



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**YAKLAŞIK KAEHLERYEN S^6 KÜRESİNİN EĞİK ALT
MANİFOLDLARI**

Cumhur ARIKAN

Matematik Anabilim Dalı

**DANIŞMAN
Dr. Öğr. Ü. Beran PİRİNÇÇİ**

Haziran , 2022

İSTANBUL

Bu alışma 22.06.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Dr. Öğr. Ü. Beran PİRİNÇÇİ (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr.Hakan Mete TAŐTAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Dr. Öğr. Ü. Jeta ALO
Beykent Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

- **Tezden Üretilmiş Yayınların Künye Bilgileri**

□

ÖNSÖZ

Bu çalışma boyunca destekleklerini hiçbir zaman esirgemeyen, değerli zamanını ayıran, bilgi ve birikimleriyle her zaman yanımda olan başta değerli hocam Dr. Öğr. Ü. Beran PİRİNÇÇİ olmak üzere ailem ve dostlarıma teşekkür ederim.

Haziran , 2022

Cumhur ARIKAN



İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	viii
ÖZET	x
SUMMARY	xii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	3
2.1. DİFERANSİYELLENEBİLİR MANİFOLDLAR	3
2.1.1. MANİFOLD KAVRAMI VE MANİFOLD ÜZERİNDEKİ YAPILAR	3
2.2. RİEMANN MANİFOLDLARI	14
2.3. RİEMANN MANİFOLDLARIN ALT MANİFOLDLARI	21
2.4. HEMEN HEMEN KOMPLEKS MANİFOLDLAR	30
2.4.1. Hemen Hemen Hermityen Manifoldlar	32
2.4.2. Hemen Hemen Hermityen Manifoldların Alt Manifoldları	35
2.4.3. Yaklaşık Kaehleryen Manifoldlar	42
2.5. YAKLAŞIK KAEHLERYEN S^6 KÜRESİ	47
2.6. YAKLAŞIK KAEHLERYEN S^6 KÜRESİNİN ALT MANİFOLDLARI	53
3. MALZEME VE YÖNTEM	57
4. BULGULAR	58
4.1. YAKLAŞIK KAEHLERYEN S^6 KÜRESİNİN EĞİK ALT MANİFOLDLARI	58
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	63
KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ	67

ŞEKİL LİSTESİ

Page No

Şekil 2.1: 50



SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
M	: Manifold
$\mathbb{R}$	: Gerçek sayılar
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar
$\mathbb{H}$	: Kuarterniyonlar
$\mathbb{O}$	: Oktanionlar
$Im\mathbb{O}$	: Sanal Cayley sayıları kümesi
$\mathfrak{S}$	: Her mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonlar kümesi
$Boy(M)$	: M manifoldunun boyutu
χ	: Teğet vektör alanlarının kümesi
$\chi^\perp$	: Normal vektör alanlarının kümesi
$T_p(M)$	: p noktasındaki teğet uzay
$T_p^\perp(M)$	: p noktasındaki normal uzay
D	: Distribüsyon dönüşümü
(M,g)	: g Riemann metrikli M Riemann manifoldu
h	: II. temel form
H	: Ortalama eğrilik
A_V	: Weingarten operatörü
$\mathcal{N}$	: Nijenhuis tensörü
Φ	: M manifoldunun temel 2 formu
J	: Jakobyen
J	: Hemen hemen kompleks yapı
$\langle, \rangle$	: İç çarpım işlemi
$\times$	: Vektörel veya çapraz çarpım işlemi
∇	: Kovaryant türev işlemi
I	: Birim dönüşüm veya özdeşlik dönüşümü
κ	: Kesit eğriliği
∂	: Kısmi türev operatörü
d	: Diferansiyel operatörü
$\ \quad \ $	: Norm işlemi

- : İkili işlem ve bileşke işlemi
- det(A)*** : *A* matrisinin determinant işlemi
- $\mathfrak{h}_x$: *Q* endomorfizminin -1 özdeğerli öz uzayı



ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKLAŞIK KAEHLERYEN S^6 KÜRESİNİN EĞİK ALT MANİFOLDLARI

Cumhur ARIKAN

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Danışman: Dr. Öğr. Ü. Beran PİRİNÇÇİ

Bu çalışma 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin incelendiği yapılarla ilgili yapılan bazı önemli çalışmaların varlığından bahsedilmiş ve tezin yoğunlaştığı konularla ilgili yüzeysel bir giriş yapılmıştır.

İkinci bölüm 6 kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısmında tezin esas yoğunlaştığı konuların temelini oluşturan yapılar incelenmiş, tanımları verilmiş ve örneklerle desteklenmiştir. İkinci bölümün ikinci kısmı Riemann manifoldlarına ayrılmış olup Riemann manifoldlarında önemli yeri olan yapılar incelenmiştir. İkinci bölümün üçüncü kısmında Riemann manifoldlarının alt manifoldları ele alınmıştır. Bunun için gerekli olan kavramlar tanıtılmış, alt manifold inşası yapıp bir Riemann manifold ile onun alt manifoldunun eğriliği arasındaki bağıntıyı veren *Gauss*, *Codazzi*, *Ricci* denklemleri ifade edilmiş ve flat manifold kavramı tanımlanmıştır. S^6 ve onun eğik alt manifoldlarında incelenecek olan tümel umbilik, tümel geodezik ve minimal alt manifold kavramları ele alınmış ve teoremleri kanıtlanmıştır. İkinci bölümün dördüncü kısmında hemen hemen kompleks manifoldlar J yapısı ve Nijenhuis tensörü gibi kavramlarla tanımlandıktan sonra hemen hemen Hermityen manifold kavramı verilmiştir. Ardından hemen hemen Hermityen manifoldların alt manifoldlarından kısaca bahsedilerek eğik alt manifoldlar detaylıca incelenmiştir. Daha sonra yaklaşık Kaehleryen manifoldlar tanımlanmış ve onun Nijenhuis tensörü üzerinde durulmuştur. İkinci bölümün beşinci kısmında S^6 küresinin cebirsel inşası yapılarak yaklaşık Kaehleryen manifold olduğu gösterilmiştir. Yaklaşık Kaehleryen S^6 küresinin ortalama eğriliği bulunmuş, onunla ilgili sonuçlar genelleştirilmiştir. İkinci bölümün son kısmında

yaklaşık Kaehleryen S^6 küresinin tümel umbilik ve tümel geodezik alt manifoldları ile ilgili sonuçlara ulaşılmış ve bir önceki kısımda bulunanlar alt manifoldlar için de çalışılmıştır.

Üçüncü bölümde tezin oluşmasındaki matematiksel yöntemlerden bahsedilip tezin yazımı için gerekli materyaller ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde tezin bulgular kısmı yer almaktadır. Bu kısımda yaklaşık Kaehleryen S^6 küresinin eğik alt manifoldları üzerinde yeni sonuçlar bulunmuş olup özgün teoremler yer almaktadır. Yaklaşık Kaehleryen S^6 küresinin ne zaman Kaehleryen eğik alt manifold olacağı gösterilmiş ve tümel umbilik has eğik alt manifoldlarının eğriliği bulunmuştur. Bunun sonucunda S^6 küresinin tümel umbilik has eğik alt manifoldlarının Einstein manifold olduğu gösterilmiştir.

Beşinci bölümde tezin değerlendirilmesine yer verilmektedir.

Haziran 2022, 80 sayfa.

Anahtar kelimeler: Eğik alt manifold, Tümel umbilik, Yaklaşık Kaehleryen S^6 küresi, Kaehleryen eğik alt manifold, Nijenhuis tensörü .

SUMMARY

M.Sc. THESIS

SLANT SUBMANIFOLDS OF NEARLY KAEHLERIAN S^6

Cumhur ARIKAN

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Enstitue

Supervisor: Asst. Prof. Beran PİRİNÇÇİ

This study consists of 5 chapters. In the first chapter, we present some important researches about the structures studied in this thesis and introduce the subjects related to this thesis.

The Second chapter consist of 6 sections. In the first section, we give the definitions of structures and examples supporting these definitions. In the Second section of the second chapter, we present Riemannian manifolds and the structures that are important for Riemannian manifolds. In the third section of the second chapter, we present Riemannian manifolds and the structures that are important for Riemannian manifolds. In the third section of the second chapter, we introduce submanifolds of Riemannian manifolds and express the Gauss, Codazzi, Ricci equations and the concept of a flat manifold. Then we introduce the concepts such as totally umbilical, totally geodesic and minimal submanifold and prove theorems involving them. In the fourth section of the second chapter, we first define almost complex manifolds with J structure and Nijenhuis tensor and after that, we give the concept of almost Hermitian manifold. Subsequently, we give submanifolds of almost Hermitian manifolds and we study slant submanifolds in detail. Afterwards, we define nearly Kaehlerian manifolds and give some properties of its Nijenhuis tensor. In the fifth part of the second chapter, we give the algebraic construction of the S^6 sphere and we show that it is a nearly Kaehlerian manifold. We find the mean curvature of the nearly Kaehlerian S^6 sphere and generalize some conclusions on it. In the last section of the second chapter we give conclusions about totally umbilical and totally geodesic submanifolds of the

nearly Kaehlerian sphere. We use the results found in the previous section for studying these submanifolds.

In the third chapter, we express the necessary materials and mathematical methods that are used for writing this thesis.

The fourth chapter includes the findings of the thesis. In this chapter, we give some new results and original theorems on slant submanifolds of the nearly Kaehlerian S^6 sphere. We give the condition when nearly Kaehlerian S^6 sphere becomes a Kaehlerian slant submanifold and we give the curvature of totally umbilical proper slant submanifolds of nearly Kaehlerian S^6 sphere. As a result, we show that a totally umbilical proper slant submanifold of S^6 is an Einstein manifold.

The fifth chapter includes the evaluation of the thesis.

June 2022, 80 pages.

Keywords: Slant Submanifold, Totally Umbilical, The Nearly Kaehlerian S^6 , Keahlerian Slant Submanifold, Nijenhuis Tensor.

1. GİRİŞ

S^6 küresinin alt manifoldları matematikçiler tarafından geniş bir şekilde çalışılmış ve yoğun bir araştırma alanı olmuştur. S^6 küresinin kendi başına Kaehleryen olmayan yaklaşık Kaehleryen manifold oluşu, üzerinde kompleks yapı tanımlanamaması gibi ilginç özellikleri barındırması matematikçileri bu alanda çalışmaya itmiştir. Nitekim Bryant [18], herhangi Riemann yüzeyinin 6 boyutlu kürede hemen hemen kompleks manifold olarak gömülebileceğini göstermiştir. Lin.L., Vrancken L. and Wijffels [16] bir yaklaşık Kaehleryen manifoldun hemen hemen kompleks alt manifoldunun minimal olduğunu göstermiş, A.Gray [14] bir yaklaşık Kaehleryen S^6 küresinin hemen hemen kompleks alt manifoldlarının 2 boyutlu ve minimal olduğunu kanıtlamış, N.Ejiri [19] S^6 küresinin 3 boyutlu tümel gerçel alt manifoldlarının yönlendirebilirliğini ve minimallliğini ele almış, S.Deskmush [23], S^6 küresinde sabit Gauss eğrilikli 2 boyutlu tümel gerçel alt manifoldları ele almış ve boyutun 2 olması durumunda bu eğriliğin $\kappa = 1$, yani bu alt manifoldların tümel geodezik olduğunu kanıtlamıştır. Bunların dışında, Sekigawa [20], F.Dillen, B.Opodza [21], L.Werstraelen, L.Wrancken [11], S^6 küresinin hemen hemen kompleks ve tümel gerçel alt manifoldlarıyla ilgili önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Eğik alt manifoldlar tümel gerçel ve hemen hemen kompleks alt manifoldların genelleştirilmiş halidir. Ne hemen hemen kompleks ne de tümel gerçel olan eğik alt manifoldlar has eğik alt manifoldlar olarak adlandırılırlar. J hemen hemen kompleks yapısının teğet bileşeni olan P endomorfizminin ∇ kovaryant türevi sıfır ise $-P$ endomorfizmi paralel ise- eğik alt manifold, Kaehleryen eğik alt manifold yapısına bürünür. Eğik alt manifoldlar genellikle Kaehleryen manifoldlarda yoğun olarak ele alınmıştır. Bu bakımdan Kaehleryen olmayan yaklaşık Kaehleryen S^6 küresinin eğik alt manifoldları ile ilgili çalışmalar yok denecek kadar azdır. Tek çalışma, K.Obrenovic ve S.Vukmirovic [24] tarafından yaklaşık Kaehleryen S^6 küresinin minimal yörüngeli eğik alt manifoldları ve eğik olan küçük ve büyük kürelerini incelediği çalışmadır.

Eğik alt manifoldların yarı eğik (semi-slant) ve kısmi eğik (hemi-slant) alt manifoldlar gibi genelleştirmeleri de vardır. Yine eğik alt manifoldların bu genelleştirmelerinde de S^6 küresi olarak olmasa da yaklaşık Kaehleryen bir manifoldun eğik alt manifoldu olarak

alışmalar mevcuttur. Her ne kadar tez başlığımız yaklaşık Kaehleryen S^6 küresinin eğik alt manifoldları olsa da eğik alt manifoldların tüm sınıflarını detaylı bir şekilde ele almamız mümkün değildir. Dolayısıyla biz bu tez çalışmamızda daha çok tümel umbilik has eğik alt manifoldlar sınıfına yoğunlaşacağız. S^6 küresinin yaklaşık Kaehleryen bir manifold olmasına rağmen onun eğik alt manifoldlarının S^6 küresinin burulma tensörü sayesinde ne zaman Kaehleryen manifold olacağını inceleyecek ve bu sonuçla beraber S^6 küresinin eğik alt manifoldlarının kazandığı özellikleri ifade edeceğiz.



2. GENEL KISIMLAR

2.1. DİFERANSİYELLENEBİLİR MANİFOLDLAR

2.1.1. MANİFOLD KAVRAMI VE MANİFOLD ÜZERİNDEKİ YAPILAR

Bu kısımda Riemann manifoldları ile ilgili temel tanım ve teoremlerden bahsedeceğiz. Bu bölümde [1,2,3,4,5,6,9] kaynaklarından yararlanılmıştır.

2.1.1 Tanım: M bir Hausdroff uzayı olmak üzere M 'nin her p noktası, M 'nin p 'yi içeren bir U açık alt kümesi ve $\mathbb{R}^n$ 'in $\hat{U}$ açık alt kümesi için

$$\phi : U \rightarrow \hat{U} \subset \mathbb{R}^n$$

homeomorfizması bulunabiliyorsa, M 'ye n boyutlu bir **topolojik manifold** denir. Buradan açıktır ki herhangi bir topolojik manifold Öklidyen bir uzaya benzer. Burada (U, ϕ) ikilisine bir **yerel harita** ve M 'yi örtecek şekilde tüm $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ haritalar ailesine ise **atlas** adı verilir.

2.1.2 Tanım: M bir manifold olsun. $U \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde (U, ψ) ve (V, ϕ) M 'de iki harita olmak üzere $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ bileşke dönüşümüne **ψ 'den ϕ 'ye geçiş dönüşümü** denir. Geçiş dönüşümleri k -ıncı dereceden difeomorfizm olan yani $\phi \circ \psi^{-1} \in C^k(\psi(U \cap V))$ ve $\psi \circ \phi^{-1} \in C^k(\phi(U \cap V))$ haritalara **C^k örtüşürler** ya da **düzgün(smooth) (her mertebeden sürekli diferansiyellenebilir) olarak bağdaşırlar** denir. Bu bağdaşma sonucu oluşan sisteme **C^k sınıftan koordinat sistemi** denir.

Bir M manifoldunda C^k sınıftan koordinat sistemi tanımlı ise M 'ye **C^k sınıftan manifold veya düzgün (smooth) manifold** denir.

2.1.3 Örnek: Sonlu boyutlu vektör uzayları birer düzgün manifolddur.

Çözüm: V sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. V üzerindeki normu standart öklid normu alalım. O halde V üzerindeki öklid normu bir topoloji doğurur ve bu topolojiyle V , n -boyutlu bir topolojik manifolddur. Şimdi V 'nin bir düzgün manifold olduğunu gösterelim. $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ V 'nin sıralı bazı olmak üzere

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow V$$

$$X \rightarrow T(X) = \sum_{i=1}^n x^i E_i$$

biçiminde bir izomorfizm tanımlayalım. T dönüşümünün lineer olduğu açıktır ve T dönüşümünün tanımından $T(X) = x^1 E_1 + x^2 E_2 + \dots + x^n E_n$ olacak şekilde $X = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ olup dönüşüm örtendir. Öte yandan

$$T(X) = \sum_{i=1}^n x^i E_i \quad , \quad T(Y) = \sum_{j=1}^n y^j E_j$$

için $T(X) = T(Y)$ ise

$$\implies x^1 E_1 + x^2 E_2 + \dots + x^n E_n = y^1 E_1 + y^2 E_2 + \dots + y^n E_n$$

$$\implies (x^1 - y^1) E_1 + \dots + (x^n - y^n) E_n = 0$$

$$\implies (x^1 - y^1) = 0, \dots, (x^n - y^n) = 0$$

$$\implies X = Y$$

olup T dönüşümü birebirdir. Dolayısıyla T bir izomorfizmdir.

Ayrıca T bir homeomorfizmadır.

