

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**BAĞIMSIZ SINIRLAYICILAR VE VEKTÖREL ÇEKİM ALANI
ETKİSİNDEKİ PARÇACIĞIN KAOTİK DİNAMİĞİ**

Burcu EMRE

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2022

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**BAĞIMSIZ SINIRLAYICILAR VE VEKTÖREL ÇEKİM ALANI
ETKİSİNDEKİ PARÇACIĞIN KAOTİK DİNAMİĞİ**

Burcu EMRE

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2022

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAĞIMSIZ SINIRLAYICILAR VE VEKTÖREL ÇEKİM ALANI
ETKİSİNDEKİ PARÇACIĞIN KAOTİK DİNAMİĞİ

Burcu EMRE

FİZİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 20/06/2022 tarihinde jüri tarafından Oybirliği / Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Mesut KARAKOÇ

Prof. Dr. Orhan BAYRAK

Dr. Öğr. Üyesi Fahrettin KOYUNCU

ÖZET

BAĞIMSIZ SINIRLAYICILAR VE VEKTÖREL ÇEKİM ALANI ETKİSİNDEKİ PARÇACIĞIN KAOTİK DİNAMİĞİ

Burcu EMRE

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mesut KARAKOÇ

Haziran 2022; 35 sayfa

Bu tez çalışmasında serbest bir titreşici ve yer çekimi etkisi altında hareket eden noktasal bir kütlenin dinamiği çalışılmıştır. Modelimizde oluşturulan zıplayan-top sisteminin sınırlayıcı hareketi basitçe bir sinüs fonksiyonu ile modellenerek sistemin sıradan veya düzenli olarak tanımlanan davranıştan kaotik davranışa geçişleri incelenmiş, farklı genlik değerlerinde sistemin periyodik ve kaotik davranışları hesaplanmıştır. Modelin kaotik davranış gösterdiği durumlar için sistemin davranışını etkileyen farklı parametre değerleri detaylıca incelenmiştir. Bu bağlamda, modelin kaotik ve düzenli davranış gösterdiği durumlar için sistemin zaman serisi, faz uzayı ve Bifurkasyon diyagramları elde edilerek farklı parametreler için sonuçlar yorumlanmıştır. Elde ettiğimiz sonuçlarda, aynı başlangıç koşullarıyla genlik $A < 0,0235$ olduğunda sistemin periyodik davranış gösterdiği ve $A > 0,0235$ olduğunda ise sistemin kaotik davranış sergilediği gözlenmiştir. Ayrıca, verilen koşullardaki zıplayan top sistemi için çarpma parametresinin kaotik davranış oluşum sürecine etkisi açıklanmıştır ve yine aynı koşullarda zıplayan top sistemi için Bifurkasyon diyagramları elde edilen sonuçlar için yorumlanmıştır. Bu çalışmada yapılan tüm hesaplamalar Python 3 dilinde tarafımızca yazılan programlarla analitik ve nümerik yöntemler kullanılarak elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELE: Bifurkasyon, Dinamik sistem, Kaos, Zıplayan top

JÜRİ: Doç. Dr. Mesut KARAKOÇ

Prof. Dr. Orhan BAYRAK

Dr. Öğr. Üyesi Fahrettin KOYUNCU

ABSTRACT

THE CAOTIC DYNAMICS OF THE PARTICLE UNDER THE INFLUENCE OF INDEPENDENT LIMITERS AND VECTORAL GRAVITATIONAL FIELD

Burcu Emre

MSc Thesis in Natural Science

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mesut Karakoç

June 2022; 35 pages

In this thesis, the dynamics of a free oscillator and a point mass moving in the gravitational field are studied. In our model, the oscilating plate motion of the bouncing ball system which is created is simply modelled with a sine function and the transitions of the system from ordinary or regularly defined behavior to chaotic behavior are examined, the results are calculated for the periodic and chaotic behavior of the system at different amplitude values. In cases where the model exhibits chaotic behavior, different parameter values effecting the behavior of the system are examined in detail. In this context, the time series, phase space and Bifurcation diagrams of the system were obtained for cases where the model showed chaotic and regular behavior and the results were interpreted for different parameters. In the results we obtained, it was observed that the system showed periodic behavior when the amplitude $A < 0,0235$ with the same initial conditions, and the system displayed chaotic behavior when $A > 0,0235$. In addition, the effect of the impact parameter on the chaotic behavior formation process for the bouncing ball system under the given conditions is explained and the Bifurcation diagrams for the bouncing ball system under the same conditions are interpreted for the results obtained. All calculations made in this study were obtained by using analytical and numerical methods with programs written by us in Python 3 language.

KEYWORDS: Bifurcation, Bouncing ball, Chaos, Dynamical system

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Mesut KARAKOÇ

Prof. Dr. Orhan BAYRAK

Asst. Prof. Dr. Fahrettin KOYUNCU

ÖNSÖZ

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteğini esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Mesut Karakoç'a, ayrıca hep yanımda olan aileme ve sorularıma sabırla cevap veren enstitü çalışanı teyzem Remziye Suna'ya teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ.....	iii
AKADEMİK BEYAN	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	3
2.1. Kuramsal Bilgi	3
2.1.1. Zıplayan top sistemin modellenmesi.....	3
2.1.1.1. Hareket denklemleri.....	3
2.1.1.2. Yapışkan çözümler.....	6
2.1.2. Haritalar.....	6
2.1.2.1. Lojistik harita	7
2.1.2.2. Henon haritaları.....	7
2.1.3. Yöntemler.....	8
2.1.3.1. Bifurkasyon diyagramı.....	8
2.1.3.2. Cobweb diyagramı	9
2.1.3.3. Lyapunov üstelleri.....	11
2.1.3.4. Zaman serisi	13
2.2. Kaynak Tarama	14
3. MATERYAL VE METOD	16
3.1. Zıplayan Top Modelinin Matematiksel Olarak Tanımlanması	16
3.2. Bifurkasyon (Dallanma Diyagramı).....	17
3.3. Zaman Serisi.....	17
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	18
5. SONUÇLAR	29
6. KAYNAKLAR	30
7. EKLER.....	33
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Bağımsız Sınırlayıcılar ve Vektörel Çekim Alanı Etkisindeki Parçacığın Kaotik Dinamiği” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

20/06/2022

Burcu Emre

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

A	: Genlik
a	: Popülasyon büyüme oranı
a_t	: Sınırlayıcı ivmesi
d	: Top ve masa konum farkı
dt_k	: İki çarpma arası geçen süre
f_a	: Sabiti a olan fonksiyon
f'	: Fonksiyonun x' e göre türevi
f^n	: Fonksiyonun n . iterasyon değeri
f'_n	: n . Fonksiyon değerinin x' e göre türevi
g	: Yerçekimi ivmesi
K	: Popülasyonun taşıma kapasitesi
k	: Çarpma sayısı
l	: Dallanma sayısı
$\ln$	: e tabanında logaritma
N	: Canlı sayısı
N	: İterasyon sayısı
N'	: Canlı sayısının zamana göre türevi
N_k	: Zıplama sayısı
p_0	: İlk kök
p_1	: İkinci kök
s	: Masa konumu
t	: Zaman
t_k	: k . çarpma süresi

u_k	: k. çarpmada masa hızı
v_0	: Topun ilk hızı
v_{bk}	: Topun çarpma anında hızı
v_{tk}	: Sınırlayıcının çarpma anında hızı
v_k	: k. çarpma sonrası top hızı
v'_k	: k. çarpma öncesi top hızı
$\bar{v}_k$	: k. çarpma sonrası masa referans çerçevesine göre top hızı
$\bar{v}'_k$	: k. çarpma öncesi masa referans çerçevesine göre top hızı
v_{ks}	: Çarpışma sonrası topun ilk hızı
v_t	: Sınırlayıcı hızı
y_0	: Topun başlangıç düşey yüksekliği
y_b	: Topun konum fonksiyonu
y_t	: Sınırlayıcı konumu
Z^+	: Pozitif tam sayılar
x	: konum değişkeni
x'	: konumun türevi
x^*	: sabit nokta
$\ddot{x}$	: konum değişkeninin iki kere zamana göre türevi
x_0	: Başlangıç konumu
x_k	: k. çarpma top konumu
x_n	: n. değişken değeri
Σ	: Toplam sembolü
α	: Çarpma parametresi
θ	: Faz
θ_0	: Başlangıç fazı
θ_k	: Çarpma fazı

ε : Çok küçük artış
 $\in$: Elemanı sembolü
 λ : Lyapunov üsteli
 π : Pi sayısı
 w : Frekans
 δ_0 : Faz farkı
, : Ondalık ayracı

Kısaltmalar

cm : Santimetre
FA : Fermi İvmelenmesi
Hz : Hertz
s : Saniye

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Topun bağıl hareketi	4
Şekil 2.2. Henon haritalama.....	7
Şekil 2.3. Bifurkasyon diyagramı	8
Şekil 2.4. $x_0 = 0,2$ başlangıç değeri ve $a = 2,5$ için Cobweb diyagramı	10
Şekil 2.5. Başlangıç değeri $x_0 = 0,5$ için farklı a değerleri için Cobweb diyagramı	10
Şekil 2.6. Lyapunov üstelleri grafiği	12
Şekil 2.7. Lyapunov üstelleri ve Bifurkasyon diyagramı	13
Şekil 2.8. Başlangıç değeri $x_0 = 0,5$ için farklı a değerleri için zaman serisi.....	14
Şekil 4.1. Topun ve sınırlayıcının konum-zaman, hız-zaman, çarpma noktalarının konumuna karşı çarpma zamanları ve faz uzayı grafikleri	18
Şekil 4.2. $A = 0,0220$ için topun ve sınırlayıcının konum-zaman, hız-zaman, çarpma noktalarının konumuna karşı çarpma zamanları ve faz uzayı grafikleri	20
Şekil 4.3. $A = 0,0233$ için topun ve sınırlayıcının konum-zaman, hız-zaman, çarpma noktalarının konumuna karşı çarpma zamanları ve faz uzayı grafikleri	22
Şekil 4.4. $A = 0,0250$ için topun ve sınırlayıcının konum-zaman, hız-zaman, çarpma noktalarının konumuna karşı çarpma zamanları ve faz uzayı grafikleri	24
Şekil 4.5. Bifurkasyon diyagramı	26
Şekil 4.6. $\alpha = 0,4$ için Bifurkasyon diyagramı	27
Şekil 4.7. $\alpha = 0,6$ için Bifurkasyon diyagramı	27

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Sistemin başlangıç ve karakteristik parametreleri	18
Çizelge 4.2. $A = 0,0200$ değeri ile 15 zıplama için elde edilen parametre sonuçları	19
Çizelge 4.3. $A = 0,0220$ değeri ile 15 zıplama için elde edilen parametre sonuçları ...	21
Çizelge 4.4. $A = 0,0233$ değeri ile 15 zıplama için elde edilen parametre sonuçları ...	23
Çizelge 4.5. $A = 0,0250$ değeri ile 15 zıplama için elde edilen parametre sonuçları ...	25



1. GİRİŞ

Klasik mekanik, duran veya ışık hızından daha düşük hızlarda hareket eden makro boyutlardaki fiziksel nesnelere etki eden kuvvetleri, bu kuvvetlerin etkisinde kalan nesnelerin nasıl hareket ettiğini ve konumlarının zamana bağlı değişimini inceler.

Klasik mekaniğe göre; doğadaki sistemler doğrusal ve doğrusal olmayan sistemler olarak ikiye ayrılabilir. Doğrusal sistemler, düzenli yörüngeler oluşturur ve geçmiş davranışını tekrar ederek hareketini sürdürür. Bu düzenli davranış, başlangıç durumu bilindiği takdirde sistemin herhangi bir andaki durumu hakkında bilgi sahibi olabilmemiz için bize olanak sağlar. Doğrusal olmayan sistemler ise başlangıçta kolay tahmin edilebilir görünmekle beraber zaman içinde öngörülmesi zor davranış sergilemeye başlar. Sistemin bu davranış başlangıç koşullarına gösterdiği hassas bağıllıkla ortaya çıkar. Başlangıç koşullarında yapılan çok küçük değişimler sistemin davranışını önemli miktarda değiştiriyorsa bu durum sistemin kaotik davranış gösterebileceği anlamına gelir. Poincare, Bifurkasyon, Lyapunov üstelleri ve Cobweb gibi yöntemler Lojistik harita vb. dinamik sistemlerde oluşabilecek kaotik davranış tespit etmek ve haritalandırmak için kullanılır.

Kaotik davranışın farkına varan ilk kişilerden birisi olan Edward Lorenz 1972’de anlık hava tahminlerini doğru yapabilmek için parametreleri atmosferin ölçülebilen özelliklerine bağlı üç denklem önermiştir. Hesaplamalarında tahminler için kullandığı başlangıç parametrelerindeki çok küçük değişikliklerin sistemin gelecekteki davranışını tamamen farklılaştırabildiğini gözlemlemiştir. Lorenz meslektaşlarının önerisiyle bu davranış “kelebek etkisi” olarak adlandırmıştır ve “Tahmin edilebilirlik: Brezilya’da bir kelebeğin kanat çırpması Teksas’ta bir kasırga başlatır mı?” başlıklı bir sunum yapmıştır (Lorenz 1972). Böylece kaotik davranış gösteren başka fiziksel sistemler üzerine çalışmaların yapılması için öncü olmuştur.

Ruelle ve Takens akışkanlarda gerçekleşen türbülans davranış için acayip çekicileri dikkate alan yeni bir teorem önermişlerdir (Ruelle ve Takens 1971).

May popülasyon biyolojisinde tekrarlamalı haritaların kaotik davranışlara sahip olabileceğini gösterdi (May 1976).

Feigenbaum ise bazı evrensel kanunlar çerçevesinde düzenli sistemlerin kaotik davranışa geçebileceğini göstererek, kaos ve faz geçişleri arasında bağ kurmuş oldu (Feigenbaum 1978).

Gollub, Libchaber, Swinney, Linsay, Moon ve Westervelt gibi deneyçiler ise kaos hakkındaki bu yeni fikirleri akışkanlar, elektronik devreler, mekanik salıncıklar ve yarıiletkenler içeren deneyler gerçekleştirdiler (Strogatz 2018). Böylece kaotik davranışın evrendeki birçok fiziki sistemin ve mekanizmanın işleyişinde etkin olabildiği keşfedilmiş oldu.

“Global ballistic acceleration in a bouncing-ball model” (Kroetz vd. 2015) başlıklı eserden derlenen literatür bilgisine göre: Kaotik davranışların gözlenebildiği bir başka çalışma alanı da Enrico Fermi’nin (Fermi 1949) kozmik ışınların yüksek enerjilerinin kökenini açıklamak için önerdiği bir mekanizma ile ortaya çıktı. Fermi yıldızlar arası

boşlukta salınan manyetik alanlarla etkileşen parçacıkların ortalama olarak enerji kazanımı sergileyeceğini iddia etti (Kroetz vd. 2015). Enerjinin sınırsız olarak büyümesine sebep olacak bu mekanizma "Fermi ivmelenmesi" (FA) olarak adlandırılır. Literatürde FA uygulamalar ile plazma fiziği (Lieberman ve Godyak 1998; Milovanov ve Zeleyni 2001), astrofizik (Veltri ve Carbone 2004; Kobayakawa vd. 2002; Rieger vd. 2007), atom optiği (Lanzano vd. 1999; Saif vd. 1998; Steane vd. 1995) ve özellikle de bilardo dinamiği (Loskutov vd. 1999) gibi çeşitli alanlarda çalışmalar gerçekleştirilmiştir. FA olgusu hızın $\sim \sqrt{t}$ ile orantılı olarak büyüdüğü faz uzayında normal difüzyon ile ilişkilendirilmektedir (Kroetz vd. 2015). Ancak, FA için farklı büyüme davranışlarına sahip bölgeler de bulunabilir: üstel gelişim bölgesi (Gelfreich vd. 2011; Gelfreich vd. 2012; Shah vd. 2010; Batistic 2014) veya $\sim \sqrt{t}$ 'den daha yavaş büyüme bölgesi ki yapışkanlık olgusu bu bölge için önemli etkidir (Livorati vd. 2012a; Livorati vd. 2012b).

