnikov, Caputo ve Riemann Liouville tanımları kullanılmaktadır [48,49].

Son on yıllarda kesir dereceli sistemlere olan yoğun ilgiden dolayı gerçek zamanlı uygulamaları gerçekleştirebilmek için analog devre uygulamaları üzerine çalışılmaya başlanmıştır. Kesir dereceli diferansiyel denklemlerle tanımlı sistemlerin analog devre tasarımları fraktans adı verilen RC ağından oluşan elektronik devrelerle geliştirilmesiyle birlikte kontrol sistemleri, robotik, sinyal işleme, fizik, şifreleme gibi alanlarda gerçek zamanlı mühendislik uygulamalarına imkan sağlanmıştır [17-27].

1.2. Kaotik Sistemler

Edward N. Lorenz 1960 yıllarında kelebek etkisi olarak isimlendirdiği başlangıç koşullarına son derece duyarlı garip çekiciyi tanıtarak kaos olgusunu ilk defa ortaya attı. Edward N. Lorenz ilk defa “kelebek etkisi” terimini, kaos teorisinin başlangıç şartlarına hassas bağıllığını vurgulamak için kullanmıştır. Lorenz’in 1979 yılında yayınladığı [7] makalesinde başlangıç şartlarındaki küçük değişimin uzun soluklu sistem davranışında büyük değişim oluşturabileceğinden bahsetmiştir. Bu ifade, kelebeğin kanatlarının atmosferde belirli bir yerde kasırganın yolunu değiştirebileceği, hatta engelleyebileceği ya da hızlandıracağını ifade etmektedir. Kelebeğin kanat çırpması başlangıç şartlarında ki küçük değişimi ifade etmektedir [1].

Genel olarak kaos, başlangıç şartlarına hassas bağıllık gösteren doğrusal olmayan deterministik bir sistemde gözlenen, uzun süreli periyodik olmayan davranışlar olarak tanımlanmaktadır [14]. Deterministik sistem ise sistemin nasıl bir davranış göstereceğinin sistem parametrelerinin zamanla değişmemesi durumu için başlangıç şartları tarafından belirlendiği sistemlerdir. Bu yönüyle bakıldığında kaotik sistemin deterministik olması, gürültü ile kaos arasındaki en önemli farklılıktır. Sistem derecesi 3 ve üzeri olan sürekli zamanlı doğrusal olmayan sistemlerde kaotik davranışlar görülmektedir [15]. Bu sınırlama sistem derecesinin 3’den küçük sistemler için gerek ve yeter şart olmasına rağmen sistem derecesi 3 ve üzeri için gerek şart ama yeter şart değildir. Son on yıllarda, güvenli haberleşme, veri şifreleme, akış dinamiği, sinyal

generatörü, senkronizasyon, rastgele sayı üreticileri olmak üzere birçok alanda geniş uygulamaları nedeniyle; kaos, matematik ve mühendislik topluluklarından yoğun ilgi görmüştür [4,6]. Ayrıca kesir dereceli sistemlerinde kaotik davranış sergiledikleri gözlenmiştir [3]. Ancak sürekli zamanlı doğrusal olmayan bu kesir dereceli kaotik sistemlerde sistem derecesi üçten küçük olmasına rağmen kaotik davranışlar sistemde gözlemlenmiştir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta kesir dereceli sürekli zamanlı sistemlerde sistem derecesi 3'ten küçük olmasına rağmen sistemin hala 3 durum değişkeni olduğu da unutulmamalıdır. Bu tez çalışmasında, kesir dereceli kaotik sistemlerin gerçek zamanlı uygulamalarını sağlamak için analog devre tasarımlarının gerçekleştirilmesi amaçlanmıştır. Bunun için önce kesir dereceli kaotik sistemlerin simülasyonları gerçekleştirilmiş sonra analog devre tasarımlarına geçilmiştir. Simülasyonlarını gerçekleştirebilmek için uygun yöntemlerden biri olan Grünwald-Letnikov tanımından faydalanılarak bir *MATLAB/M-dosyası* geliştirilmiştir. Buna ek olarak, kesir dereceli kaotik sistemlerin sistem derecesine göre çatallaşma ve çatallaşma noktaları teorik olarak elde edilmiş ve böylece bu sistemlerin kaotik davranış göstermesi olanaksız olan kesirli sistem dereceleri bu araç kullanılarak simülasyonlar ile test edilmiştir. Ayrıca kesir dereceli kaotik sistemlerin analog devre tasarımları iki farklı kesir dereceli sistem için gerçekleştirmiş ve *ORCHAD/Pspice* ortamından tasarlanan analog devre simülasyonları gerçekleştirilmiştir. Son olarak, *MATLAB/M-dosyası* geliştirilerek elde edilen simülasyon sonuçları ile *ORCHAD/Pspice* analog devre uygulaması sonuçları karşılaştırılmıştır.

Bu girişle birlikte 2. Bölümde; kesir dereceli hesaplama bahsedilerek GL, RL ve Caputo tanımları verilmiştir. 3. Bölümde; GL tanımına göre yapılan nümerik çözümler, verilerek kesir dereceli sistemlerde çatallaşma noktası anlatılmıştır. 4. Bölümde ise literatürde yoğun olarak çalışılan bazı kaotik sistemlerin kesir dereceli modellerinde kaosu varlığı simülasyon sonuçlarıyla ortaya konulmuştur ve elektronik devre uygulaması yapılmıştır. Sonuçlar bölümünde; sonuçlar sunularak genel bir değerlendirme yapılmıştır.

2. KESİR DERECELİ HESAPLAMA

2.1. Temel Tanımlamalar

Kesirli dereceli hesaplama a ve t nin operatörün sınırları olduğu, kesir dereceli temel operatör aD_t^q integro-diferansiyelinin genelleştirilmesidir. Sürekli integro-diferansiyel operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$aD_t^q = \begin{cases} \frac{d^q}{dt^q} & q > 0 \\ 1 & q = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^q & q < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Burada q kompleks türev veya integral derecesini göstermektedir [2]. Kesir dereceli operatörler için birçok tanım mevcuttur. Bunlardan en çok kullanılanları; Grünwald –Letnikov (GL) tanımı, Riemann-Lioville (RL) tanımı ve Caputo tanımıdır [1].

2.1.1. Grünwald-Letnikov Tanımı

Grünwald ile Letnikov'un literatüre katmış olduğu q kesir dereceli integro-diferansiyel denklemi aşağıda görüldüğü gibidir.

$$aD_t^q f(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\Delta_h^q f(x)}{h^q} \quad (2.2)$$

Denklem (2.2)'de h adım sayısı olarak tanımlanmış olup, $\Delta_h^q f(x)$;

$$\Delta_h^q f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{q}{j} f(x - jh) \quad (2.3)$$

Denklem (2.3)'de görüldüğü gibi tanımlanırsa ve toplam işleminin r gibi sonlu bir sayıya kadar yapılması durumunda;

$$\sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{q}{j} = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{\Gamma(r+1-q)}{\Gamma(r+1)} \quad (2.4)$$

olur ve $h = \frac{x-q}{r}$ kabul edilirse;

$${}_aD_t^q f(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\left[\frac{x-q}{r} \right]^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} f\left(x - j \left(\frac{x-q}{r} \right)\right) \right\} \quad (2.5)$$

olur. Burada q rastgele bir sayı, a başlangıç değeri, $\Gamma(\cdot)$ ise Euler Gama fonksiyonudur.

2.1.2. Riemann-Liouville Tanımı

Bir diğer yaygın kullanılan kesir dereceli integro-diferansiyel tanımı Riemann-Liouville tanımıdır. Riemann-Liouville yöntemi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$${}_aD_t^q f(x) = \frac{1}{-q} \int_a^x (x - \tau)^{-q-1} f(\tau) d\tau, \quad q < 0 \quad (2.6)$$

$n - 1 < q < n$ olarak Denklem (2.6)'nın türevi alındığı takdirde;

$${}_aD_t^q f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x - \tau)^{n-q-1} f(\tau) d\tau, \quad n > 0 \quad (2.7)$$

olarak ifade edilmektedir.

2.1.3. Caputo Tanımı

Bir diğer yaygın kullanılan kesir dereceli integro-diferansiyel tanımı 1967 yılında Caputo tarafından yapılmıştır.

$${}_aD_t^q f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{q-n+1}} d\tau, \quad n - 1 < q < n \quad (2.8)$$

Yukarıda görüldüğü üzere homojen başlangıç koşullarında Riemann-Liouville ve Caputo tanımı eşdeğerdir. Caputo tanımında kesir dereceli diferansiyel denklem ile tam dereceli diferansiyel denklemlerin başlangıç şartları aynı formdadır [1].

2.2. Kesir Dereceli Kaotik Sistemlerde Nümerik Çözüm

Bu bölümde literatürde yaygın olarak çalışılan kesir dereceli kaotik sistemlerin simülasyonlarının GL tanımı kullanılarak *MATLAB* ortamında simülasyonlarının

gerçekleştirilmesidir. Bu amaçla, literatürde yoğun çalışılan kesir dereceli kaotik sistemlerin nümerik çözümleri yapılmıştır. Ayrıca kesir dereceli sistemlerin kaotik davranış göstermeye başlayabileceği en küçük kesir dereceleri hesaplanmıştır.

Kesir dereceli sistemlerin nümerik çözümü için, GL tanımı Denklem (2.5)'den türetilen Denklem (2.9) kullanılmıştır. Bu yaklaşım geniş bir fonksiyon sınıfı için tanımlanan, GL-RL ve Caputo tanımlarının eşdeğer olmasında dayanmaktadır [8]. Derecesi q olan kesir dereceli bir sistemin kh ($k = 1, 2, 3, \dots$) noktasındaki nümerik yaklaşımın türevi aşağıdaki gösterilmiştir.

$$\left(k - \frac{L_m}{h}\right) D_t^q f(x) \approx h^{-q} \sum_j^k (-1)^j \binom{q}{j} f(t_{k-j}) \quad (2.9)$$

Bu denklemde L_m hafıza uzunluğu, $t_k = kh$, h hesaplamanın zaman adımı ve $(-1)^j \binom{q}{j}$ binom katsayısı. $c_j^{(q)}$ ($j = 0, 1, 2, \dots$). Bunların hesabı için Denklem (2.10) kullanılmıştır.

$$c_0^{(q)} = 1, \quad c_j^{(q)} = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^{(q)} \quad (2.10)$$

böylece, kesir dereceli diferansiyelin genel ifadesi;

$$aD_t^q y(t) = f(y(t), t) \quad (2.11)$$

şu şekilde yazılabilir;

$$y(t_k) = f(y(t_k), t_k) h^q - \sum_j^k c_j^{(q)} y(t_{k-j}) \quad (2.12)$$

2.3. Kesir Dereceli Sistemlerde Çatallaşma ve Kaotik Davranış Oluşturma Şartı

Kesir dereceli diferansiyel denklemler, en az tam dereceli muadilleri kadar kararlıdır. Hatta hafızalı sistemler tipik olarak hafızasız muadillerinden daha kararlıdır [6]. Denklem (2.13) gibi bir sistem düşünölsün;

$$D_x^q = f(x) \quad (2.13)$$

$$0 < q < 1 \text{ ve } x \in R$$

Denklem (2.13)' deki sistemin denge noktaları $f(x) = 0$ denklemi çözülerek bulunmaktadır. Denge noktaların da değerlendirilen Jacobian matrisinin $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ tüm öz değerleri Denklem (2.14)'daki koşulu sağlaması durumunda bu noktalar yerel olarak asimptotik karardır.

$$|\arg(\text{eig}(A))| > q\pi/2 \quad (2.14)$$

3D doğrusal olmayan dinamik bir sistemde eğer noktası, doğrusallaştırılmış modelin en az bir tane karard ve bir tane kararsız bölgede öz değeri olduğı bir denge noktasıdır. Aynı sistemde, öz değerlerden biri kararsız ve iki öz değeri karardysa eğer noktası indeks-1 olarak adlandırılmaktadır. Sistem bir karard ve iki kararsız öz değere sahip ise bu da indeks-2 olarak adlandırılmaktadır. Kaotik sistemde kıvrımların sadece indeks-2'de olduğı kanıtlanmıştır. Dahası indeks-1'in sadece kıvrımları bağlamakta sorumlu olduğı anlaşılmıştır. 3D $\dot{x} = f(x)$ kaotik sisteminin tek kıvrımlı çekici gösterdiğini varsayalım. Bununla birlikte bu sistem bir kıvrımlı çekici tarafından çevrelenen bir indeks-2 eğer noktasına sahiptir. Farz edelim ki $\lambda = \alpha \pm j\omega$ bu indeks-2 eğer noktasının kararsız bir öz değeri olsun. Kesirli sistem $D_x^q = f(x)$ kaotik kalması için gerekli koşul, λ 'nın kararsız bölgede tutulmasıdır [6,9] . Bunu gerçekleştirebilmek için sistemin en küçük q değeri, yani çatallaşma noktası Denklem (2.15)'de ki gibi hesaplanmaktadır.

$$\tan\left(q\frac{\pi}{2}\right) > \frac{|\omega|}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad q > \frac{2}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{|\omega|}{\alpha}\right) \quad (2.15)$$

Aksi takdirde, sabit nokta asimptotik olarak karard hale gelir ve daha sonra yakında ki yörüngeleri çeker.

3. KESİR DERECELİ KAOTİK SİSTEMLER

Doğrusal olmayan sistem, temel olarak çarpımsallık ve toplamsallık teoremlerinden herhangi birini veya ikisini birden sağlamayan sistem olarak tanımlanmaktadır. Matematiksel olarak doğrusal olmayan bir problem, çözülecek değişkenlerin bağımsız bileşenlerinin doğrusal bir kombinasyonu olarak yazılamaması olarak tanımlanmaktadır. Yani denklem, doğrusal olmayan bir fonksiyon içeriyorsa denklemin tanımladığı sistem doğrusal değildir [1].

Sürekli zamanlı sistemlerde kaotik dinamiklerin görülebilme şartı; başlangıç şartına hassas bağıllık, sistemde doğrusal olmayan eleman bulunması ve sistem derecesinin en az üç olmasıdır. Ancak literatürde son on yıllarda yoğun olarak çalışılan kesir dereceli sistemlerde, sistem derecesi üçün altında olduğu durumlarda dahi kaotik davranış gösterdiği görülmektedir. Literatürde bununla ilgili; kesir dereceli Duffing sistemi, kesir dereceli Chua devresi, kesir dereceli Chen sistemi, kesir dereceli Lorenz sistemi, kesir dereceli Lü sistemi, kesir dereceli Liu sistemler bu duruma örnek gösterilebilir [9].

Yukarıda bahsedildiği üzere sistem derecesi üçün altında kaotik davranış gösteren bazı kesir dereceli sistemlerin *MATLAB* ortamında GL yöntemi kullanılarak simülasyonları devam eden kısımda elde edilmiştir. Sistemin kaotik davranış göstermesi için gerekli olan en küçük kesir derecesi Denklem (2.15) esas alınarak hesaplanmış ve bu değer altında sistemin kaotik davranış göstermediği simülasyonlarla ortaya konulmuştur.

3.1. Kesir Dereceli Lorenz Sistemi

Lorenz kaotik davranış gösteren tam dereceli modeli Denklem (3.1)'de gösterilmektedir [7].

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \sigma(y(t) - x(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= x(t)(\rho - z(t)) - y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= x(t)y(t) - \beta z(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Lorenz sistemi $\sigma = 10$, $\rho = 28$ ve $\beta = 8/3$ değerinde kaotik davranış göstermektedir. Lorenz sisteminin üç tane denge noktası vardır. Bunlar; $E_1 = (0,0,0)$ ve diğer iki $E_2 = (-\sqrt{(\beta\rho - \beta)}, -\sqrt{(\beta\rho - \beta)}, \rho - 1)$ ve $E_3 = (\sqrt{(\beta\rho - \beta)}, -\sqrt{(\beta\rho - \beta)}, \rho - 1)$ olmaktadır. Böylece $E_2 = (8.4853, 8.4853, 27)$ ve $E_3 = (-8.4853, -8.4853, 27)$ olmaktadır. Sistemin başlangıç şartı ise

$(x(0), y(0), z(0)) = (0.1, 0.1, 0.1)$ alınmıştır. Ayrıca bu denge noktalarından herhangi birinin doğrusal modelini elde etmek için $E = (x^*, y^*, z^*)$ gibi bir denge noktasının Jacobian matrisi Denklem (3.2)'de gösterilmektedir.

$$J = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x^* \\ y^* & x^* & -\beta \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Denklem (3.2) kullanılarak E_1 denge noktası için Jacobian matrisi aşağıdaki gibi oluşmaktadır.

$$J = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Buradan öz değerler $[\lambda I - A] = 0$ uygulanırsa;

$$\begin{bmatrix} \lambda + 10 & -10 & 0 \\ -28 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 8/3 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

Olur. Böylece $\lambda_1 = 6,370$ $\lambda_2 = -24,627$ ve $\lambda_3 = 4,589$ olarak bulunur. Denklem (3.2) kullanılarak E_2 denge noktası için Jacobian matrisi aşağıdaki gibi oluşmaktadır.

$$J = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -8,4853 \\ 8,4853 & 8,4853 & -8/3 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Buradan öz değerler $[\lambda I - A] = 0$ uygulanırsa;

$$\begin{bmatrix} \lambda + 10 & -10 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & -8,4853 \\ -8,4853 & -8,4853 & \lambda + 8/3 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.6)$$

Olur. Böylece $\lambda_1 = -13,855$ $\lambda_{2,3} = 0,094 \pm 10,195j$ olarak bulunur. Denklem (3.2) kullanılarak E_3 denge noktası için Jacobian matrisi aşağıdaki gibi oluşmaktadır.

$$J = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 8,4853 \\ -8,4853 & -8,4853 & 8/3 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Buradan öz değerler $[\lambda I - A] = 0$ uygulanırsa;

$$\begin{bmatrix} \lambda + 10 & -10 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & -8,4853 \\ 8,4853 & 8,4853 & \lambda + 8/3 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

Olur. Böylece $\lambda_1 = -13,855$ $\lambda_{2,3} = 0,094 \pm 10,195j$ olarak bulunur. Buradan öz değerler gösteriyor ki E_1 eğer noktası ve E_2, E_3 ise eğer odak noktası olmaktadır.

Kesir dereceli kaotik Lorenz sistemi Denklem (3.9)'de gösterilmektedir [1];

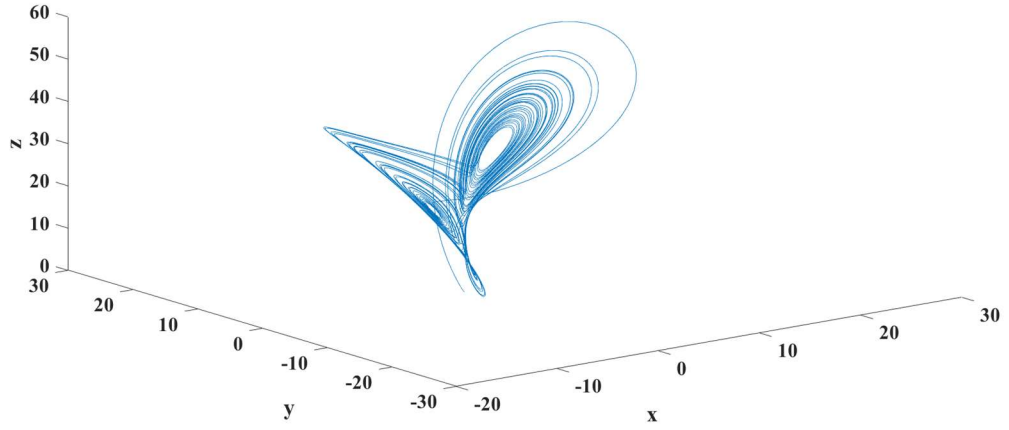
$$\begin{aligned} {}^aD_t^{q_1} x(t) &= \sigma(y(t) - x(t)) \\ {}^aD_t^{q_2} y(t) &= x(t)(\rho - z(t)) - y(t) \\ {}^aD_t^{q_3} z(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Burada, q_1, q_2, q_3 kesirli türev derecesidir.

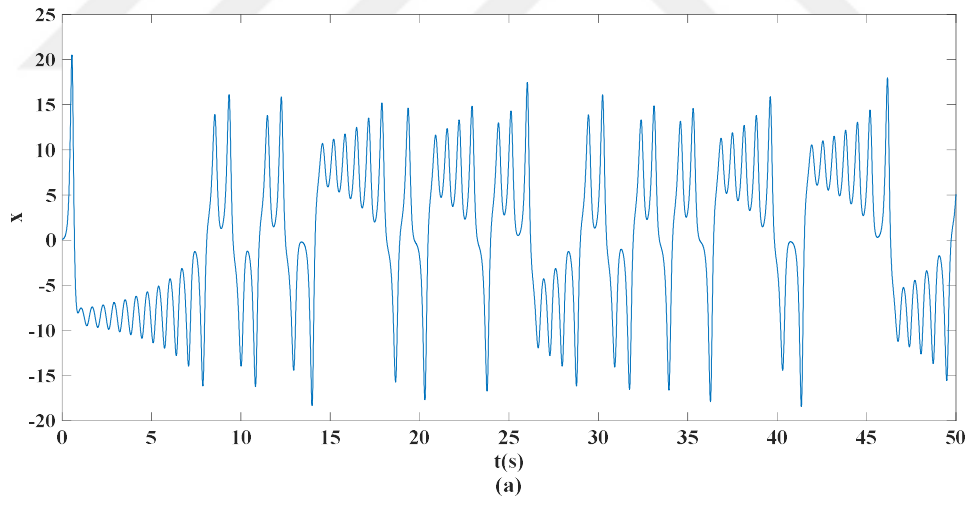
Kesir dereceli kaotik Lorenz sisteminin GL yöntemiyle ayırık zamanlı hali Denklem (3.10)'de gösterilmektedir.

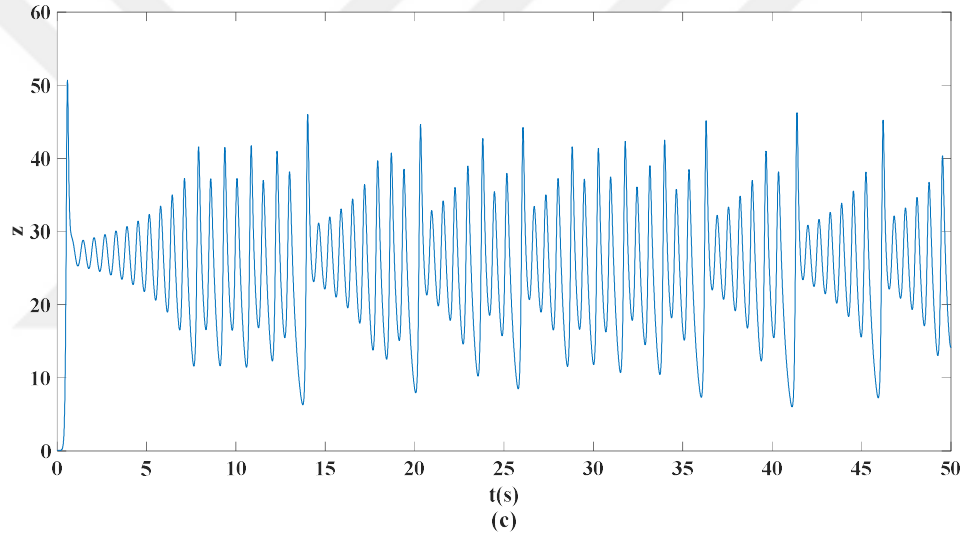
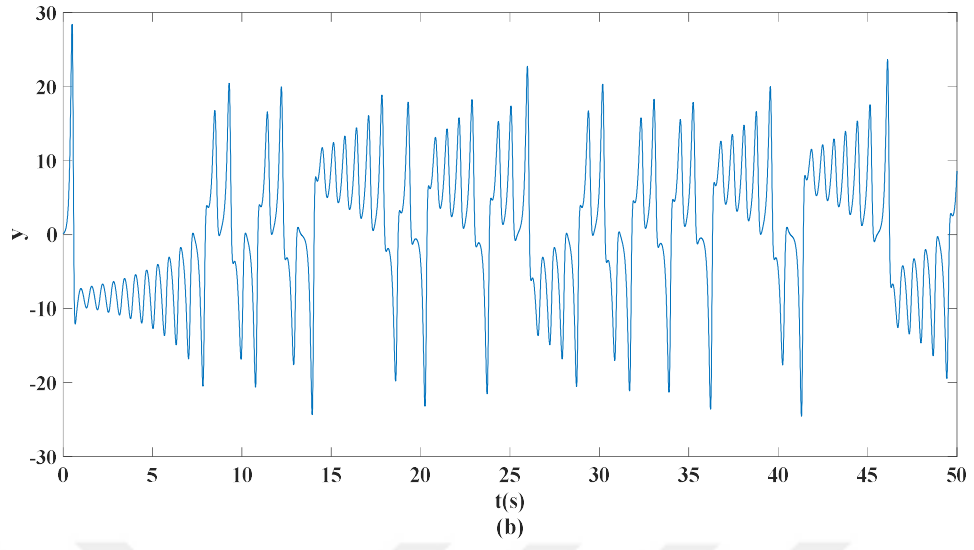
$$\begin{aligned} x(t_k) &= \left(\sigma(y(t_{k-1}) - x(t_{k-1})) \right) h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_1)} x(t_{k-j}) \\ y(t_k) &= \left(x(t_k)(\rho - x(t_{k-1})) - y(t_{k-1}) \right) h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{q_2} y(t_{k-j}) \\ z(t_k) &= \left(x(t_k)y(t_k) - \beta z(t_{k-1}) \right) h^{q_3} - \sum_{j=v}^k c_j^{q_3} z(t_{k-j}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Kesir dereceli Lorenz sisteminin kaotik kalabilmesi için gerekli en küçük derece Denklem (2.15)'e göre hesaplanmış ve simülasyonda $\sigma = 10$, $\rho = 28$ ve $\beta = 8/3$ başlangıç şartları ise $(x(0), y(0), z(0)) = (0.1, 0.1, 0.1)$ alınmıştır. Denklem (2.15)'e göre yapılan hesaplama sonucu en küçük derece $q > 0.9941$ olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.995$ alınmış ve bu dereceye ait durum uzay diyagramı ve durum değişkenlerinin zaman cevapları Şekil 3.1 ve Şekil 3.2'de sırasıyla gösterilmiştir. Ayrıca Şekil 3.3'de $q < 0.9941$ olacak şekilde 0.90 alınmış ve durum uzay diyagramı ve durum değişkenlerinin zaman cevapları Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'de sırasıyla gösterilmiştir.

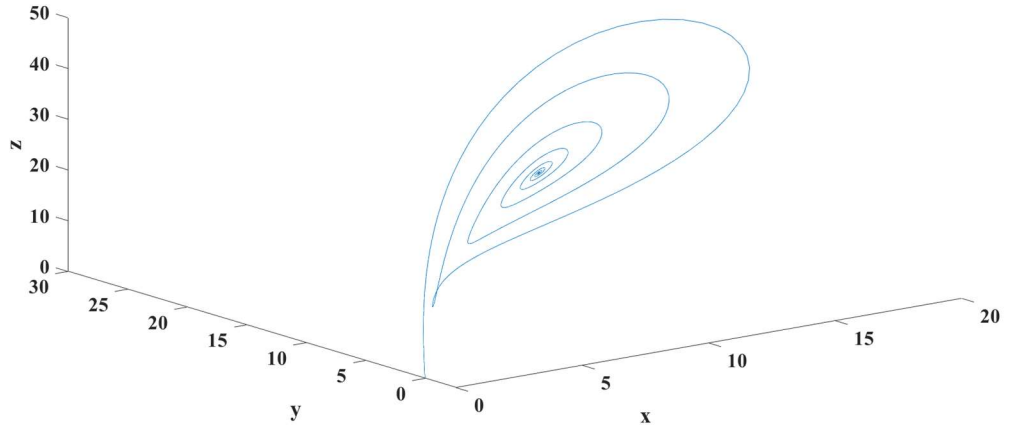


Şekil 3.1. Kesir dereceli kaotik Lorenz sistemi $q = 0.995$ için durum uzay diyagramı

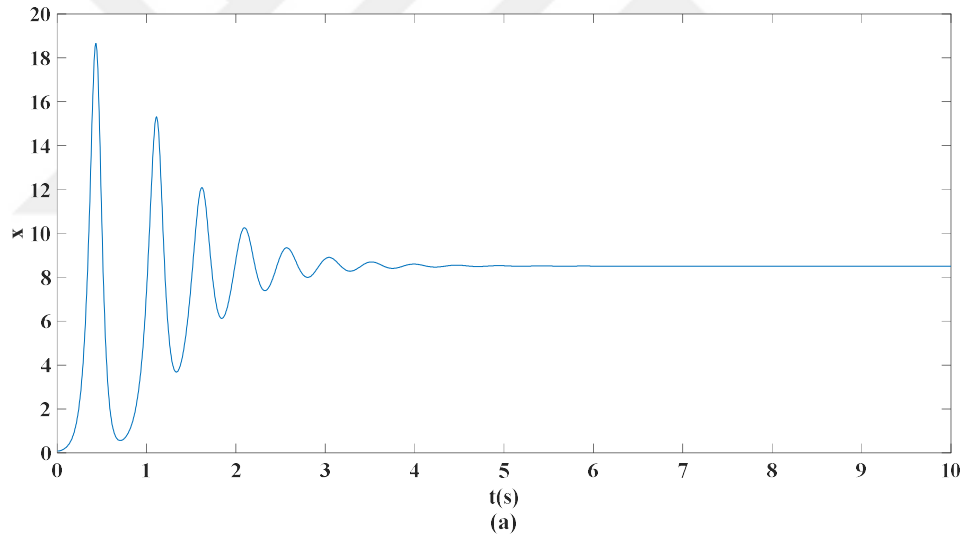


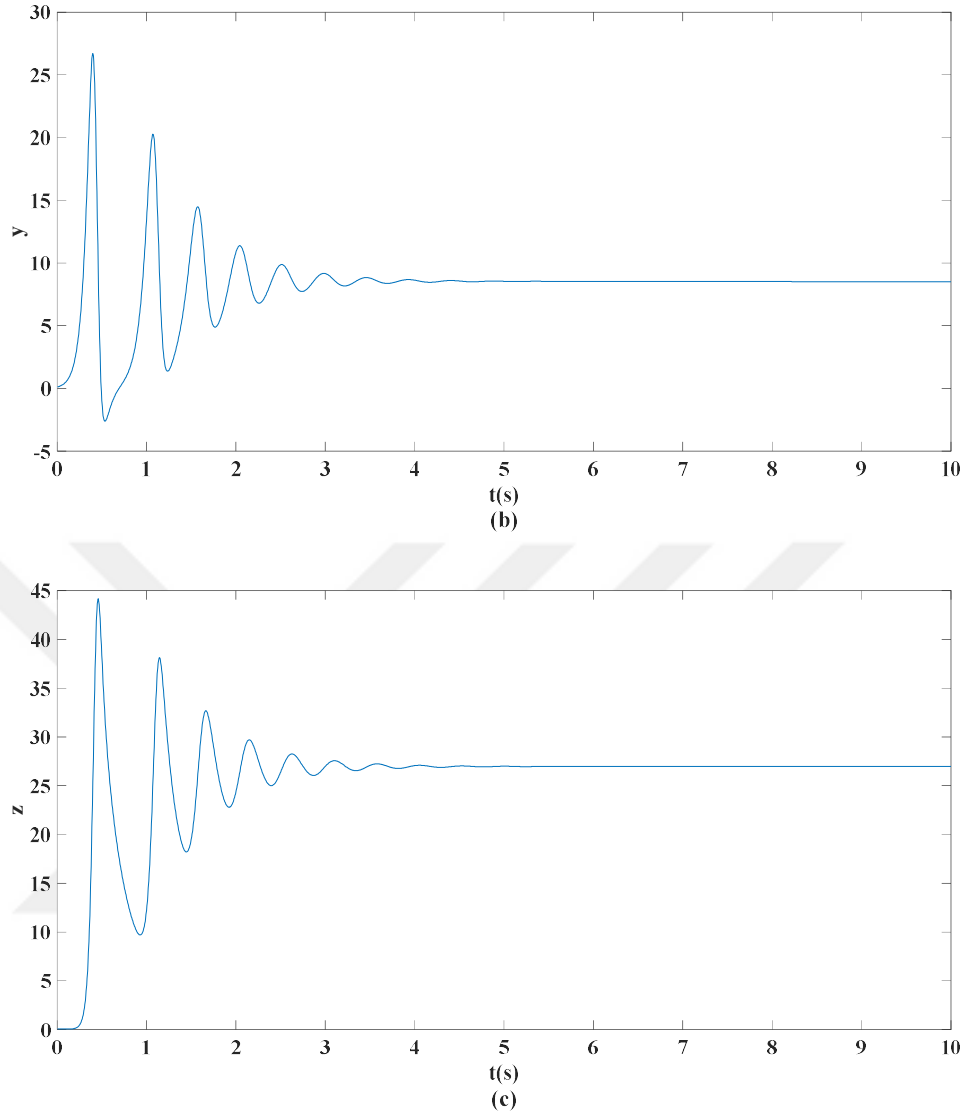


Şekil 3.2. Kesir dereceli Lorenz sistemi $q = 0.995$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları



Şekil 3.3. Kesir dereceli Lorenz sistemi $q = 0.90$ için durum uzay diyagramı





Şekil 3.4. Kesir dereceli Lorenz sistemi $q = 0.9$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları

Yukarıda görüldüğü üzere Şekil 3.1 ve Şekil 3.2’de Denklem (2.15)’e göre hesaplanan en küçük q değeri kullanılmış, Lorenz sisteminin durum-uzay diyagramı ve zaman cevapları elde edilmiştir. Elde edilen sümülasyon sonuçlarında sistemin $q = 0.995$ değerinde kaotik davranış sergilediği gösterilmiştir. Şekil 3.3 ve Şekil 3.4’de ise Denklem (2.15)’e göre hesaplanan değerden daha küçük $q = 0.90$ için sümülasyon sonuçları elde edilmiş ve sistemin kaotik davranış sergilemediği gösterilmiştir. Bu durumda kararlı dege noktalarından birine sistem yörüngesinin gittiği görülmektedir.