Şöyle ki: Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
||T(X)|| &= ||T(x^1 E_1 + x^2 E_2 + \dots + x^n E_n)|| \\
&= ||x^1 T(E_1) + x^2 T(E_2) + \dots + x^n T(E_n)|| \\
&\leq \sum_{i=1}^n |x^i| ||T(E_i)|| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n |x^i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n ||T(E_i)||^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= ||X|| \cdot M, \quad M \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$||T(X)|| \leq M||X||$ olup T dönüşümü sınırlıdır. Sonlu boyutlu normlu uzaylar üzerinde tanımlı bir dönüşüm sınırlı ise bu dönüşüm aynı zamanda sürekli olacağından $\mathbb{R}^n$ ve V üzerinde tanımlanan normlarla $T(X) = \sum_{i=1}^n x^i E_i$ ile verilen T dönüşümü süreklidir. $T(X)$ birebir ve örten olduğundan tersi mevcuttur ve T^{-1} ters dönüşümü de benzer şekilde süreklidir. O halde T dönüşümü homeomorfizmadır. Dolayısıyla (V, T^{-1}) bir haritadır. $(\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n)$, V 'nin herhangi diğer bir bazı olmak üzere benzer şekilde $S(X) = \sum_{j=1}^n \tilde{x}^j \tilde{E}_j$ ile S bir homeomorfizmadır. O halde (V, S^{-1}) bir haritadır. Bu iki harita arasındaki difeomorfizm; A_i^j , S ve T dönüşümleri arasındaki tersinir geçiş matrisi olmak üzere $\tilde{E}_j = \sum_{i=1}^n A_i^j E_i$ için

$$\sum_{i=1}^n x^i E_i = \sum_{i,j} x^i A_i^j \tilde{E}_j = \sum_{j=1}^n \tilde{x}^j \tilde{E}_j$$

şeklinde olup $\tilde{x}^j = \sum_{i=1}^n A_i^j x^i$ elde edilir. Dolayısıyla $(S^{-1} \circ T)(X) = \tilde{X}$, $\tilde{X} = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ ve $(T^{-1} \circ S)(\tilde{X}) = X$ elde edilir. Böylece geçiş dönüşümleri difeomorfizm olan (V, S^{-1}) ve (V, T^{-1}) haritaları ile sonlu boyutlu vektör uzayları bir düzgün manifold örneği teşkil eder.

■

Şimdi teğet vektör tanımına geçmeden önce manifoldlar üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonların tanımını vereceğiz.

2.1.4 Tanım: Bir M manifoldunun C^k sınıfından koordinat sistemi $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ olmak üzere f , M 'nin bir U açık kümesinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $q \in U$ noktasının bir V komşuluğunda $\varphi_i(V) \subset \mathbb{R}^n$ açığı üzerinde tanımlı $f \circ \varphi_i^{-1}$ fonksiyonu, $\varphi_i(q)$ 'nin herhangi bir komşuluğunda C^l ($l \leq k$) sınıfından diferansiyellenebiliyorsa f fonksiyonuna $q \in U$ noktasında C^l **sınıfından diferansiyellenebilir** denir. $q \in M$ noktasının herhangi bir komşuluğunda tanımlı reel değerli C^∞ sınıfından fonksiyonların kümesi $\mathfrak{S}(q)$ ve bütün M manifoldu üzerinde tanımlı reel değerli C^l sınıfından fonksiyonların kümesi $\mathfrak{S}(M)$ ile gösterilecektir.

2.1.5 Tanım: $\gamma(t); (c \leq t \leq d), (c, d) \in \mathbb{R}$ ve $\gamma(t_0) = p_0$ olacak şekilde M manifoldu üzerinde bir eğri ve $f \in \mathfrak{S}(p_0)$ olsun.

$$V_{p_0} : \mathfrak{S}(p_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p_0 \rightarrow V_{p_0}(f) = \left(\frac{df(\gamma(t_0))}{dt} \right)$$

dönüşümüne $\gamma(t)$ eğrisinin p_0 noktasındaki **teğet vektörü** denir. Bir başka deyişle $V_{p_0}(f)$ 'e, f 'in p_0 noktasında $\gamma(t)$ eğrisi yönünde **yönlü türevi** de denir. M bir manifold ve M üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi $\mathfrak{S}(M)$ olsun. Her $f, g \in \mathfrak{S}(M)$ ve $c, d \in \mathbb{R}$ için $V_p : \mathfrak{S}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$(i) \quad V_p(cf + dg) = cV_p(f) + dV_p(g),$$

$$(ii) \quad V_p(fg) = V_p(f)g + fV_p(g).$$

Bu özellikleri sağlayan teğet vektörlerin uzayı

$$(U + V)(f) = U(f) + V(f) \quad \text{ve} \quad (kV)(f) = kV(f)$$

şeklinde toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı yapısına sahiptir. Bu uzay $T_p(M)$ ile gösterilecektir.

Şimdi manifoldlar arasında tanımlı bazı dönüşümlerden bahsedeceğiz.

2.1.6 Tanım: M ve N sırası ile iki manifold ve $S : M \rightarrow N$ bir dönüşüm olsun. $p \in M$ noktası komşuluğundaki harita (U, φ) ve $S(p) \in N$ noktası komşuluğundaki harita (V, ϕ) olmak üzere $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ kümesinden $\phi(V) \subset \mathbb{R}^n$ kümesine olan $\phi \circ S \circ \varphi^{-1}$ dönüşümü diferansiyellenebiliyorsa S dönüşümü $p \in M$ noktasında **diferansiyellenebilirdir** denir.

2.1.7 Tanım: $\varphi : M \rightarrow N$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm olmak üzere M 'nin her p elemanı için

$$d\varphi_p : T_p(M) \rightarrow T_{\varphi_p}(N)$$

dönüşümüne p noktasındaki teğet vektörü φ_p noktasındaki $d\varphi_p(v)$ teğet vektörüne taşıyan **türev dönüşümü** denir.

2.1.8 Tanım: $\eta = (y^1, y^2, \dots, y^n)$, bir M manifoldunun p noktasında bir koordinat sistemi olsun. Eğer $f \in \mathfrak{F}(M)$ ise $(u^1, u^2, \dots, u^n)$, $\mathbb{R}^n$ 'in doğal koordinat fonksiyonları olmak üzere

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = \frac{\partial (f \circ \eta^{-1})}{\partial u^i}(\eta(p)) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Şimdi bir manifoldun boyutunun onun teğet uzayının boyutuna eşit olduğunu ifade eden baz teoremini verelim.

2.1.9 Teorem (Baz Teoremi) [4]: $\eta = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ n -boyutlu bir M manifoldunun p noktasında bir koordinat sistemi olsun. O halde $(\partial_1|_p, \partial_2|_p, \dots, \partial_n|_p)$ koordinat vektörleri $T_p(M)$ teğet uzayının bir bazıdır ve

$$v = \sum_{i=1}^n v(y^i) \partial_i|_p \quad \forall v \in T_p(M).$$

Kanıt: $v \in T_p(M)$ ve U , η 'nin bir koordinat komşuluğu olsun. $v(c) = 0$ olduğu için genelliği bozmaksızın $y_i(p) = 0$ dolayısıyla $\eta(p) = 0$ olduğunu varsayabiliriz. $\forall \varepsilon > 0$ için $\eta(U) = \{q \in \mathbb{R}^n : |q| < \varepsilon\}$ olmak üzere $\eta(U)$ üzerinde diferansiyellenebilir bir g fonksiyonu için $\forall q \in \eta(U)$ ve $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere

$$g_i(q) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(tq) dt$$

ifadesini ele alalım. Kalkülüsün temel teoremini kullanarak $\eta(U)$ üzerinde

$$g = g(0) + \sum_{i=1}^n g_i u^i$$

ifadesine ulaşırız. $f \in \mathfrak{F}(M)$ ise g diferansiyellenebilir olduğundan $g = f \circ \eta^{-1}$ yazarak U üzerinde

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n f_i y^i$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadeye teğet vektör uygulanır ve $f_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ olduğu dikkate alınırsa

$$v(f)(p) = v\left(f(p) + \sum_{i=1}^n y_i f_i\right) = v(f(p)) + v\left(\sum_{i=1}^n y_i f_i\right) = \sum_{i=1}^n \{v(y_i) f_i + y_i(p) v(f_i)\}$$

ve buradan $y_i(p) = 0$ olduğundan

$$v = \sum_{i=1}^n v(y^i) \partial_i |_p$$

ifadesi elde edilir. Geriye $\partial_i |_p$ ($0 \leq i \leq n$) koordinat vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu göstermek kalır. Bunun için $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sum_{i=1}^n b_i \partial_i |_p = 0$ iken $1 \leq j \leq n$ için her iki tarafa x_j uygularsak

$$\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i} |_p = \sum_{i=1}^n b_i \delta_{ij} = b_j = 0$$

elde edilir ve M manifoldunun $\partial_i |_p$ koordinat vektörleri $T_p(M)$ 'nin bazı olur. ■

Bu teorem yardımı ile manifoldun herhangi bir p noktasındaki teğet uzay ile Öklidyen uzay arasında bir izomorfizma kurulabileceğinden $Boy(M) = BoyT_p(M)$.

2.1.10 Tanım: $\forall p \in M$ noktasına $Y_p \in T_p(M)$ vektörünü karşılık getiren $Y : p \rightarrow Y_p$ fonksiyonuna M üzerinde bir **vektör alanı** denir. M üzerindeki tüm vektör alanları kümesini $\chi(M)$ sembolüyle göstereceğiz.

Eğer f , M üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyonsa f 'in X vektör alanına göre türevi olan $Xf(p) = X_p(f)$ ifadesi de bir fonksiyondur. Her diferansiyellenebilir f fonksiyonu için Xf fonksiyonu da diferansiyellenebiliyorsa X vektör alanı diferansiyellenebilirdir denir [3].

X bir vektör alanı ve ξ^i , X vektör alanının $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ yerel koordinatlarına göre koordinat bileşenleri olmak üzere baz teoremi yardımıyla

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \partial_i$$

şeklinde yazılabilir. ξ^i fonksiyonları diferansiyellenebilirse X vektör alanı diferansiyellenebilirdir.

2.1.11 Tanım: Bir M manifoldu üzerinde teğet vektör uzayının dual uzayına **kotanjant uzay**, kotanjant uzayın elemanlarına ise **ko-vektör** adı verilir. Kotanjant uzayları $T_p(M)^*$ sembolüyle göstereceğiz.

Bir M manifoldunun her p noktasına $T_p(M)^*$ kotanjant uzayının ϑ_p elemanını atayan ϑ fonksiyonuna **1-form** denir. Yani

$$\forall p \in M \quad \vartheta : p \rightarrow \vartheta_p \in T_p(M)^*.$$

2.1.12 Örnek: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir f fonksiyonu için

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

ifadesi en genel haliyle 1-formdur. Bu ifadeye kalkülüste dış türev (*exterior derivative*) de denir.

2.1.13 Tanım: M , n -boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olsun. M manifoldunun bir W açık kümesi üzerinde herhangi U ve V vektör alanları ve $f \in \mathfrak{S}(M)$ için

$$[,] : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(U, V) \rightarrow [U, V]f = U(Vf) - V(Uf)$$

şeklinde tanımlı $[,]$ dönüşümüne U ve V vektör alanlarının **Lie parantez operatörü** denir.

Şimdi $[U, V]$ 'nin bir vektör alanı olduğunu gösterelim. Bunun için $(u^1, u^2, \dots, u^n)$ bir yerel koordinat sistemi olsun.

$$U = \sum_{j=1}^n \xi^j \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) \quad \text{ve} \quad V = \sum_{k=1}^n \eta^k \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \right)$$

olmak üzere $f \in C^\infty$ alalım. O halde Tanım 2.1.10'dan

$$[U, V]f = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\xi^j \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\eta^k \frac{\partial f}{\partial u^k} \right) - \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k} \left(\xi^j \frac{\partial f}{\partial u^j} \right) \right]$$

ifadesi elde edilir. Burada $f \in \mathfrak{S}(M)$, dolayısıyla sürekli olduğundan

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\xi^j \eta^k \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^k} - \xi^j \eta^k \frac{\partial^2 f}{\partial u^k \partial u^j} \right) = 0$$

olur ve

$$[U, V]f = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\xi^j \frac{\partial \eta^k}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial u^k} - \eta^k \frac{\partial \xi^j}{\partial u^k} \frac{\partial f}{\partial u^j} \right)$$

eşitliği elde edilir. Burada j, k aynı indis kümesi üzerinde olduğundan

$$[U, V]f = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi^k \frac{\partial \eta^j}{\partial u^k} \frac{\partial f}{\partial u^j} - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \eta^k \frac{\partial \xi^j}{\partial u^k} \frac{\partial f}{\partial u^j}$$

elde edilir. Her f için bu ifade doğru olduğundan

$$[U, V] = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\xi^k \frac{\partial \xi^j}{\partial u^k} - \eta^k \frac{\partial \xi^j}{\partial u^k} \right) \frac{\partial}{\partial u^j}$$

ifadesi elde edilir ki bu ifade $[U, V]$ 'nin bir vektör alanı formunda olduğunu gösterir. ■

2.1.14 Örnek: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için $U = y \frac{\partial}{\partial y}$ ve $V = z \frac{\partial}{\partial y}$ alalım. Diferansiyellenebilir bir f fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} [U, V]f &= \left[y \frac{\partial}{\partial y}, z \frac{\partial}{\partial y} \right] f \\ &= y \frac{\partial}{\partial y} \left(z \frac{\partial}{\partial y} (f) \right) - z \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial}{\partial y} (f) \right) \\ &= yz \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - z \frac{\partial f}{\partial y} - zy \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= -z \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Buradan görülür ki her diferansiyellenebilir f fonksiyonu için $[U, V] = -V$.

2.1.15 Yardımcı Teorem: M diferansiyellenebilir bir manifold olsun. Her $U, V, W \in \chi(M)$ için aşağıdaki eşitlikler gerçekleşir.

- i) $[U, V] = -[V, U],$
- ii) $[U, [V, W]] + [V, [W, U]] + [W, [U, V]] = 0.$

İlk özellik ters-simetri özeliği ve ikinci özellik Jakobi özdeşliği olarak adlandırılır.

2.1.16 Tanım: V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\lambda \in F, X, Y, Z \in V$ ve V üzerinde tanımlı bir ' $\circ$ ' ikili işlemi için

- (i) $X \circ Y \in V$,
- (ii) $\lambda(X \circ Y) = (\lambda X) \circ Y = X \circ (\lambda Y)$,
- (iii) $(X + Y) \circ Z = X \circ Z + Y \circ Z$,
- (iv) $X \circ (Y + Z) = X \circ Y + X \circ Z$.

koşulları sağlanıyorsa V 'ye bir **cebiri** denir.

Tanımdan görüldüğü üzere bir cebiri değişmeli ve birleşmeli olmak zorunda değildir. Ek olarak bu özellikleri sağlayan cebirlere sırasıyla birleşmeli ve değişmeli cebiri diyeceğiz.

2.1.17 Örnek: M bir manifold ve $U, V \in \chi(M)$ olmak üzere $\chi(M)$ kümesi, Tanım 2.1.13'te

$$[,]: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(U, V) \rightarrow [U, V] = U(V) - V(U)$$

biçiminde tanımlanan Lie parantez operatörü işlemine göre $\mathbb{R}$ üzerinde bir cebirdir. Bu cebire **Lie cebri** adı verilir. Bunu görmek için $U, V, W \in \chi(M)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için Tanım 2.1.16'daki şartları incelersek

- (i) Tanım 2.1.13'ten açıktır.
- (ii) $[\lambda U, V] = \lambda[U, V]$,
- (iii) $[U + V, W] = [U, W] + [V, W]$,
- (iv) $[U, V + W] = [U, V] + [U, W]$.

Şimdi manifoldlar üzerinde bir başka yapı olan tensör alanlarından bahsedeceğiz.

2.1.18 Tanım: Her biri aynı F cismi üzerinde olacak şekilde $V_1, V_2, \dots, V_r$ ve W vektör uzayları verilsin.

$$f(V_1, \dots, aV_i + \bar{a}\bar{V}_i, \dots, V_r) = af(V_1, \dots, V_i, \dots, V_r) + \bar{a}f(V_1, \dots, \bar{V}_i, \dots, V_r)$$

bilineer özelliğini sağlayan $f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \rightarrow W$ dönüşümüne **r -inci dereceden lineer fonksiyon** denir.

2.1.19 Uyarı: Yukarıdaki tanım W ve V_i 'ler bir K halkası üzerinde modül olarak alındığında da geçerlidir.

2.1.20 Tanım: R, K halkası üzerinde bir modül olsun. R 'den K 'ya tüm K -lineer fonksiyonların kümesi R^* olsun. Toplama ve K halkasının elemanlarıyla fonksiyonların çarpımı işlemlerine göre R^*, K üzerinde bir modül olur ve R^* 'a **R 'nin dual modülü** denir.

2.1.21 Tanım: $r \geq 0$ ve $s \geq 0$ her ikisi aynı anda sıfır olmayan tamsayılar olsun.

$$T : (R^*)^r \times R^s \rightarrow K$$

K -lineer fonksiyonuna R üzerinde (r, s) tipli bir **tensör** adı verilir. Bu tensör r -inci mertebeden **kontravaryant**, s -inci mertebeden **kovaryant** tensör şeklinde okunur. R^s ise $R \times R \times \dots \times R$ ifadesinin kısaltmasıdır. Burada $r = 0$ ise $R^s \rightarrow K$ ve $s = 0$ ise $(R^*)^r \rightarrow K$ ve $r = s = 0$ ise $T \in K$.

Yukarıdaki tanımı manifoldlar üzerine genelleştirirsek $\chi(M)$ bir vektör alanı, $\chi^*(M)$ bu vektör alanının duali ve $\mathfrak{S}(M) \in K$ olmak üzere

$$A : \chi^*(M)^r \times \chi(M)^s \rightarrow \mathfrak{S}(M)$$

lineer fonksiyonuna (r,s) tipli bir **tensör alanı** denir.

2.1.22 Örnek: $\mathbb{R}^n$ 'de determinant fonksiyonu n -lineer olduğundan n -inci mertebeden bir kovaryant tensördür.

2.1.23 Tanım: Bir M manifoldunda M 'nin her bir p noktasına $T_p(M)$ teğet uzayının k boyutlu D_p alt uzayını atayan dönüşüme bir distribüsyon (dağılım) denir.