Çalışmamızın konusu olan yerçekimi etkisi altındaki düzgün kütle dağılımına sahip bir parçacığın titreşen düzlem üzerindeki davranışının aslında Fermi'nin önerdiği mekanizmanın mekanik bir sisteme uygulamasıdır. Serbest düşen bir cismin titreşen bir sınırlayıcı ile etkileştiğini düşünelim. Cisim sınırlayıcıyla etkileşmediği sürece serbest düşüş gerçekleştirir ve doğrusal dinamiğe sahip bir davranış gösterir. Fakat sınırlayıcıyla olan etkileşmesine (elastik veya inelastik) veya sınırlayıcının salınımının periyodik olup olmamasına bağlı olarak doğrusal ve doğrusal olmayan dinamik davranışları arasında geçişler gerçekleştirebilir. Hatta bazı durumlarda kaotik davranış gösterebilir.

Bu tez çalışmasının amacı, serbest bir titreşici ve yer çekimi etkisi altında kalan noktasal bir kütlenin dinamiğinin hesaplanması, sistemde oluşabilecek kaotik durumların belirlenmesi ve sistemin sıradan davranıştan kaotik davranışa geçişinin incelenmesidir.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Kuramsal Bilgi

2.1.1. Zıplayan top sisteminin modellenmesi

Zıplayan top sistemini modellemek için masanın kütesinin topun kütesinden çok büyük olduğunu varsayalım ve top ile masa arasındaki etki anlık olsun. Deneysel sistem için bu varsayımlar gerçekçidir ve anlaşılır ki masanın hareketi top ile çarpışmasından etkilenmez. Çarpışmalar genelde inelastiktir yani her çarpımda küçük bir enerji kaybedilir. Eğer hiç enerji kaybedilmezse çarpışma elastik olarak adlandırılır (Tufillaro vd. 1990).

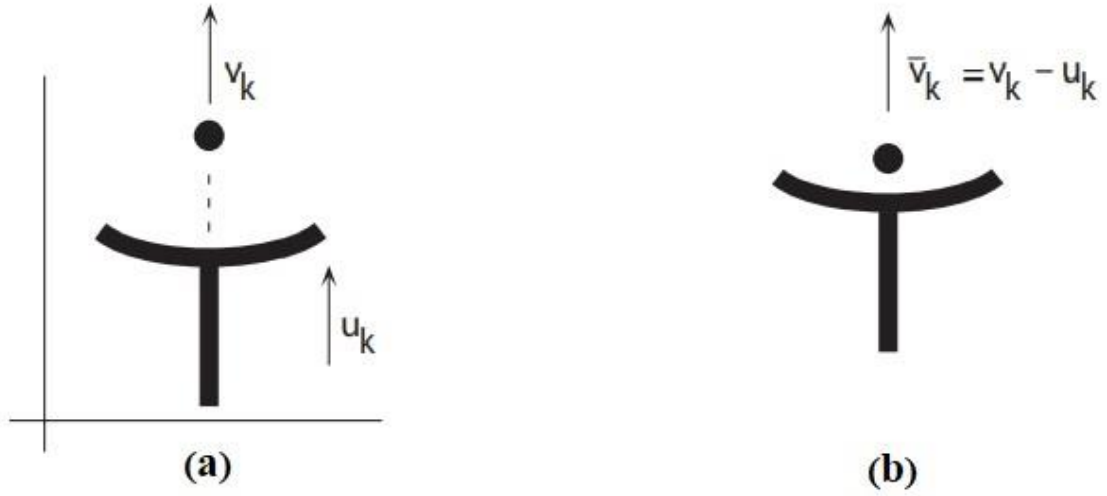
2.1.1.1. Hareket denklemleri

Zıplayan top sisteminde aslında iki farklı gözlem çerçevesi bulunduğunu göz önünde bulunduralım:

- Yerden görülen top hareketi (zemin gözlem çerçevesi)
- Masadan görülen top hareketi (masa gözlem çerçevesi)

Başlangıç olarak iki gözlem çerçevesinin aynı olduğu ve masanın sabit olduğu durumu düşünelim. v'_k k . çarpma öncesi topun hızı, v_k k . çarpma sonrası topun hızı olsun. v'_k çarpımdan hemen önceki hızı gösterir. Eğer masa sabitse ve çarpma elastikse $v_k = -v'_k$ ile ifade edilir. Enerji kaybı olmadığından top ters yöne döner fakat hızının büyüklüğü değişmez. Eğer çarpışma inelastikse, her çarpışmada enerji kaybı olacağı için topun hızı azalacaktır. Bu durumda hız $v_k = -\alpha v'_k$ ($0 \leq \alpha < 1, k \in \mathbb{Z}^+$) olur. Burada α çarpma parametresi olup her etkide enerji kaybının ölçüsüdür. Eğer $\alpha = 1$ ise sistem korunumludur ve çarpışma elastiktir. Çarpma parametresi, inelastik çarpışma için tam olarak 1'den azdır (Tufillaro vd. 1990).

Masa hareketli olduğunda topun hızı, bir çarpışmanın hemen sonrasında masanın etkisinden dolayı ek bir terim alacaktır. Topun hızındaki değişimi hesaplamak için masadan topun hareketini düşünmek gerekir. Masa gözlem çerçevesinde masa sabittir. Top ancak zemin gözlem çerçevesinde masanın hızının zıddına eşit olan ek bir hıza sahip görünür. Böylece topun hızındaki değişimi hesaplamak için masa gözlem çerçevesinde hızdaki değişimi hesaplayabiliriz ve sonra zemin gözlem çerçevesinde topun hızını bulmak için masanın hızını ekleyebiliriz.



Şekil 2.1. a) Topun zemine göre hareketi; **b)** Topun masaya göre hareketi (Tufillaro vd. 1990)

Şekil 2.1.a’da verilen u_k masanın yere göre hızını, v_k ise topun yere göre hızını temsil etmektedir. $\bar{v}_k$ k . çarpma sonrası masa gözlem çerçevesine göre topun hızı ve $\bar{v}'_k$ k . çarpma öncesi masa gözlem çerçevesine göre topun hızı olsun. Buna göre, topun masa gözlem çerçevesinde inelastik çarpışmadan dolayı hız kaybı;

$$\bar{v}_k = -\alpha \bar{v}'_k \quad (2.1)$$

olur. Topun yere göre hızını bulmak için Şekil 2.1.b’de görüldüğü gibi topun masaya göre hızına masanın hızını eklemeliyiz.

$$\bar{v}_k = v_k - u_k, \quad v_k = \bar{v}_k + u_k \quad (2.2)$$

$$\bar{v}'_k = v'_k - u_k, \quad v'_k = \bar{v}'_k + u_k \quad (2.3)$$

Denklem (2.1)’i denklem (2.2) ve (2.3)’ü kullanarak düzenlediğimizde;

$$v_k = (1 + \alpha)u_k - \alpha v'_k \quad (2.4)$$

elde edilir. Bu denklem ‘etki ilişkisi’ olarak bilinir. Titreşen masanın topun hızına $(1 + \alpha)u_k$ kadar katkıda bulunduğunu ifade eder.

Top ve masa çarpıştığında topun hareketini hesaplamak için zamanı, böylece fazları ($\theta = \omega t$) hesaplanmalıdır. Topun ve masanın konumları arasındaki fark sıfır olduğunda çarpma oluşur. Çarpmalar arasında hareket basit olduğu için topun durumunu etki haritası ve faz haritası olarak tanımlayabiliriz. Bu da çarpma fazı ve çarpma hızının mevcut değerlerini girdi olarak alır ve ardından bir sonraki çarpma fazı ve çarpma hızını üretir.

$$x(t) = x_k + v_k(t - t_k) - \frac{1}{2}g(t - t_k)^2 \quad (2.5)$$

Denklem (2.5) k . çarpmadan sonra t zamanında topun konumu olsun. Burada x_k k . çarpmada topun konumu ve t_k k . çarpma zamanıdır. Masanın konumu;

$$s(t) = A[\sin(wt + \theta_0) + 1] \quad (2.6)$$

A genliği, w frekansı ve θ_0 başlangıç fazı ile ifade edilebilir. Sinüs fonksiyonuna A 'yı daima pozitif tutmak için '1' eklenmiştir. Top ve masa arasındaki konum farkı;

$$d(t) = x(t) - s(t) \quad (2.7)$$

dır. Top asla masanın altında olamayacağı için bu denklem hiçbir zaman negatif olmayan bir denklem olmalıdır. $d(t) = 0$ olduğunda ilk değer, $t > t_k$, bir sonraki çarpma zamanını dolaylı olarak tanımlar. Denklem (2.5) ve denklem (2.6), (2.7) bağıntısında yerine yazıldığında;

$$0 = x_k + v_k(t_{k+1} - t_k) - \frac{1}{2}g(t_{k+1} - t_k)^2 - A[\sin(wt_{k+1} + \theta_0) + 1] \quad (2.8)$$

k . çarpma anını veren ifade elde edilir. Faz ve zaman değişkenleri arasında $\theta = \theta_0 + wt$ tanımlaması yapıldığında denklemi faz bakımından tekrar yazarsak;

$$0 = A(\sin \theta_k + 1) + v_k \left(\frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{w} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{w} \right)^2 - A[\sin \theta_{k+1} + 1] \quad (2.9)$$

denklemini elde ederiz. Bu ifade kapalı 'faz haritası' dır. Burada θ_{k+1} , $d(\theta) = 0$ için bir sonraki θ değeridir.

Hız haritası doğrudan (2.4) bağıntısından türetilir. k . çarpma sonrası hız ile $k+1$ 'inci çarpma öncesi hız büyüklüğü aynı olacağından $k+1$ 'inci çarpma öncesine kadar olan süre için;

$$v'_{k+1} = v_k - g(t_{k+1} - t_k) \quad (2.10)$$

olur. Denklem (2.4) $k+1$ 'inci çarpma için türetildiğinde;

$$v_{k+1} = (1 + \alpha)u_{k+1} - \alpha v'_{k+1} \quad (2.11)$$

olarak yazılır. Buradaki hız ifadeleri yerine yazıldığında;

$$v_{k+1} = (1 + \alpha)Aw \cos(wt_{k+1} + \theta_0) - \alpha[v_k - g(t_{k+1} - t_k)] \quad (2.12)$$

'hız haritası' elde edilmiş olur. Faz değişkenine göre ifade edildiğinde;

$$v_{k+1} = (1 + \alpha)Aw \cos \theta_{k+1} - \alpha \left[v_k - \frac{g}{w}(\theta_{k+1} - \theta_k) \right] \quad (2.13)$$

bulunur.

Faz haritası ve hız haritası denklemleriyle zıplayan top dinamiğini bilgisayarda tanımlamak kolaydır fakat faz haritasındaki θ_{k+1} diğer değişkenlerden ayıramadığı için nümerik yöntemlerle çözülmelidir (Tufillaro 1990).

2.1.1.2. Yapışkan çözümler

Tek boyutta düşey düzlemde zıplayan topun sinüsoidal titreşen bir masa ile etkileşimi için hareketini tanımladık. Bu hareket sırasında oluşabilecek bazı durumları topun izlediği yörüngeyi takip ederken eklemek gereklidir. Top hareketini sürdürürken iki durumda bulunabilir:

- Zıplama hareketini devam ettirebilir.
- Masanın ivmesi g olana kadar masa ile birlikte hareketini sürdürebilir.

Topun masa ile birlikte hareket ettiği bölgeye ‘yapışma bölgesi’ adı verilir ve bu bölge uzun zaman alsa bile mutlaka oluşur.

Masanın titreşim fonksiyonunun çukur noktasına denk geldiği yerde çarpışma meydana geldiğinde topun hızı yeterince büyük değilse masa topu taşımak durumunda kalabilir. Örneğin $t = 0$ anında top masanın üzerinde durgun halde duruyor olsun. Masa titreşmeye başladığında topun masadan ayrılabilmesi için ivmenin yerçekimi ivmesinden daha büyük olması gerekir. Bu noktaya kadar top ve masa birlikte hareket ederler.

$$\begin{aligned} \ddot{s} &= -Aw^2 \sin wt \leq -g \\ \Rightarrow \frac{Aw^2}{g} \sin wt &\geq 1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Burada, $\ddot{s}$ masanın zamana bağlı konum denkleminin ikinci türevi alınarak hesaplanmış ivmesidir ve $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ standart yerçekimi ivmesidir. Denklem (2.14)’te elde edilen ifade topun ‘indirgenmiş ivme’si olarak tanımlanır (Ward 2013). İndirgenmiş ivmenin 1’e eşit olma durumu yapışma şartıdır ve alt limit olarak harekete eklenmelidir, 1’den büyük değerlerde zıplama hareketine masadan bağımsız devam edebilir.

Hareket esnasında yapışma durumu oluştuğunda sistem başlangıç koşullarına döndürülür. Tekrar hesaplanırsa bile başlangıçtaki desenin aynısını çizdiği gözlenir. Buna periyot-1 hareketi denir. Zıplayan top modelinde n tane bu şekilde birbirinden bağımsız zıplamalar oluşur ve ‘periyot-n hareketi’ olarak ifade edilir (Ward 2013).

2.1.2. Haritalar

Harita, bir fiziksel sistemin davranışını kesikli denklemlerle ifade edilmesini sağlayan bir yöntemdir. Lojistik harita, Henon haritası vb. haritalar örnek olarak gösterilebilir.

2.1.2.1. Lojistik harita

Lojistik harita popülasyon değişimi gibi sistemler için kullanılır. Popülasyon değişimini tanımlayan dinamik bir sistem denklem (2.15) ile tanımlanabilir. Bu denklem ‘Lojistik Denklem’ olarak adlandırılır:

$$N'(t) = \frac{a}{K} N(t)(K - N(t)) \quad (2.15)$$

Burada $N(t)$ popülasyondaki canlı sayısı, a popülasyon büyümesinin maksimum oranı ve K taşıma kapasitesi (popülasyonun mümkün maksimum değeri) olarak tanımlanmıştır. Basit bir dönüşümle $x(t) = \frac{N(t)}{K}$ ($0 \leq x(0) \leq 1$) değişimi yapıldığında ‘lojistik denklem’ elde edilir:

$$x'(t) = ax(1 - x) \quad (2.16)$$

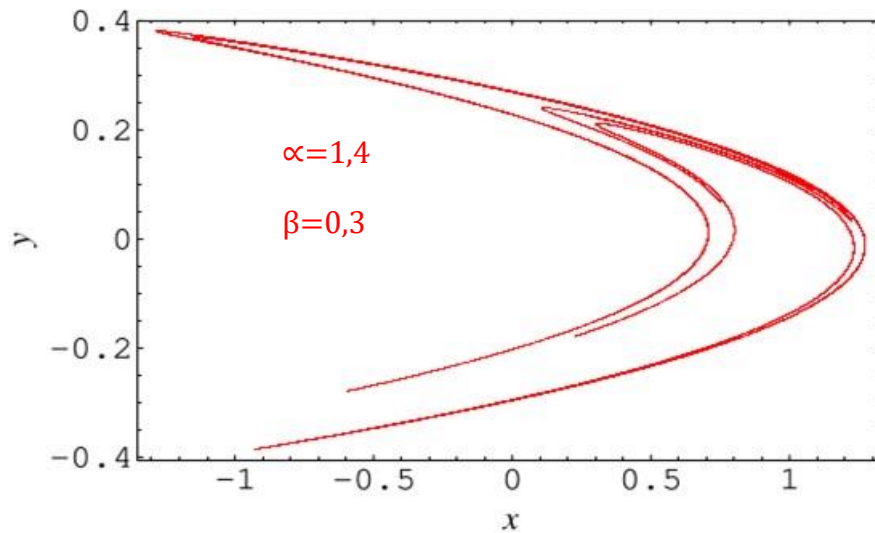
Bu doğrusal olmayan fark denkleminin iki durumu üretmesi amaçlanmıştır:

- Popülasyon büyüklüğü küçük olduğunda, popülasyonun mevcut popülasyonla orantılı bir oranda artacağı üreme.
- Büyüme hızını çevrenin teorik ‘taşıma kapasitesi’ni mevcut nüfustan daha az alarak elde edilen değere orantılı bir oranda azalacağı açlık (yoğunluktan kaynaklı ölüm) (Wikipedia).