3.2. Kesir Dereceli Chen Sistemi

Chen ve Ueta 1999 yılında Denklem (3.11)’de tam dereceli Chen sistemini tanımladılar [10].

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(y(t) - x(t))$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = (c - a)x(t) - x(t)z(t) + cy(t) \quad (3.11)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = x(t)y(t) - bz(t)$$

Chen sistemi $a = 35$, $b = 3$ ve $c = 28$ değerlerinde kaotik davranış göstermektedir. Chen sisteminin üç tane denge noktası vardır; $E_1 = (0,0,0)$, $E_2 = (-\sqrt{b(2c-a)}, -\sqrt{b(2c-a)}, 2c-a)$, $E_3 = (\sqrt{b(2c-a)}, \sqrt{b(2c-a)}, 2c-a)$ olmaktadır. Böylece $E_2 = (7.9373, 7.9373, 21)$ ve $E_3 = (-7.9373, -7.9373, 21)$ olmaktadır. Sistemin başlangıç şartı ise $(x(0), y(0), z(0)) = (-9, -5, 14)$ alınmıştır. Ayrıca $E = (x^*, y^*, z^*)$ gibi bir denge noktası için Jacobian matrisi Denklem (3.12)'de gösterilmektedir.

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a - z^* & c & -x^* \\ y^* & x^* & -\beta \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Her bir denge noktası için Jacobian matrisi oluşturularak öz değerler E_1 için $\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 23,8359$ ve $\lambda_3 = -30,8359$ E_2 için $\lambda_1 = -18,4280$ $\lambda_{2,3} = 4.2140 \pm 14,8846j$ ve E_3 için $\lambda_1 = -18,4280$ $\lambda_{2,3} = 4.2140 \pm 14,8846j$ elde edilir. Buradan öz değerler gösteriyor ki E_1 eğer noktası ve E_2, E_3 ise eğer odak noktası olmaktadır.

Kesir dereceli Chen sistemi Denklem (3.13)'de tanımlanmaktadır [1];

$$aD_t^{q_1} x(t) = a(y(t) - x(t))$$

$$aD_t^{q_2} y(t) = (c - a)x(t) - x(t)z(t) + cy(t) \quad (3.13)$$

$$aD_t^{q_3} z(t) = x(t)y(t) - bz(t)$$

Burada, q_1, q_2, q_3 türev derecesidir.

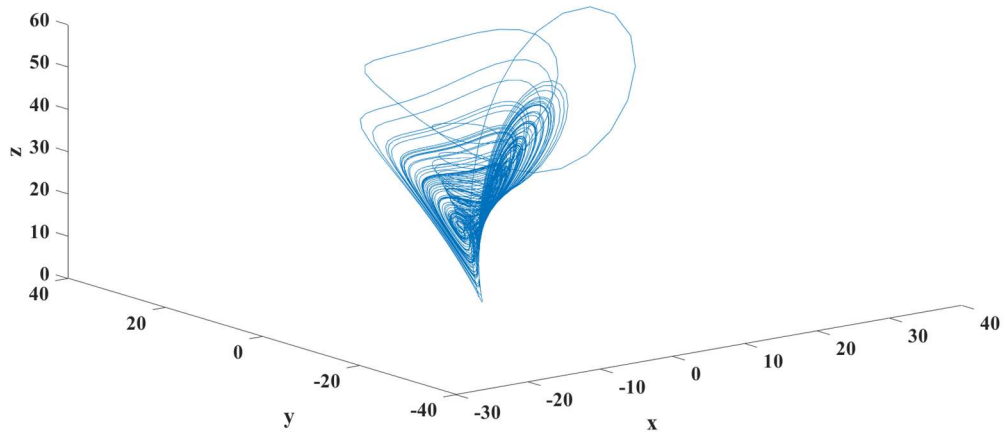
Kesir dereceli Chen sistemi nümerik çözümü Denklem (3.14)'de gösterilmiştir.

$$x(t_k) = \left(a(y(t_{k-1}) - x(t_{k-1})) \right) h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{q_1} x(t_{k-j})$$

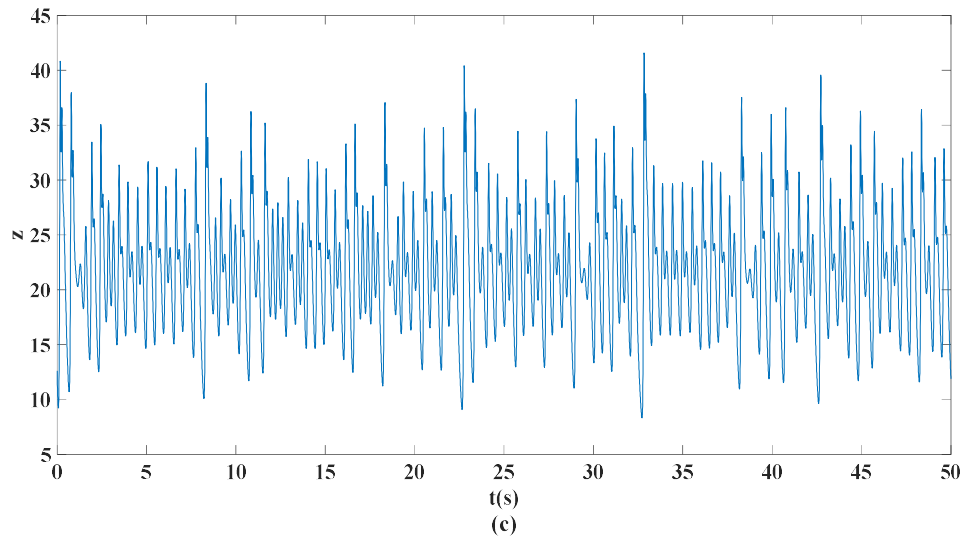
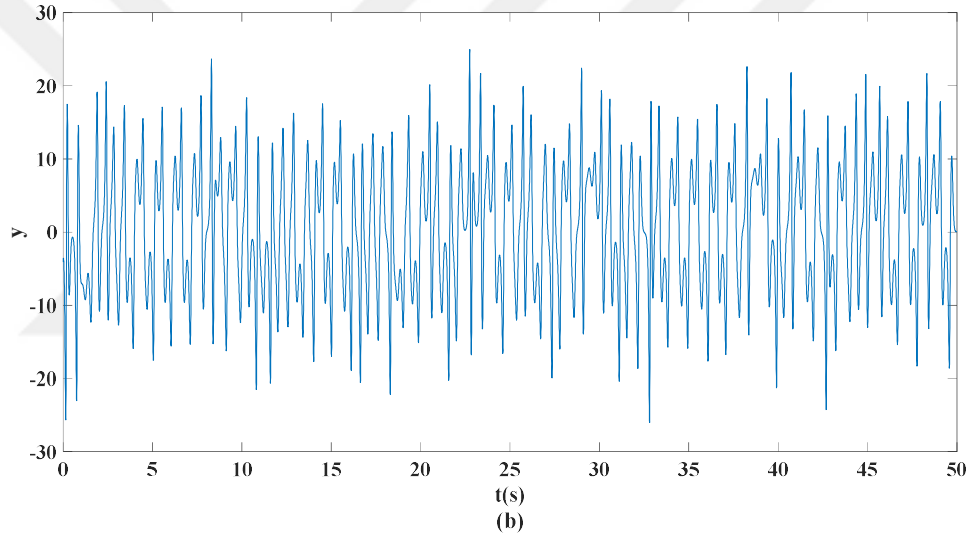
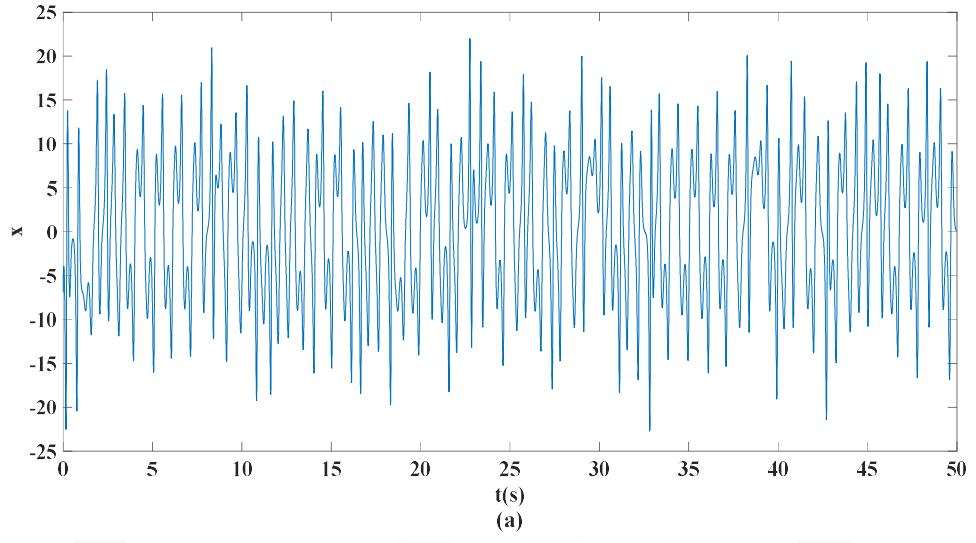
$$y(t_k) = (c - a)x(t_k) - x(t_k)z(t_{k-1}) + cy(t_{k-1})h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{q_2} y(t_{k-j}) \quad (3.14)$$

$$z(t_k) = (x(t_k)y(t_k) - bz(t_{k-1}))h^{q_3} - \sum_{j=v}^k c_j^{q_3} z(t_{k-j})$$

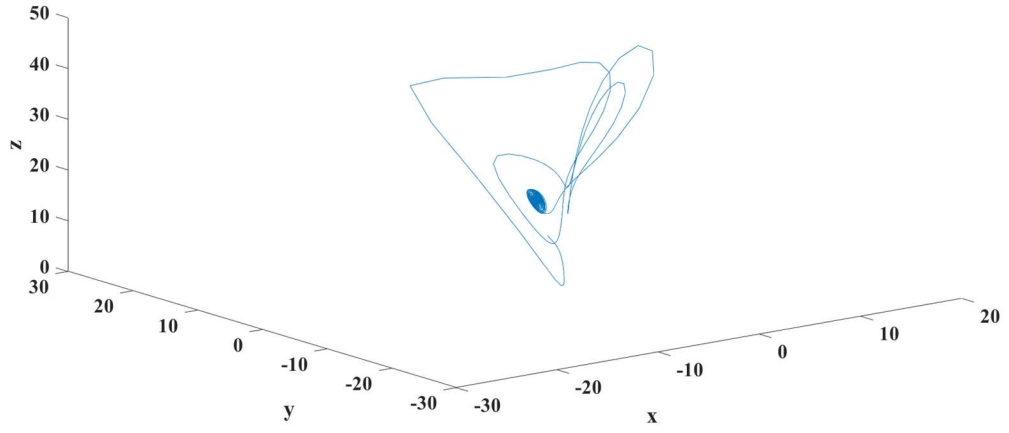
Kesir dereceli Chen sisteminin kaotik kalabilmesi için gerekli en küçük derece Denklem (2.15)'e göre hesaplanmış ve simülasyonda $(a, b, c) = (35, 3, 28)$ başlangıç şartları ise $(x(0), y(0), z(0)) = (-9, -5, 14)$ alınmıştır. Denklem (2.15)'e göre yapılan hesaplama sonucu en küçük derece $q > 0.8244$ olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ alınmış ve bu dereceye ait durum uzay diyagramı ve durum değişkenlerinin zaman cevapları Şekil 3.5 ve Şekil 3.6'da sırasıyla gösterilmiştir. Ayrıca Şekil 3.7'de $q < 0.8244$ olacak şekilde 0.72 alınmış ve durum uzay diyagramı ve durum değişkenlerinin zaman cevapları Şekil 3.7 ve Şekil 3.8'de sırasıyla gösterilmiştir.



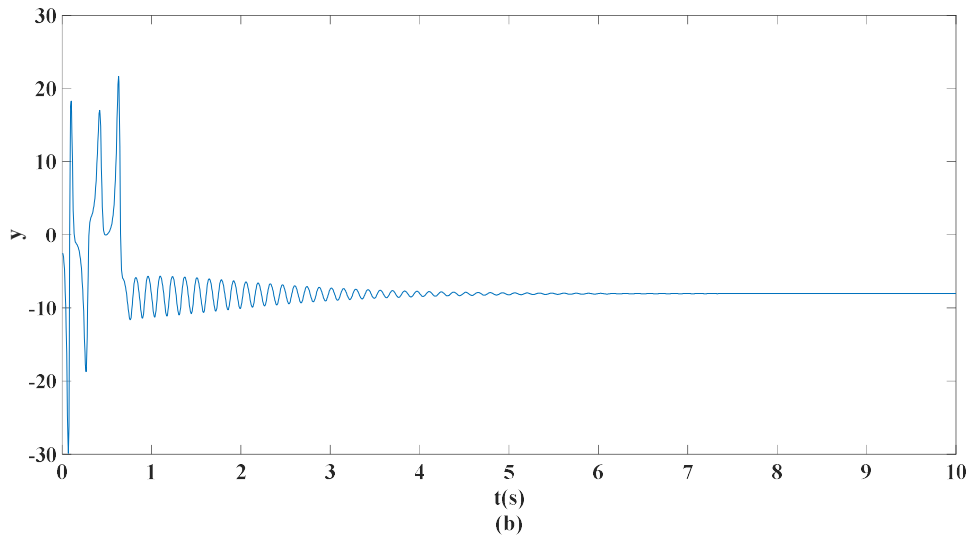
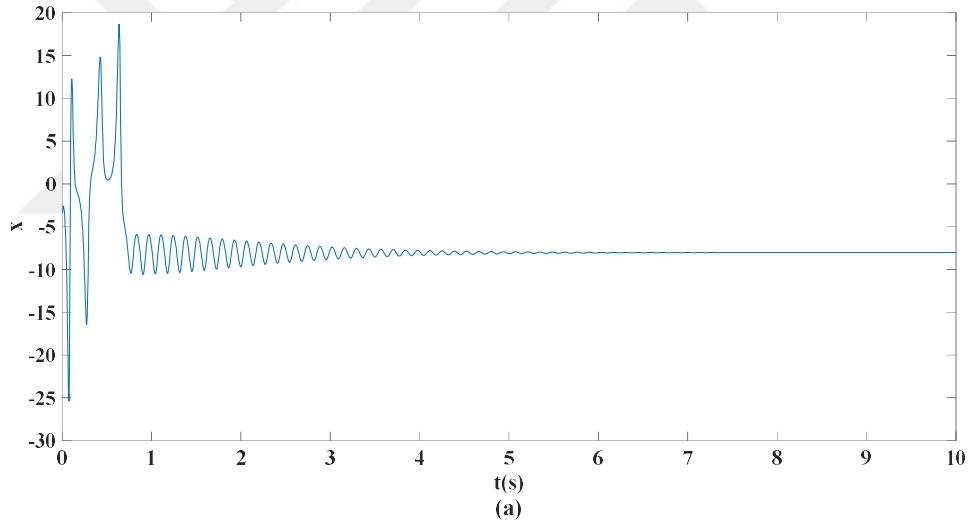
Şekil 3.5. Kesir dereceli Chen sistemi $q = 0.9$ için durum-uzay diyagramı

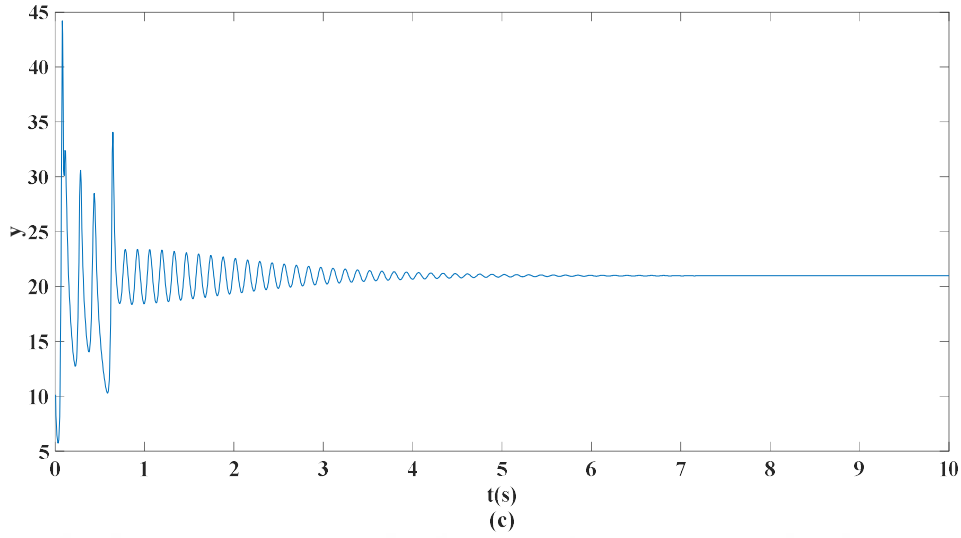


Şekil 3.6. Kesir dereceli Chen sistemi $q = 0.9$ için **a)** x **b)** y **c)** z durum değişkenlerinin zaman cevapları



Şekil 3.7. Kesir dereceli Chen sistemi $q = 0.72$ için durum uzay diyagramı





Şekil 3.8. Kesir dereceli Chen sistemi $q = 0.72$ için **a)** x **b)** y **c)** z durum değişkenlerinin zaman cevapları

Yukarıda görüldüğü üzere Şekil 3.5 ve Şekil 3.6’da Denklem (2.15)’e göre hesaplanan en küçük q değeri kullanılmış, Chen sisteminin durum-uzay diyagramı ve zaman cevapları elde edilmiştir. Elde edilen simülasyon sonuçlarında sistemin $q = 0.9$ değerinde kaotik davranış sergilediği gösterilmiştir. Şekil 3.7 ve Şekil 3.8’de ise Denklem (2.15)’e göre hesaplanan değerden daha küçük $q = 0.72$ için simülasyon sonuçları elde edilmiş ve sistemin kaotik davranış sergilemediği gösterilmiştir.

3.3. Kesir Dereceli Lü Sistemi

Lü ve Chen 2001 yılında Denklem (3.15)’de görüldüğü üzere Lü sistemini tanımladılar [11].

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(y(t) - x(t))$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -x(t)z(t) + cy(t) \quad (3.15)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = x(t)y(t) - bz(t)$$

Lü sistemi $a = 36$, $b = 3$ ve $c = 20$ değerlerinde kaotik davranış göstermektedir. Lü sisteminin üç tane denge noktası vardır; $E_1 = (0,0,0)$, $E_2 = (\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, c)$, $E_3 = (-\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, c)$ olmaktadır. Böylece $E_2 = (7.745, 7.745, 20)$ ve $E_3 = (-7.745, -7.745, 20)$ olmaktadır. Sistemin

başlangıç şartı ise $(x(0), y(0), z(0)) = (1, -0.5, 1.5)$ alınmıştır. Ayrıca $E = (x^*, y^*, z^*)$ gibi bir denge noktası için Jacobian matrisi Denklem (3.16)'da gösterilmektedir.

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ -z^* & c & -x^* \\ y^* & x^* & -\beta \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Her bir denge noktası için Jacobian matrisi oluşturularak öz değerler E_1 için $\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 20$ ve $\lambda_3 = -36$ E_2 için $\lambda_1 = -22,6516$ $\lambda_{2,3} = 1,8258 \pm 13,6887j$ ve E_3 için $\lambda_1 = -22,6516$ $\lambda_{2,3} = 1,8258 \pm 13,9887j$ elde edilir. Buradan öz değerler gösteriyor ki E_1 eğer noktası ve E_2, E_3 ise eğer odak noktası olmaktadır.

Kesir dereceli Lü sistemi Denklem (3.17)'de tanımlanmaktadır [1];

$$\begin{aligned} aD_t^{q_1} x(t) &= a(y(t) - x(t)) \\ aD_t^{q_2} y(t) &= -x(t)z(t) + cy(t) \\ aD_t^{q_3} z(t) &= x(t)y(t) - bz(t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

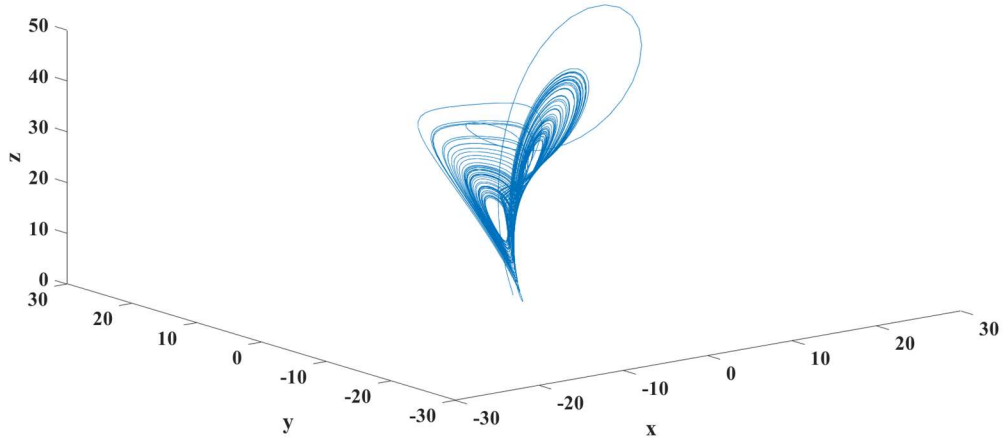
Burada, q_1, q_2, q_3 türev derecesidir.

Kesir dereceli Lü sistemi nümerik çözümü Denklem (3.18)'de tanımlanmaktadır;

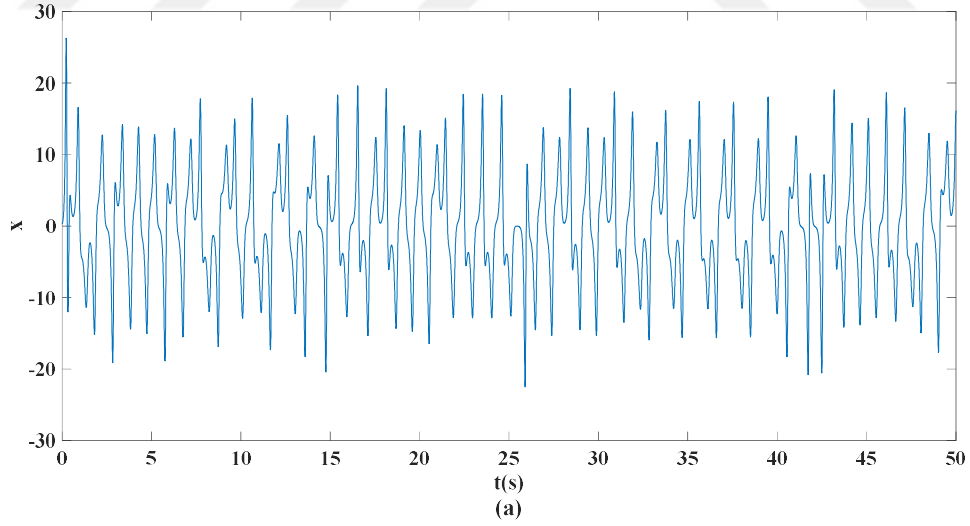
$$\begin{aligned} x(t_k) &= \left(a(y(t_{k-1}) - x(t_{k-1})) \right) h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{q_1} x(t_{k-j}) \\ y(t_k) &= (-x(t_k)z(t_{k-1}) + cy(t_{k-1})) h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{q_2} y(t_{k-j}) \\ z(t_k) &= (x(t_k)y(t_k) - bz(t_{k-1})) h^{q_3} - \sum_{j=v}^k c_j^{q_3} z(t_{k-j}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

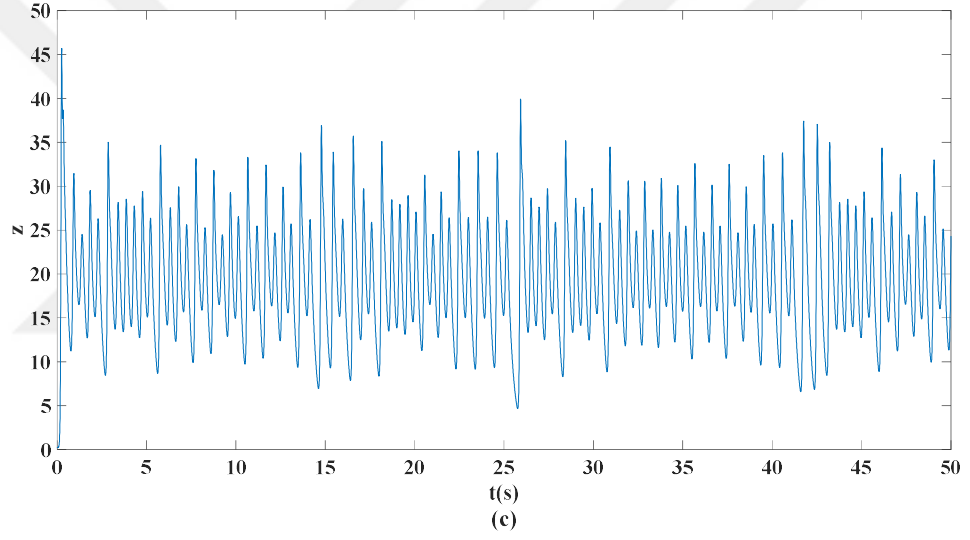
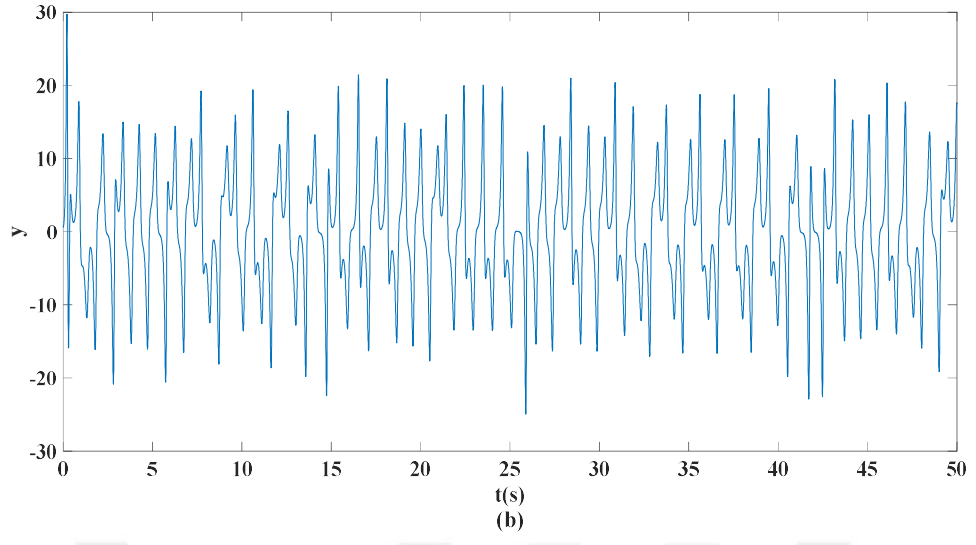
Kesir dereceli Lü sisteminin kaotik kalabilmesi için gerekli en küçük derece Denklem (2.15)'e göre hesaplanmış ve simülasyonda $(a, b, c) = (36, 3, 20)$ sistemin başlangıç şartı ise $(x(0), y(0), z(0)) = (1, -0.5, 1.5)$ alınmıştır. Denklem (2.15)'e göre yapılan hesaplama sonucu en küçük derece $q > 0.9156$ olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$ alınmış ve bu dereceye ait durum uzay diyagramı ve durum değişkenlerinin zaman cevapları Şekil 3.9 ve Şekil

3.10’da sırasıyla gösterilmiştir. Ayrıca Şekil 3.11’de $q < 0.9156$ olacak şekilde 0.8 alınmış ve durum uzay diyagramı ve durum değişkenlerinin zaman cevapları Şekil 3.11 ve Şekil 3.12’de sırasıyla gösterilmiştir.

