



T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü



Çok-Durumlu Sistemlerin Etki-Dayanıklılık Modellemesi Altında Ortalama Geriye Kalan Dayanıklılık Fonksiyonunun Değerlendirilmesi

Yüksek Lisans Tezi

Fırat DEVECİ

İstatistik Anabilim Dalı Adı

İzmir
2022

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi

**Çok-Durumlu Sistemlerin Etki-Dayanıklılık Modellemesi
Altında Ortalama Geriye Kalan Dayanıklılık
Fonksiyonunun Değerlendirilmesi**

Fırat DEVECİ

Danışman

Doç. Dr. Funda İŞÇİOĞLU

İzmir-2022

KABUL VE ONAY

Fırat DEVECİ tarafından hazırlanan ve Yüksek Lisans Tezi olarak sunulan “Çok-Durumlu Sistemlerin Etki-Dayanıklılık Modellemesi Altında Ortalama Geriye Kalan Dayanıklılık Fonksiyonunun Değerlendirilmesi” başlıklı bu çalışma Ege Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’ nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 09 / 05 / 2022 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Adı Soyadı:**İmza****Jüri Başkanı** :**Raportör Üye** :**Üye** :



EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Çok-Durumlu Sistemlerin Etki-Dayanıklılık Modellemesi Altında Ortalama Geriye Kalan Dayanıklılık Fonksiyonun Değerlendirilmesi” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

.... / / 2022

Fırat DEVECİ

İmzası



ÖZET**ÇOK-DURUMLU SİSTEMLERİN ETKİ-DAYANIKLILIK
MODELLEMESİ ALTINDA ORTALAMA GERİYE KALAN
DAYANIKLILIK FONKSİYONUNUN DEĞERLENDİRİLMESİ**

DEVECİ, Fırat

Yüksek Lisans Tezi, İstatistik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Funda İŞÇİOĞLU

Mayıs 2022, 44 sayfa

Bu tez çalışmasında, çok-durumlu bir sistemin etki-dayanıklılık modellemesi altında bileşen ve sistem bazında ortalama geriye kalan dayanıklılık fonksiyonu incelenmiştir. Bir bileşenin veya sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılığı, rastgele bir etki altında yaşamını sürdüren bir bileşenin veya sistemin bozulana kadarki beklenen geriye kalan dayanıklılığı olarak tanımlanabilir.

Sistemin herhangi bir bileşeni üç seviyeye sahiptir ve bu bileşen ortamdaki mevcut iki rastgele etkiden etkilenmektedir. Bileşenin bahsedilen bu iki etkiye göre seviyeleri belirlenmektedir. Bileşen bazında ortalama geriye kalan dayanıklılık fonksiyonları, bileşenin kısmi performansını ifade eden seviye 1 veya üzeri için ve bileşenin mükemmel performansını ifade eden seviye 2 veya üzeri için sıra istatistikleri yardımı ile elde edilmiştir. Ayrıca üç seviyeli bir n' den k çıkışlı G sistemi için de benzer seviyeler dikkate alınarak ortalama geriye kalan dayanıklılık fonksiyonu sisteme ait iki ayrı koşul altında elde edilmiştir. Sistemin seviye 1' deki ortalama geriye kalan dayanıklılığı ise sadece simülasyon sonuçları ile sunulmuştur.

Ortalama geriye kalan dayanıklılık değerleri hem rastgele bileşenin hem de etkilerin dağılımları üstel alınarak bileşen bazında ve n' den k çıkışlı G sistemi için hesaplanmıştır. Sonuçlar farklı parametre değerleri, bileşen sayısı ve k değerleri dikkate alınarak irdelenmiştir. Ayrıca teorik sonuçlar simülasyon çalışmaları ile de desteklenmiştir. Bu çalışma etki-dayanıklılık modelleri altında çok-durumlu sistemlere önemli bir katkı sağlamaktadır.

Anahtar kelimeler: Güvenilirlik Analizi, Etki-Dayanıklılık Modeli, Çok-Durumlu Sistemler, Sıra İstatistikleri



ABSTRACT**EVALUATION OF THE MEAN REMAINING STRENGTH
FUNCTION OF MULTI-STATE SYSTEMS UNDER STRESS-
STRENGTH MODELLING**

DEVECİ, Firat

MSc in Statistics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Funda ISCIOGLU

May 2022, 44 pages

In this thesis, the mean remaining strength function of a multi-state system on the basis of component and system is investigated under the stress-strength modelling. The mean remaining strength of a component or system can be defined as the expected remaining strength of a component or system surviving under random stress until failure.

Any component of the system has three states and affected by two random stress. The states of the component are determined according to these two random stress. The mean remaining strength function of component was obtained with the help of order statistics for both state 1 or above and 2 that refers to the partial or above and excellent performance of a component, respectively. The mean remaining strength function was also obtained for a three-state k out of $n: G$ system by taking into account the similar states. The mean remaining strength function of system at state 1 is presented with only simulation results.

The mean remaining strength values were calculated for both a component and a k out of $n: G$ system by assuming exponential distributions for both strength and stress random variables. The results were analyzed by considering different parameter values, number of components and k values. In addition, the theoretical results were supported by simulations. This thesis makes an important contribution to multi-state systems under stress-strength modelling.

Keywords: Reliability Analysis, Stress-Strength Model, Multi-State Systems, Order Statistics

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmanın araştırma konusunun belirlenmesi, planlanıp yürütülmesi ve tez haline getirilmesi aşamalarında desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, bana yol gösteren tez danışmanım, saygıdeğer ve kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Funda İŞÇİOĞLU' na şükranlarımı sunarım.

Hayatımın her anında maddi ve manevi desteklerini üzerimden esirgemeyen aileme şükranlarımı sunarım.

FYL–2020-21762 Proje No' lu araştırma projemizi gerçekleştirebilmemiz için bize mali olarak destek veren Ege Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri koordinatörlüğüne teşekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

KABUL VE ONAY	i
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
TABLolar DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1.GİRİŞ	1
2.TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1.Seri Sistemlerin Güvenilirliği	3
2.2.Paralel Sistemlerin Güvenilirliği	5
2.3.Faktöriyel Fonksiyonu	7
2.4.Gamma Fonksiyonu	7
2.5.Beta Fonksiyonu	8
2.6.Toplam Olasılık Kuralı	8
3.ETKİ-DAYANIKLILIK MODELLEMESİ	10

İÇİNDEKİLER DİZİNİ(DEVAM)

	<u>Sayfa</u>
3.1.Etki-Dayanıklılık Modeli	10
3.2.İki Durumlu Sistem Güvenilirliğinde Etki-Dayanıklılık Modeli	13
3.3.Çok-Durumlu Sistem Güvenilirliğinde Etki-Dayanıklılık Modeli	14
4.ÇOK-DURUMLU SİSTEMLERDE ORTALAMA GERİYE KALAN DAYANIKLILIK DEĞERLENDİRİLMESİ	18
4.1.Çok-Durumlu Sistemlerde Bileşene Ait Ortalama Geriye Kalan Dayanıklılık.....	19
4.2.Çok-Durumlu Sistemlerde Sisteme Ait Ortalama Geriye Kalan Dayanıklılık.....	23
5.SONUÇ VE ÖNERİLER.....	39
KAYNAKLAR DİZİNİ	41
ÖZGEÇMİŞ	44

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. n Bileşenden Oluşan Seri Bağlı Sistem	3
2.2. n Bileşenden Oluşan Paralel Bağlı Sistem	5
2.3. Ω Örnek Uzayının Parçalanması.....	9



TABLÖLAR DİZİNİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
4.1. Bileşen Bazında Ortalama Geriye Kalan Dayanıklılık Değerleri	23
4.2. Tüm Bileşenlerin Kısmi veya üzeri ve Mükemmel Performansta Olduğu Bilgileri Altında Sisteme ait Ortalama Geriye Kalan Dayanıklılık Değerleri	29
4.3. Tüm Bileşenlerin Kısmi ve Mükemmel Performansta Olduğu Bilgileri Altında Sisteme ait Ortalama Geriye Kalan Dayanıklılık Simülasyon Değerleri.....	31
4.4. Sistemin Kısmi veya üzeri ve Mükemmel Performansta Olduğu Bilgileri Altında Sisteme ait Ortalama Geriye Kalan Dayanıklılık Değerleri	37

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
T_i	i . bileşenin yaşam zamanı
T	sistemin yaşam zamanı
$R_i(t)$	i . bileşenin t anındaki güvenilirliği
$R^S(t)$	seri bağlı sistemin t anındaki güvenilirliği
$R^P(t)$	paralel bağlı bir sistemin t anındaki güvenilirliği
Γ	Gamma fonksiyonu
β	Beta fonksiyonu
Ω	omega örnek uzayı
$P(A)$	A olayının olasılığı
X_i	i . bileşenin durumu
$P_{i,j}$	i . bileşenin j durumunda olması olasılığı
Y_i	i . bileşenin dayanıklılığı
ϕ^Z	bileşenin ortalama geriye kalan dayanıklılığı
S^Z	sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılığı
<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklama</u>
$\phi_{1+}^Z(S)$	Bileşenin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık simülasyon değerleri
$\phi_{1+}^Z(T)$	Bileşenin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık teorik değerleri
$\phi_2^Z(S)$	Bileşenin seviye 2' de olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık simülasyon değerleri
$\phi_2^Z(T)$	Bileşenin seviye 2' de olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık teorik değerleri
$S_{1+}^Z(S)$	Sistemin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık simülasyon değerleri

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ(DEVAM)

<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklama</u>
$S_{1+}^Z(T)$	Sistemin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık teorik değerleri
$S_2^Z(S)$	Sistemin seviye 2' de olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık simülasyon değerleri
$S_2^Z(T)$	Sistemin seviye 2' de olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık teorik değerleri
$S_{1+}^k(S)$	Sistemin k adet bileşenin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık simülasyon değerleri
$S_{1+}^k(T)$	Sistemin k adet bileşenin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık teorik değerleri
$S_2^k(S)$	Sistemin k adet bileşenin seviye 2' de olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık simülasyon değerleri
$S_2^k(T)$	Sistemin k adet bileşenin seviye 2' de olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık teorik değerleri
$S_1^Z(S)$	Sistemin seviye 1' de olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık simülasyon değerleri
Min, Max	minimum, maksimum
FGM	Farlie-Gumbel-Morgenstern

1.GİRİŞ

Güvenilirlik, bir bileşenin veya bir sistemin belirli bir zaman aralığında ve belirli şartlar altında amaçlanan fonksiyonu gerçekleştirebilme yeteneği olarak tanımlanabilir. Gelişen teknoloji ile birlikte günümüz sistemlerinin karmaşıklığının artması, bu sistemleri kullanıma sunan üreticiler için de bu sistemlerden yararlanan kullanıcılar için de sistemlerin bir bütün halinde amacına uygun çalışması, kontrol edilebilir olması, performans karakteristiklerinin ve beklenen yaşam süresinin bilinmesi ihtiyaçları, güvenilirlik konusunu oldukça önemli bir hale getirmiştir.

Güvenilirlik analizi ise, bir sistemde veya sisteme ait bileşenlerde meydana gelen hatanın zamanı, hatadan kaynaklı sistemin çalışmama süresi, bozulan birimlerin yenilenebilir veya tamir edilebilir olup olmadığı, bir bütün olarak sistemin veya sisteme ait bileşenin iç ve dış etkilere karşı dayanıklılığı, beklenen yaşam süresinin optimizasyonu, meydana gelen hataların sayısının en aza indirilmesi ve etkilerinin minimize edilmesi vb. konularda yapılması gereken işlemlerin belirlenmesi ve bir bütün halinde bu süreçlerin incelenmesidir. Ayrıca en basit anlamıyla güvenilirlik analizi, bir bileşenin veya sistemin bozulma oranlarının analizidir. Bir sistemin güvenilirlik analizinin doğru yapılması ve yapılan istatistiksel hesaplamalardan gerçekçi sonuçlar elde edilebilmesi için kullanılacak istatistiksel yöntemlerin, sisteme uygunluğunun doğru tespit edilmesi ve doğru uygulanması gerekmektedir.

Etki ile dayanıklılık arasındaki ilişki günümüzde biyoloji, kimya, tıp, psikoloji ve mühendislik gibi pek çok bilim dalında incelenmektedir. Sözlük anlamına göre etki, bir bireyin ya da nesnenin başka bir birey ya da nesne üzerindeki düşünce, yön, eğilim vb. konularda değişikliklere yol açan uyarıcı olarak tanımlanabilir. Dayanıklılık ise; bir bireyin, nesnenin ya da dizgenin maruz kaldığı iç veya dış etkilere karşı direnme niteliği olarak tanımlanabilir. Bu tez çalışmasında etki kavramı, mühendislik alanında kullanıldığı anlamıyla bir sistem veya bileşen üzerindeki fiziksel veya mekanik baskı, dayanıklılık kavramı ise bu baskıya karşı sistemin veya bileşenin gösterdiği direnç olarak ifade edilebilir. Etki-dayanıklılık modellerinin özellikle inşaat mühendisliği, sistem mühendisliği ve sistem güvenilirliği alanlarında kullanımı önemli ölçüde yaygındır.

Belirli bir zaman aralığında, belirlenen özel bir görevi yerine getirmek üzere tasarlanmış, aralarında etkileşimler bulunan ve aynı anda veya sıralı bir biçimde işleyen bileşenlerin ve donanımların bir bütün oluşturacak şekilde bir araya getirilmiş haline sistem adı verilir. Sistemler birbirleriyle etkileşim içinde çalışan pek çok bileşenden oluştuğu için sistem güvenilirliğinin hesaplanmasında tümevarım yöntemini kullanmak oldukça etkilidir. İlk olarak bileşen bazında istatistiksel analizler yapılır, daha sonra bileşenler arası etkileşimler, bileşenlerin performanslarını ve yaşam sürelerini etkileyen tüm içsel ve çevresel faktörler dikkate alınarak sistem güvenilirliği istatistiksel olarak ifade edilir.

Son yıllarda meydana gelen hızlı teknolojik gelişmeler sayesinde gerek maliyet gerekse iş gücü ve zaman açısından sağladığı yararlardan dolayı özellikle mühendislik olmak üzere hemen hemen her sektörde teknolojik sistemlerin kullanımı önemli ölçüde yaygınlaşmıştır. Bu sistem yapıları özellikle elektrik santrallerinin kurulumları, telekomünikasyon sistemleri, boru hattı tasarımları, bilgisayar sistemleri, güç ve üretim sistemleri, otomotiv ve roket teknolojileri gibi pek çok alanda sıklıkla kullanılmaktadır. Bu alanlarda devamlılığı sağlayabilmek için, sistemlerin sorunsuz çalışması, karmaşık yapılarda eğer varsa sorunlu veya ömürlerinin sonlarına gelmiş bileşenlerin önceden tespit edilebilmesi ile mümkün olacağından doğru ve hassas istatistiksel hesaplama ve ölçme yöntemlerinin geliştirilmesi oldukça önemlidir. Sistemler, sistemi oluşturan bileşenlerin çalışma durumları baz alınarak iki durumlu sistemler ve çok-durumlu sistemler olmak üzere iki kategoride incelenebilirler.

Geleneksel güvenilirlik teorisinde, sistemin ve her bir bileşenin çalışma ve başarısız olma şeklinde olası iki durumdan yalnızca birinde olduğu varsayılır. Bu teori, sistemlerin veya bileşenlerin ikiden daha fazla performans düzeyine sahip olabileceği anlamına gelen ara durumları modellemede başarısız olur. Çok-durumlu sistem yaklaşımı birtakım çalışma düzeylerinde çalışan ve başarısız olan bir sistem yapısını sunmak için kullanılır (Eryılmaz, 2008).

