

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ STANCU OPERATÖRLERİ

Tuğba BOSTANCI GÜNEY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2022

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ STANCU OPERATÖRLERİ

Tuğba BOSTANCI GÜNEY

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA

Bu tez çalışmasında; negatif olmayan bir tam sayı parametreye bağlı olan Stancu operatörlerinin iki tür genelleştirilmesi üzerinde durulmuştur. Önce, Stancu operatörlerinin, iki farklı formda, Kantorovich tipten genelleştirilmesi tanımlanarak, bu operatör dizileri için L^p -yaklaşım incelenmiştir. L^p -yaklaşımın oranı için bir üst eşitsizlik, birinci ortalama süreklilik modülü (τ -modül) kullanılarak elde edilmiştir. Daha sonra, Stancu operatörlerinin, negatif olmayan bir reel parametreye bağlı olan bir diğer genelleştirilmesi tanımlanarak, bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, Stancu operatörleri için; salınım azaltıcı özellik ve $[0, 1]$ üzerinde sınırlı salınımlı fonksiyonların uzayında, salınım yarı-normunda yakınsaklık elde edilmiştir. Son olarak, negatif olmayan bir reel parametreye bağlı genelleştirilmiş Stancu operatörlerinin Lipschitz sınıfını koruduğu gösterilmiştir.

Haziran 2022, 56 sayfa

Anahtar Kelimeler: Negatif olmayan bir tam sayı parametreye bağlı Stancu operatörleri, Kantorovich operatörleri, L^p -yaklaşım, yaklaşımın derecesi, ortalama süreklilik modülü, salınım azaltıcı özellik, salınım yarı-normunda yakınsama, Cheney-Sharma operatörleri, Lipschitz sürekli fonksiyon, Abel-Jensen formülleri.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

GENERALIZED STANCU OPERATORS

Tuğba BOSTANCI GÜNEY

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA

In this thesis, two kinds generalizations of Stancu operators depending on a non-negative integer parameter are considered. Firstly, by defining Kantorovich type generalizations of Stancu operators in two different forms, L^p -convergence by these sequences of operators are obtained. An upper estimate for the rate of the L^p -convergence is given in terms of the first order averaged modulus of smoothness (τ -modulus). Next, another generalization of the Stancu operators, which depend on a non-negative real parameter, are constructed and some approximation properties of them are investigated. Moreover, for the Stancu operators; variation detracting property and convergence, in the space of functions of bounded variation on $[0, 1]$, in the variation seminorm are obtained. Finally, it is proved that the generalized Stancu operators depending on a non-negative real parameter preserve Lipschitz' class.

June 2022, 56 pages

Key Words: Stancu operators depending on a non-negative integer parameter, Kantorovich operators, L^p -convergence, rate of convergence, averaged modulus of smoothness, variation detracting property, convergence in variation seminorm, Cheney-Sharma operators, Lipschitz continuous function, Abel-Jensen formulas.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamın gerçekleşmesinde bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana her daim yol gösteren, emek veren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA'ya en içten saygı ve minnetlerimi sunarım. Hayatım boyunca her türlü desteği veren, beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, sabrı, sevgi ve ilgilerini her zaman hissettiren değerli aileme ve sevgili eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tuğba BOSTANCI GÜNEY
Ankara, Haziran 2022



İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	8
2.1 Stancu Operatörleri	17
3. STANCU OPERATÖRLERİNİN KANTOROVICH TİPİNDE GENELLEŞTİRİLMELERİ	18
3.1 Operatörlerin İnşası	18
3.2 Düzgün Yaklaşım	21
3.3 L^p -Yaklaşım	25
3.4 L^p -Yaklaşımın Oramı	32
4. STANCU OPERATÖRLERİNİN NEGATİF OLMAYAN PARAMETREYE DAYALI GENELLEŞTİRİLMESİ	35
4.1 Operatörlerin İnşası	35
4.2 Yardımcı Sonuçlar.....	36
4.3 Yaklaşım Özellikleri	40
5. YENİ ŞEKİL KORUMA ÖZELLİKLERİ	44
5.1 Stancu Operatörlerinin Salınım Azaltıcı Özelliği	44
5.2 Genelleştirilmiş Stancu Operatörlerinin Lipschitz Sınıfını Ko- ruma Özelliği.....	46
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	50
KAYNAKLAR.....	51
ÖZGEÇMİŞ	55

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathcal{L}$	Pozitif lineer operatör
$\mathcal{F}(I)$	$\{g \mid g : I \rightarrow \mathbb{R}, I \text{ reel ekseninde bir aralık}\}$
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b, -\infty < a < b < \infty\}$
$C[a, b]$	$\{g \mid g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ sürekli}\}$
$V_{[a,b]}(g)$	g fonksiyonunun $[a, b]$ üzerindeki toplam salınımı
$BV[a, b]$	$[a, b]$ üzerinde sınırlı salınımlı fonksiyonların sınıfı
$AC[a, b]$	$[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonların sınıfı
$Lip_{\mathbb{M}}(\alpha, I)$	I üzerinde, derecesi α ve sabiti $\mathbb{M}$ olan Lipschitz sürekli fonksiyonların sınıfı
$L^p[a, b]$	$[a, b]$ üzerinde p 'yinci kuvveti mutlak integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$\mathcal{M}[a, b]$	$\{g \mid g, [a, b] \text{ üzerinde sınırlı ve ölçülebilir}\}$
$\ \cdot\ $	$C[a, b]$ uzayının normu
$\ \cdot\ _p$	$L_p[a, b]$ uzayının normu
$\Gamma(\cdot)$ ve $B(\cdot, \cdot)$	Gamma ve beta fonksiyonları
$p_{m,\tau}$	m 'yinci Bernstein temel polinomları
$P_{m,\tau}^\beta$	Bernstein tipinde Cheney-Sharma operatörlerinin temel fonksiyonları
G_m^β	m 'yinci Bernstein tipinde Cheney-Sharma operatörü
B_m	m 'yinci Bernstein operatörü
K_m	m 'yinci Kantorovich operatörü
$K_{m,\rho}^*$	m 'yinci Stancu-Kantorovich operatörü
$K_{m,\rho}$	m 'yinci Stancu-Kantorovich tipinde operatör
$\mathcal{L}_{m,\rho}$	m 'yinci Bernstein-Stancu operatörü
$\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta$	Genelleştirilmiş Stancu operatörü
$R_{m,\rho}$	Bernstein-Stancu polinomunun kalan terimi
e_i	$e_i(t) := t^i, t \in [a, b], i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\omega_1(g, \cdot; \cdot)$	g fonksiyonunun birinci dereceden lokal süreklilik modülü
$\omega_2(g, \cdot)$	g fonksiyonunun ikinci dereceden süreklilik modülü
$\tau_1(g, \cdot)_p$	g fonksiyonunun birinci dereceden ortalama süreklilik modülü (τ -modül)
$K_2(g, \cdot)$	g fonksiyonunun ikinci dereceden Peetre K -fonksiyoneli

1. GİRİŞ

Analizin bir alanı olan Yaklaşım Teori'nin temel düşüncesi, "fonksiyonlara, daha basit ve daha kolay hesaplanabilen fonksiyonlar ile yaklaşım" şeklinde ifade edilebilir. Basit fonksiyonlar, genellikle iyi bilinen polinomlar veya rasyonel fonksiyonlar olarak alınmaktadır. Teorinin kökleri 19'uncu yüzyıla dayanmaktadır. Yaklaşım Teori'de ilk araştırılan problem, yaklaşımın gerçekleşme olasılığıdır. Verilen, ve elemanları kullanılarak yaklaşım yapılması düşünülen bir fonksiyon ailesinin, yaklaşılmak istenen fonksiyonların kümesinde yoğun olup olmadığı incelenir. Yani, "kümedeki herhangi bir fonksiyona, verilen ailedeki keyfi fonksiyonlar kullanılarak istenildiği kadar yaklaşılabiliyor mu?" sorusu araştırılır. İlk önemli yoğunluk sonuçları 1885 yılında Weierstrass tarafından elde edilen, Yaklaşım Teori'nin temel teoremleri olarak adlandırılan sonuçlardır. Bunlar; $\mathbb{R}$ üzerindeki kompakt bir aralık üzerinde; cebirsel polinomların, reel değerli sürekli fonksiyonların uzayında yoğunluğu (cebirsel durum) ve $\mathbb{R}$ üzerinde, trigonometrik polinomların, 2π -periyotlu reel değerli sürekli fonksiyonların uzayında yoğunluğudur (trigonometrik durum). Bu iki sonuç birbirine denk olduğu için genellikle birlikte verilirler.

Bernstein;

$$(x + y)^m = \sum_{\tau=0}^m \binom{m}{\tau} x^\tau y^{m-\tau}, \quad x, y \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N},$$

binom formülünde $y = 1 - x$, $x \in [0, 1]$ alınarak oluşturulan her bir m için

$$p_{m,\tau}(x) := \begin{cases} \binom{m}{\tau} x^\tau (1-x)^{m-\tau}; & 0 \leq \tau \leq m, \\ 0; & \tau < 0 \text{ veya } \tau > m, \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N}) \quad (1.1)$$

polinomunun (binom dağılımının olasılık fonksiyonu) $\sum_{\tau=0}^m p_{m,\tau}(x) = 1$ olduğunu dikkate alarak, $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ için, $B_m : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$

$$B_m(g; x) = \sum_{\tau=0}^m g\left(\frac{\tau}{m}\right) p_{m,\tau}(x), \quad x \in [0, 1], m \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

operatörlerini inşa etmiştir. (1.1) ile verilen Bernstein temel polinomları

$$p_{m,\tau}(x) = (1-x) p_{m-1,\tau}(x) + x p_{m-1,\tau-1}(x), \quad x \in [0, 1], 0 \leq \tau \leq m, \quad (1.3)$$

indirgeme bağıntısını sağlar. Her bir $B_m(g; x)$, derecesi m 'den küçük eşit olan bir polinomdur. Bernstein, (1.2) ile verilen operatör dizisini kullanarak, Weierstrass yaklaşım teoreminin cebirsel formunun inşaya dayalı olan ilk ispatını vermiştir:

Teorem 1.1 $g \in C[0, 1]$ ise $[0, 1]$ üzerinde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B_m(g) = g$$

düzgün yaklaşımı gerçekleşir (Bernstein 1912).

Voronovskaja (1932), Bernstein operatörleri ile yaklaşımın kesin derecesi için, güçlü bir yöntem geliştirmiştir.

Teorem 1.2 g fonksiyonu $[0, 1]$ üzerinde sınırlı, bir $x \in [0, 1]$ noktasının bir komşuluğunda diferensiyellenebilir ve x noktasında ikinci basamaktan $g''(x)$ türevi var ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m [B_m(g; x) - g(x)] = \frac{x(1-x)}{2} g''(x)$$

gerçeklenir. Eğer g , $[0, 1]$ üzerinde ikinci basamaktan sürekli diferensiyellenebilir ise yakınsama, düzgündür (Voronovskaja 1932).

$g \in C[0, 1]$ fonksiyonun (birinci) süreklilik modülü; her bir $\delta > 0$ için, her $x, y \in [0, 1]$, $|x - y| < \delta$ iken $|g(x) - g(y)|$ ifadesinin en büyük değeri olarak tanımlanır ve $\omega(\delta) := \omega(g; \delta)$ ile gösterilir. Bernstein operatörlerinin dizisi ile $g \in C[0, 1]$ fonksiyonuna düzgün yaklaşımın derecesi için bir üst tahmin, Popoviciu tarafından aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

Teorem 1.3 $g \in C[0, 1]$ ise

$$\|B_m(g) - g\| \leq \frac{5}{4} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

gerçeklenir (Popoviciu 1935).

Teoremdaki $\frac{5}{4}$ katsayısı, Lorentz tarafından elde edilmiştir (Lorentz 1953).

Bernstein operatörleri, birçok şekil koruma özelliklerine sahiptir. Bu tez çalışmasında, sadece aşağıdaki özelliklere değinilecektir.

(i) *Salınım azaltıcı özellik:* Sınırlı salımlı fonksiyon için oluşturulan Bernstein operatörlerinin toplam salınımı, fonksiyonun toplam salınımını geçmez (Lorentz 1953).

(ii) *Lipschitz sınıfına koruma*: Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar için oluşturulan Bernstein operatörleri de aynı Lipschitz sınıfındandır (Brown vd. 1987).

Diğer önemli şekil koruma özellikleri için (DeVore ve Lorentz 1993), (Goodman 1989), (Li 2000) ve bu eserlerin kaynaklarına bakılabilir.

Bernstein operatörleri, integrallenebilen fonksiyonlara yaklaşımda uygun olmamaktadır (Lorentz 1953). Kantorovich, (1.2) Bernstein operatörlerindeki $g\left(\frac{\tau}{m}\right)$ nokta hesaplama fonksiyonelinin yerine $g \in L^1[0, 1]$ fonksiyonunun her bir $\left[\frac{\tau}{m+1}, \frac{\tau+1}{m+1}\right]$, $0 \leq \tau \leq m$, üzerindeki

$$(m+1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt$$

integral ortalamasını alarak, Bernstein operatörlerini, $K_m : L^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$,

$$K_m(g; x) := \sum_{\tau=0}^m p_{m,\tau}(x) \left((m+1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt \right), \quad x \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1.4)$$

şeklinde genelleştirmiştir (Kantorovich 1930). Her bir $K_m(g; x)$, derecesi m 'den küçük eşit olan bir polinomdur. Bir $g \in L^1[0, 1]$ fonksiyonunun $F(x) = \int_0^x f(t) dt + F(0)$ belirsiz integrali için $B_{m+1}(F; x)$ operatörü ile $K_m(F'; x)$ arasında

$$\frac{d}{dx} B_{m+1}(F; x) = K_m(F'; x), \quad x \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1.5)$$

eşitliği gerçekleşir.

Lorentz, Kantorovich polinomlarını kullanarak, $[0, 1]$ üzerindeki cebirsel polinomların $L^p[0, 1]$ uzayında yoğunluğunun, inşâya dayalı ilk ispâtını vermiştir:

Teorem 1.4 $g \in L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|K_m(g) - g\|_p = 0$$

yaklaşımı gerçekleşir (Lorentz 1953).

Jensen; $x, y, \beta \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, binom formülünün, bir β parametresine bağlı olan

$$(x + y + m\beta)^m = \sum_{\tau=0}^m \binom{m}{\tau} x(x + \tau\beta)^{\tau-1} [y + (m - \tau)\beta]^{m-\tau} \quad (1.6)$$

ve

$$(x+y)(x+y+m\beta)^{m-1} = \sum_{\tau=0}^m \binom{m}{\tau} x(x+\tau\beta)^{\tau-1} y[y+(m-\tau)\beta]^{m-\tau-1}. \quad (1.7)$$

genelleştirmelerini elde etmiştir (Jensen 1902). Jensen formüllerinde $\beta = 0$ durumu, binom formülünü vermektedir. Cheney ve Sharma; (1.6) ve (1.7) formüllerinde $y = 1 - x$, $x \in [0, 1]$, ve $\beta \geq 0$ için

$$B_{m,\tau}^\beta(f; x) := (1+m\beta)^{-m} \binom{m}{\tau} x(x+\tau\beta)^{\tau-1} [1-x+(m-\tau)\beta]^{m-\tau}$$

ve

$$P_{m,\tau}^\beta(x) := (1+m\beta)^{1-m} \binom{m}{\tau} x(x+\tau\beta)^{\tau-1} (1-x)[1-x+(m-\tau)\beta]^{m-\tau-1} \quad (1.8)$$

olmak üzere, sırasıyla, $f \in C[0, 1]$, $x \in [0, 1]$, $m \in \mathbb{N}$ için

$$\mathbf{P}_m^\beta(f; x) := \sum_{\tau=0}^m B_{m,\tau}^\beta(x) f\left(\frac{\tau}{m}\right)$$

ve

$$G_m^\beta(f; x) := \sum_{\tau=0}^m P_{m,\tau}^\beta(x) f\left(\frac{\tau}{m}\right), \quad (1.9)$$