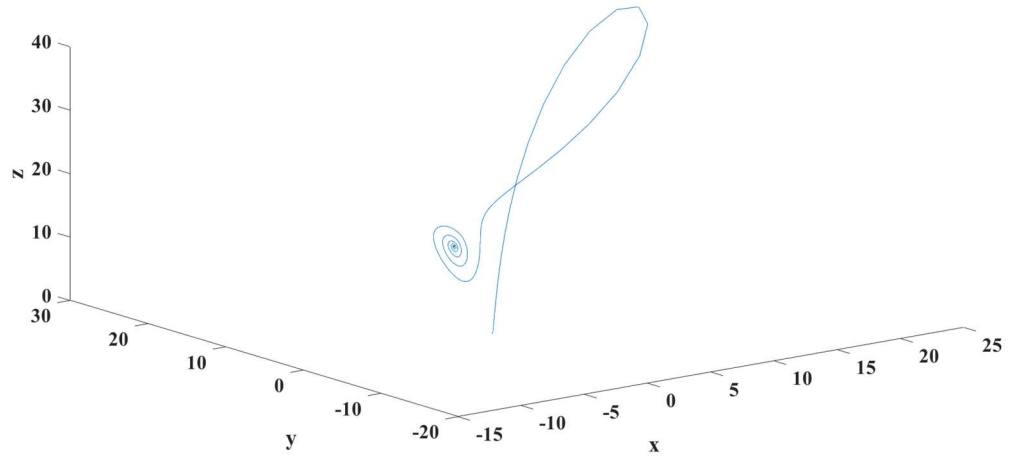


Şekil 3.9. Kesir dereceli Lü sisteminin $q = 0.95$ için durum-uzay diyagramı

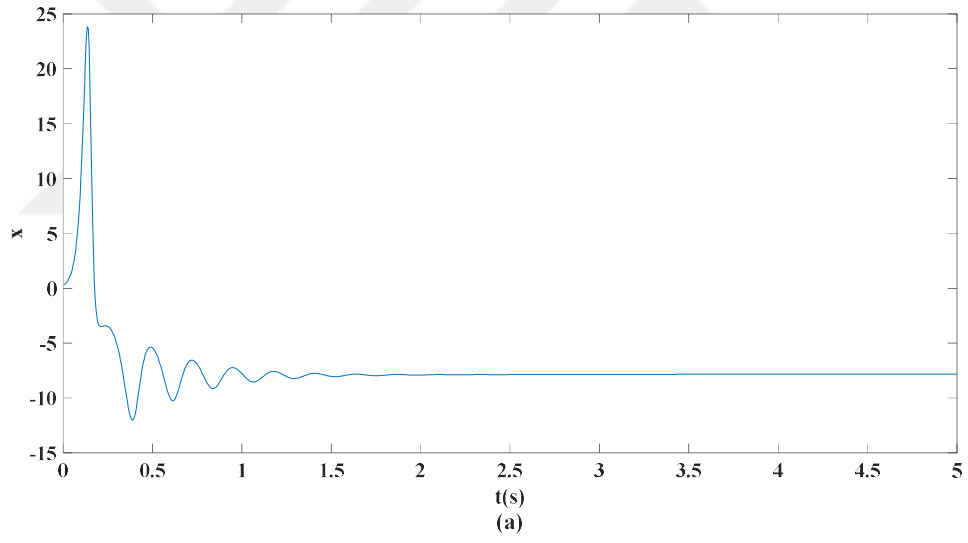


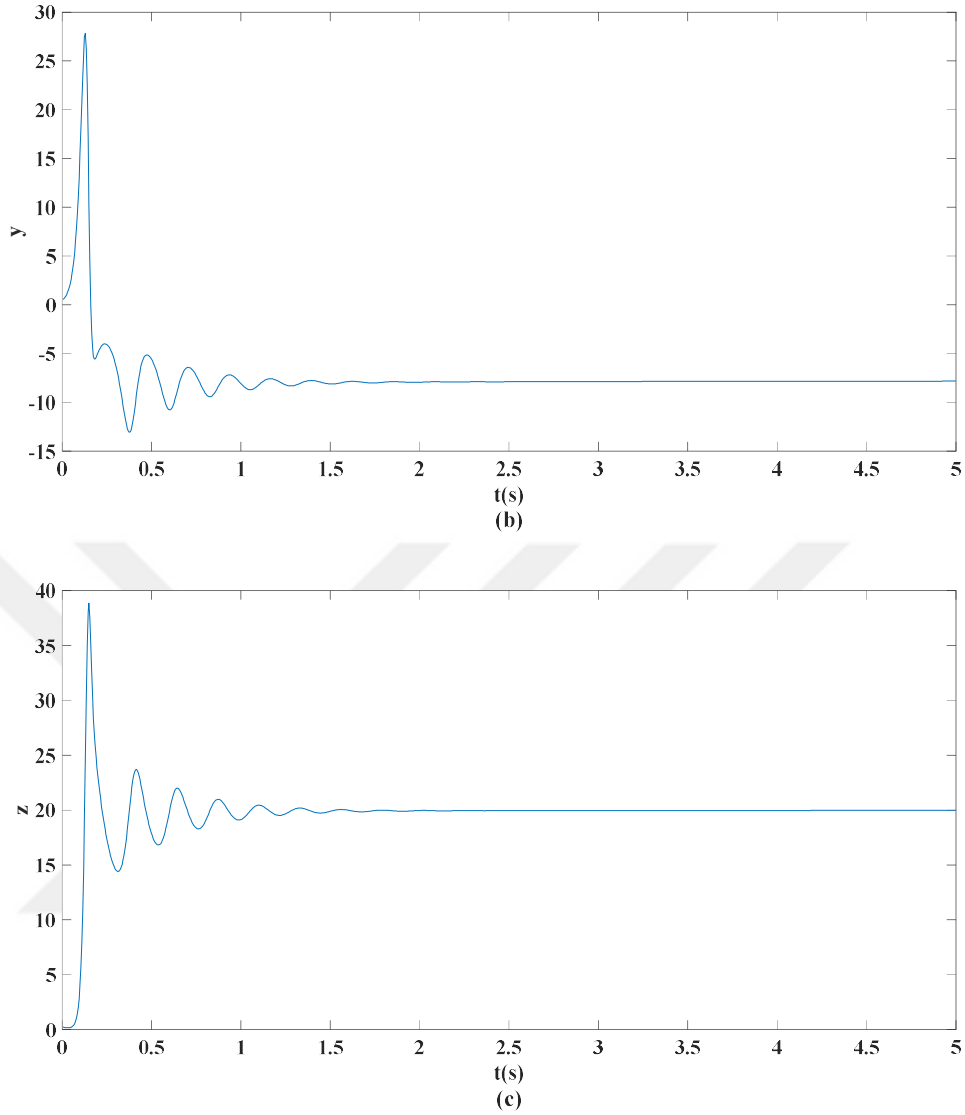


Şekil 3.10. Kesir dereceli Lü sistemi $q = 0.9$ için **a)** x **b)** y **c)** z durum değişkenlerinin zaman cevapları



Şekil 3.11. Kesir dereceli Lü sistemi $q = 0.8$ için durum-uzay diyagramı





Şekil 3.12. Kesir dereceli Lü sistemi $q = 0.8$ için **a)** x **b)** y **c)** z durum değişkenlerinin zaman cevapları

Yukarıda görüldüğü üzere Şekil 3.9 ve Şekil 3.10'da Denklem (2.15)'e göre hesaplanan en küçük q değeri kullanılmış, Lü sisteminin durum-uzay diyagramı ve zaman cevapları elde edilmiştir. Elde edilen sümülasyon sonuçlarında sistemin $q = 0.95$ değerinde kaotik davranış sergilediği gösterilmiştir. Şekil 3.11 ve Şekil 3.12'de ise Denklem (2.15)'e göre hesaplanan değerden daha küçük $q = 0.8$ için sümülasyon sonuçları elde edilmiş ve sistemin kaotik davranış sergilemediği gösterilmiştir.

3.4. Kesir Dereceli Liu Sistemi

Liu ve diğerleri 2009 yılında Denklem (3.19)'de görüldüğü üzere Liu sistemini tanımlamışlardır [1].

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) - ey^2(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = by(t) - kx(t)z(t) \quad (3.19)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = -cz(t) + mx(t)y(t)$$

Liu sistemi $a = e = 1$, $b = 2.5$ $c = 5$ ve $k = m = 4$ değerlerinde kaotik davranış göstermektedir. Liu sisteminin beş tane denge noktası vardır. Bunlardan ikisi kompleks diğer üçü is reeldir. Böylece $E_1 = (0,0,0)$, $E_2 = (-88.388, -0.940150, 0.664786)$ ve $E_3 = (-88.388, 0.940150, -0.664786)$ olmaktadır. Sistemin başlangıç şartı ise $(x(0), y(0), z(0) = (0.2, 0, 0.5)$ alınmıştır. $E = (x^*, y^*, z^*)$ gibi bir denge noktası için Jacobian matrisi Denklem (3.20)'de gösterilmektedir.

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ -z^* & c & -x^* \\ y^* & x^* & -\beta \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Her bir denge noktası için Jacobian matrisi oluşturularak öz değerler E_1 için $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = -5$ ve $\lambda_3 = -2,5$ E_2 için $\lambda_1 = -38.7767$ $\lambda_{2,3} = 0,4438837 \pm 3.346383j$ ve E_3 için $\lambda_1 = -38.7767$ $\lambda_{2,3} = 0,4438837 \pm 3.346383j$ elde edilir. Buradan öz değerler gösteriyor ki E_1 eğer noktası ve E_2, E_3 ise eğer odak noktası olmaktadır.

Kesir dereceli Liu sistemi Denklem (3.21)'de tanımlanmaktadır [1];

$$aD_t^{q_1}x(t) = -ax(t) - ey^2(t)$$

$$aD_t^{q_2}y(t) = by(t) - kx(t)z(t) \quad (3.21)$$

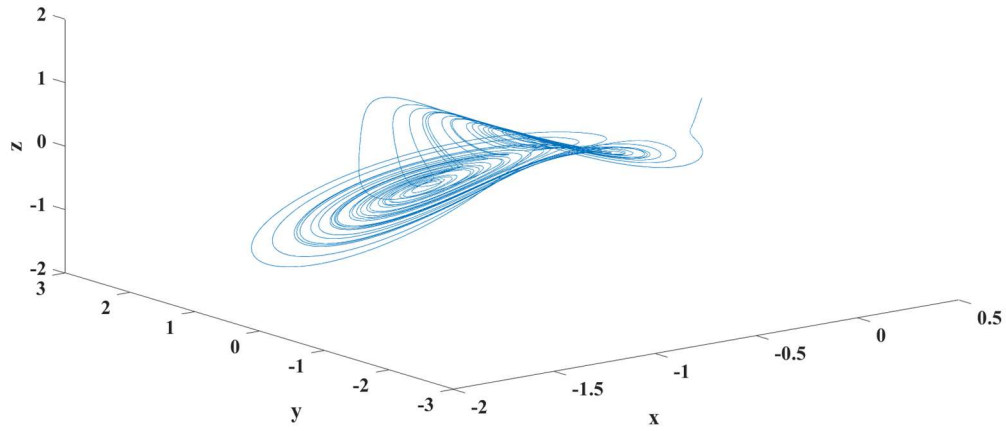
$$aD_t^{q_3}z(t) = -cz(t) + mx(t)y(t)$$

Burada, q_1, q_2, q_3 türev derecesidir.

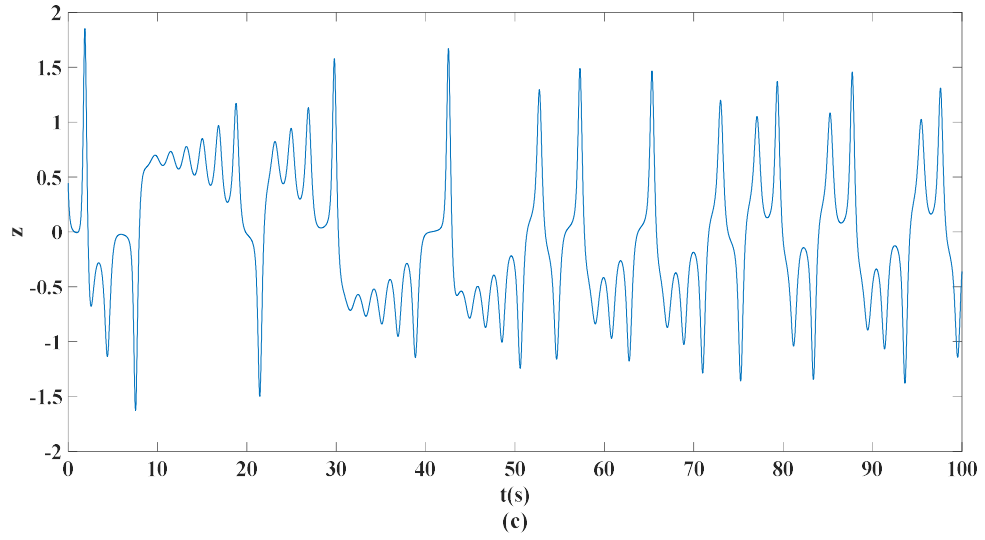
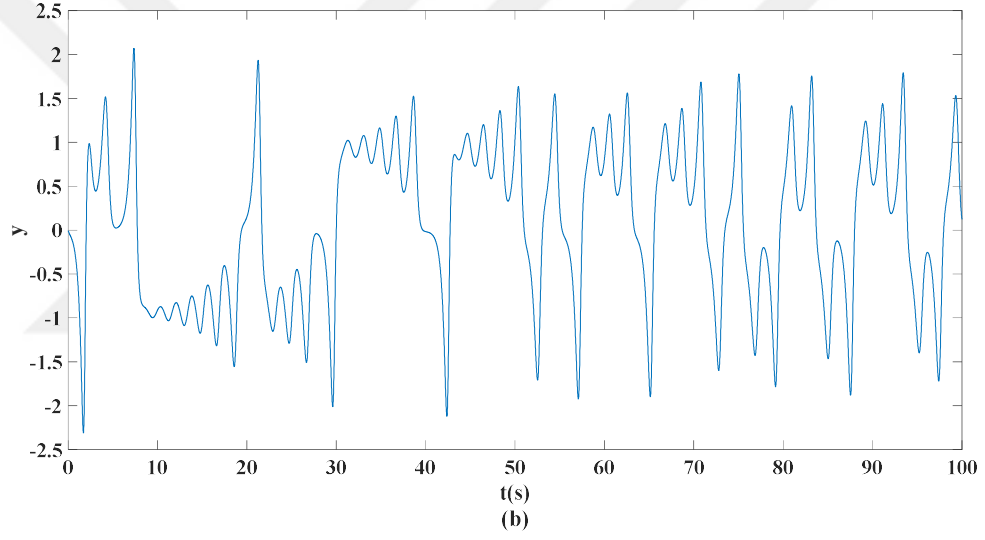
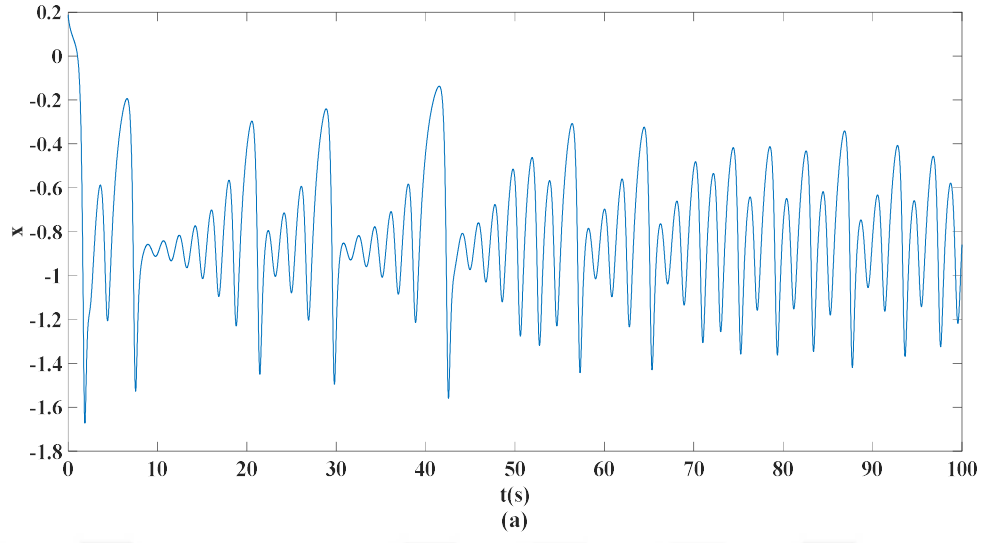
Kesir dereceli Liu sistemi nümerik çözümü Denklem (3.22)'da tanımlanmaktadır;

$$\begin{aligned}
x(t_k) &= (-ax(t_{k-1}) - ey^2(t_{k-1}))h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{q_1} x(t_{k-j}) \\
y(t_k) &= (by(t_{k-1}) - kx(t_k)z(t_{k-1}))h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{q_2} y(t_{k-j}) \\
z(t_k) &= (-cz(t_{k-1}) + mx(t_k)y(t_k))h^{q_3} - \sum_{j=v}^k c_j^{q_3} z(t_{k-j})
\end{aligned} \tag{3.22}$$

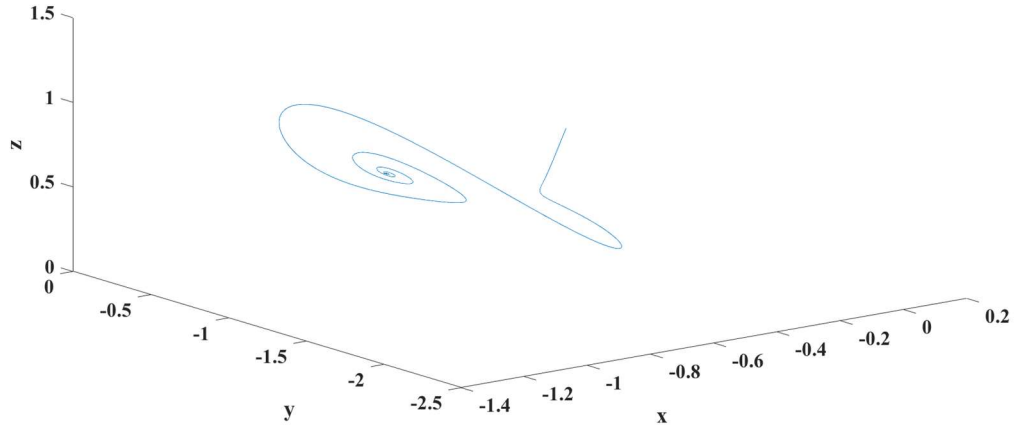
Kesir dereceli Liu sisteminin kaotik kalabilmesi için gerekli en küçük derece Denklem (2.15)'e göre hesaplanmış ve simülasyonda $(a, b, e, k, m) = (1, 2.5, 1, 4, 4)$ sistemin başlangıç şartı ise $(x(0), y(0), z(0)) = (0.2, 0, 0.5)$ alınmıştır. Denklem (2.15)'e göre yapılan hesaplama sonucu en küçük derece $q > 0.916$ olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$ alınmış ve bu dereceye ait durum uzay diyagramı ve durum değişkenlerinin zaman cevapları Şekil 3.13 ve Şekil 3.14'de sırasıyla gösterilmiştir. Ayrıca Şekil 3.15'de $q < 0.916$ olacak şekilde 0.8 alınmış ve durum uzay diyagramı ve durum değişkenlerinin zaman cevapları Şekil 3.15 ve Şekil 3.16'da sırasıyla gösterilmiştir.



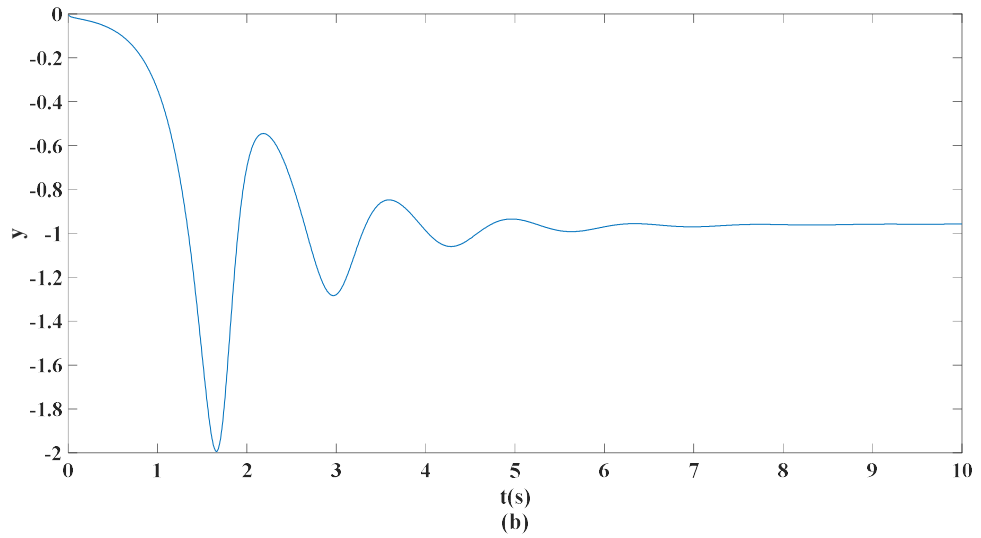
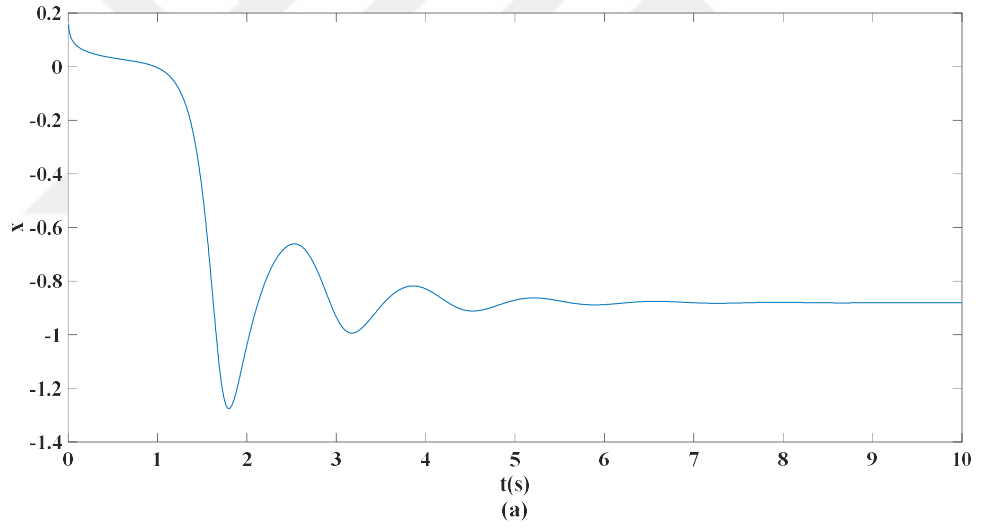
Şekil 3.13. Kesir dereceli Liu sistemi $q = 0.95$ için durum uzay diyagramı

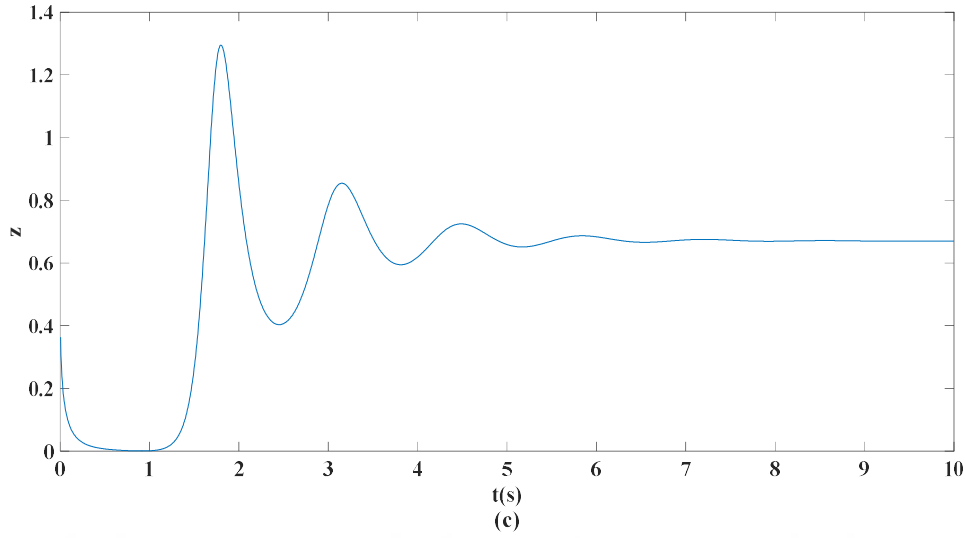


Şekil 3.14. Kesir dereceli Liu sistemi $q = 0.95$ için **a)** x **b)** y **c)** z durum değişkenlerinin zaman cevapları



Şekil 3.15. Kesir dereceli Liu sistemi $q = 0.8$ için durum-uzay diyagramı





Şekil 3.16. Kesir dereceli Liu sistemi $q = 0.8$ için **a)** x **b)** y **c)** z durum değişkenlerinin zaman cevapları

Yukarıda görüldüğü üzere Şekil 3.13 ve Şekil 3.14’de Denklem (2.15)’e göre hesaplanan en küçük q değeri kullanılmış, Liu sisteminin durum-uzay diyagramı ve zaman cevapları elde edilmiştir. Elde edilen simülasyon sonuçlarında sistemin $q = 0.95$ değerinde kaotik davranış sergilediği gösterilmiştir. Şekil 3.15 ve Şekil 3.16’da ise Denklem (2.15)’e göre hesaplanan değerden daha küçük $q = 0.8$ için simülasyon sonuçları elde edilmiş ve sistemin kaotik davranış sergilemediği gösterilmiştir.

3.5. Kesir Dereceli Rössler Sistemi

Otto E. Rössler 1976 yılında Denklem (3.23)’de görüldüğü üzere Rössler sistemini tanımlamıştır [12].

$$\frac{dx(t)}{dt} = -(y(t) + z(t))$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) + ay(t) \quad (3.23)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = b + z(t)(x(t) - c)$$

Rössler sistemi $a = 0.2$, $b = 0.2$ ve $c = 5.7$ değerlerinde kaotik davranış göstermektedir.

Rössler sisteminin iki tane denge noktası vardır; $E_{1,2} = \left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}; -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}; \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right)$

böylece $E_1 = (9.98998, -19.97997, 19.97997)$ ve $E_2 = (0.10010, -0.20020, 0.20020)$ olmaktadır. Sistemin başlangıç şartı ise $(x(0), y(0), z(0)) = (0.5, 1.5, 0.1)$ alınmıştır. Ayrıca $E = (x^*, y^*, z^*)$ gibi bir denge noktası için Jacobian matrisi Denklem (3.24)'de gösterilmektedir.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z^* & 0 & x^* - c \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Her bir denge noktası için Jacobian matrisi oluşturularak öz değerler E_1 için $\lambda_1 = -0.47595$ $\lambda_{2,3} = 0,007017 \pm 4.57910j$ ve E_2 için $\lambda_1 = -9.98800$ $\lambda_{2,3} = 0,249007 \pm 0.96808j$ elde edilir. Buradan öz değerler gösteriyor ki E_1 ve E_2 eğer odak noktası olmaktadır.

Kesir dereceli Rössler sistemi Denklem (3.25)'de tanımlanmaktadır [13];

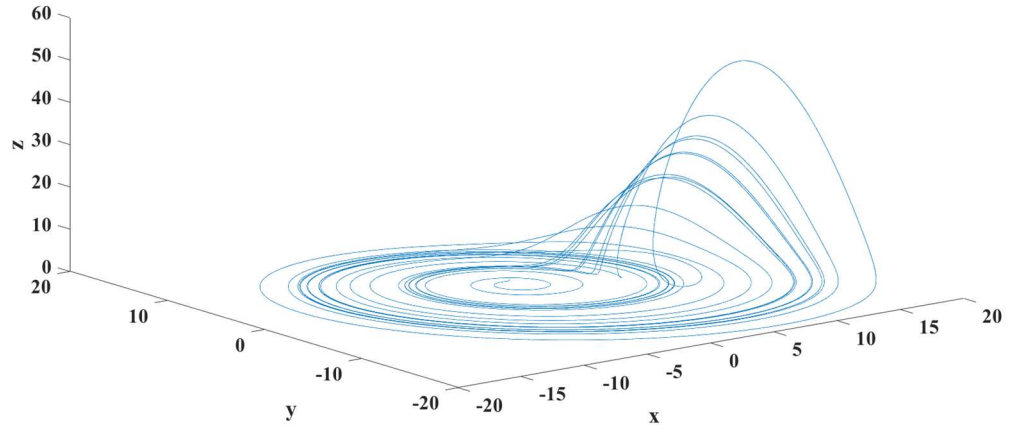
$$\begin{aligned} aD_t^{q_1} x(t) &= -(y(t) + z(t)) \\ aD_t^{q_2} y(t) &= x(t) + ay(t) \\ aD_t^{q_3} z(t) &= b + z(t)(x(t) - c) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Burada, q_1, q_2, q_3 türev derecesidir.

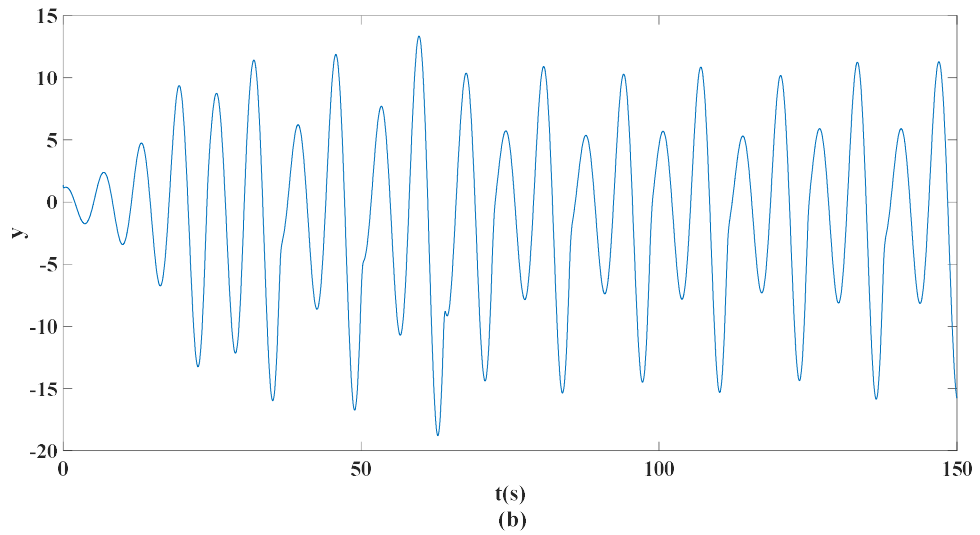
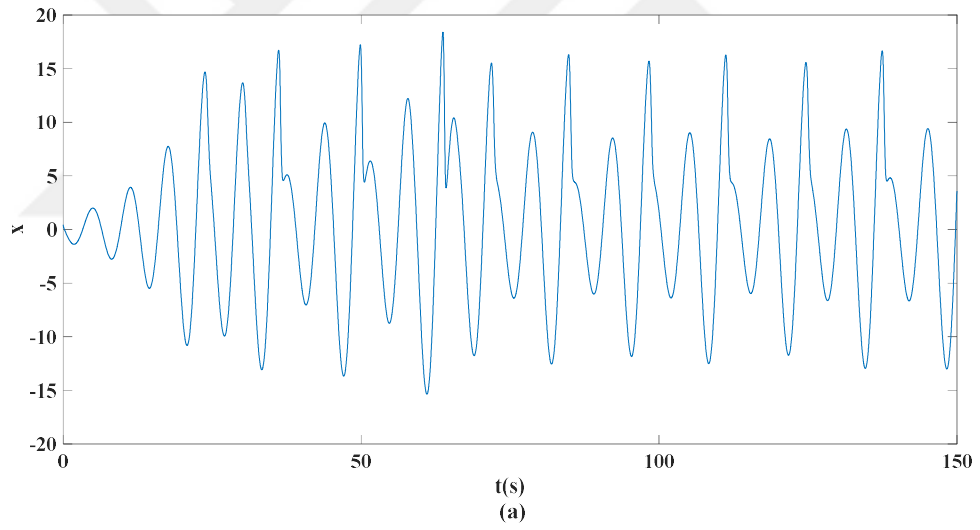
Kesir dereceli Rössler sistemi nümerik çözümü Denklem (3.26)'de tanımlanmaktadır;

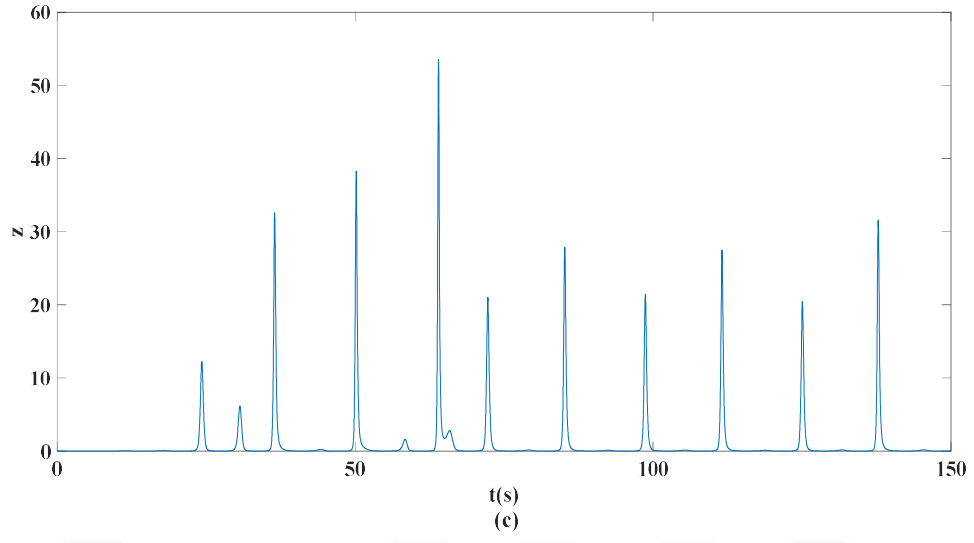
$$\begin{aligned} x(t_k) &= (-ay(t_{k-1}) - z(t_{k-1}))h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{q_1} x(t_{k-j}) \\ y(t_k) &= (x(t_k) + ay(t_{k-1}))h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{q_2} y(t_{k-j}) \\ z(t_k) &= (b + z(t_{k-1})(x(t_k) - c))h^{q_3} - \sum_{j=v}^k c_j^{q_3} z(t_{k-j}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Kesir dereceli Rössler sisteminin kaotik kalabilmesi için gerekli en küçük derece Denklem (2.15)'e göre hesaplanmış ve simülasyonda $(a, b, c) = (0.5, 0.2, 10)$ sistemin başlangıç şartı ise $(x(0), y(0), z(0)) = (0.5, 1.5, 0.1)$ alınmıştır. Denklem (2.15)'e göre yapılan hesaplama sonucu en küçük derece $q > 0.839$ olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ alınmış ve bu dereceye ait durum uzay diyagramı ve durum değişkenlerinin zaman cevapları Şekil 3.17 ve Şekil 3.18'de sırasıyla gösterilmiştir. Ayrıca Şekil 3.19'da $q < 0.839$ olacak şekilde 0.8 alınmış ve durum uzay diyagramı ve zaman cevapları Şekil 3.19 ve Şekil 3.20'de sırasıyla gösterilmiştir.