Bir sistem veya sisteme ait bileşenler için “çalışma” ve “çalışmama” şeklinde iki seviyenin söz konusu olduğu yapılar iki durumlu sistemler olarak ifade edilebilirler ancak; sistemin veya sisteme ait bileşenlerin performansını açıklayabilmek için iki seviyenin yeterli olmadığı durumlarda olabilir. Sistemin veya sisteme ait bileşenlerin performanslarının ikiden daha çok seviye ile modellendiği sistemlere çok-durumlu sistemler denir. Örneğin, çok-durumlu sistemler için bu seviyeler “mükemmel performansta çalışma”, “kısmi performansta çalışma” ve “tamamen bozulma” olarak ifade edilebilirler.

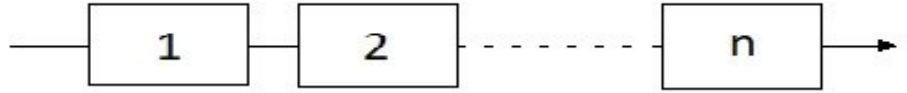
2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, bu tez çalışmasında kullanılan temel kavramlar, tanımlar ve notasyonlardan kısaca bahsedilmiştir.

2.1. Seri Sistemlerin Güvenilirliği

Seri yapıli sistemlerde, sistemi oluşturan bileşenler birbirine seri bir şekilde bağlanmışlardır. Bu yapı üzerine kurulmuş sistemlerde, sistemi oluşturan bileşenlerden herhangi birinin amaçlanan fonksiyonu yerine getirememesi yani bozulmuş olması sistemin de bozulmuş olması anlamına gelir dolayısıyla seri yapıli bir sistemin yaşam zamanı, sistemi oluşturan bileşenlerden yaşam zamanı en küçük olan bileşenin yaşam zamanı kadardır.

Seri yapıli bir sistemi bir zincire benzetmek mümkündür. Nasıl ki bir zincirin dayanıklılığı en zayıf halkasının dayanıklılığı kadarsa seri yapıli bir sistemin yaşam zamanı da yaşam zamanı en küçük olan bileşenin yaşam zamanı kadardır.



şekil 2.1. n Bileşenden Oluşan Seri Bağlı Sistem

şekil 2.1' de n adet bağımsız bileşenden oluşan seri bağlı bir sistem yapısı gösterilmiştir.

T_i : i . bileşenin yaşam zamanı ve T : sistemin yaşam zamanı olarak ifade edilirse, seri bağlı n adet bileşenden oluşan bir sistemin yaşam zamanı;

$$T = \min\{T_1, T_2, T_3, \dots, T_{n-1}, T_n\} \quad (2.1.1)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bir sistemin herhangi bir t anında amaçlanan fonksiyonu yerine getiriyor olması ise o sistemin t anındaki güvenilirliği olarak ifade edilebilir. Buna göre n adet bileşenden oluşan bir sistemdeki i . bileşenin t anındaki güvenilirliği;

$$R_i(t) = P(T_i > t) \quad (2.1.2)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$R^S(t)$, birbirinden bağımsız n adet bileşenden oluşan seri bağlı bir sistemin herhangi bir t anındaki güvenilirliği olmak üzere;

$$R^S(t) = P(T > t)$$

$$R^S(t) = 1 - P(T \leq t) \quad (2.1.3)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitlik (2.1.3) açılırsa;

$$R^S(t) = P(\min\{T_1, T_2, T_3, \dots, T_{n-1}, T_n\} > t)$$

$$R^S(t) = P(T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t, \dots, T_{n-1} > t, T_n > t)$$

$$R^S(t) = P(T_1 > t).P(T_2 > t) \dots P(T_{n-1} > t).P(T_n > t)$$

$$R^S(t) = R_1(t).R_2(t) \dots R_{n-1}(t).R_n(t)$$

$$R^S(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) \quad (2.1.4)$$

şeklinde ifade edilebilir.

T_i rastgele değişkeninin $F_i(t) = P(T_i \leq t)$ dağılım fonksiyonuna sahip olduğu varsayıldığında sistemin yaşam zamanı olarak ifade edilen T rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu;

$$F(t) = P(T \leq t)$$

$$F(t) = 1 - P(T > t)$$

$$F(t) = 1 - R(t)$$

$$F(t) = 1 - \prod_{i=1}^n R_i(t)$$

$$F(t) = 1 - [(1 - F_1(t))(1 - F_2(t)) \dots (1 - F_n(t))]$$

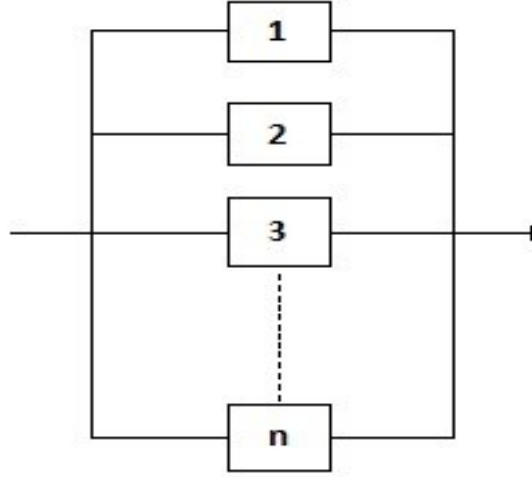
$$F(t) = 1 - [\bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) \dots \bar{F}_n(t)]$$

$$F(t) = 1 - [\prod_{i=1}^n \bar{F}_i(t)] \quad (2.1.5)$$

şeklinde ifade edilebilir.

2.2. Paralel Sistemlerin Güvenilirliği

Paralel yapılı sistemlerde, sistemi oluşturan bileşenler birbirine paralel bir şekilde bağlanmışlardır. Bu yapı üzerine kurulmuş sistemlerde, sistemi oluşturan bileşenlerden herhangi birinin amaçlanan fonksiyonu yerine getirmesi yani çalışıyor olması sistemin de çalışıyor olması anlamına gelir dolayısıyla paralel yapılı bir sistemin yaşam zamanı, sistemi oluşturan bileşenlerden yaşam zamanı en büyük olan bileşenin yaşam zamanı kadardır.



Şekil 2.2. n Bileşenden Oluşan Paralel Bağlı Sistem

Şekil 2.2' de n adet bağımsız bileşenden oluşan paralel bağlı bir sistem yapısı gösterilmiştir. T_i : i . bileşenin yaşam süresi ve T : sistemin yaşam süresi olarak ifade edilirse, paralel bağlı n adet bileşenden oluşan bir sistemin yaşam zamanı;

$$T = \max\{T_1, T_2, T_3, \dots, T_{n-1}, T_n\} \quad (2.2.1)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$R^P(t)$, birbirinden bağımsız n adet bileşenden oluşan paralel bağlı bir sistemin herhangi bir t anındaki güvenilirliği olmak üzere;

$$R^P(t) = P(T > t)$$

$$R^P(t) = 1 - P(T \leq t) \quad (2.2.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitlik (2.2.2) açılırsa;

$$R^P(t) = P(\max\{T_1, T_2, T_3, \dots, T_{n-1}, T_n\} > t)$$

$$R^P(t) = 1 - P(\max\{T_1, T_2, T_3, \dots, T_{n-1}, T_n\} \leq t)$$

$$R^P(t) = 1 - P(T_1 \leq t, T_2 \leq t, \dots, T_{n-1} \leq t, T_n \leq t)$$

$$R^P(t) = 1 - [P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t) \dots P(T_{n-1} \leq t)P(T_n \leq t)]$$

$$R^P(t) = 1 - [(1 - R_1(t))(1 - R_2(t)) \dots (1 - R_n(t))]$$

$$R^P(t) = 1 - [\prod_{i=1}^n (1 - R_i(t))] \quad (2.2.3)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Sistemin yaşam zamanı olarak ifade edilen T rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu ise;

$$F(t) = P(T \leq t)$$

$$F(t) = P(\max\{T_1, T_2, T_3, \dots, T_{n-1}, T_n\} \leq t)$$

$$F(t) = P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t) \dots P(T_{n-1} \leq t)P(T_n \leq t)$$

$$F(t) = F_1(t)F_2(t) \dots F_{n-1}(t)F_n(t)$$

$$F(t) = \prod_{i=1}^n F_i(t) \quad (2.2.4)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Sistem güvenilirliği bir olasılık ifadesi olduğu için Eşitlik 2.1.4' de görüldüğü üzere seri bağlı bir sistem için sistemdeki bileşen veya alt sistem sayısının artması sistem güvenilirliğinin azalmasına sebep olurken, Eşitlik 2.2.3' de görüldüğü üzere paralel bağlı bir sistem için sistemdeki bileşen veya alt sistem sayısının artması sistem güvenilirliğinin artmasını sağlamaktadır. Paralel bağlı bileşenlerden veya alt sistemlerden oluşan sistem yapıları oldukça güvenilir olmasına rağmen bileşen sayısındaki artışla doğru orantılı olarak sistemin kurulum maliyeti de artmaktadır. Bu nedenle, günümüz mühendislik sistemlerinin kurulumunda hem güvenilir hem de maliyet açısından avantajlı olmasından dolayı n' den k çıkışlı sistem yapıları tercih edilmektedir. Bu sistem yapıları, sistemin kurulum amacına göre F ve G sistemleri olarak iki gruba ayrılabilir. n adet bileşenden en az k tanesinin çalıştığı durumda çalışan sistemler n' den k çıkışlı G sistemi olarak ifade edilirken, n' den k çıkışlı F sistemleri n adet bileşenden en az k tanesi çalışmadığında bozulan sistemlerdir. Ayrıca günümüzde bazı sistem kurulumlarında seri ve paralel yapıları sistemlerin genelleştirilmiş hali olan ardışık n' den k çıkışlı F ve G sistem yapıları da kullanılmaktadır. n adet bileşenden

ardışık en az k tane bileşenin çalıştığı durumda çalışan sistemler ardışık n' den k çıkışlı G sistemi olarak ifade edilirken, n adet bileşenden ardışık en az k tane bileşenin bozulması ile bozulan sistemler ardışık n' den k çıkışlı F sistemleri olarak ifade edilmektedir.

2.3. Faktöriyel Fonksiyonu

Faktöriyel fonksiyonu, herhangi bir pozitif tam sayısının kendisinden önceki bütün pozitif tam sayılarla çarpılması olarak tanımlanabilir. Faktöriyel fonksiyonu matematikte daha genel olan Gamma fonksiyonunun tam sayılarla sınırlandırılmış özel bir halidir. Örneğin:

- $2! = 2.1 = 2$
- $3! = 3.2.1 = 6$
- $4! = 4.3.2.1 = 24$

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $n!$ şeklinde gösterilir.

$$n! = n. (n - 1). (n - 2) \dots 3.2.1$$

şeklinde ifade edilebilir.

2.4. Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu, matematikte pozitif tam sayılarla sınırlı olan faktöriyel fonksiyonunun sıfır ve negatif tam sayılar dışında kalan tüm reel sayılar için genelleştirilmiş hali olarak tanımlanabilir ve Γ ile gösterilir.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır.

Gamma fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıda sıralanmıştır.

- $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{k \rightarrow \infty} -e^{-t} \Big|_0^k = -0 - (-1) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ \mid \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ \mid \Gamma(x + 1) = x!$

Gamma fonksiyonunun farklı formlarda pek çok gösterimi vardır ancak bu tez çalışmasında kullanılacağı ölçüde ele alınmıştır.

2.5. Beta Fonksiyonu

Matematikte beta fonksiyonu Euler İntegrali' nin ilk türüdür. $x, y > 0$ için;

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanır.

Beta fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıda sıralanmıştır.

- $B(x, y) = B(y, x)$
- $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$
- $B(x, y) = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$

Beta fonksiyonunun farklı formlarda pek çok gösterimi vardır ancak bu tez çalışmasında kullanılacağı ölçüde yer verilmemiştir.

2.6. Toplam Olasılık Kuralı

Tanım: $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı olsun. Ω örnek uzayının sonlu sayıda karşılıklı ayrık olayların birleşimi şeklinde gösterilmesine Ω ' nın parçalanışı denir. Matematiksel olarak;

$$\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k ; i \neq j \text{ ve } B_i \cap B_j = \emptyset \quad (2.6.1)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.1: $B_1, B_2, \dots, B_k$ ' lar Ω örnek uzayının parçalanması ise Ω ' daki herhangi bir A olayının gerçekleşme olasılığı;

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i) \quad (2.6.2)$$

şeklinde ifade edilir.

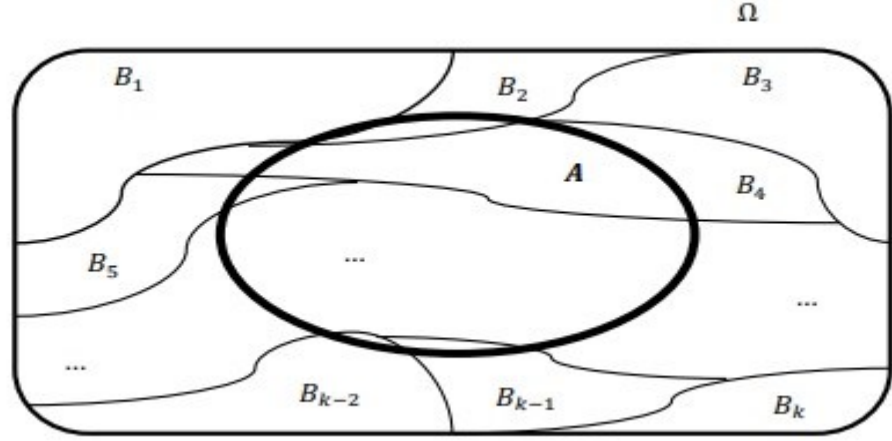
İspat:

$$A = A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k)$$

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k)$$

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_k) \\
&= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_k)P(A|B_k) \\
&= P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)
\end{aligned}$$

şeklinde ispatlanmış olur. Bu olasılık formülü toplam olasılık kuralı olarak adlandırılır.



Şekil 2.3. Ω Örnek Uzayının Parçalanması

3. ETKİ-DAYANIKLILIK MODELLEMESİ

Etki-dayanıklılık güvenilirliği tıbbi istatistik, mühendislik istatistiği, ziraat ve inşaat sektörleri gibi pek çok alanda kullanılmaktadır. Örneğin; günümüz dünyasında betonarme en yaygın kullanılan yapı malzemesidir. Büyük ölçüde su ve çimento karışımından oluşan beton, başlangıçta akışkan halde olsa da zaman içinde çeşitli kimyasal reaksiyonlar sonucu sertleşerek oldukça dayanıklı bir hale gelmesine rağmen gevrek bir yapıda olduğu için kırılmaya ve çatlamaya elverişlidir. Bu nedenle çok katlı binaların taşıyıcı kolonlarında yapı malzemesi olarak kullanılacak betonun belirlenen karışım oranlarında hazırlanmış bir numunesine çeşitli basınç testlerinin uygulanması ve dayanıklılığının ölçülmesi devletler tarafından zorunlu hale getirilmiştir.

Beton içerik olarak; bağlayıcı çimento, farklı boyutlardaki agregalar, su ve katkı maddelerinin belirli orandaki karışımından oluşmaktadır. Yapı olarak karışım anında akışkan bir haldedir, belirli süreler içerisinde yerleştirilmeye ve işlemeye uygundur; ancak su-çimento reaksiyonu (hidratasyon) nedeniyle zamanla sertleşerek içinde bulunduğu kalıp şeklini alarak yüksek dayanımlara ulaşır. Gevrek bir yapıya sahip olur. Bu nedenle çatlama ve kırılmaya elverişli bir yapı malzemesidir (Bilal, 2013).

