

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**UYARLANMIŞ WEIBULL GEOMETRİK SÜREÇTE
İSTATİSTİKSEL SONUÇ ÇIKARIMI**

Akın YILDIRAN

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2022**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

UYARLANMIŞ WEIBULL GEOMETRİK SÜREÇTE İSTATİSTİKSEL SONUÇ ÇIKARIMI

Akın YILDIRAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

Geometrik süreç, trend içeren ardışık olaylar arası geçen zamanların modellenmesi için ilk olarak Lam (1988) tarafından yenileme sürecinin bir genellemesi olarak geliştirilmiştir ve yer değiştirme (replacement) problemlerine uygulanmıştır. Bu çalışmada ilk olayın gerçekleşme zamanı X_1 rasgele değişkeni, parametreleri α , b ve λ olan uyarlanmış Weibull dağılımına sahip olduğu varsayılacaktır. Geometrik sürecin a oranı ve uyarlanmış Weibull dağılımının parametreleri en çok olabilirlik tahmin yöntemini kullanılarak tahmin ediciler elde edilecektir. Önerilen tahmin edicilerin küçük örneklem performansları, yan ve hata kareler ortalaması (HKO) kriterlerine göre bir simülasyon çalışmasında incelenecektir. Ardından geometrik süreç ile uyumlu altı gerçek veri seti ele alınarak, bu veri setleri için uyarlanmış Weibull geometrik sürecinin parametre tahminleri hesaplanacak ve T -istatistiğinin kullanılmasıyla süreç için uyarlanmış Weibull dağılımı literatürde en çok kullanılan yaşam dağılımları ile karşılaştırılarak uygunluğu belirlenecektir.

Haziran 2022, 53 sayfa

Anahtar Kelimeler: Geometrik süreç, uyarlanmış Weibull dağılımı, en çok olabilirlik tahmini, T -istatistiği

ABSTRACT

Master Thesis

STATISTICAL INFERENCE IN MODIFIED WEIBULL GEOMETRIC PROCESS

Akın YILDIRAN

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Science
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

A geometric process used for modelling consecutive arrival times with trend is firstly introduced by Lam (1988) as a generalization of renewal process and applied in replacement problems. In this study, modified Weibull distribution with parameters α , b and λ is selected as the distribution of the first interarrival time X_1 . The maximum likelihood estimation method is used for estimating the ratio parameter a of the geometric process and the parameters of modified Weibull distribution. The performance of the estimators proposed for the small sample size is evaluated by a simulation study according to the bias and mean squared error (MSE) criteria. Then, by using six data sets shown to be consistent with the GP model, the estimates of the parameters of the GP with modified Weibull distribution are calculated. Suitability of the modified Weibull distribution for these data sets is determined by T -statistic comparing with the lifetime distributions commonly used in the literature.

June 2022, 53 pages

Key Words: Geometric process, modified Weibull distribution, maximum likelihood estimation, T -statistic

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmalarım sırasında bilgi birikimini aktaran, tecrübesiyle yön veren ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer hocam sayın Prof. Dr. Halil AYDOĞDU' ya (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarım esnasında beni hiçbir zaman geri çevirmeyen bilgisini ve desteğini her daim omuzlarımda hissettiğim kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Hilmi PEKALP'e (Ankara Üniversitesi Aktüerya Anabilim Dalı) teşekkürlerimi sunarım.

İstatistik bilimini sevmemi sağlayan ve bir dönem meslektaşları olma şerefine nail olduğum Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü' nün muteber öğretim üyeleri ve öğretim elemanlarına teşekkür ederim.

Aldığım her kararda yanımda olan, beni bu günlere getiren, yol gösteren babam Rıza YILDIRAN, annem Elif YILDIRAN, abim Anıl YILDIRAN ve kardeşim Ceren YILDIRAN' a sonsuz teşekkür ederim.

İstatistikle tanışmama vesile olan değerli dostum Fatma Gül KURT'a İstatistik bölümünden beraber yola çıktığım tez çalışmamda desteklerini hep hissettiğim kıymetli dostlarım Ali Can ALBAYRAK, Baki SELİM, Berkay AKSU, Hülya DALKILIÇ, Osman ÇÖPOĞLU, Samet KAYA, Şeyda Nur ATİK' e ve moral motivasyonumu hep en üst seviyede tutmamı sağlayan değerli dostlarım Burak Berkcan DURMUŞ, İsmet İlke ALKAN, Özge YURTMAN, Seren ONAT, Araş. Gör. Sibel SERTOK (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) ve nice dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Akın YILDIRAN

Ankara, Haziran 2022

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. BAZI KURAMSAL TEMELLER	5
2.1 Rasgele Değişken	5
2.2 Stokastik Süreç.....	5
2.3 Bağımsız Artışlı Süreç	7
2.4 Durağan Artışlı Süreç.....	7
2.5 Ters Dönüşüm Yöntemi.....	7
2.6 En Çok Olabilirlik Yöntemi.....	9
2.6.1 EÇO'nun değişmezlik özelliği.....	10
2.6.2 Regülerlik (düzgünlük) şartları.....	11
2.7 En Çok Olabilirlik Oranına Dayalı T -İstatistiği	11
3. BAZI SAYMA SÜREÇLERİ	13
3.1 Sayma Süreci	13
3.2 Homojen Olmayan Poisson Süreci	13
3.3 Yenileme Süreci.....	14
3.4 Geometrik Süreç	15
3.4.1 Geometrik süreçte olaylar arası geçen zamanların dağılım fonksiyonu, beklenen değeri ve varyansı	16
4. UYARLANMIŞ WEIBULL DAĞILIMI	17
4.1 İstatistiksel Özellikler	18
4.1.1 Çeyreklik ve medyan	18
4.1.2 Mod.....	18
4.1.3 Momentler.....	19

4.1.4 Moment çıkaran fonksiyon	20
4.2 Uyarlanmış Weibull Dağılımının Diğer Dağılımlarla İlişkisi	22
5. UYARLANMIŞ WEIBULL GEOMETRİK SÜRECİ.....	24
5.1 En Çok Olabilirlik Tahmini.....	24
6. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI	28
6.1 Simülasyon Yoluyla Uyarlanmış Weibull Geometrik Sürecinden Sayı Üretilmesi.....	28
7. GERÇEK VERİ UYGULAMASI.....	39
7.1 Boeing 720 Klima Sistemi Aircraft 6 Verisi	41
7.2 Boeing 720 Klima Sistemi Aircraft 7 Verisi	42
7.3 U.S.S Halfbeak Denizaltısı Dizel Motoru No.3 Verisi.....	44
7.4 U.S.S Grampus Denizaltısı Dizel Motoru No.4 Verisi	45
7.5 Araba Verisi.....	47
7.6 Hastane Acil Servisine Gelen Hasta Verisi	48
8. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	50
KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ.....	54

SİMGELER DİZİNİ

X_k : $(k - 1)$. olay gerçekleştikten sonra k . olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman

S_k : k . olayın (yenilemenin) gerçekleşme zamanı

$N(t)$, $(0, t]$ aralığında gerçekleşen yenilemelerin sayısı

$\lambda(t)$: Şiddet fonksiyonu

E : Durum uzayı

T : Parametre kümesi

F : Dağılım fonksiyonu

f : Olasılık yoğunluk fonksiyonu

h : Bozulma oran fonksiyonu

Kısaltmalar

HKO Hata kareler ortalaması

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 Yenileme sürecinin bir gerçekleşmesi.....	14
Şekil 4.1 Uyarlanmış Weibull bozulma fonksiyonu	22
Şekil 6.1 $\hat{a}$ için değişen a oran parametreleri karşısında HKO değerleri üzerindeki değişim ($\alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$)	31
Şekil 6.2 $\hat{a}$ için değişen a oran parametreleri karşısında HKO değerleri üzerindeki değişim ($\alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$)	32
Şekil 6.3 $\hat{b}$ için değişen a oran parametreleri karşısında HKO değerleri üzerindeki değişim ($\alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$)	32
Şekil 6.4 $\hat{\lambda}$ için değişen a parametreleri karşısında HKO değerleri üzerindeki değişim ($\alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$)	33
Şekil 6.5 $\hat{a}$ için değişen a oran parametreleri karşısında HKO değerleri üzerindeki değişim ($\alpha = 1, b = 1, \lambda = 2$)	36
Şekil 6.6 $\hat{a}$ için değişen a oran parametreleri karşısında HKO değerleri üzerindeki değişim ($\alpha = 1, b = 1, \lambda = 2$)	36
Şekil 6.7 $\hat{b}$ için değişen a oran parametreleri karşısında HKO değerleri üzerindeki değişim ($\alpha = 1, b = 1, \lambda = 2$)	37
Şekil 6.8 $\hat{\lambda}$ için değişen a oran parametreleri karşısında HKO değerleri üzerindeki değişim ($\alpha = 1, b = 1, \lambda = 2$)	37
Şekil 7.1 Aircraft 6 verisi için Gözlenen değerler ve Uyarlanmış Weibull geometrik sürecine ait yenileme zamanları S_i	42
Şekil 7.2 Aircraft 7 verisi için Gözlenen değerler ve Uyarlanmış Weibull geometrik sürecine ait yenileme zamanları S_i	43
Şekil 7.3 No.3 verisi için Gözlenen değerler ve Uyarlanmış Weibull geometrik sürecine ait yenileme zamanları S_i	45
Şekil 7.4 No.4 verisi için Gözlenen değerler ve Uyarlanmış Weibull geometrik sürecine ait yenileme zamanları S_i	46
Şekil 7.5 Araba verisi için Gözlenen değerler ve Uyarlanmış Weibull geometrik sürecine ait yenileme zamanları S_i	48
Şekil 7.6 Hasta verisi için Gözlenen değerler ve Uyarlanmış Weibull geometrik sürecine ait yenileme zamanları S_i	49

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 E durum uzayı ve T parametre kümesine göre sınıflandırmalar.....	6
Çizelge 4.1 Farklı parametre değerleri karşısında uyarlanmış Weibull dağılımının beklenen değer ve varyansları	21
Çizelge 6.1 Uyarlanmış Weibull ($\alpha = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 2$) durumunda geometrik sürecin a oran parametresi ve dağılımın parametreleri için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO değerleri	29
Çizelge 6.2 Uyarlanmış Weibull ($\alpha = 1$, $b = 1$, $\lambda = 2$) durumunda geometrik sürecin a oran parametresi ve dağılımın parametreleri için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO değerleri	33
Çizelge 7.1 Aircraft 6 verisi için karşılaştırmalar ve tahminler	41
Çizelge 7.2 Aircraft 7 verisi için karşılaştırmalar ve tahminler	42
Çizelge 7.3 No.3 verisi için karşılaştırmalar ve tahminler	44
Çizelge 7.4 No.4 verisi için karşılaştırmalar ve tahminler	45
Çizelge 7.5 Araba verisi için karşılaştırmalar ve tahminler	47
Çizelge 7.6 Hasta verisi için karşılaştırmalar ve tahminler.....	48

1. GİRİŞ

$t \geq 0$ olmak üzere $N(t)$, $(0, t]$ aralığında meydana gelen belirli türden olayların sayısını sayan bir rasgele değişken olsun. $\{N(t), t \geq 0\}$ stokastik sürecine bir sayma süreci adı verilir. Bu sayma sürecine göre gerçekleşen ardışık olaylar arası geçen zamanların oluşturduğu rasgele değişken dizisi sayma sürecini tek olarak belirler. Örneğin, olaylar arası geçen zamanlar bağımsız ve aynı F dağılımlı rasgele değişkenlerden oluşuyorsa bu sayma sürecine bir yenileme süreci adı verilir. Güvenirlilik analizinde belli bir sistemin bozulması durumunda sistem tamirleri arası geçen süreleri (bağımsız ve aynı dağılımlı), sigortacılık ve risk analizinde, taşıtların sigortaları arası geçen süreleri, tank motorlarının ömürleri, envanter depolama problemlerinde talepler arası geçen süreler yenileme süreci oluşturabilir. Ancak yenileme süreci kullanılarak yapılan yaklaşımlar genellikle gerçekçi olmayacaktır. Çünkü uygulamalarda sistemin aşırı yıpranması ve yorulması nedenlerinden dolayı olaylar arası geçen ardışık zamanların aynı dağılımlı olma varsayımı sağlanmayacaktır. Bir sayma sürecinden gelen bir veri kümesi sistematik değişim gösteren rasgele değişkenlerden oluşabilir. Sistematik değişim, sayma sürecinden gelen veri kümesi yapısında bir trend olduğunu ve bu sürece göre gerçekleşen olaylar arası geçen zamanların dağılımının aynı olmadığını ifade eder. Bu tür durumlarda model olarak yenileme süreci kullanılamayacağından homojen olmayan bir Poisson süreci ya da doğrudan stokastik monoton bir sayma süreci olan geometrik süreç düşünülebilir.

Yaygın olarak tamir edilebilir sistemlerin bozulma süreleri için kullanılan bir diğer model de homojen olmayan Poisson sürecidir. Homojen olmayan Poisson sürecinde bozulmaların meydana gelme oranı yani şiddeti önemlidir. Örneğin açık deniz platformları üzerindeki gaz türbinlerinin bozulmalar arası geçen zamanlarının analizinde, sabit disklerin bozulmalar arası geçen zamanlarının analizinde, makine aletlerinin bozulmalar arası geçen zamanlarının analizinde, yazılım güvenilirliğinin modellenmesinde sıkça kullanılan temel bir süreçtir.

Yenileme sürecinin bir genellemesi olarak ortaya çıkan geometrik süreç, ilk kez Lam (1988) tarafından ardışık varış zamanlarını modellemek için tanıtılmıştır. Günümüzde askeriyedeki bakım problemlerinde, teknolojik ürünlerin tamir-değiştirme problemlerinde ve daha birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu süreç aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım: $\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun. Bu sürece göre gerçekleşen olaylar arası geçen zaman dizisi $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ olmak üzere $\{a^{k-1}X_k, k = 1, 2, \dots\}$ rasgele değişkenlerinin bir dizisi bağımsız ve aynı dağılımlı olacak şekilde bir $a > 0$ gerçek sayısı varsa $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ dizisi üzerinde kurulu $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci a oranlı bir geometrik sürece sahiptir denilir.

Geometrik sürecin stokastik monotonluğu aşağıdaki gibi ifade edilir.

1. $a < 1$ ise $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ stokastik olarak azalan
2. $a > 1$ ise $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ stokastik olarak artan
3. $a = 1$ ise $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ bir yenileme süreci oluşturur.