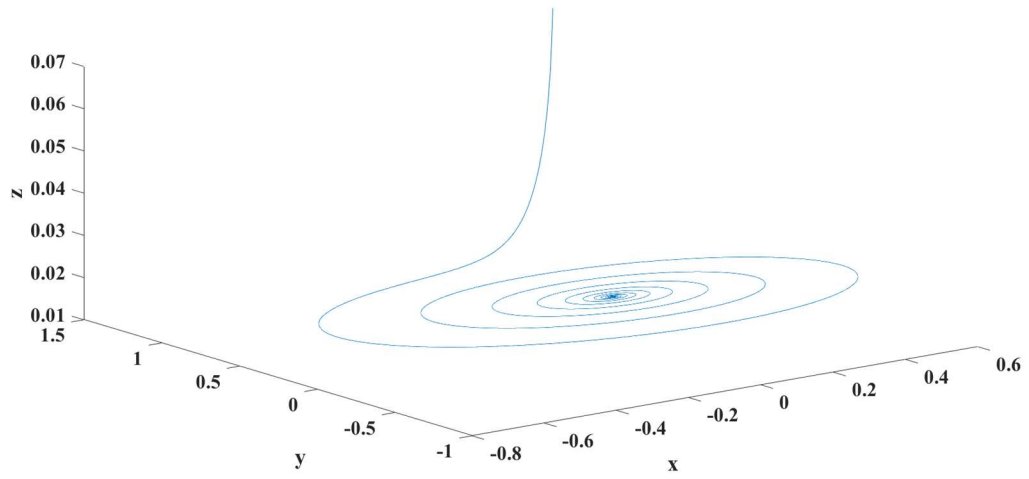


Şekil 3.17. Kesir dereceli Rössler sistemi $q = 0.9$ için durum uzay diyagramı

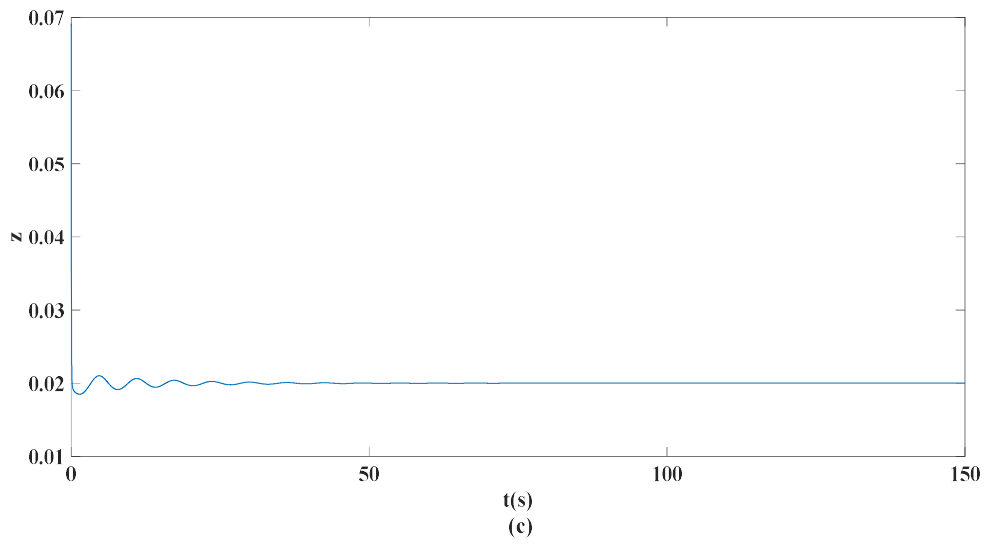
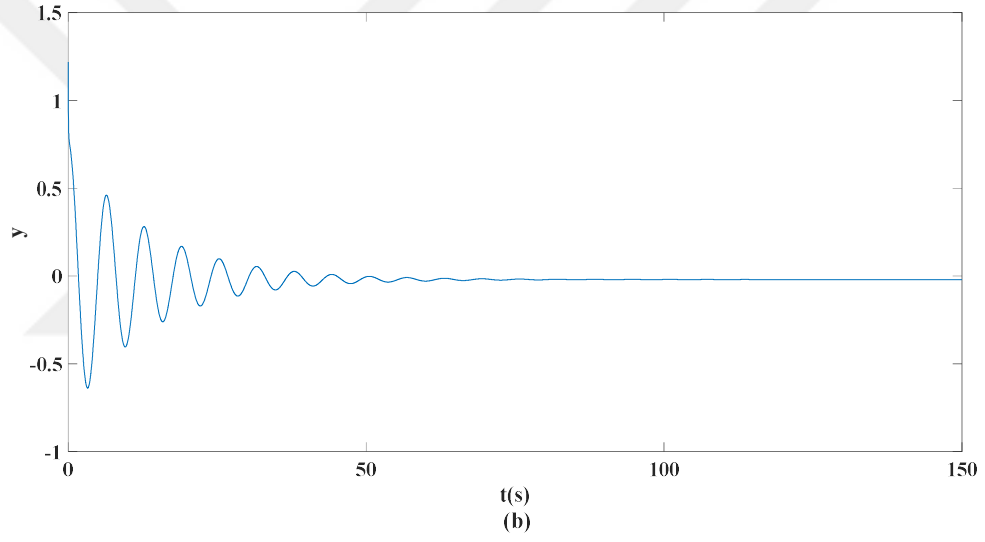
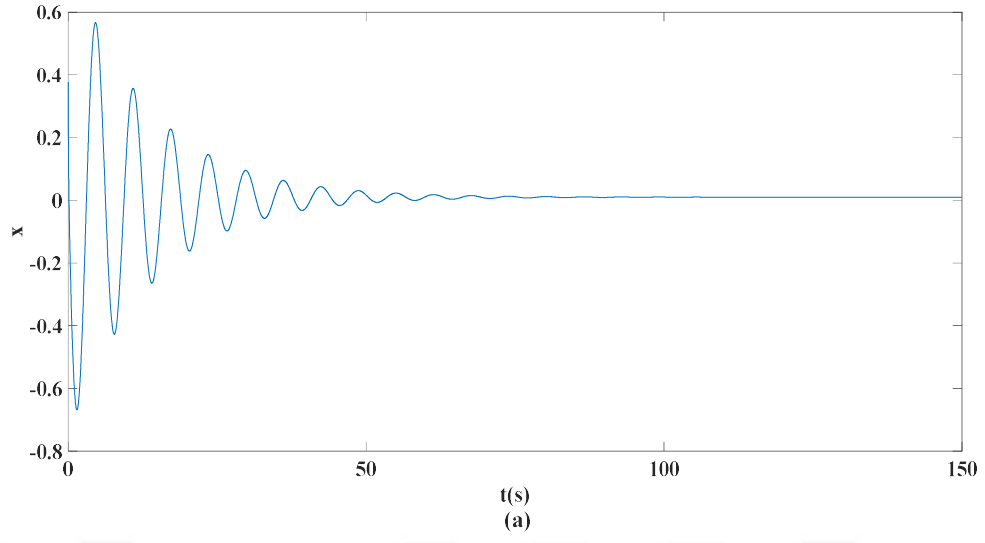




Şekil 3.18. Kesir dereceli Rössler sistemi $q = 0.9$ için **a)** x **b)** y **c)** z durum değişkenlerinin zaman cevapları



Şekil 3.19. Kesir dereceli Rössler sistemi $q = 0.8$ için durum uzay diyagramı



Şekil 3.20. Kesir dereceli Rössler sistemi $q = 0.8$ için **a)** x **b)** y **c)** z durum değişkenlerinin zaman cevapları

Yukarıda görüldüğü üzere Şekil 3.17 ve Şekil 3.18’de Denklem (2.15)’e göre hesaplanan en küçük q değeri kullanılmış, Rössler sisteminin durum-uzay diyagramı ve zaman cevapları elde edilmiştir. Elde edilen simülasyon sonuçlarında sistemin $q = 0.9$ değerinde kaotik davranış sergilediği gösterilmiştir. Şekil 3.19 ve Şekil 3.20’de ise Denklem (2.15)’e göre hesaplanan değerden daha küçük $q = 0.8$ için simülasyon sonuçları elde edilmiş ve sistemin kaotik davranış sergilemediği gösterilmiştir.



4. KESİR DERECELİ KAOTİK SİSTEMLERİN ANALOG DEVRE TASARIMI

Bilindiği üzere kesirli matematik sistem modelleme kapasitesini artırdığından son on yıllarda kesirli modeller rastgele sayı üretimi, kaos, sinyal işleme, kontrol, yapay sinir ağları vb alanlarında sıkça kullanılmaktadır [29]. Bu yüzden bu tür yapıdaki sistemlerin fiziksel olarak gerçekleştirilmesine ihtiyaç doğmuştur. Bu amaçla elektriksel olarak kesir dereceli doğrusal olmayan bir sistemin matematiksel modeline eş bir analog elektronik devre tasarımı gerçekleştirmek için çeşitli çalışmalar yapılmıştır [30-38]. Bu bölümde kesir dereceli doğrusal olmayan bir sistemin eşdeğer elektronik devresinin fraktans yapısı kullanılarak nasıl tasarlanacağı anlatılarak elektronik devre simülasyonları gerçekleştirecektir.

Kesir dereceli sistemlerin frekans cevap analizi ve uygulamaları her ne kadar analitik olarak hesaplanabilse de sonsuz hafızaya sahip olan bu sistemlerin gerçekleştirilmesi ve analitik zaman cevap hesaplamalarının yapılması oldukça zordur. Dolayısıyla kesir dereceli bir sistemi en yüksek doğrulukta gerçekleyen tamsayı dereceli yaklaşım modellerinin hesaplanması gerekmektedir [16]. Bu sayede kesir dereceli integral alıcı tam dereceli transfer fonksiyonlarıyla tanımlanabilecek, zincir fraktans olarak isimlendirilen pasif devre elemanlarıyla gerçekleştirilebilecektir.

4.1. Kesir Dereceli Sistemlerin Tamsayı Yaklaşım Metotları

Klasik yöntemlerin kesir dereceli sistemlere doğrudan uygulanması önünde bazı zorluklar bulunmaktadır. Frekans tabanlı metotlar doğrudan kullanılabilmelerine rağmen kesirli dereceli sistemlerin zaman cevabını analitik olarak hesaplamaları kolaylıkla yapılamamaktadır. Ancak günümüzde hesaplama gücü arttığından dolayı nümerik yöntemler kullanılarak kesir dereceli sistemlerin zaman cevabını elde etmek kolaylaşmıştır. Kesir dereceli sistemlerin gerçek zamanlı uygulamaları, ayrık zamanlı elektronik ortamlarda gerçekleştirmek benzer yöntemlerle mümkün iken analog devre tasarımları için farklı yaklaşımlara ihtiyaç vardır. Kesir dereceli sistemlerin zaman cevabı hesaplamalarında kullanılan yöntemlerden bir tanesi eşdeğer tamsayı modellerinin elde edilmesidir [39]. Bu yöntemler frekans tabanlı yöntemlerdir ve bu yöntemler aynı zamanda kesir dereceli analog devre tasarımlarının gerçekleştirilmesine olanak sağlamaktır. Literatürde sıkça kullanılan bazı yaklaşım yöntemler aşağıda verilmiştir.

4.1.1. Charef Yaklaşım Metodu

Bir kesirli dereceli sistem transfer fonksiyonunun en yaygın kullanımı Denklem (4.1)'de gösterilmektedir [40].

$$H(s) = \frac{1}{s^q} \quad (q \in R^+) \quad (4.1)$$

Kesirli integratör olarak adlandırılan bu ifade de $s = j\omega$ kompleks frekans ve $0 < q < 1$ olacak şekilde pozitif reel bir sayıdır. $s = j\omega$ alınmasının sebebi kesir dereceli integral operatörünün frekans cevabını yaklaşık olarak sağlayacak tam dereceli transfer fonksiyonu elde etmek içindir.

Kesir dereceli tek kutuplu bir sistemin transfer fonksiyonu Denklem (4.2)'de ki gibi tanımlanabilir.

$$H(s) = \frac{1}{(1+s/p_T)^q} \quad (4.2)$$

Burada p_T kesir dereceli sistemin kutbu, q ise sistemin kesir derecesidir. Bu model rekürsif olarak Denklem (4.3)'de verildiği gibi yazılır.

$$\hat{H}(s) = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{p_i})} \quad (4.3)$$

Burada $a = 10^{y/10(1-q)}$, $b = 10^{y/10q}$ ve $ab = 10^{y/10q(1-q)}$ olacak şekilde tanımlansın. Yaklaşık modelin frekans cevabı tahmininde maksimum kabul edilebilir hata y dB olursa, yaklaşık rasyonel fonksiyonun kutup ve sıfırları Denklem (4.4)'de verilen formüller ile hesaplanır. Kutup ve sıfırların sayısı istenilen bant genişliğine bağlıdır ve N değerinin hesaplanması için Denklem (4.6)'da verilen ifade kullanılır.

$$p_0 = p_T \sqrt{b}, p_i = p_0(ab)^i, z_i = ap_0(ab)^i \quad (4.4)$$

$$\hat{H}(s) = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + \frac{s}{ap_0(ab)^i})}{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{p_0(ab)^i})} \quad (4.5)$$

$$N = \left\lceil \frac{\log(\frac{\omega_{max}}{p_0})}{\log(ab)} \right\rceil + 1 \quad (4.6)$$

Böylece istenilen frekans aralığında belirli bir hatayla kesir dereceli integral operatörünün frekans karakteristiğiyle benzer tam dereceli transfer fonksiyonlarıyla elde etmek mümkün olacaktır.

4.1.2. Carlson Yaklaşım Metodu

Kesir dereceli elemanlar ve transfer fonksiyonları Carlson yöntemi olarak bilinen formül dikkate alınarak rekürsif olarak yaklaşılabılır, bu model Newton'un $(1/s)^{1/n}$ herhangi bir tamsayı için $n > 1$ yaklaşım metodunu baz alır [41]. Carlson yaklaşımı $f(x) = x^n - \alpha = 0$ matematiksel ifadesini temel alır.

Eğer $G(s)$ rasyonel bir transfer fonksiyon ve $H(s) = [G(s)]^q$ olacak şekilde kesir dereceli bir transfer fonksiyon ise $H(s)$ Denklem (4.7)'de olduğu gibi yaklaşılr.

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(p-m)[H_{i-1}(s)]^2 + (p+m)G(s)}{(p+m)[H_{i-1}(s)]^2 + (p-m)G(s)} \quad (4.7)$$

Başlangıç değeri $H_0(s) = 1$

4.1.3. Matsuda Yaklaşım Metodu

Eğer $G(s) = s^q$ ve tamsayı karşılığı $R(s)$ ise, $G(s)$ 'in $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ frekans kazançları ayrı ayrı hesaplanabilir [42]. Bu durumda Matsuda tamsayı eşdeğer transfer fonksiyonuna Denklem (4.8)'de verildiği gibi yaklaşılr.

$$G(s) = d_0(\omega_0) + \frac{s - \omega_0}{d_1(\omega_1) + \frac{s - \omega_1}{d_2(\omega_2) + \frac{s - \omega_2}{\dots}}} \quad (4.8)$$

Denklem (4.8)'de ki parametreler aşağıdaki gibidir.

$$d_0(\omega) = |G(j\omega)|$$

$$d_{k+1}(\omega) = \frac{\omega - \omega_k}{d_k(\omega) - d_k(\omega_k)}$$

4.1.4. Oustaloup Yaklaşım Metodu

Oustaloup metodu seçilen frekans bandı içerisinde $[\omega_l, \omega_h]$, burada ω_l düşük frekansı ifade ederken ω_h yüksek frekans anlamına gelir [43]. Oustaloup yaklaşım metodu Denklem (4.9)'da verildiği gibidir.

$$s^v = k \prod_{n=1}^N \frac{1 + (s/\omega_{z,n})}{1 + (s/\omega_{p,n})} \quad (4.9)$$

Denklem (4.9)'da ki parametreler aşağıdaki gibidir.

$$\omega_{z,1} = \omega_l \sqrt{n}$$

$$\omega_{p,n} = \omega_{z,n} \dot{\epsilon}; n = 1, \dots, N$$

$$\omega_{z,n+1} = \omega_{p,n} \eta; n = 1, \dots, N - 1$$

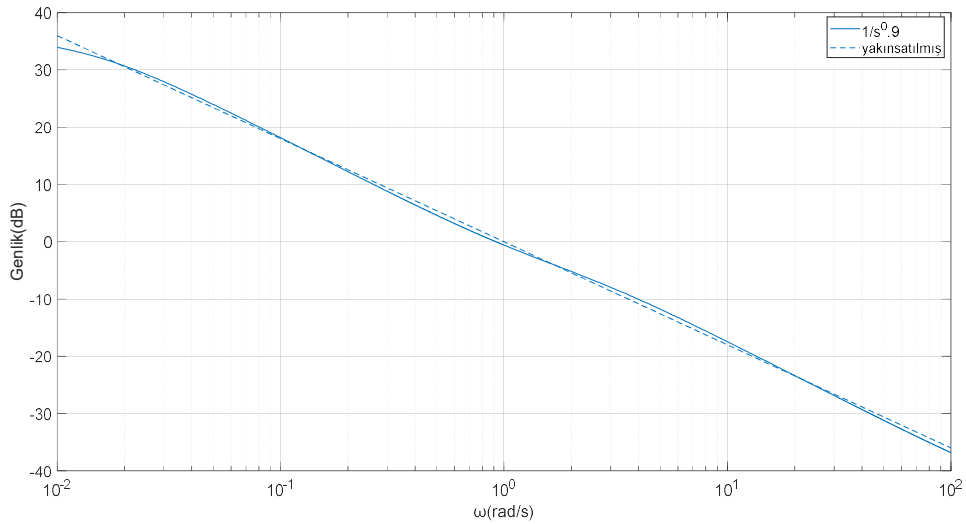
$$\dot{\epsilon} = (\omega_h/\omega_l)^{v/N}$$

$$\eta = (\omega_h/\omega_l)^{(1-v)/N}$$

4.2. Transfer Fonksiyon Yaklaşımı

Buradaki amaç yukarıda verilen yaklaşım yöntemlerinden biri olan Charef metodu ile sistemin frekans domeni davranışını yaklaşık olarak belirlemektir. Bu durum $0 < q < 1$ için gerçekleştirilecektir. Yaklaşım bir başlangıç kırılma noktası, hata oranı dB ve yaklaşımdaki kutup sayısı seçilerek oluşturulmuştur. Bant genişliğinin frekans limiti izin verilen hata ve kutup sayısı değiştirilerek ayarlanabilir. Böylece istenilen frekans bandında arzu edilen yaklaşım gerçekleştirilir. Tablo-1’de $\omega_{max} = 100 \text{ rad/s}$ ve $p_T = 0.01$ varsayılarak kesir derecesi q 0.1’den başlayarak 0.1 artışla 0.9’a kadar $H(s) = \frac{1}{s^q}$ için elde edilen transfer fonksiyonlarını vermektedir. Hesaplama kabul edilen maksimum hata $y = 2 \text{ dB}$ dir [44].

Matlab ortamında Wajdi tarafından önerilen Tablo 4.1’de gösterilen yakınsatılmış tam sayı dereceli transfer fonksiyon ve $\frac{1}{s^{0.9}}$ integratör Bode diyagramı çizdirilmiş ve yakınsatılmış transfer fonksiyonun hemen hemen aynı çıktıyı verdiği Şekil 4.1’de gösterilmiştir.



Şekil 4.1. Yakınsatılmış tam sayı dereceli transfer fonksiyonu ve $\frac{1}{s^{0.9}}$ integratörü Bode diyagramı

Tablo 4.1. $y = 2dB$ 0.1-0.9 dereceli lineer transfer fonksiyon yaklaşımı

q	$H(s)$
$\frac{1}{s^{0.1}}$	$\frac{1584.8932(s + 0.1668)(s + 27.83)}{(s + 0.1)(s + 16.68)(s + 2783)}$
$\frac{1}{s^{0.2}}$	$\frac{79.4328(s + 0.05623)(s + 1)(s + 17.78)}{(s + 0.03162)(s + 0.5623)(s + 10)(s + 177.8)}$
$\frac{1}{s^{0.3}}$	$\frac{39.8107(s + 0.0416)(s + 0.3728)(s + 3.34)(s + 29.94)}{(s + 0.02154)(s + 0.1931)(s + 1.73)(s + 15.51)(s + 138.9)}$
$\frac{1}{s^{0.4}}$	$\frac{35.4813(s + 0.03831)(s + 0.261)(s + 1.778)(s + 12.12)(s + 82.54)}{(s + 0.01778)(s + 0.1212)(s + 0.8254)(s + 5.623)(s + 38.31)(s + 261)}$
$\frac{1}{s^{0.5}}$	$\frac{15.8486(s + 0.03981)(s + 0.2512)(s + 1.585)(s + 10)(s + 63.1)}{(s + 0.01585)(s + 0.1)(s + 0.631)(s + 3.981)(s + 25.12)(s + 158.5)}$
$\frac{1}{s^{0.6}}$	$\frac{10.7978(s + 0.04642)(s + 0.3162)(s + 2.154)(s + 14.68)(s + 100)}{(s + 0.01468)(s + 0.1)(s + 0.6813)(s + 4.642)(s + 31.62)(s + 215.4)}$
$\frac{1}{s^{0.7}}$	$\frac{9.3633(s + 0.06449)(s + 0.578)(s + 5.179)(s + 46.42)(s + 416)}{(s + 0.01389)(s + 0.1245)(s + 1.116)(s + 10)(s + 89.62)(s + 803.1)}$
$\frac{1}{s^{0.8}}$	$\frac{5.3088(s + 0.1334)(s + 2.371)(s + 42.17)(s + 749.9)}{(s + 0.01334)(s + 0.2371)(s + 4.217)(s + 74.99)(s + 1334)}$
$\frac{1}{s^{0.9}}$	$\frac{2.2675(s + 1.292)(s + 215.4)}{(s + 0.01292)(s + 2.154)(s + 359.4)}$

4.3. Fraktans Elemanı

Devre teorisinde bir devre tamsayı olmayan mertebeden özelliklere sahip olabilir. Kesir dereceli integratörün tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonu kullanılarak analog devre uygulamasının gerçekleştirilebilir olması fraktans olarak bilinen bir elektriksel devre elemanı düşüncesini ortaya atmıştır [16]. Devrenin kesir dereceli bir performans sergilemesi elektronik devrede fraktans olarak adlandırılır [11]. Kondansatör olan bir devreden geçen akımın genel formu Denklem (4.9)'da verilmiştir.

$$i(t) = \frac{V}{ht^q} \quad t > 0 \text{ ve } 0 < q < 1 \text{ için} \quad (4.9)$$

Burada h kapasite ve dielektrik türüyle ilgili bir sabit iken q kesir derecesidir. Bu terminal akımının giriş voltajına bağlı olduğunu ifade eden bir güç yasasıdır. Giriş geriliminin Laplace transformu Denklem (4.10)'da verilmiştir.

$$V(s) = \frac{V}{s} \quad (4.10)$$

Ve $i(t)$ 'nin Laplace transformu,

$$I(s) = \frac{\Gamma(1-q)}{hs^{1-q}} V \quad (4.11)$$

Burada $\Gamma(.)$ Gama fonksiyonu olduğu daha önce bahsedilmişti. İki nokta arasındaki empedans Denklem (4.12)'de tanımlanmıştır.

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \quad (4.12)$$

Bilindiği üzere admitans $Y(s) = 1/Z(s)$ olarak ifade edilmektedir. Curie yasasına göre Denklem (4.11) ve (4.12) aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$Z(s) = \frac{h}{\Gamma(1-n)} \frac{1}{s^q} \quad (4.13)$$

İdeal kapasitörün empedansı ise Denklem (4.14)'de verilmiştir.

$$Z(s) = \frac{1}{sC} \quad (4.14)$$

Denklem (4.13), kesirli empedans veya kısaca fraktans olarak kabul edilir, kesir dereceli empedans özellikleri sergileyen bir elektrik devre elemanıdır. Fraktans empedansının kompleks gösterimi ise Denklem (4.15)'de verilmiştir.

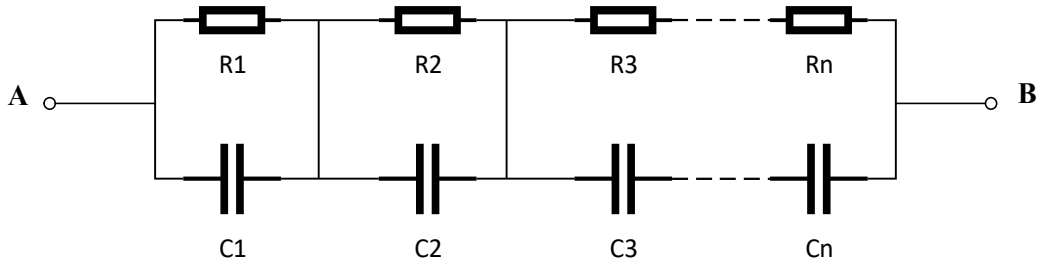
$$Z(s) = \alpha s^q \rightarrow Z(j\omega)^q = q\omega^q e^{j(\pi q/2)} \quad (4.15)$$

Burada ω açısal frekansı ifade ederken, fraktans elemanı, $q = -1$ için kapasitans, $q = 0$ için rezistans ve $q = 1$ için ise indüktans özelliği göstermektedir.

Fraktans elemanı literatürde genel olarak iki şekilde gerçekleştirilmektedir.. Bunlardan biri Zincir fraktans yöntemi diğeri ise Ağaç fraktans yöntemidir. Zincir fraktans n tane direnç ve kapasite çiftinin birbirine seri bağlanmasıyla oluşmaktadır. Ağaç fraktans ise direnç ve kapasitelerden oluşan sonsuz kendine benzer devrelerden meydana gelmektedir [11].

4.3.1. Zincir Fraktans

n tane direnç ve kapasite çiftinin birbirine seri bağlanmasıyla oluşan zincir fraktans yapısı Şekil 4.2'de transfer fonksiyonu ise Denklem (4.16)'da gösterilmiştir.

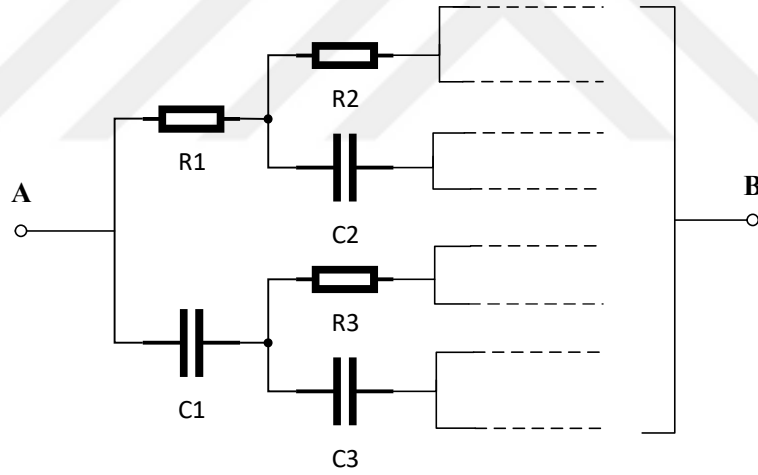


Şekil 4.2. Zincir Fraktans yapısı

$$H_{RC}(s) = \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{R_1}} + \frac{1}{C_2 s + \frac{1}{R_2}} + \dots + \frac{1}{C_n s + \frac{1}{R_n}} \quad (4.16)$$

4.3.2. Ağaç Fraktans

n tane direnç ve kapasiteden oluşan sonsuz kendine benzer devrelerden meydana gelen ağaç fraktans yapısı Şekil 4.3’de transfer fonksiyonu ise Denklem (4.17)’de gösterilmiştir.



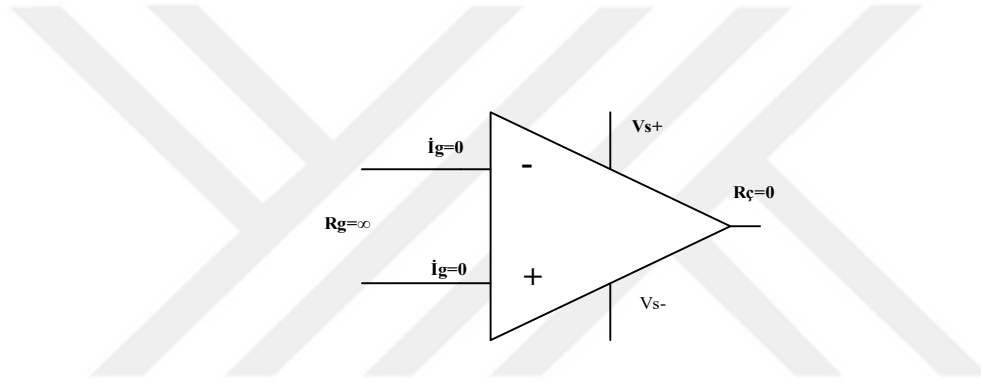
Şekil 4.3. Ağaç Frantans yapısı

$$H_{RC}(s) = \frac{1}{\frac{1}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2 + \dots + \frac{1}{C_2 s + \dots}}}} + \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{\frac{1}{R_3 + \dots + \frac{1}{C_3 s + \dots}}}}} \quad (4.17)$$

4.4. İşlemsel Kuvvetlendiriciler (OP-AMP)

Kesir dereceli kaotik sistemlerin elektronik devre uygulamasında kullanılan bir diğer araç ise OP-AMP elemanıdır. Elektronik devrelerde sinyallerin birçoğu düşük genliğe sahiptir. Bu sinyallerin işlenebilmesi için yükseltilmesi gerekmektedir. Zayıf elektrik sinyallerini yükselten entegre devrelere OP-AMP denilmektedir. İşlemsel yükselticinin iki giriş ucu ve bir çıkış ucu vardır. Temel rolü, iki giriş ucu arasındaki gerilim farkını yükselterek çıkışa vermektir.