Bir beton kalıbının maruz kaldığı baskıya veya bir köprünün üzerinde taşıdığı ağırlığa, bir elektrik motorunun veya devresinin üzerinden geçen akıma ve taşıdığı gerilime dayanması olasılıklarının biliniyor olması ilgili alanlarda yapılacak çalışmalar için öngörülebilir bulunulabilmesi açısından oldukça önemlidir. Ayrıca hastalık yapıcı bir bakteri veya mikrobun tedavi maksatlı verilen bir ilaca, bitki zararlılarının veya haşerelerin zararlı etkilerinin azaltılması veya ortadan kaldırılması için kullanılan pestisitlere vb. dayanması olasılıklarının biliniyor olması da biyoloji, tıp ve ziraat alanlarındaki çalışmalar için çeşitli ön kararlar alınabilmesi açısından kesinlikle çok önemlidir.

3.1.Etki-Dayanıklılık Modeli

Etki-dayanıklılık güvenilirliği, belirli bir bileşenin veya sistemin maruz kaldığı etki altında yaşama olasılığı olarak tanımlanabilir. Bileşenin veya sistemin yaşamını sürdürebilmesi ve amaçlanan fonksiyonu yerine getirebilmesi için dayanıklılığın, bileşenin veya sistemin maruz kaldığı etki kuvvetinden büyük olması gerekir, eğer etki kuvveti bileşen dayanıklılığından büyükse bileşen veya sistem başarısız olur. Bu durum matematiksel olarak ifade edilecek olursa; bir bileşenin veya sistemin yaşamı esnasında maruz kaldığı etki Z ve dayanıklılık Y rastgele değişkenleri ile ifade edilirse, etki-dayanıklılık güvenilirliği $R = P(Z < Y)$ şeklinde tanımlanabilir. Burada R bileşenin veya sistemin yaşama olasılığını ifade etmektedir.

Dayanıklılık ve etki rastgele değişkenlerinin birbirinden bağımsız ve olasılık yoğunluk fonksiyonları sırasıyla $f_Y(y)$ ve $f_Z(z)$ olduğu varsayalım. Bu durumda etki-dayanıklılık güvenilirliği;

$$R = P(Z < Y) = \int_0^\infty \int_0^y f_Y(y) f_Z(z) dz dy$$

$$R = P(Z < Y) = \int_0^\infty f_Y(y) F_Z(y) dy \quad (3.1.1)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Benzer şekilde, $y > 0$ olmak üzere bir bileşenin veya sistemin dayanıklılığı Y ve $z > 0$ olmak üzere bileşenin veya sistemin maruz kaldığı etki Z rastgele değişkenleri ile ifade edilsin. Y ve Z rastgele değişkenleri bağımsız ve birikimli dağılım fonksiyonlarının sırasıyla $F(y)$ ve $G(z)$ olduğu varsayalım. Bu durumda etki-dayanıklılık güvenilirliği;

$$R = P(Y > Z) = \int_0^\infty P(Y > Z | Z = z) g(z) dz \quad (3.1.2)$$

$$R = P(Y > Z) = \int_0^\infty \bar{F}(z) dG(z) \quad (3.1.3)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$, Y rastgele değişkeninin yaşam fonksiyonudur.

Etki-dayanıklılık güvenilirliği kavramı literatürde büyük ölçüde etki ve dayanıklılık rastgele değişkenlerinin aynı dağılım ailesine ait olduğu varsayımı altında incelenmiştir. Etki-dayanıklılık üzerine yapılan çalışmalar genellikle tahminleme ve sistem güvenilirliği olarak iki ana başlık altında sınıflandırılabilir. Etki-dayanıklılık güvenilirliği üzerine yapılan tahmin çalışmalarına en çok konu olan tahmin edici ise en çok olabilirlik tahmin edicisidir ancak; farklı varsayımlar altında parametrik ve parametrik olmayan tahmin edicilerin incelendiği ve güven sınırlarının sunulduğu çalışmalar da mevcuttur. Bu çalışmaların bir kısmı aşağıda sıralanmıştır.

Etki-dayanıklılık güvenilirliği kavramının temelleri Birnbaum (1956), tarafından atılmış ve geliştirilmiştir. Yirminci yüzyılın son çeyreğine kadar bu kavram üzerine yapılmış çalışmalar oldukça sınırlı sayıda olmasına rağmen yirminci yüzyılın son çeyreğine doğru etki-dayanıklılık güvenilirliği üzerine olan çalışmalar etkileyici düzeyde artmaya başlamıştır. Church ve Harris (1970), bağımsız ve normal dağılım ailesine ait Y ve Z rastgele değişkenlerini sırasıyla dayanıklılık ve etki olarak ifade etmişler ve etki rastgele değişkenin dağılımının bilindiği varsayımı altında, $R = P(Z < Y)$ etki-dayanıklılık güvenilirliğini Mann-Whitney U istatistiği kullanarak tahmin etmişler ve bu olasılık için güven aralıkları elde etmişlerdir. Downtown (1973), bağımsız ve aynı dağılıma sahip Y ve Z rastgele değişkenlerini dayanıklılık ve etki olarak ifade etmiş ve $R = P(Z < Y)$ etki-dayanıklılık güvenilirliğinin en küçük varyanslı yansız tahmin edicisini Rao-Blackwell Teoremi ile elde ederek, Church ve Harris (1970) tarafından güven aralıklarını elde etmek için kullanılan tahmin ediciye asimptotik olarak eşdeğer bir alternatif olarak önermiştir. Tong (1974), bağımsız ve üstel

dağılım ailesine ait Y ve Z rastgele değişkenlerini sırasıyla dayanıklılık ve etki olarak ifade etmiş ve $R = P(Z < Y)$ etki-dayanıklılık güvenilirliğinin en küçük varyanslı yansız tahmin edicisini elde etmiştir. Woodward ve Kelley (1977), sırasıyla dayanıklılık ve etki olarak ifade ettikleri Y ve Z rastgele değişkenlerinin bağımsız ve normal dağılım ailesine ait olduğu varsayımı altında $R = P(Z < Y)$ etki-dayanıklılık güvenilirliğinin düzgün en küçük varyanslı yansız tahmin edicisini ifade etmişlerdir. Awad ve Azzam (1981), sırasıyla dayanıklılık ve etki olarak ifade ettikleri Y ve Z rastgele değişkenlerinin iki değişkenli üstel dağılıma sahip olduğu varsayımı altında $R = P(Z < Y)$ etki-dayanıklılık güvenilirliği için en çok olabilirlik, moment ve Mann-Whitney tahmin edicilerini ifade etmişler ve üç farklı tahmin edicinin asimptotik varyanslarını incelemişlerdir. Ayrıca Y ve Z rastgele değişkenlerinin ortalamalarının eşitliğini test etmek için bir test sunmuşlar ve ortalamaların farkları için güven limitlerini vermişlerdir. Ragap (1991), Y ve Z rastgele değişkenlerinin aynı ölçek parametrelili fakat farklı şekil parametrelili genelleştirilmiş lojistik dağılıma sahip olmaları durumunda $R = P(Z < Y)$ olasılığının tahmini için en çok olabilirlik, Bayes ve ampirik Bayes metotlarını incelemiştir. Al Hussaini ve ark. (1997), sırasıyla dayanıklılık ve etki olarak ifade ettikleri Y ve Z rastgele değişkenlerinin bağımsız ve her birinin log-normal dağılıma sahip oldukları varsayımı altında $R = P(Z < Y)$ etki-dayanıklılık güvenilirliği için parametrik ve parametrik olmayan tahmin ediciler elde etmişler ve iki tahmin ediciyi karşılaştırmışlardır. Hem parametrik hem de parametrik olmayan tahmin ediciler için $100(1 - \alpha)\%$ güven sınırlarını elde etmişlerdir. Ayrıca yaptıkları simülasyon sonucunda tüm örneklem boyutları için parametrik nokta tahminlerinin parametrik olmayan nokta tahminlerinden daha iyi olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca küçük örneklem boyutları için parametrik aralık tahminlerinin parametrik olmayan aralık tahminlerinden daha iyi olduğunu, örneklem boyutu arttığında ise hesaplanmasının daha basit ve hızlı olmasından dolayı parametrik sınırlar yerine Govindarajulu' nun sunmuş olduğu parametrik olmayan sınırların kullanılmasının hassasiyeti etkileyecek büyük kayıplar oluşturmadığını göstermişlerdir. Saraçoğlu (2007), sırasıyla dayanıklılık ve etki rastgele değişkenleri olarak ifade ettiği $Y \sim \text{Gompertz}(c, \lambda_1)$ ve $Z \sim \text{Gompertz}(c, \lambda_2)$ şeklinde bir dağılıma sahip olduğu ve c parametresinin bilindiği varsayımı altında $R = P(Z < Y)$ etki-dayanıklılık güvenilirliğinin en çok olabilirlik tahmin edicisini üretmiş ve bu tahmin edicinin çeşitli dağılım özellikleri incelemiştir. Ayrıca etki-dayanıklılık güvenilirliği için tam ve asimptotik güven aralıkları oluşturmuş ve bu güven aralıklarının kapsama olasılıklarını araştırmak için bir simülasyon çalışması yapmıştır. Saraçoğlu ve ark. (2009), Y ve Z rastgele değişkenlerinin bağımsız ancak farklı dağılımlı olması varsayımı altında etki-dayanıklılık güvenilirliğinin en çok olabilirlik, Bayes ve düzgün en küçük varyanslı yansız tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Ayrıca tahmin edicileri sayısal örnekler ile karşılaştırmışlar ve ortalama hata karelerini sunmuşlardır. Ghitany ve ark. (2015), sırasıyla dayanıklılık ve etki olarak ifade ettikleri Y ve Z rastgele değişkenlerinin bağımsız ve güçlü Lindley dağılımına sahip oldukları varsayımı altında $R = P(Z < Y)$ etki-dayanıklılık güvenilirliğinin en çok olabilirlik, parametrik ve parametrik olmayan bootstrap yöntemlerine dayanarak nokta ve aralık tahminlerini geliştirmişlerdir. Ayrıca kapsamlı bir simülasyon yoluyla

incelenen tahmin yöntemleri altında etki-dayanıklılık güvenilirliğinin nokta tahminin ve güven aralığının performansını incelemişler ve önerilen prosedürü açıklamak için gerçek verilere dayalı sayısal sonuçlar sunmuşlardır.

3.2.İki Durumlu Sistem Güvenilirliğinde Etki-Dayanıklılık Modeli

Y ve Z , birikimli dağılım fonksiyonları sırasıyla $F_Y(y)$ ve $G_Z(z)$ olan bağımsız rastgele değişkenler olsun. Y rastgele değişkeni, bileşen veya sistem rastgele bir etkiye maruz kaldığında, bileşenin bu etkiye gösterdiği dayanıklılığını ifade etmektedir. Eğer bileşenin dayanıklılığı uygulanan etkiden büyükse ($Y > Z$), bileşen çalışır durumdadır. Eğer bileşenin dayanıklılığı uygulanan etkiden küçükse ($Y < Z$), bileşen bozulur. X_i rastgele değişkeninin i ' inci bileşenin durumunu gösterdiği varsayıldığında, bu değişken;

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{eğer } Y_i < Z \\ 1 & \text{eğer } Y_i > Z \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.2.1)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Eşitlik (3.2.1)' de "0" ve "1" durumları sırasıyla bileşenin bozulma ve çalışma durumları olarak tanımlanabilir. Bu durumda $R_i = P(Y_i > Z)$ olasılığı i . bileşenin güvenilirliğini verir.

$$R_i = P(Y_i > Z) = \int_0^\infty \bar{F}(z) dG(z) \quad (3.2.2)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Hanagal (2003), ortak bir etkiye maruz bırakılan ve birbirinden bağımsız dayanıklılıklara sahip k adet bileşenden oluşan seri bir sistemin $R = P(Y < X)$ etki-dayanıklılık güvenilirliğinin tahminini, sırasıyla dayanıklılık ve etki olarak ifade ettiği X ve Y rastgele değişkenlerinin bağımsız ve her biri Gamma dağılımına ve Weibull dağılımına sahip olduğunda ayrı ayrı elde etmiş ve ayrıca bu tahmin edicilerin asimptotik normalliğini sunmuştur. Eryılmaz (2008a), X ve Y rastgele değişkenlerinin kesikli ve sürekli olmasına göre etki-dayanıklılık güvenilirliğini çok durumlu sistem modellemesi altında etki ve dayanıklılık değerleri arasındaki farka bağlı olarak sisteme ikiden fazla durum atayarak kurgulamış ve durum olasılıklarının en çok olabilirlik ve en küçük varyanslı yansız tahmin edicilerini ifade etmiştir. Ayrıca X ve Y rastgele değişkenlerinin bağımsız ve normal dağılım ailesine ait oldukları ve varyanslarının bilinip ortalamalarının bilinmediği varsayımı altında güven aralıkları elde ederek bulgularını bir simülasyon çalışması ile desteklemiştir. Eryılmaz (2008b), her biri m adet bağımlı eleman içeren, n adet bağımsız bileşenden veya alt-sistemden oluşan ardışık n' den k çıkışlı sistemler için etki ve dayanıklılık rastgele değişkenlerinin aralarındaki sıralamaya dayalı çok değişkenli etki-dayanıklılık modelini kurgulamış ve güvenilirlik hesaplamaları yapmıştır. Eryılmaz ve

Iscioğlu (2010), n' den k çıkışlı G sistemlerinin ve ardışık n' den k çıkışlı G sistemlerinin durumlarını belirli bir ortamda mevcut olan çoklu etkilerin üzerinde ve altında dayanıklılığa sahip olan bileşenlerin sayısını dikkate alarak ifade etmişler ve durum olasılıklarını hesaplayarak, sonuçları çeşitli etki-dayanıklılık dağılımları altında sunup, durum olasılıkları için en çok olabilirlik tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Karadayı ve ark. (2011), $R = P[\max(Y_1, Y_2) < X]$ etki-dayanıklılık güvenilirliğini ve bu olasılığın en çok olabilirlik tahminini, gamma dağılımına sahip dayanıklılık rastgele değişkeni, bağımsız ve farklı parametrelili üstel dağılıma sahip etkilere maruz kaldığı durumda elde etmişlerdir. Ayrıca bir simülasyon çalışması yaparak en çok olabilirlik tahmin edicisinin özelliklerini incelemişlerdir. Eryılmaz (2012), dayanıklılığın zamanla azaldığı ve etkinin zamanla sabit kaldığı varsayımı altında etki-dayanıklılık güvenilirliğini stokastik bir süreç olarak modellemiş ve aynı dayanıklılığa sahip fakat farklı etkilere maruz kalan çok bileşenli sistemlerin yaşam sürelerini karşılaştırmıştır. Ayrıca dayanıklılık rastgele değişkeninin Weibull dağılımına sahip olduğu özel bir durum için güvenilirlik hesaplamalarını sunmuştur. Özler ve Gürler (2012), sistem düzeyinde sistemi oluşturan tüm bileşenlere ortak rastgele etki uygulandığı etki-dayanıklılık kurulumu altında değiştirilebilir bileşenlere sahip n' den k çıkışlı F sistemlerinin güvenilirliğini ve koşullu formunu incelemişlerdir. Ayrıca çok değişkenli Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) ve çok değişkenli Marshall-Olkin dağılımlarına sahip üç bileşenden oluşan sistemin güvenilirliğini de incelemişlerdir.