2.2. RIEMANN MANİFOLDLARI

Bu kısımda Riemann manifoldlarının geometrisi incelenecektir. Riemann metriği, Riemann manifoldun tanımı, koneksiyon, kovaryant türev, eğrilik gibi kavramlardan bahsedilecektir. Bu kısımda [3,4] kaynaklarından yararlanılmıştır.

Manifold teorisi yüksek boyutlarda geometrileri anlamak için bizlere olanak tanır. Bu anlamda keyfi boyutlarda geometrik özellikleri (açı, uzunluk vs.) çalışmak için uygun bir araç Riemann manifoldlarıdır.

2.2.1 Tanım: M , n -boyutlu bir manifold olsun. $\forall U, V \in \chi(M)$,

- (i) $g(U, V) = g(V, U)$,
- (ii) $g(U, U) \geq 0$ ve $g(U, U) = 0 \iff U = 0$

koşullarını sağlayan $g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \mathfrak{S}(M)$, $(0,2)$ tipli g tensör alanına **Riemann metrik** denir. Üzerinde g Riemann metriği tanımlı bir M manifolduna **Riemann manifold** denir ve (M, g) ile gösterilir. Burada g tensör alanına birinci temel form da denir ve g , manifoldun geometrisinin içsel özelliklerini belirler.

Manifold üzerinde bir Riemann metriğinin olması herhangi bir vektör alanının uzunluğunu ve iki vektör arasındaki açıyı tanımlamamıza imkan sağlar.

$M, \langle, \rangle$ metrik tensörlü bir Riemann manifold olsun. X_p teğet vektörünün uzunluğu

$$\|X_p\| = \sqrt{\langle X, X \rangle_p}$$

reel sayısı ile tanımlıdır. Sıfırdan farklı $X_p, Y_p \in T_p(M)$ teğet vektörleri arasındaki θ açısı

$$\langle X_p, Y_p \rangle = \|X_p\| \|Y_p\| \cos \theta$$

şeklinde tanımlıdır.

2.2.2 Tanım: M , n -boyutlu bir manifold ve $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ ve $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$(i) \quad \nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y,$$

$$(ii) \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$$

koşullarını sağlayan $\nabla : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ lineer dönüşümüne M üzerinde bir **afin koneksiyon** denir. Burada ∇_X ifadesi X 'e göre **kovaryant türev** şeklinde okunur. Bir A kovaryant tensör alanının X 'e göre kovaryant türevi

$$(\nabla_X A)(X_1, X_2, \dots, X_s) = \nabla_X (A(X_1, X_2, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^s A(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_s)$$

şeklinde tanımlanır.

2.2.3 Tanım: Afın koneksiyonlu bir M manifoldu üzerinde $\forall U, V \in \chi(M)$,

$$T : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(U, V) \rightarrow T(U, V) = \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V]$$

biçimindeki (1,2) tensör alanına M manifoldunun **torsiyonu** (**burulması**) denir.

2.2.4 Teorem[4]: Bir (M, g) Riemann manifoldu üzerinde $\forall U, V, W \in \chi(M)$ için

$$(i) \quad [U, V] = \nabla_U V - \nabla_V U$$

$$(ii) \quad W(\langle U, V \rangle) = \langle \nabla_W U, V \rangle + \langle U, \nabla_W V \rangle$$

şartlarını sağlayan tek bir koneksiyon vardır. Bu koneksiyona **Levi-Civita (Riemann) koneksiyonu** denir ve aşağıda gösterilen **Koszul formülü** ile karakterize edilir.

$$2 \langle \nabla_U V, W \rangle = U(\langle V, W \rangle) + V(\langle W, U \rangle) - W(\langle U, V \rangle) - \langle U, [V, W] \rangle \\ + \langle V, [W, U] \rangle + \langle W, [U, V] \rangle .$$

Bu teorem bize Riemann manifoldlarının torsiyonsuz ve metrikle uyumlu (compatible) olduğunu söyler. Metrikle uyumlu olmayı $\nabla g = 0$, yani g 'nin paralel olması anlamında kullanıyoruz.

2.2.5 Tanım: M bir manifold ve ∇ bir Levi-Civita koneksiyonu olsun. $\forall U, V, W \in \chi(M)$ için

$$R(V, U)W = \nabla_V \nabla_U W - \nabla_U \nabla_V W - \nabla_{[V, U]} W$$

ifadesi (1,3) tipinde bir tensör alanıdır. Bu tensör alanına **Riemann eğrilik tensörü** denir.

2.2.6 Uyarı: Lie operatörü ve kovaryant türevin kendileri birer tensör olmamasına rağmen $R(U, V)W$ 'nin bir tensör olduğunu not edelim.

Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$(i) \quad R(V, U) = -R(U, V),$$

$$(ii) \quad R(U, V)W + R(V, W)U + R(W, U)V = 0,$$

$$(iii) \quad (\nabla_U R)(V, W) + (\nabla_V R)(W, U) + (\nabla_W R)(U, V) = 0.$$

Burada (ii)'ye I. Bianchi özdeşliği ve (iii)'e II. Bianchi özdeşliği adı verilir.

2.2.7 Tanım: (M, g) bir Riemann manifold ve R , Riemann eğrilik tensör alanı olsun. M manifoldunun teğet uzayındaki her V_i , $1 \leq i \leq 4$, için

$$R(V_1, V_2, V_3, V_4) = g(R(V_3, V_4)V_2, V_1)$$

biçiminde tanımlı 4-lineer dönüşümü $(0, 4)$ tipinde bir tensör alanı olup bu tensör alanına **Riemann eğrilik tensör alanı** adı verilir. Bu tensör için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- (i) $R(V_1, V_2, V_3, V_4) = -R(V_2, V_1, V_3, V_4),$
- (ii) $R(V_1, V_2, V_3, V_4) = -R(V_1, V_2, V_4, V_3),$
- (iii) $R(V_1, V_2, V_3, V_4) + R(V_1, V_3, V_4, V_2) + R(V_1, V_4, V_2, V_3) = 0,$
- (iv) $R(V_1, V_2, V_3, V_4) = R(V_3, V_4, V_1, V_2).$

2.2.8 Tanım: (M, g) bir Riemann manifold olsun. M 'nin teğet uzayındaki her bir $\mathcal{P}$ düzlemi için V_1 ve V_2 p düzleminin herhangi bir bazı olmak üzere

$$\kappa(\mathcal{P}) = \frac{R(V_1, V_2, V_1, V_2)}{g(V_1, V_1)g(V_2, V_2) - g(V_1, V_2)^2}$$

ifadesine M manifoldunun $\mathcal{P}$ düzlemine göre **kesit eğriliği** denir. Eğer V_1 ve V_2 ortonormal vektör alanları ise bu ifade

$$\kappa(\mathcal{P}) = R(V_1, V_2, V_1, V_2) = g(R(V_1, V_2)V_1, V_2)$$

halini alır.

2.2.9 Teorem: (M, g) bir Riemann manifold ve $\kappa(\mathcal{P})$ kesit eğriliği olsun. V_1 ve V_2 ortonormal vektör alanları olmak üzere $\kappa(\mathcal{P}) = R(V_1, V_2, V_1, V_2)$ ortonormal baz seçiminden bağımsızdır.

Kanıt: $\bar{V}_1 = aV_1 + bV_2$ ve $\bar{V}_2 = cV_1 + dV_2$ olacak şekilde $\bar{V}_1$ ve $\bar{V}_2$ başka bir ortonormal baz olsun. R 'nin lineerliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\kappa(\mathcal{P}) &= R(\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_1, \bar{V}_2) \\ &= R(aV_1 + bV_2, cV_1 + dV_2, \bar{V}_1, \bar{V}_2) \\ &= adR(V_1, V_2, \bar{V}_1, \bar{V}_2) - bcR(V_1, V_2, \bar{V}_1, \bar{V}_2)\end{aligned}$$

ve benzer şekilde son iki terim için de lineerlik kullanılarak $\kappa(p) = (ad - bc)^2 R(V_1, V_2, V_1, V_2)$ bulunur. Burada

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 &= aV_1 + bV_2 \\ \bar{V}_2 &= cV_1 + dV_2\end{aligned}$$

ifadesi için

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ortogonal matrisi göze alınırsa, $A^t = A^{-1} \implies A.A^t = I \implies \det(A).\det(A^t) = \det(I)$ ve $\det(A) = \det(A^t)$ olduğu dikkate alınırsa $(\det A)^2 = (ad - bc)^2 = 1$ ve böylece

$$R(\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_1, \bar{V}_2) = R(V_1, V_2, V_1, V_2)$$

bulunur. ■

2.2.10 Teorem: (M, g) bir Riemann manifold olsun. B ve T , $T_x(M)$ uzayında Tanım 2.2.7 deki (i)-(iv) özelliklerini sağlayan 4-lineer dönüşüm olsunlar. $V_1, V_2 \in T_x(M)$ olmak üzere $B(V_1, V_2, V_1, V_2) = T(V_1, V_2, V_1, V_2)$ ise $B = T$ 'dir.

Kanıt: $B(V_1, V_2, V_1, V_2) = T(V_1, V_2, V_1, V_2)$ ise $(B - T)(V_1, V_2, V_1, V_2) = 0$. $T = 0$ olduğunu varsayabiliriz ki bu durumda yukarıdaki eşitlikte B yerine $B - T$ ve T yerine 0 almış oluruz.

Dolayısıyla her $V_1, V_2 \in T_x(M)$ için $B(V_1, V_2, V_1, V_2) = 0$ olduğunu varsayabiliriz. Son eşitlikte V_2 yerine $V_2 + V_4$ alırsak

$$B(V_1, V_2 + V_4, V_1, V_2 + V_4) = B(V_1, V_2, V_1, V_2 + V_4) + B(V_1, V_4, V_2, V_2 + V_4) = 0.$$

Buradan

$$B(V_1, V_2, V_1, V_2) + B(V_1, V_2, V_1, V_4) + B(V_1, V_4, V_1, V_2) + B(V_1, V_4, V_1, V_4) = 0$$

ve Tanım 2.2.7 (iv) kullanılarak $B(V_1, V_2, V_1, V_4) = 0$ elde edilir. Son bulduğumuz ifade için V_1 yerine $V_1 + V_3$ alınırsa benzer şekilde lineerlik kullanılarak

$$B(V_1, V_2, V_1, V_4) + B(V_1, V_2, V_3, V_4) + B(V_3, V_2, V_1, V_4) + B(V_3, V_2, V_3, V_4) = 0$$

elde edilir ve

$$B(V_1, V_2, V_3, V_4) + B(V_3, V_2, V_1, V_4) = 0$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadeye önce Tanım 2.2.7 (iv) uygulanırsa

$$B(V_1, V_2, V_3, V_4) + B(V_1, V_4, V_3, V_2) = 0,$$

sonra Tanım 2.2.7 (ii) uygulanırsa

$$B(V_1, V_2, V_3, V_4) = B(V_1, V_4, V_2, V_3)$$

bulunur. Bu durumda

$$B(V_1, V_2, V_3, V_4) = B(V_1, V_3, V_4, V_2)$$

elde ederiz. Bu denklemler bizi

$$3B(V_1, V_2, V_3, V_4) = B(V_1, V_2, V_3, V_4) + B(V_1, V_4, V_2, V_3) + B(V_1, V_3, V_4, V_2)$$

sonucuna götürür ki son ifade Tanım 2.2.7 (iii)'den dolayı sıfırdır. Dolayısıyla $B(V_1, V_2, V_3, V_4) = 0$ bulunur. ■

2.2.11 Sonuç: Tanım 2.2.8'den (M, g) Riemann manifoldunun $T_x(M)$ teğet uzayındaki tüm $\mathcal{P}$ düzlemleri için $\kappa(\mathcal{P})$ değerlerinin x noktasında Riemann eğrilik tensörünü belirlediğini söyleyebiliriz.

2.2.12 Tanım: (M, g) bir Riemann manifold olsun. $\kappa(\mathcal{P})$, M 'nin tüm x noktaları ve $T_x(M)$ deki tüm $\mathcal{P}$ düzlemleri için sabitse M 'ye **sabit eğrilikli uzay** denir. Sabit eğrilikli bir Riemann manifoldu **uzay formu** olarak adlandırılır.

2.2.13 Teorem: (M, g) k sabit eğrilikli bir Riemann manifold ve R , onun eğrilik tensörü olsun. O halde

$$R(U, V)W = k[g(V, W)U - g(U, W)V].$$

2.2.14 Tanım: (M, g) bir Riemann manifold ve ∇ bu manifoldun Levi-Civita koneksiyonu olsun. R Riemann eğrilik tensörü ve $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ bir yerel ortonormal çatı alanı olmak üzere

$$S(U, V) = \sum_{i=1}^n g(R(E_i, U)V, E_i)$$

ifadesi $(0,2)$ tipinde simetrik bir tensör tanımlar. Bu tensöre **Ricci eğrilik tensörü** denir. Bu tensörün simetrik olduğu Riemann eğrilik tensörünün özeliğinden açıktır. Eğer $a \in \mathbb{R}$ için Ricci tensörü

$$S(U, V) = ag(U, V)$$

şeklinde ise M 'ye **Einstein manifoldu** denir. Ricci tensöründen hareketle M 'nin r **skaler eğriliği**

$$r = \sum_{i=1}^n S(E_i, E_i)$$

formülü ile tanımlanır. Özel olarak $n = 2$ ise $G = \frac{1}{2}r$ Gauss eğriliğidir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
r &= \sum_{j=1}^2 S(E_j, E_j) \\
&= \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 g((R(E_i, E_j)E_j, E_i)) \\
&= \sum_{j=1}^2 g((R(E_j, E_1)E_1, E_j)) + g((R(E_j, E_2)E_2, E_j)) \\
&= g(R(E_1, E_1)E_1, E_1) + g(R(E_1, E_2)E_2, E_1) + g(R(E_2, E_1)E_1, E_2) + g(R(E_2, E_2)E_2, E_2) \\
&= g(R(E_1, E_2)E_2, E_1) + g(R(E_2, E_1)E_1, E_2) \\
&= R(E_1, E_2, E_1, E_2) + R(E_2, E_1, E_2, E_1) \\
&= 2R(E_1, E_2, E_1, E_2). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.3. RIEMANN MANİFOLDLARIN ALT MANİFOLDLARI

Bu bölümde Riemann alt manifold kavramı , Riemann alt manifoldlarında ikinci temel form, Gauss, Codazzi ve Ricci denklemleri, minimallik, tümel geodezik ve tümel umbilik kavramları tanıtılacaktır. Bu bölümde [1,2,3] kaynaklarından yararlanılmıştır.

2.3.1 Tanım: M ve N Riemann manifoldlar ve $Q : N \rightarrow M$, bir düzgün dönüşüm olsun. her $p \in M$ noktasında $dQ_p : T_p(N) \rightarrow T_{Q_p}M$ türev dönüşümü bire-bir ise Q dönüşümüne bir **daldırma (immersion)** denir. Eğer $Q : N \rightarrow M$ daldırmasının kendisi bire-bir ise Q bir **gömme** adını alır. Q dönüşümü ayrıca bir izometri ise yukarıdaki tanımlar sırasıyla **izometrik daldırma** ve **izometrik gömme** biçimini alır.

2.3.2 Örnek:

$$\begin{aligned}\gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\rightarrow \gamma(s) = (s^3 - 4s, s^2 - 4)\end{aligned}$$

dönüşümü bir daldırmadır. Fakat gömme değildir. Gerçekten J, γ dönüşümünün Jakobyen matrisi olmak üzere $[J\gamma] = (3s^2 - 4, 2s)$ ve $[J\gamma]|_0 \neq 0$ olduğundan $\text{Rank}[J\gamma]=1$. Dolayısıyla γ bir daldırmadır. Ancak γ bir gömme değildir, çünkü $\gamma(2)=\gamma(-2)$, fakat $-2 \neq 2$ olduğundan γ dönüşümü bire-bir değildir.

Şimdi bir Riemann manifoldun metrik yapısı ile onun alt manifoldunun metrik yapısı arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

2.3.3 Teorem[2]: M ve N diferansiyellenebilir manifoldlar ve $Q: N \rightarrow M$ bir izometrik daldırma olsun. $Q_*\varphi$, Q dönüşümünün türev dönüşümünü ve $Q^*\varphi$ ise geri çekme dönüşümünü (pullback map) göstermek üzere eğer φ , M üzerinde pozitif tanımlı, simetrik bilinear form ise $Q^*\varphi$ de N üzerinde pozitif tanımlı, simetrik bilinear formdur.

(M, g) ve N sırasıyla m -boyutlu bir Riemann manifoldu ve n -boyutlu keyfi bir manifold olsun. Teorem 2.3.3'e göre herhangi bir $i: N \rightarrow M$ izometrik daldırması için i^*g , N üzerinde bir Riemann metriktir. Bu metriği $\tilde{g}$ ile gösterelim. Bu durumda $(N, \tilde{g})$ bir Riemann manifoldu olur.

Buradan açıkça söyleyebiliriz ki çalışmamız boyunca bir Riemann manifoldun metriğini onun alt manifoldunun metriği olarak kabul edeceğiz. Bir başka deyişle indirgenmiş metrik olarak yine g 'yi alacağız.

2.3.4 Tanım: M bir Riemann manifold ve N de onun alt manifoldu olsun. Her $X \in T_x(N)$ için $g(V, X) = 0$ koşulunu sağlayan bir $V \in T_x(M)$ vektörüne x noktasında N 'nin normal vektörü denir.