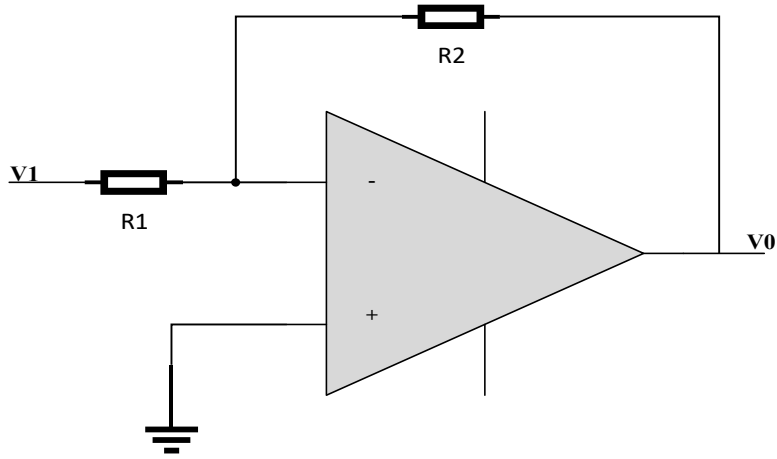
İdeal OP-AMP, sonsuz giriş empedansına, sonsuz açık döngü kazancına, sıfır çıkış empedansına, sonsuz bant genişliğine ve sıfır gürültüye sahip bir kuvvetlendiricidir. Geniş bir işlev yelpazesi elde etmek için geri besleme kullanan devrelere izin veren pozitif ve negatif girişlere sahiptir. Şekil 4.4’de ideal OP-AMP gösterilmiştir.



Şekil 4.4. İdeal opamp gösterimi

4.4.1. Faz Çeviren ve Faz Çevirmeyen OP-AMP Devresi

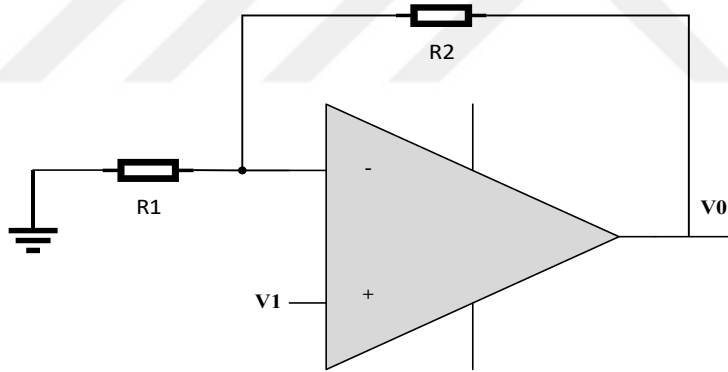
OP-AMP lar tek başına değil pasif devre elemanları ile bir geri besleme olacak şekilde kullanılırlar. Birkaç dirençle beraber OP-AMP kullanıldığında faz çeviren ve çevirmeyen OP-AMP elde edilebilmektedir. Şekil 4.5’de faz çeviren OP-AMP Şekil 4.6’da ise faz çevirmeyen OP-AMP gösterilmiştir.



Şekil 4.5. Faz çeviren işlemsel yükselteç

Ters çeviren OP-AMP ın çıkış gerilimi Denklem (4.18)'de verilmiştir.

$$v_0(t) = \left(-\frac{R_2}{R_1}\right) \cdot v_1(t) \quad (4.18)$$



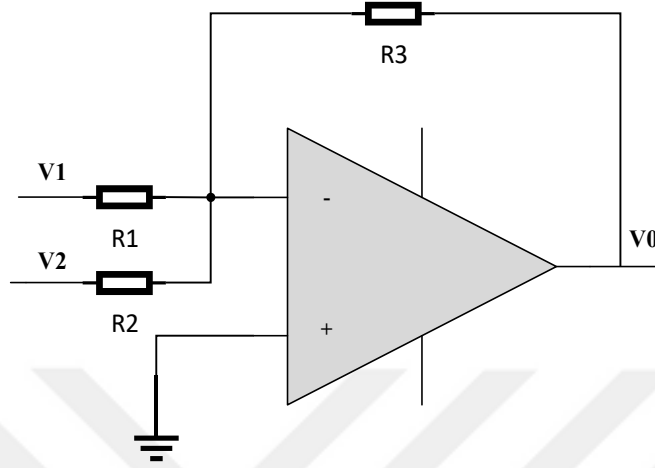
Şekil 4.6. Faz çevirmeyen işlemsel yükselteç

Ters çevirmeyen OP-AMP ın çıkış gerilimi Denklem (4.19)'da verilmiştir.

$$v_0(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot v_1(t) \quad (4.19)$$

4.4.2. Toplama Yapan OP-AMP Devresi

Girişe gelen sinyali toplar ve çıkışa tersleyerek iletir. Toplama devresi Şekil 4.7’de gösterilmiştir.



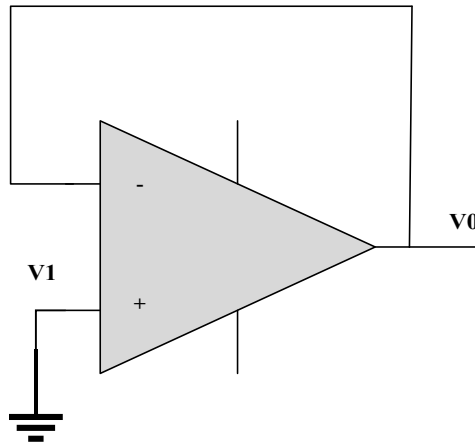
Şekil 4.7. Toplama devresi

Toplama devresinin çıkış gerilimi Denklem (4.20)’de verilmiştir.

$$v_0(t) = -\left(\frac{R_3}{R_1} \cdot v_1(t) + \frac{R_3}{R_2} \cdot v_2(t)\right) \quad (4.20)$$

4.4.3. Gerilim İzleyici OP-AMP Devresi

Yüksek giriş empedansının işlemsel yükselteçlerde istenilen bir durum olmadığından daha önce bahsedilmişti. Bu bağlamda yüksek dirençli bir kaynağı düşük dirençli bir yüke bağlamak için Şekil 4.8’de verilen gerilim izleyici devresi kullanılmaktadır.

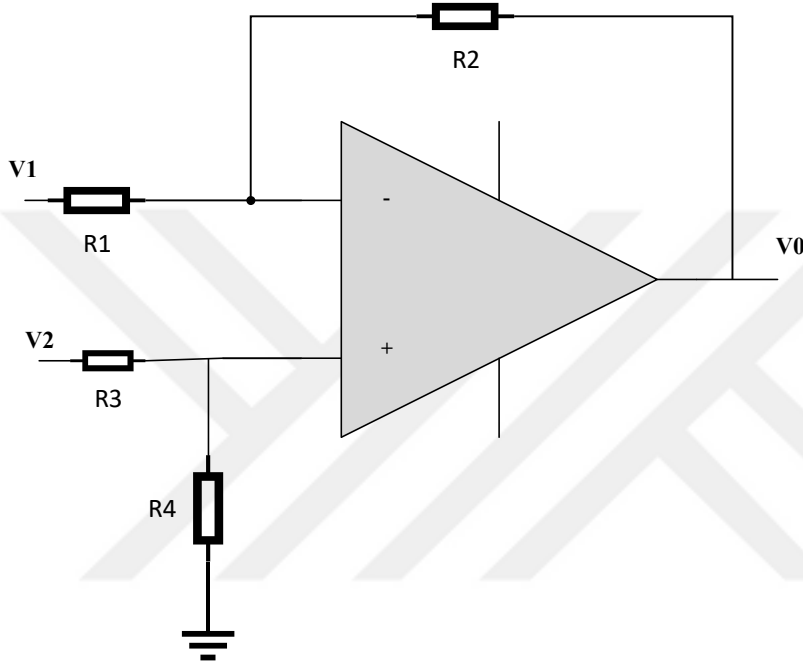


Şekil 4.8. Gerilim İzleyici işlemsel yükselteç

Şekil 4.8’de verilen gerilim izleyici devrede giriş direnci sonsuz, çıkış direnci 0 ve gerilim kazancı 1 dir.

4.4.4. Fark Alıcı OP-AMP Devresi

Fark alıcı işlemsel yükselteç devresi Şekil 4.9’da gösterilmiştir.



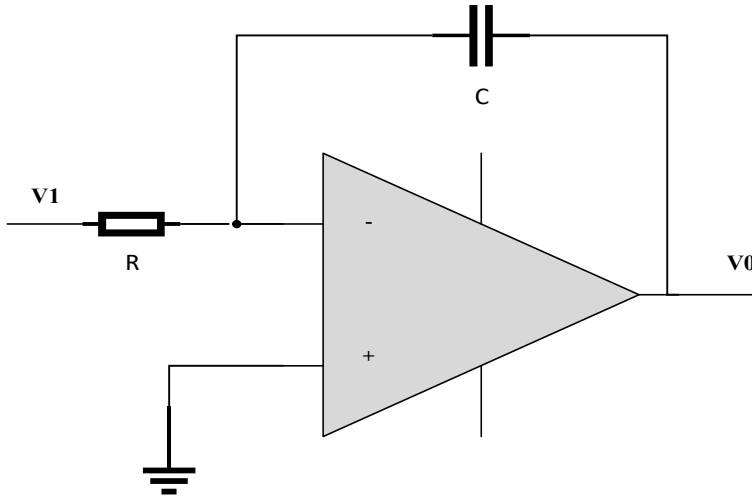
Şekil 4.9. Fark alıcı işlemsel yükselteç

Fark alıcı işlemsel yükseltecin çıkış gerilimi Denklem (4.21)’de verilmiştir.

$$v_0(t) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot v_1(t) + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot v_2(t) \quad (4.21)$$

4.4.5. İntegral Alıcı OP-AMP Devresi

İntegral alıcı devre, girişe uygulanan işaretin integralini alarak çıkışa aktaran bir işlemsel yükselteç uygulamasıdır. Şekil 4.10’da integral alıcı işlemsel yükselteç gösterilmiştir.



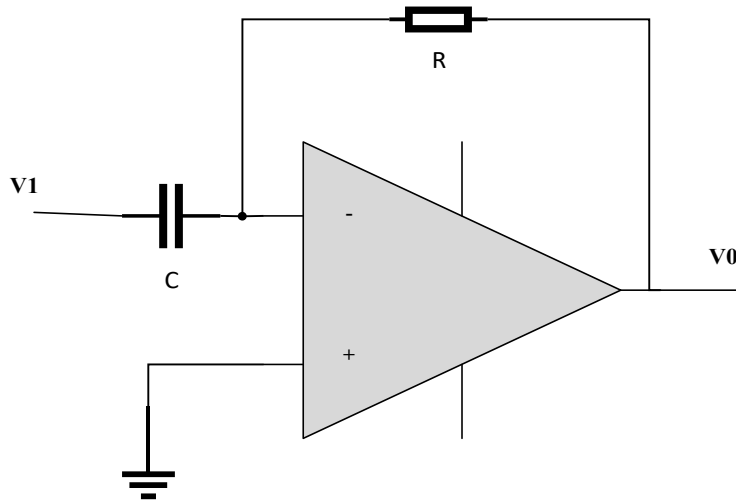
Şekil 4.10. İntegral alıcı işlemsel yükselteç

İntegral alıcı işlemsel yükseltecin çıkış gerilimi Denklem (4.22)'da verilmiştir.

$$v_o(t) = v_0(0) - \frac{1}{RC} \int_0^t v_1(t).dt \quad (4.22)$$

4.4.6. Türev Alıcı OP-AMP Devresi

Türev alıcı devre, girişe uygulanan işaretin türevini alarak çıkışa aktaran bir işlemsel yükselteç uygulamasıdır. Şekil 4.11'de türev alıcı işlemsel yükselteç gösterilmiştir.



Şekil 4.11. Türev alıcı işlemsel yükselteç

Türev alıcı işlemsel yükseltecin çıkış gerilimi Denklem (4.23)'de verilmiştir.

$$v_o(t) = -R.C \left(\frac{dv_1(t)}{dt} \right) \quad (4.23)$$

4.5. Kesir Dereceli İntegral Opetatörünün Zincir Fraktans ile Tasarımı

Kesir dereceli kaotik bir sistemin OP-AMP devre elemanlarıyla gerçekleştirebilmek için kesir dereceli integral operatörüne ihtiyaç olacaktır. Bu operatörü devrede kullanabilmek için ilgili kesir dereceli integral operatörünün yakınsatılmış transfer fonksiyonunun pasif devre elemanlarıyla tasarlanması gerekir. Yakınsatılmış transfer fonksiyonlarını zincir fraktans yapısıyla tasarlamak mümkündür. Kesir dereceli üç durum değişkenine sahip bir kaotik sistemin analog devre tasarımının yapılacağı farz edilsin. Analog devre tasarımında her bir durum değişkenin kesirli türev derecesi $q = 0.9$ (Bu yapıdaki kesir dereceli sistemlere commensurate sistem denir ve bu sistemlerde sistem derecesi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ olduğundan sistemin toplam derecesi 2.7 olacaktır.) olduğu düşünölsün. Bu durumda $q = 0.9$ kesir dereceli integral operatörünün analog devreye uygulanabilmesi için Tablo 4.1'de $\frac{1}{s^{0.9}}$ operatörüne karşılık gelen Denklem (4.24)'de verilen yakınsatılmış transfer fonksiyonu zincir fraktan tasarımında kullanılacaktır.

$$\frac{1}{s^{0.9}} = \frac{2.2675(s+1.292)(s+215.4)}{(s+0.01292)(s+2.154)(s+359.4)} \quad (4.24)$$

Denklem (4.24) polinom formda açıldığında aşağıda verilen Denklem (4.25) elde edilmektedir.

$$\frac{1}{s^{0.9}} = \frac{2.2675s^2+491.34911s+631.03618}{s^3+361.566s^2+778.818s+.991} \quad (4.25)$$

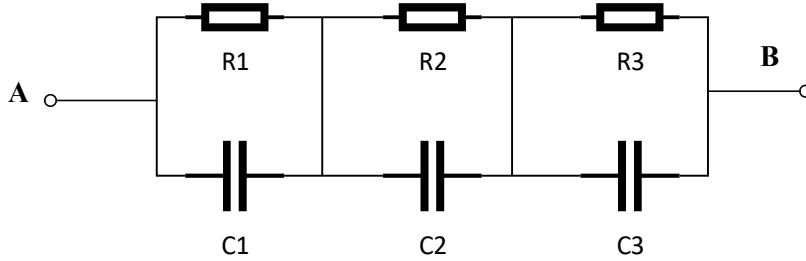
Elde edilen Denklem (4.25) *MATLAB* ortamında *residue* komutu kullanılarak basit kesirlerine ayrılır. *MATLAB residue* komutu kullanımı aşağıda gösterilmiştir.

```
>> a = [2.2675 491.34911 631.03618];  
>> b = [1 361.566 778.818 9.991];  
>> tf(a,b)  
>> [r,p,k] = residue(b,a)
```

Yukarıda *MATLAB residue* komutu ile basit kesirlere ayrılarak elde edilen transfer fonksiyonu Denklem (4.26)'da verilmiştir.

$$\frac{1}{s^{0.9}} = \frac{0.9107}{s+359.3991} + \frac{0.5449}{s+2.1540} + \frac{0.8118}{s+0.0129} \quad (4.26)$$

Böylece $\frac{1}{s^{0.9}}$ operatörünün yakınsatılmış transfer fonksiyonu kaskat bağlı üç paralel RC devresi şeklinde Şekil 4.12’de yer alan yapı elde edilir. Bu yapıya zincir fraktans yapısı denmektedir.



Şekil 4.12. $\frac{1}{s^{0.9}}$ kesir derecesi için oluşturulan zincir fraktans yapısı

Kesir derecesi $\frac{1}{s^{0.9}}$ için oluşturulan kaskat bağlı üç paralel RC devresinin A-B arası eşdeğer empedansı Denklem (4.27)’de verilmiştir.

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C_1}}{s + \frac{1}{R_1 C_1}} + \frac{\frac{1}{C_2}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} + \frac{\frac{1}{C_3}}{s + \frac{1}{R_3 C_3}} \quad (4.27)$$

$H(s) \cdot C_0 = \frac{1}{s^{0.9}}$ olduğundan bu denklemlerde C_0 birim parametredir ve $C_0 = 1\mu F$ olarak seçilir. Buradan Denklem (4.28) ve (4.29) elde edilmektedir.

$$H(s) = \frac{\frac{C_0}{C_1}}{s + \frac{1}{R_1 C_1}} + \frac{\frac{C_0}{C_2}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} + \frac{\frac{C_0}{C_3}}{s + \frac{1}{R_3 C_3}} \quad (4.28)$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C_0}}{(s + \frac{1}{R_1 C_1})(s + \frac{1}{R_2 C_2})(s + \frac{1}{R_3 C_3})} \left[\frac{(C_2 + C_3 + \frac{C_1 + C_3}{R_2} + \frac{C_1 + C_2}{R_3})s + (\frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 R_2 R_3})}{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2} \right] \quad (4.29)$$

Böylece $\frac{1}{s^{0.9}}$ kesir dereceli operatör için hesaplanan yakınsatılmış transfer fonksiyonun sağlayacak R_1, R_2, R_3 ve C_1, C_2, C_3 değerleri Tablo 4.2’de verildiği gibi elde edilecektir.

Tablo 4.2. Kesir dereci $q = 0.9$ için hesaplanan zincir fraktans devre değerleri

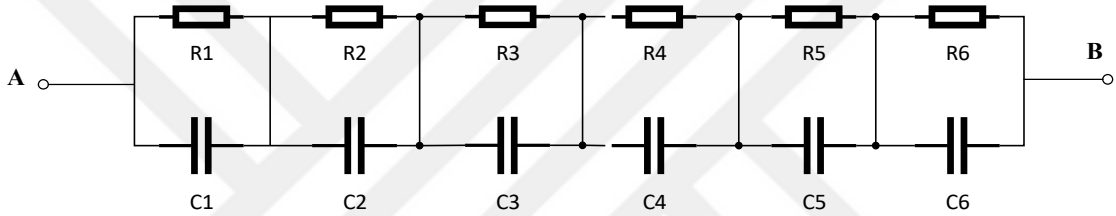
R_1	62.84M Ω	C_1	1.23 μF
R_2	250k Ω	C_2	1.83 μF
R_3	2.5k Ω	C_3	1.1 μF

Bu tez çalışması kapsamında tasarlanacak olan kaotik kesir dereceli sistemlerin analog devreler için gerekli olan zincir fraktans yapıları devam kısmında verilmiştir.

Tablo 4.1’de $\frac{1}{s^{0.6}}$ operatörüne karşılık gelen Denklem (4.30)’da verilen yakınsatılmış transfer fonksiyonu zincir fraktans tasarımında kullanılacaktır.

$$\frac{1}{s^{0.6}} = \frac{10.7978(s+0.04642)(s+0.3162)(s+2.154)(s+14.68)(s+100)}{(s+0.01468)(s+0.1)(s+0.6813)(s+4.642)(s+31.62)(s+215.4)} \quad (4.30)$$

MATLAB residue komutu ile basit kesirlere ayrıldıktan sonra elde edilen kaskat bağlı altı paralel RC devresi şeklinde Şekil 4.13’de yer alan zincir fraktans yapısı elde edilir.



Şekil 4.13. $\frac{1}{s^{0.6}}$ kesir derecesi için oluşturulan zincir fraktans yapısı

Kesir derecesi $\frac{1}{s^{0.6}}$ için oluşturulan kaskat bağlı altı paralel RC devresinin A-B arası eşdeğer empedansı Denklem (4.31)’de verilmiştir.

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C_1}}{s + \frac{1}{R_1 C_1}} + \frac{\frac{1}{C_2}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} + \frac{\frac{1}{C_3}}{s + \frac{1}{R_3 C_3}} + \frac{\frac{1}{C_4}}{s + \frac{1}{R_4 C_4}} + \frac{\frac{1}{C_5}}{s + \frac{1}{R_5 C_5}} + \frac{\frac{1}{C_6}}{s + \frac{1}{R_6 C_6}} \quad (4.31)$$

$H(s) \cdot C_0 = \frac{1}{s^{0.6}}$ olduğundan bu denklemlerde C_0 birim parametredir ve $C_0 = 1\mu F$ olarak seçilir. Buradan Denklem (4.32) elde edilmektedir.

$$H(s) = \frac{\frac{C_0}{C_1}}{s + \frac{1}{R_1 C_1}} + \frac{\frac{C_0}{C_2}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} + \frac{\frac{C_0}{C_3}}{s + \frac{1}{R_3 C_3}} + \frac{\frac{C_0}{C_4}}{s + \frac{1}{R_4 C_4}} + \frac{\frac{C_0}{C_5}}{s + \frac{1}{R_5 C_5}} + \frac{\frac{C_0}{C_6}}{s + \frac{1}{R_6 C_6}} \quad (4.32)$$

Böylece $\frac{1}{s^{0.6}}$ kesir dereceli operatör için hesaplanan yakınsatılmış transfer fonksiyonunu sağlayacak $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ ve $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ değerleri Tablo 4.3’de verildiği gibi elde edilecektir.

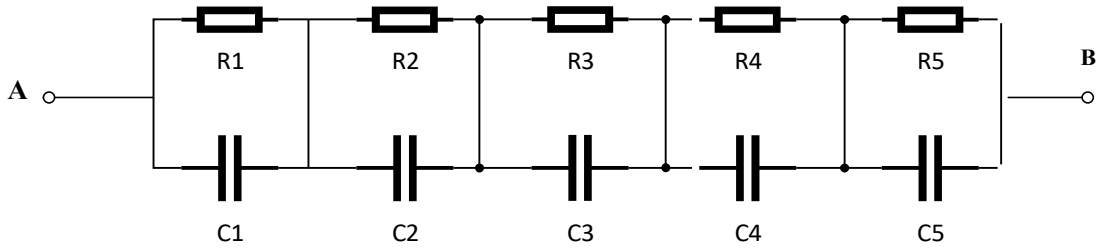
Tablo 4.3. Kesir dereci $q = 0.6$ için hesaplanan zincir fraktans devre değerleri

R_1	12.33M Ω	C_1	5.527 μ F
R_2	2.448M Ω	C_2	4.085 μ F
R_3	738k Ω	C_3	1.99 μ F
R_4	233k Ω	C_4	0.926 μ F
R_5	75.4k Ω	C_5	0.42 μ F
R_6	30k Ω	C_6	0.156 μ F

Tablo 4.1’de $\frac{1}{s^{0.8}}$ operatörüne karşılık gelen Denklem (4.33)’de verilen yakınsatılmış transfer fonksiyonu zincir fraktans tasarımında kullanılacaktır.

$$\frac{1}{s^{0.8}} = \frac{5.3088(s+0.1334)(s+2.371)(s+42.17)(s+749.9)}{(s+0.01334)(s+0.2371)(s+4.217)(s+74.99)(s+1334)} \quad (4.33)$$

MATLAB residue komutu ile basit kesirlere ayrıldıktan sonra elde edilen kaskat bağlı beş paralel RC devresi şeklinde Şekil 4.14’de yer alan zincir fraktans yapısı elde edilir.



Şekil 4.14. $\frac{1}{s^{0.8}}$ kesir derecesi için oluşturulan zincir fraktans yapısı

Kesir derecesi $\frac{1}{s^{0.8}}$ için oluşturulan kaskat bağlı beş paralel RC devresinin A-B arası eşdeğer empedansı Denklem (4.34)’de verilmiştir.

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C_1}}{s + \frac{1}{R_1 C_1}} + \frac{\frac{1}{C_2}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} + \frac{\frac{1}{C_3}}{s + \frac{1}{R_3 C_3}} + \frac{\frac{1}{C_4}}{s + \frac{1}{R_4 C_4}} + \frac{\frac{1}{C_5}}{s + \frac{1}{R_5 C_5}} \quad (4.34)$$

$H(s).C_0 = \frac{1}{s^{0.8}}$ olduğundan bu denklemlerde C_0 birim parametredir ve $C_0 = 1\mu F$ olarak seçilir. Buradan Denklem (4.35) elde edilmektedir.

$$H(s) = \frac{\frac{C_0}{C_1}}{s + \frac{1}{R_1 C_1}} + \frac{\frac{C_0}{C_2}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} + \frac{\frac{C_0}{C_3}}{s + \frac{1}{R_3 C_3}} + \frac{\frac{C_0}{C_4}}{s + \frac{1}{R_4 C_4}} + \frac{\frac{C_0}{C_5}}{s + \frac{1}{R_5 C_5}} \quad (4.35)$$

Böylece $\frac{1}{s^{0.8}}$ kesir dereceli operatör için hesaplanan yakınsatılmış transfer fonksiyonunu sağlayacak R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 , ve C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 , değerleri Tablo 4.4’de verildiği gibi elde edilecektir.

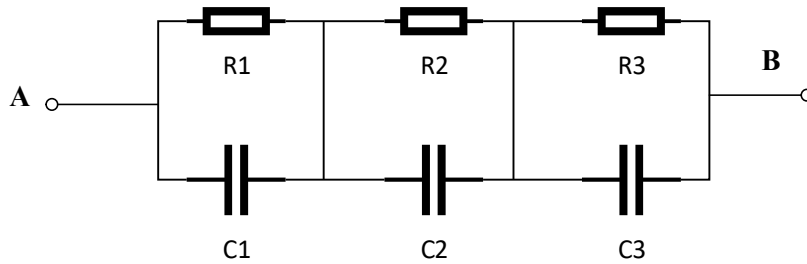
Tablo 4.4. Kesir dereci $q = 0.8$ için hesaplanan zincir fraktans devre değerleri

R_1	37.85M Ω	C_1	1.98 μF
R_2	1.754M Ω	C_2	2.4 μF
R_3	0.17M Ω	C_3	1.39 μF
R_4	0.017M Ω	C_4	780nF
R_5	0.0018M Ω	C_5	420nF

$\frac{1}{s^{0.992}}$ operatörüne karşılık gelen Denklem (4.32)’de verilen yakınsatılmış transfer fonksiyonu zincir fraktans tasarımında kullanılacaktır.

$$\frac{1}{s^{0.992}} = \frac{1.1471(s+58.2265)(s+351)}{(s+0.0104)(s+62.4256)(s+376360)} \quad (4.36)$$

MATLAB residue komutu ile basit kesirlere ayrıldıktan sonra elde edilen kaskat bağlı üç paralel RC devresi şeklinde Şekil 4.15’de yer alan zincir fraktans yapısı elde edilir.



Şekil 4.15. $\frac{1}{s^{0.992}}$ kesir derecesi için oluşturulan zincir fraktans yapısı

Kesir derecesi $\frac{1}{s^{0.992}}$ için oluşturulan kaskat bağlı üç paralel RC devresinin A-B arası eşdeğer empedansı Denklem (4.37)'de verilmiştir.

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C_1}}{s + \frac{1}{R_1 C_1}} + \frac{\frac{1}{C_2}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} + \frac{\frac{1}{C_3}}{s + \frac{1}{R_3 C_3}} \quad (4.37)$$

$H(s) \cdot C_0 = \frac{1}{s^{0.992}}$ olduğundan bu denklemlerde C_0 birim parametredir ve $C_0 = 1\mu F$ olarak seçilir. Buradan Denklem (4.38) elde edilmektedir.

$$H(s) = \frac{\frac{C_0}{C_1}}{s + \frac{1}{R_1 C_1}} + \frac{\frac{C_0}{C_2}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} + \frac{\frac{C_0}{C_3}}{s + \frac{1}{R_3 C_3}} \quad (4.38)$$

Böylece $\frac{1}{s^{0.8}}$ kesir dereceli operatör için hesaplanan yakınsatılmış transfer fonksiyonunu sağlayacak R_1 , R_2 , R_3 , ve C_1 , C_2 , C_3 , değerleri Tablo 4.5'de verildiği gibi elde edilecektir.

Tablo 4.5. Kesir dereci $q = 0.992$ için hesaplanan zincir fraktans devre değerleri

R_1	95.957M Ω	C_1	1.002 μF
R_2	1.153k Ω	C_2	13.893 μF
R_3	0.205 Ω	C_3	12.959 μF

4.6. Kesir Dereceli Lorenz Sisteminin Analog Devre Tasarımı

Bu kısımda kesir dereceli Lorenz sistemin analog devre tasarımı gerçekleştirilecektir. Bu yapılırken zincir fraktans yapısından faydalanılacaktır. Bunun için [45]'de verilen tam dereceli kaotik Lorenz devresi kesir dereceli olarak modifiye edilmiştir. Bilindiği üzere tam dereceli Lorenz sistemi Denklem (4.34)'de gösterildiği gibidir.

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \sigma(y(t) - x(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= x(t)(\rho - z(t)) - y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= x(t)y(t) - \beta z(t) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Lorenz sistemi $\sigma = 10$, $\rho = 28$ ve $\beta = 8/3$ değerinde kaotik davranış göstermektedir. Pecora ve Carroll'ün 1990'lı yıllarda yaptığı referans [46] yer alan makale baz alınarak, Cuomo ve

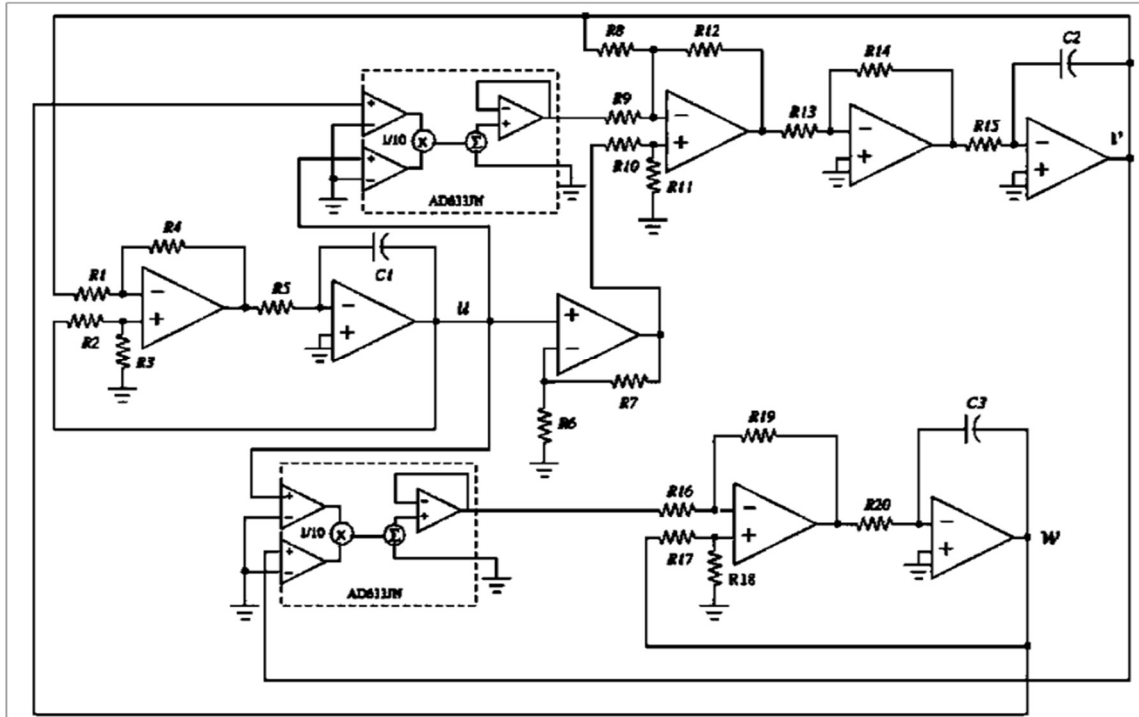
Oppenheim [47], Lorenz sisteminin analog devre tasarımını tanıttılar. Kullandıkları analog devre uygulamada belirtildiği üzere sistemin dinamik sınırlarının güç kaynağı sınırlarını aştığı için x , y ve z durum değişkenlerinin skala edilmesi gerekmektedir. Bu bağlamda Cuomo yeni değişkenleri $u = x/10$, $v = y/10$ ve $w = z/20$ olarak tanımlamıştır. Bu skala faktörleriyle birlikte yeniden skala edilmiş Lorenz sistemi Denklem (4.35)'de verilmiştir.

$$\frac{du(t)}{dt} = \sigma(v(t) - u(t))$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = u(t)(\rho - w(t)) - v(t) \quad (4.35)$$

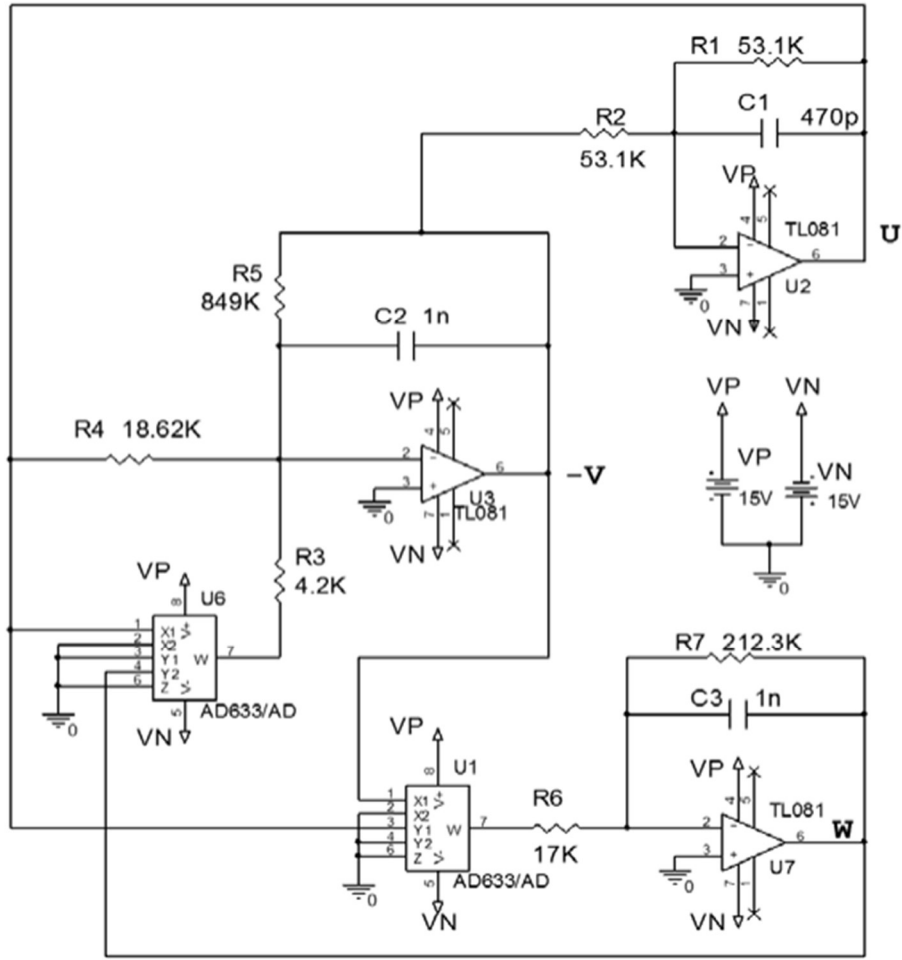
$$\frac{dw(t)}{dt} = u(t)v(t) - \beta w(t)$$

Böylece Şekil 4.16'da verilen Coumo ve Oppenheim tarafından önerilen devre tasarımı ortaya çıkmıştır [47].