3.3. Çok-Durumlu Sistem Güvenilirliğinde Etki-Dayanıklılık Modeli

Çok-durumlu sistemler bileşenlerin ya da sistemin ikiden daha çok seviye ile ifade edilebildiği sistemlerdir. Çok-durumlu sistem modellerinde bileşenler veya sistem "0,1,2, ..., M " değerleri ile ifade edilebilen " $M + 1$ " tane mümkün seviyede bulunabilir. Burada "0" bileşenin veya sistemin bozulduğunu " M " ise mükemmel performansta çalıştığını ifade etmektedir. "0" ve " M " arasında kalan değerler ise bileşenlerin veya sistemin farklı seviyelerde çalıştığı anlamına gelmekle birlikte kısaca kısmen çalışma durumları olarak ifade edilebilir.

Çok-durumlu sistemlerde etki-dayanıklılık güvenilirliğini Eryılmaz and Iscioğlu (2010), çalışmalarında aşağıdaki şekilde incelemişlerdir.

Birikimli dağılım fonksiyonu, $F(x) = P\{Y_i \leq x\}, i = 1, 2, \dots, n$ olan $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı dayanıklılıklara sahip n adet bileşenden oluşan bir sistemin, sırasıyla $G_1(z)$ ve $G_2(z)$ dağılım fonksiyonlarına sahip Z_1 ve Z_2 gibi iki tip etkiye maruz kaldığı varsayılın. X_i rastgele değişkeninin i ' inci bileşenin durumunu göstermektedir ve;

$$X_i = \begin{cases} 0, & Y_i < Z_1 \text{ ve } Y_i < Z_2 \\ 1, & Y_i < Z_1, Y_i > Z_2 \text{ veya } Y_i > Z_1, Y_i < Z_2, \\ 2, & Y_i > Z_1 \text{ ve } Y_i > Z_2 \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.3.1)$$

şeklinde ifade edilebilir.

"0", "1", ve "2" seviyeleri sırasıyla bileşenin "tamamen bozulma", "kısmen çalışma" ve "tamamen çalışma" durumları olarak tanımlanabilir. "Tamamen bozulma", bileşen dayanıklılığının her iki etkinin de altında kaldığı durum, "kısmen çalışma", bileşen dayanıklılığının iki etkiden sadece birinin altında kaldığı durum ve "tamamen çalışma", bileşen dayanıklılığının her iki etkinin de üstünde kaldığı durum olarak ifade edilebilir.

Benzer şekilde $Z_{1:2} = \min(Z_1, Z_2)$ ve $Z_{2:2} = \max(Z_1, Z_2)$ olmak üzere X_i rastgele değişkeni;

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{eğer} & Y_i < Z_{1:2} \\ 1, & \text{eğer} & Z_{1:2} < Y_i < Z_{2:2} \\ 2, & \text{eğer} & Y_i > Z_{2:2} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.3.2)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Çok-durumlu bir sistemin etki-dayanıklılık güvenilirliğinin hesaplanabilmesi için öncelikle $Z_{1:2}$ ve $Z_{2:2}$ rastgele değişkenlerinin dağılımları belirlenmelidir. Bu rastgele değişkenlerin dağılımları;

$$P\{Z_{1:2} \leq z\} = 1 - P\{Z_{1:2} > z\} \quad (3.3.3)$$

$$P\{Z_{1:2} \leq z\} = 1 - P\{Z_1 > z, Z_2 > z\} \quad (3.3.4)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitlik (3.3.4)' de gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$P\{Z_{1:2} \leq z\} = 1 - \bar{G}_1(z)\bar{G}_2(z) \quad (3.3.5)$$

şeklinde ifade edilebilir. Benzer şekilde;

$$P\{Z_{2:2} \leq z\} = P\{Z_1 \leq z, Z_2 \leq z\} \quad (3.3.6)$$

$$P\{Z_{2:2} \leq z\} = G_1(z)G_2(z) \quad (3.3.7)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Ayrıca $Z_{1:2}$ ve $Z_{2:2}$ ' nin ortak olasılık dağılımı;

$$P\{Z_{1:2} \leq z_1, Z_{2:2} \leq z_2\} = P\{Z_{2:2} \leq z_2\} - P\{Z_{1:2} > z_1, Z_{2:2} \leq z_2\} \quad (3.3.8)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitlik (3.3.8)' de eşitliğin sağ tarafı;

$$P\{Z_1 \leq z_1, Z_2 \leq z_2\} - P\{Z_1 > z_1, Z_2 > z_1, Z_1 \leq z_2, Z_2 \leq z_2\} \quad (3.3.9)$$

şeklinde de yazılabilir. Sonuç olarak Eşitlik (3.3.9)' da istenen olasılık;

$$G_1(z_2)G_2(z_2) - (G_1(z_2) - G_1(z_1))(G_2(z_2) - G_2(z_1)) \quad (3.3.10)$$

şeklinde ifade edilir.

$(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere, $P_{i,j}$ i . bileşenin j durumunda olması olasılığını ifade ettiği varsayıldığında,

i . bileşenin “0” durumunda olması olasılığı;

$$\begin{aligned} P_{i,0} &= P\{X_i = 0\} = P\{Y_i < Z_{1:2}\} = \int_z F(z) dP\{Z_{1:2} \leq z\} \\ P_{i,0} &= \int_z F(z)(g_2(z)\bar{G}_1(z) + g_1(z)\bar{G}_2(z))dz \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Benzer şekilde i . bileşenin “1” durumunda olması olasılığı;

$$\begin{aligned} P_{i,1} &= P\{X_i = 1\} = P\{Z_{1:2} < Y_i < Z_{2:2}\} \\ P_{i,1} &= \iint_{z_1 < z_2} (F(z_2) - F(z_1)) dP\{Z_{1:2} \leq z_1, Z_{2:2} \leq z_2\} \\ P_{i,1} &= \iint_{z_1 < z_2} (F(z_2) - F(z_1))(g_1(z_2)g_2(z_1) + g_1(z_1)g_2(z_2))dz_1dz_2 \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

şeklinde ifade edilebilir.

i . bileşenin “2” durumunda olması olasılığı ise;

$$\begin{aligned} P_{i,2} &= P\{X_i = 2\} = P\{Y_i > Z_{2:2}\} \\ P_{i,2} &= \int_z \bar{F}(z) dP\{Z_{2:2} \leq z\} \\ P_{i,2} &= \int_z \bar{F}(z)(g_1(z)G_2(z) + g_2(z)G_1(z))dz \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Z_1 ve Z_2 etki rastgele değişkenlerinin, bağımsız ve aynı dağılımlı ortak birikimli dağılım fonksiyonu G ve olasılık yoğunluk fonksiyonu g olduğu varsayıldığında, i . bileşenin “0”, “1” ve “2” durumlarında olma olasılıkları sırasıyla;

$$P_{i,0} = 2 \int_z F(z) \bar{G}(z) g(z) dz \quad (3.3.14)$$

$$P_{i,1} = 2 \iint_{z_1 < z_2} (F(z_2) - F(z_1)) g(z_1) g(z_2) dz_1 dz_2 \quad (3.3.15)$$

$$P_{i,2} = 2 \int_z \bar{F}(z) G(z) g(z) dz, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.16)$$

şeklinde ifade edilebilir.

4. ÇOK-DURUMLU SİSTEMLERDE ORTALAMA GERİYE KALAN DAYANIKLILIK DEĞERLENDİRİLMESİ

Bir bileşenin veya sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılığı, rastgele bir etki altında yaşamını sürdüren bileşenin veya sistemin, bozulana kadarki beklenen geriye kalan dayanıklılığı olarak tanımlanabilir.

ϕ^Z bir bileşenin ortalama geriye kalan dayanıklılığını, $y, z > 0$ olmak üzere, $F_Y(y)$ ve $G_Z(z)$ sırasıyla dayanıklılık ve etki bağımsız rastgele değişkenlerinin birikimli dağılım fonksiyonlarını göstermek üzere;

$$\phi^Z = E(Y - Z | Y > Z) \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Eğer bileşen, Z etkisine kadar yaşamını devam ettiriyorsa, $(Y - Z | Y > Z)$ koşulu kullanılarak bileşenin yaşam fonksiyonu;

$$P(Y > Z + x | Y > Z) = \frac{\int_0^\infty \bar{F}_Y(z+x) dG_Z(z)}{\int_0^\infty \bar{F}_Y(z) dG_Z(z)} \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Eşitlik (4.2)' de $Z = z$ koşulu altında, ortalama geriye kalan dayanıklılık;

$$\phi^Z = \frac{1}{\int_0^\infty \bar{F}_Y(z) dG_Z(z)} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \bar{F}_Y(z+x) dG_Z(z) \right] dx \quad (4.3)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Ortalama geriye kalan dayanıklılık kavramı literatürde daha çok iki durumlu sistem yapıları için ele alınmıştır.

Asadi ve Bayramoğlu (2005), sistem yapılarının önemli türlerinden biri olan paralel yapılı bir sistem için ortalama geriye kalan yaşam zamanı fonksiyonu tanımlamışlar ve çeşitli özelliklerini elde etmişlerdir. Tanımladıkları fonksiyonu kullanarak n adet özdeş ve bağımsız bileşenden oluşan n ' den k çıkışlı bir sistemin ortalama geriye kalan yaşam zamanını hesaplamışlar ve önerdikleri ortalama geriye kalan yaşam fonksiyonu için bir üst sınır elde etmişlerdir. Asadi ve Bayramoğlu (2006), birbirinden bağımsız yaşam zamanlarına sahip ve aynı dağılımlı özdeş bileşenlere sahip n ' den k çıkışlı bir sistem için t anında tüm bileşenlerin çalışması koşulu altında sisteme ait ortalama geriye kalan yaşam fonksiyonu tanımlamışlar ve çeşitli özelliklerini elde etmişlerdir. Gürler ve Bairamov (2009), paralel yapılı ve farklı dağılım ailelerine bileşenlerden oluşan n '

den k çıkışlı G sisteminin güvenilirliğini ve ortalama geriye kalan yaşam zamanını fonksiyonunu elde etmişler ve sistemin ortalama geriye kalan yaşam zamanı ile bileşenlerin ortalama geriye kalan yaşam zamanları arasındaki ilişkiyi değerlendirmek için sayısal bir örnek sunmuşlardır. Gürlü (2013), bileşen dayanıklılıklarının aynı dağılıma sahip olmadığı varsayımı altında, n adet bileşenden oluşan n' den k çıkışlı F sisteminin paralel ve seri yapıları için etki-dayanıklılık kurulumunda bileşenin ortalama kalan dayanıklılığı üzerinde çalışmıştır. Ahsanullah ve ark. (2014), bağımsız ve aynı dağılıma sahip bileşenlerden oluşan n' den k çıkışlı sistemin ortalama kalan yaşam zamanını farklı dağılım varsayımları altında incelemişler ve dağılım özelliklerine dayanarak çeşitli karakteristikleri sunmuşlardır. Eryılmaz ve Bozbulut (2014), çok- durumlu ağırlıklandırılmış n' den k çıkışlı G sisteminin, sistem bileşenlerinin yaşam sürelerinin farklı durum alt kümelerindeki sıralamasını Monte-Carlo simülasyon algoritmasıyla birlikte kullanarak minimum ve daha yüksek performans seviyelerinde harcanan ortalama zamanı ve hayatta kalma fonksiyonunu tahmin etmişlerdir. Ayrıca bileşenlerdeki bozulmaların Markov sürecini takip ettiği durum için hesaplama sonuçlarını sunmuşlardır.

4.1. Çok-Durumlu Sistemlerde Bileşene Ait Ortalama Geriye Kalan Dayanıklılık

Bir sisteme ait bileşenlerin dayanıklılık değerleri Y_i rastgele değişkeni ile ifade edilsin ($i = 1, 2, \dots, n$). Bu sisteme uygulanan Z_1 ve Z_2 rastgele değişkenleri ile ifade edilen iki etki söz konusu olduğunda, bu sisteme ait bileşenlerin kurulumu çok-durumlu olarak, daha önce üçüncü bölümde de Eşitlik (3.3.1)' de verildiği şekli ile;

$$X_i = \begin{cases} 0, & Y_i < Z_1 \text{ ve } Y_i < Z_2 \\ 1, & Y_i < Z_1, Y_i > Z_2 \text{ veya } Y_i > Z_1, Y_i < Z_2, \\ 2, & Y_i > Z_1 \text{ ve } Y_i > Z_2 \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

ifade edilmektedir.

Çok-durumlu bileşenlerden oluşan bu sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılığını hesaplamak için öncelikle bileşenler bazında ortalama geriye kalan dayanıklılık ifadeleri geliştirilmiştir.

ϕ_{1+}^Z , çok-durumlu bir sistem yapısında bileşenin kısmi performansta veya üzerinde bir seviyede olduğu bilindiğinde, ϕ_2^Z , çok-durumlu bir sistem yapısında bileşenin tamamen çalışma durumunda olduğu bilindiğinde ortalama geriye kalan dayanıklılıklarını ifade etsin. Etki ve dayanıklılık rastgele değişkenlerinin bağımsızlığı varsayımı altında, $F(y)$, $G_1(z)$ ve $G_2(z)$ sırasıyla dayanıklılık ve etki rastgele değişkenlerinin birikimli dağılım fonksiyonları olsun. Bu durumda bileşenin kısmi veya üzerinde ve mükemmel performansta çalışma durumlarında

olduğu bilgileri altındaki ortalama geriye kalan dayanıklılık değerleri aşağıdaki teoremler ile elde edilir.

Teorem 4.1.1 Çok-durumlu bileşenin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında bileşene ait ortalama geriye kalan dayanıklılık;

$$\phi_{1+}^Z = \frac{\int_0^\infty \int_{z_1} \bar{F}(x+z_1)[g_2(z_1)\bar{G}_1(z_1)+g_1(z_1)\bar{G}_2(z_1)]dz_1dx}{\int_{z_1} \bar{F}(z_1)[g_2(z_1)\bar{G}_1(z_1)+g_1(z_1)\bar{G}_2(z_1)]dz_1} \quad (4.1.1)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: Bileşenin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık değeri;

$$\phi_{1+}^Z = E(Y_i - Z_{1:2} | Y_i > Z_{1:2}) \quad (4.1.2)$$

şeklinde elde edilir.

Beklenen değer için;

$$\int_0^\infty P(Y_i - Z_{1:2} > x | Y_i > Z_{1:2})dx \quad (4.1.3)$$

integralinden faydalanılır. Eşitlik (4.1.3)' deki olasılık ise;

$$\frac{P(Y_i - Z_{1:2} > x, Y_i > Z_{1:2})}{P(Y_i > Z_{1:2})} \quad (4.1.4)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.1.4), $Z_{1:2} = z_1$ koşulu uygulandığında ve x ' e göre integral alma işlemi ile bileşenin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılığı;

$$\frac{\int_0^\infty \int_{z_1} P(Y_i > Z_{1:2} + x, Y_i > Z_{1:2} | Z_{1:2} = z_1) dG_{Z_{1:2}}(z_1) dx}{\int_{z_1} P(Y_i > Z_{1:2} | Z_{1:2} = z_1) dG_{Z_{1:2}}(z_1)} \quad (4.1.5)$$

ile elde edilir.

Teorem 4.1.2. Çok-durumlu bileşenin seviye 2' de olduğu bilgisi altında bileşene ait ortalama geriye kalan dayanıklılık;

$$\phi_2^Z = \frac{\int_0^\infty \int_{z_2} \bar{F}(x+z_2)(g_1(z_2)G_2(z_2)+g_2(z_2)G_1(z_2))dz_2dx}{\int_{z_2} \bar{F}(z_2)(g_1(z_2)G_2(z_2)+g_2(z_2)G_1(z_2))dz_2} \quad (4.1.6)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: Bileşenin seviye 2' de olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık değeri;

$$\phi_2^Z = E(Y_i - Z_{2:2} | Y_i > Z_{2:2}) \quad (4.1.7)$$

şeklinde elde edilir.