$T_p(N)$ uzayının normal vektörlerinden oluşan uzayı $T_p^\perp(N)$ ile bir $p \in N$ noktasında N alt

manifoldunun tüm normal vektör alanlarının kümesini de $\chi^\perp(N)$ sembolüyle göstereceğiz. Bu durumda $T_p(M)$ uzayı için

$$T_p(M) = T_p(N) \oplus T_p^\perp(N) \quad (2.1)$$

toplamı elde edilir. Bu denklem yardımıyla N alt manifoldunun teğet demeti olan

$$TN = \bigcup_{p \in N} T_p(N) \quad (2.2)$$

eşitliğini ve normal demeti olan

$$TN^\perp = \bigcup_{p \in N} T_p^\perp(N) \quad (2.3)$$

eşitliğini ve

$$TM = TN \oplus TN^\perp \quad (2.4)$$

denklemini elde edebiliriz.

$\bar{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla M Riemann manifoldu ve onun N alt manifoldunun koneksiyonları olsun. ∇ koneksiyonu M manifoldundan indirgenmiş koneksiyon olarak tanımlanır (2.1) denkleminde $\bar{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonunun N alt manifoldunda iki ayrı bileşeni olacaktır. Bu bileşenleri $X, Y \in \chi(N)$ için

$$(\bar{\nabla}_X Y)^T = \nabla_X Y \quad \text{ve} \quad (\bar{\nabla}_X Y)^\perp = h(X, Y) \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlarsak

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (2.6)$$

elde edilir. (2.6) denklemini **Gauss formülü** olarak biliriz. Burada ∇ afin koneksiyon ve h (1,2) tipinde simetrik bir tensör alanıdır. Bu tensör alanına N 'nin **ikinci temel formu** denir. Gerçekten, koneksiyonun lineer olduğu kovaryant türevden açıktır. Üstelik $f, g \in \mathfrak{S}(N)$ ve

$X, Y \in \mathcal{X}(N)$ olmak üzere $\bar{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonunun lineerliği ve (2.6) denkleminde

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{(fX)}(gY) &= f\bar{\nabla}_X(gY) \\ &= f[(Xg)Y + g\bar{\nabla}_X Y] \\ &= f(Xg)Y + [fg\nabla_X Y + fgh(X, Y)]\end{aligned}$$

ve (2.6) denkleminde göre teğet ve normal kısımları kıyaslanırsa

$$\nabla_{(fX)}(gY) = f(Xg)Y + fg\nabla_X Y$$

$$h(fX, gY) = fgh(X, Y)$$

elde edilir ve ∇ bir afin koneksiyondur. Ek olarak burada $h(X, Y)$ normal vektör alanının bilineer olduğu da görölmüş olur.

Şimdi ∇ koneksiyonunun Levi-Civita koneksiyonu olduğunu gösterelim.

2.3.5 Yardımcı Teorem: $\bar{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla M Riemann manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu ve N alt manifoldunun bir koneksiyonu olmak üzere ∇ , N alt manifoldu üzerinde bir Levi-Civita koneksiyondur.

Kanıt: Keyfi $U, V, W \in \mathcal{X}(N)$ için $\bar{\nabla}g = 0$ olduğundan $U(g(V, W)) = g(\bar{\nabla}_U V, W) + g(V, \bar{\nabla}_U W)$ olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned}U(g(V, W)) &= g(\bar{\nabla}_U V, W) + g(V, \bar{\nabla}_U W) \\ &= g(\nabla_U V + h(U, V), W) + g(V, \nabla_U W + h(U, W)) \\ &= g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_U W)\end{aligned}$$

Buradan $\nabla g = 0$ olduğu görölür. Şimdi torsiyonsuz olduğunu görmek için $\bar{\nabla}$ Levi-Civita

koneksiyonu ve (2.6) denkleminde

$$[U, W] = \bar{\nabla}_U V - \bar{\nabla}_V U = \nabla_U V + h(U, V) - \nabla_V U + h(V, U).$$

Son denklemin teğet ve normal bileşenleri kıyaslanırsa

$$[U, V] = \nabla_U V - \nabla_V U \quad , \quad h(U, V) = h(V, U)$$

elde edilir. Buradan ∇ 'nın torsiyonsuz ve h 'nin simetrik olduğu görülmüş olur. ■

$V \in \chi^\perp(N)$ olmak üzere $A_V : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ bilinear, simetrik (1,1) tensör alanına **Weingarten operatörü** denir. $V \in \chi^\perp(N)$ ve $X \in \chi(M)$ için $A_V X = (\bar{\nabla}_X V)^T$ olarak tanımlanır. A_V operatörünün bilinear ve simetrik olduğu Yardımcı Teorem 2.3.5'in kanıtındaki gibi gösterilebilir.

$\bar{\nabla}_X V$ koneksiyonunun normal bileşeni ise $\nabla_X^\perp V$ ile gösterilir. $\nabla_X^\perp V$ kovaryant türevinin $T_p(M)$ 'de bir afin koneksiyon olduğunda kolayca görülebilir. Bu bilgilere göre

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^\perp V$$

yazabiliriz. Bu denklem **Weingarten formülü** olarak bilinir.

Şimdi Weingarten operatörü ile ikinci temel form arasındaki ilişkiyi ifade edelim. $V \in \chi^\perp(N)$ ve $X, Y \in \chi(M)$ için $g(V, Y) = 0$ dır. Bu ifadeye kovaryant türev uygularsak Yardımcı Teorem 2.3.5'e benzer bir kanıtla

$$g(A_V X, Y) = g(h(X, Y), V) \tag{2.7}$$

eşitliği bulunur.

Şimdi Riemann geometride önemli bir yeri olan bir Riemann manifold ile onun alt manifoldunun eğrilikleri arasındaki ilişkiyi veren *Gauss*, *Codazzi*, *Ricci* denklemlerini ifade edelim.

$X, Y, Z \in \chi(N)$ ve $V \in \chi^\perp(N)$ için $h(X, Y)$ (1,2) tensörünün kovaryant türevini alırsak

$$(\nabla_Z h)(X, Y) = \nabla_Z^\perp h(X, Y) - h(\nabla_Z X, Y) - h(X, \nabla_Z Y)$$

denklemini elde ederiz. Benzer şekilde (2.7) ifadesinin yardımıyla

$$(\nabla_Z A)_V X = \nabla_Z(A_V X) - A_{\nabla_Z^\perp V} X - A_V \nabla_Z X$$

denklemini elde ederiz. $\tilde{R}$ ve R 'yi sırasıyla M Riemann manifoldu ve N alt manifoldunun eğrilik tensörleri olarak yazalım. Gauss ve Weingarten formülleri yardımıyla

$$\tilde{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z - A_{h(Y, Z)}X + A_{h(X, Z)}Y + (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) \quad (2.8)$$

denklemini elde edilir. Bu denkleme N 'ye teğet bir vektör alanı ile iç çarpım işlemi uygulanırsa

$$g(\tilde{R}(X, Y)Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) - g(h(Y, Z), h(X, W)) + g(h(X, Z), h(Y, W))$$

denklemini elde edilir. Bu denkleme **Gauss denklemi** adı verilir. (2.8) denkleminin normal bileşeni olan

$$(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z)$$

denklemine **Codazzi denklemi** denir.

Şimdi normal demetteki eğrilikleri inceleyelim.

$TN^\perp$ normal demetinin eğrilik tensörü $R^\perp$, $\forall X, Y \in \chi(N)$ ve $\forall V \in \chi^\perp(N)$ için

$$R^\perp(X, Y)V = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp V - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp V - \nabla_{[X, Y]}^\perp V \quad (2.9)$$

ile ifade edilir. Bu denklemde Gauss ve Weingarten formüllerini kullanırsak

$$\tilde{R}(X, Y)V = R^\perp(X, Y)V - h(X, A_V Y) + h(Y, A_V X) - (\nabla_X A)_V Y + (\nabla_Y A)_V X \quad (2.10)$$

denklemini ulaşıyoruz. $[A_U, A_V] = A_U A_V - A_V A_U$ olmak üzere N alt manifolduna normal bir U

vektör alanı ile $-h(X, A_V Y) + h(Y, A_V X)$ denkleminde iç çarpım uygularsak

$$g(-h(X, A_V Y) + h(Y, A_V X), U) = g([A_U, A_V]X, Y)$$

elde ederiz. (2.10) denkleminde U normal vektör alanı ile iç çarpım işlemi uygulanır ve son eşitliği dikkate alırsak

$$g(\tilde{R}(X, Y)V, U) = g(R^\perp(X, Y)V, U) + g([A_U, A_V]X, Y) \quad (2.11)$$

şeklindeki **Ricci denklemi** elde edilir.

2.3.6 Tanım: $R^\perp$, N alt manifoldunun normal eğriliği olmak üzere $R^\perp = 0$ ise N alt manifoldunun normal konneksiyonuna **flat (düz)** denir. $R = 0$ ise manifoldun kendisi flat'tir.

2.3.7 Yardımcı Teorem[3]: $\tilde{R}$ ve R sırasıyla M Riemann manifoldu ve onun N alt manifoldunun eğrilik tensörleri olmak üzere $X, Y \in \chi(N)$ ve $V \in \chi^\perp(N)$ için $(\tilde{R}(X, Y)V)^\perp = 0$ olduğunda, N alt manifoldunun normal konneksiyonu flat'tir ancak ve ancak N alt manifoldunun ikinci temel formu komütatiftir (değişmeli).

Kanıt: İlk olarak N 'nin normal konneksiyonunun flat olduğunu varsayalım. Bu durumda Tanım 2.3.6'dan $R^\perp = 0$. (2.10) denkleminin normal kısmından

$$\tilde{R}(X, Y)V = R^\perp(X, Y)V - h(X, A_V Y) + h(Y, A_V X)$$

olduğundan $R^\perp(X, Y)V = 0$ ise $-h(X, A_V Y) + h(Y, A_V X) = 0$ elde edilir. Buradan

$$0 = g(-h(X, A_V Y) + h(Y, A_V X), U) = g([A_U, A_V]X, Y)$$

elde edilir ki ikinci temel form komütatiftir.

Tersine, ikinci temel form komütatif olsun. Bu durumda $[A_U, A_V] = 0$ ve $(\tilde{R}(X, Y)V)^\perp = 0$ olduğundan $g(\tilde{R}(X, Y)V, U) = g(R^\perp(X, Y)V, U) + g([A_U, A_V]X, Y)$ denkleminde

$R^\perp(X, Y)V = 0$ elde edilir. ■

2.3.8 Uyarı: Sabit eğrilikli uzaylarda $(\tilde{R}(X, Y)V)^\perp = 0$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.3.7' den N alt manifoldunun normal koneksiyonunun flat olması için gerek ve yeter koşul N alt manifoldunun ikinci temel formunun komütatif olmasıdır diyebiliriz.

Eğer $\tilde{R}(X, Y)Z, N$ 'ye teğetse ,yani $(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = 0$ ise, Codazzi denklemi

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z)$$

halini alır. Eğer M, c sabit eğrilikliyse

$$g(\tilde{R}(X, Y)Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) - g(h(X, W), h(Y, Z)) + g(h(Y, W), h(X, Z))$$

şeklindeki Gauss denklemi Teorem 2.2.13'ten

$$c[g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)] = g(R(X, Y)Z, W) - g(h(X, W), h(Y, Z)) + g(h(Y, W), h(X, Z)).$$

Böylece

$$g(R(X, Y)Z, W) = c[g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)] + g(h(Y, Z), h(X, W)) - g(h(X, Z), h(Y, W)). \quad (*)$$

2.3.9 Tanım M Riemann manifoldunun N alt manifoldu için h ikinci temel form, A_V Weingarten operatörü olmak üzere $h = 0$ ya da $A_V = 0$ ise N alt manifolduna **tümel geodezik** denir.

2.3.10 Tanım: M bir Riemann manifold ve N onun alt manifoldu ve I, N 'nin birim dönüşümü olsun. $V \in \chi(N)$ ve $\theta \in \mathfrak{S}(N)$ olmak üzere $A_V = \theta I$ ise V ye N üzerinde bir **umbilik (tümsek) kesit** denir. Eğer N alt manifoldu her bir V yerel normal kesitine göre umbilikse N 'ye **tümel umbilik alt manifold** denir.

N bir alt manifold ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ise $T_x(N)$ de bir ortonormal baz olsun.

$$izh = \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i)$$

olmak üzere

$$H = \frac{1}{n}(izh)$$

ifadesine N alt manifoldunun **ortalama eğrilik vektörü** denir. (izh , h ikinci temel formunun izidir.) Eğer $H = 0$ ise N 'ye **minimal alt manifold** denir.

2.3.11 Teorem: N , bir M Riemann manifoldunun alt manifoldu olsun. H , N alt manifoldunun ortalama eğrilik vektörü ve h ikinci temel formu olmak üzere N alt manifoldunun tümel umbilik olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \mathcal{X}(N)$ ve $V \in \mathcal{X}^\perp(N)$, $h(X, Y) = g(X, Y)H$ olmasıdır.

Kanıt: N tümel umbilik bir alt manifold olsun. Bu durumda Tanım 2.3.10'dan $A_V X = \theta X$ ve (2.7) eşitliğinden

$$g(A_V X, Y) = g(h(X, Y), V) \iff \theta g(X, Y) = g(h(X, Y), V).$$

Son eşitlikte $X = Y = e_i$ yazılır ve i üzerinden toplam alınırsa

$$\theta \left(\sum_{i=1}^n g(e_i, e_i) \right) = \sum_{i=1}^n g(h(e_i, e_i), V) \iff \theta n = n \cdot g(H, V) \iff \theta = g(H, V)$$

ve θ 'yı $\theta g(X, Y) = g(h(X, Y), V)$ ifadesinde yerine yazarsak

$$\iff g(H, V)g(X, Y) = g(h(X, Y), V)$$

$$\iff g(Hg(X, Y), V) = g(h(X, Y), V) \quad (\forall V \in \mathcal{X}^\perp(N))$$

$$\iff h(X, Y) = Hg(X, Y)$$

olur ve istenen elde edilir. ■

2.3.12 Yardımcı Teorem: Minimal ve tümel umbilik olan herhangi bir N alt manifoldu tümel geodeziktir.

Kanıt: $\forall X, Y \in \chi(N)$, $V \in \chi^\perp(N)$ ve $\theta \in \mathfrak{Z}(N)$ için $H = 0$ ve $A_V = \theta I$ ise $h = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$$g(A_V X, Y) = g(h(X, Y), V) \implies g((\theta X), Y) = g(h(X, Y), V)$$

yazalım. Buradan $\theta g(X, Y) = g(h(X, Y), V)$ olur. Burada $X = Y = e_i$ yazar ve i üzerinden toplam alırsak

$$\theta g\left(\sum_{i=1}^n e_i, e_i\right) = g\left(\sum_{i=1}^n h(e_i, e_i), V\right),$$

yani

$$\theta = g\left(\frac{1}{n} \text{tr} h, V\right) \implies \theta = g(H, V)$$

denkleme ulaşılır. $H = 0$ olduğundan $A_V = 0$ olur ki istenen elde edilir. ■

2.4. HEMEN HEMEN KOMPLEKS MANİFOLDLAR

Bu kısımda hemen hemen kompleks manifoldlara giriş yapacağız. Yaklaşık Kaehleryen manifoldların yapısını oluşturan manifold tiplerinden bahsedeceğiz. Bu kısımda [3,7,9,17,28] kaynaklarından yararlanılmıştır.

2.4.1 Tanım: M bir reel diferansiyellenebilir bir manifold olsun. M 'nin her x noktasında I , $T_x(M)$ teğet uzayının özdeşlik dönüşümü olmak üzere

$$J^2 = -I \tag{2.12}$$

özelini sağlayan J lineer endomorfizmine **hemen hemen kompleks yapı**, hemen hemen kompleks yapıları bir manifolda ise **hemen hemen kompleks manifold** denir.

2.4.2 Önerme[28]: Her hemen hemen kompleks manifold çift boyutlu ve yönlendirilebilirdir.

2.4.3 Tanım: (M, g) bir Riemann manifold ve J , M 'nin teğet uzayındaki hemen hemen kompleks yapısı olsun. $\forall U, V \in \chi(M)$ için

$$\mathcal{N} : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(U, V) \rightarrow \mathcal{N}(U, V) = [JU, JV] - J[U, JV] - J[JU, V] - [U, V] \quad (2.13)$$

şeklindeki (1,2) tensör alanına J hemen hemen kompleks yapısının burulma tensör alanı denir. Özel olarak **Nijenhuis tensörü** olarak adlandırılır. Nijenhuis tensör alanının

$$\mathcal{N}(U, V) = -\mathcal{N}(V, U) \quad , \quad \mathcal{N}(JU, V) = \mathcal{N}(U, JV) = -J(\mathcal{N}(U, V)) \quad (2.14)$$

özellikleri (2.12) denklemi ve Lie parantez operatörünün ters-simetrik özeliği kullanılarak kolayca görülebilir.

2.4.4 Uyarı: J hemen hemen kompleks yapısının Nijenhuis tensörü $\mathcal{N} = 0$ ise hemen hemen kompleks manifold *kompleks manifold* halini alır [24]. Ayrıca J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilirdir ancak ve ancak $\mathcal{N} = 0$ [3].

J hemen hemen kompleks yapısı (1,1) tipinde bir tensör olduğundan tensör türevi alınabilir. Bu türevle J hemen hemen kompleks yapısı üzerinde kovaryant türev yorumuyla birlikte yeni sonuçlar elde edebileceğiz. Şöyle ki $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere ∇J türevi

$$(\nabla_X J)Y = \nabla_X JY - J\nabla_X Y \quad (2.15)$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $\nabla J = 0$ ise J hemen hemen kompleks yapısına paraleldir diyeceğiz. Bu türev bize bundan sonra çalışacağımız manifoldların sınıflandırılmasında belirleyici olacaktır.