Şekil 4.16. Coumo ve Oppenheim tarafından önerilen tam dereceli kaotik Lorenz sistemi devre tasarımı

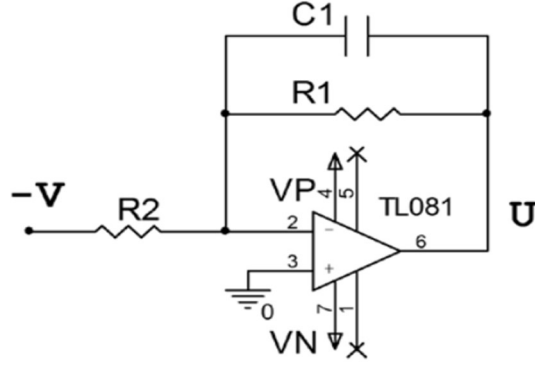
Buna istinaden tasarlanan Şekil 4.17'de verilen tam dereceli basitleştirilmiş Lorenz devresi daha az eleman kullanılması hasebiyle çok daha kompakt yapıdadır. Bu devre Pehlivan tarafından önerilmiştir [50].



Şekil 4.17. Basitleştirilmiş tam dereceli kaotik Lorenz devre tasarımı

Şekil 4.17’de gösterilen basitleştirilmiş tam dereceli Lorenz devresi u, v, w durum değişkenlerine ayrılarak aşağıdaki gibi analiz edilebilir. Ayrıca kullanılan analog çarpma entegresi AD633 $X - Y$ fark Z toplama girişi için yüksek empedansa sahiptir. Böylece +15 ile -15 fark giriş gerilimine sahip olan entegre giriş gerilimini çıkışa 0.1 ile çarparak iletir. Burada amaç çıkış gerilimi besleme gerilimi üzerine çıkmamasıdır.

u durum değişkenine göre tasarlanan kısım Şekil 4.18’de verilmiştir.



Şekil 4.18. Basitleştirilmiş tam dereceli kaotik Lorenz devre tasarımı u durum değişkeni

Şekil 4.18 analiz edildiğinde;

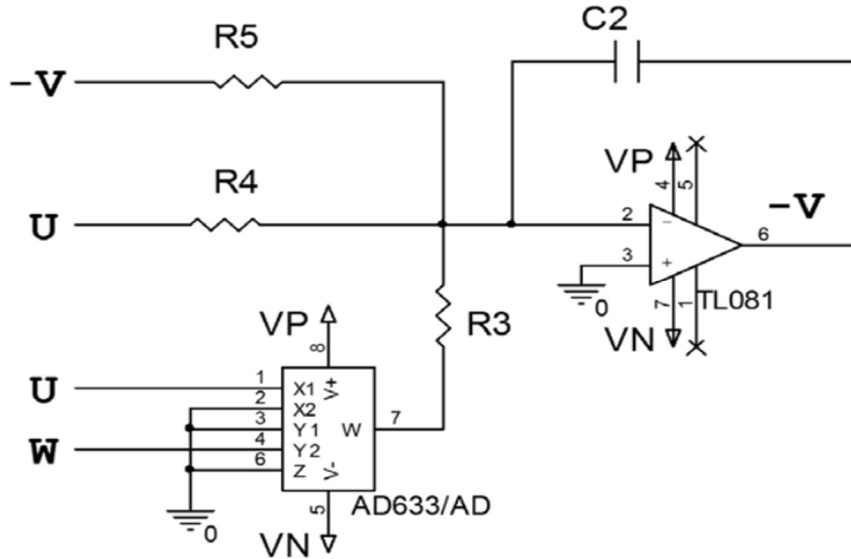
$$\frac{du(t)}{dt} \cdot R_1 \cdot C_1 = v(t) \cdot \frac{R_1}{R_2} - u(t) \quad (4.36)$$

Ardından $R = R_1 = R_2$ alındığında;

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{R \cdot C_1} (v(t) - u(t)) \quad (4.37)$$

elde edilir.

v durum değişkenine göre tasarlanan kısım şekil 4.19’da verilmiştir.



Şekil 4.19. Basitleştirilmiş tam dereceli kaotik Lorenz devre tasarımı v durum değişkeni

Şekil 4.19 s -domeninde analiz edildiğinde;

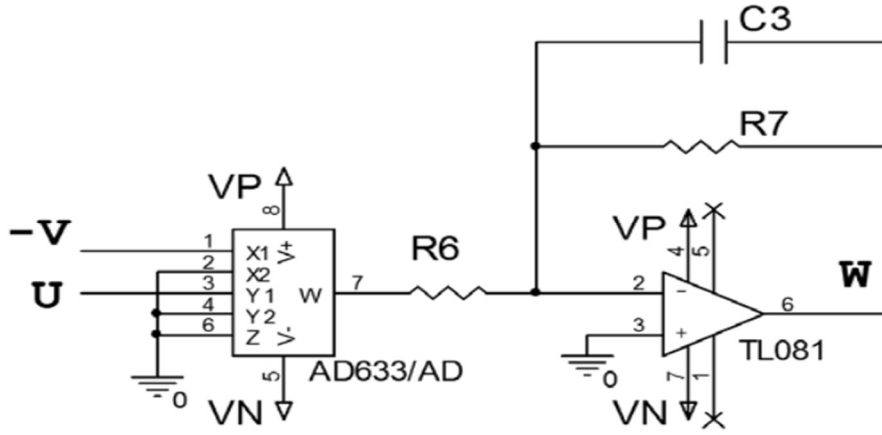
$$V(s) = \frac{U(s)}{C_2 R_4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{U(s) \cdot W(s)}{C_2 R_3} \cdot \frac{1}{s} - \frac{V(s)}{C_2 R_5} \cdot \frac{1}{s} \quad (4.38)$$

Ardından ters Laplace dönüşümü alınır;

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C_2} \cdot \left(\frac{u(t)}{R_4} - \frac{u(t) \cdot w(t)}{R_3} - \frac{v(t)}{R_5} \right) \quad (4.39)$$

elde edilir.

w durum değişkenine göre tasarlanan kısım Şekil 4.20’de verilmiştir.



Şekil 4.20. Basitleştirilmiş tam dereceli kaotik Lorenz devre tasarımı w durum değişkeni

Şekil 4.20 s -domeninde analiz edildiğinde;

$$W(s) = \frac{U(s) \cdot V(s)}{C_3 R_6} \cdot \frac{1}{s} - \frac{W(s)}{C_3 R_7} \cdot \frac{1}{s} \quad (4.40)$$

Ardından ters Laplace dönüşümü alınır;

$$\frac{dw(t)}{dt} = \frac{1}{C_3} \cdot \left(\frac{u(t) \cdot v(t)}{R_6} - \frac{w(t)}{R_7} \right) \quad (4.41)$$

elde edilir.

Böylece Şekil 4.18, 4.19 ve 4.20 analizi sonucunda Denklem (4.42) elde edilir.

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{R.C_1} (v(t) - u(t))$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C_2} \cdot \left(\frac{u(t)}{R_4} - \frac{u(t).w(t)}{R_3} - \frac{v(t)}{R_5} \right)$$

(4.42)

$$\frac{dw(t)}{dt} = \frac{1}{C_3} \cdot \left(\frac{u(t).v(t)}{R_6} - \frac{w(t)}{R_7} \right)$$

Burada zaman skalası 2505 alınmıştır [47]. Zaman skalasına analog bilgisayardaki hesaplama zamanı ile problemin çözümündeki fiziksel zaman uyumsuzluğunu gidermek için kullanılmıştır. [47]'de t = problem zamanı, τ = hesaplama zamanı, $\mathcal{T}$ = zaman skala faktörü olmak üzere $\tau = \mathcal{T} \times t$ olmaktadır. Buradan aşağıdaki eşitlikler elde edilir; $\sigma = 10$, $\rho = 28$ ve $\beta = 8/3$

$$\frac{du(t)}{dt} = \sigma(v(t) - u(t)) = \frac{1}{RC_1} (v(t) - u(t)) \quad (4.43.a)$$

Denklem (4.43.a) için zamanlama skalası uygulanırsa;

$$\sigma = \frac{1}{2505.R.C_1} \quad (4.43.b)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -20.u(t).w(t) + \rho u(t) - v(t) = \frac{1}{C_2} \cdot \left(\frac{u(t)}{R_3} - \frac{u(t).w(t)}{R_4} - \frac{v(t)}{R_5} \right) \quad (4.43.c)$$

Denklem (4.43.c) için zaman skalası uygulanırsa;

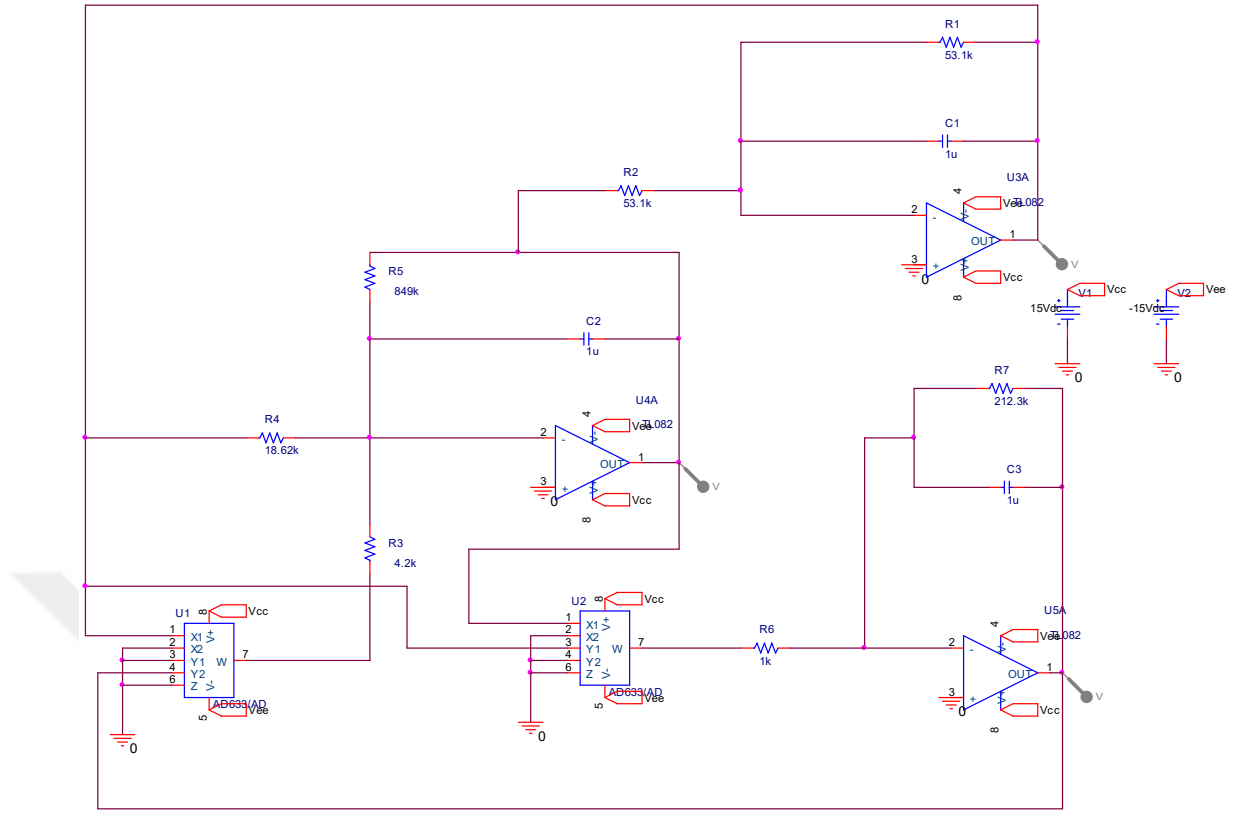
$$\rho = \frac{1}{2505.C_2.R_3} \quad (4.43.d)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = 5.u(t).v(t) - b.w(t) = \frac{1}{C_3} \cdot \left(\frac{u(t).v(t)}{R_6} - \frac{w(t)}{R_7} \right) \quad (4.43.e)$$

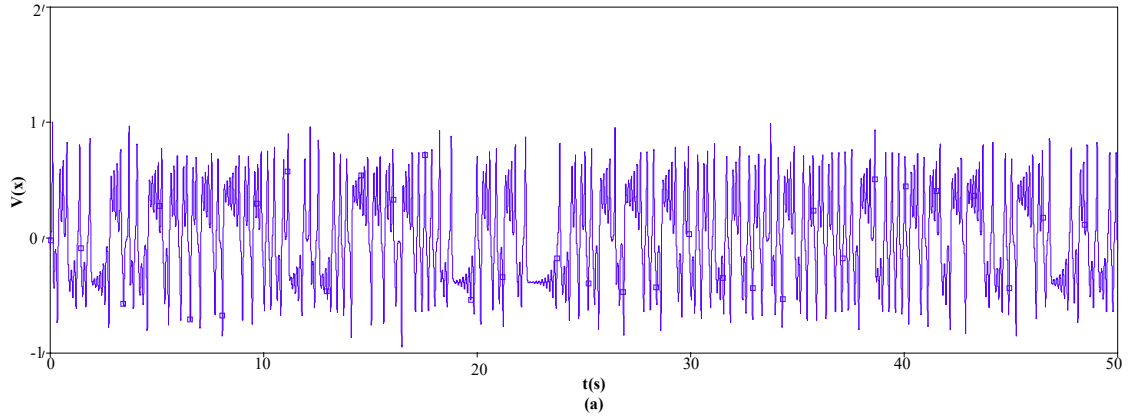
Denklem (4.43.e) için zaman skalası uygulanırsa;

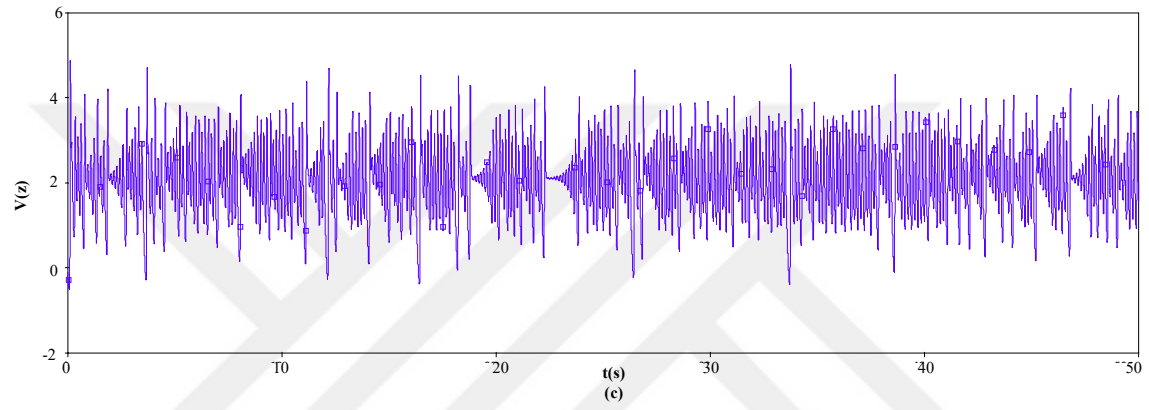
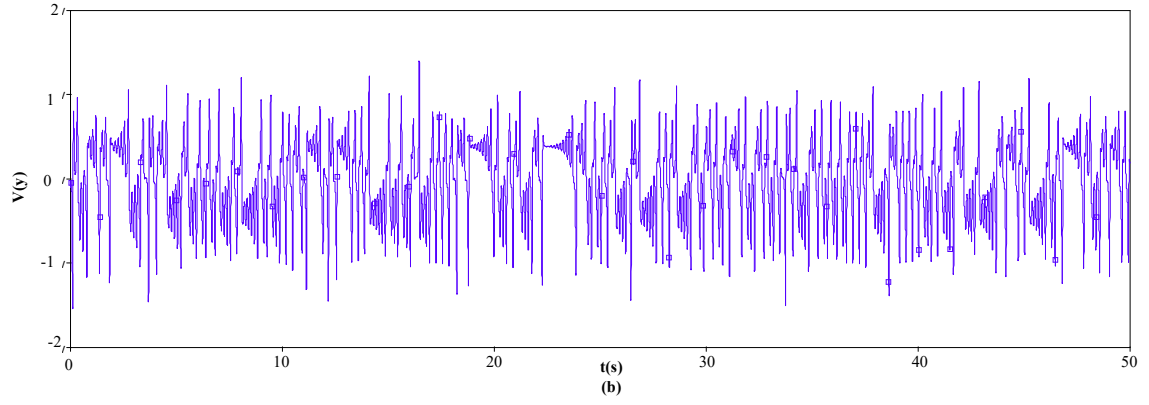
$$\beta = \frac{1}{2505.C_3.R_7} \quad (4.43.f)$$

Denklem (4.35) ve (4.42) eşitlenerek C_1, C_2 ve C_3 değeri $1 \mu F$ alındığında Lorenz devre eleman değerleri; $R_1 = R_2 = 53.1k\Omega, R_3 = 18.6k\Omega, R_4 = 4.2k\Omega, R_5 = 849.3k\Omega, R_6 = 17k\Omega, R_7 = 212.3k\Omega$ olarak elde edilir. Şekil 4.17'de tam dereceli basitleştirilmiş Lorenz devresi ORCAD/Pspice ortamında gerçekleştirilerek Şekil 4.21'de verilmiş ve bu devreye ait durum uzay diyagramı ve durum değişkenlerinin zaman cevapları Şekil 4.22. ve Şekil 4.23'de sırasıyla gösterilmiştir.

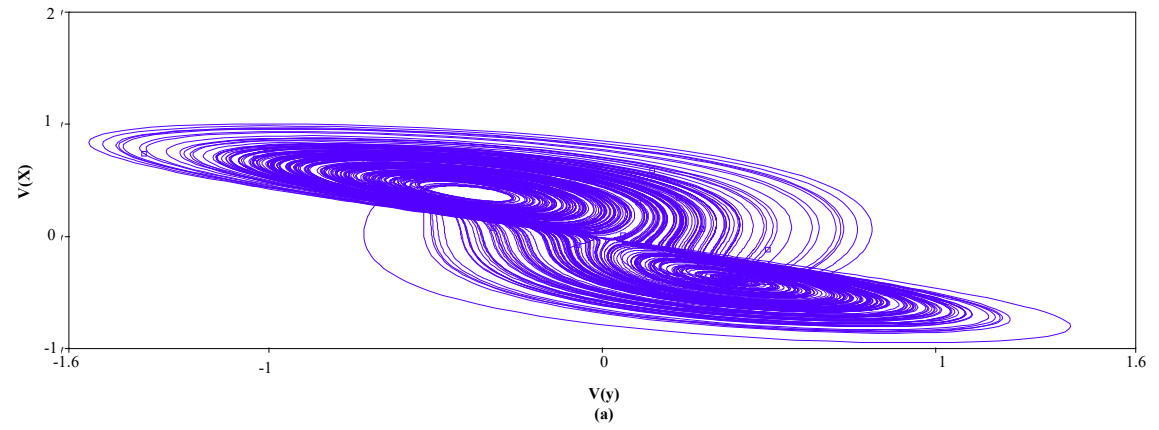


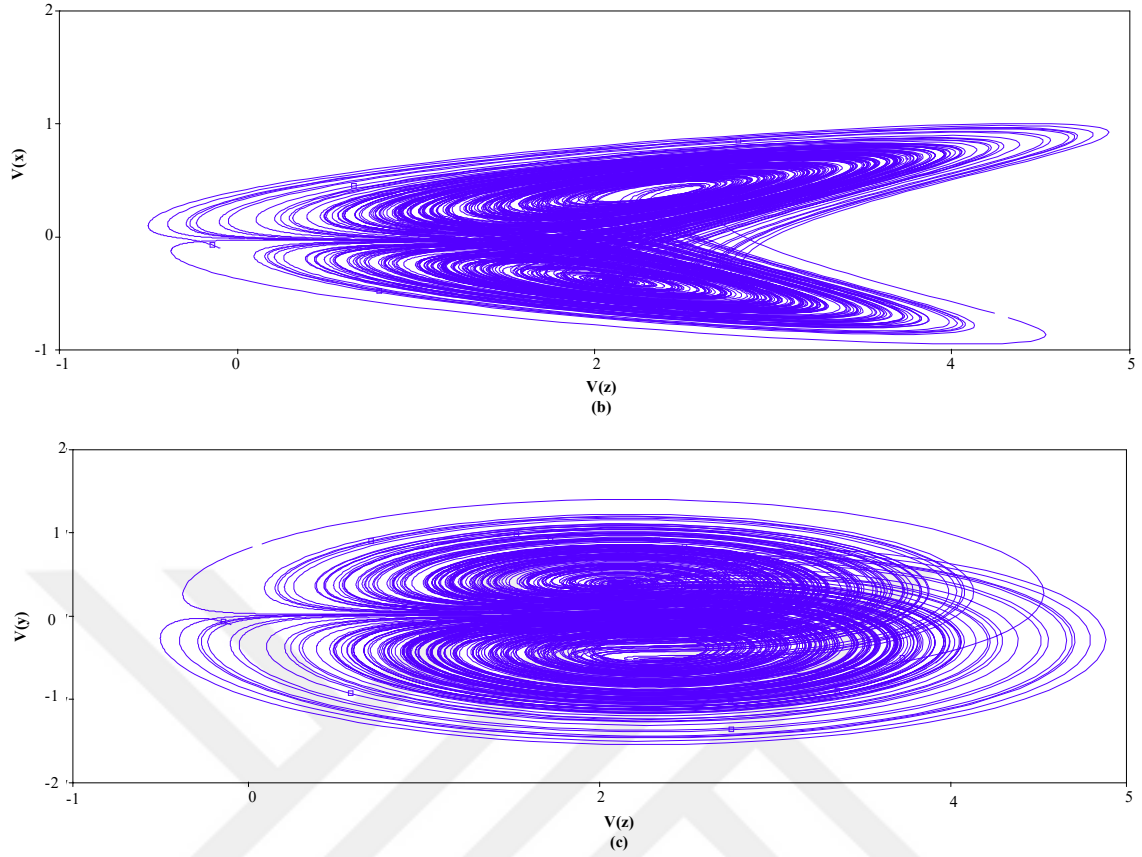
Şekil 4.21. Tam sayı dereceli kaotik Lorenz devresi





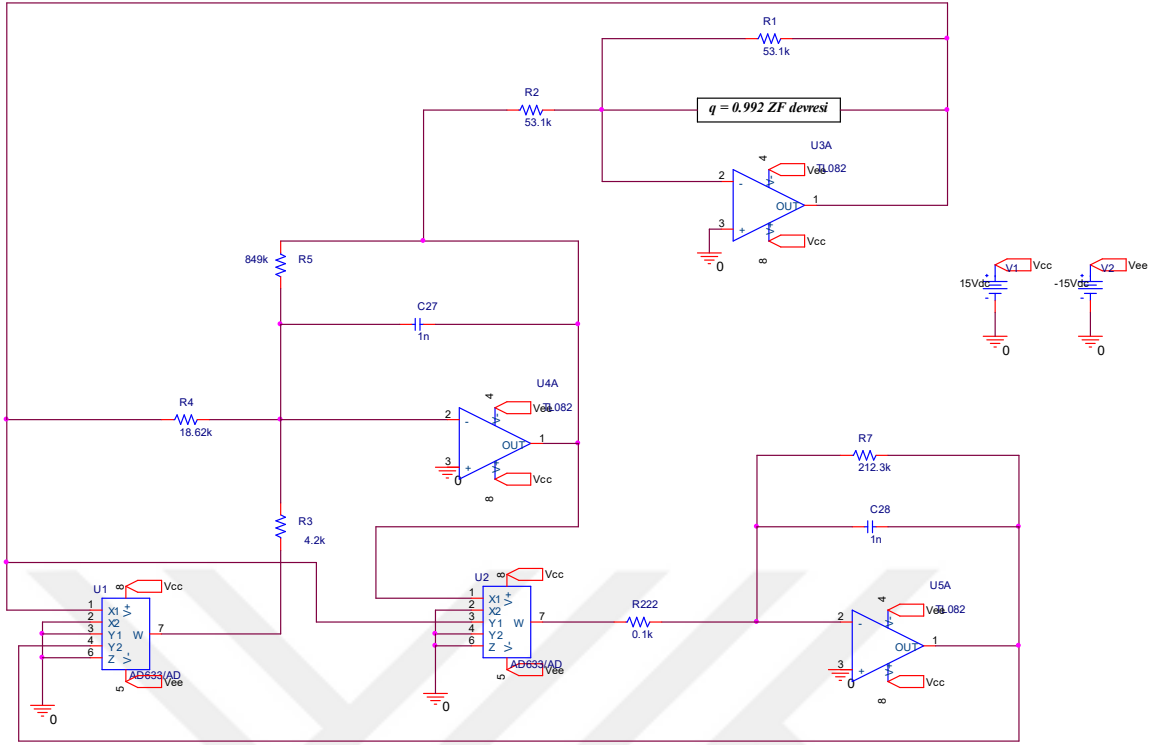
Şekil 4.22. Tamsayı dereceli Lorenz sistemi a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları



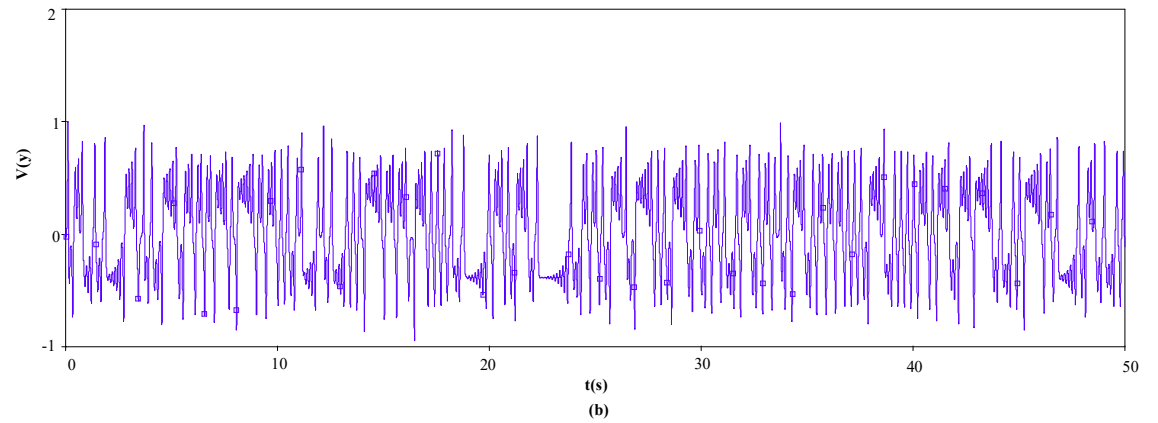
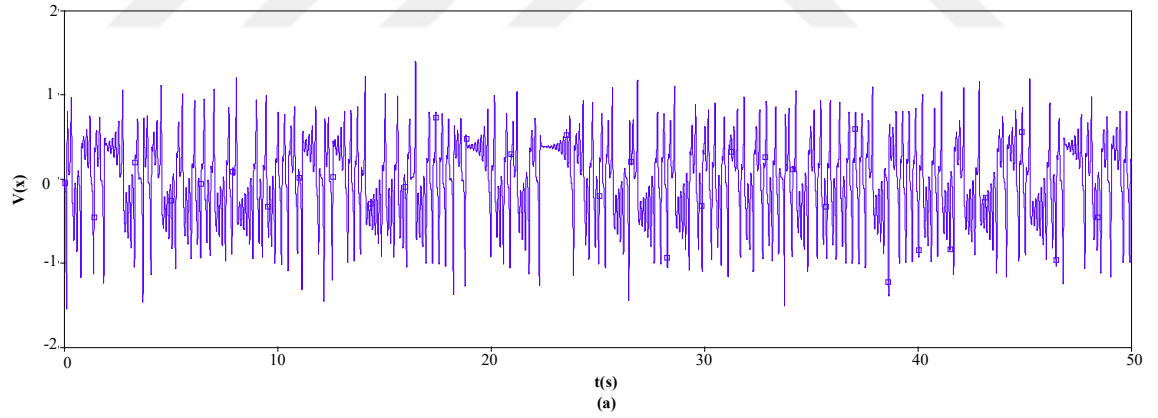


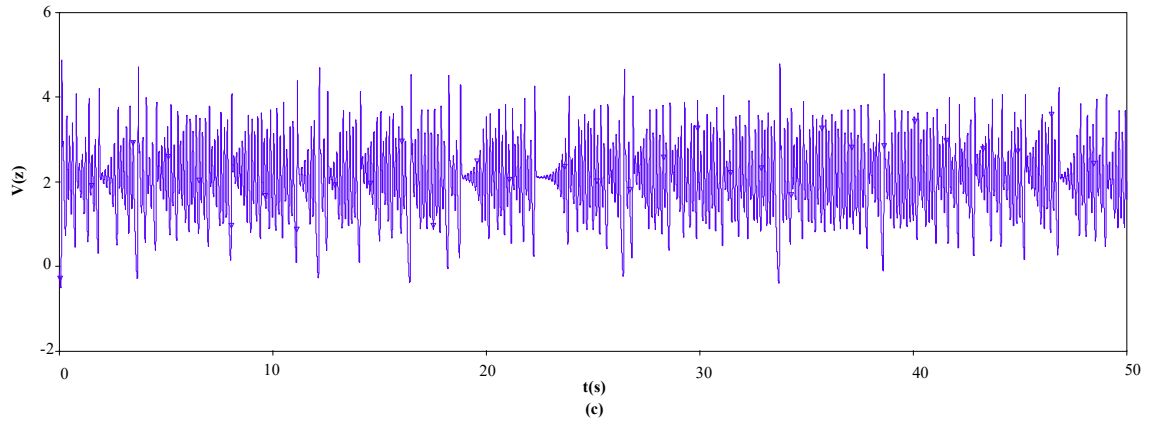
Şekil 4.23. Tam sayı dereceli kaotik Lorenz sistemi **a)** x - y **b)** x - z **c)** y - z durum uzay diyagramı

Devam eden kısımda Şekil 4.17’de verilen basitleştirilmiş Lorenz devresi modifiye edilerek kesir dereceli hale getirilmiştir. Kesir derecesi $q_1 = 1, q_2 = 1$ ve $q_3 = 0.992$ için oluşturulan Lorenz sistemi analog devresi Şekil 4.24’de verilmiştir. Daha önceki bölümlerde anlatıldığı üzere kesir dereceli Lorenz sisteminin kaotik kalabilmesi için gerekli en küçük derece Denklem (2.15)’e göre hesaplanmış ve simülasyonda $\sigma = 10$, $\rho = 28$ ve $\beta = 8/3$ alınmıştır. Denklem (2.15)’e göre yapılan hesaplama sonucu en küçük derece $q > 0.9941$ olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla analog devre tasarımında kesir dereceli Lorenz sisteminin kaotik kalabilmesi için $q_1 = 1, q_2 = 1$ ve $q_3 = 0.992$ alınmıştır. Burada 0.992 kesir derecesi için oluşturulan zincir fraktans devresi Şekil 4.15’de verilmiştir. Şekil 4.15’de yer alan devre elemanlarının değerleri ise Tablo-4.5’den alınmıştır. $q_1 = 1, q_2 = 1$ ve $q_3 = 0.992$ derecesine ait durum uzay diyagramı ve durum değişkenlerinin zaman cevapları Şekil 4.25. ve Şekil 4.26’da sırasıyla gösterilmiştir. Ayrıca Şekil 4.27’de $q < 0.9941$ olacak şekilde $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.992$ alınmış ve durum uzay diyagramı ve durum değişkenlerinin zaman cevapları Şekil 4.28 ve Şekil 4.29’da sırasıyla gösterilmiştir. Tasarlanan devrelerin simülasyonları *ORCHAD/Pspice* ortamında gerçekleştirilmiştir.