şeklindeki operatörleri inşa etmişlerdir (1964). (1.6) ve (1.7) formüllerinden, $B_{m,\tau}^\beta$ ve $P_{m,\tau}^\beta$ temel fonksiyonları için, sırasıyla, $\sum_{\tau=0}^m B_{m,\tau}^\beta(x) = 1$ ve $\sum_{\tau=0}^m P_{m,\tau}^\beta(x) = 1$ olduğu açıktır. $\mathbf{P}_m^\beta$ ve G_m^β operatörleri, Bernstein tipinde Cheney-Sharma operatörleri olarak adlandırılmaktadır. $\beta = 0$ durumunda, bu operatörler Bernstein operatörlerine indirgenmektedir:

$$\mathbf{P}_m^0 = G_m^0 = B_m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Her $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için, derecesi; tam olarak m olan $\{p_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ polinomlarının dizisine, bir *polinom dizisi*, ve $p_m(x+y) = \sum_{\tau=0}^m \binom{m}{\tau} p_\tau(x) p_{m-\tau}(y)$ özdeşliğini sağlayan bir polinom dizisine, *binom tipindedir*, denir. Bernstein ve Bernstein tipinde Cheney-Sharma operatörlerinin özel bir durum olarak elde edildiği, binom tipinde polinom dizileri kullanılarak oluşturulan operatörler, ilk kez Popoviciu (1931) tarafından tanımlanmıştır. Bu tür genel operatörler üzerine yapılmış önemli çalışmalardan bazıları; (Lupaş ve Lupaş 1987), (Stancu ve Occorsio 1998), (Crăciun 2001), ve bu makalelerde yer alan kaynaklar, olarak verilebilir. Bernstein tipinde Cheney-Sharma

operatör dizileri ile $g \in C[0, 1]$ fonksiyonuna yaklaşımın derecesi için birinci süreklilik modülü cinsinden üst tahmin, Stancu ve Occorsio'nun (1998) çalışmasındaki Teorem 4.1'de özel durumda elde edilmektedir. Bernstein tipinde Cheney-Sharma operatörlerinin Lipschitz sınıfını koruma özellikleri; $\mathbf{P}_m^\beta$ için (Başcanbaz-Tunca vd. 2016)'da ve G_m^β operatörlerinin iki değişkenli genişlemesi için (Başcanbaz-Tunca vd. 2018)'de elde edilmiştir. $\mathbf{P}_m^\beta$ operatörlerinin Kantorovich tipinde genelleştirilmesi ilk kez Habib ve Umar (1980) tarafından tanımlanmış ve bu operatörler için, Voronovskaja tipinde bir teorem ve Teorem 1.3'deki gibi eşitsizlik elde edilmiştir. Daha sonra Habib (1981), $\mathbf{P}_m^\beta$ operatörlerinin Kantorovich tipinde genelleştirilmesini L^1 uzayındaki fonksiyonlar için dikkate alarak, Teorem 1.3'deki eşitsizliğin bir benzerini, L^1 süreklilik modülü cinsinden elde etmiştir. Müller (1989), bu operatörlerin dizisi için L^p -normda yaklaşım ve yaklaşımın oranı için eşitsizlikler elde etmiştir. Bernstein tipinde Cheney-Sharma operatörleri ile ilgili bazı önemli çalışmalar; (Altomare ve Campiti 1994), (Stancu ve Cismaşiu 1997), (Stancu ve Stoica 2009), (Stancu 2002) ve (Cătinaş ve Otrocol 2013) olarak verilebilir. Stancu; bir olasılık yöntemi kullanarak; negatif olmayan bir ρ tam sayısı, $m > 2\rho$ koşulunu sağlayan bir m doğal sayısı ve negatif olmayan ve $\tau \leq m$ olacak şekilde bir τ tam sayısı için,

$$w_{m,\tau,\rho}(x) := \begin{cases} (1-x)p_{m-\rho,\tau}(x); & 0 \leq \tau < \rho \\ (1-x)p_{m-\rho,\tau}(x) + xp_{m-\rho,\tau-\rho}(x); & \rho \leq \tau \leq m-\rho \\ xp_{m-\rho,\tau-\rho}(x); & m-\rho < \tau \leq m \end{cases} \quad (1.10)$$

şeklinde bir fonksiyon elde etmiştir. Her m için bu fonksiyonlar buradaki $p_{m,\tau}(x)$, (1.1) ile verilen temel fonksiyonlar olup

$$\sum_{\tau=0}^m w_{m,\tau,\rho}(x) = (1-x) \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) + x \sum_{\tau=\rho}^m p_{m-\rho,\tau-\rho}(x) = 1$$

özdeşliği sağlanmaktadır ve $\rho = 0$ ve $\rho = 1$ durumları (1.1) ile verilen Bernstein temel polinomlarını vermektedir (Stancu 1983). Bu çalışmasında Stancu; (1.10) ile verilen temel fonksiyonları kullanarak, Bernstein ve Bernstein tipinde Cheney-Sharma operatörlerindeki gibi, pozitif lineer operatörler inşa ederek (bkz. 2.4), bu operatör dizisi ile yaklaşımın derecesi için, süreklilik modülü cinsinden bir üst sınır,

yaklaşım formülünün kalan terimi için ikinci dereceden bölünmüş farklar cinsinden bir gösterim, Voronovskaja tipinde bir formül elde etmiştir. Ayrıca, operatörlerin spektral özelliklerini incelemiştir.

Yang vd., Stancu operatörlerinin çok değişkenli genelleştirmesini inşâ ederek, çok değişkenli Stancu operatörlerinin Lipschitz sürekli fonksiyonun derecesini ve sabitini koruduğunu göstermişlerdir (Yang vd. 2003). Bustamante ve Quesada (2010), Stancu operatörleri için Voronovskaja tipinde formül ile ilişkili asimptotik formül elde etmişlerdir. Stancu operatörlerinin kompleks genelleştirilmesinin yaklaşım özellikleri, Çetin ve Başcanbaz-Tunca (2019) tarafından çalışılmıştır. Stancu, (2.4) ile verilen operatörlerin, negatif olmayan iki parametreye bağlı olan bir genelleştirmesini; $g \in C[0, 1]$, ρ ve s negatif olmayan ve $m > 2\rho$ koşulunu sağlayan tam sayı parametreler olmak üzere

$$S_{m,\rho,s}(g; x) = \sum_{\tau=0}^{m-\rho s} p_{m-\rho s, \tau}(x) \sum_{j=0}^s p_{s,j}(x) g\left(\frac{\tau + \rho j}{m}\right), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, 1],$$

şeklinde tanımlamıştır (Stancu 1984). $S_{m,\rho,s}$ operatörlerinin $s = 1$ durumu, (2.4) ile verilen Stancu operatörlerine indirgenmektedir. Kajla (2018), $S_{m,\rho,s}$ operatörlerinin Kantorovich tipinde genelleştirmesini tanımlayarak; $C[0, 1]$ uzayında bazı yerel ve genel yaklaşım sonuçları elde etmiştir. Ancak, Kajla'nın tanımladığı bu operatörlerin $s = 1$ ve $\rho = 0$ durumunda, (1.4) ile verilen Kantorovich operatörlerindeki fonksiyonel $m \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\tau+1}{m}} g(t) dt$ olarak elde edilmektedir. $S_{m,\rho,s}$ operatörlerinin iki değişkenli genişlemesi için nicel Voronovskaja tipinde üst eşitsizlikler Başcanbaz-Tunca, Erençin ve Olgun (2019) tarafından elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında, Stancu operatörleri için aşağıdaki incelemeler yapılacaktır:

Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde; çalışmada kullanılacak olan temel bilgiler ve teoremler verilecektir.

Üçüncü bölümde; Stancu operatörlerinin Kantorovich tipinde iki çeşit genelleştirilmeleri tanımlanarak, bu operatörlerin dizileri ile L^p -normda yaklaşım incelenecektir. L^p -yaklaşımın oranı için bir üst eşitsizlik; Popov'un (1982) teoremi (Teorem 2.5) kullanılarak, birinci ortalama süreklilik modülü cinsinden verilecektir.

Dördüncü bölümde; Stancu operatörlerinin temel fonksiyonlarında, G_m^β Bernstein tip Cheney-Sharma operatörlerinin (1.8) ile verilen temel fonksiyonları dikkate alınarak,

Stancu operatörlerinin, negatif olmayan bir β parametresine bağı bir genelleştirmesi tanımlanarak, bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Beşinci bölümde; Stancu operatörlerinin, $[0, 1]$ üzerinde sınırlı salınımlı fonksiyonlar için salınım azaltıcı özelliğe sahip olduğu gösterilecek ve salınım yarı-normunda yakınsaklık elde edilecektir. Ayrıca, Stancu operatörlerinin, negatif olmayan β parametresine bağı genelleştirilmelerinin Lipschitz sınıfını koruduğı gösterilecektir.

Altıncı bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.



2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, çalışma için gerekli olan bazı temel kavramlar (reel durumda), teoremler ve sonuçları verilecektir.

Tanım 2.1 (Lineer Uzay) Elemanlarının; toplama ve reel sayılarla çarpma işlemlerinin, vektör cebirinin kurallarını sağlayacak şekilde tanımlandığı kümeye bir reel lineer uzay, denir (Butzer ve Nessel 1971).

Tanım 2.2 (Pozitif Lineer Operatör) Reel fonksiyonların bir $\mathcal{W}$ lineer uzayı üzerinde tanımlı olan bir $\mathcal{L}$ operatörü;

$$\text{her } g, h \in \mathcal{W}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ için } \mathcal{L}(\alpha g + \beta h) = \alpha \mathcal{L}(g) + \beta \mathcal{L}(h)$$

koşulunu sağlıyor ise *lineerdir* ve

$$g \geq 0 \text{ olacak şekildeki her } g \in \mathcal{W} \text{ için } \mathcal{L}(g) \geq 0$$

koşulunu sağlıyor ise *pozitiftir*, denir (Paltanea 2004).

Reel eksenindeki herhangi bir I aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli tüm fonksiyonların uzayı $\mathcal{F}(I)$ ile gösterilsin.

$\mathcal{W}, \mathcal{F}(I)$ 'nın bir lineer alt uzayı olmak üzere, herhangi bir $\mathcal{L} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{F}(I)$ operatörü, $g \in \mathcal{W}, x \in I$ için $\mathcal{L}(g; x) := (\mathcal{L}(g))(x)$ olarak gösterilecektir.

Tanım 2.3 (Pozitif Lineer Fonksiyonel) $\mathcal{W}, \mathcal{F}(I)$ 'nın bir lineer alt uzayı olmak üzere, $F : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli;

$$g \geq 0 \text{ olacak şekildeki her } g \in \mathcal{W} \text{ için } F(g) \geq 0$$

koşulunu sağlıyor ise *pozitiftir*, denir (Paltanea 2004).

Uyarı 2.1 Herhangi bir $\mathcal{L} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{F}(I)$ pozitif lineer operatörü, pozitif lineer fonksiyonellerin bir $(F_x)_{x \in I}$ ailesi olarak, herhangi bir sabitlenen x için, $F_x : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}, F_x(g) = \mathcal{L}(g; x), g \in \mathcal{W}$, şeklinde tanımlanarak ifade edilebilir (Paltanea 2004).

Lemma 2.1 $\mathcal{W}, \mathcal{F}(I)$ 'nın bir lineer alt uzayı olmak üzere, $F : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif lineer bir fonksiyonel olsun. Bu durumda, aşağıdakiler gerçekleşir (Paltanea 2004):

- (i) $g, h \in \mathcal{W}, g \leq h$ için $\mathcal{L}(g) \leq \mathcal{L}(h)$.
- (ii) $g \in \mathcal{W}, |g| \in \mathcal{W}$ için $|\mathcal{L}(g)| \leq \mathcal{L}(|g|)$.

Teorem 2.1 $\mathcal{L} : C[a, b] \rightarrow C[a, b], \mathcal{L}(e_0) = e_0$, olacak şekilde bir pozitif lineer operatör olsun. $p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekildeki p, q çiftleri, $g, h \in C[a, b]$ ve $x \in [a, b]$ için

$$\mathcal{L}(|gh|; x) \leq \{\mathcal{L}(|g|^p; x)\}^{\frac{1}{p}} \{\mathcal{L}(|h|^q; x)\}^{\frac{1}{q}}$$

Hölder tipinde eşitsizlik gerçekleşir (Pişul 2007).

Tanım 2.4 (Normlu Uzay) $\mathcal{W}, \mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzay olsun. $\mathcal{W}$ üzerinde tanımlı, negatif olmayan ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ fonksiyonuna $\mathcal{W}$ üzerinde bir norm, denir:

- (i) $\|z\| = 0 \iff z = 0$.
- (ii) $\|\mu z\| = |\mu| \|z\|, \mu \in \mathbb{R}$.
- (iii) $\|z + y\| \leq \|z\| + \|y\|$.

$\|\cdot\|$ ile birlikte $\mathcal{W}$ uzayına; normlu lineer uzay, denir. (i) koşulunun sadece yeter şart olması durumunda; $\|\cdot\|$ fonksiyonuna, yarı-norm, denir (DeVore ve Lorentz 1993).

Tanım 2.5 (Cauchy Dizisi ve Tam Uzay) $\mathcal{W}$ normlu lineer uzayındaki bir $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ dizisi; eğer $t, p \rightarrow \infty$ iken $\|x_t - x_p\| \rightarrow 0$ koşulunu sağlıyor ise bir Cauchy dizisidir, denir. Eğer her Cauchy dizisi yakınsak ise $\mathcal{W}$ uzayına tam, denir (DeVore ve Lorentz 1993).

Tanım 2.6 (Banach Uzayı) Tam, normlu lineer uzaya Banach uzayı, denir (DeVore ve Lorentz 1993).

Tanım 2.7 (Sınırlı Operatör) $\mathcal{W}$ ve Y , reel fonksiyonların lineer normlu uzayları ve $\mathcal{L} : \mathcal{W} \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Her $g \in \mathcal{W}$ için $\|\mathcal{L}(g)\|_Y \leq J \|g\|_{\mathcal{W}}$ olan bir $J \geq 0$ sabiti bulunabiliyorsa $\mathcal{L}$ operatörüne sınırlıdır, denir. Bu eşitsizliğin sağlandığı

J değerlerinin en küçük olanına operatörün normu denir ve $\|\mathcal{L}\|$ ile gösterilir. Bu tanıma göre, her $g \in \mathcal{W}$ için

$$\|\mathcal{L}(g)\|_Y \leq \|\mathcal{L}\| \|g\|_{\mathcal{W}}$$

ve

$$\|\mathcal{L}\| := \|\mathcal{L}\|_{\mathcal{W} \rightarrow Y} = \sup_{g \in \mathcal{W}, \|g\| \leq 1} \|\mathcal{L}(g)\|$$

olur (DeVore ve Lorentz 1993).

Önerme 2.1 $\mathcal{W}$ ve Y , reel fonksiyonların lineer normlu uzayları ve $\mathcal{L} : \mathcal{W} \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. $\mathcal{L}$ operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul, sınırlı olmasıdır.

$[a, b]$, reel ekseninde kompakt bir aralık olmak üzere, $\mathcal{W} = Y = C[a, b]$ alınır, $g \in C[a, b]$, $\|g\| := \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|$ normu ile, bir Banach uzaydır.

Çalışma boyunca; e_i ; $e_i(t) := t^i$, $t \in [a, b]$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, şeklindeki kuvvet fonksiyonlarını gösterecektir.

Tanım 2.8 $\mathcal{L} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{F}(I)$ pozitif lineer operatörü ve $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $e_i \in \mathcal{W}$ olmak üzere, $\mathcal{L}(e_i; x)$ değerlerine, operatörün momentleri ve $\mathcal{L}\left((e_1 - xe_0)^i; x\right)$ değerlerine, merkezî momentleri, denir (Gupta ve Rassias 2019).

Pozitif lineer operatör için aşağıdaki temel sonuç gerçekleşir:

Uyarı 2.2 $\mathcal{L} : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ operatörü pozitif lineer ise sınırlıdır ve $\|\mathcal{L}\| = \|\mathcal{L}(e_0)\|$ gerçekleşir (Paltanea 2004).

Teorem 2.2 (Weierstrass Teoremi) $g \in C[a, b]$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için bir $p(x)$ cebirsel polinomu;

$$\text{her } x \in [a, b] \text{ için } |g(x) - p(x)| < \epsilon$$

sağlanacak şekilde, vardır (Weierstrass 1885).

1953 yılında Korovkin, yoğunluk için aşağıdaki yöntemi elde etmiştir:

Teorem 2.3 (Korovkin Teoremi) $\mathcal{L}_m : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, $m \in \mathbb{N}$, pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. $[a, b]$ üzerinde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}_m(e_i) = e_i, \quad i = 0, 1, 2,$$

düzgün yaklaşımları gerçekleşir ise her $g \in C[a, b]$ için $[a, b]$ üzerinde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}_m(g) = g$$

düzgün yaklaşımı gerçekleşir (Korovkin 1953).

Sonuç 2.1 (1.2) ile verilen B_m , $m \in \mathbb{N}$, Bernstein polinomları için

$$\begin{aligned} B_m(e_0; x) &= 1, \\ B_m(e_1; x) &= x, \\ B_m(e_2; x) &= x^2 + \frac{x(1-x)}{m} \end{aligned}$$

olduğundan, Weierstrass yaklaşım teoreminin $[0, 1]$ üzerindeki cebirsel formu, pozitif lineer Bernstein operatör dizisi kullanılarak Korovkin teoreminden elde edilmektedir (Altomare 2010).

Sonuç 2.2 (1.4) ile verilen K_m , $m \in \mathbb{N}$, Kantorovich polinomları için

$$\begin{aligned} K_m(e_0; x) &= 1, \\ K_m(e_1; x) &= \frac{m}{m+1}x + \frac{1}{2m+1}, \\ K_m(e_2; x) &= \frac{m(m-1)}{(m+1)^2}x^2 + \frac{2m}{(m+1)^2}x + \frac{1}{3(m+1)^2} \end{aligned}$$

olduğundan (Altomare 2010), Korovkin teoreminden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 2.4 $g \in C[0, 1]$ ise $[0, 1]$ üzerinde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K_m(g) = g$$

düzgün yaklaşımı gerçekleşir (Altomare 2010).

Tanım 2.9 (İkinci Derece Süreklilik Modülü) $g \in C[0, 1]$ ve $\delta > 0$ olmak üzere,

$$\omega_2(g, \delta) := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \sup_{z, z+2h \in [0, 1]} |g(z+2h) - 2g(z+h) + g(z)|$$

fonksiyonuna, ikinci süreklilik modülü, denir (DeVore ve Lorentz 1993).