Beklenen değerin hesabı için;

$$\int_0^\infty P(Y_i - Z_{2:2} > x | Y_i > Z_{2:2}) dx \quad (4.1.8)$$

integralinden faydalanılır. Eşitlik (4.1.8)' deki olasılık ise;

$$\frac{P(Y_i - Z_{2:2} > x, Y_i > Z_{2:2})}{P(Y_i > Z_{2:2})} \quad (4.1.9)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.1.9), $Z_{2:2} = z_2$ koşulu uygulandığında ve x ' e göre integral alma işlemi ile bileşenin seviye 2' de olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılığı;

$$\frac{\int_0^\infty \int_{z_2} P(Y_i > Z_{2:2} + x, Y_i > Z_{2:2} | Z_{2:2} = z_2) dG_{Z_{2:2}}(z_2) dx}{\int_{z_2} P(Y_i > Z_{2:2} | Z_{2:2} = z_2) dG_{Z_{2:2}}(z_2)} \quad (4.1.10)$$

ile elde edilir.

Örnek Uygulama

$$Y_i \sim F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0, \quad x > 0,$$

$$Z_1 \sim G_1(x) = 1 - e^{-\theta_1 x}, \quad \theta_1 > 0, \quad x > 0,$$

$$Z_2 \sim G_2(x) = 1 - e^{-\theta_2 x}, \quad \theta_2 > 0, \quad x > 0,$$

şeklinde birikimli dağılım fonksiyonlarına sahip dayanıklılık ve etki rastgele değişkenleri olduğu varsayılın. Bu varsayımlar altında gerekli matematiksel düzenlemeler yapıldığında bileşenin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılığı;

$$\phi_{1+}^Z = \frac{\int_0^\infty \int_{z_1} e^{-\lambda(x+z_1)} (\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1 + \theta_2)z_1} dz_1 dx}{\int_{z_1} e^{-\lambda z_1} (\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1 + \theta_2)z_1} dz_1} \quad (4.1.11)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$z_1 \geq 0$ olduğundan Eşitlik (4.1.11) için integral sınırları;

$$\phi_{1+}^Z = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(x+z_1)} (\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1 + \theta_2)z_1} dz_1 dx}{\int_0^\infty e^{-\lambda z_1} (\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1 + \theta_2)z_1} dz_1} \quad (4.1.12)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Eşitlik (4.1.12)' de belirlenen sınırlara göre integral alma işlemi yapıldığında bileşenin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılığı;

$$\phi_{1+}^Z = \frac{1}{\lambda} \quad (4.1.13)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Aynı varsayımlar altında gerekli matematiksel düzenlemeler yapıldığında bileşenin seviye 2' de olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılığı ise;

$$\phi_2^Z = \frac{\int_0^\infty \int_{z_2} e^{-\lambda(x+z_2)} (\theta_1 e^{-\theta_1 z_2} + \theta_2 e^{-\theta_2 z_2} - (\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1 + \theta_2)z_2}) dz_2 dx}{\int_{z_2} e^{-\lambda z_2} (\theta_1 e^{-\theta_1 z_2} + \theta_2 e^{-\theta_2 z_2} - (\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1 + \theta_2)z_2}) dz_2} \quad (4.1.14)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$z_2 \geq 0$ olduğundan Eşitlik (4.1.14) için integral sınırları;

$$\frac{\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(x+z_2)} (\theta_1 e^{-\theta_1 z_2} + \theta_2 e^{-\theta_2 z_2} - (\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1 + \theta_2)z_2}) dz_2 dx}{\int_0^\infty e^{-\lambda z_2} (\theta_1 e^{-\theta_1 z_2} + \theta_2 e^{-\theta_2 z_2} - (\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1 + \theta_2)z_2}) dz_2} \quad (4.1.15)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Eşitlik (4.1.15)' de belirlenen sınırlara göre integral alma işlemi yapıldığında bileşenin seviye 2' de olduğu bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılığı;

$$\phi_2^Z = \frac{1}{\lambda} \quad (4.1.16)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Farklı parametre değerleri için bileşenin seviye 1 veya üzerinde olması ile seviye 2' de olması durumları için ortalama geriye kalan dayanıklılık hesaplamaları Tablo 4.1' de verilmiştir.

Tablo 4.1: Bileşen Bazında Ortalama Geriye Kalan Dayanıklılık Değerleri

λ	θ_1	θ_2	$\phi_{1+}^Z(S)$	$\phi_{1+}^Z(T)$	$\phi_2^Z(S)$	$\phi_2^Z(T)$
0,1	0,2	0,3	10,0059	10	9,9932	10
0,5	0,2	0,3	2,0031	2	1,9997	2
0,5	0,5	0,3	2,0065	2	2,0005	2
0,5	0,5	0,5	2,0013	2	1,9987	2

Tablo 4.1' de elde edilen simülasyon sonuçları Matlab programı kullanılarak 100 bin tekrarlı simülasyon çalışması ile hesaplanmıştır. Teorik sonuçlar ise Mathcad programı kullanılarak hesaplanmıştır. $\phi_{1+}^Z(S)$ ve $\phi_2^Z(S)$ sırasıyla bileşenin seviye 1 veya üzerinde olması ile seviye 2' de olması durumları için simülasyon ile hesaplanan ortalama geriye kalan dayanıklılık değerleri, $\phi_{1+}^Z(T)$ ve $\phi_2^Z(T)$ ise sırasıyla bileşenin seviye 1 veya üzerinde olması ile seviye 2' de olması durumları için teorik denklemlerden elde edilen ortalama geriye kalan dayanıklılık değerlerini ifade etmektedir. Tabloda verilen simülasyon sonuçlarından da anlaşılabacağı üzere çok-durumlu bir sistem yapısında bileşenin hem seviye 1 veya üzerinde hem de seviye 2' de olduğu bilgisi altında bileşenin ortalama geriye kalan dayanıklılığı sadece dayanıklılık parametresindeki değişimlerden etkilenmektedir. Her iki durum için de etki parametrelerindeki değişimin bileşenin ortalama geriye kalan dayanıklılığı üzerinde anlamlı bir etkisi yoktur. Bu durum teorik denklemlerden elde edilen sonuçlarla da paralellik göstermektedir. Elde edilen sonuçlar literatürde iki durumlu sistem yapısında bileşen bazında etki-dayanıklılık değerlendirmesinde elde edilen sonuçlar ile paralellik göstermektedir.

4.2. Çok-Durumlu Sistemlerde Sisteme Ait Ortalama Geriye Kalan Dayanıklılık

Seri bağlı bir sistem yapısında sistemdeki bileşen veya alt sistem sayısının artması sistem güvenilirliğinin azalmasına sebep olmaktadır. Paralel bağlı bir sistem yapısında ise sistemdeki bileşen veya alt sistem sayısının artması sistem güvenilirliğinin artmasını sağlamaktadır; ancak paralel bağlı bileşenlerden veya alt sistemlerden oluşan sistem yapıları oldukça güvenilir olmasına rağmen, bu sistem yapılarının kurulum maliyetleri bileşen veya alt sistem sayısındaki artışla doğru orantılı olarak artmaktadır. Bu yüzden günümüz mühendislik sistemlerinin

kurulumunda hem güvenilir hem de maliyet bakımından avantajlı olmasından dolayı n' den k çıkışlı sistem yapıları tercih edilmektedir. n adet bileşenden en az k tanesinin çalıştığı durumda çalışan sistemler n' den k çıkışlı G sistemi olarak ifade edilirken, n' den k çıkışlı F sistemleri n adet bileşenden k tanesi bozulduğunda bozulan sistemlerdir. Bu tez çalışmasının bu bölümünde sistemin kısmi performansta veya üzeri bir performansta çalışma ve mükemmel performansta çalışma durumları bilindiğinde sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık fonksiyonu değerlendirmesi n' den k çıkışlı G sistemi için yapılmıştır.

Bir sisteme ait bileşenlerin dayanıklılık değerleri Y_i rastgele değişkeni ile ifade edilsin ($i = 1, 2, \dots, n$). Bu sisteme uygulanan Z_1 ve Z_2 rastgele değişkenleri ile ifade edilen iki etki söz konusu olduğunda, bu sisteme ait bileşenlerin kurulumu çok-durumlu olarak daha önceki bölümler içerisinde Eşitlik (3.1.1) ile verilmişti. İlgili eşitlikte bileşenlerin durumları dikkate alınarak bu bölümde ortalama geriye kalan dayanıklılık fonksiyonları n' den k çıkışlı bir G sistemi için elde edilmiştir.

S_{1+}^Z , çok-durumlu bir sistemin kısmi performansta veya üzeri bir seviyede olduğu bilindiği duruma ait ortalama geriye kalan dayanıklılığı ve S_2^Z , çok-durumlu bir sistemin mükemmel performansta olduğu bilindiği duruma ait ortalama geriye kalan dayanıklılıklarını ifade etsin. Etki ve dayanıklılık rastgele değişkenlerinin bağımsızlığı varsayımı altında, $F(y)$, $G_1(z)$ ve $G_2(z)$ sırasıyla dayanıklılık ve etki rastgele değişkenlerinin birikimli dağılım fonksiyonları olsun. Bu durumda sistemin kısmi performansta veya üzeri bir durumda ve mükemmel performansta çalışma durumunda olduğu bilgileri altında sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık değerleri aşağıdaki teoremler ile elde edilir.

Teorem 4.2.1. Çok-durumlu sistemin tüm bileşenlerinin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık fonksiyonu;

$$S_{1+}^Z = \frac{\frac{1}{B(n-k+1,k)} \int_0^\infty \int_{z_1} \int_{z_1+t} (F(x)-F(z_1))^{n-k} (\bar{F}(x))^{k-1} dF_Y(x) dP\{Z_{1:2} \leq z_1\} dt}{\int_{z_1} (\bar{F}(z_1))^n dP\{Z_{1:2} \leq z_1\}} \quad (4.2.1)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada $B(n-k+1, k)$ fonksiyonu $\frac{\Gamma(n-k+1)\Gamma(k)}{\Gamma(n+1)}$ oranı ile elde edilir.

İspat: Çok-durumlu bir sistemin tüm bileşenlerinin seviye 1 ve üzerinde olduğu bilgisi altında sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık değeri;

$$S_{1+}^Z = E(Y_{n-k+1:n} - Z_{1:2} | Y_{1:n} > Z_{1:2}) \quad (4.2.2)$$

şeklinde elde edilir. Burada sistemin tüm bileşenleri, sistemin maruz kaldığı etkilerin minimumundan büyük olduğunda, $(n - k + 1)$. bileşen sistemin çalışması için kritik öneme sahip olduğundan bu bileşenin etkilerin minimumundan farkı sistemin seviye 1 veya üzerinde olduğu durumdaki ortalama geriye kalan dayanıklılık hesabında kullanılır.

Beklenen değerin hesabı için;

$$\int_0^{\infty} P(Y_{n-k+1:n} - Z_{1:2} > t | Y_{1:n} > Z_{1:2}) dt \quad (4.2.3)$$

integralinden faydalanılır. Eşitlik (4.2.3)' deki olasılık ise;

$$\frac{P(Y_{n-k+1:n} - Z_{1:2} > t, Y_{1:n} > Z_{1:2})}{P(Y_{1:n} > Z_{1:2})} \quad (4.2.4)$$

şeklinde ifade edilir.

$Z_{1:2} = z_1$ koşulu altında Eşitlik (4.2.4);

$$\frac{\int_0^{\infty} \int_{z_1} P(Y_{n-k+1:n} - Z_{1:2} > t, Y_{1:n} > Z_{1:2} | Z_{1:2} = z_1) dP\{Z_{1:2} \leq z_1\} dt}{\int_{z_1} P(Y_{1:n} > Z_{1:2} | Z_{1:2} = z_1) dP\{Z_{1:2} \leq z_1\}} \quad (4.2.5)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.2.5)' de elde edilen sonucun pay kısmına toplam olasılık kuralı uygulandığında;

$$\sum_{i=1}^n P(Y_i > z_1 + t, Y_1 > z_1, \dots, Y_n > z_1, Y_{n-k+1:n} = Y_i) \quad (4.2.6)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.2.6)' da elde edilen ifade dayanıklılık rastgele değişkenlerinin bağımsız ve aynı dağılımlı olduğu varsayımı dikkate alındığında;

$$n \cdot P(Y_n > z_1 + t, Y_1 > z_1, \dots, Y_n > z_1, Y_{n-k+1:n} = Y_n) \quad (4.2.7)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitlik (4.2.7)' de elde edilen sonuca göre $(Y_1, \dots, Y_{n-1})$ dayanıklılıklarının $(n - k)$ tanesi Y_n ' den küçük, $(k - 1)$ tanesi Y_n ' den büyük olacaktır. Bu durumda $Y_n = x$ koşulu altında Eşitlik (4.2.7);

$$n \cdot \binom{n-1}{n-k} \int_{x > z_1 + t} P(z_1 < Y_1 < x, \dots, z_1 < Y_{n-k} < x, Y_{n-k+1} > x, \dots, Y_{n-1} > x) dF_Y(x) \quad (4.2.8)$$

şeklinde ifade edilir. Varsayılan dağılım bilgileri dikkate alındığında Eşitlik (4.2.8);

$$n \cdot \binom{n-1}{n-k} \int_{x>z_1+t} (F(x) - F(z_1))^{n-k} (\bar{F}(x))^{k-1} dF_Y(x) \quad (4.2.9)$$

şeklinde ifade edilir.

Eşitlik (4.2.5)' de elde edilen sonucun payda kısmındaki olasılık dikkate alındığında;

$$\int_{z_1} P(Y_{1:n} > z_1) dP\{Z_{1:2} \leq z_1\} = \int_{z_1} P(Y_1 > z_1, \dots, Y_n > z_1) dP\{Z_{1:2} \leq z_1\} \quad (4.2.10)$$

şeklinde ifade edilir. Varsayılan dağılım bilgileri dikkate alındığında Eşitlik (4.2.10);

$$\int_{z_1}^{\infty} (\bar{F}(z_1))^n dP\{Z_{1:2} \leq z_1\} \quad (4.2.11)$$

şeklinde ifade edilir.

Sonuç olarak Eşitlik (4.2.5)' de elde edilen sonucun pay ve paydası için yapılan işlemler dikkate alındığında çok-durumlu sistemin tüm bileşenlerinin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılığı ispatlanmış olur.

Teorem 4.2.2. Çok-durumlu sistemin tüm bileşenlerinin seviye 2' de olduğu bilgisi altında sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık fonksiyonu;

$$S_2^Z = \frac{\frac{1}{B(n-k+1,k)} \int_0^{\infty} \int_{z_2} \int_{z_2+t} (F(x) - F(z_2))^{n-k} (\bar{F}(x))^{k-1} dF_Y(x) dP\{Z_{2:2} \leq z_2\} dt}{\int_{z_2} (\bar{F}(z_2))^n dP\{Z_{2:2} \leq z_2\}} \quad (4.2.12)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: Çok-durumlu bir sistemin tüm bileşenlerinin seviye 2' de olduğu bilgisi altında sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık değeri;

$$S_2^Z = E(Y_{n-k+1:n} - Z_{2:2} | Y_{1:n} > Z_{2:2}) \quad (4.2.13)$$

şeklinde elde edilir. Burada sistemin tüm bileşenleri, sistemin maruz kaldığı etkilerin maksimumundan büyük olduğunda, $(n - k + 1)$. bileşen sistemin çalışması için kritik öneme sahip olduğundan bu bileşenin etkilerin maksimumundan farkı sistemin seviye 2' de olduğu durumdaki ortalama geriye kalan dayanıklılık hesabında kullanılır.