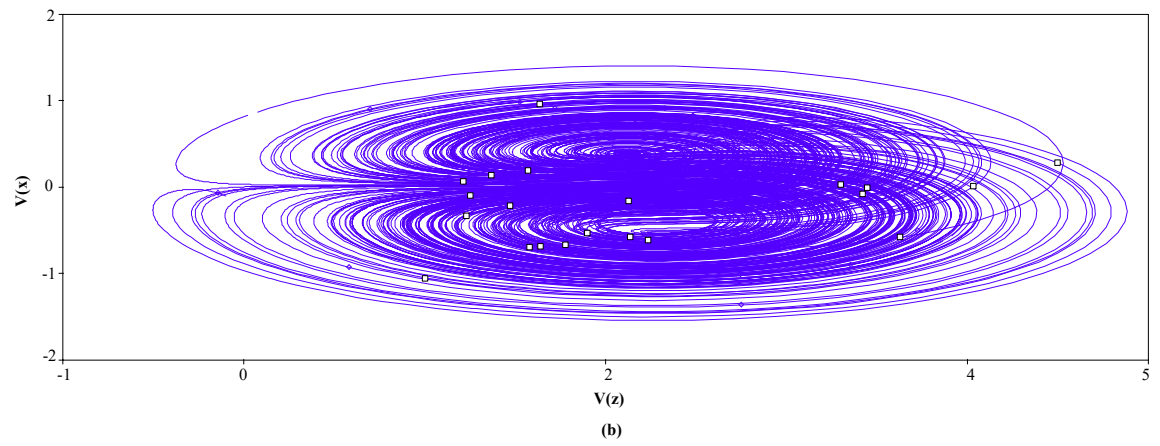
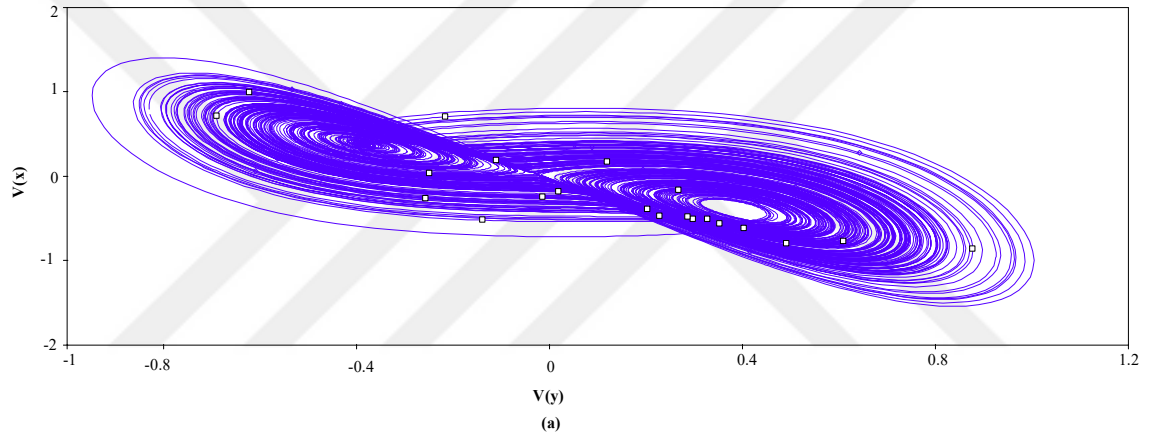


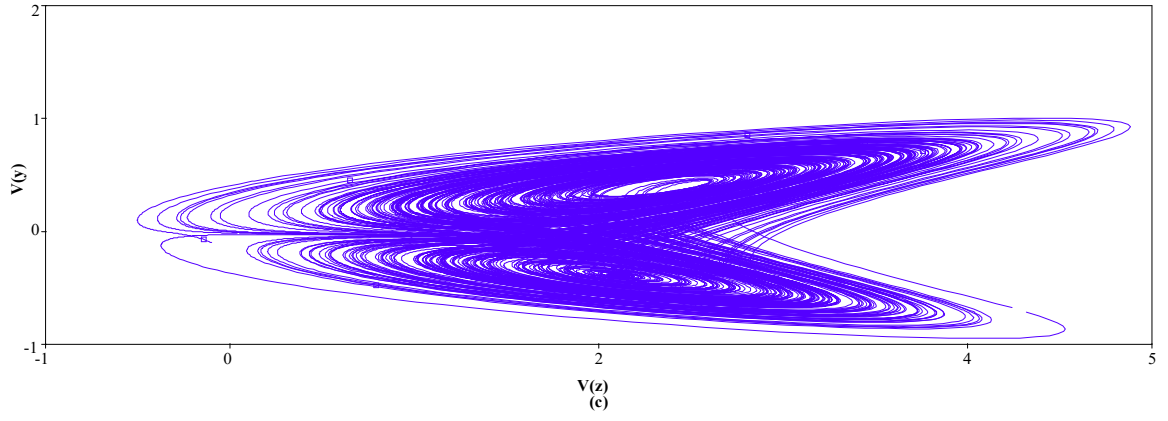
Şekil 4.24. Kesir dereceli Lorenz devresi $q_1 = 1, q_2 = 1$ ve $q_3 = 0.992$



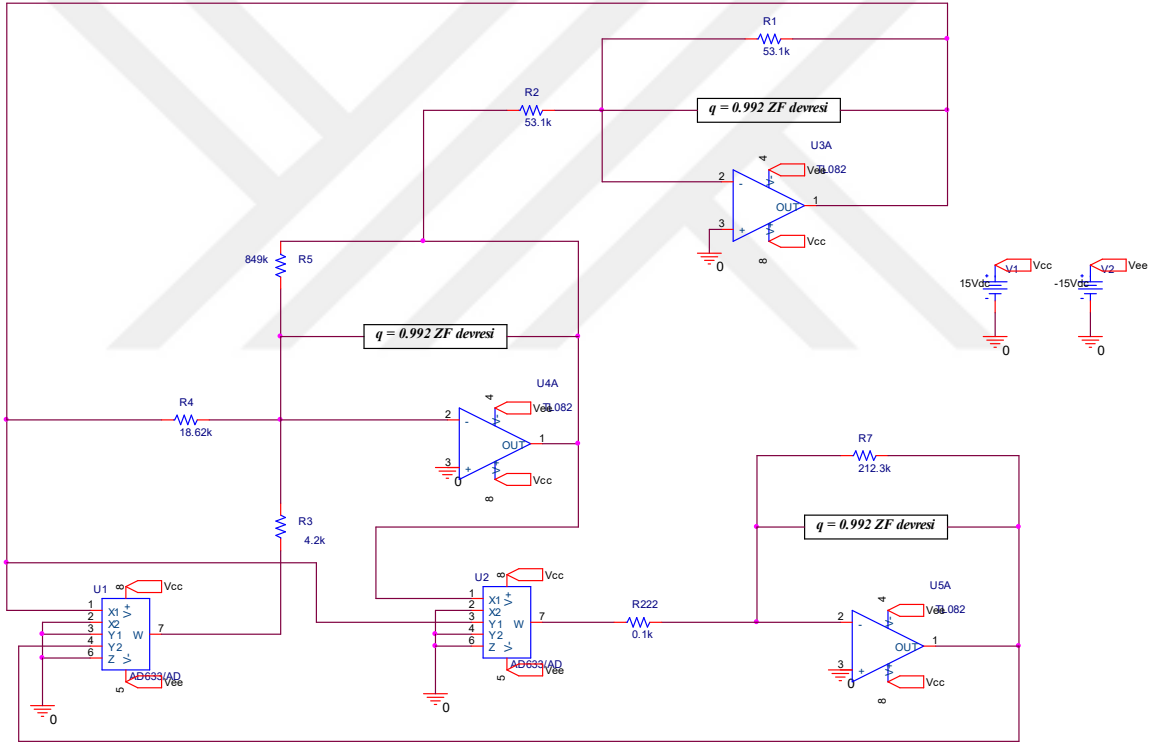


Şekil 4.25. Kesir dereceli Lorenz sistemi $q_1 = 1, q_2 = 1$ ve $q_3 = 0.992$ için a) x b) y c) z durum değişkenlerinin zaman cevapları

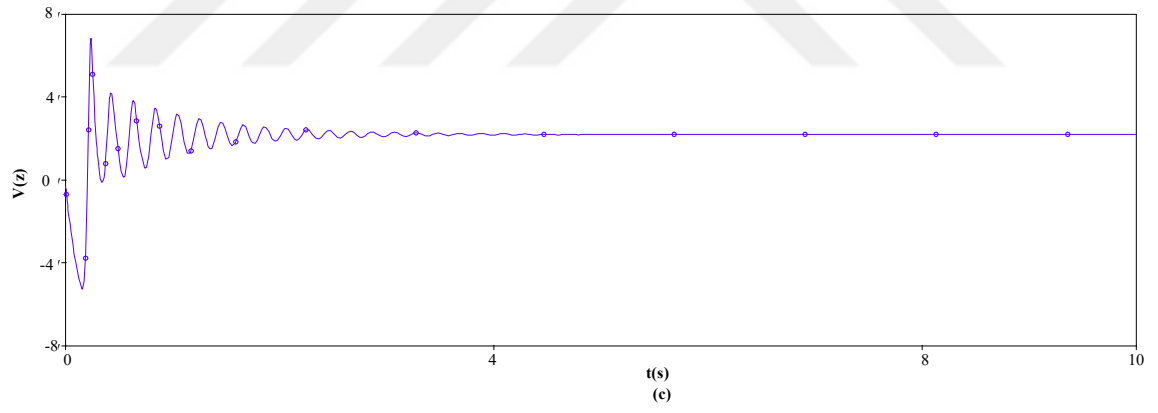
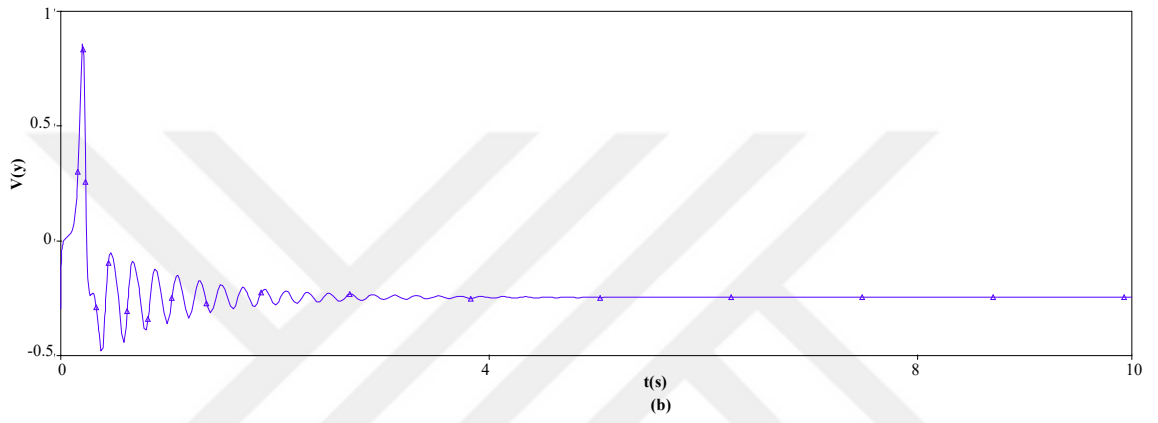
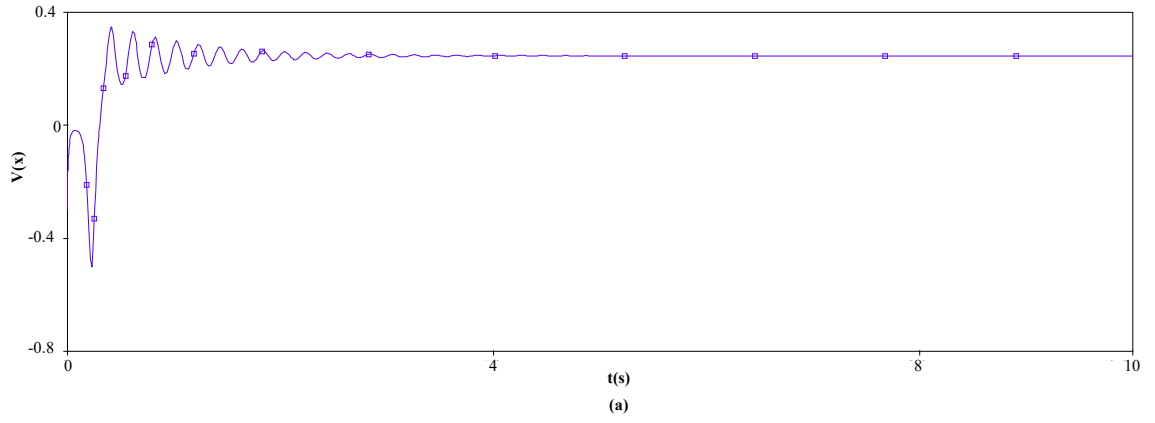




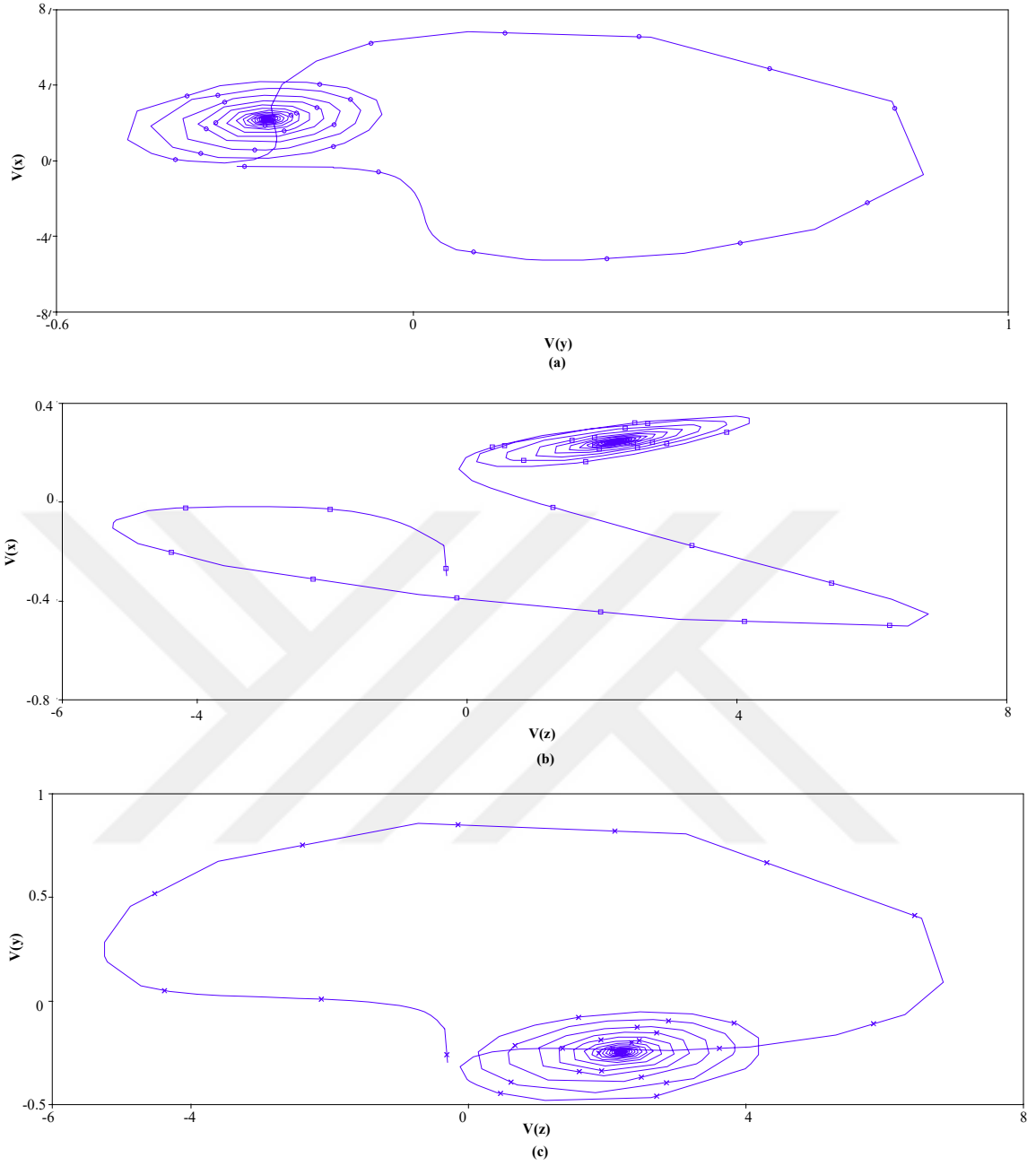
Şekil 4.26. Kesir dereceli Lorenz sistemi $q_1 = 1, q_2 = 1$ ve $q_3 = 0.992$ için a) x - y b) x - z c) y - z durum uzay diyagramı



Şekil 4.27. Kesir dereceli Lorenz devresi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.992$



Şekil 4.28. Kesir dereceli Lorenz sistemi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.992$ için **a)** x **b)** y **c)** z durum değişkenlerinin zaman cevapları



Şekil 4.29. Kesir dereceli Lorenz sistemi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.992$ için **a)** x - y **b)** x - z **c)** y - z durum uzay diyagramı

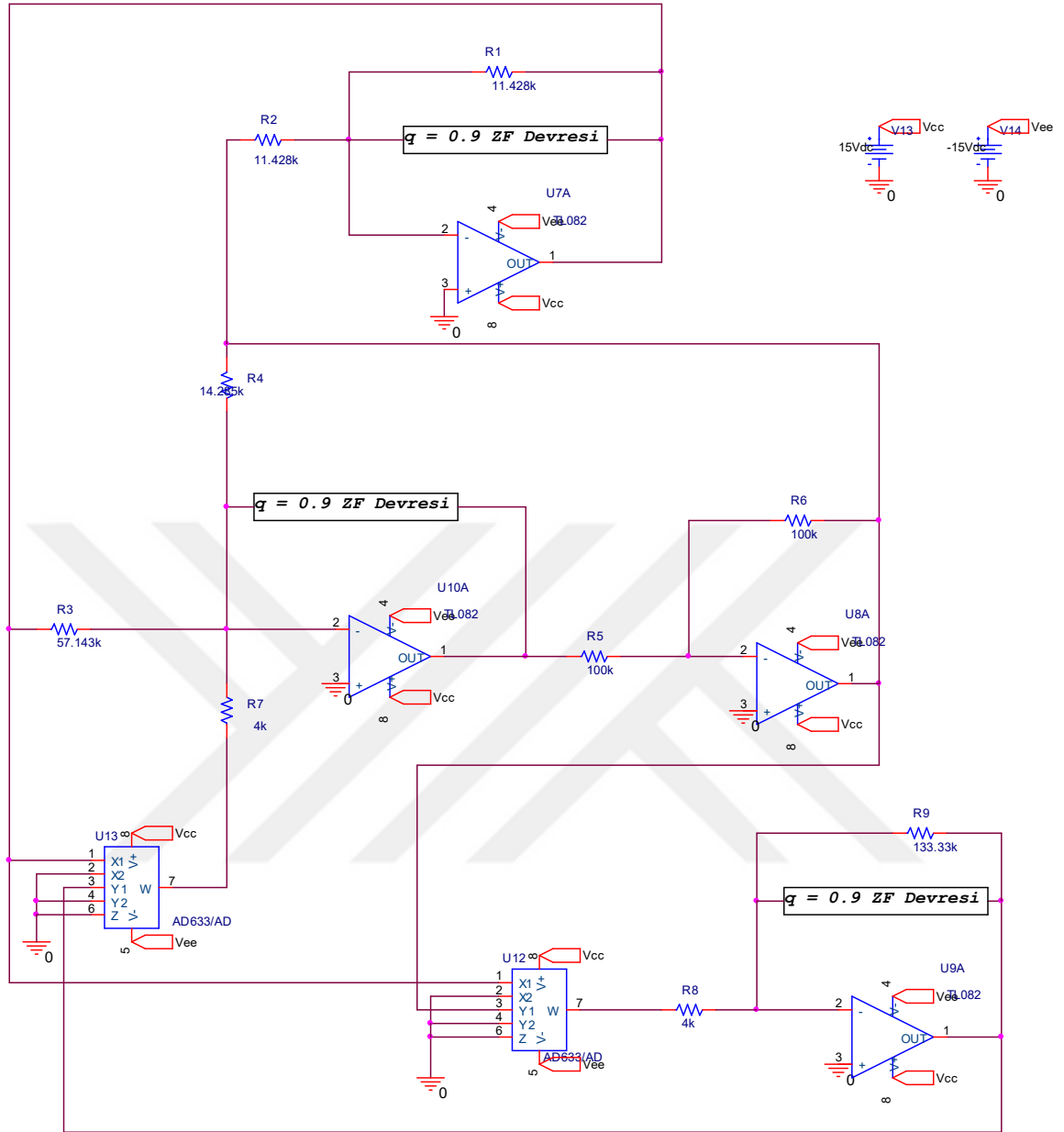
Yukarıda görüldüğü üzere Şekil 4.25 ve Şekil 4.26’da Denklem (2.15)’e göre hesaplanan en küçük q değeri kullanılmış, kesir dereceli Lorenz sistem için tasarlanan analog devrenin durum-uzay diyagramı ve zaman cevapları elde edilmiştir. Elde edilen simülasyon sonuçlarında sistemin $q_1 = 1, q_2 = 1$ ve $q_3 = 0.992$ değerinde kaotik davranış sergilediği gösterilmiştir. Şekil 4.28 ve Şekil 4.29’da ise Denklem (2.15)’e göre hesaplanan değerden daha küçük $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.992$ için simülasyon sonuçları elde edilmiş ve sistemin kaotik davranış sergilemediği gösterilmiştir.

4.7. Kesir Dereceli Chen Sisteminin Analog Devre Tasarımı

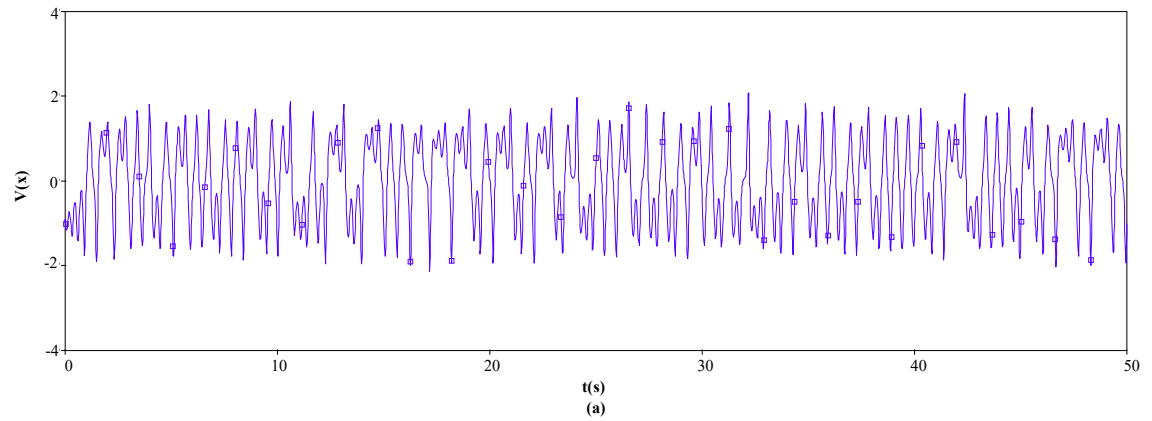
[45]'de yer alan tam dereceli kaotik Chen devresi alınarak kesir dereceli olarak modifiye edilmiştir. Kesir dereceli Chen sistemi Denklem (4.44)'de gösterildiği gibidir.

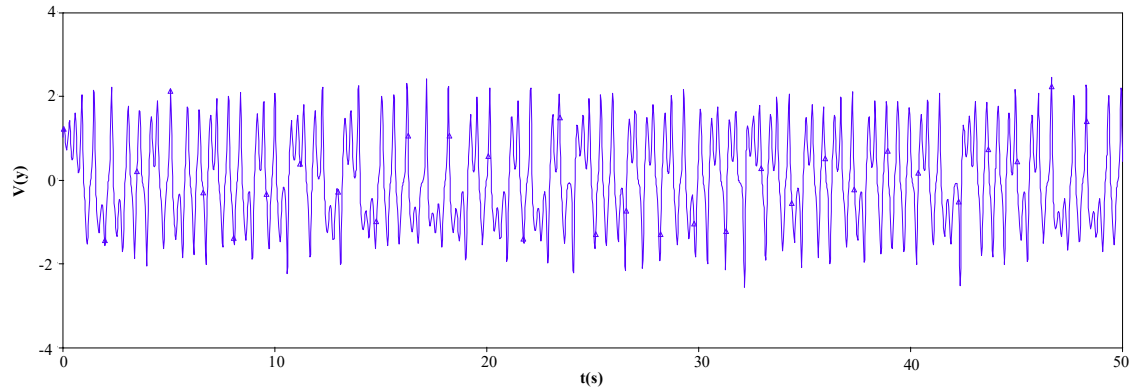
$$\begin{aligned} {}^aD_t^{q_1}x(t) &= a(y(t) - x(t)) \\ {}^aD_t^{q_2}y(t) &= (c - a)x(t) - x(t)z(t) + cy(t) \\ {}^aD_t^{q_3}z(t) &= x(t)y(t) - bz(t) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Kesir derecesi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ için oluşturulan kesir dereceli Chen devresi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ analog devre tasarımı Şekil 4.30'da verilmiştir. Daha önceki bölümlerde anlatıldığı üzere kesir dereceli Chen sisteminin kaotik kalabilmesi için gerekli en küçük derece Denklem (2.15)'e göre hesaplanmış ve devre simülasyonlarında $(a, b, c) = (35, 3, 28)$ alınmıştır. Denklem (2.15)'e göre yapılan hesaplama sonucu en küçük derece $q > 0.8244$ olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ alınmıştır. Burada 0.9 kesir derecesi için oluşturulan zincir fraktans devresi Şekil 4.12'de elde edilmişti. Şekil 4.12'de yer alan devre değerleri ise Tablo 4.2'den seçilmiştir. $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ derecesine ait durum değişkenlerinin zaman cevapları ve durum uzay diyagramları Şekil 4.31 ve Şekil 4.32'de sırasıyla gösterilmiştir. Ayrıca Şekil 4.33'de $q < 0.8244$ olacak şekilde $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.6$ alınmıştır. Burada 0.6 kesir derecesi için oluşturulan zincir fraktans devresi Şekil 4.13'de verilmişti. Şekil 4.13'de yer alan devre değerleri ise Tablo 4.3'den seçilmiştir. $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.6$ derecesine ait durum değişkenlerinin zaman cevapları ve durum uzay diyagramları Şekil 4.34 ve Şekil 4.35'de sırasıyla gösterilmiştir. Tasarlanan devrelerin simülasyonları *ORCHAD/Pspice* ortamında gerçekleştirmiştir.