2.4.1. Hemen Hemen Hermityen Manifoldlar

2.4.5 Tanım : M, J hemen hemen kompleks yapılı bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M üzerinde $\forall U, V \in \chi(M)$,

$$g(JU, JV) = g(U, V) \quad (2.16)$$

koşulunu sağlayan bir Riemann metriği varsa g 'ye **Hermityen metrik** denir. Hermityen metrikli bir hemen hemen kompleks manifoldda **hemen hemen Hermityen manifold** denir. (2.16) eşitliği bize bir hemen hemen Hermityen manifoldun herhangi iki vektör alanının J hemen hemen kompleks yapısı altındaki uzaklığının korunduğunu ifade eder. Yani J hemen hemen kompleks yapısının izometri özelliği kazandığı manifoldlar hemen hemen hermityen manifoldlardır. Bir hemen hemen kompleks manifold üzerinde bir Hermityen metrik tanımlanması olması için bu manifoldun parakompakt olması gerekir. Bu sebeple bu kısımda bir kaç topolojik hatırlatmaya ihtiyaç duyacağız.

2.4.6 Tanım (Yerel Sonluluk): X bir topolojik uzay olsun. I bir indis kümesi ve $U = \{ U_\alpha \mid \alpha \in I \}$, X uzayının bir açık örtüsü ,yani $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, olsun. Her $x \in X$ için $A = \{ \alpha \in I : U_\alpha \cap V_x \neq \emptyset \}$ kümesi sonlu olacak şekilde bir V_x komşuluğu varsa X topolojik uzayına yerel sonludur denir. Bir başka deyişle X uzayının bir U açık örtüsü uzayın her x noktası için U örtüsündeki sonlu sayıda küme ile arakesiti olan bir komşuluğa sahipse X topolojik uzayı yerel sonludur.

2.4.7 Tanım (Arınmış Örtü): X bir topolojik uzay A ve B farklı iki indis kümesi olsun. $U = \{ U_\alpha : \alpha \in A \}$, X uzayının bir açık örtüsü ve $V = \{ V_\beta : \beta \in B \}$, X uzayının bir başka açık örtüsü olsun. Her $V_\beta \in V$ için U örtüsünde $V_\beta \subseteq U_\alpha$ olacak şekilde bir U_α açık kümesi varsa V 'ye U 'dan arınmış (refinement) bir örtü denir.

2.4.8 Tanım (Parakompakt): Bir X topolojik uzayının her açık örtüsü yerel sonlu açık bir arınmış örtüye sahip bir Hausdroff uzayıysa X 'e **parakompakt uzay** denir.

2.4.9 Tanım: M bir topolojik manifold olsun. M üzerinde bir f fonksiyonu için M 'nin $\{f(p) \neq 0 \mid p \in M\}$ alt kümesinin kapanışına f fonksiyonunun destek kümesi denir ve $\text{supp}f$ ile gösterilir.

2.4.10 Tanım (Birim Parçalanışı): M n -boyutlu bir topolojik manifold ve A bir indis kümesi olsun. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ yerel sonlu açık örtüsü için aşağıdaki şartları sağlayan $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ şeklindeki $f_\alpha \in \mathfrak{F}(M)$ fonksiyonlarının var olduğunu varsayalım.

(i) $\forall \alpha \in A, \quad 0 \leq f_\alpha \leq 1$

(ii) $\{\text{supp}f_\alpha : \alpha \in A\}$ kümesi yerel sonludur. Yani $\forall \alpha$ için $\text{supp}f_\alpha$ kümesi U_α açık örtüsündedir.

(iii) $\sum_\alpha f_\alpha = 1$.

Bu durumda f_α 'ya $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ açık örtüsüne bağlı **birimin parçalanışı** denir.

Birim parçalanışı, yerel olarak tanımlı nesnelerden global nesnelere geçmek için vazgeçilmez bir araçtır. Bu özeliğini aşağıdaki teoremden daha iyi anlayabiliriz.

2.4.11 Teorem[9]: M parakompakt bir topolojik manifold olsun. O halde M üzerinde bir Riemann metrik tanımlıdır.

Kanıt: (U_α) , M manifoldunun herhangi bir koordinat sistemine göre açık örtüsü ve $f_\alpha \in C^\infty$, bu örtüye bağlı yerel sonlu birimin bir parçalanışı olsun. M parakompakt olduğundan Tanım 2.4.8 ve Tanım 2.4.10'dan bu seçimi yapabiliriz. Şimdi $X_1^\alpha, \dots, X_n^\alpha, U_\alpha$ ile ilişkili herhangi bir koordinat sistemi olsun. O halde X_j^α ile U_α üzerinde tanımlı $\langle, \rangle_\alpha$ Riemann iç çarpımı vardır ve M üzerinde sonlu α sayıları için Tanım 2.4.9'dan $f_\alpha(p) \neq 0$ olduğundan

$$\langle, \rangle = \sum_\alpha f_\alpha \langle, \rangle_\alpha$$

ile tanımlı toplamın sağ tarafı sonlu olup $\langle, \rangle$, $T_p(M)$ üzerinde pozitif tanımlıdır. Öte yandan yeterince küçük p 'ler ve sonlu α sayısı için p 'nin bir U koordinat komşuluğu olarak

$U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ 'dir ve Tanım 2.4.10'dan $\text{supp} f$, U_α 'da içerildiğinden $\langle, \rangle$ 'nin bileşenlerini U 'nun koordinat sistemine göre $\langle e_i, e_j \rangle = \sum_\alpha f_\alpha(\langle e_i, e_j \rangle_\alpha)$ olarak yazabiliriz. Böylece $\langle, \rangle$ iç çarpımı düzgündür ve dolayısıyla M üzerinde $\langle, \rangle$ ile bir Riemann metrik tanımlıdır.

2.4.12 Önerme[3]: Her parakompakt hemen hemen kompleks manifold üzerinde bir Hermityen metrik tanımlıdır.

Kanıt: M manifoldu parakompakt olsun. O halde Teorem 2.4.11'den M üzerinde bir g Riemann metriği tanımlıdır. Burada her $U, V \in \chi(M)$ için

$$h(U, V) = g(U, V) + g(JU, JV)$$

yazarsak

$$h(JU, JV) = g(JU, JV) + g(J(JU), J(JV)) = g(JU, JV) + g(-U, -V) = h(U, V).$$

Böylece h bir Hermityen metriktir. ■

2.4.13 Tanım: M , g Hermityen metrikli ve J hemen hemen kompleks yapıları bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\Phi : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \mathfrak{S}(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow \Phi(X, Y) = g(X, JY) \tag{2.17}$$

şeklinde tanımlı $(0,2)$ tensör alanına M manifoldunun **temel 2-formu** denir. $\Phi(JX, JY) = \Phi(X, Y)$ olduğu kolayca görülebilir. $d\Phi = 0$ ise temel 2-form kapalıdır denir. Bir hemen hemen kompleks manifold üzerinde tanımlı g Hermityen metriğinin temel 2-formu kapalıysa bu metriğe **Kaehleryen metrik** adı verilir. Kaehleryen metrikli bir kompleks manifoldda **Kaehleryen manifold** denir.

2.4.14 Teorem[3]: M, g Hermityen metrikli ve J hemen hemen kompleks yapılı bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. ∇, g ile tanımlı Levi-Civita koneksiyonu olsun. O halde aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

(i) $\nabla J = 0$.

(ii) $\nabla \Phi = 0$.

(iii) J yapısı burulmasız ve temel 2-formu kapalıdır. Yani; $\mathcal{N} = 0$ ve $d\Phi = 0$.

Bir hemen hemen kompleks manifold üzerinde tanımlı g Hermityen metriğine temel 2-formu kapalı ise Kaehleryen metrik ve Kaehleryen metrikli bir kompleks manifolda ise Kaehleryen manifold dendiğini ifade etmiştik. Bu bilgilere göre Teorem 2.4.14'ten (iii), (i) ye denk olduğundan bir Hermityen manifoldun Kaehleryen manifold olabilmesi için gerek ve yeter şart $\nabla J = 0$ olmasıdır.

2.4.2. Hemen Hemen Hermityen Manifoldların Alt Manifoldları

Bir M Riemann manifoldunda J hemen hemen kompleks yapısının M 'nin N alt manifoldu için nasıl davranış gösterdiği geometriciler için bir merak konusu olmuştur. Bu açıdan N , M 'nin alt manifoldu ve J, M 'nin hemen hemen kompleks yapısı olsun. M üzerindeki $\bar{\chi}$ vektör alanlarını N 'ye kısıtlayarak

$$\bar{\chi}(N) = \chi(N) \oplus \chi^\perp(N)$$

yazarsak J yapısının N alt manifoldunun teğet uzayında ve normal uzayında değişmez olmasına göre çeşitli durumlar ortaya çıkacaktır. Buna göre;

$$J(\chi(N)) \subset \chi(N) \tag{2.18}$$

ise N alt manifolduna M 'nin **hemen hemen kompleks alt manifoldu**,

$$J(\chi(N)) \subset \chi^\perp(N) \tag{2.19}$$

ise N alt manifolduna M 'nin **tümel gerçel alt manifoldu** denir.

2.4.15 Tanım: N, M hemen hemen Hermityen manifolduna izometrik olarak daldırılmış bir Riemann manifold olsun. N manifoldunun bir p noktasında $0 \neq Y_p \in \chi(N)$ için $T_p(N)$ teğet uzayı ile JY_p arasındaki $\theta_p(Y)$ açısına Y_p 'nin **Wirtinger açısı** denir ve $\forall X, Y \in \chi(N)$,

$$\cos \theta_p(Y) = \frac{||g(JY, X)||}{||JY|| \cdot ||X||}$$

ile tanımlanır. $\forall Y \neq 0$, $\theta_p(Y)$ Wirtinger açısı sabitse N Riemann manifolduna M hemen hemen Hermityen manifoldunun **eğik (slant) alt manifoldu** denir. $\theta_p(Y) = 0$ olması durumunda bu eğik alt manifold, (2.18) denkleminde karşılık gelen hemen hemen kompleks alt manifold ve $\theta_p(Y) = \frac{\pi}{2}$ olması durumunda bu eğik manifold, (2.19) denkleminde karşılık gelen tümel gerçel alt manifolddur. Ne tümel gerçel ne de hemen hemen kompleks olan eğik manifoldlara **has eğik (proper slant) alt manifold** denir. Bizim üzerinde yoğunlaşacağımız manifold tipi has eğik alt manifoldlar olacaktır.

2.4.16 Uyarı: $\theta(Y_p)$ 'nin sabit olması $\forall p \in N$ ve $Y_p \in T_p(N)$ seçiminde bağımsız olduğunu ifade eder.

N, M hemen hemen Hermityen manifolduna izometrik olarak daldırılmış bir Riemann manifold olsun. $p \in N$ ve $Y \in T_p(N)$ için PY ve FY , sırasıyla JY 'nin teğet ve normal bileşenlerini göstermek üzere (2.4) denkleminde

$$JY = PY + FY, \tag{2.20}$$

benzer şekilde $U \in T^\perp(N)$ için

$$JU = tU + fU \tag{*}$$

yazabiliriz. Burada $P : TN \rightarrow TN$, teğet demet üzerinde bir endomorfizm ve $F : TN \rightarrow T^\perp N$ ise teğet demet üzerinde normal değerli 1-formdur ve P ile F dönüşümleri

lineerdir. Bunu görmek adına her $X, Y \in T_p(N)$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için (2.20) denkleminden

$$J(aX + bY) = P(aX + bY) + F(aX + bY)$$

elde edilir ve J hemen hemen kompleks yapısının lineerliğinden

$$aJX + bJY = P(aX + bY) + F(aX + bY).$$

Tekrar (2.20) kullanılırsa

$$aPX + aFX + bPY + bFY = P(aX + bY) + F(aX + bY).$$

Bu denklemden teğet ve normal kısımlar kıyaslanırsa

$$P(aX + bY) = aPX + bPY \quad \text{ve} \quad F(aX + bY) = aFX + bFY$$

şeklinde P ve F dönüşümlerinin lineer olduğu gösterilmiş olur.

2.4.17 Tanım: Bir N has eğik alt manifoldun P endomorfizmi paralel, $\nabla P = 0$, ise N 'ye **Kaehleryen eğik alt manifold** denir.

2.4.18 Önerme: Bir eğik alt manifoldun P endomorfizmi $g(X, PY) = -g(PX, Y)$ eşitliğini sağlar.

Kanıt: $g(JX, Y)$ için (2.16)'dan $-g(X, JY) = g(JX, Y)$ yazılırsa (2.20)'den her $X, Y \in TN$ için $g(X, PY) = -g(PX, Y)$ olduğu görülür. ■

2.4.19 Önerme: Bir hemen hemen Hermityen manifoldun eğik alt manifoldları

$$P^2 = -(\cos^2 \theta)I$$

ile karakterize edilir.

Kanıt: Uyarı 2.4.16'dan dolayı $\cos \theta(Y)$, PY ile JY arasındaki açı olarak

düşünülebileceğinden (2.20)'den

$$\cos\theta(Y) = \frac{\|g(JY, PY)\|}{\|JY\| \cdot \|PY\|} = \frac{\|g(PY, PY)\|}{\|JY\| \cdot \|PY\|} = \frac{\|PY\|^2}{\|JY\| \cdot \|PY\|} = \frac{\|PY\|}{\|JY\|}$$

Buradan

$$\cos^2\theta(X) = \frac{\|PY\|^2}{\|JY\|^2} \implies g(JY, JY)\cos^2\theta(Y) = g(PY, PY)$$

ve (2.16)'dan

$$g(Y, Y)\cos^2\theta(Y) = g(PY, PY).$$

Burada Önerme 2.4.18 kullanılırsa

$$g((\cos^2\theta(Y))Y, Y) = g(-P^2Y, Y),$$

yani $P^2 = -(\cos^2\theta)I$ olduğu görülür. $\lambda = -\cos^2\theta$ dersek $\lambda \in [-1, 0]$ aralığında olduğu açıktır. ■

2.4.20 Uyarı[23]: Uyarı 2.4.16'da $\theta(Y_p)$ 'nin sabit olmasının her $p \in N$ için $Y_p \in T_p(N)$ vektörünün seçiminden bağımsız olduğunu söylemiştik. Şimdi bu sonucu 2 boyut için görebiliriz. Şöyle ki M bir hemen hemen Hermityen manifold ve $N \subset M$ onun bir yüzeyi olsun. $P^2 = \lambda I$, $\lambda = -\cos^2\theta$ ve $\lambda \in [-1, 0]$, olmak üzere Önerme 2.4.19'un ispatına benzer bir şekilde $\cos\theta_p(Z)$, PZ ile JZ arasındaki açı olarak düşünülebileceğinden (2.20) ve (2.16)'dan

$$\cos\theta_p(Z) = \frac{\|PZ\|}{\|JZ\|} = \frac{\|PZ\|}{\|Z\|}$$

yazılabilir. Şimdi $(X, Y) \in T_p(N)$ 'nin ortonormal bir bazı olsun. Bu durumda herhangi bir $PZ \in T_p(N)$ için $PZ = \alpha X + \beta Y$ olmak üzere $PZ = \alpha X + \beta Y = g(PZ, X)X + g(PZ, Y)Y$

olduğundan

$$\begin{aligned}
||PZ||^2 &= g(PZ, PZ) \\
&= g(g(PZ, X)X + g(PZ, Y)Y, PZ) \\
&= g(PZ, X)g(PZ, X) + g(PZ, Y)g(PZ, Y) \\
&= g(PZ, X)^2 + g(PZ, Y)^2
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Öte yandan herhangi bir $Z \in T_p(N)$ için $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $Z = aX + bY$ alınırsa $PZ = aPX + bPY$ olup $g(JZ, Z) = g(PZ, Z) = 0$ ve Önerme 2.4.18 kullanılarak

$$\begin{aligned}
g(PZ, X)^2 + g(PZ, Y)^2 &= g(aPX + bPY, X)g(aPX + bPY, X) + g(aPX + bPY, Y)g(aPX + bPY, Y) \\
&= b^2g(PY, X)^2 + a^2g(PX, Y)^2 \\
&= (a^2 + b^2)g(PX, Y)^2 \\
&= (a^2 + b^2)g(JX, Y)^2,
\end{aligned}$$

yani

$$||PZ||^2 = (a^2 + b^2)g(JX, Y)^2$$

elde edilir. Böylece $||Z|| = \sqrt{a^2 + b^2}$ olduğundan

$$\cos \theta_p(Z) = \frac{||PZ||}{||Z||} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}|g(JX, Y)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ve

$$\cos \theta_p(Z) = |g(JX, Y)|$$

elde edilir ki bu sonuç $\cos \theta_p(Z)$ 'nin Z 'den bağımsız olduğunu ifade eder. ■

$P^2 = Q$ yazarsak Q endomorfizminin $g(QX, Y) = g(X, QY)$ eşitliğini sağladığı Önerme 2.4.18'den açıktır. Böylece her $T_x(N)$ teğet uzayı

$$T_x(N) = D_x^{\lambda_1} \oplus, \dots, \oplus D_x^{\lambda_k} \quad (k \leq n)$$

biçiminde Q 'nun öz uzaylarının ortogonal direkt ayrışımı olarak yazılabilir, burada $D_x^{\lambda_i}$ dağılımı Q 'nun λ_i öz değerine karşılık gelen öz uzayıdır. Önerme 2.4.18 ve (2.12)'den $\lambda_i \in [-1, 0]$ olduğu açıktır.

2.4.21 Önerme: N, M hemen hemen Hermityen manifoldunun n -boyutlu eğik alt manifoldu olsun. $\lambda_i \neq 0, 1 \leq i \leq k$, ise N eğik alt manifoldu çift boyutludur.

Kanıt: $P(D_x^{\lambda_i}) = D_x^{\lambda_i}$ olduğunu biliyoruz [17]. Bu durumda her $e_j^{\lambda_i} \in D_x^{\lambda_i}$ ortonormal baz elemanı için $g(e_j^{\lambda_i}, P(e_j^{\lambda_i})) = 0$ ve $g(P(e_j^{\lambda_i}), P(e_k^{\lambda_i})) = 0$ olduğundan $Boy(D_x^{\lambda_i})$ çift boyutlu olmalıdır. Her $D_x^{\lambda_i}$ dağılımı çift boyutlu olduğundan N eğik alt manifoldu da çift boyutludur. ■

2.4.22 Önerme: N, M hemen hemen Hermityen manifoldunun eğik alt manifoldu olsun. $\lambda_i \neq -1, 1 \leq i \leq k$, için $Boy(F(D_x^{\lambda_i})) = Boy(D_x^{\lambda_i})$.