Tanım 2.10 (Peetre K -fonksiyoneli) $g \in C[0, 1]$, $\delta > 0$ ve

$$W^2 := \{h \in C[0, 1] \mid h', h'' \in C[0, 1]\} \quad (2.1)$$

olmak üzere

$$K_2(g, \delta) = \inf \{ \|g - h\| + \delta \|h''\| : h \in W^2 \}$$

fonksiyonuna, ikinci derece K -fonksiyoneli, denir (DeVore ve Lorentz 1993).

Uyarı 2.3 $g \in C[0, 1]$ ve $\delta > 0$ iken, pozitif bir C sabiti,

$$K_2(g, \delta) \leq C \omega_2(g, \sqrt{\delta}) \quad (2.2)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde, vardır (DeVore ve Lorentz 1993).

Uyarı 2.4 $[0, 1]$ üzerinde tanımlı reel değerli Lebesgue ölçülebilir ve $|g|^p$ Lebesgue integrallenebilen g fonksiyonların kümesi $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, ile gösterilir. Fonksiyonların, alışılmış toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre bir lineer uzay olup,

$\|g\|_p := \left(\int_0^1 |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ normu ile, bir Banach uzayıdır (DeVore ve Lorentz 1993). $C[0, 1]$ uzayı $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, uzayında doğal norma göre yoğundur ve $g \in C[0, 1]$ ise $\|g\|_p \leq \|g\|$ sağlanır (Altomare 2010).

L^p -normunda yaklaşımın oranını bulmak için çok kullanışlı bir araç; *ortalama süreklilik modülü* kavramıdır (bkz. Sendov ve Popov 1983, Quak 1988). $\mathcal{M}[a, b]$

$$\mathcal{M}[a, b] = \{g \mid g, [a, b] \text{ üzerinde sınırlı ve ölçülebilir}\}$$

uzayını gösterebilir.

Tanım 2.11 (Ortalama Süreklilik Modülü) $\delta > 0$, $g \in \mathcal{M}[a, b]$ ve

$$\omega_1(g, u; \delta) := \sup \left\{ |g(t+k) - g(t)| : t, t+k \in \left[u - \frac{\delta}{2}, u + \frac{\delta}{2} \right] \cap [a, b] \right\}$$

$u \in [a, b]$ noktasında g fonksiyonunun birinci dereceden lokal süreklilik modülü olmak üzere, δ adımlı birinci dereceden ortalama süreklilik modülü (τ -modül) $\tau_1(g, \delta)_p$ ile gösterilir ve

$$\tau_1(g; \delta)_p = \|\omega_1(g, \cdot; \delta)\|_p$$

olarak tanımlanır (Sendov ve Popov 1983, Quak 1988).

Yaklaşımın oranı için, Popov tarafından ispat edilen aşağıdaki teorem dikkate alınacaktır (Popov 1982):

Teorem 2.5 $\mathcal{L} : \mathcal{M}[a, b] \rightarrow \mathcal{M}[a, b]$, aşağıdaki koşulları sağlayan pozitif lineer bir operatör olsun:

$$\mathcal{L}(e_0; u) = 1, \quad \mathcal{L}(e_1; u) = u + \alpha(u), \quad \mathcal{L}(e_2; u) = u^2 + \beta(u), \quad u \in [a, b].$$

Eğer

$$A := \sup \{ |\beta(u) - 2u\alpha(u)| ; u \in [a, b] \} \leq 1,$$

ise $g \in \mathcal{M}[a, b]$ ve $1 \leq p < \infty$ için

$$\|\mathcal{L}(g) - g\|_p \leq C\tau_1 \left(g; \sqrt{A} \right)_p$$

eşitsizliği gerçekleşir. Buradaki C ; $\mathcal{L}$ operatörüne, $L^p[0, 1]$ normuna ve g fonksiyonuna bağlı olmayan pozitif bir sabittir (Popov 1982).

$\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ Bernstein-Kantorovich operatör dizileri ile $L^p[0, 1]$ normunda yaklaşımın oranı, birinci dereceden ortalama süreklilik modülü cinsinden bir üst eşitsizlik ile, aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 2.6 Borel ölçülebilir ve $[0, 1]$ üzerinde sınırlı her g fonksiyonu ve $m \in \mathbb{N}$ için

$$\|K_m(g) - g\|_p \leq 748\tau_1 \left(g; \frac{1}{\sqrt{m+1}} \right)_p$$

eşitsizliği gerçekleşir (Altomare ve Campiti 1994).

Uyarı 2.5 Çok değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörleri için elde edilen (Altomare vd. 2017)'deki Önerme 4.2'nin özel durumunda, K_m Kantorovich polinomlarının dizisi ile $L^p[0, 1]$ normunda yaklaşımın oranı için bir üst eşitsizlik, birinci dereceden ortalama süreklilik modülü cinsinden,

$$\|K_m(g) - g\|_p \leq C\tau_1 \left(g; \sqrt{\frac{3m+1}{12(m+1)^2}} \right)_p \quad (2.3)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki C , g fonksiyonuna bağlı pozitif bir sabittir (Altomare vd. 2017).

Tanım 2.12 $I, \mathbb{R}$ üzerinde bir aralık ve $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. Her $u, v \in I$ için, pozitif bir $\mathbb{M}$ sayısı,

$$|g(u) - g(v)| \leq \mathbb{M} |u - v|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunuyorsa, $g; I$ üzerinde, derecesi α ve sabiti $\mathbb{M}$ olan Lipschitz sürekli bir fonksiyondur, denir. I üzerinde, derecesi α ve sabiti $\mathbb{M}$ olan Lipschitz sürekli fonksiyonların sınıfı $Lip_{\mathbb{M}}(\alpha, I)$ ile gösterilir (DeVore ve Lorentz 1993).

Tanım 2.13 (Konveks Fonksiyon) $I, \mathbb{R}$ üzerinde bir aralık ve $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $u, h \in I$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\varphi(\lambda u + (1 - \lambda)h) \leq \lambda \varphi(u) + (1 - \lambda) \varphi(h)$$

eşitsizliği sağlayanı ise φ fonksiyonuna konvektir, denir (Altomare 2010).

Tanım 2.14 (Jensen Eşitsizliği) $I, \mathbb{R}$ üzerinde bir açık aralık ve φ konveks bir fonksiyon ise her sonlu $(x_\tau)_{1 \leq \tau \leq m}$ ailesi ve $\sum_{\tau=1}^m \lambda_\tau = 1$ olacak şekildeki $\lambda_\tau \in [0, 1]$, $1 \leq \tau \leq m$ için

$$\varphi\left(\sum_{\tau=1}^m \lambda_\tau x_\tau\right) \leq \sum_{\tau=1}^m \lambda_\tau \varphi(x_\tau)$$

eşitsizliği sağlayanır (Altomare 2010).

Tanım 2.15 (Sigma Cebir) Ω boş olmayan bir küme, U , Ω 'nın bir takım alt kümelerinden oluşan bir sınıf olsun. Eğer

a) $\Omega \in U$,

b) $\forall S \in U$ için $S^c \in U$,

c) her $S, T \in U$ için $S \cup T \in U$

özellikleri sağlanıyor ise U sınıfına bir cebir denir. Eğer (c) yerine

c*) $n \geq 1$ için $S_n \in U$ iken $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in U$

özelligi sağlanıyor ise U sınıfına σ -cebiri denir (Akdi 2011).

Aşağıda, Jensen eşitsizliğinin integral formu için gerekli olan, olasılık uzayı tanımı verilmektedir:

Tanım 2.16 (Olasılık Uzayı) Ω boş olmayan bir küme, U , Ω üzerinde bir sigma cebiri olsun. U üzerinde tanımlı,

$$P : U \rightarrow [0, 1], \quad S \mapsto P(S)$$

P küme fonksiyonu,

a) $\forall S \in U$ için $P(S) \geq 0$,

b) $P(\Omega) = 1$,

c) $S_n, n \in \mathbb{N}$, U 'daki ayrık ($S_k \cap S_j = \emptyset, k \neq j$) olayların bir dizisi olmak üzere,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n)$$

özelliklerini sağlıyor ise, P küme fonksiyonuna bir olasılık ölçüsü, denir. Ayrıca, $P(S)$ sayısına S olayının olasılığı, (Ω, U, P) üçlüsüne de bir olasılık uzayı, denir (Akdi 2011).

Tanım 2.17 (İntegral Jensen Eşitsizliği) (Ω, U, μ) bir olasılık uzayı, $I, \mathbb{R}$ üzerinde bir açık aralık ve $g : \Omega \rightarrow I$ bir μ -integrallenebilir fonksiyon ise $\int_{\Omega} g d\mu \in I$ olur. Ayrıca, $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks ve $\varphi \circ g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, μ -integrallenebilir ise

$$\varphi\left(\int_{\Omega} g d\mu\right) \leq \int_{\Omega} (\varphi \circ g) d\mu$$

eşitsizliği sağlanır (Altomare 2010).

Tanım 2.18 (Gamma ve Beta Fonksiyonları) $\operatorname{Re}(v), \operatorname{Re}(w), \operatorname{Re}(y) > 0$ olmak üzere, gamma ve beta fonksiyonları, sırasıyla,

$$\Gamma(v) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{v-1} dt \text{ ve } B(w, y) = \int_0^1 t^{w-1} (1-t)^{y-1} dt$$

olarak tanımlanır ve $B(w, y) = \frac{\Gamma(w)\Gamma(y)}{\Gamma(w+y)}$ sağlanır (Abramowitz ve Stegun 1970).

Tanım 2.19 (Sınırlı Salınlımlı Fonksiyon) g fonksiyonu bir $[a, b]$ aralığında tanımlı, sınırlı ve reel değerli olsun. Supremum; $[a, b]$ üzerindeki her sonlu $u_0 < u_1 < \dots < u_m$ dizisi üzerinden alınmak üzere, eğer

$$V_{[a,b]}(g) := \sup \sum_{\tau=1}^m |g(u_\tau) - g(u_{\tau-1})| < \infty$$

ise g fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sınırlı salınlımlıdır, denir (DeVore ve Lorentz 1993).

$[a, b]$ üzerinde sınırlı salınlımlı fonksiyonların yarı-normlu uzayı ($\|g\|_{TV[a,b]} := V_{[a,b]}[g]$ yarı-normu ile) $TV[a, b]$ ile gösterilir (Bardaro vd. 2003).

$[0, 1]$ üzerinde sınırlı salınlımlı fonksiyonlar için B_m Bernstein operatörleri, aşağıdaki şekil koruma özelliğini sağlar:

Önerme 2.2 (Salınım Azaldıcı Özellik) $g \in TV[0, 1]$ ise

$$V_{[0,1]}[B_m(g)] \leq V_{[0,1]}[g]$$

eşitsizliği gerçekleşir (Lorentz 1953).

Tanım 2.20 (Mutlak Süreklilik) g fonksiyonu bir $[a, b]$ aralığında tanımlı, sınırlı ve reel değerli olsun. Her $\epsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı; $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_m < b_m$ ve $\sum_{\tau=1}^m (b_\tau - a_\tau) < \delta$ olacak şekildeki her $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m$ sayıları için,

$$\sum_{\tau=1}^m |g(b_\tau) - g(a_\tau)| < \epsilon$$

sağlanacak şekilde, bulunabiliyor ise g fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde mutlak süreklidir, denir (Natanson 1961).

$[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonların sınıfı $AC[a, b]$ ile gösterilir.

B_m Bernstein operatörleri için, aşağıdaki salınım yarı-normunda yakınsama gerçekleşir:

Önerme 2.3 $g \in TV[0, 1]$ için

$$g \in AC[0, 1] \iff \lim_{m \rightarrow \infty} V_{[0,1]}[B_m(g) - g] = 0$$

gerçekleşir (Lorentz 1937, Bardaro vd. 2003).

2.1 Stancu Operatörleri

Stancu; negatif olmayan bir ρ tam sayısı, $m > 2\rho$ olacak şekildeki bir m doğal sayısı ve $x \in [0, 1]$ için (1.10) ile verilen $w_{m,\tau,\rho}(x)$ temel fonksiyonları kullanarak, $g \in C[0, 1]$ için

$$\mathcal{L}_{m,\rho}(g; x) = \sum_{\tau=0}^m w_{m,\tau,\rho}(x) g\left(\frac{\tau}{m}\right) \quad (2.4)$$

şeklindeki operatörleri inşa etmiştir. $w_{m,\tau,\rho}(x)$ fonksiyonlarının tanımından $\mathcal{L}_{m,\rho}(g; x)$ Stancu operatörleri

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m,\rho}(g; x) &= (1-x) \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) g\left(\frac{\tau}{m}\right) + x \sum_{\tau=\rho}^m p_{m-\rho,\tau-\rho}(x) g\left(\frac{\tau}{m}\right) \\ &= \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) \left[(1-x) g\left(\frac{\tau}{m}\right) + x g\left(\frac{\tau+\rho}{m}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki $p_{m,\tau}(x)$; (1.1) ile verilen Bernstein temel polinomlarıdır. $\rho = 0$ ve $\rho = 1$ için $\mathcal{L}_{m,\rho}$ Stancu operatörleri B_m Bernstein operatörlerini verir: $\mathcal{L}_{m,0} = \mathcal{L}_{m,1} = B_m$, $m \in \mathbb{N}$. Ayrıca, Stancu operatörleri

$$\mathcal{L}_{m,\rho}(g; 0) = g(0) \text{ ve } \mathcal{L}_{m,\rho}(g; 1) = g(1)$$

uç nokta interpolasyon özelliğini sağlar ve ilk üç momenti

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m,\rho}(e_0; x) &= 1, \\ \mathcal{L}_{m,\rho}(e_1; x) &= x, \\ \mathcal{L}_{m,\rho}(e_2; x) &= x^2 + \left[1 + \frac{\rho(\rho-1)}{m} \right] \frac{x(1-x)}{m} \end{aligned}$$

şeklindedir (Stancu 1981, Stancu 1983).

3. STANCU OPERATÖRLERİNİN KANTOROVICH TİPİNDE GENELLEŞTİRİLMELERİ

3.1 Operatörlerin İnşası

$\mathcal{L}_{m,\rho}$ Stancu polinomlarının tanımındaki $g\left(\frac{\tau}{m}\right)$ nokta hesaplama fonksiyoneli, $g \in L^1[0, 1]$ fonksiyonunun $[\frac{\tau}{m+1}, \frac{\tau+1}{m+1}]$ üzerindeki integralinin $(m+1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt$ ortalaması ile değiştirilirse, $w_{m,\tau,\rho}$, $0 \leq \tau \leq m$, Stancu temel fonksiyonları olmak üzere, negatif olmayan bir ρ tam sayı parametre ve $m > 2\rho$ olacak şekildeki m doğal sayıları, $x \in [0, 1]$ ve $g \in L^1[0, 1]$ için Stancu operatörlerinin Kantorovich genelleştirilmesi

$$K_{m,\rho}^*(g; x) := \sum_{\tau=0}^m w_{m,\tau,\rho}(x) \left((m+1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt \right) \quad (3.1)$$

olarak tanımlanabilir. Tez boyunca, (3.1) ile verilen $K_{m,\rho}^*$ operatörleri; $K_{m,\rho}^*$ Stancu-Kantorovich operatörleri olarak adlandırılacaktır. (1.10) ile verilen $w_{m,\tau,\rho}(x)$ temel fonksiyonların tanımından

$$\begin{aligned} K_{m,\rho}^*(g; x) &= (m+1) \sum_{\tau=0}^{m-\rho} \binom{m-\rho}{\tau} x^\tau (1-x)^{m-\rho-\tau} (1-x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt \\ &\quad + (m+1) \sum_{\tau=\rho}^m \binom{m-\rho}{\tau-\rho} x^{\tau-\rho} (1-x)^{m-\tau} x \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt \end{aligned}$$

olarak yazılır. İkinci toplamda $\tau \rightarrow \tau + \rho$ alınarak; negatif olmayan bir ρ tam sayı parametre ve $m > 2\rho$ olacak şekildeki m doğal sayıları, $x \in [0, 1]$ ve $g \in L^1[0, 1]$ için $K_{m,\rho}^*$ Stancu-Kantorovich operatörleri

$$K_{m,\rho}^*(g; x) = \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) (m+1) \left[(1-x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt + x \int_{\frac{\tau+\rho}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho+1}{m+1}} g(t) dt \right] \quad (3.2)$$

olarak dikkate alınacaktır.