Bakım, onarım ve yer değiştirme problemlerinde, rasgele ömürlü bir sistemin bozulmasından sonra rasgele bir süre içinde tamir edilerek yeniden çalıştırılmaya başlandığı genellikle kabul edilmektedir. Tamirden sonra yıpranmayla birlikte sistemin bozulmadan çalışma zamanı giderek kısalmakta tamir süreleri ise giderek artabilmektedir. Bu gibi durumlarda çalışma süreleri ve tamir süreleri için yenileme süreci model olarak kullanılamamaktadır. Çalışma süreleri ve tamir süreleri adına sırasıyla stokastik olarak azalan ve sonrasında artan bir geometrik süreç model olarak önerilebilir. Geometrik süreç uygulamalı istatistiğin pek çok alanında stokastik modelleme için yürütülen çalışmalarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Geometrik süreç genellikle ilk olay zamanının dağılımının yardımıyla karakterize edilen önemli bir sayma süreci olarak değerlendirilebilir. İlk olayın gerçekleşme zamanının yaşam dağılımları olan Weibull, gamma, lognormal, ters Gauss olması durumunda ortaya çıkan parametre tahmin problemlerini ele alan birçok çalışma bulunmaktadır. Aydoğdu vd. (2010) çalışmasında, X_1 rasgele değişkeninin dağılımının Weibull dağılımından geldiği varsayımı altında

geometrik süreçte parametre tahmin problemini ele almıştır. Kara vd. (2015), geometrik süreçte ters Gauss dağılımı ile istatistiksel sonuç çıkarımları üzerine çalışma gerçekleştirmiştir. Chan vd. (2004) ilk olayın gerçekleşme zamanının Gamma dağılımından seçilmesi durumunda geometrik süreçte istatistiksel sonuç çıkarımında bulunmuştur. Bilindiği kadarıyla uyarlanmış Weibull dağılımı geometrik süreç ile ilgili yapılan çalışmalarda hiç ele alınmamıştır ve bu dağılım önemli yaşam dağılımları arasında yer aldığından ilgili dağılım varsayımı altında geometrik süreç için istatistiksel sonuç çıkarımının yapılması ele alınması gereken önemli bir problemdir. Bu çalışmada ilk olayın gerçekleşme zamanı X_1 rasgele değişkeninin dağılımı uyarlanmış Weibull dağılımı alınarak oluşturulan geometrik süreç üzerinde durulacaktır. Bu geometrik sürece özel olarak uyarlanmış Weibull geometrik süreci adı verilecek ve bu çalışma boyunca böyle adlandırılacaktır. Stokastik bir model olarak kullanılan uyarlanmış Weibull geometrik süreç ile istatistiksel sonuç çıkarımı yapabilmek için modelin bilinmeyen parametrelerinin tahmin edilmesi gerekir. Böylelikle karşımıza parametre tahmin problemi ortaya çıkar ve bu problem uyarlanmış Weibull geometrik süreç modeli için önemli bir yere sahip olur. Bundan dolayı geometrik sürecin a oran parametresi ile uyarlanmış Weibull dağılımının parametrelerinin tahmin edicilerinin elde edilmesi ve bazı istatistiksel özelliklerinin ortaya çıkarılması üzerinde çalışılması gereken önemli bir konu olacaktır.

İkinci bölümde, rasgele değişken, stokastik süreç, bağımsız artışı süreç, durağan artışı süreç ve ilgili özellikler verilecek ardından çalışmada kullanılacak olan ters dönüşüm yöntemi, en çok olabilirlik tahmin yöntemi ve en çok olabilirlik oranına dayalı T -istatistiği kavramları üzerinde durulacaktır.

Üçüncü bölümde, sayma süreci kavramı açıklanıp, yenileme süreçleri ve özelliklerine değinilecektir. Ardından homojen olmayan Poisson süreci ve sürecin özelliklerine ilişkin kavramlar açıklanacaktır. Çalışmanın temelini oluşturan geometrik süreç tanımlanarak, geometrik sürecin olaylar arası geçen zamanları ve bekleme zamanlarının dağılımından

bahsedilip geometrik sürecin olaylar arası geçen zamanlarının beklenen değeri ve varyansı üzerinde durulacaktır.

Dördüncü bölümde, bir yaşam dağılımı olan geleneksel Weibull dağılımının genelleştirilmiş hali olarak ilk kez Lai (2003) tarafından tanıtılan uyarlanmış Weibull dağılımından bahsedilecektir. Uyarlanmış Weibull dağılımına ilişkin birikimli dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu verilecek ve uyarlanmış Weibull dağılımının bazı karakteristikleri gösterilerek diğer dağılımlarla ilişkisi üzerinde durulacaktır. Ardından uyarlanmış Weibull dağılımının beklenen değeri ve varyansı verilecek ve farklı parametre değerleri için beklenen değer ve varyans hesaplamaları üzerinde durulacaktır.

Beşinci bölümde, uyarlanmış Weibull geometrik sürecinden bir veri kümesi geldiğinde sürecin hem a oran parametresini hem de uyarlanmış Weibull dağılımının parametrelerinin tahmin problemi ele alınacaktır. Bu parametrelerin tahminleri en çok olabilirlik tahmin yöntemiyle elde edilecektir.

Altıncı bölümde, bir simülasyon çalışması yapılarak tahmin edicilerin küçük örneklem özellikleri için yan ve HKO kriterleri tahmin edicilerin performanslarını değerlendirmek için kullanılacaktır.

Yedinci bölümde, T -istatistiği yardımıyla gerçek verilerin modellenmesinde uyarlanmış Weibull geometrik sürecinin, Weibull geometrik süreci, lognormal geometrik süreci ve gamma geometrik sürecine göre nasıl performans sergilediği ve model seçiminde kullanılma durumuna ilişkin analiz sonuçları üzerine bir uygulama yapılacaktır.

Sekizinci bölümde, çalışma sonucunda elde edilen bulgular değerlendirilecektir.

2. BAZI KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışma boyunca ihtiyaç duyulan konuların temelini oluşturan kavramlar üzerinde durulacaktır. Rasgele değişken, stokastik süreç, bağımsız artışlı süreç ve durağan artışlı süreç, ters dönüşüm yöntemi, en çok olabilirlik tahmin yöntemi ve en çok olabilirlik oranına dayalı T -istatistiği kavramlarının tanımları yapılacaktır.

2.1 Rasgele Değişken

(Ω, U, P) olasılık uzayı olsun.

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

fonksiyonu her $a \in \mathbb{R}$ için $\{\omega: X(\omega) \leq a\} \in U$ koşulunu sağlarsa, X fonksiyonuna rasgele değişken denir. Rasgele değişkenin değer kümesi D_X ile gösterilir ve reel sayıların bir alt kümesi olarak ifade edilir.

2.2 Stokastik Süreç

(Ω, U, P) olasılık uzayı ve T parametre kümesini ifade etmek üzere

$$\begin{aligned} X: T \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\rightarrow X(t, \omega) \end{aligned}$$

fonksiyonu göze alındığında eğer her sabit $t \in T$ için $X(t, \omega)$ rasgele değişken ise X fonksiyonu bir stokastik süreç olarak tanımlanır ve $\{X(t), t \in T\}$ şeklinde ifade edilir. Her sabit $t \in T$ için $X(t)$ rasgele değişkenlerinin aldığı değerlerin oluşturduğu küme stokastik sürecin durum uzayı olarak adlandırılır. E ile ifade edilir. Her sabit $\omega \in \Omega$ için bu sürecin verdiği t 'nin fonksiyonuna sürecin bir yörüngesi denir.

T parametre kümesinin sahip olduğu eleman sayısına göre stokastik süreç; T , bir elemanlı ise rasgele değişken, T , n sayıda eleman içeriyorsa rasgele vektör, $T = \mathbb{N}$ olması durumunda rasgele değişken dizisi olarak adlandırılır.

Bir stokastik süreç E durum uzayı ve T parametre kümelerine göre dört farklı şekilde sınıflandırılabilir. Bu sınıflandırmalar Çizelge 2.1’de verilmiştir.

Çizelge 2.1 E durum uzayı ve T parametre kümesine göre sınıflandırmalar

$E \backslash T$	Sayılabilir	Sayılamaz
Sayılabilir	Kesikli durum uzaylı, kesikli parametre kümelidir.	Kesikli durum uzaylı, sürekli parametre kümelidir.
Sayılamaz	Sürekli durum uzaylı, kesikli parametre kümelidir.	Sürekli durum uzaylı, sürekli parametre kümelidir.

Tanım 2.2.1 (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olsun. X ile Y bu uzayda tanımlı iki rasgele değişken ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $P(X > t) \geq P(Y > t)$, olduğu duruma X rasgele değişkeni stokastik olarak Y rasgele değişkeninden büyüktür veya eşittir denir. $X \geq_{st} Y$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.1’den hareketle sonlu beklenen değerlerin olması ve her artan u fonksiyonu için aşağıdaki yer alan teorem 2.2.1 verilir.

Teorem 2.2.1 $X \geq_{st} Y$ ise her artan u fonksiyonu için $E[u(X)] \geq E[u(Y)]$ ’dir.

2.3 Bağımsız Artışlı Süreç

$\{X(t), t \in T\}$ bir stokastik süreç ve n doğal sayı olsun. $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ şartına uyan T parametre kümesine ait $t_1, t_2, \dots, t_n$ 'lerin her seçim için, $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ rasgele değişkenleri birbirlerinden bağımsızsa, $\{X(t), t \in T\}$ stokastik sürecine bağımsız artışlı süreç denir.

2.4 Durağan Artışlı Süreç

$\{X(t), t \in T\}$ bir stokastik süreç olmak üzere $\forall h > 0$ ve $t + h \in T$ için, $X(t + h) - X(t)$ rasgele değişkeninin dağılımı yalnızca h 'a bağlıysa $\{X(t), t \in T\}$ stokastik sürecine durağan artışlı süreç denir.

2.5 Ters Dönüşüm Yöntemi

X rasgele değişkeni F dağılım fonksiyonuna sahip olsun. X rasgele değişkeninin dağılımdan sayı üretmek için çeşitli yöntemler vardır. Bu yöntemler arasında en popüler olanı F dağılım fonksiyonunun genelleştirilmiş tersi olarak ifade edilen

$$F^-: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \rightarrow F^-(u) = \inf\{x: F(x) \geq u\}$$

fonksiyonuna dayalı olarak $X = F^-(U)$ dönüşümünün kullanılmasıdır. Burada U rasgele değişkeni $(0,1)$ aralığı üzerindeki düzgün dağılıma, kısaca $U(0,1)$ dağılımına sahiptir.

$$F(F^-(u)) \geq u, \quad 0 < u < 1 \text{ ve } F^-(F(x)) \leq x, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\{(u, x): F^-(u) \leq x\} = \{(u, x): F(x) \geq u\}$$

dır. Böylelikle

$$F(x) \geq u \Leftrightarrow x \geq F^-(u)$$

ve sonuçta

$$P(F^-(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$$

dır. $F^-(U)$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F dir. Bu da $F^-(U)$ dönüşümü ile ortaya çıkan rasgele değişkenin X rasgele değişkeni olduğunu ifade eder. $X = F^-(U)$ dönüşümü olasılık-integral dönüşümü olarak bilinir. $U(0,1)$ düzgün dağılımı ile üretilen sayılar olasılık-integral dönüşümü sonucunda X rasgele değişkeninin dağılımdan üretilen sayılar olur. Böylece herhangi bir X rasgele değişkeninin dağılımından sayı üretme işlemi gerçekleşmiş gibi görünür fakat burada ortaya çıkan zorluk F^- genelleştirilmiş ters fonksiyonunun bazı dağılımlar için açık ifadesinin elde edilememesi sorunudur. Örneğin $X \sim N(0,1)$ için,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad x \in \mathfrak{R}$$

olmak üzere

$$F^-(u) = F^{-1}(u), u \in (0,1)$$

dır. $F^{-1}(u)$ değerleri açık bir şekilde u 'ya bağlı olarak kolayca hesaplanamamaktadır. X 'in sürekli rasgele değişken olduğu durumda dağılıma ait destek kümesi üzerinde F artan fonksiyon olur ve bu durumda yukarıda verilen dönüşüm $X = F^-(U)$ halini alır. $X = F^-(U)$ rasgele değişkenine ait dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P[F^{-1}(U) \leq x] = P[F(F^{-1}(U)) \leq F(x)] \\ &= P[U \leq F(x)] = F(x) \end{aligned}$$

dır. F dağılım fonksiyonuna ait F^{-1} ters fonksiyonunun değerlerinin hesaplanabilmesi durumunda sürekli bir rasgele değişken olan X 'in dağılımdan sayı üretmek için aşağıdaki algoritma kullanılır.

Algoritma;

1. $U(0,1)$ dağılımı yardımıyla U üretilir.
2. $X = F^-(U)$ hesaplanır.

2.6 En Çok Olabilirlik Yöntemi

Tahmin edicileri elde etme yöntemleri arasında en çok olabilirlik (EÇO) yöntemi en popüler olanıdır. Bu yöntem ile elde edilen tahmin ediciler, tahmin edicilerde aranan özelliklerin birçoğunu sağlamaktadır ve diğer tahmin edici yöntemlerine göre daha iyi olmakla birlikte tahmin edicilerin elde edilmesi sırasında bazen en büyükleme (maksimizasyon) probleminin çözümünde sıkıntılar yaşanabilmektedir.

Tanım 2.6.1 $X_1, X_2, \dots, X_n$ örnekleminin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x; \theta)$ olan kitleden alınan bir örneklem olmak üzere, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ olduğunda, θ 'nın olabilirlik fonksiyonu

$$L(\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

ile verilir. Olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan (örneklemin bir fonksiyonu), $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ değerine eğer var ise θ 'nın en çok olabilirlik tahmini ve $\hat{\theta}(X)$ istatistiğine de θ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi adı verilir, yani

$$\hat{\theta}_n(X) = \underset{\theta}{\operatorname{Argmaks}} L(\theta|X)$$

dir. Logaritma fonksiyonunun monotonluğundan,

$$\log L(\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \underset{\theta}{\operatorname{Argmaks}} \sum_{i=1}^n \log f(x_i|\theta)$$

yazılır. Bazı durumlarda olabilirlik fonksiyonu yerine doğal logaritması olan ve log-olabilirlik fonksiyonu olarak da ifade edilen fonksiyonu maksimum yapan θ 'nın en çok olabilirlik tahmin edici değeri

$$\hat{\theta}_n(X) = \underset{\theta}{\operatorname{Argmaks}} \ell(\theta) = \underset{\theta}{\operatorname{Argmaks}} L(\theta|X)$$

dir. Bu durum optimizasyon problemini çözmeye kolaylık sağlamaktadır. Bu yüzden olabilirlik fonksiyonunun maksimize edilmesi yerine fonksiyonun logaritması alınarak maksimize edilir. Olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan değeri bulabilmek için parametreye göre birinci türev alınıp sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial \log(L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n))}{\partial \theta} = 0$$

Ardından elde edilen değerin maksimum olup olmadığını görebilmek için parametreye göre ikinci türev alınır ve bu türev sonucunun sıfırdan küçük olması gerekmektedir.

$$\frac{\partial^2 \log(L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n))}{\partial \theta^2} < 0$$

Bazı durumlarda analitik çözüm elde edilebilirken, bazı durumlarda bu mümkün olmamaktadır. Analitik çözüm elde edilemediği durumlarda en çok olabilirlik tahmin edicisinin biçimsel hali (kapalı formu) bilinmemektedir. Başka bir deyişle örneklemin bir fonksiyonu olarak açık biçimde yazımı mümkün olmamaktadır. Bu gibi durumlarda optimizasyon problemi belirli algoritmalarla çözümlenerek parametrenin tahmini elde edilebilmektedir.