2.1.2.2. Henon haritaları

Henon haritaları, Lojistik haritalardan farklı olarak iki boyutlu sistemleri kapsar. Henon denklemleri ile ifade edilir (Henon 1976):

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \alpha x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= \beta x_n \end{aligned} \quad (2.17)$$



Şekil 2.2. Henon haritalamada $\alpha = 1,4$ ve $\beta = 0,3$ için elde edilen grafik (Wolfram)

Henon haritaları, EKG şifreleme mimarisi gibi sistemlerde kullanılmaktadır (Gençoğlu 2018).

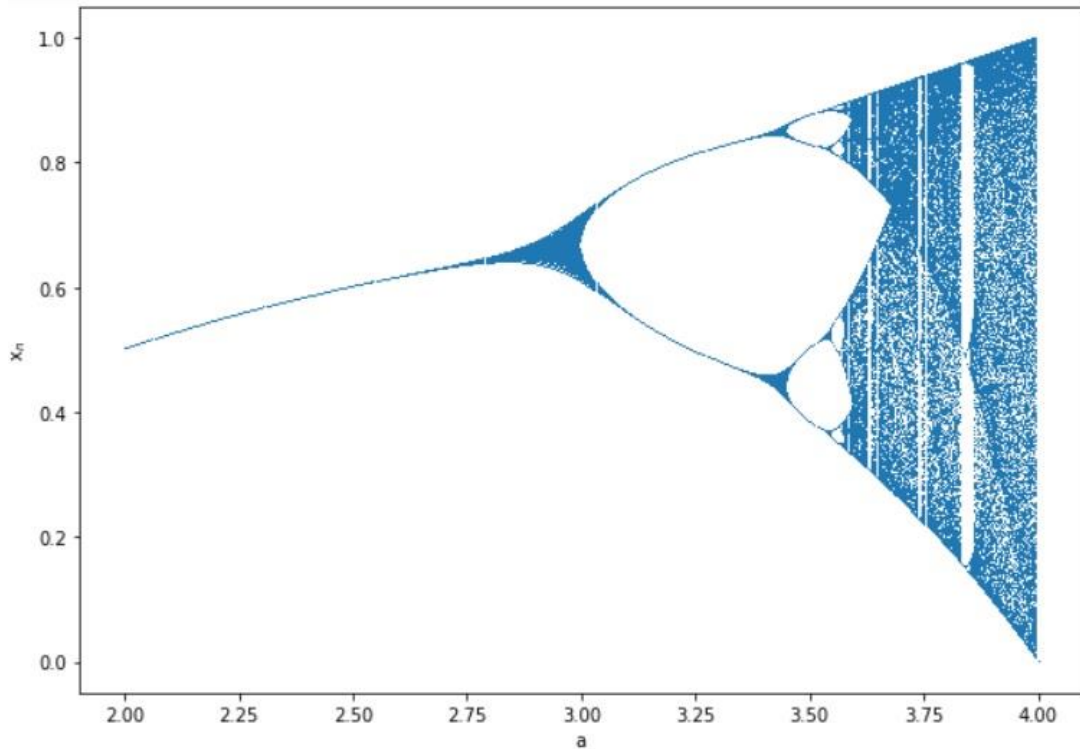
2.1.3. Yöntemler

Sistemlerin davranışlarının kaotik olup olmadığını incelemek için Bifurkasyon diyagramları, Cobweb diyagramları ve Lyapunov üstelleri kullanılabilir. Bu yöntemler aşağıda detaylı şekilde açıklanmıştır.

2.1.3.1. Bifurkasyon diyagramı

Dallanma diyagramı olarak da bilinen Bifurkasyon, bir diferansiyel denklem sisteminin çözümleri gibi belirli bir sistemin nitel yapısındaki değişikliklerin matematiksel olarak incelenmesidir. Bu incelemenin sonucunda elde edilen diyagram başlangıçta verilmiş sabit parametrenin küçük değişimlerinin tamamında sistemin davranışını (düzenli ve kaotik yapısını) net bir şekilde ortaya koymaktadır. Sonuç olarak parametre değişiminin hangi değerlerde sistemi kaotik davranışa götürdüğünü gösteren net bir harita oluşur. Sistem periyodik bölgeden kaotik bölgeye periyot katlanması veya çatallanma ile geçiş yapar. Bu çatallanma sistemin kararsız olması veya kararlı yapının yok olması sonucu oluşur (Tatlıpınar 2020). Bu sebeple dinamik sistemlerde kaotik yapıyı görmek için Bifurkasyon diyagramı önemlidir.

Bifurkasyon diyagramını elde etmek için, sistemin değiştirilecek olan parametresi küçük adımlarla artırılarak bir liste oluşturulur. Bu değerlerde fonksiyon değerleri aynı x değerleri için hesaplanır ve bu değerlerle grafik çizdirilir. Lojistik denklem için bifurkasyon diyagramı Şekil 2.3'te verilmiştir.



Şekil 2.3. Bifurkasyon diyagramı

Şekil 2.3'te a 'ya karşı çizilmiş $f_a(x)$ değerlerini görüyoruz. $a = 3$ değerine kadar lineer olan sistem düzenli yapı sergilemektedir. Bu değerden sonra dallanmalar başlar ve $a = 4$ 'e yakın değerlere ulaştığında sistem kaotikleşir.

2.1.3.2. Cobweb diyagramı

Cobweb diyagramı, verilen başlangıç değerine sistemin verdiği tepkiyi gösterir. Bifurkasyon diyagramından farklı olarak, seçilen uygun parametrenin farklı değerlerinin sadece bir tanesi için sistem davranışını gösterir. Popülasyon sistemi için lojistik denklem kullanılarak örnek bir Cobweb diyagramı oluşturmak istersek öncelikle yapılması gerekenler;

- Sistemin tanımlı ve anlamlı olduğu çözüm aralığının bulunması gerekir. Bunu fonksiyonun çözüm kümesi vermektedir. Denklem (2.16) genel fonksiyon olduğundan fonksiyonumuzu denklem (2.18) ile ifade edebiliriz.

$$f_a(x) = ax(1 - x) \quad (2.18)$$

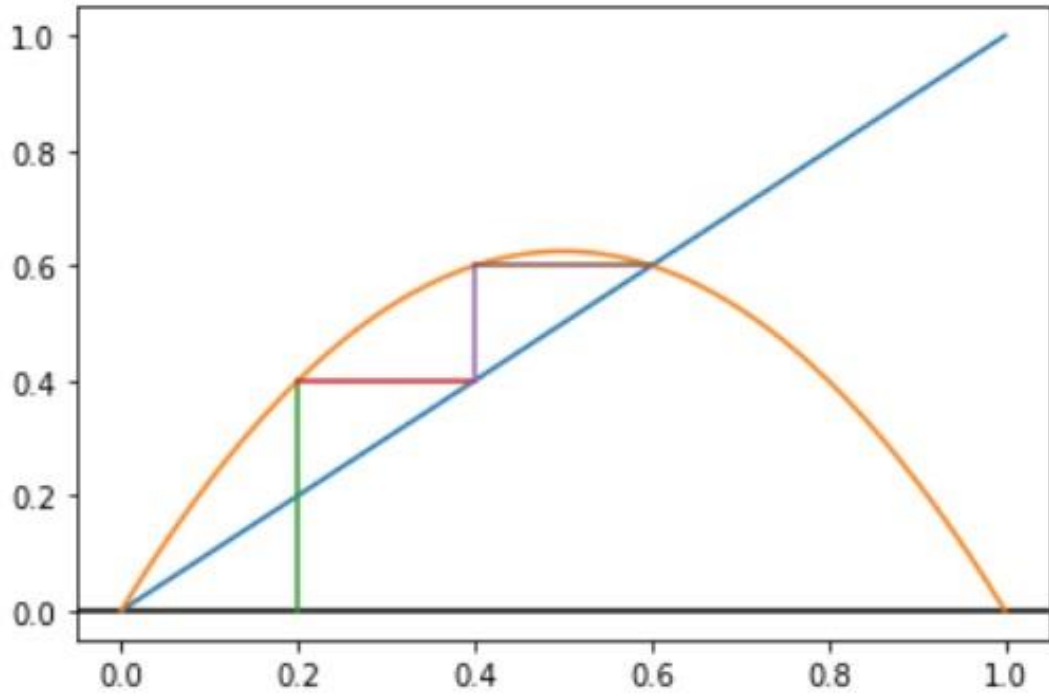
Çözüm kümesi için $f_a(x) = 0$ hesaplanmalıdır (Lok 2016). Buradan görülecektir ki x değerleri $[0, 1]$ aralığında alınmalıdır.

- Fonksiyonun 'sabit noktaları' nı bulmak için $f_a(x) = x$ denkleminin çözülmesi gerekir. Çözüldüğünde $p_0 = 0$ ve $p_1 = 1 - \frac{1}{a}$ elde edilir. Bu değerler bize grafiği yorumlamamıza yardımcı olur (Lok 2016). Örneğin $a = 2$ değeri için $p_1 = x^*$ ile ifade edersek $x^* = 0,5$ olacaktır. Belirlediğimiz a değeri için sabit nokta $0,5$ 'tir ve Cobweb diyagramında grafiğin sabitleneceği nokta x^* olacaktır.

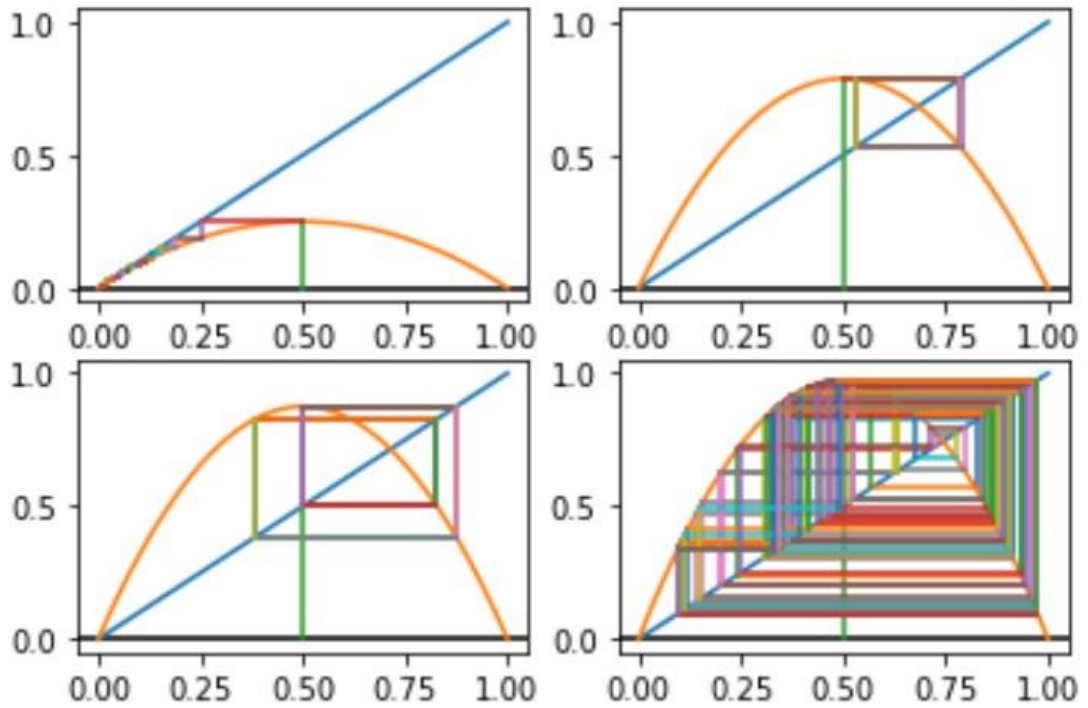
Bu işlemler yapıldıktan sonra bir x_0 başlangıç değeri verilir ve türetme fonksiyonu kullanılarak iterasyonlar yapılır. Türetme fonksiyonu denklem (2.19)'da verilmiştir.

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad (2.19)$$

x_{n+1} ve x_n listeleri oluşturularak grafik oluşturulur. Şekil 2.4'te görüldüğü gibi x 'in $[0,1]$ değerleri arasında $f_a(x)$ fonksiyonuna karşı grafiği ve $a = 2,5$ değeri ile beklendiği gibi $x^* = 0,6$ 'ya gittiği görülmektedir.



Şekil 2.4. $x_0 = 0,2$ başlangıç değeri ve $a = 2,5$ için Cobweb diyagramı



Şekil 2.5. Başlangıç değeri $x_0 = 0,5$ alınarak farklı a değerleri için Cobweb diyagramı

Şekil 2.5'te sol üst köşedeki grafikte $a = 1$ olduğunda $x^* = 0$ olmaktadır. Tek değere gittiği bu grafikte görünmektedir. Sağ üst grafikte $a = 3,15$ değerinde fonksiyonu

kesen iki değer olduğu görülmektedir. Yani ilk dallanma bu değerde oluşacaktır. Sağ alt grafikte $a = 3,5$ olduğunda ise ikinci dallanmanın meydana geldiği yani 4 farklı değere gittiği görülmektedir. Sistemin kaotikliğe doğru gittiği sonucunu çıkarabiliriz. Sağ alt grafik ise $a = 3,9$ değerinde anlaşıldığı gibi sistemde kaos olduğunu göstermektedir.

2.1.3.3. Lyapunov üstelleri

Bir sistemin kaotik davranış gösterip göstermeyeceğini incelemek için kullanılan yöntemlerden biri de Lyapunov üstelleridir. Yöntem bir başlangıç değerinde aralarında belli bir mesafe bulunan faz yörüngelerinin sistemin evrimi sırasında birbirinden ne kadar uzaklaşacağını ölçülmesine dayanan eksponansiyel bir üsteldir (Tatlıpınar 2020). Rus matematikçi A. M. Lyapunov tarafından lineer olmayan diferansiyel denklemlerin kararlılığını incelemek için geliştirilmiştir (Wolf vd. 1985).

Faz uzayının farklı yönelimleri için ayrılma miktarı farklılık göstermektedir. Neticede, faz uzayının boyutu miktarınca Lyapunov üstelinden oluşan bir spektrum elde edilir. Pozitif bir üstel başlangıçta birbirine yakın olan yörüngelerin zamanla uzaklaştığı anlamına gelir. Ayrıca pozitif üstelin büyüklüğü yörüngeleri ne kadar hızlı oranda birbirinden uzaklaştığını belirtir. Benzer şekilde üstelin negatif olması da yörüngelerin birbirine zamanla yaklaştığı anlamına gelir (Bayraktar vd. 2017).