Bir $g \in L^1[0, 1]$ fonksiyonunun $F(x) = \int_0^x g(t) dt + F(0)$ belirsiz integrali için $\mathcal{L}_{m+1,\rho}(F; x)$ operatörü ile $K_{m,\rho}^*(F'; x)$ arasında (1.5) gibi bir eşitlik, $\rho = 0, 1$ dışında,

sağlanmamaktadır:

$$\frac{d}{dx} \mathcal{L}_{m+1,\rho}(F; x) \neq K_{m,\rho}^*(F'; x), \quad \rho \neq 0, 1.$$

Gerçekten, (2.5) formülünden

$$\mathcal{L}_{m+1,\rho}(F; x) := \sum_{\tau=0}^{m+1-\rho} p_{m+1-\rho,\tau}(x) \left[(1-x) F\left(\frac{\tau}{m+1}\right) + x F\left(\frac{\tau+\rho}{m+1}\right) \right]$$

olur. Yukarıdaki ifadenin iki tarafının x 'e göre türevi alınarak

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \mathcal{L}_{m+1,\rho}(F; x) \\ &= \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) (m+1-\rho) \left[(1-x) \left\{ F\left(\frac{\tau+1}{m+1}\right) - F\left(\frac{\tau}{m+1}\right) \right\} \right. \\ & \quad \left. + x \left\{ F\left(\frac{\tau+\rho+1}{m+1}\right) - F\left(\frac{\tau+\rho}{m+1}\right) \right\} \right] \\ & \quad + \sum_{\tau=0}^{m+1-\rho} p_{m+1-\rho,\tau}(x) \left[F\left(\frac{\tau+\rho}{m+1}\right) - F\left(\frac{\tau}{m+1}\right) \right] \\ &= \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) (m+1-\rho) \left((1-x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt + x \int_{\frac{\tau+\rho}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho+1}{m+1}} g(t) dt \right) \\ & \quad + \sum_{\tau=0}^{m+1-\rho} p_{m+1-\rho,\tau}(x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho}{m+1}} g(t) dt \end{aligned} \quad (3.3)$$

bulunur. Bu durumda, (3.3) formülünün sağ tarafı, (3.2) ile verilen $K_{m,\rho}^*(g; x)$ Stancu-Kantorovich operatörlerini içinde barındırdığı için, Stancu operatörlerinin bir diğer Kantorovich tipinde genelleştirmesi, aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Negatif olmayan bir ρ tam sayı parametre ve $m > 2\rho$ olacak şekildeki m doğal sayıları, $x \in [0, 1]$ ve $g \in L^1[0, 1]$ için,

$$\begin{aligned} & K_{m,\rho}(g; x) \\ &: = \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) (m+1-\rho) \left((1-x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt + x \int_{\frac{\tau+\rho}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho+1}{m+1}} g(t) dt \right) \\ & \quad + \sum_{\tau=0}^{m+1-\rho} p_{m+1-\rho,\tau}(x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho}{m+1}} g(t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

olarak tanımlanan $K_{m,\rho}$ operatörleri, $K_{m,\rho}$ Stancu-Kantorovich tipinde operatörler olarak adlandırılacaktır. Bu durumda,

$$\frac{d}{dx} \mathcal{L}_{m+1,\rho}(F; x) = K_{m,\rho}(F'; x)$$

sağlanır. $K_{m,\rho}^*$ Stancu-Kantorovich ve $K_{m,\rho}$ Stancu-Kantorovich tipinde operatörleri, pozitif ve lineer olup, $\rho = 0$ ve $\rho = 1$ durumları Kantorovich operatörlerini verir, yani

$$K_{m,1}^* = K_{m,0}^* = K_m = K_{m,1} = K_{m,0}$$

olur. Gerçekten, $K_{m,1}^*$ ve $K_{m,0}^*$ için durum, (1.10) ve (1.3) formüllerinden, açıktır. $K_{m,0}$ için

$$\begin{aligned} K_{m,0}(g; x) &= \sum_{\tau=0}^m p_{m,\tau}(x) (m+1) \left((1-x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt + x \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt \right) \\ &\quad + \sum_{\tau=0}^{m+1} p_{m+1,\tau}(x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt \\ &= K_m(g; x) \end{aligned}$$

bulunur, bu da (1.4) ile verilen Kantorovich operatörleridir. Diğer taraftan, $K_{m,1}$ için

$$\begin{aligned} K_{m,1}(g; x) &= m \sum_{\tau=0}^{m-1} p_{m-1,\tau}(x) \left((1-x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt + x \int_{\frac{\tau+1}{m+1}}^{\frac{\tau+2}{m+1}} g(t) dt \right) \\ &\quad + \sum_{\tau=0}^m p_{m,\tau}(x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.5) formülünün sağ tarafındaki ilk terim;

$$\begin{aligned}
& m \sum_{\tau=0}^{m-1} p_{m-1,\tau}(x) \left((1-x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt + x \int_{\frac{\tau+1}{m+1}}^{\frac{\tau+2}{m+1}} g(t) dt \right) \\
&= m \sum_{\tau=0}^{m-1} (1-x) p_{m-1,\tau}(x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt \\
&\quad + m \sum_{\tau=0}^{m-1} x p_{m-1,\tau}(x) \int_{\frac{\tau+1}{m+1}}^{\frac{\tau+2}{m+1}} g(t) dt
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Son ifadedeki ikinci toplamda; τ yerine $\tau - 1$ alınıp, (1.1) ve (1.3) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& m \sum_{\tau=0}^{m-1} p_{m-1,\tau}(x) \left((1-x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt + x \int_{\frac{\tau+1}{m+1}}^{\frac{\tau+2}{m+1}} g(t) dt \right) \\
&= m \sum_{\tau=0}^m p_{m,\tau}(x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan eşitlik (3.5)'de yerine yazılarak, (1.4) ile verilen $K_m(g; x)$ Kantorovich operatörleri elde edilir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2022).

3.2 Düzgün Yaklaşım

$[0, 1]$ üzerinde sürekli, reel değerli fonksiyonlara; $K_{m,\rho}^*$ Stancu-Kantorovich ve $K_{m,\rho}$ Stancu-Kantorovich tipinde operatörlerin dizileri ile $[0, 1]$ üzerinde düzgün yaklaşım, sırasıyla, aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

Teorem 3.1 ρ ; negatif olmayan ve sabitlenen bir tam sayı ve $g \in C[0, 1]$ ise $[0, 1]$ üzerinde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K_{m,\rho}^*(g) = g$$

düzgün yaklaşımı gerçekleşir.

İspat. $K_{m,\rho}^*(e_i; x)$, $i = 0, 1, 2$, için Korovkin teoreminin koşullarının sağlandığının gösterilmesi yeterlidir.

$$K_{m,\rho}^*(e_0; x) = 1 \quad (3.6)$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} & K_{m,\rho}^*(e_1; x) \\ &= \sum_{k=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,k}(x) (m+1) \left\{ (1-x) \frac{1}{2} \frac{2k+1}{(m+1)^2} + x \frac{2(k+\rho)+1}{2(m+1)^2} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,k}(x) \\ &\quad \times \left\{ (1-x) \left(\frac{k}{m} \right) \frac{m}{m+1} + (1-x) \frac{1}{2(m+1)} + x \left(\frac{k+\rho}{m} \right) \frac{m}{m+1} + \frac{x}{2(m+1)} \right\} \\ &= \frac{m}{m+1} \mathcal{L}_{m,\rho}(e_1; x) + \frac{1}{2(m+1)} \mathcal{L}_{m,\rho}(e_0; x) \\ &= \frac{m}{m+1} x + \frac{1}{2(m+1)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

ve

$$\begin{aligned} & K_{m,\rho}^*(e_2; x) \\ &= \sum_{k=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,k}(x) (m+1) \left\{ (1-x) \frac{(k+1)^3 - k^3}{3(m+1)^3} + x \frac{(k+\rho+1)^3 - (k+\rho)^3}{3(m+1)^3} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,k}(x) \left[\left(\frac{k}{m} \right)^2 \frac{m^2}{(m+1)^2} + \frac{k}{m} \frac{m}{(m+1)^2} + \frac{1}{3(m+1)^2} \right] (1-x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,k}(x) \left[\left(\frac{k+\rho}{m} \right)^2 \frac{m^2}{(m+1)^2} + \left(\frac{k+\rho}{m} \right) \frac{m}{(m+1)^2} + \frac{1}{3(m+1)^2} \right] x \\ &= \mathcal{L}_{m,\rho}(e_2; x) \left(\frac{m}{m+1} \right)^2 + \mathcal{L}_{m,\rho}(e_1; x) \frac{m}{(m+1)^2} + \frac{1}{3(m+1)^2} \mathcal{L}_{m,\rho}(e_0; x) \\ &= \left(\frac{m}{m+1} \right)^2 \left[x^2 + \left(1 + \frac{\rho(\rho-1)}{m} \right) \frac{x(1-x)}{m} \right] + \frac{mx}{(m+1)^2} + \frac{1}{3(m+1)^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

bulunur. (3.6), (3.7) ve (3.8) momentlerinden, $\lim_{m \rightarrow \infty} K_{m,\rho}(e_i^*) = e_i$, $i = 0, 1, 2$, yaklaşımlarının $[0, 1]$ üzerinde düzgün olduğu açıktır. İspat, Korovkin teoreminden elde edilir. ■

Teorem 3.2 ρ ; negatif olmayan ve sabitlenen bir tam sayı ve $g \in C[0, 1]$ ise $[0, 1]$ üzerinde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K_{m,\rho}(g) = g$$

düzgün yaklaşımı gerçekleşir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2022).

İspat. $K_{m,\rho}(e_i; x)$, $i = 0, 1, 2$, için Korovkin teoreminin koşullarının sağlandığının gösterilmesi yeterlidir.

$$K_{m,\rho}(e_0; x) = 1 \quad (3.9)$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} & K_{m,\rho}(e_1; x) \\ &= \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) (m+1-\rho) \left((1-x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} t dt + x \int_{\frac{\tau+\rho}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho+1}{m+1}} t dt \right) \\ & \quad + \sum_{\tau=0}^{m+1-\rho} p_{m+1-\rho,\tau}(x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho}{m+1}} t dt \\ &= (m+1-\rho) \sum_{k=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,k}(x) (1-x) \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{k+1}{m+1} \right)^2 - \left(\frac{k}{m+1} \right)^2 \right\} \\ & \quad + (m+1-\rho) \sum_{k=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,k}(x) x \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{k+\rho+1}{m+1} \right)^2 - \left(\frac{k+\rho}{m+1} \right)^2 \right\} \\ & \quad + \sum_{k=0}^{m+1-\rho} p_{m+1-\rho,k}(x) \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{k+\rho}{m+1} \right)^2 - \left(\frac{k}{m+1} \right)^2 \right\} \\ &= (m+1-\rho) \sum_{k=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,k}(x) \left\{ \frac{(1-x)}{2(m+1)^2} (2k+1) + x \frac{2(k+\rho)+1}{2(m+1)^2} \right\} \\ & \quad + \sum_{k=0}^{m+1-\rho} p_{m+1-\rho,k}(x) \frac{2k\rho + \rho^2}{2(m+1)^2} \\ &= \frac{(m+1-\rho)}{(m+1)^2} \left\{ m \mathcal{L}_{m,\rho}(e_1; x) + \frac{1}{2} \right\} + \frac{(m+1-\rho)}{(m+1)^2} \rho B_{m+1-\rho}(e_1; x) + \frac{\rho^2}{2(m+1)^2} \\ &= \frac{(m+1-\rho)}{(m+1)^2} \left\{ m x + \frac{1}{2} + \rho x + \frac{\rho^2}{2(m+1-\rho)} \right\} \\ &= \frac{(m+\rho)(m-\rho+1)}{(m+1)^2} x + \frac{m+1+\rho(\rho-1)}{2(m+1)^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

ve

$$\begin{aligned}
& K_{m,\rho}(e_2; x) \\
&= \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) (m+1-\rho) \left((1-x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} t^2 dt + x \int_{\frac{\tau+\rho}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho+1}{m+1}} t^2 dt \right) \\
&\quad + \sum_{\tau=0}^{m+1-\rho} p_{m+1-\rho,\tau}(x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho}{m+1}} t^2 dt \\
&= (m+1-\rho) \sum_{k=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,k}(x) (1-x) \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{k+1}{m+1} \right)^2 - \left(\frac{k}{m+1} \right)^2 \right\} \\
&\quad + (m+1-\rho) \sum_{k=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,k}(x) x \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{k+\rho+1}{m+1} \right)^2 - \left(\frac{k+\rho}{m+1} \right)^2 \right\} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{m+1-\rho} p_{m+1-\rho,k}(x) \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{k+\rho}{m+1} \right)^2 - \left(\frac{k}{m+1} \right)^2 \right\} \\
&= (m+1-\rho) \sum_{k=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,k}(x) \left\{ \frac{(1-x)}{2(m+1)^2} (2k+1) + x \frac{2(k+\rho)+1}{2(m+1)^2} \right\} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{m+1-\rho} p_{m+1-\rho,k}(x) \frac{2k\rho + \rho^2}{2(m+1)^2} \\
&= \frac{(m+1-\rho)}{(m+1)^3} \left\{ m^2 \mathcal{L}_{m,\rho}(e_2; x) + m \mathcal{L}_{m,\rho}(e_1; x) + \frac{1}{3} \mathcal{L}_{m,\rho}(e_0; x) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{(m+1)^3} \left\{ (m+1-\rho)^2 \rho B_{m+1-\rho}(e_2; x) + \rho^2 (m+1-\rho) B_{m+1-\rho}(e_1; x) + \frac{\rho^3}{3} \right\} \\
&= \frac{(m+1-\rho)}{(m+1)^3} \left\{ m^2 \left[x^2 + \left(1 + \frac{\rho(\rho-1)}{m} \right) \frac{x(1-x)}{m} \right] + mx + \frac{1}{3} \right\} \\
&\quad + \frac{(m+1-\rho)}{(m+1)^3} \left\{ \rho (m+1-\rho) \left[x^2 + \frac{x(1-x)}{m+1-\rho} \right] + \rho^2 x + \frac{\rho^3}{3(m+1-\rho)} \right\} \\
&= \frac{(m-\rho)(m-\rho+1)(m+2\rho-1)}{(m+1)^3} x^2 + \frac{2(m-\rho+1)(m+\rho^2)}{(m+1)^3} x \\
&\quad + \frac{(m-\rho+1+\rho^3)}{3(m+1)^3} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.9), (3.10) ve (3.11)'den $\lim_{m \rightarrow \infty} K_{m,\rho}(e_i) = e_i$, $i = 0, 1, 2$, yaklaşımlarının $[0, 1]$ üzerinde düzgün olduğu açıktır. İspat, Korovkin teoreminden elde edilir. ■

Sonuç 3.1 Negatif olmayan ve sabitlenen bir ρ tam sayısı, $m > 2\rho$ olacak şekildeki m doğal sayıları ve $[0, 1]$ üzerinde sürekli diferensiyellenebilen bir $g \in C[0, 1]$

fonksiyonu için

$$(\mathcal{L}_{m+1,\rho}(g;x))' = K_{m,\rho}(g';x), \quad x \in [0,1],$$

elde edilir.

Teorem 3.2'den $[0,1]$ üzerinde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\mathcal{L}_{m,\rho}(g))' = g'$$

düzgün yaklaşımı gerçekleşir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2022).

3.3 L^p -Yaklaşım

$g \in L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$, fonksiyonuna; $K_{m,\rho}^*$ Stancu-Kantorovich ve $K_{m,\rho}$ Stancu-Kantorovich tipinde operatörlerin dizileri ile L^p -normunda yaklaşım, sırasıyla, aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

Teorem 3.3 ρ ; negatif olmayan ve sabitlenen bir tam sayı ve $g \in L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$, ise $L^p[0,1]$ normunda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K_{m,\rho}^*(g) = g$$

yaklaşımı gerçekleşir.