Beklenen değer hesabı için;

$$\int_0^\infty P(Y_{n-k+1:n} - Z_{2:2} > t | Y_{1:n} > Z_{2:2}) dt \quad (4.2.14)$$

integralinden faydalanılır. Eşitlik (4.2.14)' deki olasılık ise;

$$\frac{P(Y_{n-k+1:n} - Z_{2:2} > t, Y_{1:n} > Z_{2:2})}{P(Y_{1:n} > Z_{2:2})} \quad (4.2.15)$$

şeklinde ifade edilir. $Z_{2:2} = z_2$ koşulu altında Eşitlik (4.2.15);

$$\frac{\int_0^\infty \int_{z_2} P(Y_{n-k+1:n} - Z_{2:2} > t, Y_{1:n} > Z_{2:2} | Z_{2:2} = z_2) dP\{Z_{2:2} \leq z_2\} dt}{\int_{z_2} P(Y_{1:n} > Z_{2:2} | Z_{2:2} = z_2) dP\{Z_{2:2} \leq z_2\}} \quad (4.2.16)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.2.16)' da elde edilen sonucun pay kısmına toplam olasılık kuralı uygulandığında;

$$\sum_{i=1}^n P(Y_i > z_2 + t, Y_1 > z_2, \dots, Y_n > z_2, Y_{n-k+1:n} = Y_i) \quad (4.2.17)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.2.17)' de elde edilen ifade dayanıklılık rastgele değişkenlerinin bağımsız ve aynı dağılımlı olduğu varsayımı dikkate alındığında;

$$n \cdot P(Y_n > z_2 + t, Y_1 > z_2, \dots, Y_n > z_2, Y_{n-k+1:n} = Y_n) \quad (4.2.18)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitlik (4.2.18)' elde edilen sonuca göre $(Y_1, \dots, Y_{n-1})$ dayanıklılıklarının $(n - k)$ tanesi Y_n ' den küçük, $(k - 1)$ tanesi Y_n ' den büyük olacaktır. Bu durumda $Y_n = x$ koşulu altında Eşitlik (4.2.18);

$$n \cdot \binom{n-1}{n-k} \int_{x > z_2 + t} P(Z_2 < Y_1 < x, \dots, Z_2 < Y_{n-k} < x, Y_{n-k+1} > x, \dots, Y_{n-1} > x) dF_Y(x) \quad (4.2.19)$$

şeklinde ifade edilir. Varsayılan dağılım bilgileri dikkate alındığında Eşitlik (4.2.19);

$$n \cdot \binom{n-1}{n-k} \int_{x > z_2 + t} (F(x) - F(z_2))^{n-k} (\bar{F}(x))^{k-1} dF_Y(x) \quad (4.2.20)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.2.16)' da elde edilen sonucun payda kısmındaki olasılık dikkate alındığında;

$$\int_{z_2} P(Y_{1:n} > z_2) dP\{Z_{2:2} \leq z_2\} = \int_{z_2} P(Y_1 > z_2, \dots, Y_n > z_2) dP\{Z_{2:2} \leq z_2\} \quad (4.2.21)$$

şeklinde ifade edilir. Varsayılan dağılım bilgileri dikkate alındığında Eşitlik (4.2.21);

$$\int_{z_2}^{\infty} (\bar{F}(z_2))^n dP\{Z_{2:2} \leq z_2\} \quad (4.2.22)$$

şeklinde ifade edilir.

Sonuç olarak Eşitlik (4.2.16)' da elde edilen sonucun pay ve paydası için yapılan işlemler dikkate alındığında çok-durumlu sistemin tüm bileşenlerinin seviye 2' de olduğu bilgisi altında sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılığı ispatlanmış olur.

Örnek Uygulama

$$Y_i \sim F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0, \quad x > 0,$$

$$Z_1 \sim G_1(x) = 1 - e^{-\theta_1 x}, \quad \theta_1 > 0, \quad x > 0,$$

$$Z_2 \sim G_2(x) = 1 - e^{-\theta_2 x}, \quad \theta_2 > 0, \quad x > 0,$$

şeklinde birikimli dağılım fonksiyonlarına sahip dayanıklılık ve etki rastgele değişkenleri olduğu varsayılın. Bu varsayımlar altında gerekli matematiksel düzenlemeler yapıldığında sistemin tüm bileşenlerinin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılığı;

$$S_{1+}^Z = \frac{\frac{\lambda(\theta_1+\theta_2)}{B(n-k+1,k)} \int_0^{\infty} \int_{z_1}^{\infty} \int_{z_1+t}^{\infty} (e^{-\lambda z_1} - e^{-\lambda x})^{n-k} (e^{-\lambda x})^k e^{-(\theta_1+\theta_2)z_1} dx dz_1 dt}{(\theta_1+\theta_2) \int_{z_1}^{\infty} (e^{-\lambda z_1})^n e^{-(\theta_1+\theta_2)z_1} dz_1} \quad (4.2.23)$$

şeklinde ifade edilebilir. $z_1 \geq 0$ olduğundan Eşitlik (4.2.23)' deki integral sınırları;

$$S_{1+}^Z = \frac{\frac{\lambda(\theta_1+\theta_2)}{B(n-k+1,k)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{z_1+t}^{\infty} (e^{-\lambda z_1} - e^{-\lambda x})^{n-k} (e^{-\lambda x})^k e^{-(\theta_1+\theta_2)z_1} dx dz_1 dt}{(\theta_1+\theta_2) \int_0^{\infty} (e^{-\lambda z_1})^n e^{-(\theta_1+\theta_2)z_1} dz_1} \quad (4.2.24)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Benzer şekilde aynı varsayımlar altında gerekli matematiksel düzenlemeler yapıldığında sistemin tüm bileşenlerinin seviye 2' de olduğu bilgisi altında sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılığı;

$$S_2^Z = \frac{\frac{\lambda}{B(n-k+1,k)} \int_0^{\infty} \int_{z_2}^{\infty} \int_{z_2+t}^{\infty} (e^{-\lambda z_2} - e^{-\lambda x})^{n-k} (e^{-\lambda x})^k (\theta_1 e^{-\theta_1 z_2} + \theta_2 e^{-\theta_2 z_2} - (\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1+\theta_2)z_2}) dx dz_2 dt}{\int_{z_2}^{\infty} (e^{-\lambda z_2})^n (\theta_1 e^{-\theta_1 z_2} + \theta_2 e^{-\theta_2 z_2} - (\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1+\theta_2)z_2}) dz_2} \quad (4.2.25)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Eşitlik (4.2.25)' de gerekli matematiksel düzenlemeler yapıldığında ve $z_2 \geq 0$ olduğu dikkate alınarak integral sınırları belirlendiğinde;

$$S_2^Z = \frac{\frac{\lambda}{B(n-k+1, k)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{z_2+t}^\infty (e^{-\lambda z_2} - e^{-\lambda x})^{n-k} (e^{-\lambda x})^k (\theta_1 e^{-\theta_1 z_2} + \theta_2 e^{-\theta_2 z_2} - (\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1 + \theta_2) z_2}) dx dz_2 dt}{\int_0^\infty (e^{-\lambda z_2})^n (\theta_1 e^{-\theta_1 z_2} + \theta_2 e^{-\theta_2 z_2} - (\theta_1 + \theta_2) e^{-(\theta_1 + \theta_2) z_2}) dz_2} \quad (4.2.26)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Farklı parametre değerleri için sistemin tüm bileşenlerinin seviye 1 veya üzerinde olması ile seviye 2' de olması durumları için sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık hesaplamaları Tablo 4.2' de verilmiştir.

Tablo 4.2: Tüm Bileşenlerin Kısmi veya Üzeri ve Mükemmel Performansta Olduğu Bilgileri Altında Sisteme ait Ortalama Geriye Kalan Dayanıklılık Değerleri

n	k	λ	θ_1	θ_2	$S_{1+}^Z(S)$	$S_{1+}^Z(T)$	$S_2^Z(S)$	$S_2^Z(T)$
5	3	0,1	0,2	0,3	7,8243	7,834	7,8156	7,835
5	3	0,5	0,2	0,3	1,5624	1,567	1,5668	1,567
5	3	0,5	0,5	0,3	1,5637	1,567	1,5741	1,567
5	3	0,5	0,5	0,5	1,5619	1,567	1,5831	1,567
7	3	0,1	0,2	0,3	10,916	10,929	10,934	10,931
7	3	0,5	0,2	0,3	2,1836	2,186	2,1789	2,186
7	3	0,5	0,5	0,3	2,1854	2,186	2,1832	2,186
7	3	0,5	0,5	0,5	2,1913	2,186	2,1858	2,186
7	4	0,1	0,2	0,3	7,6264	7,595	7,6173	7,596
7	4	0,5	0,2	0,3	1,5284	1,519	1,5167	1,519
7	4	0,5	0,5	0,3	1,5168	1,519	1,5204	1,519
7	4	0,5	0,5	0,5	1,5087	1,519	1,5229	1,519

Tablo 4.2' de elde edilen simülasyon sonuçları Matlab programı kullanılarak 100 bin tekrarlı simülasyon çalışması ile hesaplanmıştır. Teorik sonuçlar ise Mathcad programı kullanılarak hesaplanmıştır. $S_{1+}^Z(S)$ ve $S_2^Z(S)$ sırasıyla sistemin tüm bileşenlerinin seviye 1 veya üzerinde olması ile seviye 2' de olması durumları için simülasyon ile hesaplanan ortalama geriye kalan dayanıklılık değerleri, $S_{1+}^Z(T)$ ve $S_2^Z(T)$ ise sırasıyla sistemin tüm bileşenlerinin seviye 1 veya üzerinde olması ile seviye 2' de olması durumları için teorik denklemlerden elde edilen ortalama geriye kalan dayanıklılık değerlerini ifade etmektedir. Tablo 4.2' de dayanıklılık ve etki rastgele değişkenlerinin üstel dağılım ailesine ait olduğu varsayılarak sistemin tüm bileşenlerinin kısmi performansta veya üzerinde ve mükemmel performansta olduğu bilgileri altında elde edilen sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılığın, etki ve dayanıklılık parametrelerinin hangilerinden ne derecede etkilendiği, farklı n ve k değerlerine hangi yönde karşılık verdiği incelenmeye çalışılmıştır. Tablo 4.2'de elde edilen teorik sonuçlardan da anlaşılacağı üzere, sistemin tüm bileşenlerinin hem seviye 1 veya üzerinde hem de seviye 2' de olduğu bilgisi altında hesaplanan ortalama geriye kalan dayanıklılık, dayanıklılık parametresindeki değişimlerden etkilenirken etki parametresindeki değişimlerden etkilenmemektedir. Sistemin her iki performans durumu için elde edilen simülasyon sonuçlarının ise rastgelelikten kaynaklı farklı değerler alması beklenen bir durum iken bu değerlerin teorik değerlere yakın sonuçlar alması simülasyonun teorik denklemleri desteklediğini göstermektedir. Sistemin tüm bileşenleri seviye 1 veya üzerinde olduğunda ve seviye 2' de olduğu bilindiği durumlarda sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık, k değeri sabitken n değeri arttırıldığında artmakta, azaltıldığında ise azalmaktadır. Benzer şekilde n değeri sabitken k değeri arttırıldığında azalmakta, azaltıldığında ise artmaktadır. Ayrıca dayanıklılık parametresindeki artış dayanıklılığa ait bozulma oranının artışı anlamına gelmektedir. Dayanıklılık parametresi arttırıldığında sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılığı azalmakta, azaltıldığında ise artış göstermektedir.

Çok-durumlu bir sistemde tüm bileşenlerin belirli seviye üzerinde oldukları bilgisi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık hesabının yanında, sistemdeki tüm bileşenlerin belirli seviyede olduğu bilgisi altındaki sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık değerleri de önemli bir araştırma problemidir. Bu amaçla bu çalışmada özellikle sisteme ait tüm bileşenlerin kısmi performansta olduğu bilgisi altında yani sistemin tüm bileşenlerinin etkilerin minimumu ile maksimumu arasında olduğu durum için sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık hesaplaması teorik olarak elde edilmemiş fakat simülasyon sonuçları ile elde edilmiştir. Çok-durumlu bir sistemin tüm bileşenlerinin kısmi performansta olduğu bilgisi altındaki sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık değeri;

$$E(Y_{n-k+1:n} - Z_{1:2} | Z_{1:2} < \text{tüm } Y_i'ler < Z_{2:2}) \quad (4.2.27)$$

beklenen değerinin hesaplanmasıyla elde edilir.

Örnek Uygulama

$$Y_i \sim F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0, \quad x > 0,$$

$$Z_1 \sim G_1(x) = 1 - e^{-\theta_1 x}, \quad \theta_1 > 0, \quad x > 0,$$

$$Z_2 \sim G_2(x) = 1 - e^{-\theta_2 x}, \quad \theta_2 > 0, \quad x > 0,$$

şeklinde birikimli dağılım fonksiyonlarına sahip dayanıklılık ve etki rastgele değişkenleri olduğu varsayalım. Bu varsayımlar altında sistemin tüm bileşenlerinin kısmi performansta olduğu bilgisi altındaki sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık için hesaplanan simülasyon sonuçları Tablo 4.3’ de verilmiştir. Tablo 4.3’ de ayrıca sistemin tüm bileşenlerinin seviye 2’ de olduğu bilgisi altında hesaplanan sisteme ait geriye kalan dayanıklılık değerlerine ait simülasyon sonuçları da sunulmaktadır.

Tablo 4.3: Tüm Bileşenlerin Kısmi ve Mükemmel Performansta Olduğu Bilgileri Altında Sisteme ait Ortalama Geriye Kalan Dayanıklılık Simülasyon Değerleri

n	k	λ	θ_1	θ_2	$S_1^Z(S)$	$S_2^Z(S)$
5	3	0,1	0,2	0,3	4,9514	7,8156
5	3	0,5	0,2	0,3	1,3973	1,5668
5	3	0,5	0,5	0,3	1,3211	1,5741
5	3	0,5	0,5	0,5	1,3421	1,5831
7	3	0,1	0,2	0,3	7,2557	10,934
7	3	0,5	0,2	0,3	2,0099	2,1789
7	3	0,5	0,5	0,3	1,9708	2,1832
7	3	0,5	0,5	0,5	1,9689	2,1858
7	4	0,1	0,2	0,3	5,3522	7,6173
7	4	0,5	0,2	0,3	1,3847	1,5167
7	4	0,5	0,5	0,3	1,3674	1,5204
7	4	0,5	0,5	0,5	1,3758	1,5229

Tablo 4.3' de elde edilen sonuçlar Matlab programı kullanılarak 100.000 tekrarlı simülasyon çalışması yapılarak hesaplanmıştır. $S_{1(S)}^Z$ ve $S_{2(S)}^Z$, sırasıyla sistemin tüm bileşenlerinin kısmi performansta ve mükemmel performansta olduğu bilgisi altında sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık değerlerini ifade etmektedir. Tablo 4.3' de dayanıklılık ve etki rastgele değişkenlerinin üstel dağılım ailesine ait olduğu varsayılarak sistemin tüm bileşenlerinin kısmi performansta ve mükemmel performansta olduğu bilgisi altında elde edilen sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılığın, etki ve dayanıklılık parametrelerinin hangilerinden ne derecede etkilendiği, farklı n ve k değerlerine hangi yönde karşılık verdiği incelenmeye çalışılmıştır. Tabloda elde edilen simülasyon sonuçlarına göre sistemin tüm bileşenlerinin hem kısmi performansta hem de mükemmel performansta olduğu bilgileri altında hesaplanan ortalama geriye kalan dayanıklılık, dayanıklılık parametresindeki değişimlerden etkilenirken, etki parametrelerindeki değişimlerden etkilenmemektedir. Sistem her iki performans seviyesinde de çalışırken ortalama geriye kalan dayanıklılık, k değeri sabitken n değeri arttırıldığında artmakta, azaltıldığında ise azalmaktadır. Benzer şekilde n değeri sabitken k değeri arttırıldığında azalmakta, azaltıldığında ise artmaktadır. λ arttırıldığında ise ortalama geriye kalan dayanıklılık her iki seviye için de düşmektedir. Bu tabloya göre elde edilen en önemli sonuç ise; sistemin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilindiğinde sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık değerinin sistemin seviye 2' de olduğu bilindiğindeki sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık değerinden küçük olduğudur.