2.6.1 EÇO'nun değişmezlik özelliği

$\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ 'nin EÇO tahmin edicisini göstermek üzere $\tau = (\tau_1(\theta), \dots, \tau_r(\theta))$ 'nin EÇO tahmin edicisi $\hat{\tau} = (\tau_1(\hat{\theta}), \dots, \tau_r(\hat{\theta}))$, $1 \leq r \leq k$ dir. Eğer τ bir birebir dönüşümü gösterirse o zaman yeniden parametrelendirilmiş olabilirlik fonksiyonu tanımlanabilir ve τ 'nin EÇO tahmin edicisi θ 'nın EÇO tahmin edicisinin dönüşümü ile elde edilir. Dönüşümün birebir olmaması durumunda da τ ile ilgili olabilirlik fonksiyonunu tek parametre durumuna benzer bir yolla genişletmek gerekir (Bain, 1992).

2.6.2 Regülerlik (düzgünlük) şartları

$\mathcal{F} = \{f(\cdot; \theta), \theta \in S \subseteq \mathbb{R}\}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının bir ailesi olmak üzere,

- i. f 'nin $D_f = \{x \in \mathbb{R}; f(x) > 0\}$ destek kümesi θ 'ya bağlı değil,
- ii. S parametre kümesi, $\mathbb{R}$ üzerinde bir açık aralık,
- iii. Her $S \in \Omega$ için $(\partial/\partial\theta) f(x; \theta)$ vardır.
- iv. $I(\theta) = E_\theta[(\partial/\partial\theta) \ln f(X; \theta)]^2$ Fisher informasyonu sıfırdan büyük ve sonludur yani, $0 < I(\theta) < \infty$,
- v. Sürekli dağılımlarda $\frac{\partial}{\partial\theta} \int_{D_f} f(x; \theta) dx = \int_{D_f} \frac{\partial}{\partial\theta} f(x; \theta) dx$ ve kesikli dağılımlarda

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{D_f} f(x; \theta) = \sum_{D_f} \frac{\partial}{\partial\theta} f(x; \theta)$$

ile verilen şartları sağlayan $\mathcal{F}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının ailesine regülerdir denir (Nguyen ve Rogers, 1989).

2.7 En Çok Olabilirlik Oranına Dayalı T -İstatistiği

En çok olabilirlik oranına dayalı T -istatistiği bir veri setine uygun en iyi modelin seçilmesinde literatürde sıkça kullanılan bir yöntemdir.

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ örneklemeine ilişkin uygun olabileceği düşünülen dağılım fonksiyonları F_1 ve F_2 olsun. Uygun dağılımın ne olduğu henüz bilinmiyor. Bu çalışmada F_1 dağılımının parametrelerinin θ_k , $k = 1, \dots, h$ ve F_2 dağılımının parametrelerinin η_j , $j = 1, \dots, r$ olduğu varsayalım. Örneklemin F_1 ve F_2 dağılım fonksiyonlarına dayalı olarak yazılan olabilirlik fonksiyonları sırasıyla

$$L_{F_1}(\theta) = \prod_{i=1}^n f_1(x_i; \theta_k), \quad k = 1, \dots, h$$

ve

$$L_{F_2}(\eta) = \prod_{i=1}^n f_2(x_i; \eta_j), \quad j = 1, \dots, r$$

dir, burada f_1 ve f_2 sırasıyla F_1 ve F_2 dağılım fonksiyonlarının olasılık yoğunluk fonksiyonlarıdır. En çok olabilirlik oranına dayalı T -istatistiği

$$T = \ln \left(\frac{L_{F_1}(\hat{\theta}_k)}{L_{F_2}(\hat{\eta}_j)} \right)$$

ile verilir, burada $(\hat{\theta}_k, \hat{\eta}_j)$, (θ_k, η_j) , $k = 1, \dots, h$, $j = 1, \dots, r$ parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleridir. Dağılım fonksiyonları F_1 ve F_2 için karar kuralı ise şöyledir: Eğer $T > 0$ ise F_1 , aksi durumda F_2 dağılım fonksiyonu ilgili örneklemin modellenmesi için önerilir. (Bain ve Engelhardt, 1980).

3. BAZI SAYMA SÜREÇLERİ

Bu bölümde ilk olarak sayma süreci açıklanacak devamında homojen olmayan Poisson süreci, yenileme süreci ve geometrik süreç tanımları verilecektir.

3.1 Sayma Süreci

$N(t)$, $(t \geq 0)$ $(0, t]$ aralığında $(t$ anına kadar) gerçekleşen belli türden olayların sayısını ifade etmek üzere $\{N(t), t \geq 0\}$ stokastik sürecine sayma süreci denir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. Her $t \geq 0$ için $N(t) \geq 0$
2. $N(t)$ negatif değerler almayan tam sayı değerli bir rasgele değişkendir.
3. Eğer $s < t$ ise $N(s) \leq N(t)$ 'dir.
4. $s < t$ için $N(t) - N(s)$, $(s, t]$ aralığında gerçekleşen olay sayısıdır.

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecinde X_1 rasgele değişkeni ilk olay zamanını tarif etsin. X_k rasgele değişkeni $(k - 1)$. olay gerçekleştikten sonra k .olay gerçekleşene kadar geçen zaman olmak üzere; $\{X_k, k = 1, 2, 3, \dots\}$ dizisine $\{N(t), t \geq 0\}$ sürecinin olaylar arası geçen zamanları dizisi denir. Bu olaylar arası geçen zaman dizisi ile sayma süreci tek olarak belirlenir. $S_0 = 0$ olmak üzere $S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$, $k = 1, 2, \dots$ olsun. S_k , $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine ilişkin k . olay için gerçekleşme zamanını gösterir. $t \geq 0$ için $N(t) = \max\{k: S_k \leq t\}$ olduğu açıktır.

3.2 Homojen Olmayan Poisson Süreci

Tanım 3.2.1 $\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olmak üzere $t \geq 0$ için $\lambda(t)$ negatif değerler almayan t 'nin bir fonksiyonu olsun.

- i. $N(0) = 0$
- ii. $\{N(t), t \geq 0\}$ bağımsız artışı,

- iii. $P(N(t + h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$
- iv. $P(N(t + h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

özelliklerine sahip $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonlu homojen olmayan Poisson süreci denir.

Homojen olmayan Poisson süreci güvenilirlikte ve tamir edilebilir sistemlerin bozulma süreçlerinin incelenmesinde yaygın olarak kullanılır.

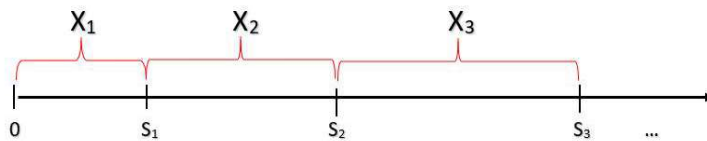
3.3 Yenileme Süreci

$X_1, X_2, X_3, \dots$ negatif değerler almayan bağımsız ve aynı F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olsun.

$k = 1, 2, \dots$ için $S_0 = 0$ ve $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$ olmak üzere $N(t) = \sup\{k: S_k \leq t\}$ ile tanımlanan $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci bir yenileme süreci olarak ifade edilir. Her sabit $t \geq 0$ için $N(t)$ yenileme rasgele değişkeni olarak adlandırılır.

$N(t)$, $(0, t]$ aralığında gerçekleşen belli bir türden yenilemeleri sayan, negatif değerler almayan, tamsayı değerli bir rasgele değişkendir. Her sabit $t \geq 0$ için sonludur.

Ayrıca $\{N(t) \geq n\}$ olayı $\{S_n \leq t\}$ olayıyla denk olduğu için $P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t)$ dir.



Şekil 3.1 Yenileme sürecinin bir gerçeklenişi

Burada X_1 , ilk yenileme zamanını, X_k , $(k - 1)$.yenileme gerçekleştikten sonra k .yenileme gerçekleşinceye kadar geçen zamanı ve S_k , k .yenileme zamanını ifade eder.

Matematiksel olarak bir yenileme sürecine negatif değerler almayan, bağımsız, aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ dizisi olarak bakılabilir.

Bu durumda $S_0 = 0$, $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$, $k = 1, 2, \dots$ ile verilen k .varış zamanının dağılım fonksiyonu $F^{k*}(t)$ ile verilmektedir. Burada $*$ işlemi F fonksiyonunun kendisi ile k kez konvolüsyonunu ifade eder.

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere $N(t)$ rasgele değişkenine ait olasılık dağılımı

$$\begin{aligned} P(N(t) = k) &= P(N(t) \geq k) - P(N(t) \geq k + 1) \\ &= P(S_k < t) - P(S_{k+1} \leq t) \\ &= F^{k*}(t) - F^{(k+1)*}(t), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

ile verilir.

3.4 Geometrik Süreç

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun. Bu sayma sürecine göre gerçekleşen ilk olay zamanı X_1 ve X_k , $(k - 1)$. ve k .olaylar arasında geçen zamanı göstermek üzere $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ rasgele değişkenlerinin bir dizisi bağımsız ve aynı dağılımlı olacak şekilde

bir $a > 0$ gerçek sayısı varsa $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ dizisi üzerinde kurulan $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci a oranlı bir geometrik süreç olarak ifade edilir.

Geometrik süreç stokastik anlamda monotonluk özelliğine sahiptir. Öyle ki $0 < a < 1$ olduğu durumda geometrik süreç stokastik olarak artandır, $a > 1$ olduğu durumda ise stokastik olarak azalandır ve $a = 1$ iken geometrik süreç bir yenileme sürecine dönüşür (Lam, 1988).

3.4.1 Geometrik sürecin olaylar arası geçen zamanlarının dağılım fonksiyonu, beklenen değeri ve varyansı

$\{N(t), t \geq 0\}$, a oranlı ve ilk olayın gerçekleşme zamanının dağılımı F olan bir geometrik süreç olsun.

Oran parametresi a 'nın 1'e eşit olması rasgele değişkenlerin aynı dağılımlı olduğunu ifade eder ve geometrik süreç bir yenileme sürece dönüşmüş olur. $Y_k = a^{k-1}X_k, k = 1, 2, \dots$ olmak üzere $\{Y_k, k = 1, 2, \dots\}$ rasgele değişken dizisinde olaylar arası geçen zamanların dağılım fonksiyonu F ve dağılım fonksiyonu için ortalama μ ve varyans σ^2 olsun. Bu durumda X_k rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu tek olarak belirlenebilir. Böylece X_k rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_{X_k}(x) &= P(X_k \leq x) \\ &= P(a^{k-1}X_k \leq a^{k-1}x) \\ &= P(Y_k \leq a^{k-1}x) \\ &= F(a^{k-1}x), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (*)$$

dir. Ayrıca μ ve σ^2 sırasıyla X_1 rasgele değişkeninin beklenen değer ve varyansı olmak üzere

$$\begin{aligned} E(X_k) &= a^{-k+1}\mu \\ Var(X_k) &= a^{2-2k}\sigma^2 \end{aligned}$$

4. UYARLANMIŞ WEIBULL DAĞILIMI

Birçok yaşam dağılımının küvet şekli (bathtub-shaped) bozulma oran fonksiyonu vardır ve birçok gerçek yaşam verisi bu özelliği gösterir. Weibull dağılımı olasılık ve istatistiğin çok çeşitli alanlarında, özellikle, güvenilirlik mühendisliği gibi alanlarda elde edilen verilerin modellenmesinde kullanılır. Bununla birlikte son zamanlarda popüleritesi artan uyarlanmış Weibull dağılımı da önemli yaşam dağılımları arasında yerini almıştır. Bu bölümde geleneksel Weibull dağılımının genelleştirilmiş hali olarak ilk kez Lai (2003) tarafından tanıtilan uyarlanmış Weibull dağılımı tanıtılacaktır.

Bir T rasgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F(t; \alpha, b, \lambda) = 1 - e^{-\alpha t^b e^{\lambda t}}, \quad t > 0, \alpha > 0, b \geq 0, \lambda > 0 \quad (4.1)$$

ve karşılık gelen olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t; \alpha, b, \lambda) = \alpha(b + \lambda t)t^{b-1}e^{\lambda t}e^{-\alpha t^b e^{\lambda t}}, \quad t > 0, \alpha > 0, b \geq 0, \lambda > 0 \quad (4.2)$$

ise T rasgele değişkenine α , b ve λ parametreleri ile uyarlanmış Weibull dağılımına sahiptir denir ve $T \sim MWD(\alpha, b, \lambda)$ ile gösterilir. Burada α ölçek parametresi iken b ve λ şekil parametreleridir.

$T \sim MWD(\alpha, b, \lambda)$ için T rasgele değişkeninin bozulma oran fonksiyonu

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \alpha(b + \lambda t)t^{b-1}e^{\lambda t}$$

dir.

4.1 İstatistiksel Özellikler

Bu bölümde, uyarlanmış Weibull dağılımının bazı temel istatistiksel özelliklerinden bahsedilecektir.

4.1.1 Çeyreklik ve medyan

$MWD(\alpha, b, \lambda)$ 'nın q . çeyrekliği x_q aşağıdaki denklem ile ifade edilir.

$$\alpha x_q^b e^{\lambda x_q} + \ln(1 - q) = 0$$

Yukarıdaki denklemden de anlaşılacağı üzere uyarlanmış Weibull dağılımının q . çeyrekliği x_q 'nin açık analitik ifadesi yoktur. Herhangi bir sayısal yöntem kullanılarak q . çeyrekliği x_q değerleri hesap edilebilir. Denklem sistemi $q = 0.5$ için çözüldüğünde $MWD(\alpha, b, \lambda)$ 'nın medyanını ifade eder.

4.1.2 Mod

$MWD(\alpha, b, \lambda)$ 'nın modu aşağıda verilen x 'e bağlı doğrusal olmayan denklemin çözümü ile elde edilir.

$$\begin{aligned} &\alpha \lambda t^{b-1} e^{\lambda t - \alpha t^b} + \alpha(b + \lambda t)(b - 1)t^{b-2} e^{\lambda t - \alpha t^b} \\ &+ \alpha(b + \lambda t)t^{b-1} e^{\lambda t - \alpha t^b} (\lambda - \alpha \lambda t^b e^{\lambda t} - \alpha b t^{b-1} e^{\lambda t}) = 0 \end{aligned}$$

Denklemin açık analitik ifadesi yoktur. Ancak bazı özel durumlardan bahsedilebilir. Bu durumlardan biri $\lambda = 0$ ve parametreleri (α, b) olan $F(t) = 1 - e^{-\alpha t^b}$ dağılım fonksiyonuna sahip Weibull dağılımı durumudur. Bu durumda denklem,

$$e^{-\alpha t^b} (\alpha b(b - 1)t^{b-2} - \alpha^2 b^2 t^{2(b-1)}) = 0$$

halini alır. Açıktır ki denklemini sağlayan çözümler $t = 0$ ya da $t = \left(\frac{\alpha-1}{b\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ dır. $t > 0$ olduğundan

$$Mod(T) = \left(\frac{\alpha - 1}{b\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

olarak bulunur.