İspat. $\rho = 0$ ve $\rho = 1$ durumları Teorem 1.4'de verildiği için $\rho > 1$ durumunun ispatlanması yeterlidir. Bu durumda, $\rho > 1$, $m > 2\rho$, $m \in \mathbb{N}$ ve $\|K_{m,\rho}^*\|$ operatör normu olmak üzere, her $m \in \mathbb{N}$ için, önce, $\|K_{m,\rho}^*\| \leq J$ olacak şekilde bir $J > 0$ olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. (3.1) ile verilen m 'yinci $K_{m,\rho}^*$ Stancu-Kantorovich operatöründe; $\varphi(t) = |t|^p$, $1 \leq p < \infty$, $t \in [0,1]$ fonksiyonu konveks ve $w_{m,\tau,\rho}(x) \geq 0$ ve $\sum_{\tau=0}^m w_{m,\tau,\rho}(x) = 1$ olduğundan, Tanım (2.14) ile verilen Jensen eşitsizliği ve Tanım (2.17) ile verilen integral Jensen eşitsizliği ve (1.10) fonksiyonu

kullanılarak,

$$\begin{aligned}
|K_{m,\rho}^*(g; x)|^p &\leq \sum_{\tau=0}^m w_{m,\tau,\rho}(x) \left| (m+1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt \right|^p \\
&\leq \sum_{\tau=0}^m w_{m,\tau,\rho}(x) (m+1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \\
&= \left\{ (1-x) \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) + x \sum_{\tau=\rho}^m p_{m-\rho,\tau-\rho}(x) \right\} (m+1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitsizlikte, iki tarafın $[0, 1]$ üzerinden integrali alınarak

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |K_{m,\rho}^*(g; x)|^p dx \\
&\leq \sum_{\tau=0}^{m-\rho} \binom{m-\rho}{\tau} \int_0^1 x^\tau (1-x)^{m-\rho-\tau+1} dx (m+1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \\
&\quad + \sum_{\tau=\rho}^m \binom{m-\rho}{\tau-\rho} \int_0^1 x^{\tau-\rho+1} (1-x)^{m-\tau} dx (m+1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \\
&= \sum_{\tau=0}^{m-\rho} \binom{m-\rho}{\tau} B(\tau+1, m-\rho-\tau+2) (m+1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \\
&\quad + \sum_{\tau=\rho}^m \binom{m-\rho}{\tau-\rho} B(\tau-\rho+2, m-\tau+1) (m+1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \quad (3.12)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradaki B ; beta fonksiyonu olup, Tanım 2.18'den, Γ gamma fonksiyonu kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\binom{m-\rho}{\tau} B(\tau+1, m-\rho-\tau+2) &= \frac{\Gamma(\tau+1) \Gamma(m-\rho-\tau+2)}{\Gamma(m-\rho+3)} \\
&= \frac{m-\rho-\tau+1}{(m-\rho+2)(m-\rho+1)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\binom{m-\rho}{\tau-\rho} B(\tau-\rho+2, m-\tau+1) &= \frac{\Gamma(\tau-\rho+2) \Gamma(m-\tau+1)}{\Gamma(m-\rho+3)} \\
&= \frac{\tau-\rho+1}{(m-\rho+2)(m-\rho+1)}
\end{aligned}$$

olur. Bu sonuçlar (3.12) formülünde dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \int_0^1 |K_{m,\rho}^*(g; x)|^p dx &\leq \sum_{\tau=0}^{m-\rho} \frac{(m-\rho-\tau+1)(m+1)}{(m-\rho+2)(m-\rho+1)} \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \\ &\quad + \sum_{\tau=\rho}^m \frac{(\tau-\rho+1)(m+1)}{(m-\rho+2)(m-\rho+1)} \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \end{aligned}$$

bulunur. $m > 2\rho$ olduğundan, $m-\rho > \rho$ olur, böylece, en son ifadedeki toplamlar aşağıdaki şekilde parçalanabilir:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |K_{m,\rho}^*(g; x)|^p dx \\ &\leq \frac{m+1}{m-\rho+2} \left(\sum_{\tau=0}^{\rho-1} + \sum_{\tau=\rho}^{m-\rho} \right) \frac{m-\rho-\tau+1}{m-\rho+1} \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \\ &\quad + \frac{m+1}{m-\rho+2} \left(\sum_{\tau=\rho}^{m-\rho} + \sum_{\tau=m-\rho+1}^m \right) \frac{\tau-\rho+1}{m-\rho+1} \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \\ &\leq \frac{m+1}{m-\rho+2} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{\tau=0}^{\rho-1} \frac{m-\rho-\tau+1}{m-\rho+1} + \sum_{\tau=\rho}^{m-\rho} \frac{m-2\rho+2}{m-\rho+1} + \sum_{\tau=m-\rho+1}^m \frac{\tau-\rho+1}{m-\rho+1} \right\} \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt. \end{aligned}$$

Burada, $m-2\rho+1 < m-\rho+1$ olduğundan, $m-2\rho+2 \leq m-\rho+1$ sağlanır. Böylece, $0 \leq \tau \leq \rho-1$ için $\frac{m-\rho-\tau+1}{m-\rho+1} \leq 1$ ve $m-\rho+1 \leq \tau \leq m$ için $\frac{\tau-\rho+1}{m-\rho+1} \leq 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |K_{m,\rho}^*(g; x)|^p dx &\leq \frac{m+1}{m-\rho+2} \left(\sum_{\tau=0}^{\rho-1} + \sum_{\tau=\rho}^{m-\rho} + \sum_{\tau=m-\rho+1}^m \right) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \\ &\leq \frac{m+1}{m-\rho+2} \int_0^1 |g(t)|^p dt \end{aligned}$$

bulunur. Sabitlenen $\rho > 1$ için $\sup_{m>2\rho} \frac{m+1}{m+2-\rho} = \frac{2\rho+2}{\rho+3} := M_\rho$ alınsın. Buradaki M_ρ , $1 < M_\rho < 2$ şeklinde bir sabit olup,

$$\int_0^1 |K_{m,\rho}^*(g; x)|^p dx \leq M_\rho \int_0^1 |g(t)|^p dt$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan, L^p -normuna geçilerek

$$\|K_{m,\rho}^*(g)\|_p \leq M_\rho^{\frac{1}{p}} \|g\|_p$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla, $K_{m,\rho}^*$ operatörlerinin normlarının

$$\|K_{m,\rho}^*\|_p \leq M_\rho^{\frac{1}{p}}$$

ile sınırlı olduğu elde edilir. Şimdi, $\epsilon > 0$ keyfi verilmiş olsun. $C[0, 1]$, $L^p[0, 1]$ uzayında yoğun olduğundan, $\|g - h\|_p < \epsilon$ olacak şekilde bir $h \in C[0, 1]$ vardır ve Teorem 3.1'den; bir $m_0 \in \mathbb{N}$ sayısı, her $m \geq m_0$ için

$$\|K_{m,\rho}^*(h) - h\| < \epsilon$$

olacak şekilde, vardır. Buradan, $J := 2 + M_\rho^{\frac{1}{p}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|K_{m,\rho}^*(g) - g\|_p &\leq M_\rho^{\frac{1}{p}} \|g - h\|_p + \|K_{m,\rho}^*(h) - h\|_p + \|h - g\|_p \\ &< J\epsilon \end{aligned}$$

eşitsizliğinden, ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.4 ρ ; negatif olmayan ve sabitlenen bir tam sayı ve $g \in L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, ise $L^p[0, 1]$ normunda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K_{m,\rho}(g) = g$$

yaklaşımı gerçekleşir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2022).

İspat. $\rho = 0$ ve $\rho = 1$ durumları Teorem 1.4'de verildiği için $\rho > 1$ durumunu incelemek yeterlidir. Bu durumda, $\rho > 1$, $m > 2\rho$, $m \in \mathbb{N}$, ve $\|K_{m,\rho}\|$ operatör normu olmak üzere, her $m \in \mathbb{N}$ için $\|K_{m,\rho}\| \leq J$ olacak şekilde bir $J > 0$ olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. (3.4) ile verilen m 'yinci $K_{m,\rho}$ Stancu-Kantorovich tipindeki operatör;

$$S_{m,\rho}(g; x) := \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) (m+1-\rho) \left((1-x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt + x \int_{\frac{\tau+\rho}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho+1}{m+1}} g(t) dt \right)$$

ve

$$S_{m+1,\rho}(g; x) := \sum_{\tau=0}^{m+1-\rho} p_{m+1-\rho,\tau}(x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho}{m+1}} g(t) dt$$

olmak üzere

$$K_{m,\rho}(g; x) = S_{m,\rho}(g; x) + S_{m+1,\rho}(g; x)$$

şeklinde yazılsın. Burada,

$$|K_{m,\rho}(g; x)|^p \leq 2^p (|S_{m,\rho}(g; x)|^p + |S_{m+1,\rho}(g; x)|^p) \quad (3.13)$$

eşitsizliği dikkate alınarak, $K_{m,\rho}(g; x)$ 'in $L^p[0, 1]$ -normu bulunacaktır. Bunun için, (3.13)'ün sağ tarafının ilk terimi için; $t \in [0, 1]$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\varphi(t) = |t|^p$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak, $x \in [0, 1]$ için $\lambda_1 = 1 - x$ ve $\lambda_2 = x$ alınırsa, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned} |S_{m,\rho}(g; x)|^p &\leq (1-x) \left| \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) (m+1-\rho) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt \right|^p \\ &\quad + x \left| \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) (m+1-\rho) \int_{\frac{\tau+\rho}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho+1}{m+1}} g(t) dt \right|^p \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra, $\tau = 0, \dots, m-\rho$, $x \in [0, 1]$ için $p_{m-\rho,\tau}(x) \geq 0$ ve $\sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) = 1$ olduğu dikkate alınarak, Tanım 2.14 ile verilen Jensen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |S_{m,\rho}(g; x)|^p &\leq (1-x) \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) \left| (m+1-\rho) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} g(t) dt \right|^p \\ &\quad + x \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) \left| (m+1-\rho) \int_{\frac{\tau+\rho}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho+1}{m+1}} g(t) dt \right|^p \end{aligned}$$

bulunur. Son ifadede, $t \in [0, 1]$ ve $1 \leq p < \infty$ için $\varphi(t) = |t|^p$ fonksiyonu ve $(m+1-\rho) dt$ ölçüsü için, Tanım 2.17 ile verilen Jensen eşitsizliğinin integral formu uygulanarak

$$\begin{aligned} &|S_{m,\rho}(g; x)|^p \quad (3.14) \\ &\leq \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) (m+1-\rho) \left((1-x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt + x \int_{\frac{\tau+\rho}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, (3.13)'ün sağ tarafının ikinci teriminde $\varphi(t) = |t|^p$, $1 \leq p < \infty$, $t \in [0, 1]$, fonksiyonu için; $x \in [0, 1]$, $\tau = 0, \dots, m - \rho$ iken $p_{m+1-\rho, \tau}(x) \geq 0$ ve $\sum_{\tau=0}^{m+1-\rho} p_{m+1-\rho, \tau}(x) = 1$ olduğu dikkate alınarak, Jensen eşitsizliği ve ardından Jensen eşitsizliğinin integral formu kullanılarak

$$|S_{m+1, \rho}(g; x)|^p \leq \sum_{\tau=0}^{m+1-\rho} p_{m+1-\rho, \tau}(x) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho}{m+1}} |g(t)|^p dt \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.14) eşitsizliğinin $[0, 1]$ üzerinden integrali alınıp, beta integrali kullanılarak

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |S_{m, \rho}(g; x)|^p dx \\ & \leq (m+1-\rho) \sum_{\tau=0}^{m-\rho} \binom{m-\rho}{\tau} \left[\int_0^1 x^\tau (1-x)^{m-\rho-\tau+1} dx \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 x^{\tau+1} (1-x)^{m-\rho-\tau} dx \int_{\frac{\tau+\rho}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \right] \\ & = \frac{1}{m-\rho+2} T_{m, \rho} \end{aligned} \quad (3.16)$$

bulunur, buradaki $T_{m, \rho}$

$$T_{m, \rho} := \sum_{\tau=0}^{m-\rho} \left((m-\rho-\tau+1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt + (\tau+1) \int_{\frac{\tau+\rho}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \right)$$

şeklindedir. $m > 2\rho$, $\rho > 1$, olduğundan $m-\rho > \rho$ sağlanır. Dolayısıyla, $T_{m, \rho}$ ifadesi

$$\begin{aligned} T_{m, \rho} &= \left(\sum_{\tau=0}^{\rho-1} + \sum_{\tau=\rho}^{m-\rho} \right) (m-\rho-\tau+1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \\ &+ \left(\sum_{\tau=0}^{m-2\rho} + \sum_{\tau=m-2\rho+1}^{m-\rho} \right) (\tau+1) \int_{\frac{\tau+\rho}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. İkinci satırda bulunan toplamalarda τ yerine $\tau - \rho$ alınırsa, $T_{m,\rho}$

$$\begin{aligned}
T_{m,\rho} &= \sum_{\tau=0}^{\rho-1} (m - \rho - \tau + 1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \\
&+ \sum_{\tau=\rho}^{m-\rho} (m - 2\rho + 2) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \\
&+ \sum_{\tau=m-\rho+1}^m (\tau - \rho + 1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt
\end{aligned} \tag{3.17}$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan, benzer şekilde, (3.15) eşitsizliğinin $[0, 1]$ üzerinden integrali alındığında

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |S_{m+1,\rho}(g; x)|^p dx &\leq \sum_{\tau=0}^{m+1-\rho} \int_0^1 p_{m+1-\rho,\tau}(x) dx \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho}{m+1}} |g(t)|^p dt \\
&= \frac{1}{m - \rho + 2} \sum_{\tau=0}^{m+1-\rho} \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho}{m+1}} |g(t)|^p dt
\end{aligned} \tag{3.18}$$

bulunur. Benzer terimler bir araya getirilerek (3.18) formülündeki toplam, aşağıdaki gibi üç parçaya ayrılabilir:

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau=0}^{m+1-\rho} \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho}{m+1}} |g(t)|^p dt &= \sum_{\tau=0}^{m+1-\rho} \left(\int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} + \int_{\frac{\tau+1}{m+1}}^{\frac{\tau+2}{m+1}} + \cdots + \int_{\frac{\tau+\rho-1}{m+1}}^{\frac{\tau+\rho}{m+1}} \right) |g(t)|^p dt \\
&= \sum_{\tau=0}^{\rho-1} (\tau + 1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt + \rho \sum_{\tau=\rho}^{m-\rho} \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt + \sum_{\tau=m-\rho+1}^m (m - \tau + 1) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

(3.16), (3.17), (3.18) ve (3.19) kullanılarak; (3.13) formülünden

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |K_{m,\rho}(g; x)|^p dx &\leq 2^p \left(\sum_{\tau=0}^{\rho-1} + \sum_{\tau=\rho}^{m-\rho} + \sum_{\tau=m-\rho+1}^m \right) \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt \\
&= 2^p \sum_{\tau=0}^m \int_{\frac{\tau}{m+1}}^{\frac{\tau+1}{m+1}} |g(t)|^p dt = 2^p \int_0^1 |g(t)|^p dt
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla, L^p -normuna geçilerek, her $g \in L^p[0, 1]$ için $\|K_{m,\rho}(g)\|_p \leq 2\|g\|_p$ bulunur. Yani, her $m > 2\rho$, $m \in \mathbb{N}$, için $\|K_{m,\rho}\| \leq 2$ şeklinde sınırlı bir operatördür. Şimdi, $\epsilon > 0$ keyfi verilmiş olsun. $C[0, 1]$, $L^p[0, 1]$ uzayında yoğun olduğundan, $\|g - h\|_p < \epsilon$ olacak şekilde bir $h \in C[0, 1]$ vardır ve Teorem 3.2'den; bir $m_0 \in \mathbb{N}$ sayısı, her $m \geq m_0$ iken

$$\|K_{m,\rho}(h) - h\| < \epsilon$$

olacak şekilde, vardır. Buradan,

$$\|K_{m,\rho}(g) - g\|_p \leq 2\|g - h\|_p + \|K_{m,\rho}(h) - h\|_p + \|h - g\|_p < 4\epsilon$$

eşitsizliğinden, ispat tamamlanır. ■

3.4 L^p -Yaklaşımın Oranı

Pozitif lineer operatör dizileri ile L^p - normunda yaklaşımın oranının ölçülmesi problemi birçok makalede incelenmiştir. Bunlardan bázılarına, (Quak 1988) ve (Altomare ve Campiti 1994) eserlerindeki kaynaklardan ulaşılabilir. Bu doğrultudaki en kullanışlı yöntem; τ -modülün kullanıldığı, Teorem 2.5 ile verilen Popov'un teoremidir. Kantorovich operatörlerinin bir genelleştirilmesi için L^p -yaklaşımın oranının τ -modül cinsinden üst sınırı için (Campiti ve Metafune 1996) çalışmasına bakılabilir.

Teorem 3.5 ρ ; negatif olmayan, sabitlenen bir tam sayı, $1 \leq p < \infty$ ve $g \in \mathcal{M}[0, 1]$ ise

$$\|K_{m,\rho}^*(g) - g\|_p \leq C\tau_1\left(g; \sqrt{A_{m,\rho}^*}\right)_p$$

eşitsizliği, her $m > 2\rho$, $m \in \mathbb{N}$, için gerçekleşir. Buradaki $A_{m,\rho}^*$

$$A_{m,\rho}^* = \frac{3m + 1 + \rho(\rho - 1)}{12(m + 1)^2} \leq 1$$

olup, C ; g fonksiyonuna bağlı olmayan pozitif sabittir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2022).

İspat. $g \in \mathcal{M}[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$ ve negatif olmayan ve sabitlenen bir ρ tam sayısı için $m > 2\rho$, $m \in \mathbb{N}$ olsun. Teorem 2.5'e göre

$$A_{m,\rho}^* := \sup \left\{ K_{m,\rho}^* \left((e_1 - xe_0)^2; x \right); x \in [0, 1] \right\} \leq 1$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Operatörlerin lineerliğinden, $x \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
& K_{m,\rho}^* ((e_1 - xe_0)^2; x) \\
&= \frac{m-1+\rho(\rho-1)}{(m+1)^2} x(1-x) + \frac{1}{3(m+1)^2} \\
&\leq \frac{m-1+\rho(\rho-1)}{4(m+1)^2} + \frac{1}{3(m+1)^2} \\
&= A_{m,\rho}^*
\end{aligned}$$

bulunur. $\rho = 0$ ve $\rho = 1$ durumunda

$$A_{m,0}^* = A_{m,1}^* = \frac{3m+1}{12(m+1)^2}$$

olup, Kantorovich operatörleri için elde edilen (2.3) eşitsizliğine ulaşılır. Son olarak, $A_{m,\rho} \leq 1$ olduğunun gösterilmesi gereklidir. $\rho \geq 0$ ve $m > 2\rho$ olduğundan $m-1 \geq 2\rho$ alınır. Böylece $\frac{m-1}{2} \geq \rho$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
A_{m,\rho}^* &= \frac{3m+1+3\rho(\rho-1)}{12(m+1)^2} \\
&\leq \frac{3m+1+3\rho^2}{12(m+1)^2} \\
&\leq \frac{3m^2+6m+7}{48(m+1)^2} \leq 1
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.6 ρ ; negatif olmayan, sabitlenen bir tam sayı, $1 \leq p < \infty$ ve $g \in \mathcal{M}[0, 1]$ ise

$$\|K_{m,\rho}(g) - g\|_p \leq C\tau_1 \left(g; \sqrt{A_{m,\rho}}\right)_p$$

eşitsizliği, her $m > 2\rho$, $m \in \mathbb{N}$, için gerçekleşir. Buradaki $A_{m,\rho}$

$$A_{m,\rho} = \frac{3m^2 + 3m\rho^2 - 3m\rho + 4m - 2\rho^3 + 3\rho^2 - \rho + 1}{12(m+1)^3} \leq 1 \quad (3.20)$$

olup, C ; g fonksiyonuna bağlı olmayan pozitif sabittir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2022).