Teorem 4.2.3. Çok durumlu bir sistemin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilindiğinde, sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık değeri;

$$S_{1+}^k = \sum_{m=k}^n \frac{\frac{1}{B(n-m+1, m)} \int_0^\infty \int_{z_1} \int_{z_1+t} (\bar{F}(x))^{m-1} (\bar{F}(z_1))^{n-m} dF_Y(x) dP\{Z_{1:2} \leq z_1\} dt}{\binom{n}{m} \int_{z_1} (\bar{F}(z_1))^m (F(z_1))^{n-m} dP\{Z_{1:2} \leq z_1\}} \quad (4.2.28)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: Çok-durumlu bir sistemin en az k adet bileşeninin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilindiğinde ortalama geriye kalan dayanıklılık değeri;

$$S_{1+}^k = E(Y_{n-k+1:n} - Z_{1:2} | \text{en az } k \text{ adet bileşen 1 veya üzerinde}) \quad (4.2.29)$$

şeklinde elde edilir. Burada sistemin en az k adet bileşeni, sistemin maruz kaldığı etkilerin minimumundan büyük olduğunda $(n - k + 1)$. bileşen durumu sisteminin ilgili seviye veya üzerinde çalışması için kritik öneme sahip olduğundan, bu bileşenin etkilerin minimumundan farkı sistemin seviye 1 veya üzerinde olduğu durumdaki ortalama geriye kalan dayanıklılık hesabında kullanılır.

Beklenen değer hesabı için;

$$\int_0^{\infty} P(Y_{n-k+1:n} - Z_{1:2} > t | \text{en az } k \text{ adet bileşen} > Z_{1:2}) dt \quad (4.2.30)$$

integralinden faydalanılır. Eşitlik (4.2.30)' daki olasılık ise;

$$\int_0^{\infty} \frac{P(Y_{n-k+1:n} - Z_{1:2} > t, \text{en az } k \text{ adet bileşen} > Z_{1:2}) dt}{P(\text{en az } k \text{ adet bileşen} > Z_{1:2})} \quad (4.2.31)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.2.31)' de belirtilen (*en az k adet bileşen* $> Z_{1:2}$) ifadesi açılır ve matematiksel olarak ifade edilirse;

$$\sum_{m=k}^n \frac{\int_0^{\infty} P(Y_{n-m+1} - Z_{1:2} > t, Y_1, \dots, Y_n' \text{ lerden tam "m" tanesi} > Z_{1:2}, Y_1, \dots, Y_n' \text{ lerden tam "n-m" tanesi} < Z_{1:2}) dt}{\binom{n}{m} P(Y_1, \dots, Y_n' \text{ lerden tam "m" tanesi} > Z_{1:2}, Y_1, \dots, Y_n' \text{ lerden tam "n-m" tanesi} < Z_{1:2})} \quad (4.2.32)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.2.32)' nin payındaki mümkün kombinasyonların da hesaba katılması ile sonuca ulaşılır. Bunun için ilgili denklemin pay ve paydası ayrı ayrı ele alınırsa pay için;

$$\int_{z_1} P(Y_{n-m+1} > z_1 + t, Y_1, \dots, Y_n' \text{ lerden tam "m" tanesi} > z_1, Y_1, \dots, Y_n' \text{ lerden tam "n-m" tanesi} < z_1 | Z_{1:2} = z_1) dP\{Z_{1:2} \leq z_1\} \quad (4.2.33)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.2.33)' de elde edilen sonuca, integral içindeki olasılık hesabı için toplam olasılık kuralı uygulanırsa;

$$\sum_{i=1}^n P(Y_i > z_1 + t, Y_1 > z_1, \dots, Y_m > z_1, \dots, Y_{m+1} < z_1, \dots, Y_n < z_1, Y_{n-m+1} = Y_i) \quad (4.2.34)$$

şeklinde ifade edilir. Y_i ' ler bağımsız oldukları için Eşitlik (4.2.34);

$$n. P(Y_1 > z_1 + t, Y_1 > z_1, \dots, Y_m > z_1, Y_{m+1} < z_1, \dots, Y_n < z_1, Y_{n-m+1:n} = Y_1) \quad (4.2.35)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.2.35)' de elde edilen sonuca göre ($Y_2, \dots, Y_n$) dayanıklılıklarının ($n - m$) tanesi Y_1 ' den küçük, ($m - 1$) tanesi Y_1 ' den büyük olacaktır. Bu durumda $Y_1 = x$ koşulu altında Eşitlik (4.2.35);

$$n. \binom{n-1}{n-m} \int_{x > z_1 + t}^{x > z_1} P(Y_2 > z_1, \dots, Y_m > z_1, Y_{m+1} < z_1, \dots, Y_n < z_1, Y_2 > x, \dots, Y_m > x, Y_{m+1} < x, \dots, Y_n < x) dF_Y(x) \quad (4.2.36)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.2.36) gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$n. \binom{n-1}{n-m} \int_{x > z_1 + t} P(Y_2 > \max(z_1, x), \dots, Y_m > \max(z_1, x), Y_{m+1} < \min(z_1, x), \dots, Y_n < \min(z_1, x)) dF_Y(x) \quad (4.2.37)$$

şeklinde ifade edilir. $ma x(z_1, x) = x$ ve $mi n(z_1, x) = z_1$ olduğundan;

$$n. \binom{n-1}{n-m} \int_{x>z_1+t} P(Y_2 > x, \dots, Y_m > x, Y_{m+1} < z_1, \dots, Y_n < z_1) dF_Y(x) \quad (4.2.38)$$

şeklinde ifade edilir. Varsayılan dağılım bilgileri dikkate alındığında Eşitlik (4.2.38);

$$n. \binom{n-1}{n-m} \int_{x>z_1+t} (\bar{F}(x))^{m-1} (F(z_1))^{n-m} dF_Y(x) \quad (4.2.39)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (4.2.32)' ün paydası;

$$\binom{n}{m} P(Y_1 > Z_{1:2}, \dots, Y_m > Z_{1:2}, Y_{m+1} < Z_{1:2}, \dots, Y_n < Z_{1:2}) \quad (4.2.40)$$

şeklinde ifade edilebilir. $Z_{1:2} = z_1$ koşulu altında Eşitlik (4.2.40);

$$\binom{n}{m} \int_{z_1} P(Y_1 > z_1, \dots, Y_m > z_1, Y_{m+1} < z_1, \dots, Y_n < z_1 | Z_{1:2} = z_1) dP\{Z_{1:2} \leq z_1\} \quad (4.2.41)$$

şeklinde elde edilir. Varsayılan dağılım bilgileri dikkate alındığında Eşitlik (4.2.41);

$$\binom{n}{m} \int_{z_1} (\bar{F}(z_1))^m (F(z_1))^{n-m} dP\{Z_{1:2} \leq z_1\} \quad (4.2.42)$$

şeklinde ifade edilir. Sonuç olarak Eşitlik (4.2.32)' de elde edilen sonucun pay ve paydası için yapılan işlemler dikkate alındığında çok-durumlu sistemin en az k adet bileşenin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık ispatlanmış olur.

Teorem 4.2.4. Çok-durumlu bir sistem seviye 2' de olduğu bilindiğinde, sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık değeri;

$$S_2^k = \sum_{m=k}^n \frac{\frac{1}{B(n-m+1, m)} \int_0^\infty \int_{z_2} \int_{z_2+t} (\bar{F}(x))^{m-1} (\bar{F}(z_2))^{n-m} dF_Y(x) dP\{Z_{2:2} \leq z_2\} dt}{\binom{n}{m} \int_{z_2} (\bar{F}(z_2))^m (F(z_2))^{n-m} dP\{Z_{2:2} \leq z_2\}} \quad (4.2.43)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: Çok-durumlu bir sistemin en az k adet bileşeni seviye 2' de olduğu bilindiğinde, sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık değeri;

$$S_2^k = E(Y_{n-k+1:n} - Z_{2:2} | \text{en az } k \text{ adet bileşen 2'de}) \quad (4.2.44)$$

şeklinde elde edilir. Burada sistemin en az k adet bileşeni, sistemin maruz kaldığı etkilerin maksimumundan büyük olduğunda $(n - k + 1)$. bileşen durumu

sisteminin ilgili seviyede çalışması için kritik öneme sahip olduğundan, bu bileşenin etkilerin maksimumundan farkı sistemin seviye 2' de olduğu durumdaki ortalama geriye kalan dayanıklılık hesabında kullanılır.

Beklenen değerin hesabı için;

$$\int_0^{\infty} P(Y_{n-k+1:n} - Z_{2:2} > t | \text{en az } k \text{ adet bileşen} > Z_{2:2}) dt \quad (4.2.45)$$

olasılığından faydalanılır. Bu olasılık;

$$\int_0^{\infty} \frac{P(Y_{n-k+1:n} - Z_{2:2} > t, \text{en az } k \text{ adet bileşen} > Z_{2:2}) dt}{P(\text{en az } k \text{ adet bileşen} > Z_{2:2})} \quad (4.2.46)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.2.46)' de belirtilen (*en az k adet bileşen* $> Z_{2:2}$) ifadesi açılır ve matematiksel olarak ifade edilirse;

$$\sum_{m=k}^n \frac{\int_0^{\infty} P(Y_{n-m+1} - Z_{2:2} > t, Y_1, \dots, Y_n' \text{ lerden tam "m" tanesi} > Z_{2:2}, Y_1, \dots, Y_n' \text{ lerden tam "n-m" tanesi} < Z_{2:2}) dt}{\binom{n}{m} P(Y_1, \dots, Y_n' \text{ lerden tam "m" tanesi} > Z_{2:2}, Y_1, \dots, Y_n' \text{ lerden tam "n-m" tanesi} < Z_{2:2})} \quad (4.2.47)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.2.47)' in payındaki mümkün kombinasyonların da hesaba katılması ile sonuca ulaşılır. Bunun için ilgili denklemin pay ve paydası ayrı ayrı ele alınırsa pay için;

$$\int_{z_2} P(Y_{n-m+1} > z_2 + t, Y_1, \dots, Y_n' \text{ lerden tam "m" tanesi} > z_2, Y_1, \dots, Y_n' \text{ lerden tam "n-m" tanesi} < z_2 | Z_{2:2} = z_2) dP\{Z_{2:2} \leq z_2\} \quad (4.2.48)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.2.48)' de elde edilen sonuca, integral içindeki olasılık hesabı için toplam olasılık kuralı uygulanırsa;

$$\sum_{i=1}^n P(Y_i > z_2 + t, Y_1 > z_2, \dots, Y_m > z_2, \dots, Y_{m+1} < z_2, \dots, Y_n < z_2, Y_{n-m+1} = Y_i) \quad (4.2.49)$$

şeklinde ifade edilir. Y_i ' ler bağımsız oldukları için Eşitlik (4.2.49);

$$n. P(Y_1 > z_2 + t, Y_1 > z_2, \dots, Y_m > z_2, Y_{m+1} < z_2, \dots, Y_n < z_2, Y_{n-m+1:n} = Y_1) \quad (4.2.50)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.2.50)' de elde edilen sonuca göre $(Y_2, \dots, Y_n)$ dayanıklılıklarının $(n-m)$ tanesi Y_1 ' den küçük, $(m-1)$ tanesi Y_1 ' den büyük olacaktır. Bu durumda $Y_1 = x$ koşulu altında Eşitlik (4.2.50);

$$n. \binom{n-1}{n-m} \int_{x > z_2}^{x > z_2 + t} P(Y_2 > z_2, \dots, Y_m > z_2, Y_{m+1} < z_2, \dots, Y_n < z_2, Y_2 > x, \dots, Y_m > x, Y_{m+1} < x, \dots, Y_n < x) dF_Y(x) \quad (4.2.51)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (4.2.51) gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$n \cdot \binom{n-1}{n-m} \int_{x > z_2+t} P(Y_2 > \max(z_2, x), \dots, Y_m > \max(z_2, x), Y_{m+1} < \min(z_2, x), \dots, Y_n < \min(z_2, x)) dF_Y(x) \quad (4.2.52)$$

şeklinde ifade edilir. $\max(z_2, x) = x$ ve $\min(z_2, x) = z_2$ olduğundan;

$$n \cdot \binom{n-1}{n-m} \int_{x > z_2+t} P(Y_2 > x, \dots, Y_m > x, Y_{m+1} < z_2, \dots, Y_n < z_2) dF_Y(x) \quad (4.2.53)$$

şeklinde ifade edilir. Varsayılan dağılım bilgileri dikkate alındığında Eşitlik (4.2.53);

$$n \cdot \binom{n-1}{n-m} \int_{x > z_2+t} (\bar{F}(x))^{m-1} (F(z_2))^{n-m} dF_Y(x) \quad (4.2.54)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (4.2.47)' nin paydası;

$$\binom{n}{m} P(Y_1 > Z_{2:2}, \dots, Y_m > Z_{2:2}, Y_{m+1} < Z_{2:2}, \dots, Y_n < Z_{2:2}) \quad (4.2.55)$$

şeklinde ifade edilebilir. $Z_{2:2} = z_2$ koşulu altında Eşitlik (4.2.55);

$$\binom{n}{m} \int_{z_2} P(Y_1 > z_2, \dots, Y_m > z_2, Y_{m+1} < z_2, \dots, Y_n < z_2 | Z_{2:2} = z_2) dP\{Z_{2:2} \leq z_2\} \quad (4.2.56)$$

şeklinde elde edilir. Varsayılan dağılım bilgileri dikkate alındığında Eşitlik (4.2.56);

$$\binom{n}{m} \int_{z_2} (\bar{F}(z_2))^m (F(z_2))^{n-m} dP\{Z_{2:2} \leq z_2\} \quad (4.2.57)$$

şeklinde ifade edilir. Sonuç olarak Eşitlik (4.2.47)' de elde edilen sonucun pay ve paydası için yapılan işlemler dikkate alındığında çok-durumlu sistemin en az k adet bileşenin seviye 2' de olduğu bilgisi altında sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık ispatlanmış olur.

Örnek Uygulama

$$Y_i \sim F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0, \quad x > 0,$$

$$Z_1 \sim G_1(x) = 1 - e^{-\theta_1 x}, \quad \theta_1 > 0, \quad x > 0,$$

$$Z_2 \sim G_2(x) = 1 - e^{-\theta_2 x}, \quad \theta_2 > 0, \quad x > 0,$$

şeklinde birikimli dağılım fonksiyonlarına sahip dayanıklılık ve etki rastgele değişkenleri olduğu varsayalım. Bu varsayımlar ve $(z_1 \geq 0)$ koşulu altında gerekli matematiksel düzenlemeler yapıldığında sistemin en az k adet bileşenin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılığı;

$$S_{1+}^k = \sum_{m=k}^n \frac{\frac{\lambda(\theta_1+\theta_2)}{B(n-m+1,m)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{z_1+t}^\infty (e^{-\lambda x})^m (1-e^{-\lambda z_1})^{n-m} e^{-(\theta_1+\theta_2)z_1} dx dz_1 dt}{(\theta_1+\theta_2) \binom{n}{m} \int_0^\infty (e^{-\lambda z_1})^m (1-e^{-\lambda z_1})^{n-m} e^{-(\theta_1+\theta_2)z_1} dz_1} \quad (4.2.58)$$

şeklinde ifade edilir.