4.1.3 Momentler

T rasgele değişkeni parametreleri (a, b, λ) olan uyarlanmış Weibull dağılımına sahip olsun. μ_k merkezi olmayan momenti ifade etmek üzere

$$\mu_k = \int_0^{\infty} x^k f(x) dx$$

ile verilir.

$T \sim MWD(\alpha, b, \lambda)$ için T rasgele değişkeninin beklenen değerinin ve varyansının momentler yardımıyla $E(T) = \mu$ ve $Var(T) = \mu_2 - \mu_1^2 = \sigma^2$ olduğu açıktır.

μ_k merkezi olmayan momenti için bazı durumlarda aşağıdaki eşitsizlik oldukça kullanışlıdır.

$t \geq 0$ için $\bar{F}(t) \leq e^{-\alpha t^b}$ olduğundan

$$\mu_k \leq k \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-\alpha t^b} dt = \frac{k}{\alpha^{k/b} b} \int_0^{\infty} t^{k/b-1} e^{-t} dt = \frac{k}{\alpha^{k/b} b} \Gamma(k/b)$$

olur ve μ_k sonlu ve pozitif bir değerdir (Hong, 2010).

Uyarlanmış Weibull dağılımının aşağıdaki özelliği bu dağılımın merkezi momentlerinin elde edilmesinde oldukça kullanışlıdır.

Lemma 4.1. T rasgele değişkeni parametreleri (a, b, λ) olan uyarlanmış Weibull dağılımına sahip olsun. $Y = \lambda T$ ölçek dönüşümü ile verilen rasgele değişken parametreleri $(a/\lambda^b, b, 1)$ olan uyarlanmış Weibull dağılımıdır (Hong, 2010).

İspat: $T \sim MWD(\alpha, b, \lambda)$ için T rasgele değişkeninin beklenen değeri μ ve varyansı σ^2 olsun. $Y = \lambda T$ ölçek dönüşümü ile verilen rasgele değişken için

$$\begin{aligned} P(\lambda T > t) &= P\left(T > \frac{t}{\lambda}\right) \\ &= \exp\left\{-\alpha \left(\frac{t}{\lambda}\right)^b e^{\lambda \frac{t}{\lambda}}\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{\alpha}{\lambda^b} t^b e^t\right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu durumda Y rasgele değişkeninin parametreleri $(\alpha/\lambda^b, b, 1)$ olan uyarlanmış Weibull dağılımına sahip olduğu ortaya çıkar. Açık ki Y rasgele değişkeni ortalamayı orantısal olarak değiştirirken, varyansı karesel olarak değiştirir. Bununla birlikte çarpıklık ve basıklık katsayıları değişmeden aynı kalır. Daha açık bir deyişle:

$$\mu^* = E(\lambda T) = \lambda E(T) = \lambda \mu$$

$$\sigma^{*2} = E\{\lambda T - E(\lambda T)\}^2 = \lambda^2 E\{T - E(T)\}^2 = \lambda^2 \sigma^2$$

$$\gamma_1^* = \frac{\mu_3^*}{(\mu_2^*)^{\frac{3}{2}}} = \frac{E\{\lambda T - E(\lambda T)\}^3}{\sigma^{*3}} = \frac{\lambda^3 E\{T - E(T)\}^3}{\lambda^3 \sigma^3} = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{\frac{3}{2}}} = \gamma_1$$

$$\gamma_2^* = \frac{\mu_4^*}{(\mu_2^*)^2} - 3 = \frac{E\{\lambda T - E(\lambda T)\}^4}{\sigma^{*4}} - 3 = \frac{\lambda^4 E\{T - E(T)\}^4}{\lambda^4 \sigma^4} - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \gamma_2$$

dır. (Hong, 2010).

4.1.4 Moment çıkaran fonksiyon

$X \sim MWD(\alpha, b, \lambda)$ olsun. X rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} f(x) dx = \int_0^\infty e^{tx} \alpha(b + \lambda x) x^{b-1} e^{\lambda x} e^{-\alpha x^b e^{\lambda x}} dx$$

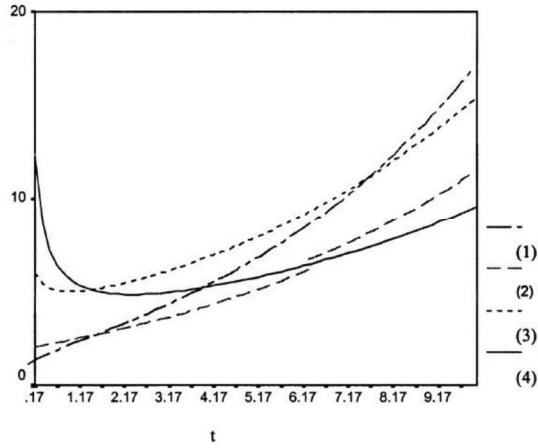
olarak verilir.

Şimdi MWD dağılımının beklenen değerinin ve varyansının belirli parametre değerleri için sayısal olarak hesaplayarak bir değerlendirmesini yapalım. Ölçeklendirme etkisini ihmal ederek λ parametresini 2 olarak aldığımızda α ve b parametrelerinin aldığı farklı değerler için elde edilen beklenen değere ve varyansa ait sayısal değerleri Çizelge 4.1’de sunulmuştur. İlgili hesaplamalar bir paket program olan Mathematica ile yapılmıştır.

Çizelge 4.1 Farklı parametre değerleri karşısında uyarlanmış Weibull dağılımının beklenen değer ve varyansları

$\alpha \backslash b$		0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0
0.1	$E(X)$	0.9183	0.9240	0.9364	0.9482	0.9597	0.9729
	$V(X)$	0.2518	0.2313	0.1835	0.1320	0.0782	0.0277
0.2	$E(X)$	0.6313	0.6491	0.6921	0.7418	0.8017	0.8799
	$V(X)$	0.1897	0.1751	0.1405	0.1027	0.0628	0.0238
0.5	$E(X)$	0.3117	0.3411	0.4154	0.5054	0.6175	0.7672
	$V(X)$	0.0976	0.0940	0.0825	0.0659	0.0445	0.0192
1.0	$E(X)$	0.1395	0.1693	0.2514	0.3583	0.4975	0.6895
	$V(X)$	0.0403	0.0427	0.0452	0.0423	0.0328	0.0162
2.0	$E(X)$	0.0415	0.0624	0.1330	0.2409	0.3943	0.6181
	$V(X)$	0.0094	0.0123	0.0193	0.0242	0.0232	0.0135
5.0	$E(X)$	0.0026	0.0080	0.0441	0.1303	0.2827	0.5330
	$V(X)$	0.0002	0.0007	0.0037	0.0094	0.0137	0.0105

Uyarlanmış Weibull dağılımına ilişkin bozulma fonksiyonunda parametrelere verilen farklı değerler ile çizdirilen grafik Şekil 4.3’te verilmiştir. Şekil 4.3’te görüldüğü üzere klasik yaşam dağılımı olan küvet şekli (bathtub-shaped) korunmuştur.



- (1) $b = 1.4, \alpha = 1, \lambda = 1$ (2) $b = 1, \alpha = 2, \lambda = 1,$
 (3) $b = 0.8, \alpha = 5, \lambda = 1$ (4) $b = 0.4, \alpha = 10, \lambda = 1$

Şekil 4.1 Uyarlanmış Weibull bozulma fonksiyonu

4.2 Uyarlanmış Weibull Dağılımının Diğer Dağılımlarla İlişkisi

Uyarlanmış Weibull dağılımının Weibull dağılımının genelleştirilmiş hali olduğundan bahsedildi.

$\lambda = 0$ olduğu durumda uyarlanmış Weibull dağılımı, (2-parametrelili) Weibull dağılımına dönüşür. Bu dağılımın olasılık fonksiyonu,

$$\bar{F}(t) = e^{-at^b}$$

olarak verilir.

$b = 0$ olduğu durumda uyarlanmış Weibull dağılımı, Log-Gamma dağılımına dönüşür. Bu dağılımın olasılık fonksiyonu,

$$\bar{F}(t) = e^{-\alpha e^{\lambda t}}$$

olarak verilir. Buna tip 1 ekstrem-değer dağılımı ya da Log-Weibull dağılımı da denir. Literatüre bakıldığında tip 1 ekstrem-değer dağılımının yaşam dağılımlarının modellenmesinde yaygın olarak tercih edilmediği görülmüştür.



5. UYARLANMIŞ WEIBULL GEOMETRİK SÜRECİ

Bu bölümde $\{N(t), t \geq 0\}$ geometrik sürecine göre ilk olaya ilişkin gerçekleşme zamanı X_1 rasgele değişkeninin parametreleri α , b ve λ olan uyarlanmış Weibull dağılımından seçilmesi halinde oluşturulan geometrik süreç üzerinde durulacaktır. Yeniden hatırlatmakta fayda var ki, bu geometrik sürece özel olarak uyarlanmış Weibull geometrik süreci adı verilir.

$\{N(t), t \geq 0\}$, ilk olay zamanının dağılımı, parametreleri α , b ve λ olan uyarlanmış Weibull dağılımı olan a oran parametresi ile bir geometrik süreç olsun. Bu durumda ilk olay zamanı X_1 rasgele değişkeninin dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları sırasıyla (4.1) ve (4.2) olmak üzere ve (*) ifadesinde verilen ilişki yardımıyla X_k rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X_k}(x) = F(a^{k-1}x) = 1 - e^{-\alpha(a^{k-1}x)^b e^{\lambda(a^{k-1}x)}}, \quad x > 0, a > 0, \alpha > 0, b \geq 0, \lambda > 0$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_k}(x) = \alpha(b + \lambda a^{k-1}x)(a^{k-1}x)^{b-1} e^{\lambda a^{k-1}x} e^{-\alpha(a^{k-1}x)^b e^{\lambda(a^{k-1}x)}}, \quad x > 0$$

ile verilir. Bununla birlikte X_k rasgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı ise $E(X_1) = \mu$ ve $Var(X_1) = \sigma^2$ olmak üzere $E(X_k) = a^{-k+1}\mu$ ve $Var(X_k) = a^{2-2k}\sigma^2$ olacağı açıktır.

Bir geometrik sürecin tam olarak karakterize edilebilmesi için ilgili parametrelerinin tahmin edilmesi gerekmektedir. Bir sonraki alt bölümde model parametrelerinin tahmin edilmesi problemi üzerinde durulacaktır.

5.1 En Çok Olabilirlik Tahmini

Bu bölümde ilk olayın gerçekleşme zamanı X_1 rasgele değişkeninin uyarlanmış Weibull dağılımından seçilmesi halinde geometrik sürecin olabilirlik denklemi elde edilecektir.

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ örnekleme a oran parametrelili geometrik sürece ve bu sürecin ilk olay zamanı X_1 rasgele değişkeninin parametreleri α , b ve λ olan uyarlanmış Weibull dağılımına sahip olduğu varsayımı altında en çok olabilirlik denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} L(a, \alpha, b, \lambda) &= \prod_{i=1}^n a^{i-1} f(a^{i-1} x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n [\alpha (ba^{i-1} + \lambda a^{2(i-1)} x_i) (a^{i-1} x_i)^{b-1} e^{\lambda a^{i-1} x_i} e^{-\alpha (a^{i-1} x_i)^b e^{\lambda (a^{i-1} x_i)}}] \\ &= \alpha^n \prod_{i=1}^n [(ba^{i-1} + \lambda a^{2(i-1)} x_i) (a^{i-1} x_i)^{b-1} e^{\lambda \sum_{i=1}^n a^{i-1} x_i} e^{-\alpha \sum_{i=1}^n (a^{i-1} x_i)^b e^{\lambda (a^{i-1} x_i)}}] \end{aligned}$$

Bu ifadenin logaritması alındığında log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \ln L(a, \alpha, b, \lambda) &= n \ln[\alpha] + \sum_{i=1}^n \ln [(ba^{i-1} + \lambda a^{2(i-1)} x_i) (a^{i-1} x_i)^{b-1}] \\ &\quad + \lambda \sum_{i=1}^n [a^{i-1} x_i] - \alpha \sum_{i=1}^n [(a^{i-1} x_i)^b e^{\lambda (a^{i-1} x_i)}] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Log-olabilirlik fonksiyonunun ilgili parametrelere göre birinci türevleri alınarak sıfıra eşitlendiğinde olabilirlik denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial a} &= \sum_{i=1}^n \frac{\lambda a^{(i-1)(b+1)} x_i^b}{ba^{(i-1)b} x_i^{b-1} + \lambda a^{(i-1)(b+1)} x_i^b} + \lambda \sum_{i=1}^n (i-1) a^{i-2} x_i \\ &\quad - \alpha \sum_{i=1}^n [(b(a^{i-1} x_i)^{b-1} (i-1) a^{i-2} x_i) e^{\lambda (a^{i-1} x_i)} \\ &\quad + (i-1)(a^{i-2}) \lambda x_i e^{\lambda (a^{i-1} x_i)} (a^{i-1} x_i)^b] = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \left((a^{i-1} x_i)^b e^{\lambda(a^{i-1} x_i)} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial b} = \sum_{i=1}^n \frac{(a^{i-1})(a^{i-1} x_i)^{b-1} + (a^{i-1} x_i)^{b-1} \log[a^{i-1} x_i] (b a^{i-1} + \lambda a^{2(i-1)} x_i)}{(b a^{i-1} + \lambda a^{2(i-1)} x_i) (a^{i-1} x_i)^{b-1}} \\ - \alpha \sum_{i=1}^n \left[(a^{i-1} x_i)^b \log[b] e^{\lambda(a^{i-1} x_i)} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{a^{(i-1)(b+1)} x_i^b}{b a^{(i-1)b} x_i^{b-1} + \lambda a^{(i-1)(b+1)} x_i^b} + \sum_{i=1}^n (a^{i-1} x_i) = 0$$

biçiminde elde edilir. Yukarıda verilen olabilirlik denklemlerinden parametrelere ilişkin EÇO tahmin edicileri analitik olarak elde edilememektedir. Bu yüzden en çok olabilirlik fonksiyonunun sayısal olarak çözdürülmesi gerekmektedir. Yukarıda gösterilen log-olabilirlik fonksiyonu, parametrelerin en çok olabilirlik tahminlerini elde etmek amacıyla lineer olmayan optimizasyon tekniği ile direkt olarak maksimize edilebilir. Lineer olmayan optimizasyon tekniğini kullanan birçok paket program mevcuttur. Bu çalışmada Mathematica paket programında yer alan NMaximize altıyordamı yardımıyla log-olabilirlik fonksiyonunun ($\ln L$) maksimizasyonu ile en çok olabilirlik tahminlerini hesaplanacaktır.