İspat. $g \in \mathcal{M}[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$ ve negatif olmayan ve sabitlenen bir ρ tam sayısı için $m > 2\rho$, $m \in \mathbb{N}$ olsun. Teorem 2.5'e göre

$$A_{m,\rho} := \sup \{K_{m,\rho}((e_1 - xe_0)^2; x); x \in [0, 1]\} \leq 1$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Operatörlerin lineerliğinden, $x \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
& K_{m,\rho}((e_1 - xe_0)^2; x) \\
&= \frac{(m - \rho + 1)(m - \rho)(m + 2\rho - 1)}{(m + 1)^3} x^2 + \frac{2(m - \rho + 1)(m + \rho^2)}{(m + 1)^3} x \\
&\quad + \frac{m - \rho + 1 + \rho^3}{3(m + 1)^3} - 2 \frac{(m - \rho + 1)(m + \rho)}{(m + 1)^2} x^2 - \frac{m + 1 + \rho(\rho - 1)}{(m + 1)^2} x + x^2 \\
&= \frac{m^2 + (\rho^2 - \rho)m - 2\rho^3 + \rho^2 + \rho - 1}{(m + 1)^3} x(1 - x) + \frac{m - \rho + 1 + \rho^3}{3(m + 1)^3} \\
&\leq \frac{m^2 + (\rho^2 - \rho)m - 2\rho^3 + \rho^2 + \rho - 1}{4(m + 1)^3} + \frac{m - \rho + 1 + \rho^3}{3(m + 1)^3} \\
&= \frac{3m^2 + 3m\rho^2 - 3m\rho + 4m - 2\rho^3 + 3\rho^2 - \rho + 1}{12(m + 1)^3} \\
&= A_{m,\rho}
\end{aligned}$$

bulunur. $\rho = 0$ ve $\rho = 1$ durumlarında

$$A_{m,0} = A_{m,1} = \frac{3m + 1}{12(m + 1)^2}$$

Kantorovich operatörleri için elde edilen (2.3) eşitsizliğine ulaşılır. Son olarak, $A_{m,\rho} \leq 1$ olduğunun gösterilmesi kalmıştır. $\rho \geq 0$ ve $m > 2\rho$ olduğundan $m - 1 \geq 2\rho$ olur. Böylece, $\frac{m-1}{2} \geq \rho$ alınarak,

$$\begin{aligned}
A_{m,\rho} &= \frac{1}{12(m + 1)^3} [3m^2 + 3m\rho^2 - 3m\rho + 4m - 2\rho^3 + 3\rho^2 - \rho + 1] \\
&\leq \frac{1}{12(m + 1)^3} [3m^2 + 3m\rho^2 + 4m + 3\rho^2 + 1] \\
&\leq \frac{1}{12(m + 1)^3} \left[3m^2 + 3m \left(\frac{m-1}{2} \right)^2 + 4m + 3 \left(\frac{m-1}{2} \right)^2 + 1 \right] \\
&= \frac{3m^3 + 9m^2 + 13m + 7}{48(m + 1)^3} \leq 1
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

4. STANCU OPERATÖRLERİNİN NEGATİF OLMAYAN PARAMETREYE DAYALI GENELLEŞTİRİLMESİ

4.1 Operatörlerin İnşası

$P_{m,\tau}^\beta(x)$; (1.8) ile verilen temel fonksiyonlar olmak üzere, $g \in C[0, 1]$ için (1.9) ile verilen

$$G_m^\beta(g; x) := \sum_{\tau=0}^m P_{m,\tau}^\beta(x) g\left(\frac{\tau}{m}\right)$$

Cheney-Sharma operatörleri, pozitif ve lineer olup

$$G_m^\beta(e_0; x) = 1 \quad (4.1)$$

eşitliğini sağlarlar. Cheney-Sharma operatörlerinin momentleri;

$$S(\tau, m, x, y) := \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} (x + v\beta)^{v+\tau-1} (y + (m-v)\beta)^{m-v} \quad (4.2)$$

olmak üzere,

$$S(\tau, m, x, y) = xS(\tau-1, m, x, y) + m\beta S(\tau, m-1, x + \beta, y)$$

indirgeme bağıntısı kullanılarak elde edilmiştir. $G_m^\beta(g)$ operatör dizisinin $[0, 1]$ üzerinde g fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı, β yerine; $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ koşulunu sağlayan, negatif olmayan $\{\beta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ reel sayı dizisi alınarak, ispatlanmıştır (Cheney ve Sharma 1964). Stancu ve Cismasiu (1997), Cheney-Sharma operatörlerinin lineer fonksiyonları koruduğunu göstermişlerdir, yani;

$$G_m^\beta(e_1; x) = x \quad (4.3)$$

sağlanır.

Çalışmanın bu kısmında; önce, Cheney ve Sharma'nın kullandığı (4.2) indirgeme bağıntısında küçük bir değişiklik yapılarak, G_m^β operatörlerinin ikinci momenti, daha basit şekilde hesaplanacaktır. Bu değişiklik için, binom formülünün Abel tipindeki aşağıdaki genelleştirilmesi kullanılacaktır:

Negatif olmayan bir β reel sayısı, $x, y \in \mathbb{R}$ ve $m \geq 1$ için

$$(x + y + m\beta)^m = \sum_{\tau=0}^m \binom{m}{\tau} (x + \tau\beta)^\tau y [y + (m - \tau)\beta]^{m-\tau-1} \quad (4.4)$$

eşitliği sağlanır (Stancu ve Stoica 2009). Daha sonra, (2.5) ile verilen $\mathcal{L}_{m,\rho}$ Stancu operatörlerinin temel fonksiyonlarının yerine, (1.8) ile verilen Cheney-Sharma operatörlerinin temel fonksiyonları, uygun şekilde alınarak, Stancu operatörlerinin, negatif olmayan bir β parametresine dayalı bir genelleştirmesi tanımlanacaktır.

Bu amaçla, negatif olmayan bir ρ tam sayı parametresi ve $m > 2\rho$ olacak şekildeki bir m doğal sayısı için, (1.8) formülünde m yerine $m - \rho$ alınarak oluşturulan $P_{m-\rho,\tau}^\beta$ temel fonksiyonları ve $g \in C[0, 1]$ için

$$\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; x) := \sum_{\tau=0}^{m-\rho} P_{m-\rho,\tau}^\beta(x) \left[(1-x) g\left(\frac{\tau}{m}\right) + x g\left(\frac{\tau+\rho}{m}\right) \right] \quad (4.5)$$

şeklindeki operatörler dikkate alınacaktır. Çalışmada, bu operatörler, Cheney-Sharma tipinde Stancu operatörleri olarak adlandırılacaktır. $\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta$ operatörlerinin; uygun K -fonksiyonel yardımı ile lokal yaklaşımı elde edilecektir. Yaklaşım sonuçlarını elde etmek için, Cheney ve Sharma'nın (1964) çalışmasındaki gibi, β yerine pozitif reel sayıların $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ koşulunu sağlayan bir β_m dizisi alınacaktır. $\mathcal{L}_{m,\rho}^0$; (2.5) ile verilen $\mathcal{L}_{m,\rho}$ Stancu operatörüne indirgendiği açıktır ve $\mathcal{L}_{m,0}^\beta$; (1.9) ile verilen Cheney-Sharma operatörüne indirgenir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2018).

4.2 Yardımcı Sonuçlar

(1.9) ile verilen G_m^β operatörünün ikinci momentini daha basit şekilde elde edebilmek amacıyla, $x, y \in [0, 1]$ için

$$T(\tau, m, x, y) := \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} (x + v\beta)^{v+\tau-1} (y + (m-v)\beta)^{m-v-1}, \quad m \in \mathbb{N}, \tau = 0, 1, \dots, m, \quad (4.6)$$

alınırsa, $T(\tau, m, x, y)$ için aşağıdaki gibi bir indirgeme bağıntısı elde edilir:

Lemma 4.1 $x, y \in [0, 1]$, $m \in \mathbb{N}$, $\tau = 0, 1, \dots, m$, ise

$$T(\tau, m, x, y) = xT(\tau-1, m, x, y) + m\beta T(\tau, m-1, x+\beta, y) \quad (4.7)$$

gerçeklenir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2018).

İspat. (4.6) ile verilen $T(\tau, m, x, y)$

$$\begin{aligned} T(\tau, m, x, y) &= \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} (x + v\beta)^{v+\tau-2} (x + v\beta) (y + (m-v)\beta)^{m-v-1} \\ &= x \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} (x + v\beta)^{v+\tau-2} (y + (m-v)\beta)^{m-v-1} \\ &\quad + \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} (x + v\beta)^{v+\tau-2} v\beta (y + (m-v)\beta)^{m-v-1} \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. İkinci toplamda v yerine $v+1$ alınarak

$$\begin{aligned} T(\tau, m, x, y) &= x \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} (x + v\beta)^{v+(\tau-1)-1} (y + (m-v)\beta)^{m-v-1} \\ &\quad + m\beta \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m-1}{v} (x + \beta + v\beta)^{v+\tau-1} (y + (m-v-1)\beta)^{m-v-2} \\ &= xT(\tau-1, m, x, y) + m\beta T(\tau, m-1, x + \beta, y) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Doğrudan hesaplamalar ile aşağıdaki yargıya ulaşılır.

Yargı 4.1 (4.6) ile verilen indirgeme bağıntısı, aşağıdaki sonuçları verir:

- (i) (1.8) formülünden $xyT(0, m, x, y) = (x + y)(x + y + m\beta)^{m-1}$ bulunur.
- (ii) (4.4) formülünden $yT(1, m, x, y) = (x + y + m\beta)^m$ bulunur.
- (iii) (4.7) bağıntısı tekrarlı uygulanarak

$$T(2, m, x, y) = \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} v! (x + v\beta) \beta^v T(1, m-v, x + v\beta, y)$$

elde edilir. Burada, Cheney ve Sharma (1964)'deki gibi, gamma fonksiyonu gereğince

$$v! = \int_0^\infty e^{-s} s^v ds$$

eşitliği ve binom formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
T(2, m, x, y) &= xT(1, m, x, y) + m\beta T(2, m-1, x+\beta, y) \\
&= xT(1, m, x, y) + m\beta(x+\beta)T(1, m-1, x+\beta, y) \\
&\quad + m\beta(m-1)(x+2\beta)T(1, m-2, x+2\beta, y) \\
&\quad + m\beta(m-1)(m-2)T(2, m-3, x+3\beta, y) \\
&= \sum_{v=0}^m (x+v\beta) \binom{m}{v} v! \beta^v T(1, m-v, x+v\beta, y) \\
&= \sum_{v=0}^m (x+v\beta) \binom{m}{v} \int_0^\infty e^{-s} s^v ds \beta^v \frac{1}{y} (x+y+m\beta)^{m-v}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$yT(2, m, x, y) = \int_0^\infty e^{-s} [x(x+y+m\beta+s\beta)^m + ms\beta^2(x+y+m\beta+s\beta)^{m-1}] ds \quad (4.8)$$

elde edilir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2018).

(4.6) ve (4.7) formülleri kullanılarak, $G_m^\beta(e_2; x)$ aşağıdaki şekilde elde edilir:

Lemma 4.2 Her $x \in [0, 1]$, $m \in \mathbb{N}$ için

$$G_m^\beta(e_2; x) = \frac{m-1}{m} \{x(x+2\beta)A_m + x(m-2)\beta^2 B_m\} + \frac{x}{m}$$

olur. Buradaki A_m ve B_m

$$A_m = \frac{1}{(1+m\beta)} \int_0^\infty e^{-s} \left(1 + \frac{s\beta}{1+m\beta}\right)^{m-2} ds \quad (4.9)$$

ve

$$B_m = \frac{1}{(1+m\beta)^2} \int_0^\infty s e^{-s} \left(1 + \frac{s\beta}{1+m\beta}\right)^{m-3} ds \quad (4.10)$$

şeklindedir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2018).

İspat. $G_m^\beta(e_2; x)$ için

$$\begin{aligned}
G_m^\beta(e_2; x) &= \frac{1}{(1+m\beta)^{m-1}} \sum_{v=0}^m \frac{v^2}{m^2} \binom{m}{v} x (x+v\beta)^{v-1} (1-x) (1-x+(m-v)\beta)^{m-v-1} \\
&= \frac{m-1}{m} \frac{1}{(1+m\beta)^{m-1}} \sum_{v=0}^{m-2} \binom{m-2}{v} x (x+2\beta+v\beta)^{v+1} (1-x) \\
&\quad \times (1-x+(m-v-2)\beta)^{m-v-3} + \frac{1}{m} G_m^\beta(e_1; x) \\
&= \frac{m-1}{m} \frac{x(1-x)}{(1+m\beta)^{m-1}} T(2, m-2, x+2\beta, 1-x) + \frac{x}{m}
\end{aligned}$$

olur ve $G_m^\beta(e_2; x)$ aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}
&G_m^\beta(e_2; x) \\
&= \frac{m-1}{m} \frac{x}{(1+m\beta)^{m-1}} \\
&\quad \times \int_0^\infty e^{-s} [(x+2\beta)(1+m\beta+s\beta)^{m-2} + (m-2)s\beta^2(1+m\beta+s\beta)^{m-3}] ds + \frac{x}{m} \\
&= \frac{m-1}{m} \frac{x(x+2\beta)}{(1+m\beta)} \int_0^\infty e^{-s} \left(1 + \frac{s\beta}{1+m\beta}\right)^{m-2} ds \\
&\quad + \frac{(m-1)(m-2)}{m} \frac{x}{(1+m\beta)^2} \beta^2 \int_0^\infty s e^{-s} \left(1 + \frac{s\beta}{1+m\beta}\right)^{m-3} ds + \frac{x}{m} \\
&= \frac{m-1}{m} \{x(x+2\beta) A_m + x(m-2)\beta^2 B_m\} + \frac{x}{m},
\end{aligned}$$

buradaki A_m ve B_m , sırasıyla, (4.9) ve (4.10) ile verilen dizilerdir. ■

Yaklaşım sonuçlarının elde edilebilmesi için $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} B_m$ limitlerinin hesaplanması gerekmektedir.

Lemma 4.3 $\{\beta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$; pozitif reel sayıların $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ koşulunu sağlayan bir dizisi ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = 1 \text{ ve } \lim_{m \rightarrow \infty} B_m = 1$$

gerçeklenir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2018).

İspat. (4.9) eşitliğinde, A_{m+2} ve $u = \frac{s\beta}{1+m\beta}$ değişken değiştirmesi yapılarak,

$$\begin{aligned} A_{m+2} &= \frac{1}{1+(m+2)\beta} \int_0^\infty e^{-s} \left(1 + \frac{s\beta}{1+(m+2)\beta}\right)^m ds \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^\infty e^{-\frac{(1+(m+2)\beta)}{\beta}u} (1+u)^m du. \end{aligned}$$

elde edilir. Cheney ve Sharma (1964)'deki gibi,

$$e^{mu} (1 - mu^2) \leq (1 + u)^m \leq e^{mu} \quad (4.11)$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\frac{1}{1+2\beta} - \frac{2m\beta^2}{(1+2\beta)^3} \leq A_{m+2} \leq \frac{1}{1+2\beta}$$

bulunur. Benzer şekilde, (4.10) eşitliğinden, B_{m+3} için

$$\begin{aligned} B_{m+3} &= \frac{1}{(1+(m+3)\beta)^2} \int_0^\infty s e^{-s} \left(1 + \frac{s\beta}{1+(m+3)\beta}\right)^m ds \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(1+(m+3)\beta)^2} \frac{(1+(m+3)\beta)}{\beta} u e^{-\frac{(1+(m+3)\beta)}{\beta}u} (1+u)^m \frac{(1+(m+3)\beta)}{\beta} du \\ &= \frac{1}{\beta^2} \int_0^\infty e^{-\frac{(1+(m+3)\beta)}{\beta}u} u (1+u)^m du \end{aligned}$$

elde edilir. (4.11) eşitsizliğinden

$$\frac{1}{(1+3\beta)^2} - \frac{6m\beta^2}{(1+3\beta)^4} \leq B_{m+3} \leq \frac{1}{(1+3\beta)^2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Dolayısıyla, β yerine $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ koşulunu sağlayan, pozitif bir β_m , $m \in \mathbb{N}$, dizisi alınarak $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = 1$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} B_m = 1$ sonucuna ulaşılır. ■

4.3 Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde, (4.5) ile verilen $\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta$ Cheney-Sharma tipinde Stancu operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Lemma 4.4 ρ ; negatif olmayan, sabitlenen bir tam sayı, $m > 2\rho$, $m \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 0$ ve $x \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(e_0; x) &= 1, \\ \mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(e_1; x) &= x, \\ \mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(e_2; x) &= \frac{(m-\rho)(m-\rho-1)}{m^2} \{x(x+2\beta)A_{m-\rho} + x(m-\rho-2)\beta^2 B_{m-\rho}\} \\ &\quad + \frac{x}{m^2} \{(m-\rho)(1+2x\rho) + \rho^2\}\end{aligned}$$

gerçeklenir, buradaki $A_{m-\rho}$ ve $B_{m-\rho}$, sırasıyla, (4.9) ve (4.10) ile verilmiştir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2018).