Lyapunov üstellerini hesaplamak için bir başlangıç değeri seçilir. Bu değer x_0 olsun ve x_0 'ı çok küçük ε kadar arttıralım. Bu durumda ikinci yörüngenin başlangıç koşulu $x_0 + \varepsilon$ 'dur. n tane iterasyon yaparsak n iterasyon sonrasında fark $f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)$ ve bağıl hata $\frac{f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)}{\varepsilon}$ olacaktır. Eğer sistem periyodik hareket eden düzenli bir yapıdaysa bu fark çok küçük olacak, eğer sistem kaotik davranış sergiliyorsa n iterasyon sonrasında hata çok büyük olacaktır. Bu yörüngeleri birbirine çok yaklaştırdığımızda yani ε 'u sifıra götürdüğümüzde limit almamız gerekir; $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)}{\varepsilon} \right)$. Aslında bu limit değeri f^n 'in x_0 noktasındaki türevine eşittir; $\left(\frac{d}{dx} f^n(x) \right)_{x=x_0}$. Ayrıca n sayıda iterasyonun $f^n(x_0) = f^{n-1}(f(x_0)) = f^{n-1}(x_1)$ olarak ifade edilebildiğini biliyoruz. Zincir kuralını uygularsak;

$$\left(\frac{d}{dx} f^n(x) \right)_{x=x_0} = f'(x_{n-1}) f'(x_{n-2}) \cdots f'(x_0) \quad (2.20)$$

elde ederiz. Denklem (2.20) bize büyüme faktörünü verir. Büyüme faktörü 1'den küçükse daralmayı, 1'den büyükse genişlemeyi gösterir.

Ortalama eksponansiyel büyüme faktörü n iterasyonda;

$$\lambda = \frac{1}{n} (\ln|f'(x_{n-1})| + \cdots + \ln|f'(x_0)|) \quad (2.21)$$

elde edilir. Burada λ , Lyapunov üstelidir. Bu ifadede $n \rightarrow \infty$ için düzenlersek;

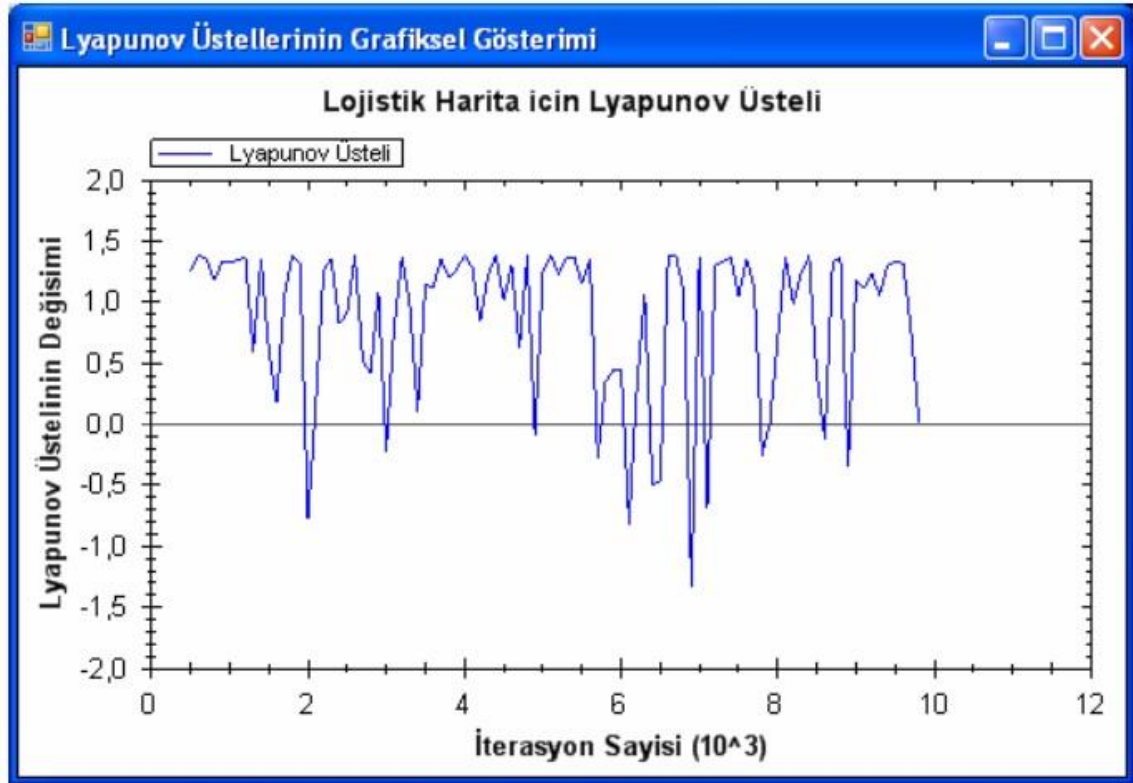
$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (2.22)$$

olarak buluruz. Elde edilen λ 'lar kaosu ölçmek için kullanılır. Eğer;

- $\lambda > 0$, $\{x_n\}$ kaotik davranış gösterir.
- $\lambda < 0$, $\{x_n\}$ periyodik davranış gösterir.
- $\lambda = 0$, a bifurkasyon oluşur (Lok 2016).

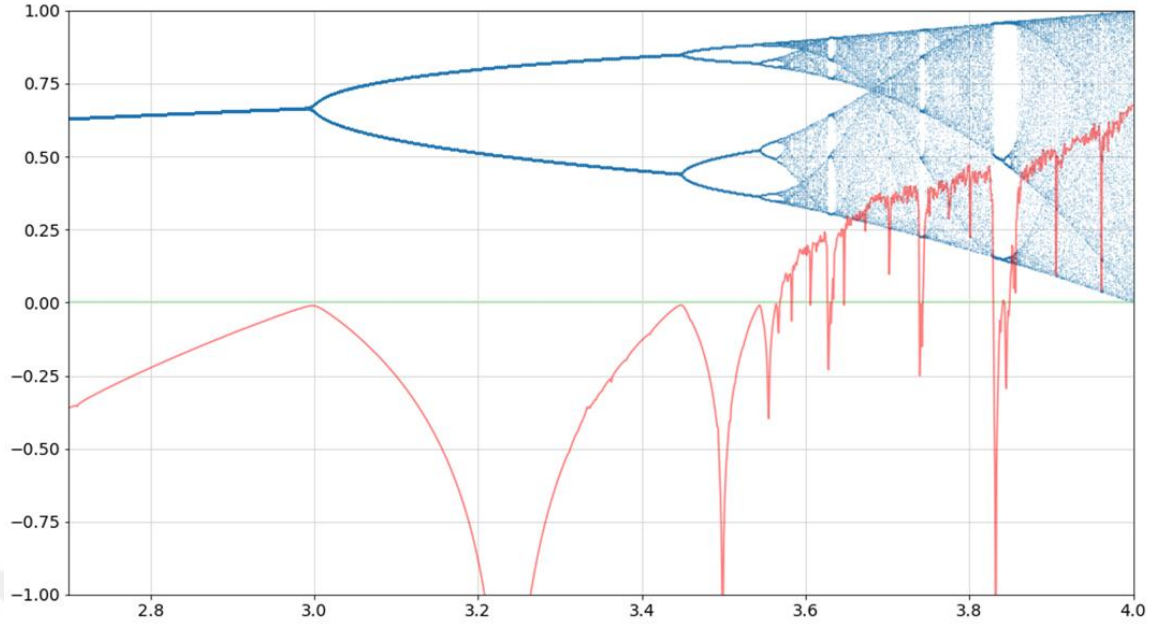
Lyapunov üstellerini hesapladıktan sonra grafiğini oluşturmak için, Lyapunov üstellerinin olduğu ortalama 500 iterasyonluk bir data hazırlanır. Sonra parametre değeri değiştirilir ve hesaplama aynı başlangıç koşulları ile yeniden hesaplanır ve kaydedilir. Yeni bir dosya içinde Lyapunov üstelleri yeni parametre setinden hesaplanır. Parametre değerlerinin istenilen sayısı için Lyapunov üstelleri kaydedildikten sonra data dosyası analiz edilir. Her bir set için ilk birkaç tahmin ayıklanır çünkü bunlar sistemin düzene girmeden önceki değerleridir ve yanlış bilgi veren değerlerdir. Kalan Lyapunov değerleri ile grafik çizdirilir (Özkaynak 2007).

Şekil 2.6'da lojistik harita için örnek Lyapunov üsteli grafiği verilmiştir. Lojistik denklemdaki a değeri, $a = 4$ alınarak hesaplanmıştır.



Şekil 2.6. Lyapunov üstelleri grafiği (Özkaynak 2007)

Grafiği daha iyi anlayabilmek için Şekil 2.7'de Lyapunov ve bifurkasyon grafiklerinin bir arada verilmiştir.

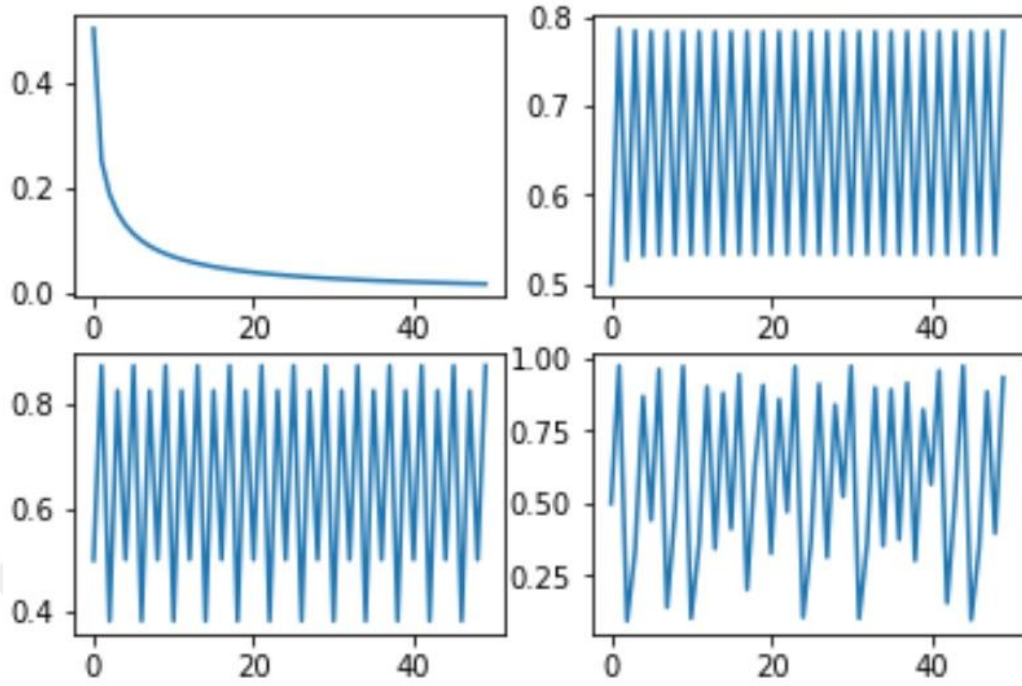


Şekil 2.7. Lyapunov üstelleri ve Bifurkasyon diyagramı

Şekil 2.7’de Bifurkasyon diyagramındaki dallanma noktaların Lyapunov üstellerinde belirtildiği gibi $\lambda = 0$ olduğu noktalara karşılık geldiği görülmektedir. Üstellerin negatif değerleri periyodik bölgeyle örtüşmekte ve pozitif değerleri kaotik bölge üzerindedir.

2.1.3.4. Zaman serisi

Zaman serisi, Cobweb diyagramları gibi verilen tek bir koşulun sistemde oluşturduğu düzenli ya da kaotik yapıyı gösteren yöntemlerden biridir. Çalışılan sistemde zamanla değişim gösteren parametrelerden herhangi biri alınarak belirli aralıklarla ölçülür veya hesaplanır. Bu hesaplanmış parametreye karşı zaman aralıkları ya da ölçüm sayıları çizdirildiğinde zaman serisi grafiğini verir. Popülasyon için zaman serisi grafiği elde etmek istersek uygun parametre x_n ya da x_{n+1} olmalıdır. Şekil 2.8’de popülasyon için örnek zaman serisi grafikleri görülmektedir. Bu grafikler daha önce verilmiş olan Cobweb diyagram örneği ile aynı a ve x_0 başlangıç koşullarıyla elde edilmiştir.



Şekil 2.8. Başlangıç değeri $x_0 = 0,5$ alınarak farklı a değerleri için zaman serisi (x_n 'e karşı n) grafiği

Şekil 2.8'de denklem (2.19) kullanılarak türetilen 50 iterasyonluk x_n için sol üst köşedeki grafikte $a = 1$ alınmıştır ve popülasyonun tek değere (sıfıra) gittiği görülmüştür. Bu koşulda popülasyonun zamanla ölererek yok olduğu görülmektedir. Sağ üst grafikte $a = 3,15$ değerinde olup popülasyon iki değer arasında değişmektedir. Sağ alt grafikte $a = 3,5$ alındığında popülasyon dört değer arasında değişmekte henüz kaotik durum göstermemektedir. Sağ alt grafikte ise $a = 3,9$ değerinde popülasyon belirli bir düzen olmaksızın değişim göstermektedir.

2.2. Kaynak Taraması

Andrzej Okninski 2009 yılında, periyodik hareket eden bir plaka üzerindeki topun dinamiğini Poincare ve Bifurkasyon diyagramlarıyla çalışmıştır (Okninski 2009).

Wil Ward 2013 yılında, titreşen bir plaka üzerinde zıplayan top sistemini farklı titreşimler için çalışmıştır. Dalga denklemlerini sinüs, kosinüs, testere dişli, üçgen dalga vs. alarak top yörüngesinde oluşan değişiklikleri incelemiş ve yorumlamıştır. Matlab kullanarak yaptığı hesaplamalarda ikinci bir plaka ekleyerek top ve masa yörüngelerini elde etmiş, sistem davranışını yorumlamıştır (Ward 2013).

Hong Han 2013 yılında, plastik bir topun titreşen plaka üzerindeki hareketini hava sürtünme etkisiyle incelemiştir. Bifurkasyon diyagramında daha geniş çizgiler elde etmiş ve Lyapunov kararlılık eğrisinde de benzer şekilde geniş aralıkta değerler gözlemiştir. Araştırmasının sonucunda böyle bir sistemin hep kaotik davrandığı sonucuna ulaşmıştır (Han 2013).

J. Y. Chasting 2015 yılında, deneysel bir çalışma ile zıplayan top modelini sinüzoidal titreşimli bir plaka ile oluşturmuştur. Cihazla yaptığı çalışmada çarpma parametresi değer aralığını elde etmiş, topun kaotik davranışındaki ortalama enerjiyi teorik olarak tartışmıştır (Chasting 2015).

Kristel Lok 2016 yılında, dinamik sistemlerde kaosu ölçmek için iki metot üzerinde çalışmıştır ve kıyaslamasını yapmıştır. Lojistik denklem kullanarak Lyapunov eksponansiyeli ve 0-1 testinin yorumlamalarını yapmıştır (Lok 2016).

Marton Gruiz 2017 yılında, dikdörtgen merdivenden aşağı doğru zıplayan küçük elastik bir topun dinamiğini, kaosu oluşup oluşmadığını araştırmıştır. Yaptığı çalışma sonucu kaosu bu sistemde olmadığını göstermiştir (Gruiz 2017).

L. Demeio 2018 yılında, topun esnek bir zemin üzerinde zıplamasını incelemiştir. Hareketin grafiklerini elde etmiş ve başlangıç koşullarındaki küçük değişimlerin dinamik sistem üzerindeki etkisine vurgu yapmıştır. Bu çalışmada topun başlangıç hızının ve plaka top kütle oranını da araştırmıştır (Demeio 2018).

3. MATERYAL VE METOT

Kaos, dinamik bir sistemin herhangi bir dış etki olmaksızın başlangıç koşullarındaki küçük değişimlerden etkilenecek düzenli davranışını zaman içinde değiştirmesine geçmiş hareketini tekrar etmemesi durumuna denir. Zıplayan top sisteminde oluşabilecek kaotik davranışın belirlenmesi ve incelenmesi için yapmış olduğumuz hesaplamalar sistemi tanımlayan denklemlerle nümerik hesapların birleştirilmesi şeklindedir. Veriler Python 3 kullanılarak elde edilmiştir.