Varsayalım ki $\hat{a}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{b}$ ve $\hat{\lambda}$ tahmin edicileri sırasıyla a , α , b ve λ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri olsun. Bir kez daha vurgulamakta fayda vardır ki bu tahmin ediciler olabilirlik fonksiyonunun istatistiksel bir paket programı yardımıyla maksimize edilmesiyle bulunmaktadır. En çok olabilirlik tahmin edicilerinin ortak dağılımı (a, α, b, λ) ortalama vektörü ve V^{-1} varyans kovaryans matrisi ile asimptotik olarak normal dağılmaktadır (Barndorff-Nielsen ve Cox, 1994). Yani,

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{b} \\ \hat{\lambda} \end{pmatrix} \sim AN \left(\begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ b \\ \lambda \end{pmatrix}, V^{-1} \right) \quad (5.1)$$

dir. Burada V^{-1} Fisher bilgi matrisinin tersidir ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$V = \begin{bmatrix} -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} \right) & -E \left(\frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \right) & -E \left(\frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial \ln L}{\partial b} \right) & -E \left(\frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} \right) \\ -E \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \ln L}{\partial a} \right) & -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} \right) & -E \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \ln L}{\partial b} \right) & -E \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} \right) \\ -E \left(\frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial \ln L}{\partial a} \right) & -E \left(\frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \right) & -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2} \right) & -E \left(\frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} \right) \\ -E \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial \ln L}{\partial a} \right) & -E \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \right) & -E \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial \ln L}{\partial b} \right) & -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} \right) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlıdır. Burada bilgi matrisinin elemanları analitik olarak hesap edilemeyen beklenen değerlere bağlı olduğundan dolayı kendisi de analitik olarak bulunamamaktadır. Ancak beklenen değerler sayısal olarak hesap edilebildiğinden dolayı Fisher bilgi matrisinin elemanları da sayısal olarak hesap edilebilir.

6. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde geometrik sürecin a oranı için önerilen $\hat{a}$ ve uyarlanmış Weibull dağılımının parametreleri için önerilen $\hat{\alpha}$, $\hat{b}$, $\hat{\lambda}$ tahmin edicilerinin performansları simülasyon çalışması ile incelenecektir.

Yan ve HKO değerleri tahmin edicilerin performansını değerlendirmek amacıyla kullanılacaktır. Pratikte sık sık a 'nın bire yakın olan değerlerinin kullanıldığı gözlenmiştir. Bu yüzden bu çalışmada $a = 0.90, 0.95, 0.99, 1.01, 1.05, 1.10$ değerleri seçilmiştir (Lam, 2007). Ayrıca tahmin edicilerin bazı küçük örneklem özelliklerini incelemek adına örneklem hacmi n sırasıyla 10, 20, 30 alınmıştır. Tüm çizelgeler 1000 simülasyon üzerine kurulmuştur. Uyarlanmış Weibull ($\alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$) ve ($\alpha = 1, b = 1, \lambda = 2$) durumlarında geometrik sürecin a oranı ve dağılım parametreleri için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO değerleri Çizelge 6.1 ve Çizelge 6.2'de verilip HKO değerlerinin değişimlerini gösteren grafikler Şekil 6.1-6.8'de sunulacaktır.

6.1 Simülasyon Yoluyla Uyarlanmış Weibull Geometrik Sürecinden Sayı Üretilmesi

Uyarlanmış Weibull geometrik sürecinden n birimlik bir rasgele örneklem simülasyon yoluyla aşağıdaki biçimde üretilir.

α , b ve λ parametreleriyle uyarlanmış Weibull dağılımdan gelen $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ rasgele örnekleme Bölüm 2.5'te verilen dönüşüm yöntemi yardımıyla şu şekilde üretilir: Y_k rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu (4.1) ile verildiğinden bu dağılım fonksiyonunun tersi alınarak

$$\ln\left(-\frac{1}{\alpha}\ln[1-U]\right) = b \ln(Y_k) + \lambda(Y_k)$$

denklemleri elde edilir. Burada $U \sim U(0,1)$ dir. $(0,1)$ aralığında düzgün dağılıma sahip rasgele değişkenden rasgele bir sayı üretilerek yukarıdaki denklemde yerine yazılır. Bu denklem Mathematica programında verilen “Solve” komutu ile çözdürülerek Y_k değerine ulaşılır. Böylece Y_k rasgele değişkeninin dağılımından bir tane sayı üretilmiş olur. Bu işlem n kez tekrar edilerek simülasyon yoluyla uyarlanmış Weibull dağılımından n birimlik örneklem üretilmiş olacaktır. Üretilen Y_k değerleri ve geometrik sürecin oran parametresi a ’nın kullanılmasıyla yani $X_k = \frac{Y_k}{a^{k-1}}, k = 1, 2, \dots, n$ dönüşümü ile uyarlanmış Weibull geometrik sürecinin bir gerçekleşişi $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ gözlenmiş olacaktır.

Uyarlanmış Weibull durumunda geometrik sürecin a oran parametresi ve dağılımın parametreleri için hesaplanan tahmin değerleri, yan ve HKO değerleri aşağıdaki Çizelge 6.1-6.2 ‘de sunulmaktadır.

Çizelge 6.1 Uyarlanmış Weibull ($\alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$) durumunda geometrik sürecin a oran parametresi ve dağılımın parametreleri için önerilen tahmin edicilere ilişkin Yan ve HKO değerleri

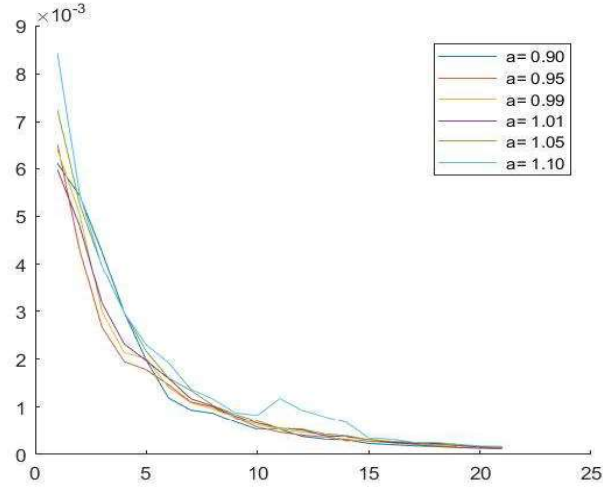
$a = 0.90, \alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$					$a = 0.95, \alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$				
n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO	n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO
10	$\hat{a}$	0.9045	0.0045	0.0061	10	$\hat{a}$	0.9523	0.0023	0.0065
	$\hat{\alpha}$	1.4266	0.9266	14.1672		$\hat{\alpha}$	1.4588	0.9588	9.7862
	$\hat{b}$	0.7650	0.2650	0.4005		$\hat{b}$	0.7774	0.2774	0.4277
	$\hat{\lambda}$	2.7081	0.7081	6.4352		$\hat{\lambda}$	2.6243	0.6243	6.7825
20	$\hat{a}$	0.9004	0.0004	0.0004	20	$\hat{a}$	0.9495	-0.0005	0.0005
	$\hat{\alpha}$	0.7533	0.2533	0.9262		$\hat{\alpha}$	0.7657	0.2657	0.9941
	$\hat{b}$	0.6213	0.1213	0.1475		$\hat{b}$	0.6361	0.1361	0.1611
	$\hat{\lambda}$	2.1849	0.1849	1.225		$\hat{\lambda}$	2.2473	0.2473	1.4076

Çizelge 6.1 Uyarlanmış Weibull ($\alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$) durumunda geometrik sürecin a oran parametresi ve dağılımın parametreleri için önerilen tahmin edicilere ilişkin Yan ve HKO değerleri (devamı)

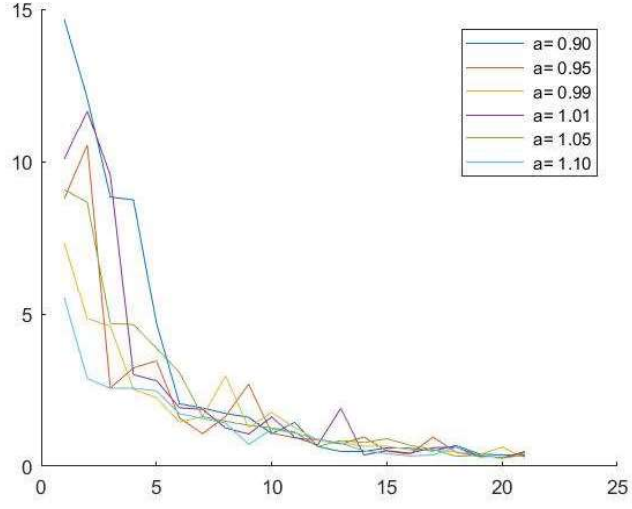
$a = 0.90, \alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$					$a = 0.95, \alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$				
n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO	n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO
30	$\hat{a}$	0.9004	0.0004	0.0001	30	$\hat{a}$	0.9504	0.0005	0.0001
	$\hat{\alpha}$	0.6492	0.1492	0.3710		$\hat{\alpha}$	0.6726	0.1726	0.3437
	$\hat{b}$	0.5845	0.08	0.0889		$\hat{b}$	0.6098	0.1098	0.1069
	$\hat{\lambda}$	2.0986	0.0986	0.6715		$\hat{\lambda}$	2.0254	0.0254	0.6369
$a = 0.99, \alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$					$a = 1.01, \alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$				
n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO	n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO
10	$\hat{a}$	0.9930	0.0030	0.0064	10	$\hat{a}$	1.0102	0.0002	0.0059
	$\hat{\alpha}$	1.4024	0.9024	7.3435		$\hat{\alpha}$	1.2822	0.7822	10.0860
	$\hat{b}$	0.8154	0.3154	0.6201		$\hat{b}$	0.7702	0.2702	0.4197
	$\hat{\lambda}$	2.6913	0.6913	7.6702		$\hat{\lambda}$	2.6659	0.6659	5.0754
20	$\hat{a}$	0.9908	0.0008	0.0005	20	$\hat{a}$	1.0101	0.0001	0.0005
	$\hat{\alpha}$	0.7126	0.2126	0.7169		$\hat{\alpha}$	0.7497	0.2497	0.9796
	$\hat{b}$	0.6213	0.1213	0.1464		$\hat{b}$	0.6295	0.1295	0.1701
	$\hat{\lambda}$	2.2598	0.2598	1.2916		$\hat{\lambda}$	2.2305	0.2305	1.4634
30	$\hat{a}$	0.9904	0.0004	0.0001	30	$\hat{a}$	1.0107	0.0007	0.0001
	$\hat{\alpha}$	0.6213	0.1213	0.2565		$\hat{\alpha}$	0.6662	0.1662	0.5060
	$\hat{b}$	0.5919	0.0919	0.0811		$\hat{b}$	0.5836	0.0836	0.0942
	$\hat{\lambda}$	2.1256	0.1256	0.7067		$\hat{\lambda}$	2.0748	0.0748	0.6234
$a = 1.05, \alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$					$a = 1.10, \alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$				
n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO	n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO
10	$\hat{a}$	1.0496	-0.0004	0.0072	10	$\hat{a}$	1.1049	0.0049	0.0084
	$\hat{\alpha}$	1.1963	0.6963	9.8291		$\hat{\alpha}$	1.4381	0.9381	5.1839
	$\hat{b}$	0.7612	0.2612	0.5588		$\hat{b}$	0.7645	0.2645	0.4452
	$\hat{\lambda}$	2.6686	0.6686	5.0439		$\hat{\lambda}$	2.6588	0.6588	4.9546

Çizelge 6.1 Uyarlanmış Weibull ($\alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$) durumunda geometrik sürecin a oran parametresi ve dağılımın parametreleri için önerilen tahmin edicilere ilişkin Yan ve HKO değerleri (devamı)

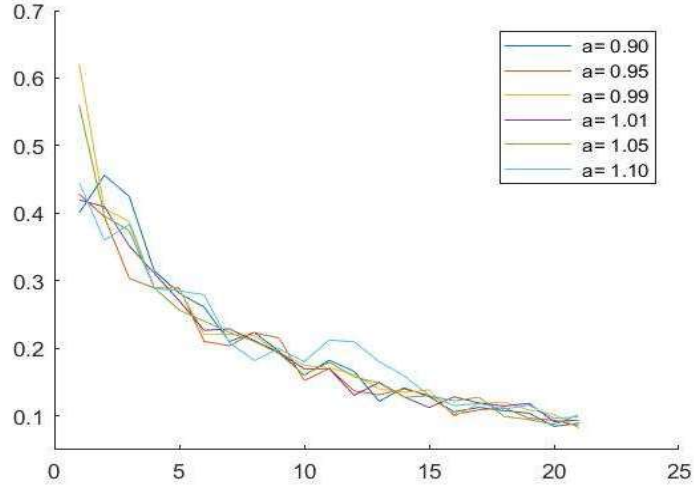
$a = 1.05, \alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$					$a = 1.10, \alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$				
n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO	n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO
20	$\hat{a}$	1.0486	-0.0014	0.0005	20	$\hat{a}$	1.0996	-0.0003	0.0006
	$\hat{\alpha}$	0.7532	0.2532	1.0098		$\hat{\alpha}$	0.7638	0.2638	1.1607
	$\hat{b}$	0.6222	0.1222	0.1609		$\hat{b}$	0.6291	0.1291	0.1590
	$\hat{\lambda}$	2.2784	0.2784	1.3273		$\hat{\lambda}$	2.2473	0.2473	1.3591
30	$\hat{a}$	1.0502	0.0002	0.0001	30	$\hat{a}$	1.0998	-0.0002	0.0001
	$\hat{\alpha}$	0.6472	0.1472	0.2574		$\hat{\alpha}$	0.6525	0.1525	0.3255
	$\hat{b}$	0.5957	0.0957	0.0856		$\hat{b}$	0.5966	0.0966	0.0985
	$\hat{\lambda}$	2.0643	0.0642	0.6046		$\hat{\lambda}$	2.1176	0.1176	0.6891



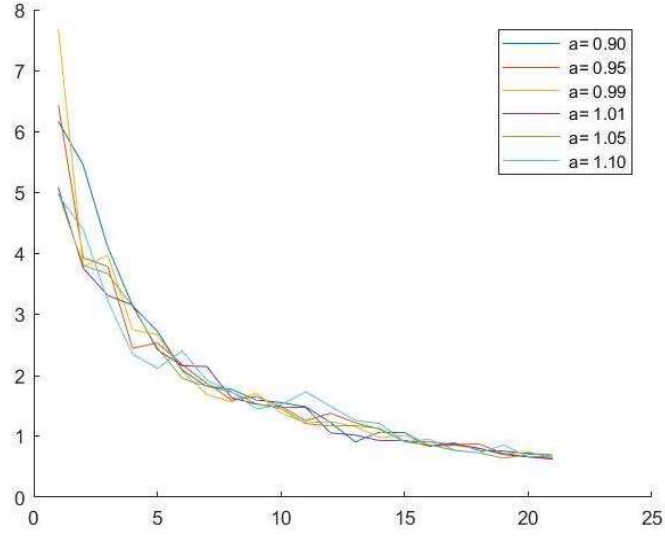
Şekil 6.1 $\hat{a}$ için değişen a oran parametreleri karşısında HKO değerleri üzerindeki değişim ($\alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$)