Benzer şekilde aynı varsayımlar ve ($z_2 \geq 0$) koşulu altında gerekli matematiksel düzenlemeler yapıldığında sistemin k adet bileşenin seviye 2' de olduğu bilgisi altında sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılığı;

$$S_2^k = \sum_{m=k}^n \frac{\frac{\lambda}{B(n-m+1,m)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{z_2+t}^\infty (e^{-\lambda x})^m (1-e^{-\lambda z_2})^{n-m} (\theta_1 e^{-\theta_1 z_2} + \theta_2 e^{-\theta_2 z_2} - (\theta_1+\theta_2) e^{-(\theta_1+\theta_2)z_2}) dx dz_2 dt}{\binom{n}{m} \int_0^\infty (e^{-\lambda z_2})^m (1-e^{-\lambda z_2})^{n-m} (\theta_1 e^{-\theta_1 z_2} + \theta_2 e^{-\theta_2 z_2} - (\theta_1+\theta_2) e^{-(\theta_1+\theta_2)z_2}) dz_2} \quad (4.2.59)$$

şeklinde ifade edilir.

Farklı parametre değerleri için sistemin en az k adet bileşenin seviye 1 veya üzerinde olması ile seviye 2' de olması durumları için sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık hesaplamaları Tablo 4.4' de verilmiştir.

Tablo 4.4: Sistemin Kısmi veya Üzeri ve Mükemmel Performansta Olduğu Bilgileri
Altında Sisteme ait Ortalama Geriye Kalan Dayanıklılık Değerleri

n	k	λ	θ_1	θ_2	$S_{1+}^k(S)$	$S_{1+}^k(T)$	$S_2^k(S)$	$S_2^k(T)$
5	3	0,1	0,2	0,3	7,8664	7,8334	7,8926	7,8334
5	3	0,5	0,2	0,3	1,5806	1,5667	1,5565	1,567
5	3	0,5	0,5	0,3	1,6113	1,5667	1,5688	1,567
5	3	0,5	0,5	0,5	1,6177	1,5667	1,5756	1,567
7	3	0,1	0,2	0,3	10,9916	10,9289	10,9194	10,928
7	3	0,5	0,2	0,3	2,1935	2,1857	2,2949	2,2883
7	3	0,5	0,5	0,3	2,2059	2,1857	2,3743	2,2883
7	3	0,5	0,5	0,5	2,2147	2,1857	2,4774	2,2883
7	4	0,1	0,2	0,3	7,5662	7,5955	7,6114	7,595
7	4	0,5	0,2	0,3	1,5049	1,519	1,5031	1,519
7	4	0,5	0,5	0,3	1,5249	1,519	1,6254	1,519
7	4	0,5	0,5	0,5	1,5212	1,519	1,7267	1,519

Tablo 4.4' de elde edilen simülasyon sonuçları Matlab programı kullanılarak 100 bin tekrarlı simülasyon çalışması ile hesaplanmıştır. Teorik sonuçlar ise Mathcad programı kullanılarak hesaplanmıştır. $S_{1+}^k(S)$ ve $S_2^k(S)$ sırasıyla sistemin en az k adet bileşeninin seviye 1 veya üzerinde olması ile seviye 2' de olması durumları için simülasyon ile hesaplanan ortalama geriye kalan dayanıklılık değerlerini ifade etmektedir. $S_{1+}^k(T)$ ve $S_2^k(T)$ ise sırasıyla sistemin en az k adet bileşeninin seviye 1 veya üzerinde olması ile seviye 2' de olması durumları için teorik denklemlerden elde edilen ortalama geriye kalan dayanıklılık değerlerini ifade etmektedir. Tablo 4.4' de dayanıklılık ve etki rastgele değişkenlerinin üstel dağılım ailesine ait olduğu varsayılarak sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılığının, etki ve dayanıklılık parametrelerinin hangilerinden ne derece etkilendiği, farklı n ve k değerlerine hangi yönde karşılık verdiği incelenmeye çalışılmıştır. Tablo 4.4' de elde edilen teorik ve simülasyon sonuçlarına göre sistemin en az k adet bileşeninin seviye 1 veya üzerinde olması ile seviye 2' de olması durumlarının her ikisi için de hesaplanan ortalama geriye kalan dayanıklılık, dayanıklılık parametresindeki değişimlerden etkilenirken etki parametresindeki değişimlerden etkilenmemektedir. Sistemin her iki performans durumu için, sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık değeri, dayanıklılık parametresi artarken azalmakta, azalırken ise artmaktadır. Dayanıklılık parametresindeki artış dayanıklılığa ait bozulma oranının artışı anlamına geldiği için sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık değerinin dayanıklılık parametresindeki değişimlere verdiği tepki beklenen bir durumdur. Sistem her iki performans seviyesinde çalışırken ortalama geriye kalan dayanıklılık, k değeri sabitken n değeri arttırıldığında artmakta, azaltıldığında ise azalmaktadır. Benzer şekilde n değeri sabitken k değeri arttırıldığında azalmakta, azaltıldığında ise artmaktadır.

5.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, etki-dayanıklılık modellemesi altında ortalama geriye kalan dayanıklılık fonksiyonu elde edilmiştir. Üç seviyeye sahip n 'den k çıkışlı G sistemi için, sistemin seviye 1 veya üzerinde ve seviye 2' de olduğu bilgileri altında, sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık fonksiyonları elde edilerek sonuçlar farklı parametre, n ve k değerleri için irdelenmiştir. Teorik sonuçlar, simülasyonlar ile desteklenmiştir. Ayrıca, sistemin tüm bileşenlerinin seviye 1' de olduğu bilgisi altında sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılık simülasyon sonuçları da elde edilmiştir.

Bileşen bazındaki incelemelere göre, bileşenin seviye 1 veya üzerinde ve seviye 2' de olduğu bilgileri altında elde edilen bileşene ait beklenen geriye kalan dayanıklılık değerleri üzerinde, bileşene ait dayanıklılık rastgele değişkeninin etkisinin olduğu fakat; etki parametrelerinin herhangi bir etkisinin olmadığı görülmektedir. Bu sonuç etki ve dayanıklılık rastgele değişkenlerinin üstel dağılıma sahip oldukları varsayımı altında geçerlidir. Sistem bazında inceleme yapıldığında ise; literatürde iki durumlu sistemler için ele alınan sisteme ait tüm bileşenlerin çalışır durumda olduğu koşulu ile hesaplanan ortalama geriye kalan dayanıklılık bu tez çalışmasında çok-durumlu n ' den k çıkışlı bir G sistemi için ele alınmıştır. Benzer şekilde öncelikle sisteme ait tüm bileşenlerin sırasıyla seviye 1 veya üzerinde ve seviye 2' de olduğu bilgileri altında sisteme ait beklenen geriye kalan dayanıklılık fonksiyonları teorik olarak elde edilmiştir. Hem dayanıklılık hem de etki rastgele değişkenlerinin üstel dağılıma uyduğu varsayımı altında ortalama geriye kalan dayanıklılık değerleri üç seviyeli bir n ' den k çıkışlı G sistemi için elde edilmiştir. Simülasyon çalışması ile elde edilen teorik fonksiyonların doğruluğu desteklenmiştir. İkinci olarak çok durumlu n ' den k çıkışlı bir G sisteminin çalışma prensibi olan en az k bileşenin herhangi bir seviye olan j . seviye veya üzerinde olduğunda sistemin de j . seviye veya üzerinde olması bilgisinin, sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık hesaplamasında kullanılması gerekliliğinden yola çıkarak, üç durumlu n ' den k çıkışlı G sisteminin seviye 1 veya üzerinde ve seviye 2' de olduğu bilgisi altında sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık fonksiyonları elde edilmiştir. Sistemin seviye 1 veya üzerinde olması için en az k bileşenin seviye 1 veya üzerinde olması gerekliliği vardır. Bu neden sistemin en az k bileşeninin seviye 1 veya üzerinde olduğu bilgisi altında sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılığı elde edilmiştir. Ayrıca sistemin en az k bileşeninin 2 seviyesinde olduğu bilgisi altında sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık elde edilmiştir. Sonuçlar parametre bazında da irdelenmiştir. Her iki sistem incelemesi için ayrıca simülasyon sonuçları ile teorik sonuçlar desteklenmiştir. Üç seviyeli n ' den k çıkışlı G sistemi için sistem bazında yapılan tüm incelemeler neticesinde elde edilen sonuçlara göre; sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık değerinin, dayanıklılık parametresindeki değişimlerden etkilendiği fakat; etki parametrelerindeki değişimlerden etkilenmediği tespit edilmiştir. Bu sonuç etki ve dayanıklılık rastgele değişkenlerinin üstel dağılıma sahip oldukları koşulu altında geçerli olan bir sonuçtur. Ayrıca, sisteme ait sonuçlara göre ortalama geriye kalan dayanıklılık

sistemin k sayısı arttırıldığında azalmakta, azaltıldığında da artmaktadır. Sistemdeki bileşen sayısı arttırıldığında ise ortalama geriye kalan dayanıklılık artmaktadır. Elde edilen bu sonuçlar literatürde iki durumlu bileşen ve sistemler için etki-dayanıklılık kurulumu altında elde edilmiş olan sonuçlar ile de örtüşmektedir. Sistemin tüm bileşenlerinin seviye 1' de yani kısmi performansta ve seviye 2' de oldukları bilgileri altında sırasıyla elde edilen, sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık sonuçları da sadece simülasyon hesaplamaları ile irdelenebilmiştir. Elde edilen simülasyon sonuçlarına göre, tüm bileşenlerin seviye 2' de olduğu koşulu ile elde edilen sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılığı, tüm bileşenlerin seviye 1' de olduğu koşulu ile elde edilen sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılık değerinden büyüktür. Bu ise beklenen bir sonuçtur.

Bu tez çalışmasının devamında ele alınabilecek problemler ise; çok-durumlu sistemin ortalama geriye kalan dayanıklılığı, bileşenlerin ve etkilerin bağımsız fakat farklı dağılımlara sahip oldukları durum için incelenebilir. Örneğin, dayanıklılık ve etki rastgele değişkenlerinin Weibull dağılıma sahip oldukları varsayımı altında özellikle etki parametrelerinin ortalama geriye kalan dayanıklılık üzerinde bir etkisinin olup olmadığı araştırılabilir. Ayrıca rastgele etkilerin bağımlı oldukları durumun ortalama geriye kalan dayanıklılık üzerindeki etkileri de araştırılabilir. Bunun yanında sistemin kısmi performansta olduğu bilgisi altında sisteme ait ortalama geriye kalan dayanıklılık fonksiyonu çıkarımı teorik açıdan ele alınabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ahsanullah, M., Kibria, B. M. G., and Alzaid, A. A., 2014, On the residual life of the k out of n system, The Bulletin of the Malaysian Mathematical Society Series 2.

Al-Hussaini, K., Mousa, M. A., and Sultan, K. S., 1997, Parametric and non-parametric estimation of $\Pr(Y < X)$ for finite mixtures of lognormal components, Communications in Statistics-Theory and Methods, 26, 1269-1289.

Asadi, M., and Bayramoğlu, İ., 2005, A note on the mean residual life function of a parallel system, Communications in Statistics-Theory and Methods, 34, 475-484.

Asadi, M., and Bayramoğlu, İ., 2006, The mean residual life function of a k out of n structure at the system level, IEEE Transactions On Reliability, Vol. 55, No. 2.

Awad, A., and Azzam, M., 1981, Some inference results on $\Pr(X < Y)$ in the bivariate exponential model, Communications Statistical Theory, A10(24), 2515-2525.

Bilal, C., 2013, Kütle elemanlarda erken yaş çatlak riskinin belirlenmesi ve uygulama ile karşılaştırması, 98p.

Birnbaum, Z. W., 1956, On A Use Of The Mann-Whitney Statistics, 13-17.

Church, J. D., and Harris, B., 1970, The estimation of reliability from stress strength relationships, Technometrics 12, 54p.

Downtown, F., 1973, The estimation of $\Pr(Y < X)$ in a normal case, Technometrics, Vol. 15, No. 3, 558p.

Eryilmaz, S., 2008, A new perspective to stress-strength models, The Institute of Statistical Mathematics, 63:101-115.

Eryilmaz, S., 2008, Multivariate stress-strength reliability model and its evaluation for coherent structures, Journal of Multivariate Analysis 99, 1878-1887.

Eryilmaz, S., 2012, On the stress-strength reliability with time dependent strength, Vol. 2013, 6p.

KAYNAKLAR DİZİNİ(DEVAM)

Eryilmaz, S., and Bozbulut, A. R., 2014, An algorithmic approach for the dynamic reliability analysis of non-repairable multi-state weighted k out of n : G system, Reliability Engineering and System Safety 131, 61-65.

Eryilmaz, S., and Iscioglu, F., 2010, Reliability evaluation for multi-state system under stress-strength setup, Communications in Statistics-Theory and Methods, 40:3, 547-558.

Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K., and Aboukhamseen, S. M., 2015, Estimation of the Reliability of a Stress-Strength System from Power Lindley Distributions, Communications in Statistics-Simulation and Computation, 44:1, 118-136.

Gurler, S., 2013, The mean remaining strength of systems in a stress-strength model, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics Volume 42 (2), 181 – 187.

Gurler, S., and Bairamov, I., 2009, Parallel and k out of n : G systems with nonidentical components and their mean residual life functions, Applied Mathematical Modelling 33 (2009), 1116–1125.

Hanagal, D. D., 2003, Estimation of system reliability in multicomponent series stress-strength models, Journal of the Indian Statistical Association, Vol. 41.1, 2003, 1-7.

Karadayı, N. A., Saraçoğlu, B., and Pekgör, A., 2011, Stress-strength reliability and its estimation for a component which is exposed two independent stress, Selçuk Journal of Applied Mathematics Special Issue, pp. 131-135,

Ozler, B. S., and Gurler, S., 2012, On the reliability of k - n F systems with exchangeable components stress-strength setup, TWMS J. App. Eng. Math. Vol. 2, No. 1, pp. 109-115.

Ragap, A., 1991, Estimation and predictive density for the generalized logistics distribution, Microelectronics Reliability, R-33, 31(1), 91-95.

Saracoglu, B., 2007, Maximum likelihood estimation and confidence intervals of system reliability for gompertz distribution in stress-strength models, Selçuk Journal of Applied Mathematics, Vol. 8, No. 2, pp. 25-36.

KAYNAKLAR DİZİNİ(DEVAM)

Saracoglu, B., Kaya, M. F., and Abd-Elfattah, A. M., 2009, Comparison of estimators for stress-strength reliability in the Gompertz Case, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics Volume 38 (3), 339 – 349.

Tong, H., 1974, On The Estimation of $\Pr(Y \leq X)$ for Exponential Families, IEEE Transactions On Reliability, Vol. R-26, No. 1.

Woodward, W. A., and Kelley, G. D., 1977, Minimum Variance Unbiased Estimation of $\Pr(Y < X)$ in the Normal Case, Technometrics, Vol. 19, No. 1.



ÖZGEÇMİŞ

Fırat DEVECİ, Ortaokul eğitimini Salihli Anadolu Öğretmen Lisesi' nde tamamlamıştır. Lisans eğitimini Ege Üniversitesi İstatistik Bölümü' nde tamamlamıştır. 2018 yılından bu yana Ege Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı' nda Yüksek Lisans Eğitimine devam etmektedir.