3.1. Zıplayan Top Modelinin Matematiksel Olarak Tanımlanması

Sınırlayıcının hareket denklemini tanımlarken negatif değer almasını engellenmek ve topun sınırlayıcı altında geçmesi gibi bir sorun oluştuğunda yakalamak amacıyla sınırlayıcı denklemi (3.1) bağıntısındaki gibi düzenlenmiştir.

$$y_t(t) = A[\sin(wt + \delta_0) + 1]/2 \quad (3.1)$$

Burada A sınırlayıcının genliği, w titreşim frekansı ve δ_0 başlangıçta verilmiş olan faz farkıdır. Buna göre, sınırlayıcının hız ve ivme bağıntıları kolaylıkla elde edilebilir:

$$v_t(t) = wA[\cos(wt + \delta_0)]/2 \quad (3.2)$$

$$a_t(t) = -w^2A[\sin(wt + \delta_0)]/2 \quad (3.3)$$

$$y_b(t) = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2, \quad v_b(t) = v_0 - gt \quad (3.4)$$

Topun hareketi (3.4) denklemi ile ifade edilmiş olup g yerçekimi ivmesi, y_0 topun başlangıç düşey yüksekliği, v_0 ise topun başlangıçta verilen ilk hızıdır.

Çarpma noktalarında topun ve sınırlayıcının konumları aynı olacağından $y_b(t) = y_t(t)$ ile, çarpma sonrası topun hızı ise v_{ks} :

$$v_{ks} = -\alpha v_k \quad (3.5)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada α çarpma parametresi ($0 \leq \alpha \leq 1$), v_k ise sınırlayıcıya çarpma hızıdır. Çarpma sonrasında sınırlayıcının topa sağlayacağı katkı sebebiyle ek terim alması gerekir. Böylece topun sınırlayıcıdan ayrılma hızı ‘etki ilişkisi’ olarak bilinen denklem (3.6) her çarpma noktası için hesaplanmıştır.

$$v_k = (1 + \alpha)v_t - \alpha v_b \quad (3.6)$$

Burada v_t sınırlayıcının yere göre hızı ve v_b topun çarpma öncesi hızıdır.

Bir önceki bölümde de açıklandığı üzere bu noktadan itibaren analitik çözüm yapmak zordur. Elde edilen denklem transandantal denklem olduğu için nümerik çözümlerle devam etmek gerekir. Hesaplamaları yapmak için yazdığımız kod EKLER bölümünde bulunmaktadır.

3.2. Bifurkasyon (Dallanma Haritası)

Lojistik denklemde popülasyon için sabit parametre olan a değerine karşı x_n değerleri ile Bifurkasyon diyagramını elde etmiştik. Bizim sistemimizde lojistik denklemden farklı olarak değiştirilebilecek üç farklı parametre bulunmaktadır. Bunlar çarpma parametresi olan α , faz farkı değeri δ_0 ve A genliğidir. Yani zıplayan top sisteminde, lojistik denklemdeki a parametresine karşılık gelen parametreler bunlardır. Bifurkasyon diyagramını elde edebilmek için bu değerlerden bir tanesi seçilip diğerleri sabit tutulmalıdır. x_n 'lere karşılık gelecek olan değer ise ya çarpma noktaları olmalıdır ya da çarpma hızları. Biz Bifurkasyon diyagramı oluşturmak için genlik parametresini ve çarpma noktalarının konum değerlerini seçtik. Bunu belirledikten sonra her bir genlik değeri için iterasyonları yapıp grafiği elde ettik. Ancak bu işlemlerden sonra oldukça kirli bir grafik elde edilmektedir. Kirliliğin giderilmesi için filtreleme yapmak ve net grafiği ortaya çıkarmak sistemin durumunu açıkça görebilmek için önemlidir. Oluşan kirliliğin sebebi grafikte gözlenen fazladan noktalardır ve bunlar aslında sistemin dengelenmesi için geçen sürede oluşan çarpma noktalarıdır. Yani bu noktalar bize gerçek bilgiyi vermeyeceği için filtreleme için ilk birkaç değeri oluşturduğumuz listeden çıkarmanın bir sakıncası yoktur.

3.3. Zaman Serisi

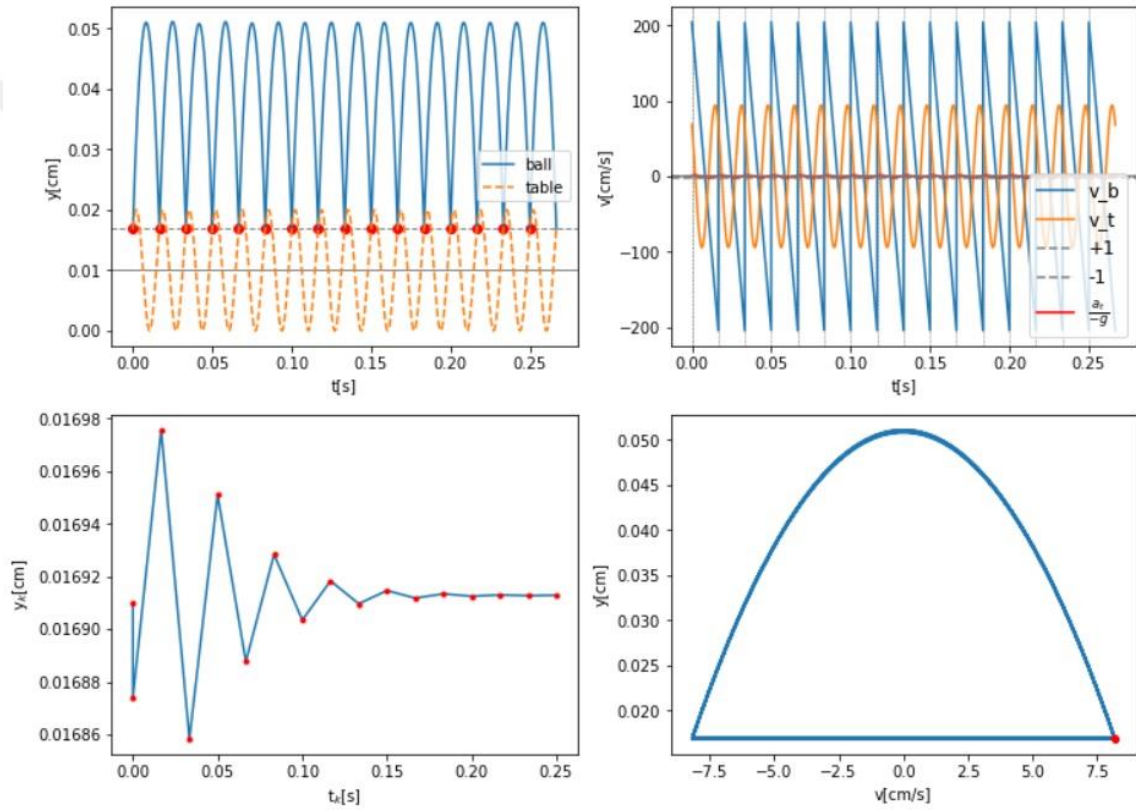
Popülasyon için zaman serisi bir önceki bölümde açıklanmış x_n 'e karşı n ile elde edilmişti. Zaman serisi top sistemi için düşünüldüğünde x_n değerlerine karşılık y_k çarpma noktaları, n 'lere karşılık t_k çarpma süreleri gelebilir. Bu parametreler değiştirilebilir. Örneğin t_k yerine çarpma sayısı ya da y_k yerine v_k yazılırsa da aynı sonucu verecektir. Bu çalışmada zaman serilerini elde etmek için y_k 'ya karşı t_k değerleri hesaplanmıştır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bir önceki bölümde sistem için tanımlanan hareket denklemleri ve Çizelge 4.1’de belirtilen parametrelerin başlangıç değerleri kullanılarak, hesaplanmış sonuçlar Çizelge 4.2’de verilmiştir. Şekil 4.1 bu veri setleriyle elde ettiğimiz grafiklerdir.

Çizelge 4.1. Sistemin başlangıç ve karakteristik parametreleri

y_0 (cm)	v_0 (cm/s)	α	A (cm)	f (Hz)	$\delta_0/2\pi$
0,016910	8,17500	0,5	0,0200	60	0,120

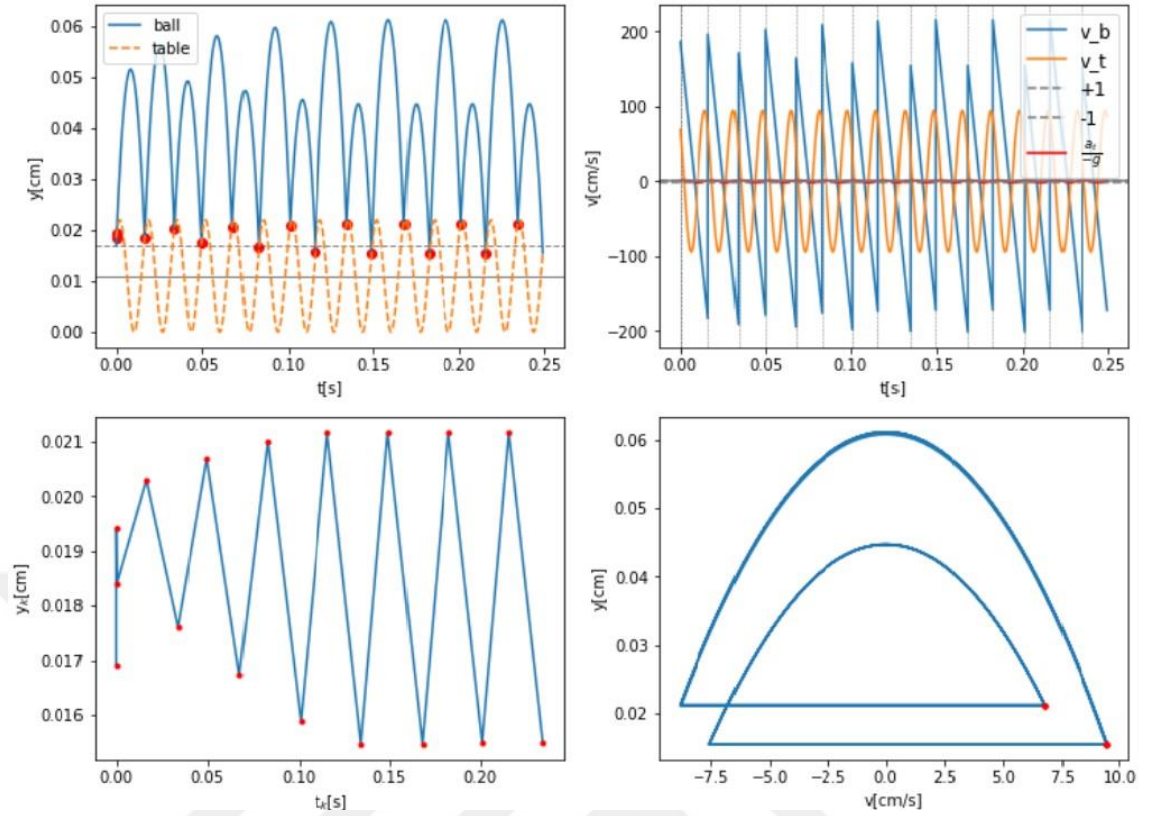


Şekil 4.1. Topun ve sınırlayıcının konum-zaman (sol üst), hız-zaman (sağ üst), çarpma noktalarının konumuna karşı çarpma zamanları (sol alt) ve faz uzayı grafikleri

Şekil 4.1’de konum-zaman grafiğinde topun hareketi mavi, masanın yörüngesi sarı çizgi ile kırmızı noktalar ise top ve masanın çarpıştığı noktaları göstermektedir. Bütün çarpma noktaları aynı hızda görünse de sol altta bulunan zaman serisi grafiği farklılıkları tam olarak görmemizi sağlar ve hareketin ne kadar düzenli davrandığını anlamamız için gereklidir. Çizelge 4.1’de verilen A genliğinde sistemin periyodik davranış sergilediğini söyleyebiliriz. Sağ altta bulunan faz uzayı grafiğinin hep aynı yörünge üzerinde döndüğünü göstermesi bu düzenli yapıyı desteklemektedir. Çizelge 4.2’de aynı başlangıç değerleriyle elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Çizelge 4.2. $A = 0,0200$ değeri için zıplayan top sisteminde topun sınırlayıcıya çarpma süreleri (t_k), her çarpma arası geçen süre (dt_k), masanın faz parametresi (δ_0), çarpma anında konum değeri (y_k), çarpma hızı (v_k), masanın çarpma anındaki hızı (v_{tk}) ve topun çarpma anındaki hızı (v_{bk}) $N_k = 15$ zıplama sayısı için elde edilen değerler

N_k	t_k (s)	dt_k (s)	$\delta_0/2\pi$	y_k (cm)	v_k (cm/s)	v_{tk} (cm/s)	v_{bk} (cm/s)
0	0,0000000000	0,0000000000	0,1200200000	0,0169100000	8,1750000000	2,7478226618	5,4271773382
1	0,0166767553	0,0166767553	0,1206253201	0,0168740593	8,1966345736	2,7379862924	4,0896551351
2	0,0333808199	0,0167040646	0,1228691936	0,0169757677	8,1439973248	2,7011792509	4,0922284485
3	0,0500043572	0,0166235373	0,1202814339	0,0168583507	8,1944308565	2,7435792649	4,0790619592
4	0,0667050233	0,0167006661	0,1223213969	0,0169510648	8,1569860657	2,7102147719	4,0916639079
5	0,0833484094	0,0166433861	0,1209245632	0,0168877026	8,1819635760	2,7331089946	4,0823000842
6	0,1000299984	0,0166815890	0,1218199042	0,0169283778	8,1662310474	2,7184583924	4,0885434587
7	0,1166875227	0,0166575243	0,1212713611	0,0169034835	8,1757767880	2,7274445245	4,0846100012
8	0,1333596477	0,0166721250	0,1215988600	0,0169183561	8,1701214111	2,7220833883	4,0869963286
9	0,1500231223	0,0166634746	0,1214073357	0,0169096620	8,1734124963	2,7252200302	4,0855824511
10	0,1666916308	0,0166685085	0,1215178476	0,0169146798	8,1715211560	2,7234106294	4,0864052120
11	0,1833572464	0,0166656156	0,1214547825	0,0169118168	8,1725973979	2,7244433494	4,0859323737
12	0,2000245081	0,0166672618	0,1214904887	0,0169134379	8,1719894777	2,7238586963	4,0862014332
13	0,2166908401	0,0166663319	0,1214704034	0,0169125260	8,1723308380	2,7241875901	4,0860494529
14	0,2333576941	0,0166668540	0,1214816462	0,0169130365	8,1721400378	2,7240034966	4,0861347929
15	0,2500242563	0,0166665622	0,1214753784	0,0169127519	8,1722462865	2,7241061292	4,0860870928