Şekil 6.2 $\hat{a}$ için değişen a oran parametreleri karşısında HKO değerleri üzerindeki değişim ($\alpha = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 2$)



Şekil 6.3 $\hat{b}$ için değişen a oran parametreleri karşısında HKO değerleri üzerindeki değişim ($\alpha = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 2$)



Şekil 6.4 $\hat{\lambda}$ için değişen a parametreleri karşısında HKO değerleri üzerindeki değişim ($\alpha = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2$)

Çizelge 6.2 Uyarlanmış Weibull ($\alpha = 1, b = 1, \lambda = 2$) durumunda geometrik sürecin a oran parametresi ve dağılımın parametreleri için önerilen tahmin edicilere ilişkin Yan ve HKO değerleri

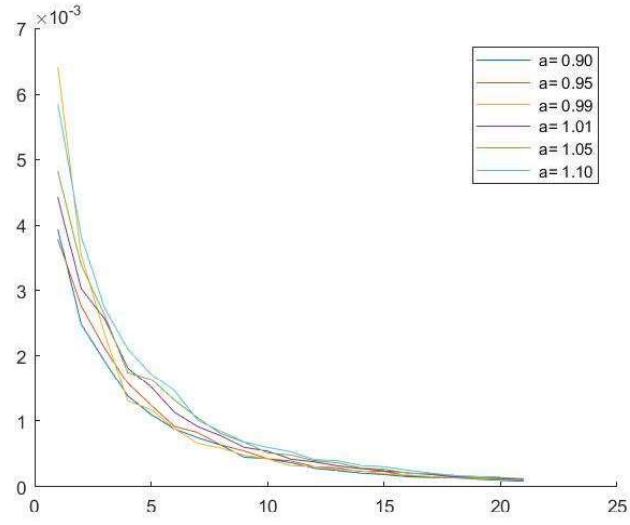
$a = 0.90, \alpha = 1, b = 1, \lambda = 2$					$a = 0.95, \alpha = 1, b = 1, \lambda = 2$				
n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO	n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO
10	$\hat{a}$	0.8994	-0.0006	0.0039	10	$\hat{a}$	0.9506	0.0006	0.0037
	$\hat{\alpha}$	4.8685	3.8685	443.07		$\hat{\alpha}$	9.5739	8.5739	472.145
	$\hat{b}$	1.2520	0.2520	0.7814		$\hat{b}$	1.2591	0.2591	0.7770
	$\hat{\lambda}$	3.2249	1.2249	9.7514		$\hat{\lambda}$	3.1256	1.1256	9.8024
20	$\hat{a}$	0.9000	$7.348e^{-7}$	0.0003	20	$\hat{a}$	0.9496	-0.0004	0.0003
	$\hat{\alpha}$	2.2122	1.2122	15.5148		$\hat{\alpha}$	2.0008	1.0008	11.1958
	$\hat{b}$	1.1725	0.1725	0.3447		$\hat{b}$	1.1463	0.1463	0.3237
	$\hat{\lambda}$	2.2711	0.2711	2.7148		$\hat{\lambda}$	2.3874	0.3874	3.1349
30	$\hat{a}$	0.9000	0.00009	0.00008	30	$\hat{a}$	0.9503	0.0003	0.0001
	$\hat{\alpha}$	1.7656	0.7656	5.3818		$\hat{\alpha}$	1.8488	0.8488	5.9540
	$\hat{b}$	1.1192	0.1192	0.2034		$\hat{b}$	1.1737	0.1737	0.2308
	$\hat{\lambda}$	2.0713	0.0713	1.2871		$\hat{\lambda}$	1.9600	-0.04	1.3841

Çizelge 6.2 Uyarlanmış Weibull ($\alpha = 1, b = 1, \lambda = 2$) durumunda geometrik sürecin a oran parametresi ve dağılımın parametreleri için önerilen tahmin edicilere ilişkin Yan ve HKO değerleri (devamı)

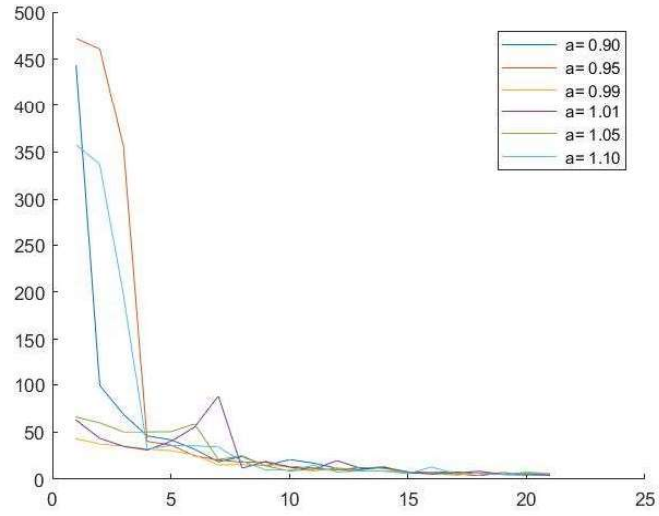
$a = 0.99, \alpha = 1, b = 1, \lambda = 2$					$a = 1.01, \alpha = 1, b = 1, \lambda = 2$				
n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO	n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO
10	$\hat{a}$	0.9936	0.0036	0.0064	10	$\hat{a}$	1.0135	0.0035	0.0044
	$\hat{\alpha}$	1.5074	0.5074	42.686		$\hat{\alpha}$	3.8930	2.8930	62.511
	$\hat{b}$	0.8049	-0.1951	0.5085		$\hat{b}$	1.2604	0.2603	0.8205
	$\hat{\lambda}$	2.5884	0.5884	4.6903		$\hat{\lambda}$	3.0539	1.0539	11.4253
20	$\hat{a}$	0.9914	0.0014	0.0003	20	$\hat{a}$	1.0101	0.0001	0.0004
	$\hat{\alpha}$	1.9355	0.9355	8.3680		$\hat{\alpha}$	2.0097	1.0097	10.2296
	$\hat{b}$	1.1554	0.1554	0.3297		$\hat{b}$	1.1483	0.1483	0.3123
	$\hat{\lambda}$	2.3135	0.3135	2.6138		$\hat{\lambda}$	2.3225	0.3225	2.6542
30	$\hat{a}$	0.9895	-0.0005	0.0001	30	$\hat{a}$	1.0105	0.0005	0.0001
	$\hat{\alpha}$	1.7884	0.7884	4.7119		$\hat{\alpha}$	1.7211	0.7211	3.9264
	$\hat{b}$	1.1456	0.1456	0.2186		$\hat{b}$	1.1610	0.1610	0.2251
	$\hat{\lambda}$	2.0766	0.0766	1.6045		$\hat{\lambda}$	2.0221	0.0221	1.4414
$a = 1.05, \alpha = 1, b = 1, \lambda = 2$					$a = 1.10, \alpha = 1, b = 1, \lambda = 2$				
n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO	n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO
10	$\hat{a}$	1.0503	0.0003	0.0048	10	$\hat{a}$	1.0998	-0.0002	0.0058
	$\hat{\alpha}$	3.9777	2.9777	65.735		$\hat{\alpha}$	4.5118	3.5118	357.711
	$\hat{b}$	1.2758	0.2758	0.7680		$\hat{b}$	1.2337	0.2337	0.7271
	$\hat{\lambda}$	3.0259	1.0259	9.6846		$\hat{\lambda}$	3.0307	1.0307	8.5317
20	$\hat{a}$	1.0492	-0.0008	0.0004	20	$\hat{a}$	1.1001	0.0001	0.0005
	$\hat{\alpha}$	2.1103	1.1103	11.286		$\hat{\alpha}$	2.2248	1.2248	14.5998
	$\hat{b}$	1.1642	0.1642	0.3280		$\hat{b}$	1.1636	0.1636	0.3712
	$\hat{\lambda}$	2.2586	0.2586	2.6318		$\hat{\lambda}$	2.2977	0.2977	2.7009

Çizelge 6.2 Uyarlanmış Weibull ($\alpha = 1, b = 1, \lambda = 2$) durumunda geometrik sürecin a oran parametresi ve dağılımın parametreleri için önerilen tahmin edicilere ilişkin Yan ve HKO değerleri (devamı)

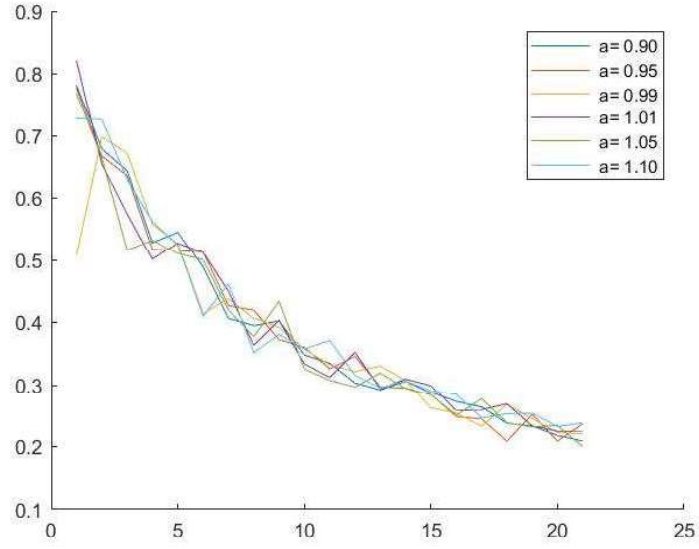
$a = 1.05, \alpha = 1, b = 1, \lambda = 2$					$a = 1.10, \alpha = 1, b = 1, \lambda = 2$				
n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO	n	Parametre	Tahmin	Yan	HKO
30	$\hat{a}$	1.0504	0.0004	0.0001	30	$\hat{a}$	1.0991	-0.0009	0.0001
	$\hat{\alpha}$	1.7843	0.7843	5.0759		$\hat{\alpha}$	1.9090	0.9090	5.7965
	$\hat{b}$	1.1684	0.1684	0.2394		$\hat{b}$	1.1749	0.1749	0.2379
	$\hat{\lambda}$	2.0257	0.0257	1.3836		$\hat{\lambda}$	2.0031	0.0031	1.4710



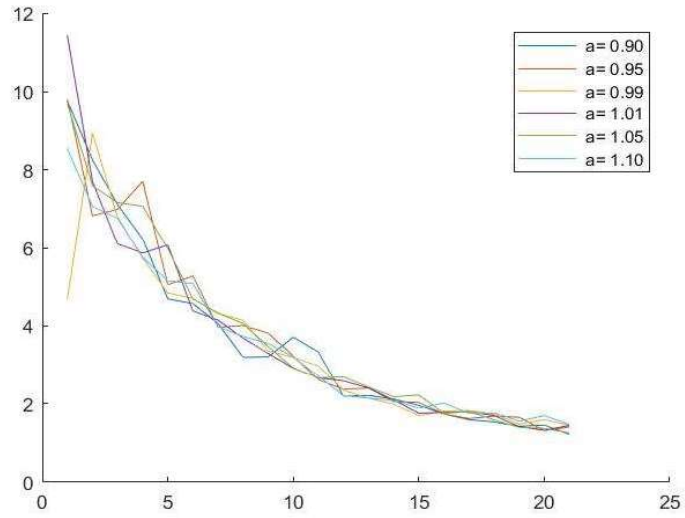
Şekil 6.5 $\hat{a}$ için değişen a oran parametreleri karşısında HKO değerleri üzerindeki değişim ($\alpha = 1$, $b = 1$, $\lambda = 2$)



Şekil 6.6 $\hat{a}$ için değişen a oran parametreleri karşısında HKO değerleri üzerindeki değişim ($\alpha = 1$, $b = 1$, $\lambda = 2$)



Şekil 6.7 $\hat{b}$ için değişen a oran parametreleri karşısında HKO değerleri üzerindeki değişim ($\alpha = 1$, $b = 1$, $\lambda = 2$)



Şekil 6.8 $\hat{\lambda}$ için değişen a oran parametreleri karşısında HKO değerleri üzerindeki değişim ($\alpha = 1$, $b = 1$, $\lambda = 2$)

Simülasyon çalışmasıyla elde edilen sonuçlar incelendiğinde Çizelge 6.1’de örneklem hacmi n arttırıldıkça uyarlanmış Weibull geometrik sürecinin a oran parametresinin aldığı farklı 0.90, 0.95, 0.99, 1.01, 1.05, 1.10 değerleri için parametrelerin tahmin değerlerinin gerçek değerlerine yakınlığı, yan değerlerinin ve HKO’larının örneklem hacminin artışıyla birlikte azaldığı görülmüştür. Çizelge 6.2’de parametreler üzerinde yapılan 0.5’lik değişim Çizelge 6.1’e kıyasla HKO arttırmıştır. Örneklem hacminin n artmasıyla HKO’lar azalmıştır. Bu sonuç çıktıları tahmin edicilerin tutarlı ve asimptotik olarak yansız olduklarını göstermektedir.

Çalışmada tahmin edicilerin küçük örneklem özellikleri incelendiğinde Şekil 6.1- 6.8’de örneklem hacmi $n = 10, 11, 12, \dots, 30$ için değişen a oran parametresi karşısında tahmin ediciler $\hat{a}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{b}$, $\hat{\lambda}$ ya ait HKO değerlerinin azaldığı görülmüştür.

7. GERÇEK VERİ UYGULAMASI

Bu bölümde, geometrik süreç ile modellendiği bilinen bazı veri setleri için uyarlanmış Weibull dağılımının ilk olay zamanı olarak seçilip seçilemeyeceği araştırılarak ilgili veri setlerinin modelleme çalışması yapılacaktır. Bunun için literatürde yer alan önemli yaşam dağılımları ile uyarlanmış Weibull dağılımı Bölüm 2.7’de verilen en çok olabilirlik oranına dayalı T -istatistiği ile karşılaştırılacaktır.

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ örnekleme a oran parametresi ile geometrik süreçten gelen bir örneklem olsun. Bu örneklem için ilk olay zamanının dağılımının MWD olup olmadığı diğer yaşam dağılımları ile T -istatistiği kullanılarak şu şekilde karşılaştırılır: 1. X_1 rasgele değişkeninin, parametreleri α, b, λ olan F_{MW} dağılım fonksiyonuna sahip uyarlanmış Weibull dağılımından geldiği varsayılarak parametreler tahmin edilir ve tahmin değerleri olabilirlik fonksiyonunda yerine yazılır, yani

$$\begin{aligned} & L_{F_{MW}}(\hat{a}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW}) \\ &= \hat{a}_{MW}^n \prod_{i=1}^n [(\hat{b}_{MW} \hat{a}_{MW}^{i-1} \\ &+ \hat{\lambda}_{MW} \hat{a}_{MW}^{2(i-1)} x_i)(\hat{a}_{MW}^{i-1} x_i)^{\hat{b}_{MW}-1} e^{\hat{\lambda}_{MW} \sum_{i=1}^n \hat{a}_{MW}^{i-1} x_i} e^{-\hat{a}_{MW} \sum_{i=1}^n (\hat{a}_{MW}^{i-1} x_i)^{\hat{b}_{MW}} e^{\hat{\lambda}_{MW} (\hat{a}_{MW}^{i-1} x_i)}}] \end{aligned}$$

burada $\hat{a}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW}$ sırasıyla a, α, b, λ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileridir.