Kanıt: $\{e_j^{\lambda_i}\}, D_x^{\lambda_i}$ dağılımının bir bazı olsun. Bu durumda $e_j^{\lambda_i}$ baz vektörleri lineer bağımsız olduğundan $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a_1 e_1^{\lambda_i} + a_2 e_2^{\lambda_i} + \dots + a_n e_n^{\lambda_i} = 0$ iken $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Buradan F dönüşümü altında görüntü alınırsa

$$F(a_1 e_1^{\lambda_i} + a_2 e_2^{\lambda_i} + \dots + a_n e_n^{\lambda_i}) = 0$$

ve F lineer olduğundan

$$a_1 F(e_1^{\lambda_i}) + a_2 F(e_2^{\lambda_i}) + \dots + a_n F(e_n^{\lambda_i}) = 0.$$

$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ olduğundan $F e_j^{\lambda_i}$ vektörleri lineer bağımsızdır. Sonuç olarak $Boy(F(D_x^{\lambda_i})) = Boy(D_x^{\lambda_i})$ elde ederiz. ■

2.4.23 Önerme: N, M hemen hemen Hermityen manifoldunun eğik alt manifoldu olsun. Bu durumda $F(D_x^{\lambda_i})$, $1 \leq i \leq k$, normal alt uzayları karşılıklı diktir.

Kanıt: $X \in F(D_x^{\lambda_i})$ ve $Y \in F(D_x^{\lambda_j})$, $i \neq j$ alalım. $Boy(D_x^{\lambda_i}) = m_i$ ve $a_k, b_l \in \mathfrak{S}(N)$ olmak üzere

$$X = \sum_{k=1}^{m_i} a_k F(e_k^{\lambda_i}) \quad \text{ve} \quad Y = \sum_{l=1}^{m_j} b_l F(e_l^{\lambda_j})$$

alalım. Bu durumda

$$g(X, Y) = g\left(\sum_{k=1}^{m_i} a_k F(e_k^{\lambda_i}), \sum_{l=1}^{m_j} b_l F(e_l^{\lambda_j})\right) = \sum_k \sum_l a_k b_l g(F(e_k^{\lambda_i}), F(e_l^{\lambda_j})).$$

Diğer yandan

$$g(PX, PY) = -g(P^2 X, Y) = -\lambda_i g(X, Y) = \cos^2 \theta g(X, Y),$$

ve (2.16)'dan

$$\frac{g(JX, JY)}{g(X, Y)} = 1 \implies \frac{g(PX, PY)}{g(X, Y)} + \frac{g(FX, FY)}{g(X, Y)} = 1 \implies g(FX, FY) = \sin^2 \theta g(X, Y).$$

Böylece

$$g(X, Y) = \sum_k \sum_l a_k b_l g(F(e_k^{\lambda_i}), F(e_l^{\lambda_j})) = \sum_k \sum_l a_k b_l \sin^2 \theta g(e_k^{\lambda_i}, e_l^{\lambda_j}) = 0,$$

bulunur ki istenen elde edilir. ■

2.4.24 Önerme: N, M hemen hemen Hermityen manifoldunun eğik alt manifoldu olsun. O halde $\mathfrak{h}_x, Q = P^2$ endomorfizminin -1 öz değerli öz uzayı olmak üzere

$$Boy(M) \geq 2Boy(N) - Boy(\mathfrak{h}_x)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt: N, M 'nin izometrik daldırılmış eğik alt manifoldu olsun. Önerme 2.4.22'den

$Boy(F(D_x^{\lambda_i})) = Boy(D_x^{\lambda_i})$ ve Önerme 2.4.23'ten $i \neq j$ için $F(D_x^{\lambda_i}) \perp F(D_x^{\lambda_j})$ olduğundan

$$T_x^\perp(N) = F(D_x^{\lambda_1}) \oplus \dots \oplus F(D_x^{\lambda_k})$$

yazılabilir. $\lambda_i = -1$ için $F = 0$ olduğundan $\lambda_i = -1$ 'e karşılık gelen $\mathfrak{h}_x$ uzayının $F(\mathfrak{h}_x)$ normal uzayı direkt toplamdan atılabilir. Böylece $T_x(N) = D_x^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus D_x^{\lambda_k}$ olduğu da dikkate alınır

$$Boy(T_x^\perp(N)) = Boy(F(D_x^{\lambda_1})) + \dots + Boy(F(D_x^{\lambda_k}))$$

$$= Boy(D_x^{\lambda_1}) + \dots + Boy(D_x^{\lambda_k})$$

$$\geq Boy(T_x(N)) - Boy(\mathfrak{h}_x)$$

$$= Boy(N) - Boy(\mathfrak{h}_x)$$

ve

$$Boy(M) = Boy(T_x(M)) = Boy(T_x(N)) + Boy(T_x^\perp(N)) = Boy(N) + Boy(T_x^\perp(N))$$

olduğundan $Boy(T_x^\perp(N)) = Boy(M) - Boy(N)$ ifadesi yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$Boy(M) \geq 2Boy(N) - Boy(\mathfrak{h}_x)$$

elde edilir. ■

2.4.3. Yaklaşık Kaehleryen Manifoldlar

2.4.25 Tanım: M , g Hermityen metrikli bir Riemann manifold olsun. M 'nin J hemen hemen kompleks yapısı M üzerinde herhangi X, Y vektör alanları için

$$(\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X = 0 \tag{2.21}$$

koşulunu sağlıyorsa M 'ye **yaklaşık (nearly) Kaehleryen manifold** denir. Bazı kaynaklarda Tachibana uzayları (Tachibana spaces) ya da K-uzayları (K-spaces) olarak adlandırılır. (2.21) şartı her X, Y için geçerli olduğundan $Y = X$ alınırsa $2(\nabla_X J)X = 0$, yani

$$(\nabla_X J)X = 0 \quad (2.22)$$

şartına ulaşılır. Dolayısıyla bir Riemann manifoldu $(\nabla_X J)X = 0$ şartını sağlıyorsa da yaklaşık Kaehleryen manifolddur.

2.4.26 Yardımcı Teorem[3]: M bir yaklaşık Kaehleryen manifold olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$(\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY = 0. \quad (2.23)$$

$$(\nabla_X J)JY + J(\nabla_X J)Y = 0. \quad (2.24)$$

Kanıt: Önce (2.24) ifadesini kanıtlayalım. (2.12) ve (2.15) denklemlerinden

$$(\nabla_X J)JY = \nabla_X J(JY) - J\nabla_X JY = -\nabla_X Y - J\nabla_X JY \quad (*)$$

elde edilir. Diğer yandan (2.15) denklemine $-J$ uygulanırsa $(*)$ denklemi elde edileceğinden istenen elde edilir. Şimdi (2.23) ifadesini ispatlayalım. M yaklaşık Kaehleryen manifold olduğundan her $X, Y \in \chi(M)$ için $(\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X = 0$ dır. Bu denklemde Y yerine JX alınır ve (2.21) denklemi kullanılırsa

$$(\nabla_{JX} J)X + (\nabla_X J)JX = 0. \quad (1)$$

(1) denkleminde X yerine $X + JY$ alınırsa

$$(\nabla_{JX} J)JY + (\nabla_{JY} J)JX = 0. \quad (2)$$

Şimdi $(\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY$ ifadesinde (2) denklemi kullanılırsa

$$(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JY} J)JX$$

bulunur ki burada Y yerine JX alınırsa

$$(\nabla_X J)JX + (\nabla_{JX} J)JX = 2(\nabla_X J)JX.$$

Bu eşitliğin sağ tarafındaki ifade sıfırdır. Bunu görmek için (2.24) denkleminde Y yerine X alınırsa M yaklaşık Kaehleryen olduğundan (2.22) denkleminde bu ifade sıfır bulunur. Dolayısıyla $(\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY = 0$ elde edilir. ■

2.4.27 Uyarı [8]: Bir M Riemann manifoldunun J hemen hemen kompleks yapısı $(\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY = 0$ koşulunu sağlıyorsa M 'ye **Kaehler benzeri (quasi Kaehler)** manifold denir. Yardımcı Teorem 2.4.26'dan görülür ki her yaklaşık Kaehleryen manifold bir Kaehler benzeri manifolddur. Ayrıca bizim üzerinde çalışacağımız S^6 küresi yaklaşık Kaehleryen bir manifold olduğundan bir Kaehler benzeri manifolddur.

Yaklaşık Kaehleryen manifoldlarda J hemen hemen kompleks yapısının $\mathcal{N}$ Nijenhuis tensörü $\mathcal{N}(U, V) = -4J(\nabla_U J)V$ halini alır. Gerçekten

$$\mathcal{N}(U, V) = [JU, JV] - J[U, JV] - J[JU, V] - [U, V]$$

şeklindeki (2.13) denklemi

$$\mathcal{N}(U, V) = - \left(\nabla_U V - \nabla_V U + J(\nabla_{JU} V - \nabla_V JU) + J(\nabla_U JV - \nabla_{JV} U) - (\nabla_{JU} JV - \nabla_{JV} JU) \right).$$

Biçiminde yazılır ve

$$\mathcal{N}(U, V) = - \left(-\nabla_U J(JV) + J\nabla_U JV + \nabla_{JV} JU - J\nabla_{JV} U - \nabla_{JU} JV + J\nabla_{JU} V - \nabla_V U - J\nabla_V JU \right)$$

şeklinde düzenlenirse sırasıyla ikişer terimlerden

$$\mathcal{N}(U, V) = - \left(-(\nabla_U J)JV + (\nabla_{JV} J)U - (\nabla_{JU} J)V + (\nabla_V J)JU \right)$$

denklemi elde edilir. Şimdi (2.21) denkleminde V yerine JV alınırsa $(\nabla_U J)JV = -(\nabla_{JV} J)U$

olacağından (2.21) ve (2.24) denklemleri kullanılarak son denklem

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(U, V) &= - \left(-(\nabla_U J)JV + (\nabla_{JV} J)U - (\nabla_{JU} J)V + (\nabla_V J)JU \right) \\
&= (\nabla_U J)JV + (\nabla_U J)JV - (\nabla_V J)JU - (\nabla_V J)JU \\
&= 2((\nabla_U J)JV - (\nabla_V J)JU) \\
&= -2J((\nabla_U J)V - (\nabla_V J)U) \\
&= -4J((\nabla_U J)V)
\end{aligned}$$

olur ve istenen elde edilir. Buradan açıktır ki bir M yaklaşık Kaehleryen manifoldun Nijenhuis tensörü sıfırsa M Kaehleryen manifolddur.

2.4.28 Önerme[3]: M bir yaklaşık Kaehleryen manifold ve $\mathcal{N}$ onun Nijenhuis tensörü olsun. O halde $\mathcal{N}$ Nijenhuis tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

- (i) $\mathcal{N}(U, V) + \mathcal{N}(V, U) = 0$,
- (ii) $g(\mathcal{N}(U, V), W) + g(\mathcal{N}(U, W), V) = 0$,
- (iii) $\mathcal{N}(JU, JV) + \mathcal{N}(U, V) = 0$,
- (iv) $g(\mathcal{N}(U, JV), JW) + g(\mathcal{N}(U, V), W) = 0$.

Kanıt: (i) $\mathcal{N}(U, V) + \mathcal{N}(V, U) = -4J(\nabla_U J)V - 4J(\nabla_V J)U = -4J((\nabla_U J)V + (\nabla_V J)U)$

bulunur ki (2.21)'den ve J lineer olduğundan $\mathcal{N}(U, V) + \mathcal{N}(V, U) = 0$.

(ii) Genel olarak her $V \in \chi(M)$ için $g(V, JV) = 0$ olduğundan bu ifadeye U 'ya göre kovaryant

türev uygulanır ve $\nabla g = 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
 0 = (\nabla_U g)(V, JV) &= U g(V, JV) - g(\nabla_U V, JV) - g(V, \nabla_U JV) \\
 &= g(J(\nabla_U V), V) - g(V, \nabla_U JV) \\
 &= -g((\nabla_U J)V, V)
 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde V yerine $V + JW$ alırsak

$$\begin{aligned}
 0 &= g((\nabla_U J)V + JW, V + JW) \\
 &= g((\nabla_U J)V, JW) + g((\nabla_U J)V, V) + g((\nabla_U J)JW, V) + g((\nabla_U J)JW, JW) \\
 &= g((\nabla_U J)V, JW) + g((\nabla_U J)JW, V) \\
 &= -g((J(\nabla_U J)V, W) + g((\nabla_U J)JW, V)
 \end{aligned}$$

bulunur ki burada (2.24) kullanılırsa

$$0 = -g(J(\nabla_U J)V, W) - g(J(\nabla_U J)W, V),$$

yani

$$0 = -g(4J(\nabla_U J)V, W) - g(4J(\nabla_U J)W, V) = g(\mathcal{N}(U, V), W) + g(\mathcal{N}(U, W), V)$$

elde edilir.

(iii)

$$\mathcal{N}(U, V) = -4J(\nabla_U J)V \implies \mathcal{N}(JU, JV) = -4J(\nabla_{JU} J)V$$

olacağından (2.23) denkleminden bu ifade düzenlenirse

$$\mathcal{N}(JU, JV) = 4J(\nabla_U J)V = -\mathcal{N}(U, V).$$

(iv) $g(\mathcal{N}(U, JV), JW) + g(\mathcal{N}(U, V), W)$ ifadesinin sıfır olduğunu gösterelim. (2.16) ve (2.23) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
 g(\mathcal{N}(U, JV), JW) + g(\mathcal{N}(U, V), W) &= -4[g(J(\nabla_U J)JV, JW) + g(J(\nabla_U J)V, W)] \\
 &= -4[g((\nabla_U J)JV, W) + g(J(\nabla_U J)V, W)] \\
 &= 4[g(J(\nabla_U J)V, W) - g(J(\nabla_U J)V, W)] = 0. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

2.5. YAKLAŞIK KAEHLERYEN S^6 KÜRESİ

Bu kısımda S^6 küresinin cebirsel inşasından bahsedeceğiz. Daha sonra S^6 küresinin sırasıyla hemen hemen kompleks, hemen hemen Hermityen ve son olarak yaklaşık Kaehleryen manifold olduğunu göstereceğiz. İlk olarak Cayley cebri ile başlayacağız. Bu kısımda [8,10,11,13,26] kaynaklarından yararlanılmıştır.

Cayley cebri bir diğer adıyla oktanionlar cebri, Cayley-Dickson metodu ve kuarterniyonlar yardımıyla tanımlı bir normlu cebirdir. Burada normlu cebirden kastımız: herhangi bir X cebri için $\mathbb{R}$ üzerinde çarpmaya göre birim elemanı 1, üzerinde tanımlı $<, >$ iç çarpımıyla $\| \cdot \|$ normu

$$\|ab\| = \|a\|\|b\| \quad \forall a, b \in X$$

özelliğini sağlayan ve sonlu boyutlu birleşmeli olmak zorunda olmayan bir cebir yapısıdır [10].

2.5.1 Tanım (Cayley-Dickson Metodu): X bir cebir ve $x, y, z, t \in X$ ve $\bar{x}$ ise x 'in eşleniği olsun. $X \oplus X$ üzerinde

$$(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t) \tag{2.25}$$

$$(x, y)(z, t) = (xz - \bar{t}y, tx + y\bar{z}) \tag{2.26}$$

şeklinde tanımlı toplama ve çarpma işlemleriyle $Y = X \oplus X$ bir cebirdir ve X cebirinden Cayley-Dickson metodu ile inşa edilen cebir olarak isimlendirilir.

Şimdi $Y \equiv X \oplus X$ in bir cebir olduğunu gösterelim.

X bir cebir $x, y, z, t, k, l \in X$ olsun. $a = (x, y), b = (z, t), c = (k, l)$ ve λ skalerini alalım ve Tanım 2.1.16'daki cebir olma şartlarını inceleyelim.

$$(i) \quad \lambda(a \circ b) = \lambda(x, y)(z, t)$$

$$= \lambda(xz - \bar{t}y, tx + y\bar{z})$$

$$= (\lambda xz - \lambda \bar{t}y, \lambda tx + \lambda y\bar{z}),$$

$$(\lambda a) \circ b = (\lambda x, \lambda y) \circ (z, t)$$

$$= (\lambda xz - \lambda \bar{t}y, \lambda tx + \lambda y\bar{z}).$$

Böylelikle $\lambda(a \circ b) = (\lambda a) \circ b$ sağlanmış olur. Diğer eşitlik benzer şekilde yapılır.

$$(ii) \quad (a + b) \circ c = ((x, y) + (z, t))(k, l)$$

$$= (x + z, y + t)(k, l)$$

$$= ((x + z)k - \bar{l}(y + t), l(x + z) + (y + t)\bar{k})$$

$$= (xk + zk - \bar{l}y - \bar{l}t, lx + lz + y\bar{k} + t\bar{k}).$$

Diğer yandan,

$$a \circ c = (x, y)(k, l) = (xk - \bar{l}y, lx + y\bar{k}) \quad , \quad b \circ c = (z, t)(k, l) = (zk - \bar{l}t, lz + t\bar{k})$$

olduğundan $(a \circ c) + (b \circ c) = (xk + zk - \bar{l}y - \bar{l}t, lx + lz + y\bar{k} + t\bar{k})$ olduğu görülür ve

$(a + b) \circ c = (a \circ c) + (b \circ c)$ eşitliği sağlanmış olur. Aynı şekilde X in cebir olduğu kullanılarak

$$a \circ (b + c) = (a \circ b) + (a \circ c)$$

olduğu da gösterilebilir. Dolayısıyla $Y \equiv X \oplus X$ bir cebirdir. ■

Bu metod ve yukarıdaki ispatla $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ şeklindeki kompleks sayılar cebri inşa edilir. Ayrıca $\mathbb{C}$ bir normlu cebirdir. Gerçekten bir $a = (x_0, x_1)$ sayısının eşleniği, $\bar{a} = (\bar{x}_0, -x_1)$ şeklinde tanımlıdır ve (2.26) denkleminde $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ dir. Bu durumda

$$\langle a, b \rangle = \frac{a\bar{b} + \bar{a}b}{2}$$

iç çarpımını tanımlarsak $a = (x_0, x_1) \in \mathbb{C}$ 'nin normu

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2}.$$

Aynı şekilde $b = (y_0, y_1)$ için $\|b\| = \sqrt{\langle b, b \rangle} = \sqrt{y_0^2 + y_1^2}$ yazılırsa açıkça $\|ab\| = \|a\|\|b\|$ olduğu görülecektir. Dolayısıyla $\mathbb{C}$ bir normlu cebirdir.