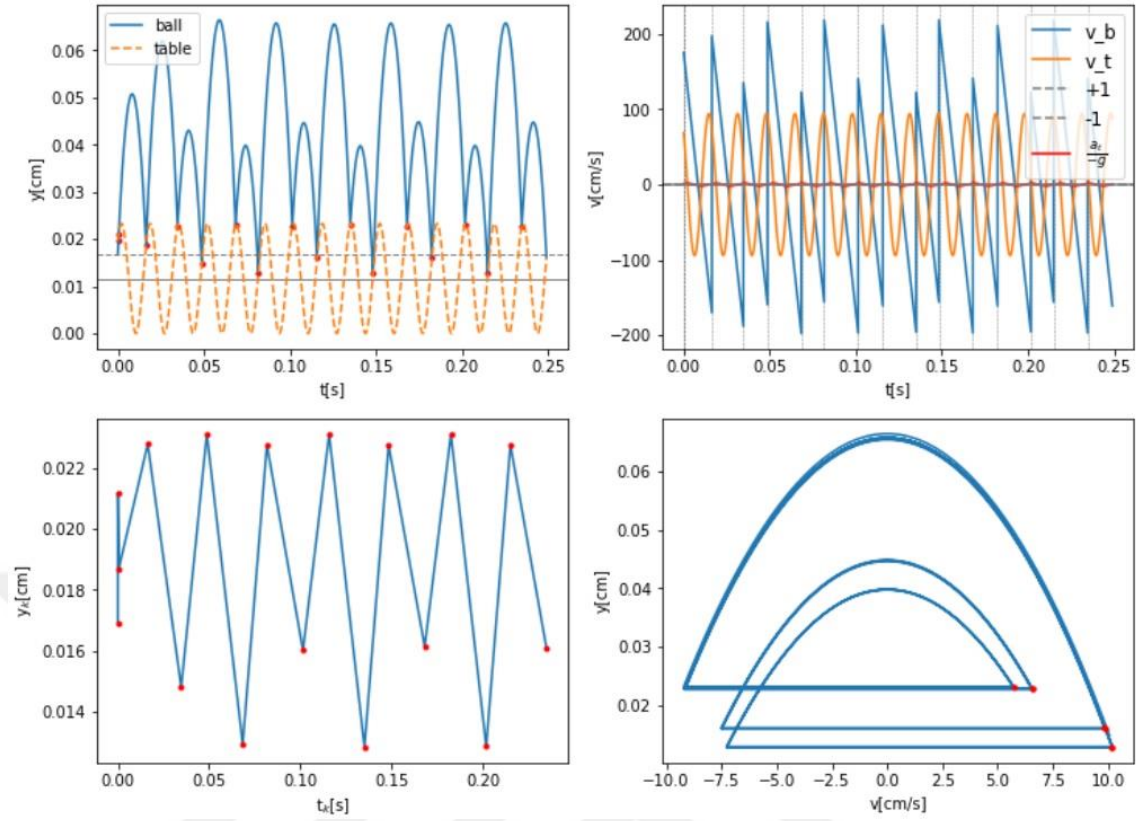


Şekil 4.2. $A = 0,0220$ için topun ve sınırlayıcının konum-zaman (sol üst), hız-zaman (sağ üst), çarpma noktalarının konumuna karşı çarpma zamanları (sol alt) ve faz uzayı grafikleri

Şekil 4.2’de bütün başlangıç değerleri sabit tutularak sadece genlik değerini arttırarak elde ettiğimiz grafikler bulunmaktadır. İlk grafiğe baktığımızda sistem dengeye geldikten sonra top iki farklı yörüngeyi tekrarlayarak hareketini sürdürmektedir. Zaman serisi grafiğinde çarpma noktalarının iki değer arasında gelip gittiğini daha net görmekteyiz. Bu genlik değerinde aslında ilk dallanmanın gerçekleştiğini söyleyebiliriz. Çizelge 4.3’te elde edilen sonuçlar incelendiğinde sekizinci çarpmadan itibaren her parametrenin iki değer arasında değiştiği açık bir şekilde görülmektedir.

Çizelge 4.3. $A = 0,0220$ değeri için zıplayan top sisteminde topun sınırlayıcıya çarpma süreleri (t_k), her çarpma arası geçen süre (dt_k), masanın faz parametresi (δ_0), çarpma anında konum değeri (y_k), çarpma hızı (v_k), masanın çarpma anındaki hızı (v_{tk}) ve topun çarpma anındaki hızı (v_{bk}) $N_k = 15$ zıplama sayısı için elde edilen değerler

N_k	t_k (s)	dt_k (s)	$\delta_0/2\pi$	y_k (cm)	v_k (cm/s)	v_{tk} (cm/s)	v_{bk} (cm/s)
0	0,0000000000	0,0000000000	0,1200200000	0,0169100000	8,1750000000	3,0226049280	5,1523950720
1	0,0003133463	0,0003133463	0,1388207771	0,0194234621	7,9342611478	2,6669366768	3,9338561327
2	0,0166229721	0,0163096258	0,1173983234	0,0183979385	8,6334493803	3,0689602503	4,0300090048
3	0,0340067690	0,0173837969	0,1604261376	0,0203033553	7,5260737418	2,2126385577	4,2071159052
4	0,0497067793	0,0157000103	0,1024267585	0,0176005737	8,9112278828	3,3173596199	3,9351884530
5	0,0675267183	0,0178199390	0,1716230994	0,0206929147	7,2230146320	1,9606222175	4,2820813057
6	0,0827869318	0,0152602134	0,0872359051	0,0167319131	9,1801802913	3,5394060043	3,8710712848
7	0,1010312683	0,0182443365	0,1818960960	0,0210081878	6,9369589053	1,7208386110	4,3557009889
8	0,1158838048	0,0148525365	0,0730482851	0,0158733326	9,3907902519	3,7177255724	3,8142018933
9	0,1344553069	0,0185715021	0,1873384115	0,0211583957	6,7970756432	1,5908398086	4,4108159302
10	0,1491093377	0,0146540308	0,0665802620	0,0154686468	9,4707581151	3,7892989061	3,7868097559
11	0,1678013265	0,0186919888	0,1880995875	0,0211784613	6,7886696427	1,5725060812	4,4299105208
12	0,1824420541	0,0146407276	0,0665432463	0,0154663090	9,4690256837	3,7896906110	3,7844897672
13	0,2011308088	0,0186887547	0,1878685262	0,0211723948	6,7963038407	1,5780752569	4,4291909554
14	0,2157821308	0,0146513220	0,0669478486	0,0154918498	9,4639643422	3,7853979323	3,7858674437
15	0,2344632507	0,0186811199	0,1878150407	0,0211709875	6,7970239217	1,5793639234	4,4279780365

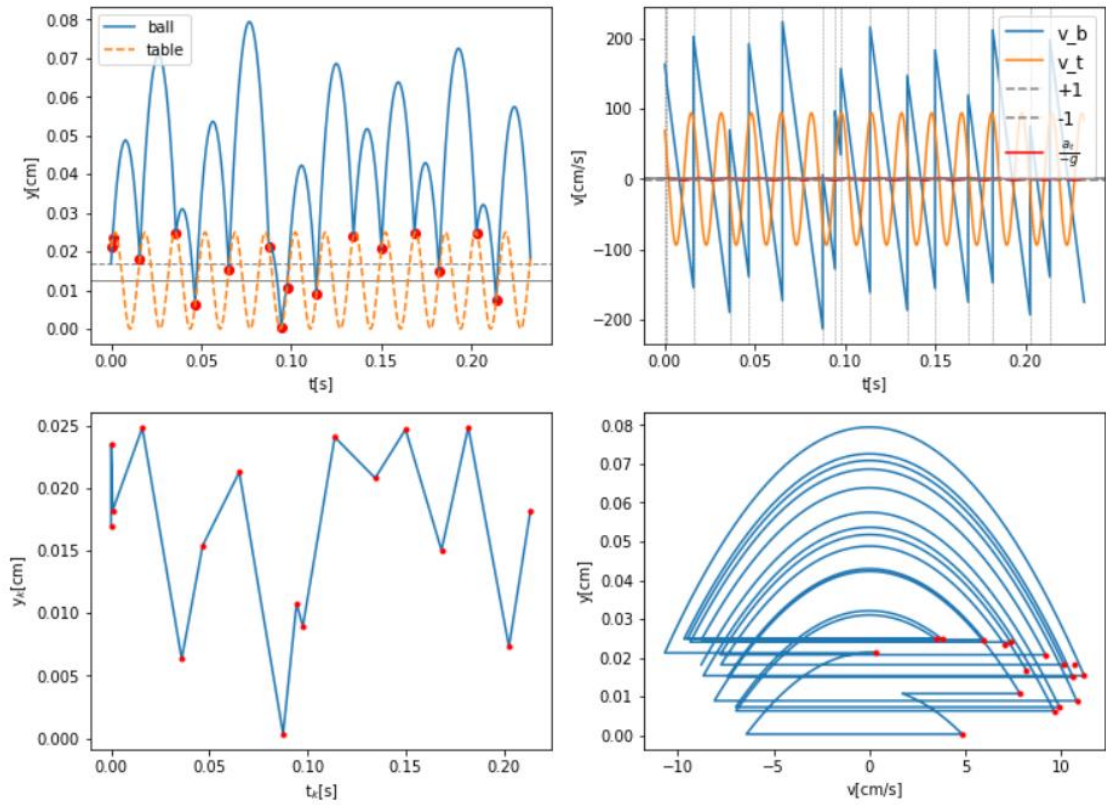


Şekil 4.3. $A = 0,0233$ için topun ve sınırlayıcının konum-zaman (sol üst), hız-zaman (sağ üst), çarpma noktalarının konumuna karşı çarpma zamanları (sol alt) ve faz uzayı grafikleri

Şekil 4.3'te genlik değeri biraz daha arttırıldığında topun hareketi farklı yörüngeler çizse de düzenlidir. Zaman serisinden de anlaşılacağı gibi sistem dört farklı değerde değişmektedir. Buradan sistemin 2. dallanmaya geçtiğini anlayabiliriz. Sistemin yapısı bu durumda kaotik değildir fakat kaotikliğe doğru gittiği açıkça görülmektedir. Sistemin kararlı yapısı kararsızlaşmaya başlamıştır. Genliğin daha da arttırıldığı durumda sistemin yapısı düzensizleşecek ve kaos oluşacak öngörüsünü yapabiliriz. Çizelge 4.4 incelendiğinde sayısal verilerin de dört değer arasında değiştiği görülmektedir. Sistem 2. dallanma bölgesinde olduğundan bu durum beklendiği gibidir.

Çizelge 4.4. $A = 0,0233$ değeri için zıplayan top sisteminde topun sınırlayıcıya çarpma süreleri (t_k), her çarpma arası geçen süre (dt_k), masanın faz parametresi (δ_0), çarpma anında konum değeri (y_k), çarpma hızı (v_k), masanın çarpma anındaki hızı (v_{tk}) ve topun çarpma anındaki hızı (v_{bk}) $N_k = 15$ zıplama sayısı için elde edilen değerler

N_k	t_k (s)	dt_k (s)	$\delta_0/2\pi$	y_k (cm)	v_k (cm/s)	v_{tk} (cm/s)	v_{bk} (cm/s)
0	0,0000000000	0,0000000000	0,1200200000	0,0169100000	8,1750000000	3,2012134010	4,9737865990
1	0,0005393272	0,0005393272	0,1523796348	0,0211763753	7,6152139807	2,5281091053	3,8230503227
2	0,0163892118	0,0158498846	0,1033727107	0,0186958754	9,2105961355	3,4976597242	3,9641065492
3	0,0347172652	0,0183280533	0,2030559111	0,0227968858	6,2966508001	1,2767391021	4,3815421470
4	0,0487242487	0,0140069835	0,0434749219	0,0147928970	10,0634129885	4,2291060967	3,7197538434
5	0,0683827172	0,0196584685	0,2229830322	0,0231325498	5,7204329669	0,7419689685	4,6074795141
6	0,0816224659	0,0132397487	0,0173679546	0,0129187971	10,1803951814	4,3658217216	3,6316625991
7	0,1013666609	0,0197441950	0,2020196557	0,0227745992	6,5471321244	1,3040728075	4,5910229132
8	0,1156831369	0,0143164759	0,0610082121	0,0160071822	9,8560745344	4,0732047719	3,7462673765
9	0,1350341911	0,0193510542	0,2220714670	0,0231210889	5,7105387204	0,7667501206	4,5604135395
10	0,1482674007	0,0132332096	0,0160640439	0,0128238782	10,1877943058	4,3695939415	3,6334033936
11	0,1680191959	0,0197517952	0,2011717562	0,0227560128	6,5806456279	1,3263971053	4,5910499699
12	0,1823805961	0,0143614002	0,0628557683	0,0161323104	9,8323319746	4,0538623499	3,7515384498
13	0,2016954752	0,0193148791	0,2217485129	0,0231169383	5,7178325424	0,7755237231	4,5545469578
14	0,2149386463	0,0132431711	0,0163387766	0,0128438843	10,1878761801	4,3688235179	3,6346409032
15	0,2346919239	0,0197532776	0,2015354334	0,0227640234	6,5669755701	1,3168264429	4,5917359058



Şekil 4.4. $A = 0,0250$ için topun ve sınırlayıcının konum-zaman (sol üst), hız-zaman (sağ üst), çarpma noktalarının konumuna karşı çarpma zamanları (sol alt) ve faz uzayı grafikleri

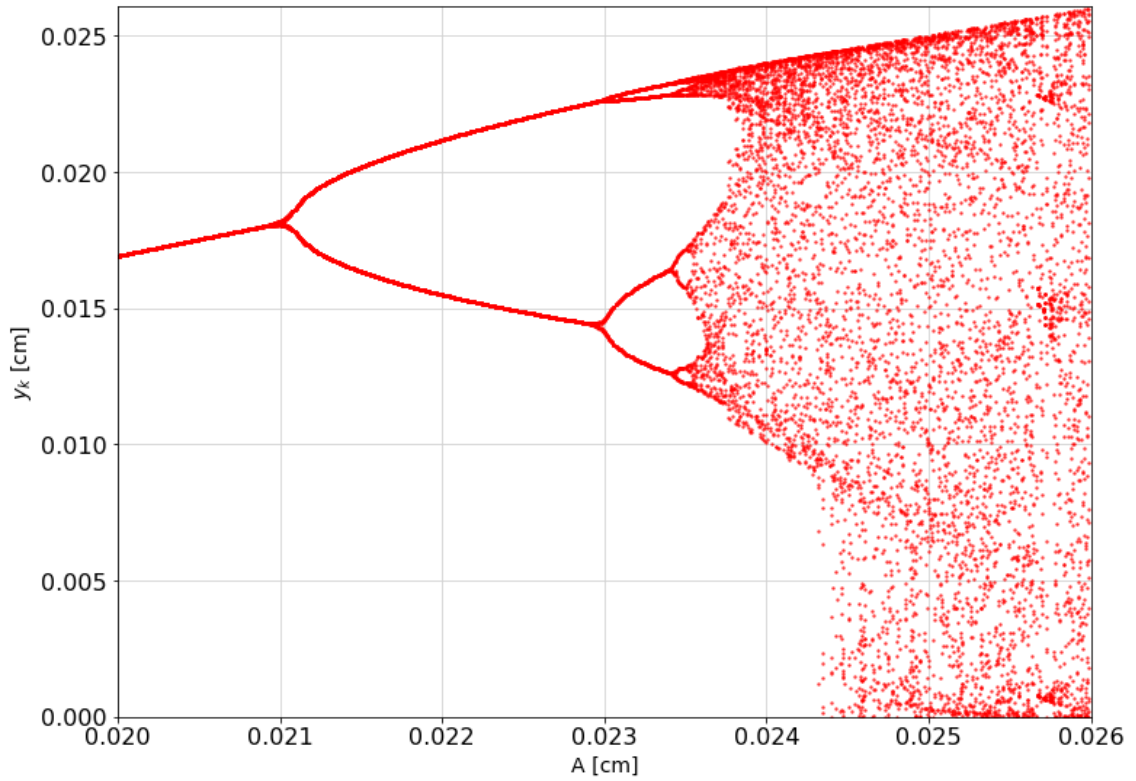
Şekil 4.4'teki grafiklerde verilen genlik değerinde, sabit titreşen sınırlayıcı üzerinde topun her zıplamada farklı bir yörüngeyi izlediği gözlenmektedir. İlk grafikte yapışkan bölgenin varlığı net bir şekilde görülmektedir. Çarpma noktaları tamamen düzensizleşmiş, faz uzayı grafiği belirgin olmayan bir sürü eğriden oluşmuştur. Bu durum sistemin kaotik davranışının bir göstergesidir.