2. X_1 rasgele değişkeninin alternatif yaşam dağılım fonksiyonuna G sahip olduğu varsayımı altında parametreler tahmin edilir ve ilgili dağılıma ait olabilirlik fonksiyonunda tahmin değerleri yerine yazılır. Bu çalışmada G dağılımı iki parametrelili dağılımlar olan Weibull, lognormal ve gamma dağılımları olarak seçilecektir. Bu dağılımlara ilişkin genel ifadeyi vermek adına dağılım parametrelerine θ_G ve η_G denilsin. Bu durumda olabilirlik fonksiyonu

$$L_G(a_G, \theta_G, \eta_G) = \prod_{i=1}^n a_G^{i-1} g(a_G^{i-1} x_i; \theta_G, \eta_G)$$

dur, burada g , G dağılım fonksiyonunun olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

3. Hesap edilen iki olabilirlik fonksiyonu oranlanarak logaritması alınır ve ulaşılan değerin sıfırdan büyük olup olmadığı kontrol edilir, yani

$$T = \ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{a}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_G(\hat{a}_G, \hat{\theta}_G, \hat{\eta}_G)} \right)$$

bulunur.

4. Değer sıfırdan büyük ise ilgili veri setinin ilk olay zamanı dağılımı MWD olarak alınır.

T -istatistiğinin hesaplanabilmesi için geometrik süreç altında Weibull, lognormal ve gamma dağılımlarının ilgili parametrelerinin tahminlerine ihtiyaç vardır. Bu bağlamda Aydoğdu vd. (2010) çalışmasında X_1 rasgele değişkeninin dağılımı parametreleri ζ ve γ olan Weibull dağılımından seçilmesi durumunda geometrik sürecin a oranı ve Weibull dağılımının ilgili parametreleri için uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemini kullanarak Weibull geometrik süreçinde parametre tahmin problemini ele almıştır ve ilgili parametrelerin açık tahminlerini elde etmiştir. Kara (2009) çalışmasında X_1 rasgele değişkeninin dağılımı parametreleri δ ve τ olan Lognormal dağılımdan seçilmesi durumunda geometrik sürecin a oranı ve lognormal dağılımının ilgili parametreleri için en çok olabilirlik yöntemini kullanarak lognormal geometrik süreçinde parametre tahminlerini elde etmiştir. Ayrıca Kara (2009) X_1 rasgele değişkeninin dağılımı parametreleri ς ve β olan Gamma dağılımından seçilmesi halinde geometrik sürecin a oranı ve Gamma dağılımının ilgili parametreleri için Newton-Raphson yöntemini kullanarak Gamma geometrik süreçinde parametre tahmin problemini ele almıştır.

Geometrik sürecin bazı veri setleri için model olarak kullanılabileceği Chan (2004) tarafından verilmektedir. Chan (2004) çalışması içerisindeki altı veri seti için ilk olay zamanı uyarlanmış Weibull dağılımı olan geometrik sürecin kullanılabilirliği incelenecektir. Bunun için geometrik süreçte model performanslarını değerlendirmek üzere önerilen altı gerçek veri seti kullanılacaktır. a oran parametrelili geometrik süreçten

geldiği bilinen bu altı gerçek veri seti kullanılarak ilk olayın gerçekleşme zamanı X_1 rasgele değişkeninin dağılımı uyarlanmış Weibull dağılımı alınarak oluşturulan a oran parametrelili uyarlanmış Weibull geometrik sürecinin diğer dağılımlar karşısında model seçiminde kullanılabilirliği T -istatistiği ile belirlenecektir. Veri setleri için uygun dağılımı belirledikten sonra Lam (1998) tarafından önerilen uygun metotları kullanarak parametrelere ilişkin tahminler hesaplanacaktır.

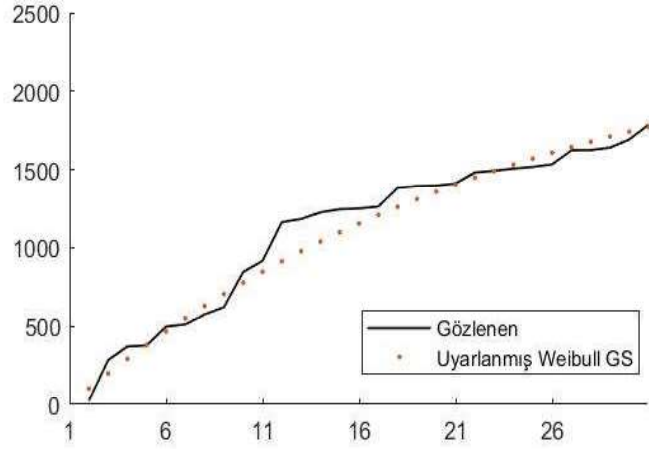
7.1 Boing 720 Klima Sistemi Aircraft 6 Verisi

Bu veri seti Boing 720 uçağının klima sisteminin ardışık bozulmaları arası geçen 30 zamanı içermektedir Proschan (1963).

Çizelge 7.1 Aircraft 6 verisi için karşılaştırmalar ve tahminler

T - İstatistiği	$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{a}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Wei}(\hat{a}_{Wei}, \hat{\zeta}_{Wei}, \hat{\gamma}_{Wei})} \right) = 32.1240 > 0$	
	$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{a}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Log}(\hat{a}_{Log}, \hat{\delta}_{Log}, \hat{\tau}_{Log})} \right) = 31.8681 > 0$	
	$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{a}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Gam}(\hat{a}_{Gam}, \hat{\zeta}_{Gam}, \hat{\beta}_{Gam})} \right) = 32.1727 > 0$	
Tahmin	$\hat{a}$	1.0425
Ediciler	$\hat{\alpha}$	0.0173
	$\hat{b}$	0.8745
	$\hat{\lambda}$	0.0003495
	$E(T)$	101.375
	$V(T)$	11472.7

Aircraft 6 verisi için ilk olayın gerçekleşme zamanı geometrik süreç olan uyarlanmış Weibull dağılımının kullanılabilceği T -istatistiği ile belirlendi. Bu sayede uyarlanmış Weibull geometrik sürece ilişkin parametre tahminleri ve sürece ilişkin $E(T)$ ve $V(T)$ Çizelge 7.1’de sunulmuştur. Bu parametre tahminleri Çizelge 7.1 ile verildi. Şekil 7.1’de görüldüğü üzere uyarlanmış Weibull geometrik süreci Aircraft 6 verisine iyi uyum sağlamıştır.



Şekil 7.1 Aircraft 6 verisi için Gözlenen değerler ve Uyarlanmış Weibull geometrik sürecine ait yenileme zamanları S_i

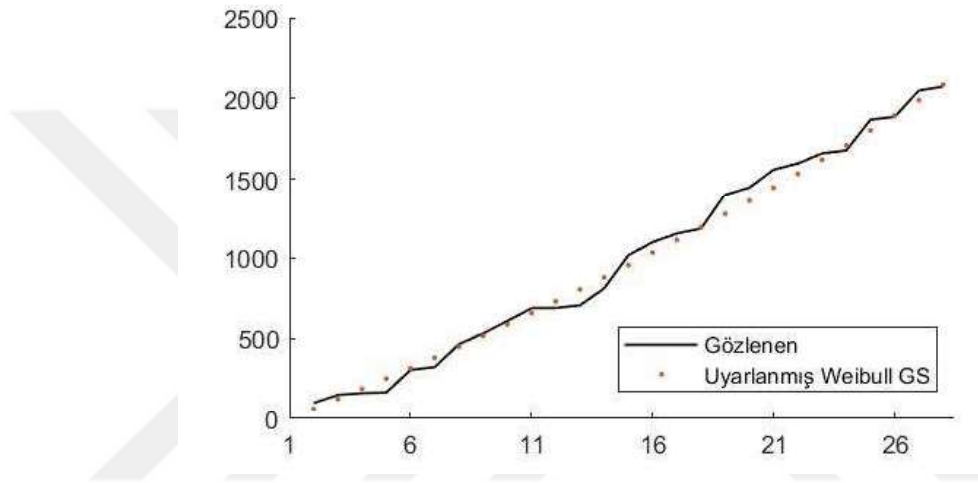
7.2 Boing 720 Klima Sistemi Aircraft 7 Verisi

Bu veri seti Boing 720 uçağının klima sisteminin ardışık bozulmaları arası geçen 30 zamanı içermektedir Proschan (1963).

Çizelge 7.2 Aircraft 7 verisi için karşılaştırmalar ve tahminler

		$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{\alpha}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Wei}(\hat{\alpha}_{Wei}, \hat{\zeta}_{Wei}, \hat{\gamma}_{Wei})} \right) = 10.9425 > 0$
T- İstatistiği		$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{\alpha}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Log}(\hat{\alpha}_{Log}, \hat{\delta}_{Log}, \hat{\tau}_{Log})} \right) = 14.4537 > 0$
		$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{\alpha}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Gam}(\hat{\alpha}_{Gam}, \hat{\zeta}_{Gam}, \hat{\beta}_{Gam})} \right) = 11.0618 > 0$
Tahmin		
Ediciler	$\hat{\alpha}$	0.9823
	$\hat{\alpha}$	0.0214
	$\hat{b}$	0.8064
	$\hat{\lambda}$	0.005918
	$E(T)$	60.6782
	$V(T)$	2233.71

Çizelge 7.2’de Aircraft 7 verisi için ilk olayın gerçekleşme zamanı geometrik süreç olan uyarlanmış Weibull dağılımının kullanılabileceği T -istatistiği ile belirlendi. Bu sayede uyarlanmış Weibull geometrik sürece ilişkin parametre tahminleri ve sürece ilişkin $E(T)$ ve $V(T)$ Çizelge 7.2’de sunulmuştur. Şekil 7.2’de görüldüğü üzere uyarlanmış Weibull geometrik süreci Aircraft 7 verisine iyi uyum sağlamıştır.



Şekil 7.2 Aircraft 7 verisi için Gözlenen değerler ve Uyarlanmış Weibull geometrik sürecine ait yenileme zamanları S_i

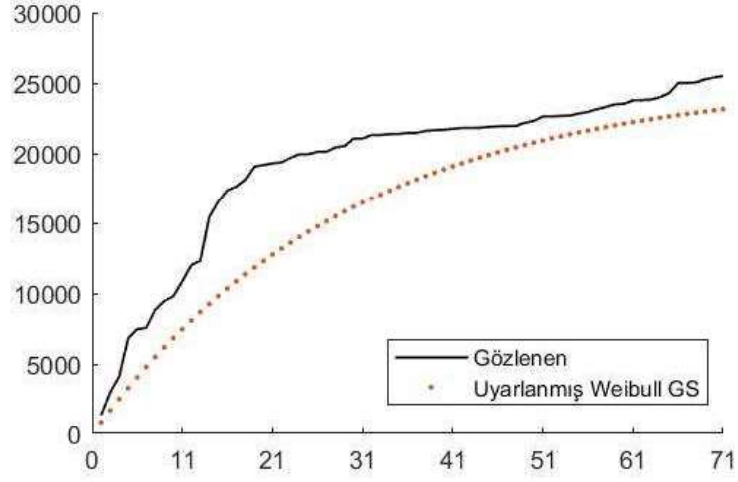
7.3 U.S.S Halfbeak Denizaltısı Dizel Motoru No.3 Verisi

No.3 verisi U.S.S Halfbeak denizaltısının dizel itiş motorlarının planlamamış bakım çalışmaları arası geçen 71 zamanı içermektedir.

Çizelge 7.3 No.3 verisi için karşılaştırmalar ve tahminler

		$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{a}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Wei}(\hat{a}_{Wei}, \hat{\tau}_{Wei}, \hat{\gamma}_{Wei})} \right) = 190.8511 > 0$
<i>T</i> -İstatistiği		$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{a}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Log}(\hat{a}_{Log}, \hat{\delta}_{Log}, \hat{\tau}_{Log})} \right) = 197.4436 > 0$
		$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{a}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Gam}(\hat{a}_{Gam}, \hat{\varsigma}_{Gam}, \hat{\beta}_{Gam})} \right) = 190.6647 > 0$
Tahmin Ediciler	$\hat{a}$	1.0355
	$\hat{\alpha}$	0.0069
	$\hat{b}$	0.7451
	$\hat{\lambda}$	0.000026
	$E(T)$	870.255
	$V(T)$	1.18951×10^6

Çizelge 7.3'te No.3 verisinin modellenmesinde uyarlanmış Weibull geometrik süreci kullanılabileceği *T*-istatistiğine göre belirlenmiştir. Bu sayede uyarlanmış Weibull geometrik sürece ilişkin parametre tahminleri ve sürece ilişkin $E(T)$ ve $V(T)$ Çizelge 7.3'de sunulmuştur. Şekil 7.3'te görüldüğü üzere uyarlanmış Weibull geometrik süreci No.3 verisine iyi uyum sağlamıştır.



Şekil 7.3 No.3 verisi için Gözlenen değerler ve Uyarlanmış Weibull geometrik sürecine ait yenileme zamanları S_i

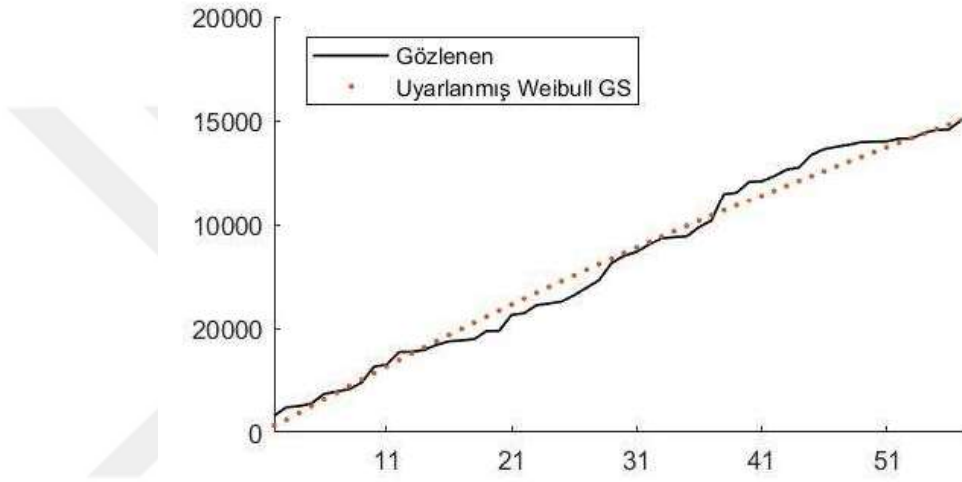
7.4 U.S.S Grampus Denizaltısı Dizel Motoru No.4 Verisi

No.4 verisi U.S.S Grampus denizaltısının dizel itiş motorlarının planlamamış bakım çalışmaları arası geçen 56 zamanı içermektedir. Verideki sıfırlar ve yanlış kayıtlar Lam (2004) tarafından revize edildi.