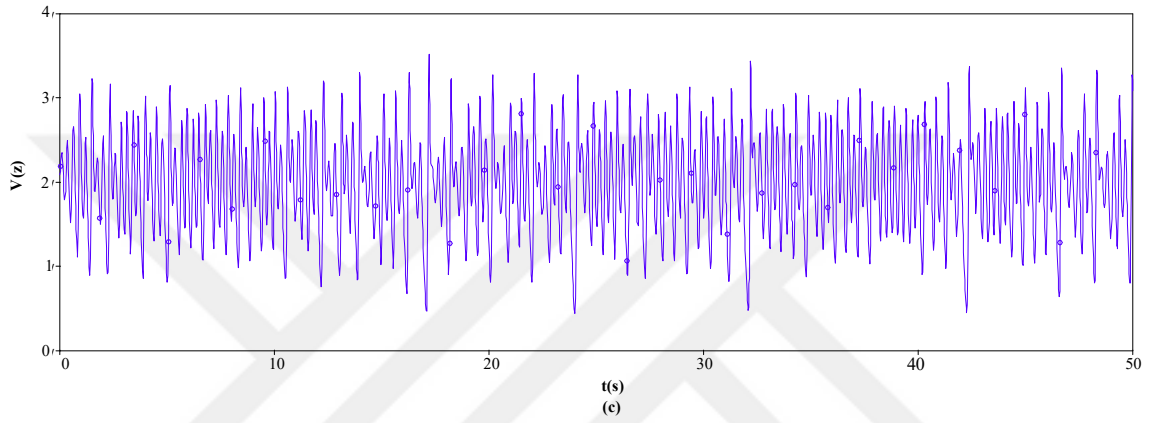


Şekil 4.30. Kesir dereceli Chen devresi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$



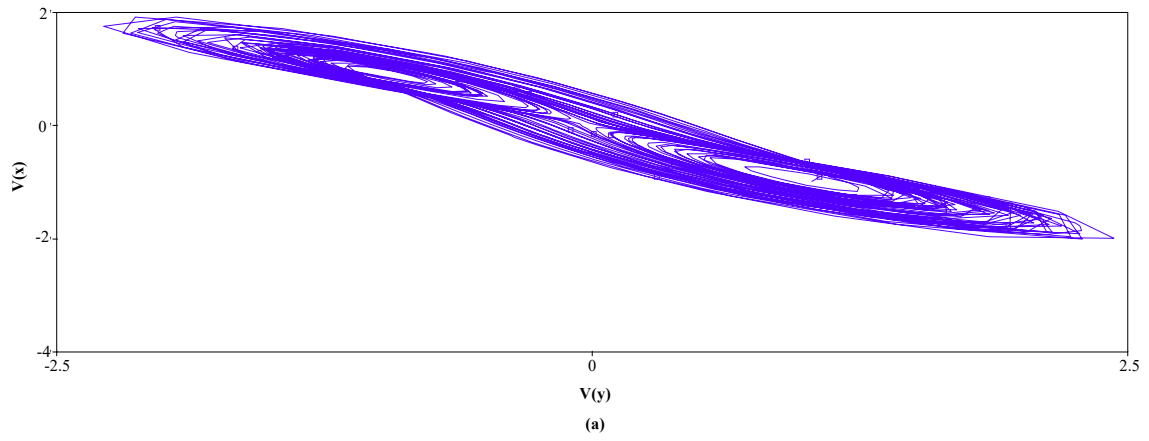


(b)

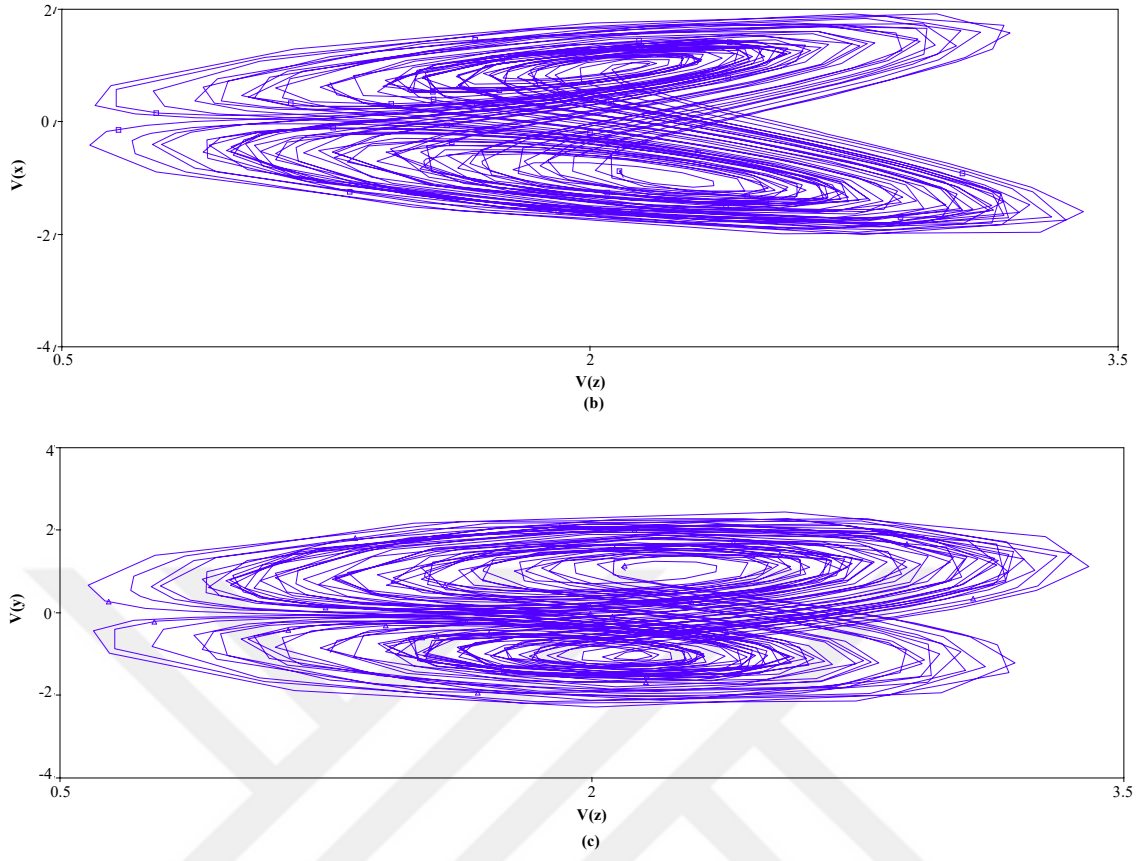


(c)

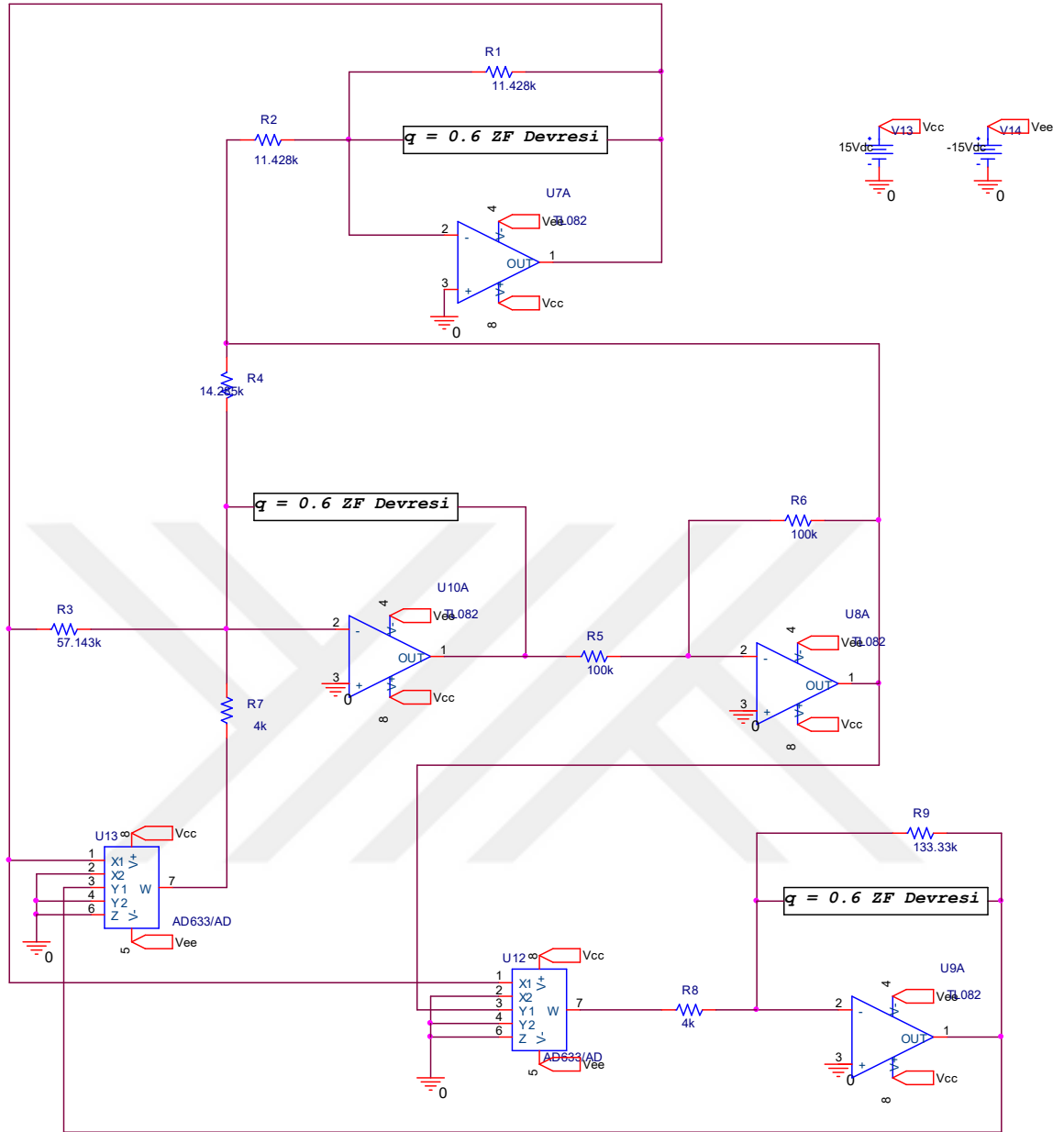
Şekil 4.31. Kesir dereceli Chen sistemi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ için **a)** x **b)** y **c)** z durum değişkenlerinin zaman cevapları



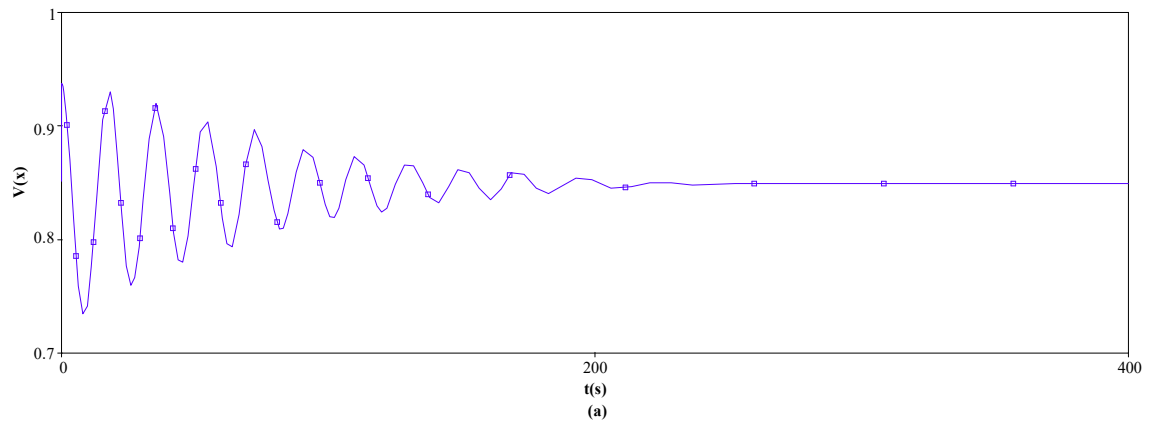
(a)

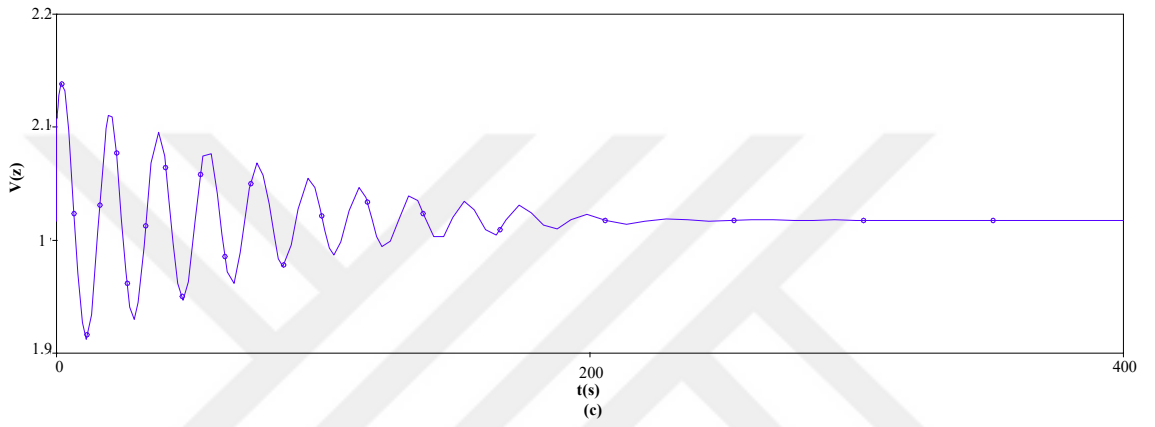
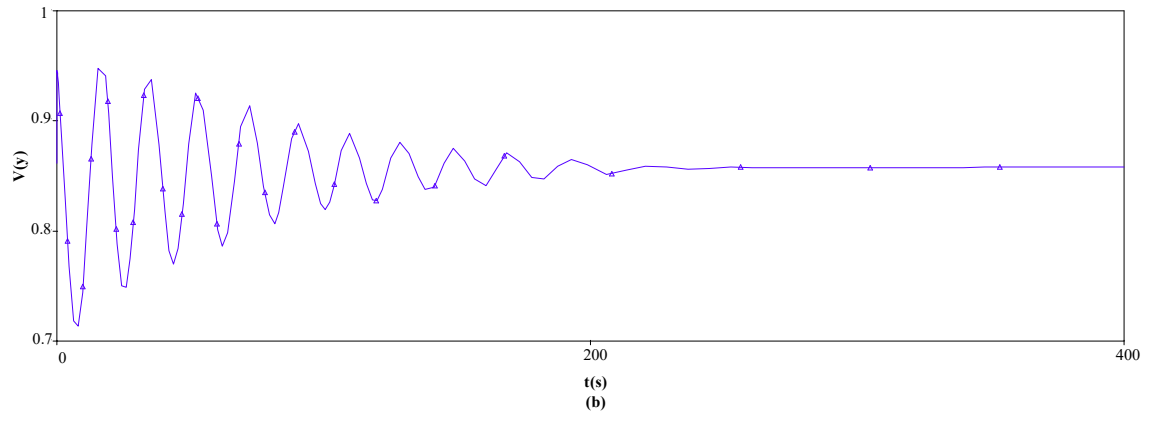


Şekil 4.32. Kesir dereceli Chen sistemi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ için **a)** $x-y$ **b)** $x-z$ **c)** $y-z$ durum uzay diyagramı

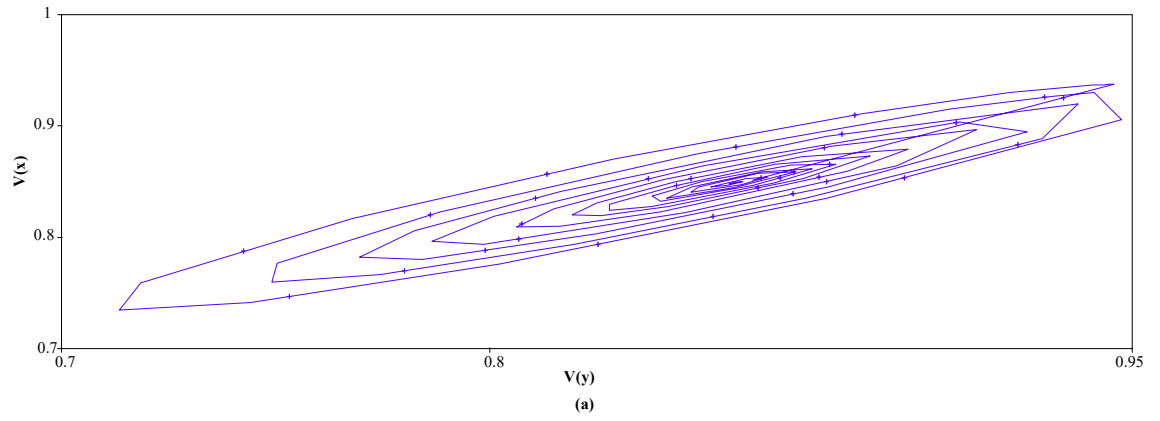


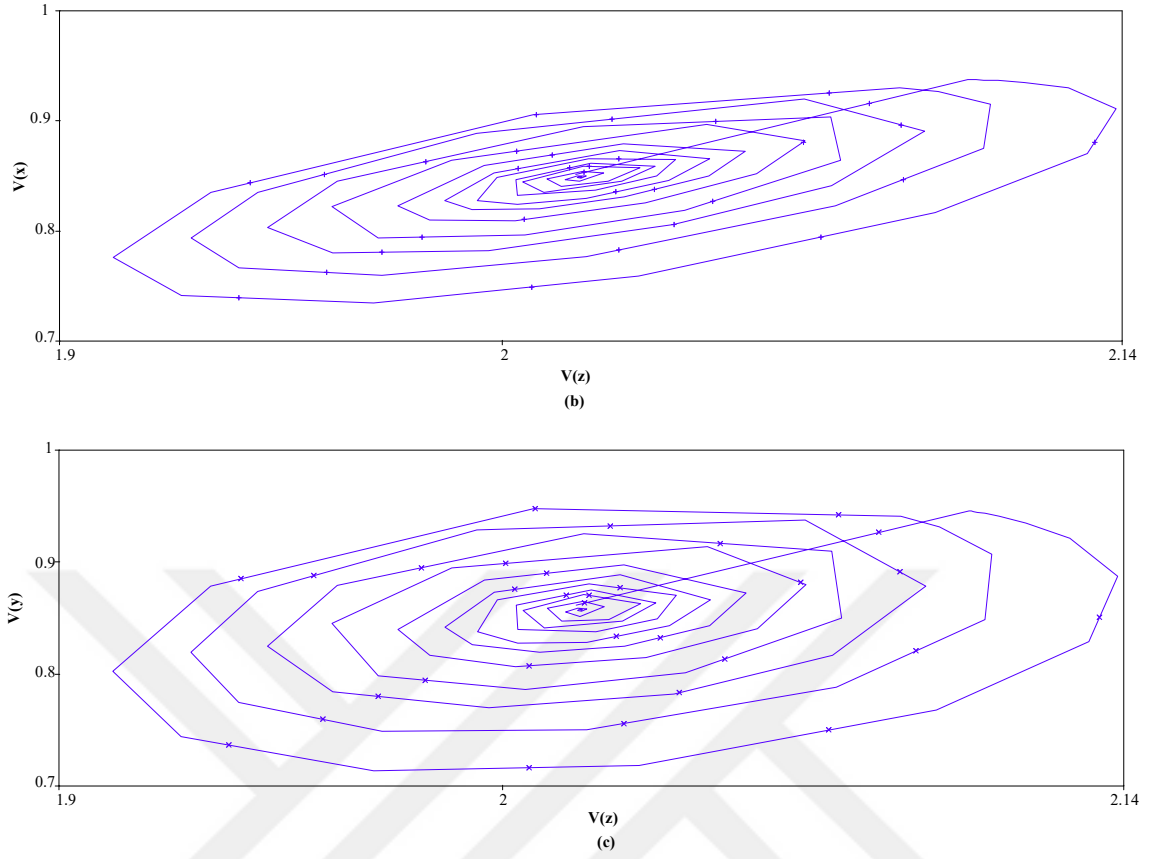
Şekil 4.33. Kesir dereceli Chen devresi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.6$





Şekil 4.34. Kesir dereceli Chen sistemi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.6$ için **a)** x **b)** y **c)** z durum değişkenlerinin zaman cevapları





Şekil 4.35. Kesir dereceli Chen sistemi $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.6$ için **a)** x - y **b)** x - z **c)** y - z durum uzay diyagramı

Yukarıda görüldüğü üzere Şekil 4.31 ve Şekil 4.32’de Denklem (2.15)’e göre hesaplanan en küçük q değeri kullanılmış. Kesir dereceli Chen sistem için tasarlanan analog devrenin *ORCHAD/Pspice* ortamında durum-uzay diyagramları ve zaman cevapları elde edilmiştir. Elde edilen simülasyon sonuçlarında sistemin $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ değerinde kaotik davranış sergilediği gösterilmiştir. Şekil 4.34 ve Şekil 4.35’de ise Denklem (2.15)’e göre hesaplanan değerden daha küçük $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.6$ için simülasyon sonuçları elde edilmiş ve sistemin kaotik davranış sergilemediği gösterilmiştir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında kesir dereceli kaotik sistemler için Grünwald-Letnikov tanımından faydalanılarak bir *MATLAB/M-dosyası* geliştirilmiş ve literatürde yoğun çalışılan kesir dereceli kaotik sistemlerin simülasyonları durum uzay diyagramları ve durum değişkenlerinin zaman cevapları elde edilmiştir. Ayrıca bu sistemlerdeki kesir dereceli q sistem derecesine göre çatallaşma ve çatallaşma noktaları teorik olarak elde edilmiştir. Böylece kaotik davranışın beklendiği ve kaotik davranışın kesinlikle gözlenmeyeceği sistem dereceleri, yapılan simülasyonlarla doğrulanmıştır. Elde edilen sonuçlara göre sürekli zamanlı tam dereceli bir kaotik sistemin derecesi 3 ve üzeri olmak zorunda olmasına rağmen kesir dereceli kaotik sistemlerin sistem derecesi 3'ten küçük olabilmektedir. Ayrıca sürekli zamanlı tam dereceli kaotik sistemler gibi kesir dereceli kaotik sistemler için sistem derecesi ile ilgili genel bir değerlendirme yapılamamaktadır. Kesirli sistem derecesine göre çatallaşma noktası, sistemin kaotik davranış göstermek için her sistem özelinde sınır olduğu gösterilmiştir. Tam ve kesir dereceli kaotik sistemlerde ortak nokta ise durum değişkeni sayısının aynı olmasıdır. Grünwald-Letnikov tanımından faydalanılarak gerçekleştirilen *MATLAB/M-dosyası* kesir dereceli kaotik sistemlerin simülasyonlarının etkin bir şekilde gerçekleştirdiği de değerlendirilmektedir.

Tez çalışmasında ayrıca, Grünwald-Letnikov tanımından faydalanılarak simülasyonları ve analizi yapılan kesir dereceli kaotik sistemlerden Lorenz ve Chen sistemlerin analog devre tasarımları gerçekleştirilmiştir. Bunun için kesir dereceli integratör yapısını sağlayacak frekans tabanlı bir yakınsatma kullanılarak tam dereceli transfer fonksiyonları elde edilmiş ve bu transfer fonksiyonlarını sağlayacak zincir fraktans yapısı pasif devre elemanlarıyla tasarlanmıştır. Tasarlanan zincir fraktans yapısı kullanılarak kesir dereceli Lorenz ve Chen sistemlerin analog devre uygulaması *ORCHAD/Pspice* ortamında gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlarla *MATLAB* ortamında elde edilen sonuçların benzer sonuçlar olduğu gösterilmiştir. Böylece zincir fraktans yapısı kullanılarak kesir dereceli kaotik sistemlerin analog devre uygulamalarında kullanma imkanı olduğu ortaya konmuştur. Gerçekleştirilen analog devre tasarımları kaotik kesir dereceli sistemlerin gerçek zamanlı uygulamalara olanak tanınması açısından önemli olacağı değerlendirilmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] I. Petras, *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*, c. 1. 2011.
- [2] V. Çelik, “Kesir Dereceli Yapıların Doğrusal Olmayan Davranışlar Üzerine Etkileri”, 2010.
- [3] I. Petráš, “A note on the fractional-order Chua’s system”, *Chaos, Solitons and Fractals*, c. 38, sayı 1, ss. 140–147, 2008, doi: 10.1016/j.chaos.2006.10.054.
- [4] M. F. Tolba vd., “FPGA implementation of two fractional order chaotic systems”, *AEU - Int. J. Electron. Commun.*, c. 78, ss. 162–172, 2017, doi: 10.1016/j.aeue.2017.04.028.
- [5] L. Liu, C. Du, F. Zhu, ve L. Xiu, “Incommensurate fractional-order chaotic system and its circuit implementation”, *2019 2nd Int. Conf. Electron. Technol. ICET 2019*, ss. 213–217, 2019, doi: 10.1109/ELTECH.2019.8839431.
- [6] M. S. Tavazoei ve M. Haeri, “A necessary condition for double scroll attractor existence in fractional-order systems”, *Phys. Lett. Sect. A Gen. At. Solid State Phys.*, c. 367, sayı 1–2, ss. 102–113, 2007, doi: 10.1016/j.physleta.2007.05.081.
- [7] P. Cvitanović ve E. Lorenz, “Deterministic Nonperiodic Flow”, *Universality in Chaos*, ss. 367–378, 2017, doi: 10.1201/9780203734636-38.
- [8] I. Petráš, “A note on the fractional-order Volta’s system”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, c. 15, sayı 2, ss. 384–393, 2010, doi: 10.1016/j.cnsns.2009.04.009.
- [9] M. S. Tavazoei ve M. Haeri, “Limitations of frequency domain approximation for detecting chaos in fractional order systems”, *Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl.*, c. 69, sayı 4, ss. 1299–1320, 2008, doi: 10.1016/j.na.2007.06.030.
- [10] G. Chen, “Chen1999”, c. 9, sayı 7, ss. 1465–1466, 1999, [Çevrimiçi]. Available at: <https://doi.org/10.1142/S0218127499001024>.
- [11] H. Kong, “L2002”, c. 12, sayı 3, ss. 659–661, 2002.
- [12] O. E. Rössler, “An equation for continuous chaos”, *Phys. Lett. A*, c. 57, sayı 5, ss. 397–398, 1976, doi: 10.1016/0375-9601(76)90101-8.
- [13] C. Li ve G. Chen, “Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations”, *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, c. 341, sayı 1–4, ss. 55–61, 2004, doi: 10.1016/j.physa.2004.04.113.
- [14] S. S. Steven, “Nonlinear Dynamics and Chaos”, *Westview Press*, 1994, [Çevrimiçi]. Available at: <https://scholar.google.com/scholar?cluster=4856329846230427015&hl=en&oi=scholarrr>.
- [15] G. L. Baker, J. P. Gollub, ve R. Turner, “Chaotic Dynamics—An Introduction”, *Comput. Phys.*, c. 4, sayı 5, s. 562, 1990, doi: 10.1063/1.4822948.
- [16] A. Yüce, “Kesir Dereceli Kontrol Sistemlerinde Zaman Cevaplarının Hesaplanması ve Kontrol Uygulamaları”, 2018.
- [17] E. Z. Serrano, “Fractional Order Chaotic Systems and Their Electronic Design Doctor en Control y Sistemas Dinámicos”, 2017.
- [18] S. P. Wang, S. K. Lao, H. K. Chen, J. H. Chen, ve S. Y. Chen, “Implementation of the fractional-order chen-lee system by electronic circuit”, *Int. J. Bifurc. Chaos*, c. 23, sayı 2, 2013, doi: 10.1142/S0218127413500302.
- [19] A. Yüce ve N. Tan, “Electronic realisation technique for fractional order integrators _ Enhanced Reader.pdf”. .
- [20] A. K. Mahmood, S. Abdul, ve R. Saleh, “Realisation of Frartional Order Differentiator”, c. 8, sayı 1, ss. 1939–1951, 2015.
- [21] Q. Ou ve L. Xu, “The Circuit Design and Simulation of Chen Chaotic System with Fractional Order”,

ss. 1326–1329, 2011.

- [22] L. Jun-jie, “Realization of fractional-order Liu chaotic system by circuit”, c. 1586, ss. 2–7, 1963.
- [23] A. Lassoued ve O. Boubaker, “Dynamic Analysis and Circuit Design of a Novel Hyperchaotic System with Fractional-Order Terms”, c. 2017, 2017.
- [24] Z. H. T. Mekkaoui, “Circuit design and simulation for the fractional-order chaotic behavior in a new dynamical system Circuit design and simulation for the fractional-order chaotic behavior”, *Complex Intell. Syst.*, sayı June 2018, 2019, doi: 10.1007/s40747-018-0070-3.
- [25] L. Liu ve C. Liu, “Theoretical Analysis and Circuit Verification for Fractional-Order Chaotic Behavior in a New Hyperchaotic System”, c. 2014, 2014.
- [26] X. Wang, S. T. Kingni, C. Volos, V. T. Pham, D. V. Hoang, ve S. Jafari, “A fractional system with five terms: analysis, circuit, chaos control and synchronization”, *Int. J. Electron.*, c. 0, sayı 0, s. 1, 2018, doi: 10.1080/00207217.2018.1501616.
- [27] V. Pham, S. Takougang, C. Volos, S. Jafari, ve T. Kapitaniak, “A simple three-dimensional fractional-order chaotic system without equilibrium : Dynamics , circuitry implementation , chaos control and synchronization”, *AEUE - Int. J. Electron. Commun.*, c. 78, ss. 220–227, 2017, doi: 10.1016/j.aeue.2017.04.012.
- [28] X. Zhang, Q. Sun, ve P. Cheng, “Design of a four-wing heterogeneous fractional-order chaotic system and its”, 2014.
- [29] J. Yao, K. Wang, P. Huang, L. Chen, ve J. A. T. Machado, “Analysis and implementation of fractional-order chaotic system with standard components”, *J. Adv. Res.*, c. 25, ss. 97–109, 2020, doi: 10.1016/j.jare.2020.05.008.
- [30] B. T. Krishna, “Studies on fractional order differentiators and integrators : A survey”, *Signal Processing*, c. 91, sayı 3, ss. 386–426, 2011, doi: 10.1016/j.sigpro.2010.06.022.
- [31] N. Yang, C. Xu, C. Wu, ve R. Jia, “Modeling and Analysis of a Fractional-Order Generalized Memristor-Based Chaotic System”, c. 27, sayı 13, ss. 1–20, 2017, doi: 10.1142/S0218127417501991.
- [32] İ. E. Saçu ve N. Korkmaz, “Fraksiyonel Dereceli Kaotik Lorenz Sistemi ’ nin Devre Sentezi The Circuit Synthesis of the Fractional-Order Chaotic Lorenz System”, sayı 24, ss. 42–46, 2021, doi: 10.31590/ejosat.901025.
- [33] G. Zheng, “Hidden Coexisting Attractors in a Fractional-Order System without Equilibrium : Analysis , Circuit Implementation , and Finite-Time Synchronization”, c. 2019, 2019.
- [34] A. G. R. K. N. Salama, “Fractional-Order RC and RL Circuits”, sayı May, ss. 1901–1915, 2012, doi: 10.1007/s00034-012-9432-z.
- [35] E. Tlelo-Cuautle, A. Dalia Pano-Azucena, O. Guillén-Fernández, ve A. Silva-Juárez, *Analog/Digital Implementation of Fractional Order Chaotic Circuits and Applications*. 2020.
- [36] B. . Krishna ve K. V. V. . Reddy, “Active and Passive Realization of Fractance Device of Order $1/2$ ”.
- [37] F. Nur, B. Baykant, N. Tan, ve M. Koseoglu, “Revisiting four approximation methods for fractional order transfer function implementations : Stability preservation , time and frequency response matching analyses”, *Annu. Rev. Control*, sayı xxxx, 2020, doi: 10.1016/j.arcontrol.2020.03.003.
- [38] A. Buscarino, R. Caponetto, S. Graziani, ve E. Murgano, “Realization of fractional order circuits by a Constant Phase Element”, *Eur. J. Control*, c. 54, ss. 64–72, 2020, doi: 10.1016/j.ejcon.2019.11.009.
- [39] N. Tan, A. Yüce, A. Özel, ve F. N. Deniz, “Kesirli Dereceli Kontrol Sistemlerinde Tamsayı Dereceli Yaklaşım Metotlarının Kesirli Dereceli Kontrol Sistemlerinde Tamsayı Dereceli Yaklaşım Metotlarının İncelenmesi Elektrik- Elektronik Mühendisliği Bölümü”, sayı September, 2014.
- [40] A. Charef, H. Sun, Y. Y. Tsao, ve B. Onaral, “Fractal System as Represented by Singularity Function”, c. 37, sayı 9, ss. 1465–1470, 1992.

- [41] G. E. Carlson ve C. A. Halijak, “Approximation of Fractional Capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a Regular Newton Process”, *IEEE Trans. Circuit Theory*, c. 11, sayı 2, ss. 210–213, 1964, doi: 10.1109/TCT.1964.1082270.
- [42] K. Matsuda ve H. Fujii, “H (infinity) Optimized Wave-Absorbing Control: Analytical and Experimental Results”, c. 16, sayı 6, ss. 1146–1153, 1993, doi: 10.2514/3.21139.
- [43] A. Oustaloup, “Fractional Order Sinusoidal Oscillators: Optimization”, ss. 1007–1009, 1981.
- [44] W. M. Ahmad ve J. C. Sprott, “Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems”, c. 16, ss. 339–351, 2003.
- [45] O. Önal, “Kaotik Elektronik Devre Tasarımı, Gerçeklemesi ve Bir Haberleşme Uygulaması”, 2013.
- [46] L. M. Pecora ve T. Carroll, “Synchronization in Chaotic Systems”.
- [47] K. M. Cuomo ve A. V Oppenheim, “Circuit Implementation of Synchronized Chaos with Applications to Communications”, c. 71, sayı 1, ss. 65–68, 1993.
- [48] I. Petras, “Stability of Fractional-Order Systems with Rational Orders”, ss. 1–25, 2008, [Çevrimiçi]. Available at: <http://arxiv.org/abs/0811.4102>.
- [49] E. C. De Oliveira ve J. A. Tenreiro Machado, “A review of definitions for fractional derivatives and integral”, *Math. Probl. Eng.*, c. 2014, sayı 1940, 2014, doi: 10.1155/2014/238459.
- [50] İ. Pehlivan, “Yeni Kaotik Sistemler: Elektronik Devre Gerçeklemeleri, Senkronizasyon Ve Güvenli Haberleşme Uygulamaları”, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

Emre YILMAZ

[Redacted]	
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]