$1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$, $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ için (2.26) denkleminde $i^2 = -1$ olduğu açıktır. Bu durumda $\{1, i\}$ $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$ 'nin bir bazıdır. Böylelikle $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ inşasını tamamlamış bulunuyoruz. Benzer şekilde $\{1, i, j, k\}$, $\mathbb{H} = \mathbb{C} + \mathbb{C}j$ 'nin standart bazı olmak üzere $\mathbb{H} \equiv \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ inşasını ve sonra $\{1, i, j, k, e, ie, je, ke\}$, $\mathbb{O} = \mathbb{H} + \mathbb{H}e$ 'nin standart bazı olmak üzere $\mathbb{O} \equiv \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ inşasını oluşturarak $\mathbb{O}$ oktanionlar cebri bir Cayley cebri olur.

$\{e_0, e_1, \dots, e_7\}$ $\mathbb{R}^8$ 'in standart bazı olsun. O halde $\mathbb{R}^8$ 'in her bir β noktası, $A \in \mathbb{R}$ ve x , $\{e_1, e_2, \dots, e_7\}$ 'nin bir lineer kombinasyonu olmak üzere $\beta = Ae_0 + x$ olarak tek türlü yazılabilir. Burada β bir Cayley sayısı olarak görülebilir. Çünkü $\mathbb{R}^8$, $\mathbb{O}$ Cayley cebrine izomorftur. Dolayısıyla $A = 0$ durumunda β sanal bir Cayley sayısı olarak düşünülebilir. O halde x ve y sanal Cayley sayısı olmak üzere $x.y$ iç çarpımı $\mathbb{R}^8$ üzerinde standart iç çarpım olarak düşünüldüğünde bu çarpım

$$x.y = -\langle x, y \rangle e_0 + x \times y$$

olarak tanımlanır ve $\langle x, y \rangle$ çarpımı $\mathbb{R}^7$ 'nin standart iç çarpımıdır. Burada $x \times y$ çarpımı $e_j \times e_k$ için aşağıdaki tablo yardımıyla bulunur [19].

Şekil 2.1:

j/k	1	2	3	4	5	6	7
1	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	e_7	$-e_6$
2	$-e_3$	0	e_1	e_6	$-e_7$	$-e_4$	e_5
3	e_2	$-e_1$	e	$-e_7$	$-e_6$	e_5	e_4
4	$-e_5$	$-e_6$	e_7	0	e_1	e_2	$-e_3$
5	e_4	e_7	e_6	$-e_1$	0	$-e_3$	$-e_2$
6	$-e_7$	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	0	e_1
7	e_6	$-e_5$	$-e_4$	e_3	e_2	$-e_1$	0

Tablodaki $x \times y$ çarpımı şimdi ifade edeceğimiz özellikleri sağlar.

2.5.2 Önerme[8]: $Im\mathbb{O}$, sanal Cayley sayıları kümesini göstermek üzere $u, v, w \in Im\mathbb{O}$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

(i) $u \times v = -v \times u$,

(ii) $\langle u \times v, w \rangle = \langle u, v \times w \rangle$,

(iii) $u \times (v \times w) + (u \times v) \times w = 2 \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w - \langle w, v \rangle u$.

2.5.3 Uyarı[8]: Bu özellikler ' $\times$ ' vektörel çarpımı vektör alanlarına genişletildiğinde de geçerlidir. İlk üç özeliğe ek olarak $\bar{\nabla}, \mathbb{R}^7$ 'nin koneksiyonu ve keyfi $U, V, W \in \chi(\mathbb{R}^7)$ için

(iv) $\bar{\nabla}_U(V \times W) = \bar{\nabla}_U V \times W + V \times \bar{\nabla}_U W$.

özeliliği de geçerlidir.

Şu andan itibaren S^6 küresini tanımlayabiliriz.

Sanal Cayley sayıları için orijin merkezli birim hiperküre

$$S^6 = \{x \in \mathbb{R}^7 \mid \langle x, x \rangle = 1\}$$

şeklinde tanımlıdır (yarıçapı birim kabul etmek genelliği bozmayacağından bu tez çalışmasında S^6 küresini birim yarıçaplı küre olarak tanımlıyoruz). Bu durumda x noktasında $T_x(S^6)$ teğet uzayını x 'e ortogonal olan $\mathbb{R}^7$ 'nin afin alt uzayıyla tanımlayabiliriz.

Şöyle ki $x \in S^6$ ve $u \in T_x S^6$ olmak üzere S^6 üzerinde $(1, 1)$ tensör alanını

$$J_x u = x \times u$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu ifade iyi tanımlıdır. Gerçekten $\forall x \in S^6, J_x u \in T_x S^6$.

Bunu göreceğ olursak

$$g(J_x u, x) = g(x \times u, x) = -g(u \times x, x),$$

burada Önerme 2.5.2'nin (ii) ifadesi kullanılırsa $g(u, x \times x) = 0$. Bu sonuç ta gösterir ki $J_x u \perp x$ olup istenen elde edilir.

Şimdi $\mathbb{R}^7$ üzerindeki $\bar{\chi}$ vektör alanlarını S^6 'ya kısıtlayalım ve

$$\bar{\chi}(S^6) = \chi(S^6) \oplus \chi^\perp(S^6)$$

yazalım. O halde $N \in \chi^\perp(S^6)$ birim normal vektör alanı ve $Y \in \chi(S^6)$ için

$$J : \chi(S^6) \rightarrow \chi(S^6)$$

$$Y \rightarrow JY = N \times Y \tag{2.27}$$

şeklinde tanımlı $(1, 1)$ tensör alanıyla S^6 'da bir hemen hemen kompleks yapı tanımlar. Dahası bu hemen hemen kompleks yapı sayesinde S^6 bir hemen hemen Hermityen bir yapıdır. Son olarak S^6 'nın bir yaklaşık Kaehleryen manifold olduğunu gösterelim.

$X, Y \in \chi(S^6)$, $N \in \chi^\perp(S^6)$ ve $\bar{\nabla}$, $\mathbb{R}^7$ 'nin koneksiyonu olmak üzere Önerme 2.5.2 (iv) kullanılarak

$$(\bar{\nabla}_X J)Y = \bar{\nabla}_X JY - J(\bar{\nabla}_X Y)$$

$$= \bar{\nabla}_X (N \times Y) - N \times \bar{\nabla}_X Y$$

$$= (\bar{\nabla}_X N) \times Y.$$

Burada konuya küçük bir parantez açalım: $g(N, N) = 1$ olduğundan bu ifadenin kovaryant türevi alınırsa

$$(\bar{\nabla}_X g)(N, N) = Xg(N, N) - 2g(\bar{\nabla}_X N, N),$$

yani

$$g(\bar{\nabla}_X N, N) = 0.$$

Buradan $\bar{\nabla}_X N$ vektörünün $\chi(S^6)$ 'ya ait olduğu görülür. Böylece Weingarten formülünden

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^\perp N \implies \bar{\nabla}_X N = -A_N X.$$

Öte yandan S^6 sabit eğrilikli ve 1 yarıçaplı olduğundan $A_N X = -X$ [12]. Bu bilgilerle $(\bar{\nabla}_X J)Y + (\bar{\nabla}_Y J)X$ ifadesinin sıfır olduğu görülür. Dolayısıyla S^6 küresi yaklaşık Kaehleryen manifolddur.

2.5.4 Uyarı[13]: S^6 üzerinde kompleks yapı tanımlanamayacağından S^6 bir Kaehleryen olmayan yaklaşık Kaehleryen manifolddur.

2.5.5 Teorem: Yaklaşık Kaehleryen S^6 küresinin ortalama eğriliği sabit ve 1 dir.

Kanıt: $\mathbb{R}^7$ uzayı flat olduğundan $c = 0$ sabit eğrilikli olduğu açık ve buradan R, S^6 'nın eğriliği olmak üzere sayfa 29 (*)'daki

$$g(R(X, Y)Z, W) = c[g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)] + g(h(Y, Z), h(X, W)) - g(h(X, Z), h(Y, W))$$

denklemini her $X, Y, Z, W \in \chi(S^6)$ için

$$g(R(X, Y)Z, W) = g(h(Y, Z), h(X, W)) - g(h(X, Z), h(Y, W))$$

denklemine indirgenir. Kürelerin her noktası umbilik olduğundan S^6 tümel umbilik olup H , S^6 'nın ortalama eğrilik vektörü olmak üzere Teorem 2.3.11'den

$$g(R(X, Y)Z, W) = g(Hg(Y, Z), Hg(X, W)) - g(Hg(X, Z), Hg(Y, W)).$$

Bu denklem düzenlenirse

$$g(R(X,Y)Z,W) = g(H,H)[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)].$$

Ayrıca $S^6(1)$ küresi $c = 1$ sabit eğrilikli olduğundan

$$1[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)] = g(H,H)[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)],$$

buradan $g(H,H) = ||H||^2 = 1$ olduğundan ortalama eğrilik 1 bulunur. ■

2.5.6 Sonuç: S^6 küresi paralel ortalama eğrilik vektörüne sahiptir ve minimal değildir.

Şimdi Teorem 2.5.5'in kanıtına dayanarak Teorem 2.5.5'i aşağıdaki teoreme genelleştirebiliriz.

2.5.7 Teorem Flat bir uzayın sabit eğrilikli tümel umbilik herhangi bir alt manifoldu sabit ortalama eğriliklidir.

2.6. YAKLAŞIK KAEHLERYEN S^6 KÜRESİNİN ALT MANİFOLDLARI

Bu kısımda S^6 küresinin hemen hemen kompleks, tümel gerçel gibi alt manifold sınıflarına ve bazı tümel umbilik, tümel geodezik gibi özel şartlar altındaki alt manifoldlarına değineceğiz. Bu kısımda [3,12] kaynaklarından yararlanılmıştır.

S^6 küresinin hemen hemen kompleks alt manifoldlarını çalışan bir çok matematikçi bulunmaktadır. Bunlar arasında Alfred Gray, S^6 küresinin 4 boyutlu hemen hemen kompleks alt manifoldunun bulunmadığını ispatlamıştır [14]. Hemen hemen kompleks bir manifoldun çift boyutlu olması gerektiğinden S^6 küresinin hemen hemen kompleks alt manifoldları sadece 2 boyutludur.

S^6 küresi sabit eğrilikli olduğundan normal koneksiyonunun flat olduğunu biliyoruz. Şimdi S^6 'nın bir alt manifoldunun tümel umbilik olması durumunda bu alt manifoldun da normal koneksiyonunun flat olduğunu kanıtlayalım.

2.6.1 Yardımcı Teorem[12]: N , S^6 küresinin $Boy(N) = 2 \geq 0$ olacak şekilde tümel umbilik bir alt manifoldu olsun. N alt manifoldunun normal eğriliği sıfırdır.

Kanıt: H, N 'nin ortalama eğrilik vektörü olsun. Her $X, Y \in \chi(N)$ ve $U \in \chi^\perp(N)$ keyfi olmak üzere $g(h(X, Y), U)$ ifadesini ele alalım. Teorem 2.3.11'den

$$g(h(X, Y), U) = g(Hg(X, Y), U) = g(H, U)g(X, Y).$$

Diğer yandan $g(h(X, Y), U) = g(A_U X, Y)$ olduğundan bu iki ifade birleştirilirse

$$g(A_U X, Y) = g(g(H, U)X, Y).$$

Buradan

$$A_U X = g(H, U)X. \quad (2.28)$$

Şimdi

$$g(\tilde{R}(X, Y)V, U) = g(R^\perp(X, Y)V, U) + g([A_U, A_V]X, Y)$$

Ricci denkleminde S^6 sabit eğrilikli olduğundan sol taraf sıfırdır. Ayrıca tümel umbilik N manifoldu için

$$g([A_U, A_V]X, Y) = 0.$$

Bunu görmek için (2.28) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g([A_U, A_V]X, Y) &= -g(A_U X, A_V Y) + g(A_U Y, A_V X) \\ &= -g(g(H, U)X, g(H, V)Y) + g(g(H, U)Y, g(H, V)X) \\ &= -g(X, Y)[g(H, U)g(H, V)] - g(Y, X)[g(H, U)g(H, V)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Son elde edilen denklem Ricci denkleminde yerine yazılırsa $g(R^\perp(X, Y)V, U) = 0$.

Bu sonuç ile tümel umbilik N manifoldunun normal eğriliği sıfır olur. ■

2.6.2 Önerme[3]: S^6 küresinin tümel umbilik alt manifoldu da sabit eğriliklidir.

Kanıt: N , S^6 küresinin tümel umbilik alt manifoldu ve H , N 'nin ortalama eğrilik vektörü olsun. N tümel umbilik olduğundan her $X, Y, Z, V \in \mathcal{X}(N)$ için $h(X, Y) = Hg(X, Y)$ olmak üzere

$$g(R(X, Y)Z, V) = c[g(Y, Z)g(X, V) - g(X, Z)g(Y, V)] + g(h(Y, Z), h(X, V)) - g(h(X, Z), h(Y, V))$$

denklemini

$$g(R(X, Y)Z, V) = c[g(Y, Z)g(X, V) - g(X, Z)g(Y, V)] + g(Hg(Y, Z), Hg(X, V)) - g(Hg(X, Z), Hg(Y, V))$$

denklemine indirgenir. Bu denklemde gerekli düzenleme yapılırsa

$$g(R(X, Y)Z, V) = (c + \|H\|^2)[g(Y, Z)g(X, V) - g(X, Z)g(Y, V)].$$

Yardımcı Teorem 2.6.1 ve Codazzi denkleminden $(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z)$ olur ki özel olarak $Boy(N) = 2$ için bu denklemden $\|H\|^2$ sabit bulunur. Bunu görmek için $h(Y, Z)$ için alt manifoldlarda tanımladığımız II. temel formun türevinden

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = \nabla_X^\perp h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$$

yazılır ve bu ifade $h(Y, Z) = Hg(Y, Z)$ tümel umbilik şartı dikkate alınarak düzenlenirse

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = \nabla_X^\perp [Hg(Y, Z)] - Hg(\nabla_X Y, Z) - Hg(Y, \nabla_X Z),$$

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = g(Y, Z)\nabla_X^\perp H + H\nabla_X g(Y, Z) - H\nabla_X g(Y, Z),$$

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = g(Y, Z)\nabla_X^\perp H.$$

Benzer şekilde $(\nabla_Y h)(X, Z)$ ifadesi için de aynı işlemler yapılırsa

$$(\nabla_Y h)(X, Z) = g(X, Z)\nabla_Y^\perp H.$$

$(\nabla_Y h)(X, Z) = (\nabla_X h)(Y, Z)$ eşitliğinden

$$g(X, Z)\nabla_Y^\perp H = g(Y, Z)\nabla_X^\perp H.$$

X ve Y ortonormal baz vektörleri olarak seçilirse her $Z \in \chi(N)$ için

$$(\nabla_Z^\perp H) = 0$$

bulunur. Böylece $\|H\|^2$ sabit olur. Sonuç olarak

$$g(R(X, Y)Z, V) = (c + \|H\|^2)[g(Y, Z)g(X, V) - g(X, Z)g(Y, V)]$$

denklemini, $\text{Boy}(N) > 2$ için S^6 'nın N tümel umbilik alt manifoldunun $c + \|H\|^2$ sabit eğrilikli olduğunu ifade eder. S^6 , $c = 1$ sabit eğrilikli olduğundan S^6 küresinin tümel umbilik alt manifoldlarının eğriliği,

$$g(R(X, Y)Z, V) = (1 + \|H\|^2)[g(Y, Z)g(X, V) - g(X, Z)g(Y, V)]$$

şeklindedir. ■

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında manifoldlar teorisinde önemli yeri olan bir Riemann manifoldunun sağladığı özelliklerin onun alt manifoldunun da sağlayıp sağlamayacağı sorusuna cevap aranmıştır. Bu düşünce dışında bir manifoldun burulmasının o manifoldun geometrisi ile ilgili önemli ipuçları verdiği düşünülerek özellikle S^6 küresinin has eğik alt manifoldunun Kaehleryen yapıya sahip olduğu gösterilirken S^6 küresinin Nijenhuis tensörü dikkatle incelenmiştir.

Bu tez çalışması boyunca kaynak olarak internet web siteleri, kütüphane kaynaklarından yararlanılmıştır. Tezin sunumu için Latex programı kullanılmıştır.