Çizelge 7.4 No.4 verisi için karşılaştırmalar ve tahminler

T- İstatistiği	$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{a}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Wei}(\hat{a}_{Wei}, \hat{\zeta}_{Wei}, \hat{\gamma}_{Wei})} \right) = 36.9837 > 0$	
	$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{a}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Log}(\hat{a}_{Log}, \hat{\delta}_{Log}, \hat{\tau}_{Log})} \right) = 43.9314 > 0$	
	$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{a}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Gam}(\hat{a}_{Gam}, \hat{\zeta}_{Gam}, \hat{\beta}_{Gam})} \right) = 36.9189 > 0$	
Tahmin	$\hat{a}$	1.0080
Ediciler	$\hat{\alpha}$	0.0047
	$\hat{b}$	0.9083
	$\hat{\lambda}$	0.0001828
	$E(T)$	332.5
	$V(T)$	106201

Çizelge 7.4'te No.4 verisinin modellenmesinde uyarlanmış Weibull geometrik süreci kullanılabileceği T -istatistiğine göre belirlenmiştir. Bu sayede uyarlanmış Weibull geometrik sürece ilişkin parametre tahminleri ve sürece ilişkin $E(T)$ ve $V(T)$ Çizelge 7.4'de sunulmuştur. Şekil 7.4'te görüldüğü üzere uyarlanmış Weibull geometrik süreci No.4 verisine iyi uyum sağlamıştır.



Şekil 7.4 No.4 verisi için Gözlenen değerler ve Uyarlanmış Weibull geometrik sürecine ait yenileme zamanları S_i

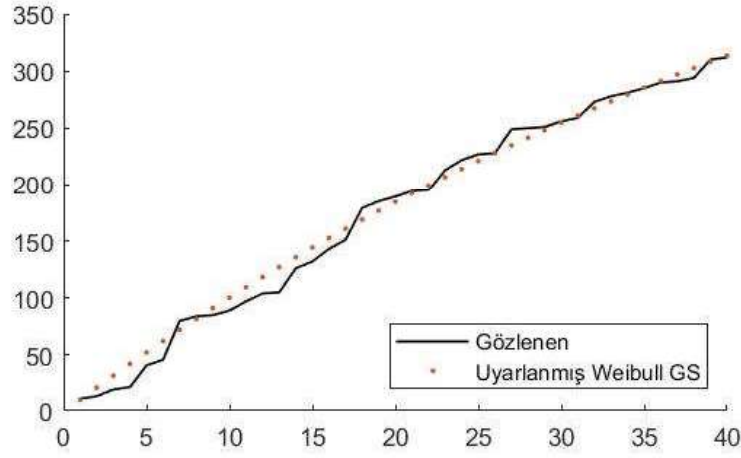
7.5 Araba Verisi

Araba verisi orijinalinde 23 Mart 1985 Cumartesi günü İngiltere Bedfordshire’de Junction 13’e yakın sabit bir noktadan M1 otoyolu üzerinde kuzeye doğru hareket eden araçların 41 ardışık geçiş zamanını içermektedir. Veri Hand (1994) tarafından 40 ardışık olaylar arası geçen zaman olarak revize edildi.

Çizelge 7.5 Araba verisi için karşılaştırmalar ve tahminler

T -İstatistiği	$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{a}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Wei}(\hat{a}_{Wei}, \hat{\zeta}_{Wei}, \hat{\gamma}_{Wei})} \right) = 6.1770 > 0$	
	$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{a}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Log}(\hat{a}_{Log}, \hat{\delta}_{Log}, \hat{\tau}_{Log})} \right) = 4.7512 > 0$	
	$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{a}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Gam}(\hat{a}_{Gam}, \hat{\varsigma}_{Gam}, \hat{\beta}_{Gam})} \right) = 5.8731 > 0$	
Tahmin Ediciler	$\hat{a}$	1.0179
	$\hat{\alpha}$	0.06977
	$\hat{b}$	1.1
	$\hat{\lambda}$	$4.7594e^{-10}$
	$E(T)$	10.8567
	$V(T)$	97.6528

Çizelge 7.5’te araba verisinin modellenmesinde uyarlanmış Weibull geometrik süreci kullanılabileceği T -istatistiğine göre belirlenmiştir. Bu sayede uyarlanmış Weibull geometrik sürece ilişkin parametre tahminleri ve sürece ilişkin $E(T)$ ve $V(T)$ Çizelge 7.5’te sunulmuştur. Şekil 7.5’te görüldüğü üzere uyarlanmış Weibull geometrik süreci araba verisine iyi uyum sağlamıştır.



Şekil 7.5 Araba verisi için Gözlenen değerler ve Uyarlanmış Weibull geometrik sürecine ait yenileme zamanları S_i

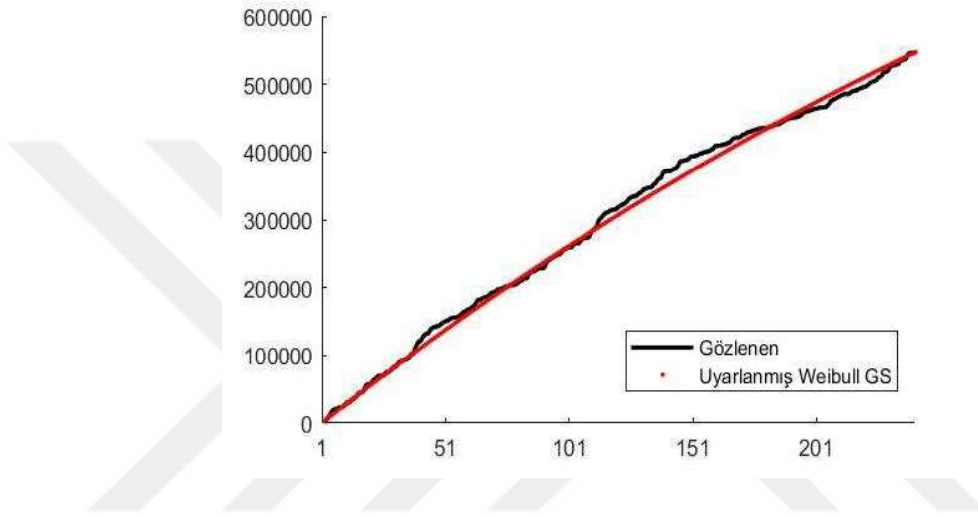
7.6 Hastane Acil Servisine Gelen Hasta Verisi

Bir hastanenin acil servisine gelen hastaların varış zamanları hasta verisi olarak kaydedildi Cox (1966). Verideki sıfırlar ve yanlış kayıtlar Lam (2004) tarafından düzenlendi. Düzenlenmiş veride 245 adet varışlar arası geçen zaman yer alıyor.

Çizelge 7.6 Hasta verisi için karşılaştırmalar ve tahminler

T- İstatistiği	$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{\alpha}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Wei}(\hat{\alpha}_{Wei}, \hat{\alpha}_{Wei}, \hat{\gamma}_{Wei})} \right) = 4.0269e^3 > 0$	
	$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{\alpha}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Log}(\hat{\alpha}_{Log}, \hat{\alpha}_{Log}, \hat{\tau}_{Log})} \right) = 373.2217 > 0$	
	$\ln \left(\frac{L_{MW}(\hat{\alpha}_{MW}, \hat{\alpha}_{MW}, \hat{b}_{MW}, \hat{\lambda}_{MW})}{L_{Gam}(\hat{\alpha}_{Gam}, \hat{\alpha}_{Gam}, \hat{\beta}_{Gam})} \right) = 317.5303 > 0$	
Tahmin	$\hat{\alpha}$	1.0020
Ediciler	$\hat{\alpha}$	0.0013
	$\hat{b}$	0.7997
	$\hat{\lambda}$	0.000065
	$E(T)$	2890.94
	$V(T)$	$6.8875e^6$

Çizelge 7.6’da hasta verisinin modellenmesinde uyarlanmış Weibull geometrik süreci kullanılabileceği T -istatistiğine göre belirlenmiştir. Bu sayede uyarlanmış Weibull geometrik sürece ilişkin parametre tahminleri ve sürece ilişkin $E(T)$ ve $V(T)$ Çizelge 7.6’da sunulmuştur. Şekil 7.6’da görüldüğü üzere uyarlanmış Weibull geometrik süreci araba verisine iyi uyum sağlamıştır.



Şekil 7.6 Hasta verisi için Gözlenen değerler ve Uyarlanmış Weibull geometrik sürecine ait yenileme zamanları S_i

7. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada trend içeren ardışık olaylar arası geçen zamanların modellenmesi için ilk olarak Lam (1988) tarafından yenileme sürecinin bir genellemesi olarak geliştirilen geometrik süreç tanıtıldı. Bu sürece ilişkin özelliklerin verilebilmesi için temel kavramlar olan rasgele değişken, stokastik süreç, ters dönüşüm yöntemi, en çok olabilirlik tahmin yöntemi ve en çok olabilirlik oranına dayalı T -istatistiği kavramları açıklandı. Sayma süreci, homojen olmayan Poisson süreci, yenileme süreci üzerinde duruldu. Geometrik sürecin olaylar arası geçen zamanlarının dağılımı, beklenen değeri ve varyansı açıklandı. Ardından geleneksel Weibull dağılımının genelleştirilmiş hali olarak ilk kez Lai (2003) tarafından verilen uyarlanmış Weibull dağılımı tanıtıldı ve uyarlanmış Weibull dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu, bozulma oran fonksiyonu verildi ve dağılımının çeyreklik ve medyanı, modu, momentleri, moment çıkaran fonksiyonu, beklenen değeri, varyansı, çarpıklık ve basıklıkları üzerinde duruldu. $\{N(t), t \geq 0\}$ geometrik sürecine göre ilk olayın gerçekleşme zamanı X_1 parametreleri a , b , λ olan uyarlanmış Weibull dağılımından seçilmesi halinde oluşturulan geometrik süreç tanıtıldı. Bu geometrik sürece özel olarak uyarlanmış Weibull geometrik süreci adı verildi. Uyarlanmış Weibull geometrik sürecinin en çok olabilirlik tahminleri elde edilmeye çalışıldı. Bu amaçta olabilirlik denklemi kurularak log-olabilirlik fonksiyonu elde edildi. Log-olabilirlik fonksiyonunun birinci türevlerinin alınması sonucunda tahmin edicilerin analitik çözümlerine ulaşamayacağı ortaya çıktı. Bu yüzden en çok olabilirlik tahminleri lineer olmayan optimizasyon tekniği ile direkt olarak maksimize edildi ve çıkan sonuçlar bir simülasyon çalışması ile ele alındı. Simülasyon çalışmasında a oranı için önerilen $\hat{a}$ ve uyarlanmış Weibull dağılımının parametreleri olan $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{\lambda}$ tahmin edicilerinin performansları incelendi. Yan ve HKO tahmin edicilerin performanslarını değerlendirmek için kullanıldı. Simülasyon çalışması sonucunda örneklem hacminin artması ile a oran parametresinin aldığı farklı değerleri için parametrelerin tahmin değerlerinin gerçek değerlerine yaklaştığı, yan ve HKO örneklem hacminin artışıyla birlikte azaldığı görüldü. Sonuçlar çizelgeler ile verildi. Son olarak geometrik süreçte model performanslarını değerlendirmek üzere Lam (2004) tarafından önerilen altı gerçek

veri seti kullanılarak en çok olabilirlik oranına dayalı T -istatistiği yardımıyla uyarlanmış Weibull geometrik sürecinin diğer dağılımlar karşısında model seçiminde kullanılabileceği ortaya konuldu.



KAYNAKLAR

- Aydoğdu H, Őenođlu. B. Kara M. (2010). Parameter estimation in geometric process with Weibull distribution. *Applied Mathematics and Computation*, Vol 217, Issue 6, 2657-2665. doi:<https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.08.003>
- Bain, L. J., and M. Engelhardt;(1980). Probability of correct selection of Weibull versus gamma. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 9(4), 375–81. doi:10.1080/03610928008827886
- Chan, J. S., Lam Y., Leung D.Y.P. (2004). Statistical inference for geometric processes with gamma distributions. *Computational Statistics & Data Analysis*, 47(3), 565–81. doi:10.1016/j
- Cox, D. R. (1966). *The Statistical analysis of series of events*. London: Mathuen.
- Cox, O. B.-N. (March 1, 1994). *Inference and Asymptotics* (1st Edition b.). Chapman and Hall/CRC.
- Fearn, D. H., Nebenzahl E. (1991). On the maximum likelihood ratio method of deciding between the Weibull and gamma distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 20(2), 579–93. doi:10.1080/03610929108830516
- Hand, D. J. (1994). *A Hand book of small data sets*. London: Chapman and Hall.
- Hong, J. (2010). *Modified Weibull Distribution in Reliability Engineering*. National University of Singapore.
- Kara M. (2009). *Geometrik S¼reçlerde Parametre Tahmini*. Ankara: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstit¼s¼.
- Kara M., Aydoğdu. H., T¼rkŐen . (2015). Statistical inference for geometric process with the inverse Gaussian distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85(16), 3206-3215.
- Kara, M. (2009). *Geometrik s¼reçlerde parametre tahmini*. Ankara: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstit¼s¼.
- Lam Y. (1988). Geometric process and its applications. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica* 4, 366-377.
- Lam, Y. (2007). *The geometric process and its applications*. China: World Scientific. doi:10.1142/6219
- Lam, Y. Chan S.K. (1998). Statistical inference for geometric processes with lognormal distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, 27(1), 99–112.

- Lam, Y., Zhu L., Chan J.S.K., Liu Q. (2004). Analysis of data from a series of events by a geometric process model. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 20(2), 263–82. doi:10.1007/s10255-004-0167-x
- Lam, Y. Zheng Y., Zhang Y. (2003). Some limit theorems in geometric process. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 19(3), 405–16. doi:10.1007/s10255-003-0115-1
- Lai C.D., M. Xie. (2003). A Modified Weibull Distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, Vol 52(No.1), 33-37.
- Lee J. Bain, M. E. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Boston: Brooks/Cole Cengage Learning.
- Nguyen H. T. Rogers G. S. (1989). *Fundamentals of Mathematical Statistics: Vol. 2: Statistical Inference*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG.
- Pekalp M. H., Aydoğdu. H., Türkman K.F. (2019). Discriminating Between Some Lifetime Distributions in Geometric Processes. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 1-23. doi:10.1080/03610918.2019.1657452
- Proschan. (1963). Theoretical explanation of observed decreasing failure rate. *Technometrics*, 5(3), 375–83. doi:10.2307/1266340
- Roussas, G. G. (1997). *A Course in Mathematical Statistics*. A Course in Mathematical Statistics. Academic Press.
- Tiku, M. & Akkaya A. D. (2004). *Robust Estimation and Hypothesis Testing*. New Delhi: New Age International Ltd.
- Tiku, M. L. Wong W.K. Vaughan D.C. (2000). Time series models in non-normal situations: symmetric innovations. *J. Time Series*, 21, 571-595.