İspat. (1.9), (4.1), (4.3), (4.5) ve Lemma 4.2 dikkate alınarak;

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(e_0; x) &= G_{m-\rho}^\beta(e_0; x) = 1, \\ \mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(e_1; x) &= \frac{m-\rho}{m} G_{m-\rho}^\beta(e_1; x) + \frac{\rho x}{m} G_{m-\rho}^\beta(e_0; x) \\ &= \left(1 - \frac{\rho}{m}\right)x + \frac{\rho}{m}x \\ &= x, \\ \mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(e_2; x) &= \left(\frac{m-\rho}{m}\right)^2 G_{m-\rho}^\beta(e_2; x) + 2x\rho \frac{m-\rho}{m^2} G_{m-\rho}^\beta(e_1; x) + \frac{x\rho^2}{m^2} G_{m-\rho}^\beta(e_0; x) \\ &= \frac{(m-\rho)(m-\rho-1)}{m^2} \{x(x+2\beta)A_{m-\rho} + x(m-\rho-2)\beta^2 B_{m-\rho}\} \\ &\quad + \frac{x}{m^2} \{(m-\rho)(1+2x\rho) + \rho^2\}\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. ■

Böylece, Lemma 4.4 kullanılarak, ilk iki merkezî momentleri aşağıdaki gibi bulunur:

Sonuç 4.1 ρ ; negatif olmayan, sabitlenen bir tam sayı, $m > 2\rho$, $m \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 0$ ve $x \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta((e_1 - x); x) &= 0, \\ \mathcal{L}_{m,\rho}^\beta((e_1 - x)^2; x) &= \left(\frac{m-\rho}{m}\right)^2 \frac{m-\rho-1}{m-\rho} \{x(x+2\beta)A_{m-\rho} + x(m-\rho-2)\beta^2 B_{m-\rho}\} \\ &\quad + \frac{2x^2\rho(m-\rho) + x\rho^2}{m^2} - x^2 \\ &= : \delta_{m,\rho}^\beta(x)\end{aligned}$$

elde edilir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2018).

Lemma 4.5 Her $g \in C[0, 1]$ için

$$\|\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g)\| \leq \|g\|$$

gerçeklenir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2018).

İspat. $\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta$ operatörünün (4.5) ile verilen tanımı dikkate alınarak

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; x)| &= \left| \sum_{\tau=0}^{m-\rho} P_{m-\rho,\tau}^\beta(x) \left[(1-x)g\left(\frac{\tau}{m}\right) + xg\left(\frac{\tau+\rho}{m}\right) \right] \right| \\ &\leq \|g\| \sum_{\tau=0}^{m-\rho} P_{m-\rho,\tau}^\beta(x) \{1-x+x\} \\ &= \|g\| \end{aligned}$$

bulunur. $[0, 1]$ üzerinden sup-norma geçilerek, ispat tamamlanır. ■

Korovkin teoremi kullanılarak, Cheney-Sharma tipinde Stancu operatörlerinin dizisi ile $[0, 1]$ üzerinde düzgün yaklaşım, aşağıdaki teoremden verilmektedir.

Teorem 4.1 ρ ; negatif olmayan, sabitlenen bir tam sayı, $\{\beta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$; pozitif reel sayıların $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ koşulunu sağlayan bir dizisi ise, her $g \in C[0, 1]$ için, $[0, 1]$ üzerinde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{m,\rho}^{\beta_m}(g) = g$$

düzgün yaklaşımı gerçekleşir.

İspat. İspat; Lemma 4.3, Lemma 4.4 ve Korovkin teoreminden elde edilir. ■

Teorem 4.2 ρ ; negatif olmayan, sabitlenen bir tam sayı, $\{\beta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$; pozitif reel sayıların $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ koşulunu sağlayan bir dizisi ise her $g \in C[0, 1]$ için

$$|\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; x) - g(x)| \leq C\omega_2\left(g, \sqrt{\delta_{m,\rho}^\beta(x)}\right), \quad x \in [0, 1],$$

eşitsizliği gerçekleşir. Buradaki $\delta_{m,\rho}^\beta(x)$; $\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta$ operatörünün, Sonuç 4.1 ile verilen, ikinci merkezi momenti olup, C ; pozitif bir sabittir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2018).

İspat. W^2 ; (2.1) ile verilen uzay olmak üzere, $h \in W^2$ ve $x, t \in [0, 1]$ için, Taylor formülünden

$$h(t) = h(x) + h'(x)(t-x) + \int_x^t (t-y)h''(y)dy$$

yazılır. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafına $\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta$ uygulanırsa, lineerlikten ve Lemma 4.4'den

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(h; x) - h(x)| &\leq \|h''\| \mathcal{L}_{m,\rho}^\beta \left(\int_x^t |t-y| dy; x \right) \\ &\leq \|h''\| \mathcal{L}_{m,\rho}^\beta((t-x)^2; x) \\ &= \|h''\| \delta_{m,\rho}^\beta(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; x) - g(x)| &\leq |\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g-h; x) - (g-h)(x)| \\ &\quad + |\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(h; x) - h(x)| \\ &\leq 2\|g-h\| + \|h''\| \delta_{m,\rho}^\beta(x) \end{aligned}$$

bulunur. Tüm $h \in W^2$ üzerinden infimum alınıp, (2.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; x) - g(x)| &\leq 2K_2(g, \delta_{m,\rho}^\beta(x)) \\ &\leq C\omega_2\left(g, \sqrt{\delta_{m,\rho}^\beta(x)}\right) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

5. YENİ ŞEKİL KORUMA ÖZELLİKLERİ

5.1 Stancu Operatörlerinin Salınım Azaltıcı Özelliği

Önerme 2.2 ile verilen, Bernstein operatörlerinin sağladığı salınım azaltıcı özelliğin, her bir $\mathcal{L}_{m,\rho}$ Stancu operatörü tarafından da sağlandığı, aşağıdaki teoremden elde edilmektedir.

Teorem 5.1 ρ ; negatif olmayan, sabitlenen bir tam sayı ve $g \in TV[0, 1]$ ise

$$V_{[0,1]} [\mathcal{L}_{m,\rho}(g)] \leq V_{[0,1]} [g]$$

eşitsizliği, her $m > 2\rho$, $m \in \mathbb{N}$, için gerçekleşir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2022).

İspat. (3.3) formülünden

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \mathcal{L}_{m,\rho}(g; x) \\ = & (m - \rho) \sum_{\tau=0}^{m-1-\rho} p_{m-1-\rho,\tau}(x) \\ & \times \left\{ (1-x) \left[g\left(\frac{\tau+1}{m}\right) - g\left(\frac{\tau}{m}\right) \right] + x \left[g\left(\frac{\tau+\rho+1}{m}\right) - g\left(\frac{\tau+\rho}{m}\right) \right] \right\} \\ & + \sum_{\tau=0}^{m-\rho} p_{m-\rho,\tau}(x) \left[g\left(\frac{\tau+\rho}{m}\right) - g\left(\frac{\tau}{m}\right) \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

bulunur. $\mathcal{L}_{m,\rho}(g) \in AC[0, 1]$ olacağından. $\mathcal{L}_{m,\rho}(g)$ için toplam salınım;

$$V_{[0,1]} [\mathcal{L}_{m,\rho}(g)] = \int_0^1 \left| \frac{d}{dx} \mathcal{L}_{m,\rho}(g; x) \right| dx$$

formülü, (5.1) ve beta integrali kullanılarak

$$\begin{aligned}
V_{[0,1]} [\mathcal{L}_{m,\rho}(g)] &= \int_0^1 \left| \frac{d}{dx} \mathcal{L}_{m,\rho}(g; x) \right| dx \\
&= \left| \sum_{\tau=0}^{m-1-\rho} \frac{(m-\rho-\tau)}{(m-\rho+1)} \left[g\left(\frac{\tau+1}{m}\right) - g\left(\frac{\tau}{m}\right) \right] \right. \\
&\quad + \sum_{\tau=0}^{m-1-\rho} \frac{(\tau+1)}{(m-\rho+1)} \left[g\left(\frac{\tau+\rho+1}{m}\right) - g\left(\frac{\tau+\rho}{m}\right) \right] \\
&\quad \left. + \sum_{\tau=0}^{m-\rho} \frac{1}{(m-\rho+1)} \left[g\left(\frac{\tau+\rho}{m}\right) - g\left(\frac{\tau}{m}\right) \right] \right| \\
&\leq \frac{1}{m-\rho+1} \\
&\quad \times \sum_{\tau=0}^{m-1-\rho} \left[(m-\rho-\tau) \left| g\left(\frac{\tau+1}{m}\right) - g\left(\frac{\tau}{m}\right) \right| + (\tau+1) \left| g\left(\frac{\tau+\rho+1}{m}\right) - g\left(\frac{\tau+\rho}{m}\right) \right| \right] \\
&\quad + \frac{1}{m-\rho+1} \sum_{\tau=0}^{m-\rho} \left| g\left(\frac{\tau+\rho}{m}\right) - g\left(\frac{\tau}{m}\right) \right| \tag{5.2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, Teorem 3.4'ün ispatında olduğu gibi, (5.2) eşitsizliğindeki ilk ve ikinci toplamalarda (3.19) formülünde yapılan parçalanma tekniği kullanılarak

$$\begin{aligned}
V_{[0,1]} [\mathcal{L}_{m,\rho}(g)] &\leq \frac{1}{m-\rho+1} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{\tau=0}^{\rho-1} (m-\rho-\tau) + \sum_{\tau=\rho}^{m-1-\rho} (m-2\rho+1) + \sum_{\tau=m-\rho}^{m-1} (\tau-\rho+1) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\tau=0}^{\rho-1} (\tau+1) + \sum_{\tau=\rho}^{m-1-\rho} \rho + \sum_{\tau=m-\rho}^{m-1} (m-\tau) \right\} \left| g\left(\frac{\tau+1}{m}\right) - g\left(\frac{\tau}{m}\right) \right| \\
&\leq V_{[0,1]} [g]
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. ■

Önerme 2.3 ile verilen, mutlak sürekli fonksiyonlar için Bernstein operatör dizisi ile salınım yarı-normunda yakınsaklık özelliği, $\{\mathcal{L}_{m,\rho}(g)\}_{m \in \mathbb{N}}$ Stancu operatör dizisi için aşağıda elde edilmektedir.

Önerme 5.1 ρ ; negatif olmayan, sabitlenen bir tam sayı ve $g \in TV[0, 1]$ ise

$$g \in AC[0, 1] \iff \lim_{m \rightarrow \infty} V_{[0,1]} [\mathcal{L}_{m,\rho}(g) - g] = 0$$

gerçeklenir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2022).

İspat. $AC[0, 1]$, $\|\cdot\|_{TV[0,1]}$ yarı-normuna göre $TV[0, 1]$ uzayının kapalı alt uzayıdır (Bardaro vd. 2003), $g \in TV[0, 1]$ için,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_{[0,1]} [\mathcal{L}_{m,\rho}(g) - g] = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathcal{L}_{m,\rho}(g) - g\|_{TV[0,1]} = 0$$

eşitliğinden $g \in AC[0, 1]$ bulunur. Diğer taraftan, $g \in AC[0, 1]$ alınırsa ($g' \in L^1[0, 1]$ ve $g(x) = \int_0^x g'(t) dt + g(0)$ olur). $\mathcal{L}_{m,\rho}(g) \in AC[0, 1]$ olduğundan, $(\mathcal{L}_{m,\rho}(g) - g) \in AC[0, 1]$ alabiliriz. Böylece, (3.3), (3.4) ve Teorem 3.4 kullanılarak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_{[0,1]} [\mathcal{L}_{m,\rho}(g) - g] = \lim_{m \rightarrow \infty} \|K_{m-1,\rho}(g'; x) - g'\|_1 = 0$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur. ■

5.2 Genelleştirilmiş Stancu Operatörlerinin Lipschitz Sınıfını Koruma Özelliği

Bernstein polinomlarının; Lipschitz sürekli fonksiyonunun, sabitini ve derecesini koruduğu, Brown, Elliott ve Paget tarafından elemanter yöntem ile gösterilmiştir (Brown vd. 1987). Benzer sonuç, uygun Lipschitz sınıf tanımı kullanılarak; çok değişkenli Stancu operatörleri için Yang, Xiong ve Cao tarafından (Yang vd. 2003) ve G_m^β Cheney-Sharma operatörlerinin iki değişkenli genişlemesi için Başcanbaz-Tunca, Erençin ve İnce-İlarslan tarafından, elde edilmiştir (Başcanbaz-Tunca vd. 2018). Bu kısımda, her bir $\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta$ Cheney-Sharma tipinde Stancu operatörünün Lipschitz sınıfını koruduğu gösterilecektir.

Teorem 5.2 ρ ; negatif olmayan, sabitlenen bir tam sayı, $\beta \geq 0$ ve $g \in Lip_{\mathbb{M}}(\alpha, [0, 1])$ ise her $m > 2\rho$, $m \in \mathbb{N}$, için $\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g) \in Lip_{\mathbb{M}}(\alpha, [0, 1])$ gerçekleşir (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2018).

İspat. $y \geq x$ olacak şekilde $x, y \in [0, 1]$ olsun. (4.5) ve (1.7) formüllerinden, $\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; y)$ aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; y) &= \frac{1}{(1 + (m - \rho)\beta)^{m-\rho-1}} \\ &\times \sum_{j=0}^{m-\rho} \sum_{\tau=0}^j \binom{m-\rho}{j} \binom{j}{\tau} x(x + \tau\beta)^{\tau-1} (y - x) [y - x + (j - \tau)\beta]^{j-\tau-1} \\ &\times (1 - y) [1 - y + (m - \rho - j)\beta]^{m-\rho-j-1} \\ &\times \left\{ (1 - y) g\left(\frac{j}{m}\right) + yg\left(\frac{j + \rho}{m}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Yukarıdaki toplamların sırası değiştirilir ve $j - \tau = l$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; y) &= \frac{1}{(1 + (m - \rho)\beta)^{m-\rho-1}} \\ &\times \sum_{\tau=0}^{m-\rho} \sum_{\iota=0}^{m-\rho-\tau} \frac{(m - \rho)!}{(m - \rho - \tau - \iota)! \tau! \iota!} x(x + \tau\beta)^{\tau-1} (y - x) [y - x + \iota\beta]^{\iota-1} \\ &\times (1 - y) [1 - y + (m - \rho - \tau - \iota)\beta]^{m-\rho-\tau-\iota-1} \\ &\times \left\{ (1 - y) g\left(\frac{\tau + \iota}{m}\right) + yg\left(\frac{\tau + \iota + \rho}{m}\right) \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; x)$ operatörü aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; x) &= \frac{1}{(1 + (m - \rho)\beta)^{m-\rho-1}} \\ &\times \sum_{\tau=0}^{m-\rho} \sum_{\iota=0}^{m-\rho-\tau} \frac{(m - \rho)!}{\tau! \iota! (m - \rho - \tau - \iota)!} x(x + \tau\beta)^{\tau-1} (y - x) [y - x + \iota\beta]^{\iota-1} \\ &\times (1 - y) [1 - y + (m - \rho - \tau - \iota)\beta]^{m-\rho-\tau-\iota-1} \\ &\times \left\{ (1 - x) g\left(\frac{\tau}{m}\right) + xg\left(\frac{\tau + \rho}{m}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

(5.3) formülünden (5.4) çıkarılarak

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; y) - \mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; x) \\ &= \frac{1}{(1 + (m - \rho)\beta)^{m-\rho-1}} \\ &\times \sum_{\tau=0}^{m-\rho} \sum_{\iota=0}^{m-\rho-\tau} \frac{(m - \rho)!}{\tau! \iota! (m - \rho - \tau - \iota)!} x(x + \tau\beta)^{\tau-1} (y - x) [y - x + \iota\beta]^{\iota-1} \\ &\times (1 - y) [1 - y + (m - \rho - \tau - \iota)\beta]^{m-\rho-\tau-\iota-1} \\ &\times \left\{ (1 - y) g\left(\frac{\tau + \iota}{m}\right) + yg\left(\frac{\tau + \iota + \rho}{m}\right) - (1 - x) g\left(\frac{\tau}{m}\right) - xg\left(\frac{\tau + \rho}{m}\right) \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadede $yg\left(\frac{\tau}{m}\right)$ ve $xg\left(\frac{\tau+\iota+\rho}{m}\right)$ terimleri eklenip çıkarılarak aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{m,\rho}^{\beta}(g; y) - \mathcal{L}_{m,\rho}^{\beta}(g; x) \\
&= \frac{1}{(1 + (m - \rho) \beta)^{m-\rho-1}} \\
&\quad \times \sum_{\tau=0}^{m-\rho} \sum_{\iota=0}^{m-\rho-\tau} \frac{(m - \rho)!}{\tau! \iota! (m - \rho - \tau - \iota)!} x (x + \tau \beta)^{\tau-1} (y - x) [y - x + \iota \beta]^{\iota-1} \\
&\quad \times (1 - y) [1 - y + (m - \rho - \tau - \iota) \beta]^{m-\rho-\tau-\iota-1} \\
&\quad \times \left\{ (1 - y) \left[g\left(\frac{\tau + \iota}{m}\right) - g\left(\frac{\tau}{m}\right) \right] + x \left[g\left(\frac{\tau + \iota + \rho}{m}\right) - g\left(\frac{\tau + \rho}{m}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. + (y - x) \left[g\left(\frac{\tau + \iota + \rho}{m}\right) - g\left(\frac{\tau}{m}\right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