4. BULGULAR

4.1. YAKLAŞIK KAEHLERYEN S^6 KÜRESİNİN EĞİK ALT MANİFOLDLARI

4.1 Yardımcı Teorem: S^6 küresinin eğik alt manifoldları 2 boyutludur.

Kanıt: Bir eğik alt manifoldun çift boyutlu olması gerektiğinden S^6 küresinin eğik alt manifoldları ya 4 ya da 2 boyutludur. Fakat S^6 küresinin 4 boyutlu eğik alt manifoldu yoktur. Bu ifadeyi kanıtlamak için $\mathfrak{h}_x$, $Q = P^2$ 'nin -1 öz değerli öz uzayı (eğik dağılımı) olmak üzere N , S^6 küresinin eğik alt manifoldu olsun. Önerme 2.4.24'teki

$$Boy(S^6) \geq 2Boy(N) - Boy\mathfrak{h}_x$$

denkleminde N eğik alt manifoldu 4 boyutlu olursa $Boy(N) = 4$ ve $Boy\mathfrak{h}_x \geq 2$ olur. Önerme 2.4.21'in kanıtına göre $Boy\mathfrak{h}_x = 4$ ya da $Boy\mathfrak{h}_x = 2$ olmalıdır. $\lambda = -1$ öz değerine karşılık gelen öz uzay $\lambda = -\cos^2\theta$ ifadesinden $\theta = 0$ hemen hemen kompleks dağılımı olur. Dolayısıyla $\mathfrak{h}_x$ eğik dağılımı hemen hemen kompleks bulunur. Buradan açıktır ki $BoyN = 4 = Boy\mathfrak{h}_x$ eşitliğinden N eğik alt manifoldu 4 boyutlu hemen hemen kompleks alt manifold olur ki bu durum S^6 küresinin 4 boyutlu hemen hemen kompleks alt manifoldunun bulunmaması sonucu ile çelişir.

Şimdi $Boy\mathfrak{h}_x = 2$ olması durumunu inceleyelim. Fakat bu durum da mümkün değildir. Gerçekten $\mu \subset T_x^\perp(N)$, $\mathfrak{h}_x$ dağılımına ortogonal 2 boyutlu dağılım olmak üzere (2.1) denkleminde $TN = \mathfrak{h}_x \oplus \mu$ şeklinde yazılırsa ortonormal $\{e_1, e_2\} \in \mathfrak{h}_x$ ve $\{e_3, e_4\} \in \mu$ baz takımları ve $Q = P^2 = \lambda I$ için

$$1 = g(Q(e_3), Q(e_3)) = g(\lambda e_3, \lambda e_3) = \lambda^2 g(e_3, e_3) = \lambda^2.$$

Burada $\lambda \in [-1, 0]$ olduğundan $\lambda = -1$ bulunur. Bu ise μ dağılımının hemen hemen kompleks olduğunu ifade eder. O halde $TN = \mathfrak{h}_x \oplus \mu$ eşitliğinden 4 boyutlu TN teğet uzayı hemen hemen kompleks olur ki aynı nedenle çelişki elde edilir. Sonuç olarak S^6 küresinin eğik alt manifoldları sadece 2 boyutludur. Diğer bir deyişle S^6 küresinin eğik alt manifoldları

yüzeylerden ibarettir. ■

4.2 Yardımcı Teorem: N , S^6 küresinin has eğik alt manifoldu olsun. $\overline{\mathcal{N}}$, S^6 küresinin Nijenhuis tensörü ve $\mathcal{N}^T$ ile $\mathcal{N}^N$ sırasıyla $\overline{\mathcal{N}}$ 'nin teğet ve normal bileşenleri olmak üzere her $X, Y \in \chi(N)$ için $\mathcal{N}^T(X, Y) = 0$.

Kanıt: N eğik alt manifoldu 2 boyutlu olması gerektiğinden her ortonormal X, Y ikilisi için $g(X, Y) = 0$ ifadesine $\overline{\nabla}_X$ kovaryant türevi uygulanırsa

$$g(\overline{\nabla}_X X, Y) = -g(X, \overline{\nabla}_X Y) \quad (4.1)$$

denklemini elde edilir. Öte yandan $g(JX, JY)$ ifadesine $\overline{\nabla}_X$ kovaryant türevi uygulanırsa

$$g(\overline{\nabla}_X JX, JY) = -g(JX, \overline{\nabla}_X JY) \quad (4.2)$$

denklemini elde edilir. Burada (4.1) denkleminin (2.16) denklemini uygularsak

$$g((J\overline{\nabla}_X X, JY) = -g((JX, J\overline{\nabla}_X Y) \quad (4.3)$$

denklemini elde ederiz. Şimdi (4.2) ve (4.3) denklemlerini taraf tarafa çıkarırsak

$$g((\overline{\nabla}_X J)X, JY) = -g(JX, (\overline{\nabla}_X J)Y)$$

eşitliğini elde ederiz ki S^6 yaklaşık Kaehleryen manifold olduğundan $(\overline{\nabla}_X J)X = 0$ ve buradan

$$g((JX, (\overline{\nabla}_X J)Y)) = 0$$

elde edilir ki (2.20) denklemleri kullanılırsa

$$0 = g((JX, (\overline{\nabla}_X J)Y)) = -g((X, J(\overline{\nabla}_X J)Y)) = 0$$

$$= g(X, -4J(\overline{\nabla}_X J)Y)$$

$$= g(X, \overline{\mathcal{N}}(X, Y)).$$

$\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{N}^T(X, Y) + \mathcal{N}^N(X, Y)$ olduğundan

$$0 = g(X, \overline{\mathcal{N}}(X, Y)) = g(X, \mathcal{N}^T(X, Y)) + g(X, \mathcal{N}^N(X, Y)) = g(X, \mathcal{N}^T(X, Y)).$$

Benzer şekilde $g(Y, \mathcal{N}^T(X, Y)) = 0$ bulunur ve $\mathcal{N}^T(X, Y) = 0$ elde edilir. ■

4.3 Teorem: N , S^6 küresinin tümel umbilik has eğik alt manifoldu olsun. $\overline{\mathcal{N}}$, S^6 küresinin Nijenhuis tensörü ve $\mathcal{N}^T$ ile $\mathcal{N}^N$ sırasıyla $\overline{\mathcal{N}}$ 'nin teğet ve normal bileşenleri olmak üzere

$$\forall X, Y \in \chi(N) \quad , \quad P((\nabla_X P)Y) = -t((\nabla_X F)Y).$$

Kanıt: S^6 yaklaşık Kaehleryen bir manifold olduğundan sıfırdan farklı Nijenhuis tensörünün $\overline{\mathcal{N}}(X, Y) = -4J(\overline{\nabla}_X J)Y$ olduğunu biliyoruz. $\overline{\nabla}$, S^6 küresinin ve ∇ , N 'nin koneksiyonları olmak üzere ortonormal $\{X, Y\} \in \chi(N)$ için sırasıyla (2.15), J hemen hemen kompleks yapısının lineerliği, Gauss ve Weingarten formülü, (2.20) ve sayfa 37'deki (*) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{N}}(X, Y) &= -4J(\overline{\nabla}_X J)Y, \\ &= -4J(\overline{\nabla}_X JY - J\overline{\nabla}_X Y) \\ &= -4J(\overline{\nabla}_X JY - J\nabla_X Y - Jh(X, Y)) \\ &= -4J(\overline{\nabla}_X PY + \overline{\nabla}_X FY - P\nabla_X Y - F\nabla_X Y - th(X, Y) - fh(X, Y)) \\ &= -4J(\nabla_X PY + h(X, PY) + \nabla_X^\perp FY - A_{FY}X - P\nabla_X Y - F\nabla_X Y - th(X, Y) - fh(X, Y)) \\ &= -4J((\nabla_X P)Y + h(X, PY) + (\nabla_X F)Y - A_{FY}X - th(X, Y) - fh(X, Y)) \\ &= -4(P + F)((\nabla_X P)Y - A_{FY}X - th(X, Y)) - 4(t + f)(h(X, PY) + (\nabla_X F)Y - fh(X, Y)) \end{aligned}$$

elde edilir. $\overline{\mathcal{N}}(X, Y) = \mathcal{N}^T(X, Y) + \mathcal{N}^N(X, Y)$ olduğundan son denklemin teğet ve normal kısımları karşılaştırılırsa

$$\mathcal{N}^T(X, Y) = -4P((\nabla_X P)Y - A_{FY}X - th(X, Y)) - 4t(h(X, PY) + (\nabla_X F)Y - fh(X, Y)),$$

$$\mathcal{N}^N(X, Y) = -4F((\nabla_X P)Y - A_{FY}X - th(X, Y)) - 4f(h(X, PY) + (\nabla_X F)Y - fh(X, Y)).$$

N tümel umbilik has eğik alt manifold olduğundan N 'nin minimal [15], dolayısıyla tümel geodezik olduğu dikkate alınırsa $h = 0$ için

$$\mathcal{N}^T(X, Y) = -4P((\nabla_X P)Y) - 4t((\nabla_X F)Y).$$

Burada Yardımcı Teorem 4.2'den $\mathcal{N}^T(X, Y) = 0$ olduğu kullanılırsa istenen eşitlik elde edilir. ■

4.4 Sonuç: Eğer $\nabla F = 0$ ise Teorem 4.3'e göre $\nabla P = 0$ olur ki bu durumda Tanım 2.4.17'ye göre N Kaehleryen eğik alt manifold bulunur.

4.5 Sonuç[25]: Tanım 2.4.13'ten herhangi bir Kaehleryen manifold kompleks manifold ve her kompleks manifold yönlendirilebilir olduğundan S^6 küresinin tümel umbilik has eğik alt manifoldu Sonuç 4.4'e göre yönlendirilebilirdir.

4.6 Teorem: S^6 küresinin tümel umbilik has eğik alt manifoldlarının kesit eğriliği $\kappa = 1$.

Kanıt: S^6 küresinin tümel umbilik alt manifoldlarının eğriliğinin

$$g(R(X, Y)Z, V) = (c + ||H||^2)[g(Y, Z)g(X, V) - g(X, Z)g(Y, V)]$$

formunda olduğunu Önerme 2.6.2'den biliyoruz. S^6 küresinin N tümel umbilik has eğik alt manifoldu minimal olduğundan ,bkz. [15], $H = 0$ olur ki yukarıdaki eşitlik

$$g(R(X, Y)Z, V) = (1)[g(Y, Z)g(X, V) - g(X, Z)g(Y, V)]$$

halini alır. Dolayısıyla Teorem 2.2.13'den $\kappa = 1$ bulunur. ■

4.7 Sonuç: S^6 küresinin tümel umbilik has eğik alt manifoldları Einstein manifolddur.

Kanıt: N , S^6 küresinin tümel umbilik has eğik alt manifoldu olsun. Bu durumda Teorem 4.6'e göre N manifoldunun eğriliği $g(R(X,Y)Z,V) = g(Y,Z)g(X,V) - g(X,Z)g(Y,V)$ şeklindedir. Bu denklemde E_i , $1 \leq i \leq 2$, ortonormal bazı için $X = V = E_i$ alınırsa Tanım 2.2.15'ten

$$\begin{aligned}
 S(Y,Z) &= \sum_{i=1}^2 g(R(E_i,Y)Z,E_i) = \sum_{i=1}^2 [g(Y,Z)g(E_i,E_i) - g(E_i,Z)g(Y,E_i)] \\
 &= [2g(Y,Z) - \sum_{i=1}^2 g(g(Y,E_i)E_i,Z)] \\
 &= [2g(Y,Z) - g(Y,Z)] \\
 &= g(Y,Z).
 \end{aligned}$$

Böylece Tanım 2.2.14'e göre N bir Einstein manifolddur. ■

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bir manifoldun sahip olduğu özelliklerin o manifoldun alt manifoldu için de sağlanıp sağlanmadığı matematikçiler için her zaman temel problemlerden biri olmuştur. Biz bu çalışmamızda yaklaşık Kaehleryen S^6 küresinin alt manifoldları için bu problemlerden birini inceledik. Bu incelemeye Yardımcı Teorem 2.6.1’de S^6 ’nın alt manifoldunun tümel umbilik olduğu durumda alt manifoldun normal koneksiyonunun da flat olup olmadığını araştırarak başladık. Daha sonra S^6 küresinin sabit eğrilikli olmasının onun tümel umbilik alt manifoldu için de geçerli olup olmadığını Önerme 2.6.2’de inceledik. Daha sonra bu sonucu bizim çalışma konumuz olan S^6 ’nın has eğik alt manifolduna taşıyarak tümel umbilik olma şartı altında ele aldık ve S^6 ’nın tümel umbilik has eğik alt manifoldlarının eğriliğinin 1 olduğunu bulduk.

S^6 küresinin burulmasından yola çıkarak onun has eğik alt manifoldunun ne zaman Kaehleryen manifold olacağını araştırdık. Bunun için önce S^6 küresinin Nijenhuis tensörünü S^6 ’nın has eğik alt manifolduna kısıtladık ve buradan $\mathcal{N}^T(X, Y) = 0$ eşitliğine ulaştık. Bunu kullanarak $\nabla F = 0$ koşulu altında ∇P ’nin sıfıra eşit olduğu sonucuna ulaştık. Böylece S^6 küresinin has eğik alt manifoldları ile ilgili özgün bir sonucu elde etmiş olduk. Bu sonuç yardımıyla S^6 küresinde kompleks yapı tanımlı olmamasına rağmen onun tümel umbilik has eğik alt manifoldunun hangi durumda kompleks yapılı ve integrallenebilir olacağını incelemiş olduk. Son olarak S^6 küresinin tümel umbilik has eğik bir alt manifoldunun Einstein manifold olduğunu has eğik alt manifoldun eğriliği yardımıyla elde ettik.

KAYNAKLAR

- [1] LEE, J. M, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Text in Mathematics, ISBN:978-1-4419-9981-8
- [2] ŞAHİN, B., *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi.*, 2012, Nobel ,Ankara, ISBN: 978-605-133-359-5
- [3] YANO, K., and KON, M., *Structures On Manifolds*, World Scientific, Singapore
- [4] O'NEILL, B., 1983, *Semi-Riemannian Geometry With Applications To Relativity*, Academic Press, London, ISBN:0-12-526-740-1
- [5] KOBAYASHI, S., and NOMIZU, K., 1963, *Foundations Of Differential Geometry Volume I*, Interscience Publishers, London, Library Of Congress Catolog Card Number: 63-19209
- [6] GOLDBERG, S., and BISHOP, L., 1980, *Tensor Analaysis On Manifolds*, Dover Publications, New York, ISBN:0-486-64039-6
- [7] KOBAYASHI, S. and NOMIZU, K., 1969, *Foundations Of Differential Geometry Volume II*, Interscience Publishers, London, Library Of Congress Catolog Card Number: 68-19209
- [8] GRAY, A., *Minimal Varieties And Almost Hermitian Submanifolds*, Michigan Mathematical Journal, 12, 273-287
- [9] MATSUSHIMA Y., 1972, *Differentiable Manifolds*, MARCEL DEKKER, INC, New York, ISBN:0-8247-1445-8
- [10] HARVEY, R., and LAWSON H.B., *Calibrated Geometries*, Acta Mathematica, 48-157
- [11] DILLEN, F., VERSTRAELEN, L., VRANCKEN, L., 1987, *On Almost Complex Surface Of The Nearly Kaehler 6-Sphere II*, Kodai Math. Journal., 261-271
- [12] BERNDT, J., CONSOLE, S., OLMOS, C., *Submanifolds and Holonomy*, Chapman-Hall/CRC Research Notes in Mathematics, Boca Raton, ISBN: 1-58488-371-5
- [13] CHERN., S., S., 2004, *On The Non-Existence Of a Complex Structure On The Six Sphere*, Nankai Institue of Math., (preprint)
- [14] GRAY, A., 1969, *Almost Complex Submanifolds in the Six Sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. 277-279
- [15] UDDİN, S., ALI KHAN, M., SINGH, K., 2013, *A note on a totally umbilical proper slant submanifold of a nearly kaehler manifold*, Kuwait Journal of Science, 13-22

- [16] LIN.L.,VRANCKEN L. and WIJFFELS, A.,2020, *Almost Complex Submanifolds Of Nearly Kaehler Manifolds*,Archiv Der Mathematik,353-358
- [17] CHEN, B.Y.,1990,*Geometry Of Slant Submanifolds*,Katholieke Universiteit Leuven
- [18] BRYANT, R.,1982,*Submanifolds and Spacial Structures On The Octonions*,J.Differential Geo.17,185-232
- [19] EJIRI, N., 1981, *Totally Real Submanifold Of Six Sphere*,Proc.Amer.Math.Soc.,277-279
- [20] SEKIGAWA, K., 1983,*Almost Complex Submanifold Of Six Dimensional Sphere*,Kodai Math. Journal,6,174-185.
- [21] DILLEN. F, OPODZA B., VERSTRAELEN. L.,VRANCKEN, L.,1987,*On Almost Complex Surface Of The Nearly Kaehler 6-Sphere II*,Collection of Scientific Papers Of Faculty of Science Kragujevac 8,5-13
- [22] DESHMUKH, S.,1992,*Totally Real Surfaces in S^6* ,Tamkang Journal Of Mathematics.11-14
- [23] OBRENOVIC K. and VUKMIROVIC S.,2013, Two Classes Of Slant Surfaces in the Nearly Kahler Six Sphere,Revista De la unión Matemática Argentina 111-121
- [24] NEWLANDER , A. and NIRENBERG, L. ,1957, *Complex Analytic Cooridianates in Almost Complex Manifolds*, Ann. of Math. 65, 391-404
- [25] FLAHERTY , J. EDWARD ,1976, *Hermitian and Kaehlarian Geometry in Relativity*, Springer-Verlag, ISBN:9780387075402,New York, Pg.27,
- [26] PİRİNÇÇİ B. ,2005, S^6 Küresinin Tümel Gerçel Alt Manifoldları, Pg. 73-75
- [27] RADEMACHER H.,2013, *Totally geodesic submanifold - definition**, Bulletin of the Manifold Atlas, Germany
- [28] HSIUNG, C.C, 1995, *Almost Complex and Complex Structures*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 981-02-1712-9



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Ad Soyad	Cumhur ARIKAN
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
E-Posta Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ankara Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2016

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2022

Makale ve Bildiriler	
Makaleler	
makale 1	
makale 2	
Bildiriler	
Bildiri 1	
Bildiri 2	