Çizelge 4.5'te kaotik bölge için elde edilen sonuçlar verilmiştir. Daha fazla N_k için dataları elde ettiğimizde $A = 0,025$ genliğinde ve biraz daha arttırılmış genlik değerlerinde parametrelerin 16 belki 32 veya daha fazla 2^l (l , dallanma sayısı olsun.) değerinde bir kendini tekrarladığını görebiliriz.

Çizelgeler ve grafik sonuçları incelendiğinde başlangıç koşullarını sabit tutulup sadece bir parametrenin değeri çok küçük bir değişime maruz kaldığında sistemin süreçlerine ne kadar büyük etkiler yaptığını görmekteyiz. Daha önce de bahsettiğimiz gibi genlik değeri sabit tutulup diğer sistem parametrelerinden birini değiştirseydik yine benzer sonuçlar elde edecektik. Sistemin kaotik davranışı oluşturması ve kaos bölgesinden sonra geçici olarak kısa süreli düzenli davranışa geçmesi ve hızlı bir şekilde tekrar kaotik davranış sergilemesi gerçekten ilgi çekicidir.

Çizelge 4.5. $A = 0,0250$ değeri için zıplayan top sisteminde topun sınırlayıcıya çarpma süreleri (t_k), her çarpma arası geçen süre (dt_k), masanın faz parametresi (δ_0), çarpma anında konum değeri (y_k), çarpma hızı (v_k), masanın çarpma anındaki hızı (v_{tk}) ve topun çarpma anındaki hızı (v_{bk}) $N_k = 15$ zıplama sayısı için elde edilen değerler

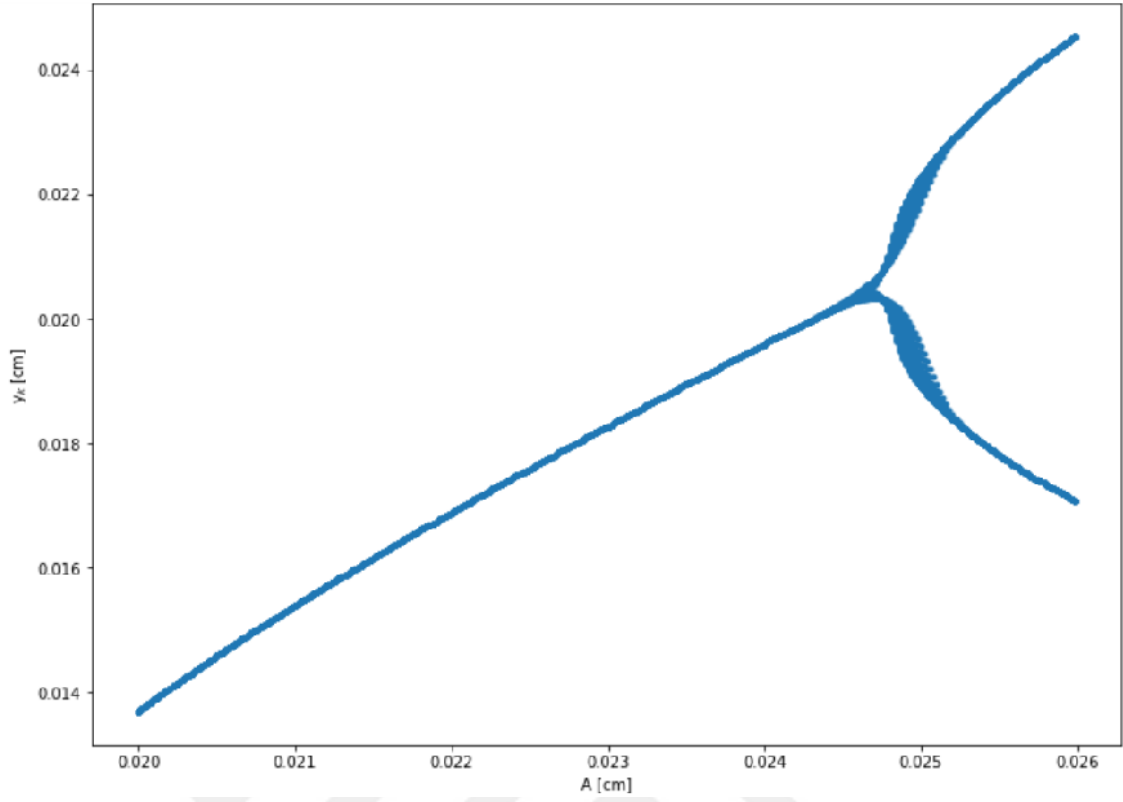
N_k	t_k (s)	dt_k (s)	$\delta_0/2\pi$	y_k (cm)	v_k (cm/s)	v_{tk} (cm/s)	v_{bk} (cm/s)
0	0.0000000000	0.0000000000	0.1200200000	0.0169100000	8.1750000000	3.4347783272	4.7402216728
1	0.0008475902	0.0008475902	0.1708754111	0.0234867904	7.0430930535	2.2474627117	3.6718989859
2	0.0159250589	0.0150774688	0.0755235361	0.0182114873	10.1589901998	4.1917091869	3.8714264195
3	0.0359732767	0.0200482178	0.2784166037	0.0248012853	3.4954197000	-0.8369186339	4.7507976509
4	0.0466333842	0.0106601075	0.9180230510	0.0063424837	9.6307581689	4.1009805865	3.4792872892
5	0.0652853335	0.0186519493	0.0371400102	0.0153905673	11.2072706124	4.5846618378	4.3302778556
6	0.0876050224	0.0223196889	0.3763213425	0.0212651489	0.3008663497	-3.3597114585	5.3404335374
7	0.0944518719	0.0068468496	0.7871323161	0.0003386672	4.8410445121	1.0894965502	3.2067996868
8	0.0976326848	0.0031808128	0.9779810857	0.0107761501	7.8619098132	4.6673623083	0.8608663508
9	0.1138980205	0.0162653357	0.9539012302	0.0089298243	10.8186075099	4.5160931195	4.0444678306
10	0.1344617570	0.0205637365	0.1877254227	0.0240552579	7.3695420196	1.7971849512	4.6737645928
11	0.1499224345	0.0154606775	0.1153660729	0.0207879431	9.1875584109	3.5276378457	3.8961016424
12	0.1682267559	0.0183043213	0.2136253528	0.0246749531	5.9829120551	1.0676584143	4.3814244337
13	0.1818715329	0.0136447770	0.0323119733	0.0150203787	10.6224283880	4.6156045284	3.6990215954
14	0.2025656898	0.0206941569	0.2739613889	0.0248586020	3.7756168042	-0.7067911353	4.8358035071
15	0.2135302072	0.0109645174	0.9318324319	0.0073083305	9.9185233921	4.2867150495	3.4884508179



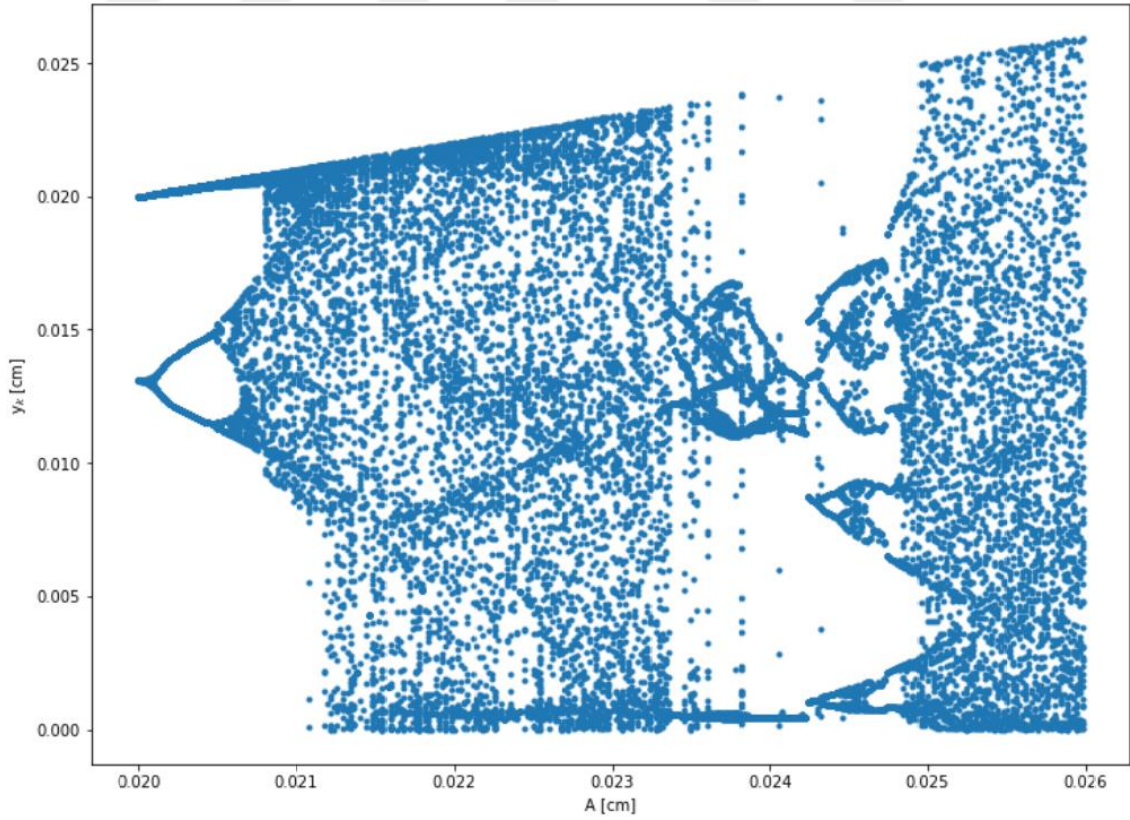
Şekil 4.5. Bifurkasyon diyagramı (y_k çarpma noktalarının A genliğine karşı çizilmiş grafiği)

Şekil 4.5'te genlik değerlerine karşı çizilmiş çarpma noktalarıyla $\alpha = 0,5$ alınarak elde edilen Bifurkasyon grafiğidir. Yaklaşık $A = 0,021$ değerine kadar sistem tek değerde, stabil ve düzenlidir. $A = 0,021$ ve $A = 0,023$ arasında iki değere ayrılarak iki 'sabit nokta' oluşturmaktadır ve parametre değerlerinin iki değer arasında sürekli değiştiği bölgeyle uyumludur. $A = 0,023$ ve $A = 0,0235$ değerleri arasında ise dört değerdedir. Bu değere kadar hareket düzenli yapısını korumaya devam eder. Periyodik davranışı dört değer arasında değiştirerek sürdürür. $A > 0,0235$ olduğunda ise sistem kaotiktir. Daha önceki şekillerde verilen zaman serileri ve faz uzayı grafikleri Bifurkasyon grafiğimizle bire bir örtüşmektedir.

Aynı başlangıç koşullarında sabit tuttuğumuz çarpma parametresinin kaos oluşuma katkısı nedir? Yani çarpışmanın daha elastik veya daha inelastik seçilerek hesaplanması kaos oluşumunu nasıl etkileyeceğini görmek için α değerinin 0,1 eksik ve 0,1 fazla değerleri için Bifurkasyon grafikleri Şekil 4.6 ve Şekil 4.7'de verilmiştir.



şekil 4.6. $\alpha = 0,4$ için Bifurkasyon grafiği



şekil 4.7. $\alpha = 0,6$ için Bifurkasyon grafiği

şekil 4.5 ve şekil 4.6 aynı başlangıç değerleriyle elde edilmiş Bifurkasyon grafikleridir. Aralarındaki tek fark çarpma parametresinin şekil 4.6’da 0,1 kadar daha k alınmış olmasıdır. Bu iki grafiği incelediğimizde çarpma parametresinin yani çarpışmaları inelastik çarpışmaya doğru götürdüğümüzde aynı genlik aralığında kaotik davranışa geçmesi için daha büyük genliklere ihtiyaç duyduğunu görmekteyiz.

Benzer şekilde şekil 4.7’de başlangıç değerleri sabit tutularak çarpma parametresinin değeri 0.1 arttırılmıştır. Yani şekil 4.7’de sistemdeki çarpışma elastikliğe daha yakındır. şekil 4.5 ile kıyaslandığında elastiklik arttıķa aynı genlik aralığında kaotik oluşum daha küçük genliklere kaymıştır.



5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında zıplayan top sisteminin dinamiği incelenerek, 0,021 ve 0,026 genlik değerleri arasındaki farklı genlik değerlerinde sistemin düzenli davranıştan kaotik davranışa geçtiği gözlenmiştir. Periyodik hareket 0,022 civarında ilk dallanmayla sistem iki değer arasında salınmıştır: Davranışı yine de düzenlidir fakat iki farklı yörüngeyle hareketini sürdürür. Genliği biraz daha arttırıp 0,023 değerine çıkardığımızda, sistem ikinci dallanmayı gerçekleştirerek dört değer arasında hareketini sürdürdüğü gözlenmiştir. Sistemde kaotik davranış genlik 0,0235'ten biraz daha fazla olduğunda gerçekleşmiştir. Bifurkasyon diyagramı zaman serisi gibi metotlarla ayrıca hesapladığımız parametre değerlerinin tamamı aynı sonuçları desteklemektedir. Bunun yanı sıra çarpma parametresinin aynı aralıkta sisteme nasıl etki edeceği de incelenmiştir. Çarpma parametresi küçük olduğunda inelastik, büyük olduğunda elastik çarpmayı ifade eder. İnelastik durumlarda sistemin kaotik oluşumu daha büyük genliklerde gerçekleştiği gözlenmiştir. Benzer şekilde elastik çarpışma olduğunda sistem daha küçük genliklerde kaotik durum oluşturmuştur.

Sistemin Cobweb ve Lyapunov üstelleri gibi metotlar eklenerek kaotik davranışı incelenebilir, sınırlayıcı sayısı artırılabilir, hava sürtünmesi gibi farklı etkilere sistem maruz bırakılabilir ve sınırlayıcının titreşim hareketini oluşturan salınım (titreşim) denklemini farklı trigonometrik ifadelerle çalışılabilir. İleriki zamanlarda, topu küçük yüklü iletken bir küre olarak alıp manyetik etkiler katılarak sistem daha farklı hesaplamalarla çalışılması sistemin düzenli ve düzensiz hareketini tanımlamak kaos limitini belirlemek açısından ilgi çekici olacaktır.