İki tarafın mutlak değeri alınıp, $g \in Lip_{\mathbb{M}}(\alpha, [0, 1])$ hipotezi ve $x \leq y$ varsayımı kullanılarak, yukarıdaki eşitlikten

$$\begin{aligned}
& \left| \mathcal{L}_{m,\rho}^{\beta}(g; y) - \mathcal{L}_{m,\rho}^{\beta}(f; x) \right| \\
&\leq \frac{\mathbb{M}}{(1 + (m - \rho) \beta)^{m-\rho-1}} \\
&\quad \times \sum_{\tau=0}^{m-\rho} \sum_{\iota=0}^{m-\rho-\tau} \frac{(m - \rho)!}{\tau! \iota! (m - \rho - \tau - \iota)!} x (x + \tau \beta)^{\tau-1} (y - x) [y - x + \iota \beta]^{\iota-1} \\
&\quad \times (1 - y) [1 - y + (m - \rho - \tau - \iota) \beta]^{m-\rho-\tau-\iota-1} \\
&\quad \times \left\{ (1 - (y - x)) \left(\frac{\iota}{m}\right)^{\alpha} + (y - x) \left(\frac{\iota + \rho}{m}\right)^{\alpha} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada toplamaların sırası değiştirilerek,

$$\begin{aligned}
& \left| \mathcal{L}_{m,\rho}^{\beta}(g; y) - \mathcal{L}_{m,\rho}^{\beta}(g; x) \right| \\
&\leq \frac{\mathbb{M}}{(1 + (m - \rho) \beta)^{m-\rho-1}} \\
&\quad \times \sum_{\iota=0}^{m-\rho} \binom{m - \rho}{\iota} (y - x) [y - x + \iota \beta]^{\iota-1} \\
&\quad \times \sum_{\tau=0}^{m-\rho-\iota} \binom{m - \rho - \iota}{\tau} x (x + \tau \beta)^{\tau-1} (1 - y) [1 - y + (m - \rho - \iota - \tau) \beta]^{m-\rho-\iota-\tau-1} \\
&\quad \times \left\{ (1 - (y - x)) \left(\frac{\iota}{m}\right)^{\alpha} + (y - x) \left(\frac{\iota + \rho}{m}\right)^{\alpha} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. (1.7) eşitliğinde y yerine $1 - y$ ve m yerine $m - \rho - \iota$ alınır, yukarıdaki formül,

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; y) - \mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; x)| \\
& \leq \frac{\mathbb{M}}{(1 + (m - \rho)\beta)^{m-\rho-1}} \sum_{\iota=0}^{m-\rho} \binom{m-\rho}{\iota} (y-x) [y-x + \iota\beta]^{\iota-1} \\
& \quad \times (1 - (y-x)) [1 - (y-x) + (m - \rho - \iota)\beta]^{m-\rho-\iota-1} \\
& \quad \times \left\{ (1 - (y-x)) \left(\frac{\iota}{m}\right)^\alpha + (y-x) \left(\frac{\iota+\rho}{m}\right)^\alpha \right\}
\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenir. Burada $x_1 = \frac{\iota}{m}$, $x_2 = \frac{\iota+\rho}{m}$ ve negatif olmayan $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ olacak şekilde α_1 ve α_2 sabitleri $\alpha_1 = y-x$ ve $\alpha_2 = 1 - (y-x)$ alınır, $h(t) = t^\alpha$, $t \in [0, 1]$, $0 < \alpha \leq 1$, konkav olduğundan, son eşitsizlik aşağıdaki forma indirgenir:

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; y) - \mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; x)| \\
& \leq \frac{\mathbb{M}}{(1 + (m - \rho)\beta)^{m-\rho-1}} \sum_{\iota=0}^{m-\rho} \binom{m-\rho}{\iota} (y-x) [y-x + \iota\beta]^{\iota-1} \\
& \quad \times (1 - (y-x)) [1 - (y-x) + (m - \rho - \iota)\beta]^{m-\rho-\iota-1} \\
& \quad \times \left\{ (1 - (y-x)) \frac{\iota}{m} + (y-x) \left(\frac{\iota+\rho}{m}\right)^\alpha \right\} \\
& = \mathbb{M} \sum_{\iota=0}^{m-\rho} P_{m-\rho}^\beta(y-x) \left\{ (1 - (y-x)) \frac{\iota}{m} + (y-x) \left(\frac{\iota+\rho}{m}\right)^\alpha \right\}^\alpha.
\end{aligned}$$

Burada, $\alpha = 1$ durumu açıktır. $0 < \alpha < 1$ durumunda; $p = \frac{1}{\alpha}$ ve $q = \frac{1}{1-\alpha}$ eşlenik çiftleri için Hölder eşitsizliği uygulanırsa, Lemma 4.4 dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; y) - \mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(g; x)| \\
& \leq \mathbb{M} \left\{ \sum_{\iota=0}^{m-\rho} P_{m-\rho}^\beta(y-x) \left[(1 - (y-x)) \frac{\iota}{m} + (y-x) \left(\frac{\iota+\rho}{m}\right)^\alpha \right] \right\}^\alpha \left\{ \sum_{\iota=0}^{m-\rho} P_{m-\rho}^\beta(y-x) \right\}^{1-\alpha} \\
& = \mathbb{M} \left\{ \mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(e_1; y-x) \right\}^\alpha \left\{ \mathcal{L}_{m,\rho}^\beta(e_0; y-x) \right\}^{1-\alpha} \\
& = \mathbb{M}(y-x)^\alpha
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bernstein (1912) tarafından, binom dağılımı kullanılarak elde edilen Bernstein operatörlerinin, çok çeşitli genelleştirilmeleri yapılmıştır. Stancu (1983); Binom dağılımının, negatif olmayan bir ρ tam sayı parametreye dayalı bir genelleştirmesini oluşturarak elde ettiği temel fonksiyonlar yardımı ile, Bernstein operatörlerinin bir genelleştirmesini inşa etmiştir. Bu genelleştirilmiş operatörlerin $\rho = 0$ ve $\rho = 1$ durumları Bernstein operatörlerini vermektedir. Bu operatörler, tezde; Stancu operatörleri olarak adlandırılmıştır. Stancu (1983), Bernstein operatörleri için bilinen bazı özellikleri, Stancu operatörleri için de elde etmiştir. Tezin hazırlanma süresince; Bernstein operatörlerinin Kantorovich genelleştirilmesinde olduğu gibi (bkz. Teorem 1.4), Stancu operatörlerinin Kantorovich tipinde bir genelleştirmesi için L^p -yaklaşımın çalışmadığı gözlenmiştir. Buradan yola çıkılarak, Stancu operatörlerinin iki farklı düzenekte Kantorovich tipinde genelleştirilmeleri tanımlanarak, bu operatör dizileri ile L^p -yaklaşım elde edilmiştir. Ayrıca, Bernstein operatörlerinin sağladığı, çok önemli bir şekil özelliği olan; $[0, 1]$ üzerinde sınırlı salınımlı fonksiyonlar için salınım azaltıcı (bkz. Önerme 2.2) olma özelliği, ve salınım yarı normunda yakınsama (bkz. Önerme 2.3) sonucu, Stancu operatörleri için de elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçların derlendiği makale, Filomat (2022) dergisinde yayıma kabul edilmiştir.

Diğer taraftan, Cheney ve Sharma; binom dağılımının Jensen (1902) tarafından elde edilen (1.7) genelleştirmesini kullanarak Bernstein operatörlerinin negatif olmayan bir reel parametreye dayalı olan ve (1.9) ile verilen genelleştirmesini inşa etmişlerdir. Bu tez çalışmasında; Stancu operatörlerinin çekirdeğinde, Cheney ve Sharma operatörlerinin çekirdeği dikkate alınıp; Stancu operatörlerinin negatif olmayan bir reel parametreye dayalı olan bir genelleştirmesi tanımlanarak, bu operatörlerin standart yaklaşım özellikleri ve Lipschitz sınıfını koruma özelliği elde edilmiştir. Bu sonuçlar, (Bostancı ve Başcanbaz-Tunca 2018) isimli kaynakta yayımlanmıştır. Teorem 3.1, Sonuç 3.1, Teorem 3.3 ve Teorem 3.5 sonuçlarının kapsandığı makale, bir dergiye sunulmuştur.

KAYNAKLAR

- Abramowitz, M., Stegun, I. A. 1970. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover Publications, 951 p., New York.
- Akdi, Y. 2011. Matematiksel İstatistiğe Giriş. Gazi Kitabevi, Ankara.
- Altomare, F., Campiti, M. 1994. Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications. Walter de Gruyter, Berlin-New York.
- Altomare, F., 2010. Korovkin-type theorems and approximation by positive linear operators. *Surv. Approx. Theory* 5, 92-164.
- Altomare, F., Cappelletti, M. M., Leonessa, V., Raşa, I. 2017. A generalization of Kantorovich operators for convex compact subsets. *Banach J. Math. Anal.*, 11(3); 591–614.
- Bardaro, C., Butzer, P.L., Stens, R.L., Vinti, G. 2003. Convergence in variation and rates of approximation for Bernstein-type polynomials and singular convolution integrals. *Analysis* 23(4), 299–340.
- Başcanbaz-Tunca, G., Erençin, A., Taşdelen, F. 2016. Some properties of Bernstein type Cheney and Sharma Operators. *General Math.*, 24(1-2); 17–25.
- Başcanbaz-Tunca, G., Erençin, A., İnce-İlarslan, H. G. 2018. Bivariate Cheney-Sharma operators on simplex. *Hacet. J. Math.*, 47(4); 793–804.
- Başcanbaz-Tunca, G., Erençin, A. Olgun, A. 2019. Quantitative estimates for bivariate Stancu operators. *Math. Methods Appl. Sci.*, 42(16); 5241–5250.
- Bernstein, S. N., 1912. Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul de probabilités. *Comm. Soc. Math. Kharkow*, 13; 1-2.
- Bostancı, T., Başcanbaz-Tunca, G. 2018. A Stancu type extension of Cheney and Sharma operators. *J. Numer. Anal. Approx. Theory.*, 47(2); 124–134.
- Bostancı, T., Başcanbaz-Tunca, G. 2022. On Stancu operators depending on a non-negative integer. *Filomat*, kabul edildi.
- Brown, B. M., Elliott, D., Paget, D. F. 1987. Lipschitz constants for the Bernstein polynomials of a Lipschitz continuous function. *J. Approx. Theory*, 49(2); 196–199.
- Bustamante, J., Quesada, J. M. 2010. A property of Ditzian-Totik second order moduli. *Appl. Math. Lett.*, 23(5); 576–580.
- Butzer, P. L., Nessel, R. J., 1971. Fourier Analysis and Approximation. Birkhäuser Verlag, Basel, and Academic Press, vol. 1, 553 p., New York.
- Campiti, M., Metafune, G. 1996. L_p -convergence of Bernstein-Kantorovich-type operators. *Ann. Polon. Math.*, 63(3); 273–280.

- Cătiņaș, T., Otrocol, D. 2013. Iterates of multivariate Cheney-Sharma operators. *J. Comput. Anal. Appl.*, 15(7); 1240–1246.
- Cheney, E. W., Sharma, A. 1964. On a generalization of Bernstein polynomials. *Riv. Mat. Univ. Parma.*, 2(5); 77–84.
- Crăciun, M. 2001. Approximation operators constructed by means of Sheffer sequences. *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.*, 30(2); 135–150.
- Çetin, N., Başcanbaz-Tunca, G. 2019. Approximation by a new complex generalized Bernstein operator. *An. Univ. Oradea Fasc. Mat.*, 26(2); 129–141.
- DeVore, R. A., Lorentz, G. G. 1993. *Constructive Approximation*. Springer, vol. 303, 449 p., Berlin.
- Goodman, T.N.T. 1989. Shape preserving representations. *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, Boston, 333–351.
- Gupta, V., Rassias, M. T. 2019. *Moments of linear positive operators and approximation*. Springer, 96 p., New York.
- Habib, A., Umar, S. 1980. On generalized Bernstein polynomials. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 11(2); 177–189.
- Habib, A. 1981. On the degree of approximation of functions by certain new Bernstein type polynomials. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 12(7); 882–888.
- Jensen, J. L. W. V. 1902. Sur une identité d’Abel et sur d’autres formules analogues. *Acta Math.*, 26, 307–318.
- Kajla, A. 2018. The Kantorovich variant of an operator defined by D.D Stancu. *Appl. Math. Comput.*, 316; 400–408.
- Kantorovich, L. V. 1930. Sur certains développements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein. I, *C. R. Acad. Sci. URSS.*, 563–568, in Russian.
- Korovkin, P.P. 1953. On convergence of linear operators in the space of continuous functions (Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 90, 961–964.
- Li, Z. 2000. Bernstein Polynomials and modulus of continuity. *J. Approx. Theory*, 102(1); 171–174.
- Lorentz, G. G. 1937. Zur theorie der polynome von S. Bernstein. *Mat. Sb.*, 2, 543–556.
- Lorentz, G. G. 1953. *Bernstein Polynomials*. University of Toronto Press, 130 p., Toronto, (2.ed., Chelsea Publishing Co., New York, 1986).
- Lupaș, L., Lupaș, A. 1987. Polynomials of binomial type and approximation operators. *Studia Univ. Babeș-Bolyai. Math.*, 32(4), 61–69.

- Müller, M. W. 1989. Approximation by Cheney-Sharma-Kantorovič polynomials in the L_p -metric. Rocky Mountain J. Math., 19(1); 281–291.
- Natanson, I. P., 1964. Theory of Functions of a Real Variable. Translated from the Russian by Leo F. Boron, Frederick Ungar Pub. Co., 277 p., New York.
- Paltanea, R. 2004. Approximation Theory Using Positive Linear Operators. 202 p., Birkhäuser Basel, Berlin.
- Pițul, P. A. 2007. Evaluation of the Approximation Order by Positive Linear Operators. Doktora Tezi, Babeș-Bolyai-Universităt in Cluj-Napoca.
- Popov, V. A. 1982. On the quantitative Korovkin theorems in L_p . Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., 35, 897–900.
- Popoviciu, T. 1931. Remarques sur les polynômes binômiaux. Bulletin de la Société des Sciences de Cluj, Roumanie 6, 146–148 (also reproduced in Mathematica (Cluj) 6, 8-10 (1932)).
- Popoviciu, T. 1935. Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur. Mathematica (Cluj), 10, 49–54.
- Quak, E. 1988. L_p -error estimates for the approximation by positive linear operators using the second-order τ -modulus. Analysis Math., 14(3), 259–272.
- Sendov, B., Popov, V. A. 1983. Averaged moduli of smoothness. Bulg. Math. Monographs, Publ. House of Bulg. Acad. Sciences, vol. 4, 181 p., Sofia, in Bulgarian.
- Stancu, D. D. 1981. Quadrature formulas constructed by using certain linear positive operators. Numerical Integration (Proc. Conf., Oberwolfach, 1981), ISNM 57 (1982), 241–251, Birkhäuser Verlag, Basel.
- Stancu, D. D. 1983. Approximation of functions by means of a new generalized Bernstein operator. Calcolo, 20(2); 211–229.
- Stancu, D. D. 1984. A note on a multiparameter Bernstein-type approximating operator. Mathematica (Cluj), 26, (49)(2); 153–177.
- Stancu, D. D., Cismașiu, C. 1997. On an approximating linear positive operator of Cheney-Sharma. Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., 26(1-2); 221–227.
- Stancu, D. D., Occorsio, M. R. 1998. On Approximation by binomial operators of Tiberiu Popoviciu type. Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., 27(1), 167–181.
- Stancu, D. D. 2002. Use of an identity of A. Hurwitz for construction of a linear positive operator of approximation. Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., 31(1); 115–118.
- Stancu, D. D., Stoica, E. I. 2009. On the use of Abel-Jensen type combinatorial formulas for construction and investigation of some algebraic polynomial operators of approximation. Stud. Univ. Babeș-Bolyai Math., 54(4); 167–182.

- Voronovskaja, E. V. 1932. Détermination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polynômes de M. Bernstein (Russian). C.R. Acad. Sci. URSS, 79, 79-85.
- Weierstrass, K. G. 1885. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen, 633–639 and 789–805. (An expanded version of this paper with ten additional pages also appeared in Mathematische Werke, vol. 3, 1–37, Mayer and Müller, Berlin, 1903), Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin.
- Yang, R., Xiong, J., Cao, F. 2003. Multivariate Stancu operators defined on a simplex. Appl. Math. Comput., 138(2-3), 189–198.