7. KAYNAKLAR

- Batistic, B. 2014. Exponential Fermi Acceleration in General Time-Dependent Billiards. *Physical Review E*, 90: 032909.
- Bayraktar, H. K., Mutlu, Ö. ve Koçal, O. H. 2017. Lyapunov Üstelleri ile İris Örüntüsünün Kaotik Yapısının İncelenmesi. *MSU Fen Bilimleri Dergisi*, 5(1): 405-408.
- Chastaing, J. Y., Bertin, E. and Geminard, J. C. 2015. Dynamics of a Bouncing Ball. *American Journal of Physics*, 83(6): 518-524.
- Demeio, L. and Lenci, S. 2018. Dynamic analysis of a bouncing on a flexible beam. *Journal of Sound and Vibration*, 441: 152-164.
- Feigenbaum, M. J. 1978. Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations. *J. Statistical Physics*, 19(1): 25-52.
- Fermi, E. 1949. On the Origin of the Cosmic Radiation. *Physical Review*, 75(8): 1169-1174.
- Gelfreich, V., Rom-Kedar, V., Shah, K. and Turaev, D. 2011. Robust Exponential Acceleration in Time-Dependent Billiards. *Physical Review Letters*, 106: 07410.
- Gelfreich, V., Rom-Kedar, V. and Turaev, D. 2012. Fermi Acceleration and Adiabatic Invariants for Non-Autonomous Billiards. *Chaos*, 22(3): 033116.
- Gençoğlu, M. T. 2018. Katik Fonksiyonlar ile EKG Sinyalleri Kullanarak Kişisel Bilgi Şifrelemenin Matematiksel Kriptanalizi. *Fırat Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 30(2): 13-17.
- Gruiz, M., Meszena, T. and Tel, T. 2017. Chaotic or just complicated? Ball bouncing down the stairs. *European Journal of Physics*, 38(5): 055003.
- Han, H., Jiang, Z., Zhang, R. and Lyu, J. 2013. Subharmonic Bifurcations and Chaotic Dynamics of an Air Damping Completely Inelastic Bouncing Ball. *The European Physical Journal B*, 86: 487.
- Hénon, M. 1976. "A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor. *Communications Mathematical Physics*, 50: 69-77.
- Kobayakawa, K., Honda Y. S. and Samura, T. 2002. Acceleration by Oblique Shocks at Supernova Remnants and Cosmic Ray Spectra Around the Knee Region. *Physica Review D*, 66: 083004.
- Kroetz, T., Livorati, A. L. P., Leonel, E. D. and Caldas, I. L. 2015. Global Ballistic Acceleration in a Bouncing-Ball Model. *Physical Review E*, 92: 012905.
- Lanzano, G. et al. 1999. Fast Electron Production at Intermediate Energies: Evidence for Fermi Shuttle Acceleration and for Deviations from Simple Relativistic Kinematics. *Physical Review Letters*, 83: 4518.
- Lieberman, M. A. and Godyak, V. A. 1998. From Fermi Acceleration to Collisionless Discharge Heating. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 26(3): 955.
- Livorati, A. L. P., Koertz, T., Dettmann, C. P., Caldas, I. L. and Leonel, E. D. 2012. Stickiness in a Bouncer Model: A Slowing Mechanism for Fermi Acceleration.

- Physical Review E*, 86: 036203.
- Livorati, A. L. P., Loskutov, A. and Leonel, E. D. 2012. A Peculiar Maxwell's Demon Observed in a Time-Dependent Stadium-Like Billiard. *Physica A*, 391(20): 4756.
- Lorenz, E., "Predictability", AAAS 139th Meeting, 1972 Archived 2013-06-12 at the Wayback Machine Retrieved May 22, 2015.
- Loskutov, A., Ryabov, A. B. and Akinshin, L. G. 1999. Mechanism of Fermi Acceleration in Dispersing Billiards with Time-Dependent Boundaries. *Journal of Experimental Theoretical Physics*, 89: 966.
- Lok, K. 2016. The Lyapunov Exponent Test and the 0-1 Test for Chaos compared. Bachelor Project, University of Groningen, Groningen, 25 p.
- May, R. M. 1976. Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics. *Nature*, 261(5560): 459–467.
- Milovanov, A. V. and Zeleyni, L. M. 2001. "Strange" Fermi Processes and Power-Law Nonthermal Tails from a Self-Consistent Fractional Kinetic Equation. *Physical Review E*, 64: 052101.
- Okninski, A. and Radziszewski, B. 2009. Dynamics of Impacts with a Table Moving with Piecewise Constant Velocity, *Nonlinear Dynamics*, 58: 515-523.
- Özkaynak, F. 2007. Doğrusal Olmayan Sistemlerde Lyapunov Üstellerini Hesaplayan Yazılımın Gerçekleştirilmesi. Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ, 74 s.
- Rieger, F. M., Bosch-Ramon, V. and Duffy, P. 2007. Fermi Acceleration in Astrophysical Jets. *Astrophysics and Space Science*, 309: 119.
- Ruelle, D. and Takens, F. 1971. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 20(3): 167-192.
- Saif, F., Bialynicki-Birula, I., Fortunato, M. and Schleich, W. P. 1998. Fermi Accelerator in Atom Optics. *Physical Review A*, 58: 4779.
- Shah, K., Turaev, D. and Rom-Kedar, V. 2010. Exponential Energy Growth in a Fermi Accelerator. *Physical Review E*, 81: 056205.
- Steane, A., Szriftgiser, P., Desbiolles, P. and Dalibard, J. 1995. Phase Modulation of Atomic de Broglie Waves. *Physical Review Letters*, 74: 4972.
- Strogatz, S. H. 2018. Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. CRC Press, Taylor&Francis Group, Boca Raton.
- Tatlıpınar, H. 2020. Doğrusal Olmayan Dinamik Sistemlerin İncelenmesi ve Kompleksite Bilimi. *Yıldız Social Science Review*, 6(2): 81-97.
- Tufillaro, N. B., Abbott, T. and Reilly, J. P. 1990. An Experimental Approach to Non-Linear Dynamics and Chaos. Addison-Wesley, Redwood City, 338 p.
- Veltri, A. and Carbone, V. 2004. Radiative Intermittent Events During Fermi's Stochastic Acceleration. *Physical Review Letters*, 92: 143901.
- Ward, Will. O. C. 2013. Chaotic Bouncing. Bachelor Project, University of Nottingham,

Nottingham, 36.

Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map [Son erişim tarihi: 27.05.2022].

Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. and Vastano, J. A. 1985. Determining Lyapunov exponent from a time series. *Physica D*, 16(3): 285-317.

Wolfram, <https://mathworld.wolfram.com/HenonMap> [Son erişim tarihi: 04.07.2022].



8. EKLER

Kod Listesi:

```

from numpy import linspace, where, delete, sign, asarray
from numpy import sqrt, fmod, sin, cos, arcsin, arccos
from scipy.optimize import newton, brentq

def impact_maxtime(v0, y0):
    """
    :v0: initial velocity
    :y0: initial vertical position
    :return:
        time when impact occurs at y = 0
    """
    vg = v0/g
    return vg + sqrt(vg*vg + 2*y0/g)

def reduced_phase(i, w, tp0, tk):
    return fmod(w * (sum(tk[:i + 1]) + tp0), 2 * pi) / 2 / pi

def yt(t, A, w, tp0):
    """
    :t: time
    :A: maximum height of the table
    :tp0: w*tp0 = initial phase
    :return:
        vertical position of the table
    """
    return A*(sin(w*(t + tp0)) + 1)/2

def vt(t, A, w, tp0):
    """
    :t: time
    :A: maximum height of the table
    :tp0: w*tp0 = initial phase
    :return:
        vertical velocity of the table
    """
    return w*A*cos(w*(t + tp0))/2

def at(t, A, w, tp0):
    """
    :t: time
    :A: maximum height of the table
    :tp0: w*tp0 = initial phase
    :return:
        vertical velocity of the table
    """
    return -w*w*A*sin(w*(t + tp0))/2

def yb(t, t0, v0, y0):
    """
    :t: time
    :t0: initial time
    :v0: initial velocity
    :y0: initial vertical position
    :t0: initial (or impact) times for every new jump
    :return:
        vertical position of the ball
    """
    dt = (t-t0)
    return y0 + v0*dt - g*dt*dt/2

def vb(t, t0, v0):
    """
    :t: time
    :v0: initial velocity
    :return:
        velocity of the ball
    """
    return v0 - g*(t-t0)

def impact_equation(t, t_total, v0, y0, A, w, tp0):
    """
    :t: time
    :t_total: time passed from the beginning
    :v0: initial velocity of the ball
    :y0: initial position of the ball
    :A: maximum height of the table's position
    :w: angular frequency of the table's vibration
    :tp0: w*tp0 = initial phase of the table's vibration
    :yb(t, t0, v0, y0): ball's position
    """

```

```

:yt(t, A, w, tp0): table's position
:return:
    impact equation of the ball and the table
"""
return yb(t, 0, v0, y0) - yt(t + t_total, A, w, tp0)

def impact_time(t_total, tmax, v0, y0, A, w, tp0):
    """
    :t: time
    :t_max: guessed time impact may occur before this time
    :v0: initial velocity of the ball
    :y0: initial position of the ball
    :A: maximum height of the table's position
    :w: angular frequency of the table's vibration
    :tp0: w*tp0 = initial phase of the table's vibration
    :return:
        impact time using secant (newton-raphson) method from scipy
    """
    return newton(impact_equation, tmax, args=(t_total, v0, y0, A, w, tp0))

def ball_jumps(jump_num, alpha, t0, v0, y0, A, w, tp0, nt_search=10000):
    T = 2 * pi / w
    tk = [t0] # s
    vk = [v0] # cm/s
    yk = [y0] # cm
    ytk = [yt(t0, A, w, tp0)]
    vtk = [vt(t0, A, w, tp0)]
    atk = [at(t0, A, w, tp0)]
    vbk = [vk[0] - vtk[0]]
    stick_check = [] # mark 0 if the ball did not stick, mark 1 if the ball stuck.

    i = 0
    while i <= jump_num:
        i += 1

        t_total = sum(tk)
        tk_flight = impact_maxtime(vk[-1], yk[-1])
        t_search = linspace(0, tk_flight, nt_search)

        vector_impact_equation = impact_equation(t_search, t_total, vk[-1], yk[-1], A, w, tp0)
        turning_points = where(vector_impact_equation[:-1] * vector_impact_equation[1:] < 0)[0]
        if len(turning_points) > 1:
            if turning_points[0] == 0 and vector_impact_equation[turning_points[1] - 1] > 0:
                turning_points = delete(turning_points, where(turning_points == 0))

        tk_max = t_search[turning_points[0]]

        # the impact time
        tk += [impact_time(t_total, tk_max, vk[-1], yk[-1], A, w, tp0)]
        t_total += tk[-1]

        # physical quantities at the impact time
        # yk: ball position
        # vbk: ball velocity at the table frame
        # vk: ball velocity at the lab frame
        # ytk: table position
        # vtk: table velocity at the lab frame
        # atk: table acceleration

        yk += [yb(tk[-1], 0, vk[-1], yk[-1])]
        vbk += [-alpha * vb(tk[-1], 0, vk[-1])]

        if vbk[-1] < 0: vbk[-1] = -vbk[-1]

        ytk += [yt(t_total, A, w, tp0)]
        vtk += [vt(t_total, A, w, tp0)]
        atk += [at(t_total, A, w, tp0)]

        vk += [(1 + alpha) * vtk[-1] + vbk[-1]]

        stick_check += [0]

        # the best solution for now for the sticking case
        # if atk / -g < 1 --> atk = -|atk| --> |atk| / g < 1
        # F.N > 0: The ball sticks the table
        # if atk[-1] / -g < 1 and (abs(vbk[-2] - vbk[-1]) < 1e-6):
        if atk[-1] / -g < 1 and abs(vbk[-1]) < 1e-6 and alpha == 0:
            t_try = (round(t_total / T) * T + t_total) / 2
            t_stick = newton(lambda t, A, w, tp0: at(t, A, w, tp0) + g, t_try, args=(A, w, tp0))

            tk += [t_stick - t_total]
            yk += [yt(t_stick, A, w, tp0)]
            vbk += [0]

```

```

        ytk += [yt(t_stick, A, w, tp0)]
        vtk += [vt(t_stick, A, w, tp0)]
        atk += [at(t_stick, A, w, tp0)]

        vk += [(1 + alpha) * vtk[-1] + vbk[-1]]
        stick_check += [1]
        i += 1
    return tk, yk, vk, vbk, ytk, vtk, atk, stick_check

def ball_trajectory(jump_num, tk, yk, vk, ytk, vtk, atk, A, w, tp0, stick_check):
    tbl, vbl, ybl = [], [], []

    for i in range(1, jump_num+2):
        t_ball_t0 = linspace(0, tk[i])
        t_ball_tn = t_ball_t0 + sum(tk[:i])
        tbl += list(t_ball_tn)

        if stick_check[i-1]==0:
            ybl += list(yb(t_ball_t0, 0, vk[i - 1], yk[i - 1]))
            vbl += list(vb(t_ball_t0, 0, vk[i - 1]))
        else:
            ybl += list(yt(t_ball_tn, A, w, tp0))
            vbl += list(vt(t_ball_tn, A, w, tp0))
    return tbl, ybl, vbl

from matplotlib import pyplot as plt
from numpy import asarray, pi

def print_ball_impacts(jump_num, tk, w, tp0, yk, vk, vtk, vbk):
    print("{:8s}"*7 * "{:24s}").format("jump_num", "t_im [s]", "dt_im [s]", "phase/2pi",
                                       "yk [cm]", "vk [cm/s]", "vtk [cm/s]", "vbk [cm/s]")

    for i in range(jump_num + 1):
        print("{:8d}" * 7 * "{:24.18f}").format(i, sum(tk[:i + 1]), tk[i], reduced_phase(i, w, tp0, tk),
                                                yk[i], vk[i], vtk[i], vbk[i]))

def print_ball_impacts(jump_num, tk, w, tp0, yk, vk, vtk, vbk):
    print("{:5s}"*7 * "{:15s}").format("jump_num", "t_im [s]", "dt_im [s]", "phase/2pi",
                                       "yk [cm]", "vk [cm/s]", "vtk [cm/s]", "vbk [cm/s]")

    for i in range(jump_num + 1):
        print("{:5d}" * 7 * "{:15.10f}").format(i, sum(tk[:i + 1]), tk[i], reduced_phase(i, w, tp0, tk),
                                                yk[i], vk[i], vtk[i], vbk[i]))

def draw_maps(tk, yk, vk, tbl, ybl, vbl, ttl, A, w, tp0, figsize=(12, 9)):
    plt.figure(figsize=figsize)
    ax = [plt.subplot(2, 2, 1),
          plt.subplot(2, 2, 2),
          plt.subplot(2, 2, 3),
          plt.subplot(2, 2, 4)]

    ax[0].plot([sum(tk[:k]) for k in range(1, len(tk))], [yt(sum(tk[:k]), A, w, tp0) for k in range(1, len(tk))], "ro")
    ax[0].plot(asarray(tbl), ybl, label="ball")
    ax[0].plot(ttl, yt(ttl, A, w, tp0), label="table", linestyle='dashed')
    ax[0].axhline(ybl[0], color="gray", linestyle='dashed', linewidth=1, zorder=-999)
    ax[0].axhline(A/2, color="black", linewidth=.5, zorder=-999)

    dph = 1 / 2 - 1.318116071652818 / pi

    ax[1].plot(tbl, asarray(vbl)/A/2, label='v_b')
    ax[1].plot(ttl, vt(ttl, A, w, tp0)/A/2, label='v_t')
    ax[1].axhline(y=+1,color='gray', label='+1', linestyle='dashed')
    ax[1].axhline(y=-1,color='gray', label='-1', linestyle='dashed')
    ax[1].plot(ttl, (at(ttl, A, w, tp0))/-g, label=r'$\frac{a_t}{-g}$', color='red')

    for xxx in [sum(tk[:k]) for k in range(len(tk))]:
        ax[1].axvline(xxx, color="gray", linestyle='dashed', linewidth=.5, zorder=-999)

    ax[1].axhline(color='gray')
    ax[2].plot([sum(tk[:k]) for k in range(len(tk))], yk)
    ax[2].plot([sum(tk[:k]) for k in range(len(tk))], yk, "r.")
    ax[3].plot(vbl, ybl)
    ax[3].plot(vk, yk, "r.")
    ax[0].set_xlabel('t[s]')
    ax[0].set_ylabel('y[cm]')
    ax[1].set_xlabel('t[s]')
    ax[1].set_ylabel('v[cm/s]')
    ax[2].set_xlabel('t_k[s]')
    ax[2].set_ylabel('y_k[cm]')
    ax[3].set_xlabel('v[cm/s]')
    ax[3].set_ylabel('y[cm]')
    plt.suptitle('newton-raphson')
    ax[0].legend(loc='best')
    ax[1].legend(loc='best', fontsize=12)
    plt.show()

```

ÖZGEÇMİŞ

BURCU EMRE

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2018-2022	Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Bölümü, Antalya
Lisans	Gazi Üniversitesi
2004-2010	Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, Antalya